وزارة التربية والتعليم

امتحان تجريبي لشهادة الدراسة الثانوية العامة لعام 2023/2022

مديرية التربية و التعليم للواء الكوره

مدرسة جديتا الثانوية للبنين

المبحث : الرياضيات /الورقة الأولى — **مدة الامتحان: $\frac{\text{د}}{00}:\frac{\text{س}}{2}$**

الفرع : العلمي — **اليوم و التاريخ : السبت 2022/12/17**

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة : (40 علامة)

1: إذا كان $f(x)=\log_3\left(\frac{3x^2+2}{xe^{3x}}\right)$ فإن $f`(x)$ تساوي

a) $\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{6x}{3x^2+2}-\frac{1}{x}\right)-3$

b) $\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{6x}{3x^2+2}-\frac{1}{x}-3\right)$

c) $\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{6x}{3x^2+2}-\frac{1}{x}-3\right)$

d) $\left(\frac{6x}{3x^2+2}-\frac{1}{x}-3\log_3 e\right)$

2: معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)=\frac{6e}{\ln(x)}$ عند $x=e$ هي :

a) $y=6e-6x$ b) $y=12e-6x$ c) $y=\frac{x+35e}{6}$ d) $y=12e+6x$

3: إذا كان $f(x)=\frac{\sin x}{(1+x)e^x}$ فإن $f`(0)$ تساوي :

a) -1 b) 2 c) -2 d) 1

4: إذا كان $f(x)=(k^2+1)x^3$ فإن $f^{(3)}(-2)=60$ فإن الثابت k يساوي :

a) 3 b) $-3,3$ c) $-4,4$ d) $-5,5$

5: إذا كان ميل المماس لمنحنى $f(x)=\ln(ax+b)$ عندالنقطة $(0,1)$ يساوي 4 فإن قيمة الثابتين b,a هما :

a) $a = 1, b = 4$ b) $a = 4e, b = e$ c) $a = 1, b = 4e$ d) $a = \frac{1}{e}, b = 4e$

6: قيمة الثابت a التي تجعل للاقتران $f(x) = \frac{e^{ax}}{a} - \frac{x}{e^3}$ مماسا أفقيا عند $x = 1$ يساوي :

a) 3 b) 1 c) -3 d) -1

---

7 : إذا كان $f(x) = \frac{x}{\sec x}$ فإن $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ تساوي :

a) $x \cos x - \sin x$ b) $x \cos x + \sin x$ c) $x \sin x + \cos x$ d) $-x \sin x + \cos x$

8: إذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تساوي :

a) $\frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$ b) $\frac{2xy^2 + x^4}{y^3}$ c) $\frac{2xy^2 - x^3}{y^3}$ d) $\frac{2xy^2 - x^4}{y^2}$

9: عند اشتقاق العلاقة $y = \frac{\sqrt{(3x^2+8)^3}}{(5-x)^5}, x < -5$ بالطريقة اللوغاريتمية فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

a) $\left(\frac{\sqrt{(3x^2+8)^3}}{(5-x)^5}\right)\left(\frac{9x}{3x^2+8} - \frac{5}{5-x}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{(3x^2+8)^3}}{(5-x)^5}\right)\left(\frac{9x}{3x^2+8} + \frac{5}{5-x}\right)$

c) $\left(\frac{\sqrt{(3x^2+8)^3}}{(5-x)^5}\right)\left(\frac{9x}{3x^2+8} + \frac{1}{5-x}\right)$ d) $\left(\frac{\sqrt{(3x^2+8)^3}}{(5-x)^5}\right)\left(\frac{9x}{3x^2+8} - \frac{1}{5-x}\right)$

10: يمثل الاقتران $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حددته إحدى الشركات ، حيث x عدد البدلات المبيعة و يمثل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة ،

اقتران الربح $P(x)$ الناتج عن بيع x من البدلات هو :

a) $P(x) = 150x - 4000 - 0.25x^2$ b) $P(x) = 150x - 4000 - 0.75x^2$

c) $P(x) = 150x - 4000 + 0.25x^2$ d) $P(x) = 150x - 0.5x^2$

11: إذا كانت الزاوية θ المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما $8cm$ في مثلث متطابق الضلعين ، تزداد بمعدل $\frac{1}{2}rad/sec$، فإن معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علما أن طول الضلعين المتطابقين ثابت يساوي :

a) $-8\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{3}$ c) 8 d) -8

12: يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ ، إذا كان معدل التغير في الإحداثي x هو $2cm/s$ ، معدل التغير في الإحداثي y عندما $x = 3$ بوحدة cm/s يساوي:

a) -1.2 b) 1.2 c) 12 d) -12

13: مكعب طول ضلعه $10cm$ ، بدأ المكعب يتمدد فيزداد طول ضلعه بمعدل $2cm/s$، بحيث يبقى محافظا على شكله ، معدل حجم المكعب بعد $5s$ من بدء تمدده يساوي :

a) 6000 b) 300 c) 2400 d) 120

14: الفترة التي يكون فيها الاقتران $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ مقعرا لأعلى :

a) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ b) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ c) $(-1,1)$ d) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

15: يكون الاقتران $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ متزايدا في الفترة :

a) $(-2,0), (2, \infty)$ b) $(-\infty, -2), (0,2)$ c) $(-\infty, -2), (2, \infty)$ d) $(-2,2)$

16: نقطة الانعطاف للاقتران $f(x) = \ln(x^2 + 5)$:

a) $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$ b) $(\sqrt{5}, 0)$

c) $(\sqrt{5}, \ln 10), (-\sqrt{5}, \ln 10)$ d) $(\sqrt{5}, 1), (-\sqrt{5}, 1)$

17: المقدار $12(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \div 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ يساوي :

a) $3 - 3\sqrt{3}\, i$ b) $3 + 3\sqrt{3}\, i$ c) $3\sqrt{3} + 3i$ d) $3\sqrt{3} - 3i$

18: مرافق العدد المركب : $(4 + 5i)(2 - i)$ يساوي:

a) $(13 - 6i)$ b) $(13 + 6i)$ c) $(6 - 13i)$ d) $(6 + 13i)$

19: سعة العدد المركب $(i^{335} - 1)$ تساوي:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{-3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{-\pi}{4}$

---

20 : عند كتابة العدد المركب (z) بالصورة القياسية حيث $|z| = 4\sqrt{2}, Arg(\bar{z}) = -\frac{3\pi}{4}$ فإن (z) يساوي :

a) $4 - 4i$ b) $-4 - 4i$ c) $4 + 4i$ d) $-4 + 4i$

السؤال الثاني : (12 علامة)

أ: إذا كان $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$ أثبت أن $f`(x) = \frac{2}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$

الحل:

$$f`(x) = \frac{(\sqrt{4x^2+1})(2) - (2x) \times \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} = \frac{2\sqrt{4x^2+1} - \frac{8x^2}{\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1}$$

$$= \frac{\frac{2(4x^2+1) - 8x^2}{\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1} = \frac{8x^2 + 2 - 8x^2}{(\sqrt{4x^2+1})(4x^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$$

ب: إذا كان $x = 3\cos t, y = 2\sin 2t$ أثبت أن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}(\csc t - 2\sin t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t} = -\frac{4}{3}\left(\frac{\cos 2t}{\sin t}\right) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1-2\sin^2 t}{\sin t}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{2\sin^2 t}{\sin t}\right) = -\frac{4}{3}(\csc t - 2\sin t)$$

ج: أجـد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المسـتقيم: $y + 3x - 5 = 0$.

الحل:

$$3y^2y` = 2x \Rightarrow y` = \frac{2x}{3y^2} = \text{ميل المماس} , (y \neq 0)$$

$$y + 3x - 5 = 0 \Rightarrow y` + 3 = 0 \Rightarrow y` = -3 = \text{ميل المستقيم}$$

لكن ميل المماس × ميل المستقيم يساوي (1-) و منه :

$$\frac{2x}{3y^2} \times -3 = -1 \Rightarrow \frac{2x}{y^2} = 1 \Rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow x = \left(\frac{y^2}{2}\right)$$

لكن: $y^3 = x^2$ و منه :

$$y^3 = x^2 \Rightarrow y^3 = \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 \Rightarrow y^3 = \frac{y^4}{4} \Rightarrow 4y^3 = y^4 \Rightarrow 4y^3 - y^4 = 0$$

$\Rightarrow y^3(4-y) = 0 \Rightarrow y = 0$ تهمل $,4$

$$y = 4 \Rightarrow x = \frac{16}{2} = 8$$

النقاط : (8,4)

السؤال الثالث : **(8 علامات)**

1) يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

أ) أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه. ب) أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

الحل: الفرع (أ) سرعة الجسم المتجهة و تسارعه

$$s(t)=t^{1/t}\Rightarrow \ln s(t)=\ln t^{1/t}\Rightarrow \ln s(t)=\frac{\ln t}{t}\Rightarrow \frac{v(t)}{s(t)}=\frac{t\times\frac{1}{t}-\ln t}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{t^{1/t}}=\frac{1-\ln t}{t^2}\Rightarrow v(t)=t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)$$ اقتران السرعة

$$v(t)=t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\Rightarrow \ln v(t)=\ln\left(t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \ln v(t)=\ln\left(t^{1/t}\right)+\ln\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)=\frac{\ln t}{t}+\ln(1-\ln t)-2\ln t$$

بالاشتقاق $$\Rightarrow \frac{a(t)}{v(t)}=\frac{t\times\frac{1}{t}-\ln t}{t^2}+\frac{-\frac{1}{t}}{1-\ln t}-\frac{2}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}-\frac{1}{t(1-\ln t)}-\frac{2}{t}$$

$$\Rightarrow a(t)=v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}-\frac{1}{t(1-\ln t)}-\frac{2}{t}\right)$$

$$\Rightarrow a(t)=\left(t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}-\frac{1}{t(1-\ln t)}-\frac{2}{t}\right)$$

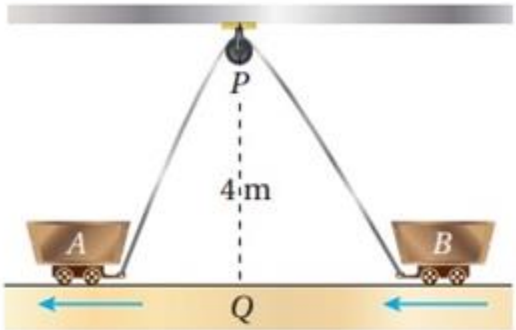
$$\Rightarrow a(t)=\left(t^{1/t}\right)\left(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4}-\frac{1}{t^3}-\frac{2(1-\ln t)}{t^3}\right)$$

الفرع ب : تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة صفرا

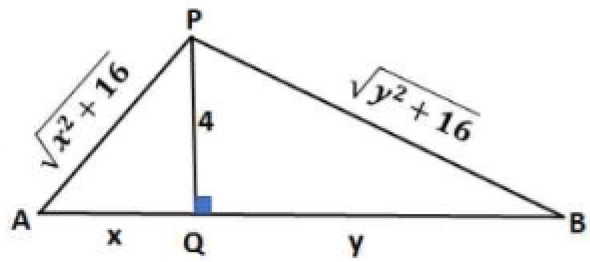
$v(t)=t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)=0\Rightarrow t=0$ تهمل , أو $1-\ln t=0\Rightarrow \ln t=1\Rightarrow t=e$

$$a(e)=\left(e^{1/e}\right)\left(\frac{(1-1)^2}{e^4}-\frac{1}{e^3}-\frac{2(1-1)}{e^3}\right)=\left(e^{1/e}\right)\left(-\frac{1}{e^3}\right)=-\frac{e^{1/e}}{e^3}=-e^{\frac{1}{e}-3}$$

2) تبرير: رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله $12\ m$، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة $4\ m$، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة $0.5\ m/s$، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد $3\ m$ من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.



الحل:



$\frac{dx}{dt} = 0.5,$ المطلوب $\frac{dy}{dt}$ (عند $x = 3$)

طول الحبل: $AP + PB = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$

عند $x = 3$:

$$5 + \sqrt{y^2+16} = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \Rightarrow y^2 + 16 = 49 \Rightarrow y^2 = 33 \Rightarrow y = \sqrt{33}$$

$$\frac{2x \times \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+16}} + \frac{2y \times \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2+16}} = 0 \Rightarrow \frac{x \times \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y \times \frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3 \times 0.5}{5} + \frac{\sqrt{33} \times \frac{dy}{dt}}{7} = 0 \Rightarrow \frac{3}{10} + \frac{\sqrt{33} \times \frac{dy}{dt}}{7} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{33} \times \frac{dy}{dt}}{7} = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{10} \times \frac{7}{\sqrt{33}} = -\frac{21}{10\sqrt{33}}$$

السؤال الرابع : **(12 علامة)**

1) أثبت أن المقدار $\frac{1}{a+ib}$ يساوي $\frac{a-ib}{|z|^2}$ حيث : $z = a + ib$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{|z|^2}$$

---

2) إذا كان $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة : $x^2 + ax + b = 0$ جد قيمة كم من a, b

الحل:

بما أن $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة فإن $2 + i$ هو أحد جذور المعادلة ايضا

$$x = 2 \pm i \Rightarrow x - 2 = \pm i \Rightarrow (x-2)^2 = (\pm i)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -1$$

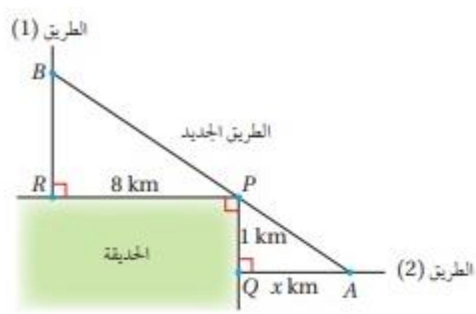
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة المعطاة ينتج :

$$a = -4, b = 5$$

---

3) يُبيِّن الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن.



ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP,PRB متشابهان،

ينتج عن ذلك: $\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \to BR = \frac{8}{x}$

$$L = AP + PB = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64 + \left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

31

$$= \sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right) \quad ,x > 0$$

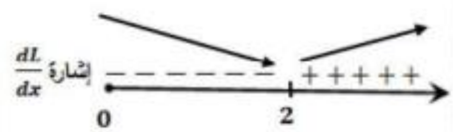
$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \to \frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\to 8(1+x^2) = 8x^2 + x^3$$

$$\to x^3 = 8 \to x = 2$$



إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x = 2$ km

السؤال الخامس : **(8 علامات)**

أ: أثبت أن المعادلة $|z-6| = 2|z+6-9i|$ تمثل دائرة ثم جد مركزها و نصف قطرها .

الحل:

$$\to \sqrt{(x-6)^2 + (y)^2} = 2\sqrt{(x+6)^2 + (y-9)^2}$$

$$\to (x-6)^2 + (y)^2 = 4((x+6)^2 + (y-9)^2)$$

$$\to x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4(x^2 + 12x + 36 + y^2 - 18y + 81)$$

$$\rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = (4x^2 + 48x + 144 + 4y^2 - 72y + 324)$$

$$\rightarrow 4x^2 + 48x + 144 + 4y^2 - 72y + 324 - x^2 + 12x - 36 - y^2 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 60x - 72y + 432 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 20x - 24y + 144 = 0$$

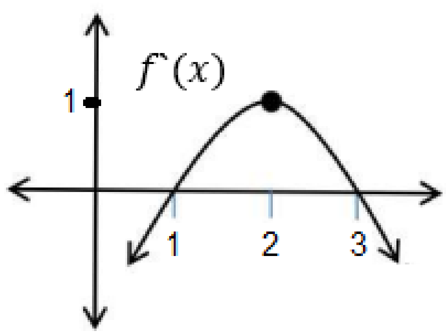
$$\rightarrow x^2 + 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2 + y^2 - 24y + \left(\frac{24}{2}\right)^2 + 144 = \left(\frac{20}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow (x+10)^2 + (y-12)^2 = 100 + 144 - 144$$

$$\rightarrow (x+10)^2 + (y-12)^2 = 144$$

و هي تمثل معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ و نصف قطرها 12

ب) من خلال الرسم المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f`(x)$:



1) جد قيم x الحرجة للاقتران $f(x)$

2) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران $f(x)$ و حدد القيم القصوى المحلية و بين نوعها

3) جد فترات التقعر للأعلى و الأسفل للاقتران $f(x)$ و حدد نقطة الانعطاف (إن وجدت)

الحل:

1) قيم x الحرجة للاقتران $f(x)$ هي : 1,3

2) $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, 1), (3, \infty)$

$f(x)$ متزايد في الفترة $(1,3)$

يوجد للاقتران $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ تساوي $f(1)$

يوجد للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ تساوي $f(3)$

3) $f(x)$ مقعر لأعلى في الفترة $(-\infty, 2)$

$f(x)$ مقعر لأسفل في الفترة $(2, \infty)$

كما يوجد للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x = 2$ هي: $(2, f(2))$

معلما المادة

MOHAMMAD ZAKI AL-DOW

0776441888

الأستاذ محمد يوسف بني مفرج

الأستاذ محمد زكي الضو