المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الأول

١٠

الصف العاشر

الرياضيات

الجزء الأول

الصف العاشر

١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

ISBN: 978-9957-84-713-5

مطبعة النور

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الأول

الصف العاشر

١٠

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:
هاتف : ٨ - ٥ / ٤٦١٧٣٠٤ فاكس : ٤٦٣٧٥٦٩ ص. ب: ١٩٣٠ الرمز البريدي : ١١١١٨
أو بوساطة البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قـررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٥٩ / ٢٠١٦) تـاريخ ٦/٣/٢٠١٦م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦م / ٢٠١٧م.

عمّان – الأردنّ / ص. ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(٢٠١٦/٣/١٢٣٢)

ISBN: 978 - 9957 - 84 - 713- 5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ. د. عبد الله محمد ربابعة
أ. د. ربى محمد مقدادي
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

إسماعيل علي صالح
د. حسين عسكر الشرفات
د. فدوى خليل القطاطشة
رناد حسن بغدادي

التحرير العلمي: جهاد حسين أبو الركب، نفين أحمد جوهر

التصميم: عمر أحمد أبو عليان
الرسم: فايزة فايز حداد
التحرير اللغوي: ماجدة سلمان كنانة
المصور: أديب عطوان
التحرير الفني: نرمين داود العزة
الإنتاج: د. عبدالرحمن سليمان أبو صعيليك

دقق الطباعة وراجعها: نفين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٧هـ/٢٠١٦م

أعيدت طباعته ٢٠١٧ – ٢٠١٩م

قائمةُ المحتوياتِ

الموضوعُ	الصفحةُ

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

نضعُ بينَ أيديكُم كتابَ الرياضياتِ للصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، وقد عُرِضَ المحتوى الدراسيُّ بطريقةٍ استقصائيةٍ، تجعلُ منَ الطلبةِ متعلمينَ نشطينَ، وتنمّي مهاراتِ التفكيرِ العليا، من استنتاجٍ واستقصاءٍ وحلِّ المشكلاتِ، كذلكَ التفكيرُ الناقدُ، والتواصلُ معَ الزملاءِ. وقد راعتِ المادةُ العلميةُ في الكتابِ مستوياتِ النموِّ لدى الطلبةِ، والفروقَ الفرديةَ بينهم.

يتكونُ محتوى الكتابِ من ثماني وحداتٍ، قُسِّمتْ كلُّ وحدةٍ إلى فصولٍ، خُصِّصت الوحداتُ الأربعُ الأولى منَ الكتابِ لتُعطى في الفصلِ الدراسيّ الأوّلِ وهي: كثيراتُ الحدودِ والمتبايناتُ الخطيّةُ، والدائرةُ، وأنظمةُ المعادلاتِ، والمصفوفاتُ. والوحداتُ الأربعُ التاليةُ لتُعطى في الفصلِ الدراسيّ الثاني وهي: النسبُ المثلثيةُ وحلُّ المثلثاتِ، والهندسةُ التحليليّةُ والفضائيةُ، والإحصاءُ والاحتمالاتُ، والرياضياتُ الماليّةُ.

ولعلَّ أبرزَ ما يميزُ هذهِ الموضوعات هوَ تعاملُ الطالبِ معَ البراهينِ الرياضيةِ وتعرّفُهُ على خطواتِ البرهانِ الرياضيِّ، كذلكَ موضوعُ الهندسةِ الفضائيةِ الذي يقدّمُ للطالبِ المسمَّياتِ الهندسيةَ، وبعضَ مسلماتِ الهندسةِ المتعلقةِ بالخطوطِ المستقيمةِ، والمستوياتِ، وأوضاعِها في الفضاءِ ممّا ينمي مهارةَ التخيّلِ لدى الطالبِ، وإحساسَهُ بالبعدِ الثالثِ، والذي يُعدُّ ضروريًّا لموضوعاتِ الصفوف اللاحقة.

ونرجو أنْ نكونَ قد وُفِّقنا في عرضِ مادةِ هذا الكتاب، حتّى يكونَ فيهِ منفعةٌ وفائدةٌ لكم. مؤكدينَ احترامنا وتقديرَنا لكلِّ نقدٍ أو اقتراحٍ بنّاءٍ يهدفُ إلى إغناءِ مادةِ الكتابِ، ويسعى إلى تطويرِها.

واللهُ تعالى وليُّ التوفيقِ

الوحدةُ الأولى

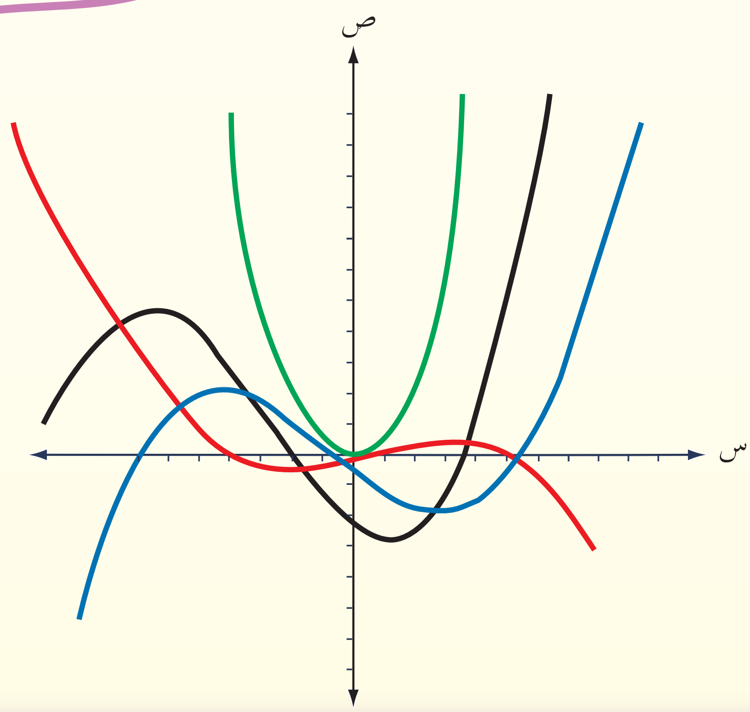
١

كثيراتُ الحدودِ والمتبايناتُ الخطّيّةُ

كثيرًا ما تصادفُكَ في حياتِكَ بعضُ المقاديرِ الجبريةِ، وفي هذهِ الوحدةِ سوفَ تتعرفُ اقترانات كثيراتِ الحدودِ، التي لها أهميةٌ كبرى نظرًا لتطبيقاتِها الواسعةِ، وارتباطِها الوثيقِ بفروعِ الرياضياتِ المختلفةِ، وبالعلومِ الأخرى: كالفيزياءِ، والكيمياءِ، والطبِّ، والهندسةِ، والاقتصادِ، والإدارةِ، والتربيةِ، وغيرِها.

وستتعرفُ المتبايناتِ الخطيةَ بمتغيريْنِ، معَ توظيفِ التكنولوجيا لحلِّ نظامٍ منَ المتبايناتِ الخطيّةِ بمتغيريْنِ.

Polynomials and Linear Inequalities



يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدة، أن يكونَ قادرًا على:

- فهمِ كثيراتِ الحدودِ، وإجراءِ العملياتِ الحسابيةِ الأربعةِ عليها.
- استخدامِ التكنولوجيا في تمثيلِ كثيراتِ الحدودِ، وتقصّي خصائصِها.
- التمثيلِ البيانيِّ لمتباينات خطيةٍ بمتغيريْنِ.
- حلِّ نظامٍ منَ المتبايناتِ الخطيةِ بمتغيريْنِ؛ باستخدامِ التكنولوجيا.

الفصلُ الأولُ

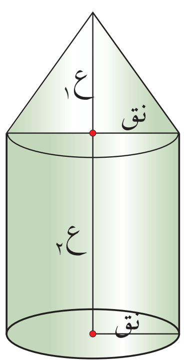
كثيراتُ الحدودِ والعملياتُ عليها

Polynomial Operations

النتاجاتُ

- تتعرفُ كثيراتِ الحدودِ.
- تستخدمُ التكنولوجيا لتمثيلِ كثيراتِ الحدودِ بيانيًا، وتستقصي خصائصَها.
- تجمعُ كثيراتِ الحدودِ وتطرحُها.
- تضربُ كثيراتِ الحدودِ وتقسمُها.
- تحلُّ مسائلَ تتضمنُ كثيراتِ حدودٍ والعملياتِ عليها.

أوّلًا كثيراتُ الحدودِ Polynomials



الشكلُ (١-١)

يُصمّمُ حدادٌ خزانَ مياهٍ على شكلِ أسطوانةٍ يعلوها مخروطٌ، كما في الشكلِ (١-١)، إذا علمتَ أنَّ حجمَ المخروطِ يساوي $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢}ع، وحجمَ الأسطوانةِ يساوي π نق^{٢} ع . اكتبْ اقترانًا يمثلُ حجمَ الخزانِ.

تعلمتَ سابقًا أنَّ الحدَّ الجبريَّ يتكونُ من ثابتٍ أو ناتجِ ضربِ عددٍ ثابتٍ بمتغيّرٍ أو أكثرَ، بشرطِ أنْ يكونَ أسُّ المتغيّرِ عددًا صحيحًا غيرَ سالبٍ.

وستتعرفُ في هذا الدرسِ كثيراتِ الحدودِ.

تعريفٌ

إذا كانَ ق : ح $\longleftarrow$ ح

وكانَ ق(س) = $أ_{ن}$ س^{ن} + $أ_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + $أ_{١}$ س^{١} + $أ_{٠}$.

حيثُ ن عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، $أ_{ن}$، $أ_{ن-١}$، ....، $أ_{١}$، $أ_{٠}$ أعدادٌ حقيقةٌ ، $أ_{ن} \neq$ صفرًا ، فإنَّ الاقترانَ ق يسمَّى كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ ن.

مثالُ (١-١)

تأمّلْ كلًا منَ الاقترانات الآتيةِ:

ق(س) = ٣ ، هـ(س) = ٢س + ٦ ، ك(س) = $س^{\frac{1}{2}}$ + ٩

ف(س) = $س^{-٢}$ + ٥س − ٤ ، ل(س) = $س^{٢}$ + ٢س + ١ ، ع(س) = $س^{٣}$ + ١

و(س) = $\frac{١}{س}$ + ١ ، د(س) = $٣^{س-١}$

فأيٌّ منَ الاقترانات ق، هـ، ك، ف، ل، ع، و، د كثيرُ حدودٍ في المتغيرِ س؟ وإنْ كانَ كذلكَ فما درجتُهُ؟

الحلُّ

إنّ الاقترانَ ق كثيرُ حدودٍ منَ الدرجةِ صفرٍ، والاقترانُ هـ كثيرُ حدودٍ منَ الدرجةِ الأولى (اقترانٌ خطيٌّ)، والاقترانُ ل كثيرُ حدودٍ من الدرجةِ الثانيةِ (اقترانٌ تربيعيٌّ)، والاقترانُ ع كثيرُ حدودٍ منَ الدرجةِ الثالثةِ (اقترانٌ تكعيبيٌّ)، أما الاقتراناتُ ك، ف، و، د، فليسَتْ كثيراتِ حدودٍ.

يمكنُ كتابةُ كثيرِ الحدودُ بأيِّ ترتيبٍ، ولاستخدامِ **الصورةِ القياسيةِ** لكثيرِ الحدودِ ، تُكتَبُ الحدودُ بالترتيبِ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِها درجةً.

فالصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ ق منَ الدرجةِ ن في المتغيرِ س هيَ:

ق(س) = $أ_{ن}$ $س^{ن}$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + $أ_{ن-٢}$ $س^{ن-٢}$ + ...+ $أ_{٢}$$س^{٢}$ + $أ_{١}$$س^{١}$+ $أ_{.}$

والأعدادُ الحقيقيةُ $أ_{ن}$، $أ_{ن-١}$، $أ_{ن-٢}$،........$أ_{٢}$، $أ_{١}$،$أ_{.}$ تسمَّى **معاملاتِ كثيرِ الحدودِ** ق (س).

ويسمى $أ_{ن}$ **بالمعاملِ الرئيسِ**، $أ_{.}$ **بالحدِّ الثابتِ**.

تدريبُ ١-١

اكتبْ مثالًا على كلٍّ ممّا يأتِي:

١) اقترانٍ كثيرِ الحدودِ منَ الدرجةِ الرابعةِ، يتكوّنُ منْ ثلاثةِ حدودٍ.

٢) اقترانٍ كثيرِ الحدودِ منَ الدرجةِ السابعةِ، يتكوّنُ منْ حدّيْنِ.

تدريبُ (١–٢)

١) ما هوَ أكبرُ عددٍ منَ الحدودِ يلزمُ لتكوينِ كثيرِ حدودٍ منَ الدرجةِ الخامسةِ؟

٢) ما هوَ أقلُّ عددٍ منَ الحدودِ يلزمُ لتكوينِ كثيرِ حدودٍ منَ الدرجةِ الخامسةِ؟

تدريبُ (١–٣)

اكتبْ ثلاثةَ اقتراناتٍ **ليستْ** كثيراتِ الحدودِ.

مثالُ (١–٢)

اكتبْ كثيرَ الحدودِ ق(س) = ٥س − ٩ + ٦س^{٥} − ٢س^{٤} + ٢س^{٢}، بالصورةِ القياسيةِ ، وحدّدْ درجتَهُ، ومعاملاتِهِ، والمعاملَ الرئيسَ فيهِ.

الحلُّ

الصورةُ القياسيةُ ق(س) = ٦س^{٥} − ٢س^{٤} + ٢س^{٢} + ٥س − ٩

ق كثيرُ الحدودِ منَ الدرجةِ الخامسة

معاملاتُهُ: ٦، −٢، ٠، ٢، ٥، −٩

والمعاملُ الرئيسُ هوَ ٦

تدريبُ (١–٤)

حدّدْ الدرجةَ، والمعاملَ الرئيسَ، والمعاملاتِ لكلِّ كثيرِ حدودٍ ممّا يأتِي:

١) ق (س) = −٣س + ٢س^{٨} + ٤س^{٣} + ٨س^{٥}

٢) هـ(س) = ٥س^{٤} + ٧س + ٤ − س^{٩}

٣) ل(س) = $\frac{\text{س}^{٤}}{٢}$ − س + ١

تدريبُ (١–٥)

اكتبْ ثلاثةَ كثيراتِ حدودٍ، مبينًا درجةَ كلٍّ منها، وحدّدْ معاملاتِها.

الأسئلةُ ؟

١) حدّدْ أيًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ يمثلُ كثيرَ حدودٍ مبررًا إجابتَكَ :

أ) $ق(س) = ٢س^{٢} - \sqrt{س} + ٥س^{٦} - ٤$

ب) $هـ(س) = س + ٧$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + \frac{١}{س} - ٧ + ٦س + ٨س^{١١}$

د) $ك(س) = س + ٣س^{٣}$

٢) جدْ درجةَ كلِّ كثيرِ حدودٍ فيما يأتِي :

أ) $م(س) = س^{٣} + ٥س^{١٠} - ٥ + س^{٢} - س$

ب) $ع(س) = ٤س^{٦} + ٣\sqrt{٥}س^{٧} + ٢\sqrt{٥} + س^{٣}$

جـ) $ط(س) = س + ٨$

٣) اكتبْ كلّ كثيرِ حدودٍ فيما يأتِي بالصورةِ القياسيةِ، وحدّدْ معاملاتِهِ:

أ) $ق(س) = ٥س^{٢} + ١٣س^{١٠} + س^{٣} - ٥س^{٨} + ٣س^{٢} - ٦س + ٩$

ب) $هـ(س) = -٤٦س^{٦} + س^{٤} + ٢س + ٣س^{٢}$

جـ) $ل(س) = س^{٤} + ٨س^{٩} - ٤ + ٥س^{١١} + س$

٤) اكتبْ اقترانًا كثيرَ الحدودِ منَ الدرجةِ الرابعةِ بالصورةِ القياسيةِ ، وحدّدِ المعاملَ الرئيسَ فيه.

٥) هلْ يمكنُ للعددِ $\sqrt[٣]{٧}$، أنْ يكونَ معاملًا رئيسًا لاقترانٍ كثيرِ حدودٍ؟

٦) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

ثانيًا تمثيلُ كثيراتِ الحدودِ بيانيًا Polynomials Sketching

وجدَتْ شركةُ أجهزةِ اتصالاتٍ أنَّ تكلفةَ الإنتاجِ الأسبوعيِّ لأجهزةٍ عددُها س ، يمكنُ تمثيلُها بالعبارةِ:
ك (س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٦س + ٥٠٠، فإذا بيعَ الجهازُ الواحدُ بمبلغِ ٤٠٠ دينارٍ، جدْ اقترانَ الربحِ لبيعِ س منِ الأجهزةِ، ثمَّ استخدمِ التكنولوجيا لتمثيلِ الاقترانِ بيانيًا.

تمثلُ العبارةُ ك(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٦س + ٥٠٠ اقترانًا كثيرَ الحدودِ، ويمكنُ استعمال كثيراتِ الحدودِ لتمثيلِ بعضِ المواقفِ الحياتيةِ.

يمكنُكَ تمثيلُ كثيراتِ الحدودِ بيانيًا باستخدامِ الآلاتِ الراسمةِ، وبرمجيةِ إكسل (Excel).

مثالُ (١−٣)

إذا كانَ ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٢، مَثّلِ الاقترانَ ق باستخدامِ برمجيةِ إكسل (Excel)، وادرسْ سلوكَ منحناهُ، ثمَّ جِدْ ما يأتي:

١) مقطعَ الاقترانِ ق منْ محورِ الصاداتِ.

٢) أصغرَ قيمةٍ للاقترانِ ق.

الحلُّ

لتمثيلِ الاقترانِ ق باستخدامِ برمجيةِ (Excel) اتّبعِ الخطواتِ الآتيةَ:

(١) اخترْ برمجيةَ إكسلْ (Excel) منْ قائمةِ البرامجِ.

(٢) اخترْ أولَ خليةٍ في العمودِ الأولِA1، ثمَّ اكتبْ بدايةَ الفترةِ ، ولتكنْ −٤ مثلًا (يمكنُ البدءُ بأيةِ قيمةٍ أخرَى) ثمّ استمرَّ في تعبئةِ قيمِ س.

(٣) انتقلْ للخليةِB1 في العمودِ الثاني، واكتبْ فيها قاعدةَ الاقترانِ ق كالآتي:
(2+A1*4+A1^2*2=)، ثمَّ اضغطْ على زرِّ إدخالٍ.

(٤) اسحبِ الخليةَ B1 إلى بقيةِ الخلايا في العمودِ B، المقابلةِ لقيمِ س في العمودِ A.

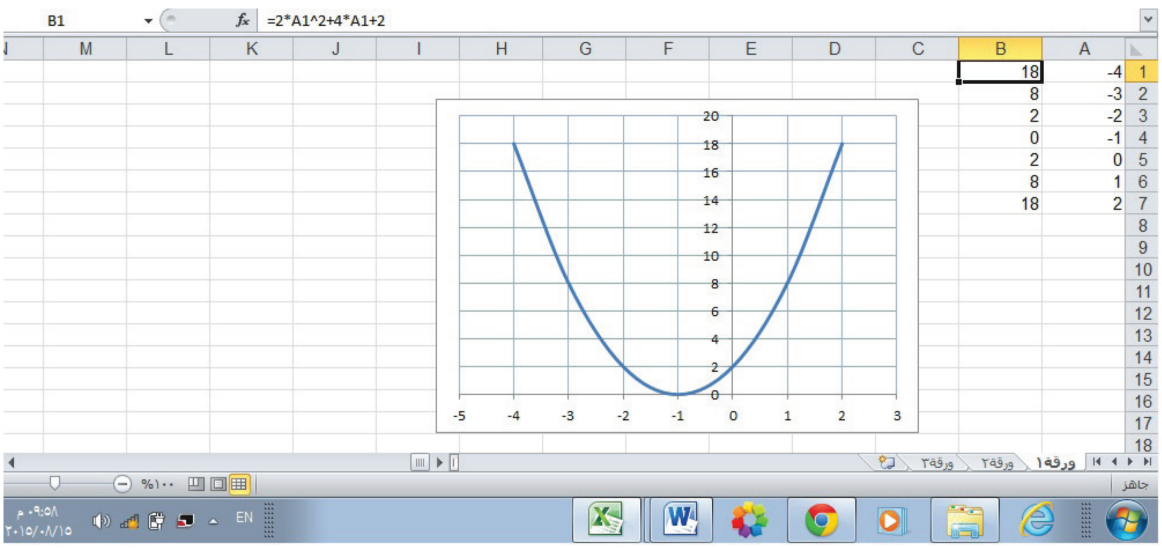
(٥) ظَلّلِ القيمَ في العمودَيْنِ A و B، واخترْ مجموعةَ مخطّطاتٍ منْ تبويبةِ إدراجِ (Insert)، وانقرْ على مبعثر، ثمَّ اخترْ نوعَ المخطّطِ المناسبِ.

(٦) يمكنكَ عملُ تنسيقٍ، حيثُ تحصل على المنحنَى المبيّنِ كمَا في الشكلِ (١–٢).

تلاحظُ أنَّ منحنَى الاقترانِ ق متصلٌ (أيْ يمكنُ رسمُهُ دونَ انقطاعٍ).

١) مقطعُ الاقترانِ ق منْ محورِ الصاداتِ هو ٢

٢) أصغرُ قيمةٍ للاقترانِ ق هي ق(–١) = ٠



الشكلُ (١–٢)

تدريب ١–٦

مثّلْ كلًا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًا باستخدامِ برمجيةِ إكسل (Excel)، ادرسْ سلوكَ منحنى كلٍّ منها واكتبِ المقطعَ الصاديَّ، والمقطعَ السينيَّ (إن وُجد)، والمجالَ والمدى:

١) ق(س) = ٣

٢) ل(س) = ٣س

٣) هـ(س) = ٣ + س

٤) ع(س) = س^{٢}

٥) ك(س) = س^{٢} + ١

٦) و(س) = س^{٢} – ١

٧) ك(س) = س^{٣}

٨) و(س) = – س^{٣}

مثالُ (١-٤)

إذا كان ق(س) = ٢س^٣ − ٣س^٢ + ٥

١) مثلِ الاقترانَ ق بيانيًا باستخدامِ برمجيةِ إكسل (Excel).

٢) ما هوَ مقطعُ منحنى الاقترانِ ق من محورِ الصادات؟

٣) هلِ الاقترانُ ق متصلٌ؟

٤) جدْ ق(١)، ق(٠).

الحلُّ

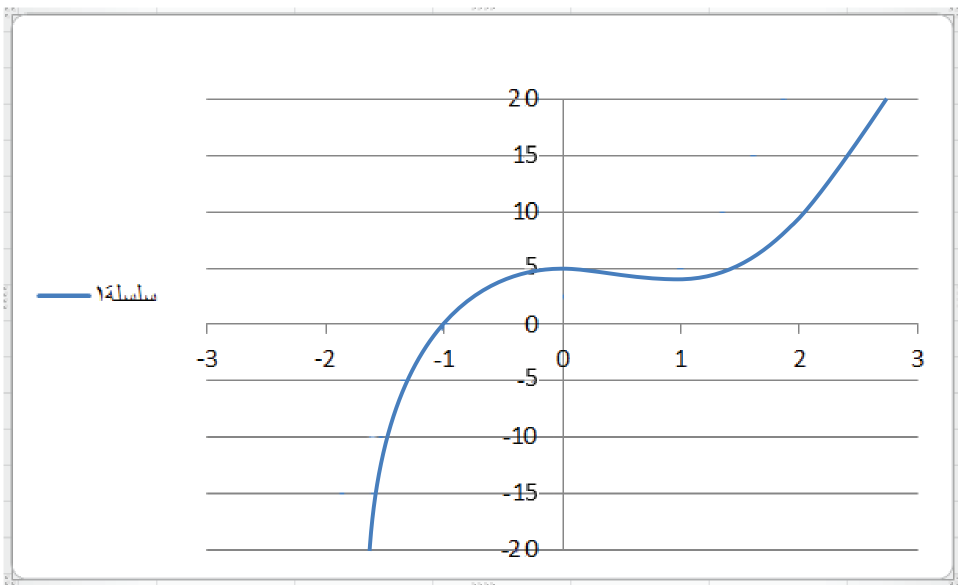
١) اتبعِ الخطواتِ الواردةَ في مثالِ (١-٣) لتحصلَ على الشكلِ (١-٣).

٢) مقطعُ الاقترانِ ق منْ محورِ الصاداتِ هوَ ٥.

٣) الاقترانُ ق متصلٌ.

٤) ق(١) = ٢ × (١)^٣ − ٣ × (١)^٢ + ٥ = ٤

ق(٠) = ٠ + ٠ + ٥ = ٥



الشكلُ (١-٣)

تدريبُ (١-٧)

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ ؟

١) مثّلْ كلًا منْ كثيراتِ الحدودِ الآتيةِ باستخدامِ برمجيةِ إكسلْ (Excel):

أ) ق(س) = −٩ + س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥س　　　ب) هـ(س) = س^{٤} − ٦

جـ) ك(س) = س^{٧} − ٦ + س^{٦} + ٣س^{٣}

٢) إذا كانَ ق(س) = −٣س^{٢} + ٥ + ٨س

أ) مثّلِ الاقترانَ ق بيانيًا باستخدامِ إكسلْ (Excel).

ب) ما هوَ مقطعُ منحنى الاقترانِ ق منْ محورِ الصاداتِ؟

جـ) هل الاقترانُ ق متصلٌ؟

٣) إذا كانَ ق(س) = ٤س^{٥} − ٦س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥

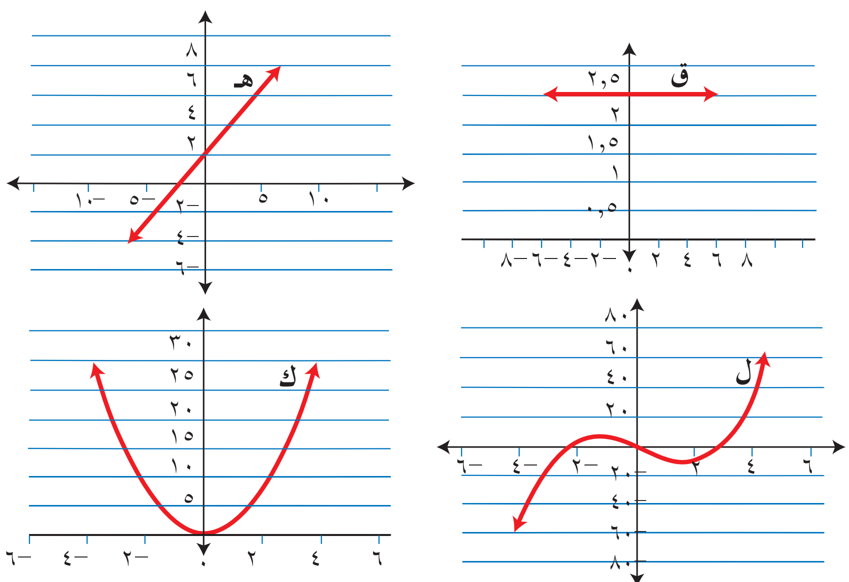
أ) مثّلِ الاقترانَ ق بيانيًا باستخدامِ برمجيةِ إكسلْ (Excel).

ب) جدْ ق(−١)، ق(٠)، ق(١).

٤) أطلقَ مدفعٌ قذيفةً، بحيثُ يمكنُ تمثيلُ ارتفاعِ القذيفةِ عنْ سطحِ الأرضِ ع بعدَ مرورِ زمنٍ مقدارُهُ ن ثانيةً بالعلاقةِ ع (ن) = −٥ن^{٢} + ٥٠ن + ١

أ) ما الارتفاعُ الذي تصلُهُ القذيفةُ بعدَ ٣ثوانٍ؟　　　ب) ما أقصَى ارتفاعٍ تصلُهُ القذيفةُ ؟

٥) تأملْ منحنياتِ كثيراتِ الحدودِ ق ، هـ، ل، ك في الشكلِ (١−٤) ثمّ حددْ درجةَ كلّ منها (إنْ أمكنَ).



الشكلُ (١−٤)

ثالثًا: جمعُ كثيراتِ الحدودِ وطرحُها وضربُها
Addition ,Subtraction and Multiplication of Polynomials

يمكنْ تمثيلُ الكتلةِ التقريبيةِ لمبيعاتِ مصنعِ أسمنتٍ منَ الأسمنتِ الأسودِ (د)، والأسمنتِ الأبيضِ (ب) في س شهرِ بآلافِ الأطنانِ بالاقترانيْنِ:

د(س) = ٩س + ٣٨٠

ب(س) = ٣س + ١٥

اكتبِ الاقترانَ الذي يمثّلُ المبيعاتِ الكليةَ منَ الأسمنتِ في س شهرٍ، وكم عددُ الأطنانِ المباعةِ في ١٠ شهورٍ؟

١ – جمعُ كثيراتِ الحدودِ

عنـدَ جمـعِ كثيـرَيْ حـدودٍ، نجمـعُ معامـلاتِ الحدودِ المتشابهةِ، فينتجُ كثيرُ حدودٍ جديدٌ، وهذا يعني أنَّ:

ق(س) + هـ(س) = (ق + هـ) (س)، حيثُ ق، هـ كثيرا حدودٍ.

تذكَّرْ
الحدودُ المتشابهةُ هيَ الحدودُ التي تحتوي القسمَ الرمزيِّ نفسَهُ.

مثالُ (١–٥)

جدْ ناتجَ جمعِ ق(س) وَ هـ(س)، حيثُ:

ق(س) = س^{٥} + ٦س − ٣س^{٤} + ٧س^{٢} + ٩

هـ(س) = ٢س^{٥} − ٣س + ٦ − ٣س^{٣} + س^{٢}

الحلُّ

ق(س) + هـ(س) =

س^{٥} − ٣س^{٤} + ٧س^{٢} + ٦س + ٩

\+ ٢س^{٥} − ٣س^{٣} + س^{٢} − ٣س + ٦

٣س^{٥} − ٣س^{٤} − ٣س^{٣} + ٨س^{٢} + ٣س + ١٥

تدريبُ (١–٨)

إذا كانَ ل(س) = ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س + ١، ك(س) = ١٣س^{٢} + ٤س + ٨

فجدْ (ل + ك) (س)، وحدّدْ درجتَهُ. (ماذا تلاحظُ؟)

٢- طرحُ كثيراتِ الحدودِ

عندَ طرحِ كثيرَيْ حدودٍ نطرحُ معاملاتِ الحدودِ المتشابهةِ ، فينتجُ اقترانٌ كثيرُ حدودٍ جديدٌ، أيْ أنَّ:

ق(س) − هـ(س) = (ق − هـ) (س)، حيثُ ق، هـ كثيرَا حدودٍ.

مثالُ (١-٦)

إذا كانَ ق(س) = ١٠س^{٣} + ٤س^{٢} − س + ١٧، هـ(س) = ٦س^{٢} + ٤س + ٨

فجدْ ناتجَ كلٍ ممّا يأتِي: (ق − هـ) (س) ، (هـ − ق) (س) ، (هـ − ق) (−١) ، (ق − ق) (س).

الحلُّ

(ق −هـ) (س) = (١٠س^{٣} + ٤س^{٢} − س + ١٧) − (٦س^{٢} + ٤س + ٨)

= ١٠س^{٣} − ٢س^{٢} − ٥س + ٩

(هـ − ق) (س) = (٦س^{٢} + ٤س +٨) − (١٠س^{٣} + ٤س^{٢} − س + ١٧)

= −١٠س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س − ٩ (ماذا تلاحظُ؟)

(هـ − ق) (−١) = −١٠ × (−١)^{٣} + ٢(−١)^{٢} + ٥(−١) −٩

= ١٠ + ٢ − ٥ − ٩ = −٢

(ق − ق) (س) = صفرًا.

لذلكَ فإنَّ الاقترانَ ق(س) = صفرًا هو اقترانُ كثيرُ حدودٍ، لكنْ ليسَ لهُ درجةٌ وليس له معامل رئيس.

فكِّرْ

كيفَ يمكنُ أنْ تتحقّقَ منَ الإجابةِ في المثالِ (١-٦)؟

تدريبُ ١-٩

إذا كانَ ق(س) = ٣س^{٤} + س^{٢} − ٥س + ٦، هـ(س) =٣س^{٤} + ٩س^{٢} − ٢س + ١

فجدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي: (ق − هـ) (س) ، (هـ − ق) (س) ، (هـ − ق) (٠) ، (ق − ق) (س).

منَ الأمثلةِ والتدريباتِ السَّابقَةِ في عمليتَيِ الجَمعِ والطَّرْحِ تلاحظُ أنَّ **جمعَ كثيرَيْ حدودٍ أو طَرحَهما هوَ كثيرُ حُدودٍ، درجتُهُ أقلُّ منْ أكبرِ درجتيْهِما أو تُساوِيهِما**.

٣- ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لأيِّ كثيرَيْ حدودٍ ق(س) ، هـ(س)

(ق . هـ) (س) = ق(س) × هـ(ق)

مثالُ (١-٧)

إذا كانَ ق(س) = ٤س^{٢} - س + ١ ، هـ(س) = ٢س^{٢} + ٤س

فجِدْ ناتج كلٍّ ممّا يأتِي (ق . هـ)(س) ، (هـ . ق)(س) ، (هـ . ق)(٢)

الحلُّ

(ق . هـ) (س) = (٤س^{٢} - س + ١) × (٢س^{٢} + ٤س)

= (٤س^{٢} × ٢س^{٢}) + (٤س^{٢} × ٤س) - (س × ٢س^{٢})

- (س × ٤س) + (١ × ٢س^{٢}) + (١ × ٤س) (باستخدامِ قانونِ التوزيعِ)

= ٨س^{٤} + ١٦ س^{٣} - ٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٢س^{٢} + ٤س

= ٨س^{٤} + ١٤س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س

(هـ . ق) (س) = (٢س^{٢} + ٤س) × (٤س^{٢} - س + ١)

= (٢س^{٢} × ٤س^{٢}) + (٢س^{٢} × -س) + (٢س^{٢} × ١)

+ (٤س × ٤س^{٢}) + (٤س × -س) + (٤س × ١)

= ٨س^{٤} - ٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ١٦س^{٣} - ٤س^{٢} + ٤س

= ٨س^{٤} + ١٤س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س (ماذا تلاحظُ؟)

(هـ . ق) (٢) = ٨(٢)^{٤} + ١٤(٢)^{٣} - ٢(٢)^{٢} + ٤(٢)

= ١٢٨ + ١١٢ - ٨ + ٨ = ٢٤٠

- هل تستطيع استخدام طريقة الضربِ العموديِّ لإيجادِ ناتجِ ضربِ كثيري حدود؟

تدريبُ ١-١٠

١) إذا كانَ ق(س) = ٢س^{٦} + ٤س^{٢} − ٦س ، هـ(س)= س^{٣} + ٤س^{٢} + ٢س + ٢

فجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتِي:

أ) (ق . هـ) (س)

ب) (ق . هـ) (١)

جـ) (هـ . ق) (س)

د) (هـ . ق) (٠)

هـ) (ق . ق) (س)

و) (هـ . هـ) (س)

٢) ماهيَ درجةُ ناتجِ ضربِ كثيرَيْ حدودٍ؟

تدريبُ ١-١١

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ

١) إذا كانَ ق(س) = $٤س^٥ + س^٢ - ٤س^٣ + ٢س - ٣$، هـ(س) = $س^٣ + س^٢ + ١$ ،
ل(س) = س + ٥ جِدْ ما يأتِي:

أ) (ق + هـ) (س)

ب) (ق − هـ) (س)

جـ) (ق . ل) (س)

د) (هـ . ق) (س)

هـ) (هـ + ق − ل) (س)

و) (ل + هـ)(س) × ق(س)

٢) صندوقٌ على شكلِ متوازِي مستطيلاتٍ، قاعدتُهُ مربّعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها $٤س^٢ + ٦$، وارتفاعُهُ $س^٣$.

أ) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ ق الذي يمثلُ حجمَ الصندوقِ.

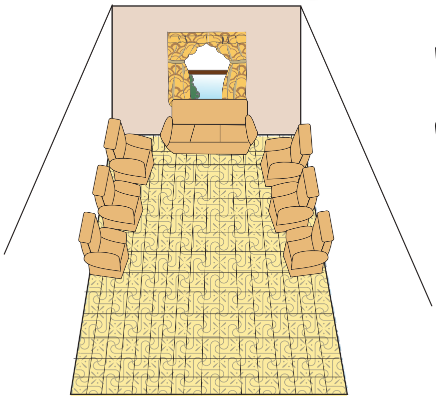
ب) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ هـ الذي يمثلُ المساحةَ الكليةَ لأوجهِ الصندوقِ.

٣) إذا كانَ ق(س) ، هـ(س) كثيرَيْ حدودٍ، وكانَ ق(س) منَ الدرجةِ الثالثةِ، أعطِ مثالًا لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ ق، هـ بحيثُ إنّ: ق(س) − هـ(س) منَ الدرجةِ الثانيةِ.

٤) إذا كانَ ق، هـ، كثيرَيْ حدودٍ منَ الدرجةِ ($ن^٢ + ٢$) ، (ن − ٢) على التوالي، حيثُ ن ≥ ٢،ن ∈ ط، وكانتْ درجةُ كثيرِ الحدودِ (ق . هـ) تساوي ١٢، فجِدْ درجةَ كلٍّ منْ ق، هـ.

رابعًا قسمةُ كثيراتِ الحدودِ Division of Polynomials

أرادتْ سلمى تغطيةَ أرضيةِ غرفةٍ مستطيلةِ الشكلِ مساحتُها (٣س^{٣} $-$ ٣)م^{٢} بنوعٍ منَ السجادِ عرضُهُ (س $-$ ١)م، كم مترًا طوليًا ستشترِي منْ هذا السجادِ؟



ستستخدمُ خوارزميةَ القسمةِ الطويلةِ، لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على كثيرِ حدودٍ آخرَ، حيثُ إنَّ:

المقسومُ = خارجَ القسمةِ × المقسومِ عليهِ + الباقي

وإذا كانَ باقي قسمةِ كثيرِ الحدودِ **ق** على كثيرِ الحدودِ **هـ** يساوي صفرًا ، فإنَّ **ق** يقبلُ القسمةَ على **هـ**

أمّا إذا كانتْ درجةُ المقسومِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ، فإنّ خارجَ القسمةِ يساوي صفرًا، وباقي القسمةِ يساوي المقسومَ.

مثالُ (١–٨)

جِدْ خارجَ قسمةِ الاقترانِ ق(س) = ١٥س^{٢} على هـ(س) = ٥س وباقيَها، وتحقّقْ منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

١٥س^{٢} ÷ ٥س = ٣س

خارجُ القسمةِ = ٣س

الباقي = صفرًا

حيثُ إنَّ: ١٥س^{٢} = ٣س × ٥س + ٠

١٥س^{٢} = ١٥س^{٢}

إذن: الحلُّ صحيحٌ.

مثالُ (١-٩)

جِدْ خارجَ قسمةِ الاقترانِ $ق(س) = س^٤ - ٣س^٢ + ١$ على $هـ(س) = ٢س + س^٢$، وباقيَها ثمَّ تحقّقْ منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

استخدمْ خوارزميةَ القسمةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

١) رتِّبْ حدودَ الاقترانيْنِ ق ، هـ تنازليًا حسبَ قوى س.

٢) اقسمِ الحدَّ الأولَ في المقسومِ ، على الحدِّ الأولِ في المقسومِ عليهِ، واكتبِ الناتجَ في خارجِ القسمةِ.

٣) اضربِ المقسومَ عليهِ، بما حصلتَ عليهِ في الخطوةِ ٢، واطرحِ الناتجَ.

٤) كرّرِ الخطوتيْنِ ٢، ٣ حتى تحصلَ على باقٍ درجتُهُ أقلُّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

$$
\begin{array}{r|l}
س^٢ - ٢س + ١ & \\
\hline
س^٤ \quad - ٣س^٢ \quad + ١ & س^٢ + ٢س \\
-(س^٤ + ٢س^٣) & \\
\hline
-٢س^٣ - ٣س^٢ \quad + ١ & \\
-(-٢س^٣ - ٤س^٢) & \\
\hline
س^٢ \quad + ١ & \\
-(س^٢ + ٢س) & \\
\hline
-٢س + ١ &
\end{array}
$$

وللتحقّقِ منْ صحةِ الحلِّ:

$$س^٤ - ٣س^٢ + ١ = (س^٢ - ٢س + ١) \times (س^٢ + ٢س) + (-٢س + ١)$$

$$= (س^٤ + ٢س^٣ - ٢س^٣ - ٤س^٢ + س^٢ + ٢س) + (-٢س + ١)$$

$$= س^٤ - ٣س^٢ + ١$$

تدريبُ (١-١٢)

استخدمْ خوارزميةَ القسمةِ لإيجادِ خارجِ قسمةِ الاقترانِ

$ق(س) = س^٣ - س^٢ + ٥س - ١$ على $هـ(س) = س - ٢$، وباقيها.

مثالُ (١-١٠)

بيّنْ باستخدامِ خوارزميةِ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ أنَّ الاقترانَ ق(س) = ٣س^{٢} + س^{٣} − س − ٣ يقبلُ القسمةَ على هـ(س) = س + ١ .

الحلُّ

بإجراءِ القسمةِ الطويلةِ واتباعِ الخطواتِ السابقةِ نفسِها تجدُ أنَّ:

خارجَ القسمةِ = س^{٢} + ٢س − ٣

والباقي = صفرٌ

إذن: ق (س) يقبل القسمة على هـ(س)

س^{٢} + ٢س − ٣

س + ١ | س^{٣} + ٣س^{٢} − س − ٣

− (س^{٣} + س^{٢})

٢س^{٢} − س − ٣

− (٢س^{٢} + ٢س)

−٣س − ٣

−(−٣س − ٣)

صفر

تدريبُ (١-١٣)

باستخدامِ خوارزميةِ القسمةِ، بيّنْ أنَّ الاقترانَ ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} − س + ٦ يقبلُ القسمةَ على هـ(س) = س + ٣

فكِّرْ

ما العلاقةُ بينَ درجةِ المقسومِ، ودرجةِ خارجِ القسمةِ، ودرجةِ المقسومِ عليهِ؟

تدريبُ (١-١٤)

حُلَّ المسألةَ الوارِدَة بدايةَ الدرسِ

الأسئلةُ

١) جِدْ درجةَ خارجِ قسمةِ الاقترانِ ق على الاقترانِ هـ لكلٍّ ممّا يأتِي :

أ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٣س − ٨ هـ(س) = س^{٢} + ١

ب) ق(س) = س^{٧} − ٦س هـ(س) = س^{٥} + ٤س − ١

جـ) ق(س) = س − ٢س^{٤} + ١ هـ(س) = س^{٣} + ٣س − ٧

٢) استخدمْ خوارزميةَ القسمةِ، في إيجادِ خارجِ قسمةِ كثيرِ الحدودِ ق، على كثيرِ الحدودِ هـ، وباقيها ثمَّ تحقّقْ مِنْ صحةِ الحلِّ في كلٍّ ممّا يأتِي:

أ) ق(س) = س^{٢} + ٥س + ٦ هـ(س) = س + ٣

ب) ق(س) = س^{٣} − ٢س + ١ هـ(س) = س − ٣

جـ) ق(س) = س^{٤} − ٢س هـ(س) = −٣س + س^{٢} + ٢

٣) لوحةُ إعلاناتٍ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها تُعطَى بالاقترانِ م (س) = س^{٣} − ٢٧ بالمترِ المربّعِ، فإذا كانَ طولُها يساوي (س − ٣)مترًا، جدْ عرضَها بدلالةِ س.

٤) ادّعَى رامزٌ أنّهُ إذا كانَ كثير الحدود ق(س) من الدرجةِ الثامنة، مقسومًا على كثير الحدود هـ(س) منَ الدرجةِ الثانية، فإنَّ الناتجَ يكونُ كثير حدود منَ الدرجةِ الرابعةِ، ناقشِ ادّعاءَ رامزٍ.

المتبايناتُ الخطيَّةُ

Linear Inequalities

النتاجاتُ

- تتعرفُ المتباينات الخطيةَ بمتغيرَيْن.
- تمثلُ متباينةً خطيةً بمتغيرَيْنِ بيانيًا.
- تحلُّ متباينةً خطيةً بمتغيرَيْن.
- تحلُّ أنظمةَ متبايناتٍ خطيةٍ بمتغيرَيْنِ بيانيًا، وباستخدامِ الآلَةِ الراسمةِ.

أوّلًا متبايناتٌ خطيةٌ بمتغيّريْنِ Linear Inequalities in Two Variables

إذا كانَ سعرُ الكيلو غرام الواحدِ من السكّرِ ٤٥ قرشًا، وسعرُ الكيلو غرام الواحدِ من الأرزِّ ٦٠ قرشًا، وأرادتْ شادنُ شراءَ كميةٍ منَ السكرِ، وكميةٍ منَ الأرزِّ، بحيثُ لا يزيدُ الثمنُ الكليُّ على ١٠ دنانيرَ، عبّرْ عن ذلكَ بمتباينةٍ خطيةٍ بمتغيّريْنِ، ومثّلْ منطقةَ حلّها بيانيًا.

يوجَدُ كثيرٌ منَ المسائلِ، التي يمكنُ حلُّها باستخدامِ المتبايناتِ.

وتعرفتَ سابقًا المتبايناتِ الخطيةَ بمتغيّرٍ واحدٍ، وتمثيلَها على خطِّ الأعدادِ، وفي هذا الدرسِ، ستتعرفُ المتبايناتِ الخطيةَ بمتغيرَيْنِ، وتمثيلَها في المستوى الإحداثي.

والمتباينةُ الخطيةُ بمتغيّريْنِ هيَ المتباينةُ التي يمكنُ كتابتُها على إحدى الصورِ الآتيةِ:

أس + ب ص + جـ > ٠

أس + ب ص + جـ < ٠

أس +ب ص +جـ ≤ ٠

أس + ب ص + جـ ≥ ٠

حيثُ أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيةٌ، أ ≠ صفرًا، ب ≠ صفرًا.

تعريفٌ

المتباينةُ الخطيةُ بمتغيّريْنِ: تعبيرٌ جبريٌّ بمتغيّريْنِ، يحوي إشارةً منْ إشاراتِ التباينِ ($<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$)، وتعدُّ النقطةُ ($س_١$ ، $ص_١$) حلًا للمتباينةِ إذا حقّقتْها.

مثالُ (١-١١)

أيٌّ منَ النقاطِ الآتيةِ: (١ ، ١) ، (١ ، -١) ، (٢ ، ١) تعدُّ حلًا للمتباينةِ ٣س - ٢ص $\leq$ ٤؟

الحلُّ

نعوِّضُ قيمةَ س، وقيمةَ ص في المتباينةِ.

النقطةُ (١ ، ١)

٣ × ١ - ٢ × ١ $\leq$ ٤ ومنهُ ٣ - ٢ $\leq$ ٤ (العبارةُ ليستْ صحيحةً)

إذنْ: النقطةُ (١ ، ١) ليستْ حلًا للمتباينةِ .

النقطةُ (١ ، -١)

٣ × ١ - ٢ × -١ $\leq$ ٤ ومنهُ ٣ + ٢ $\leq$ ٤ (العبارةُ صحيحةٌ).

إذنْ النقطةُ (١ ، -١) حلٌّ للمتباينةِ.

النقطةُ (٢ ، ١)

٣ × ٢ - ٢ × ١ $\leq$ ٤ ومنهُ ٦ - ٢ $\leq$ ٤ (العبارةُ صحيحةٌ).

إذنْ النقطةُ (٢ ، ١) حلٌّ للمتباينةِ.

فكِّرْ

هل يوجدُ نقاطٌ أخرى تعدُّ حلًا للمتباينةِ في المثالِ (١ - ١١)؟

تدريبُ ١-١٥

أيٌّ منَ النقاطِ (١ ، -٢) ، (١ ، ٣)، (١،٥) حلٌّ للمتباينةِ ٢س + ص $<$ ٧؟

مثالُ (١-١٢)

حُلَّ المتباينةَ ٣س − ص ≤ ١ بيانيًا

الحلُّ

لتمثيلِ المتباينةِ ٣س − ص ≤ ١ بيانيًا نتّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نحوّلُ المتباينةَ إلى معادلةٍ ، فنحصلُ على ٣س − ص = ١، وهيَ المعادلةُ المناظرةُ لها.

٢) نمثّلُ المعادلةَ ٣س − ص=١ بيانيًا .

أ) نضعُ ص موضوعًا للقانونِ: ص = ٣س − ١

ب) نكوّنُ جدولًا

س	٠	٢
ص	−١	٥
(س ، ص)	(٠ ، −١)	(٢ ، ٥)

جـ) نمثلُ النقاطَ على المستوى الإحداثيِّ، ونصلُ بينها بخطٍّ مستقيمٍ متصلٍ.

٣) نأخذُ نقطةَ اختبارٍ لا تقعُ على الخطِّ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًا ، ولتكُنْ (٠،٠) ونعوّضُها في المتباينةِ:

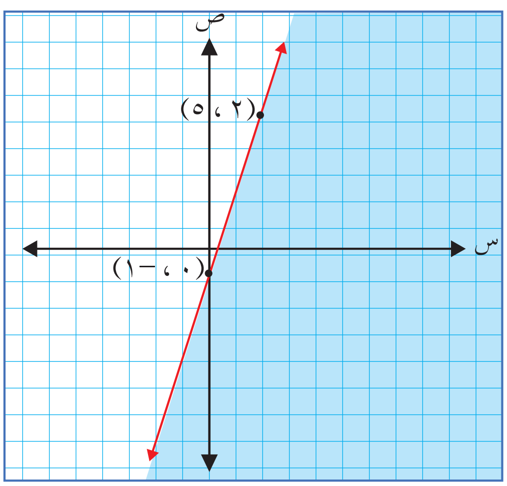
٣س − ص ≤ ١

٣ × ٠ − ٠ ≤ ١

ومنه ٠ ≤ ١ (عبارةٌ ليست صحيحةً)

إذنْ: (٠،٠) ليستْ حلًا للمتباينةِ.

٤) حددْ منطقةَ الحلِّ، وفي هذهِ الحالةِ تكونُ النقطةُ (٠،٠) ليستْ واقعةً في منطقةِ الحلِّ، فتكونُ منطقةُ الحلِّ هيَ المنطقةَ المظللةَ في الشكلِ (١ − ٥).



الشكلُ (١−٥)

تعلّمْ

إذا كانَت المتباينةُ المطلوبُ تمثيلُها، تحتوي إحدى الإشارتيْنِ ≤، ≥ ، فإنَّ نقاطَ الخطِّ الفاصلِ ضمنَ الحلِّ، ويرسمُ **الخطُّ متّصلًا** ———————— .

أمّا إذا كانَت المتباينةُ المطلوبُ تمثيلُها تحتوي إحدى الإشارتيْنِ > ، < فإنَّ نقاطَ الخطِّ الفاصلِ ليستْ ضمنَ الحلِّ ، ويرسمُ **الخطُّ متقطّعًا** - - - - - - - - - - .

تدريبُ ١-١٦

حُلَّ المتباينةَ ٤س + ٢ص >٦ بيانيًا.

تدريبُ ١-١٧

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ ؟

١) أيُّ العباراتِ الآتيةِ تمثّلُ متباينةً خطيةً بمتغيّرَيْنِ؟

أ) ص = ٣س + ٥

ب) ص − س^{٢} + ١ ≤ ٠

جـ) ٣س + ص > ٢

د) س > − ٣ − ٢ص

هـ) س^{٢} + ٤ > ٨

٢) أيُّ النقاطِ الآتيةِ: (٢ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (−١ ، ١) تعدُّ حلًا للمتباينةِ س − ص + ١ > ٠؟

٣) تقولُ ناديةُ إنِ النقطةَ (٣ ، −١) حلٌّ للمتباينةِ ٣س − ٢ص > صفر، ناقشْ مقولتَها.

٤) حلَّ كلًا من المتبايناتِ الآتيةِ بيانيًا:

أ) ٢س − ص > ١

ب) س + ٢ص ≥ −٣

جـ) − ص > ٥س + ١٠

٥) يحتاجُ مطعمٌ شراءَ ما لا يزيدُ على ٣٠ كيلو غرام منَ البطاطا يوميًا، حيثُ يتوافرُ بالأسواقِ أكياسُ بطاطا ذاتُ الكتلةِ ٣ كيلو غرام، والكتلةِ ٥ كيلو غرام. اكتبْ متباينةً تعبّرُ عنْ عددِ الأكياسِ التي يستطيعُ المطعمُ شراءَها منْ كلِّ كتلةٍ، ثمَّ حُلّها بيانيًا.

ثانيًا حلُّ نظامِ متبايناتٍ خطيّةٍ بمتغيّريْنِ بيانيًا

Graphical Solving of Linear Inequalities with Two Variables

مصنعٌ للموادِّ الغذائيةِ، ينتجُ ما لا يقلُّ عن ٣٠٠ علبةٍ يوميًا منْ علبِ الفولِ والحمصِ، تكلفةُ علبةِ الفولِ ١٥ قرشًا، وعلبةُ الحمصِ ١٠ قروشٍ، إذا وضعَ المصنعُ ٦٠ دينارًا على الأكثرِ تكلفةً يوميّةً إجماليّةً، فجدْ عددَ العلبِ التي يمكنُ إنتاجُها يوميًا منَ الفولِ والحمصِ؟

نلاحظُ أنّه توجدُ إجاباتٌ متعددةٌ لهذهِ المسألةِ، ولمعرفةِ الإجاباتِ المعقولةِ، نبدأُ بترجمةِ المسألةِ عنْ طريقِ تحويلِ المتغيراتِ إلى رموزٍ، والمعلوماتِ إلى متبايناتٍ، على النحوِ الآتِي:

نفرضُ أنَّ: س = عددَ علبِ الفولِ المنتجةِ يوميًا.

ص = عددَ علبِ الحمصِ المنتجةِ يوميًا.

عددُ العلبِ المنتجةِ يوميًا من النوعين، لا يقلُّ عن ٣٠٠ علبةٍ: س + ص ≥ ٣٠٠

تكلفةُ الإنتاجِ اليوميةِ لا تزيدُ على ٦٠٠٠ قرشٍ: ١٥س + ١٠ص ≤ ٦٠٠٠

وفي هذهِ المسألةِ يجبُ أنْ تكونَ المتغيراتُ غيرَ سالبةٍ، ويمكنـكَ التعبيرُ عنْ ذلكَ بالمتباينتيْن س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ليصبحَ لدينا أربعُ متبايناتٍ خطيةٍ، والمطلوبُ حلٌّ مشتركٌ لهذهِ المتبايناتِ منْ خلالِ إيجادِ قيمِ المتغيراتِ، ومثل هذه المتباينات التي لها حلٌّ مشتركٌ تُسمّى **نظامًا من المتبايناتِ الخطيّةِ بمتغيّريْنِ.**

مثالُ (١-١٣)

في النظامِ ٢س ≥ ص − ١، ص − ٣س > −٤، أيُّ النقاطِ الآتيةِ تنتمي لمجموعةِ حلِّ النظامِ:
(٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣)؟

الحلُّ

لكيْ تكونَ النقطةُ (م، ن) حلًا لهذا النظامِ يجبُ أنْ تحققَ المتباينتيْنِ معًا، النقطةُ (٠ ، −١) هيَ حلٌّ لهذا النظامِ لأنّها تحققُ المتباينتيْنِ معًا

٢ × ٠ ≤ −١ − ١ عبارةٌ صحيحةٌ

وكذلك −١ −٣ × ٠ > −٤ عبارةٌ صحيحةٌ

أمّا النقطةُ (−٤ ، ٣) ليستْ حلًّا لأنّها لا تحققُ المتباينتيْنِ معًا

٢ × −٤ ≤ ٣ − ١ عبارةٌ غيرُ صحيحةٍ

لكنَّ ٣ −٣ × −٤ > −٤ عبارةٌ صحيحةٌ

تدريب (١-١٨)

اكتبْ نقطتيْنِ تحققانِ النظامَ السابقَ، ونقطتيْنِ لا تحققانِه.

مثال (١-١٤)

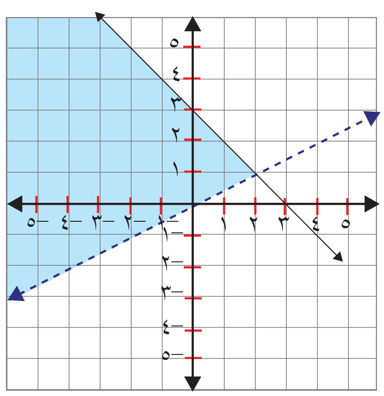
مثّلْ منطقةَ حلِّ النظامِ الآتي بيانيًا: س + ص ≥ ٣

س − ٢ ص > ٠

الحلُّ

نظللُ منطقةَ حلِّ كلٍّ منَ المتباينةِ س + ص ≥ ٣، والمتباينةِ س − ٢ ص > ٠

كلًا على حدةٍ وعلى مستوىً إحداثيٍّ واحدٍ، وتمثّلُ منطقةُ حلِّ النظامِ بجميعِ النقاطِ في منطقةِ الحلِّ المشتركِ (المنطقةِ المظللةِ) كما في الشكلِ (١−٦).



الشكلُ (١−٦)

تدريب (١-١٩)

مثلْ منطقةَ حلِّ النظامِ الآتي بيانيًا:

٣س − ٢ ص > ١

٣س + ٢ ص > ٤

س > ٠

ص > ٠

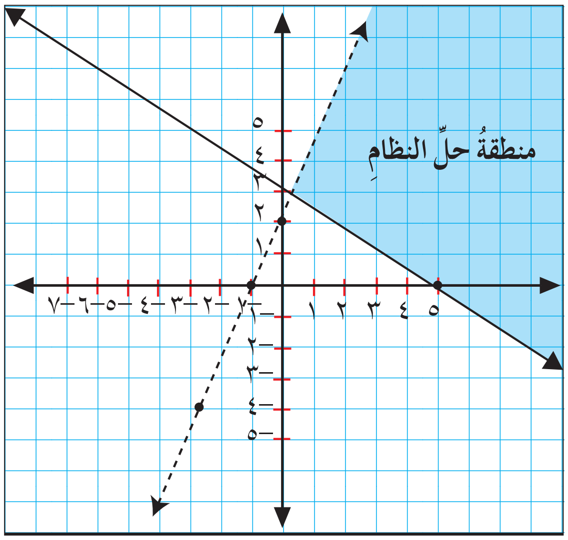
مثالُ (١-١٥)

مثّلْ منطقةَ حلِّ النظامِ الآتي ، باستخدامِ تطبيقِ الآلةِ الراسمةِ.

٣س + ٥ص ≤ ١٥

ص − ٢س − ٢ < ٠

الحلُّ



تدريبُ (١-٢٠)

مثِّلْ منطقةَ حلِّ النظامِ الآتي، باستخدامِ الآلةِ الراسمةِ

٣س + ٥ص ≤ ١٥

ص − ٢س − ٢ < ٠

٧س + ٥ص − ٣٥ ≥ ٠

تدريبُ (١-٢١)

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ

١) أيُّ النقاطِ الآتيةِ (٢، ٤) ، (١، ٥) ،(٢،−١)، تُعدُّ حلًا لنظامِ المتباينات الآتي:

٢س − ٣ص < ١

٣س + ص > ٥

٢) مثِّلْ منطقةَ حلِّ كلٍّ منَ الأَنظمةِ الآتيةِ بيانيًا:

أ) س + ٢ص < ٤
٥س + ص ≤ ١٠
ص + ٢س ≥ ٢

ب) ٢س + ص ≥ ٢
−ص + ٢س < ٦

٣) استخدمِ الآلةَ الراسمةَ في حلِّ كلٍّ منَ النظاميْنِ الآتييْنِ:

أ) ١/٢ س − ص ≥ ١
٣س − ٢٦ < ص

ب) ٢س − ص < ٣
س + ١ < ص

٤) مخيمٌ كشفيٌّ يتكوّنُ منْ ٤٠ طالبًا، طُلبَ منْ قائدِ المخيمِ شراءُ علبِ عصيرٍ، وقطعٍ منَ البسكويتِ، فإذا كانَ ثمنُ علبةِ العصيرِ ٢٠ قرشًا، وقطعةُ البسكويتِ ٣٠ قرشًا، ولديهِ ٢٤ دينارًا، وأرادَ شراءَ كميةٍ كافيةٍ ، بحيثُ يحصلُ كلُّ طالبٍ على علبةِ عصيرٍ، وقطعةِ بسكويتِ على الأقلِّ. اكتبْ نظامًا من المتبايناتِ الخطيةِ، يبينُ البدائلَ المختلفةَ لشراءِ علبِ العصيرِ، وقطعِ البسكويتِ، معَ العلمِ أنّهُ ليسَ منَ الضروريِّ صرفُ المبلغِ كاملًا.

أسئلةُ الوحدةِ

١) بينْ أيَّ الاقترانات الآتيةِ كثيرَ حدودٍ، ثمَّ حدّدْ درجتَهُ:

أ) هـ(س) = $س^{٤}$ − ٥

ب) ق(س) = ٣

جـ) ك(س) = $س^{\frac{١}{٢}}$ + ٦

د) ف(س) = $س^{-٥}$ + س − ٨

٢) اكتبْ كثيرَ الحدودِ الآتي بالصورةِ القياسيةِ، وحدّدْ درجتَهُ ومعاملاتِهِ:

ق(س) = ٤$س^{٧}$ − ٤ + ٦$س^{١٠}$ + $س^{٤}$ − ٩$س^{٥}$ + $س^{٣}$ − س

٣) مثلْ كلًا منَ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ الآتيةِ باستخدامِ برمجيةِ إكسل (Excel)

أ) ق(س) = س

ب) م (س) = $س^{٣}$ + ٤$س^{٢}$ − ٥

٤) إذا كانَ ق(س) = $س^{٣}$ + ٢$س^{٢}$ − ٤ ، هـ(س) = $س^{٢}$ − س ، م(س) = س + ٧ جدْ كلًا ممّا يأتي:

أ) (ق + هـ) (س)

ب) (ق ÷ هـ) (س)

جـ) (هـ + ق − م) (س)

د) (هـ . ق) (س)

٥) يمكنُ التعبيرُ عنْ ثلاثةِ أعدادٍ صحيحةٍ متتاليةٍ بالرموزِ:

س ، س + ١ ، س + ٢، اكتبِ الاقترانَ الذي يمثلُ مجموعَ هذهِ الأعدادِ.

٦) جدْ خارجَ قسمة ق(س) = $س^{٣}$ − ٢س + ١ على هـ(س) = س − ٢، وباقيها.

٧) إذا كانَ باقي قسمةِ ق(س) على (٢$س^{٤}$ − ١) يساوي (٥$س^{٣}$ + ٣س − ٧)، وكانَ خارجُ القسمةِ يساوي (٤$س^{٢}$ + ٥)، جدْ قاعدةَ كثيرِ الحدود ق (س).

٨) إذا كانَ $ق(س) = -٤س^{٣} - س^{٢}$ ، $هـ(س) = ٨س^{٢} - ٩$

اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ ك، الذي يمثّلُ ناتجَ جمعِ الاقترانيْنِ ق ، هـ ، وقاعدةَ الاقترانِ ل الذي يمثِّلُ حاصلَ ضربِ الاقترانين ق ، هـ.

٩) ما محيطُ مربعٍ طولُ ضلعِهِ يُعطَى بالاقترانِ $ل(س) = س^{٣} + ٦س - ٢$؟

١٠) اكتبْ متباينةً خطيةً بمتغيِّريْنِ ، واكتبْ ثلاثةَ حلولٍ لها.

١١) هل النقطةُ (-٤ ، -٢) تقعُ في منطقةِ حلِّ المتباينةِ $ص - ٤س \leq ٥$؟

١٢) مثّلْ منطقةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ بيانيًا:

أ) $ص > س - ٢$

ب) $ص \leq ٢س + ٢$

١٣) استخدمِ الآلَة الراسمةَ في حلِّ كلٍّ منَ النظاميْنِ الآتييْنِ:

أ) $-٣س + ٢ص > ٦$

$٦س - ٤ص > ٨$

ب) $ص \leq -٤$

$ص < س + ٣$

$ص \leq -٣س + ٣$

١٤) يبيعُ محلٌّ تجاريٌّ نوعيْنِ منَ المعاطفِ: رجاليًا، وولاديًا. فإذا كانَ سعرُ المعطفِ الرجاليِّ ٢٠ دينارًا، وسعرُ المعطفِ الولاديِّ ١٠ دنانير، ولمْ تزدْ مبيعاتُ هذا المحلِّ منَ المعاطفِ على ١٨٠ دينارًا في أحدِ الأيامِ. اكتبِ المتباينةَ التي تبيّنُ عددَ المعاطفِ المبيعةِ المحتملِ منَ النوعينِ في ذلكَ اليومِ، ثمّ مثلْها بيانيًا.

الوحدةُ الثانيةُ

٢

الدائـــــرةُ

للهندسةِ أثرٌ كبيرٌ في حياةِ الإنسانِ وحضارتِهِ، فهيَ عنصرٌ أساسٌ منْ عناصرِ تطويرِ حياتِهِ وصناعاتِهِ وحضارتِهِ، وتعدُّ الدائرةُ منْ أكثرِ الأشكالِ الهندسيّةِ استخدامًا في الحياةِ العمليةِ: في الصناعاتِ، والإنشاءاتِ الهندسيةِ، وحركاتِ المركباتِ الفضائيةِ، والتصاميمِ الزخرفيةِ والفنيةِ، والملاحةِ، والفلكِ؛ وذلكَ لما للدائرةِ منْ عناصرَ وخصائصَ، تميزُها عنْ كثيرٍ منَ الأشكالِ الهندسيّةِ الأخرَى.

لذلكَ اهتمَّ العلماءُ منذُ القدمِ بالدائرةِ، وخصائصِها، وتطبيقاتِها، في شتَّى المجالاتِ، ودرسُوا محيطَها، ومساحتَها والنسبةَ التقريبيّةَ، ومماساتِها، واستخدَمُوها في مجالاتِ العلومِ المختلفةِ، والحياةِ المتنوعةِ.

The Circle

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- استكشافِ خصائصَ هندسيةٍ عَنِ الدائرةِ تتضمنُ :

  أوتارَ الدائرةِ.

  الزوايا المحيطيّةَ، والزوايا المركزيّةَ.

  مماساتِ الدائرةِ.

  الزاويةَ المماسيةَ.

  الأشكالَ الرباعيةَ الدائريةَ.

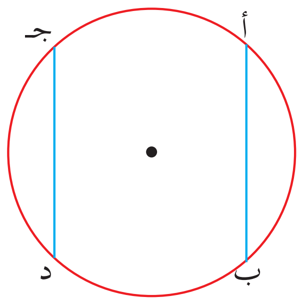
- إثباتِ نظرياتٍ هندسيةٍ على الدائرةِ تتضمنُ الزوايا والأوتارَ والمماساتِ.
- حلِّ مسائلَ على الدائرةِ، وخصائصِها، والمماساتِ، والشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ.

أوتارُ الدائرةِ

Chords

النتاجاتُ

- تستنتجُ مبرهناتٍ تتعلقُ بأوتارِ الدائرةِ وتبرهنُها.
- توظّفُ مبرهناتِ أوتارِ الدائرةِ في مواقفَ حياتيةٍ.



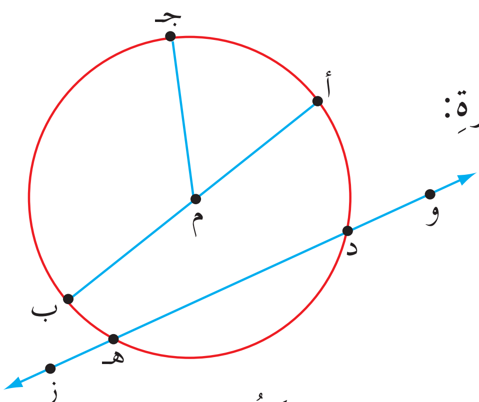
الشكلُ (٢ – ١)

يمثلُ الشكلُ (٢–١) إطارًا معدنيًا دائريَّ الشكلِ، طولُ نصفِ قطرِهِ ٢٠ سم، أرادَ ماهرٌ تقويتَهُ بإضافةِ القطعتيْنِ المعدنيتيْنِ المتوازيتيْنِ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$، بحيثُ تبتعدُ كلٌّ منُهما عنِ المركزِ ١٢سم، ساعِدْ ماهرًا في إيجادِ طولِ كلٍّ منهُما.

تدريبُ ٢–١

يمثلُ الشكلُ (٢–٢) دائرةً مركزُها م ، عيّنْ على هذهِ الدائرةِ:

١) قطرًا
٢) ثلاثةَ أنصافِ أقطارٍ.
٣) وتريْنِ.
٤) قاطعًا.
٥) ثلاثةَ أقواسٍ.



الشكلُ (٢ – ٢)

تذكَّرْ

– **نصفُ قطرِ الدائرةِ**: هوَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ مركزِ الدائرةِ ونقطةٍ عليها.
– **الوترُ**: هوَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ.
– **القطرُ**: هوَ وترُ الدائرةِ المارُّ بمركزِها، وهوَ أطولُ وترٍ في الدائرةِ.
– **القاطعُ**: هوَ المستقيمُ الذي يحتوي وترًا في الدائرةِ.
– **القوسُ**: هوَ جزءٌ منَ الدائرةِ، محصورٌ بينَ نقطتيْنِ عليْها.

سنرمزُ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أب}}$ بالرمزِ $\overline{\text{أب}}$ ، ولطولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{أب}}$ بالرمزِ أب.

نشاطُ (٢ – ١)

١) أ) ارسمْ دائرةً مركزُها (م)

ب) ارسمْ وترًا $\overline{\text{أب}}$، لا يمرُّ بالمركزِ.

جـ) ارسمِ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{\text{م جـ}}$، التي تعامدُ الوترَ $\overline{\text{أب}}$ في جـ.

د) جدْ كلًا منْ أجـ ، ب جـ ، ماذا تلاحظُ؟

٢) أ) ارسمْ دائرةً مركزُها (ن).

ب) ارسمْ وترًا $\overline{\text{س ص}}$، لا يمرُّ بالمركزِ.

جـ) عينِ النقطةَ ع، التي تمثلُ منتصفَ الوترِ $\overline{\text{س ص}}$.ارسمْ $\overline{\text{ن ع}}$.

د) جدْ قياسَ الزاويةِ ن ع س ماذا تلاحظُ؟

٣) أ) ارسمْ دائرةً مركزُها (ل).

ب) ارسمْ وترًا $\overline{\text{د هـ}}$، لا يمرُّ بالمركزِ.

جـ) عينِ النقطةَ و، التي تمثلُ منتصفَ الوترِ $\overline{\text{د هـ}}$.

د) ارسمْ منَ النقطةِ و العمودَ $\overleftrightarrow{\text{و ز}}$ على الوترِ $\overline{\text{د هـ}}$، حددْ أينَ يقعُ مركزُ الدائرةِ بالنسبةِ للعمودِ $\overleftrightarrow{\text{و ز}}$. ماذا تلاحظُ؟

مبرهنةُ (٢ – ١)

١) العمودُ النازلُ منْ مركزِ الدائرةِ على أيِّ وترٍ فيها، ينصِّفُهُ.

٢) المستقيمُ الواصلُ بينَ مركزِ الدائرةِ، ومنتصفِ وترٍ فيها غيرِ مارٍّ بالمركزِ، يعامدُ الوترَ.

٣) العمودُ المقامُ منْ منتصفِ وترٍ في الدائرةِ، يمرُّ بمركزِها.

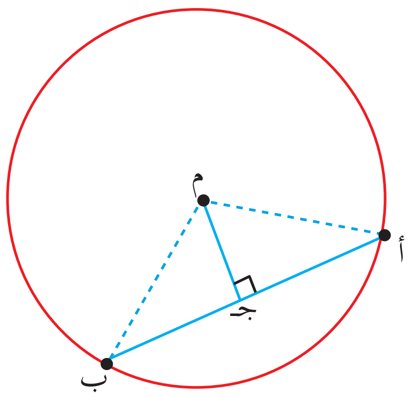
لإثباتِ صحةِ الفرعِ (١) منْ مبرهنةِ (٢–١) نتّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١ – المعطياتُ

$\overline{\text{أب}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها م، القطعةُ المستقيمةُ $\overline{\text{م جـ}}$ تعامدُ الوترَ $\overline{\text{أب}}$ في جـ، انظرِ الشكلَ (٢–٣)

٢- المطلوبُ

إثباتُ أنَّ م جـ تنصِّفُ الوترَ أب.



الشكلُ (٢ – ٣)

٣- البرهانُ

ارسمْ نصفَيْ القطريْن م أ ، م ب، فيتكونُ المثلثانِ

م أ جـ ، م ب جـ، كمَا في الشكلِ (٢ – ٣)، فيهِما:

م أ = م ب (كلٌّ منهُما يساوِي طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ)

م جـ = م جـ (م جـ ضلعٌ مشتركٌ)

قياسُ ∡ م جـ أ = قياسُ ∡ م جـ ب (قائمتانِ بالفرضِ)

فيتطابقُ المثلثانِ م أجـ ، م ب جـ بضلعٍ ووترٍ وقائمةٍ ، وينتجُ منَ التطابقِ أنَّ :

أجـ = ب جـ ، أيْ أنَّ م جـ تنصفُ الوترَ أب . (وهوَ المطلوبُ)

سنعّبرُ ـ في هذهِ الوحدةِ ـ عنْ (قياسِ الزاويةِ أ ب جـ) بالرمزِ (ق ∡أ ب جـ)

تدريبُ ٢-٢

١) برهِن أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ مركزِ الدائرةِ ومنتصفِ وترٍ فيها غيرِ مارٍ بالمركزِ ، يعامدُ الوترَ.

٢) برهْنِ أنَّ العمودَ المقامَ منْ منتصفِ وترٍ في الدائرةِ ، يمرُّ بمركزِها.

تذكَّرْ

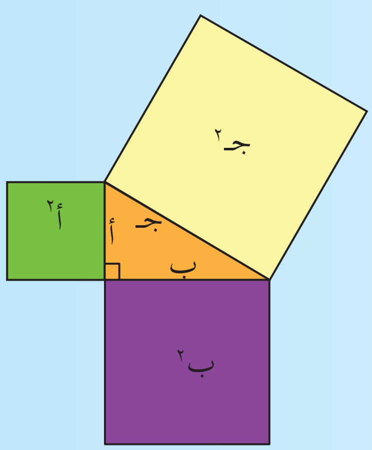
مبرهنةُ فيثاغورسَ

في المثلثِ القائمِ الزاويةِ، مساحةُ المربعِ المنشَأ على الوترِ يساوِي مجموعَ مساحتَيْ المربعيْنِ المنشأيْنِ على الضلعيْنِ الآخريْنِ.

الشكلُ(٢-٤) يوضّحُ مبرهنَةَ فيثاغورسَ، فيكونُ:

مربعُ طولِ الوترِ = مجموعَ مربعَيْ طولَيْ الضلعيْنِ الآخريْنِ أيْ أنَّ:

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}



الشكلُ (٢ – ٤)

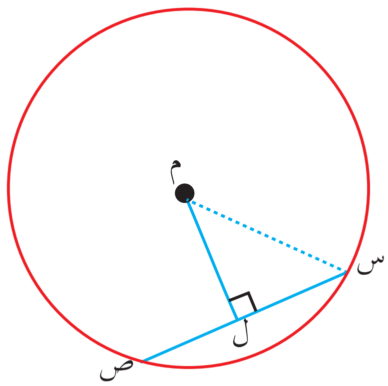
مثالُ (٢–١)

$\overline{\text{س ص}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها م، وطولُ قطرِها (١٠) سم، القطعةُ المستقيمةُ $\overline{\text{م ل}}$ تعامدُ الوترَ $\overline{\text{س ص}}$ في النقطةِ ل، إذا كانَ م ل = ٤ سم، جدْ س ص.

الحلُّ

$\overline{\text{م ل}}$ تعامدُ الوترَ $\overline{\text{س ص}}$ منَ المركزِ م ، فتكونُ $\overline{\text{م ل}}$ منصفةً للوترِ $\overline{\text{س ص}}$ (مبرهنةُ (٢–١)).

كما في الشكلِ (٢ – ٥)



الشكلُ (٢ – ٥)

س م = طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ = ٥سم

المثلثُ س ل م قائمُ الزاويةِ في ل.

(م س)^{٢} = (م ل)^{٢} + (س ل)^{٢} (مبرهنةُ فيثاغورسَ)

٢٥ = ١٦ + (س ل)^{٢}، ومنهُ س ل = ٣سم

فيكونُ س ص = ٢ × س ل = ٦سم

تدريبُ ٢–٣

$\overline{\text{أ ب}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها م، وطولُ نصفِ قطرِها (١٣) سم، $\overline{\text{م جـ}}$ نصفُ قطرٍ في الدائرةِ، ينصفُ الوترَ $\overline{\text{أ ب}}$ في النقطةِ د، فإذا كانَ أ ب = ١٠ سم، فجِدْ دجـ.

مثالُ (٢–٢)

$\overline{\text{ك ل}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها م، النقطةُ س منتصفُ الوترِ $\overline{\text{ك ل}}$، ق ∡ ل م س = ٣٥°،
جدْ ق ∡م ل س.

الحلُّ

بما أنَّ $\overline{\text{م س}}$ تنصفُ الوترَ $\overline{\text{ك ل}}$ منَ المركزِ م، فإنَّ $\overline{\text{م س}}$ تعامدُ الوترَ $\overline{\text{ك ل}}$ (مبرهنةُ (٢–١))، فيكونُ المثلثُ م س ل قائمَ الزاويةِ في س.

ق ∡ م ل س = ١٨٠° – (٩٠° + ٣٥°) (لماذا؟)

ق ∡ م ل س = ٥٥°.

تدريبُ ٢-٤

$\overline{\text{س ص}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها (م) وطولُ نصفِ قطرِها (٥) سم ، النقطةُ أ منتصفُ $\overline{\text{س ص}}$، أُقيمَ العمودُ $\overline{\text{أب}}$ على $\overline{\text{س ص}}$، فقطعَ الدائرةَ في النقطةِ ب على القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{س ص}}$، فـإذا كـانَ س ص = ٨ سم ، فجدْ أب.

تدريبُ ٢-٥

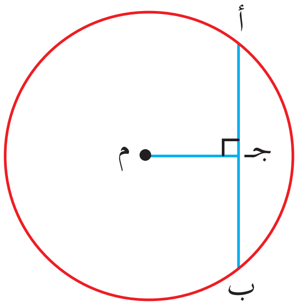
حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ .

فكِّرْ

١) أرادتْ سارةُ أنْ ترسمَ أكبرَ دائرةٍ داخلَ مربعٍ، معلومٍ طولُ ضلعِهِ، فقامتْ بتنصيفِ أضلاعِ المربعِ، ثمَّ وصلتْ بينَ منتصفَيْ كلِّ ضلعيْنِ متقابليْنِ، بقطعتيْنِ مستقيمتيْنِ، فتقاطَعتَا في النقطةِ م، ركزَتِ الفرجارَ في النقطةِ م، وفتحتْهُ فتحةً مساويةً للبعدِ بينَ النقطةِ م، ونقطةِ منتصفِ أحدِ الأضلاعِ ، ورسمتْ دائرةً.
هل ما قامتْ به سارةُ صحيحُ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٢) أحضرَ يمانُ جزءًا منْ صحنٍ دائريٍّ مكسورٍ، وتحدّى أخاهُ ريّانَ أنْ يحدِّدَ مستقيمًا يحتوي قطرًا لهذا الصحنِ، فهلْ لكَ أنْ تساعدَ ريّانَ؟

الأسئلةُ ؟



الشكلُ (٢ – ٦)

١) في الشكلِ (٢–٦)، دائرةٌ، مركزُها م، $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$،
$\overline{\text{م أ}}$ = ١٥ سم، $\overline{\text{م جـ}}$ = ٩ سم، جِدْ أب.

٢) $\overline{\text{م ن}}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها ع ، طولُهُ (١٠) سم، النقطةُ س منتصفُ $\overline{\text{م ن}}$، فإذا كانَ ع س = ١٠ سم ، فجَدْ طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ .

٣) $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها م، غيرُ مارينِ بالمركزِ، ويتقاطعانِ في النقطةِ و، إذا كان ق ∢أ و د = ٦٠°، وكانتْ م تقعُ داخلَ الزاويةِ الحادةِ جـ و ب، س منتصفُ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصفُ $\overline{\text{جـ د}}$، أثبتْ أنَّ: ق ∢ س م ص = ١٢٠°.

٤) $\overline{\text{ك ل}}$ وترٌ في دائرةٍ ، طولُهُ (١٢)سم ، ويبعدُ عنْ مركزِها (٣) سم، $\overline{\text{ك ع}}$ وترٌ آخرُ في الدائرةِ نفسِها، ويبعدُ عن مركزِها ٦ سم، جِدْ ك ع.

٥) $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها م ، ومتساويانِ في الطولِ ، أثبتْ أنَّ لهُما البعدَ نفسَهُ عنْ م.

٦) اعتمادًا على المبرهنةِ (٢–١)، كيفَ تحددُ مركزَ دائرةٍ تمرُّ برؤوسِ المثلثِ س ص ع؟

٧) نافذةُ مسجدٍ مصممةٌ على شكلِ قوسِ دائرةٍ ،طولُ قطرِها ٥ أمتارٍ، فإذا كانَ ارتفاعُ قوسِ النافذةِ فوقَ منتصفِ قاعدتِها يساوي ١,٥ مترًا، فجدْ عرضَ قاعدةِ النافذةِ.

الزاويةُ المركزيّةُ والزاويةُ المحيطيّةُ

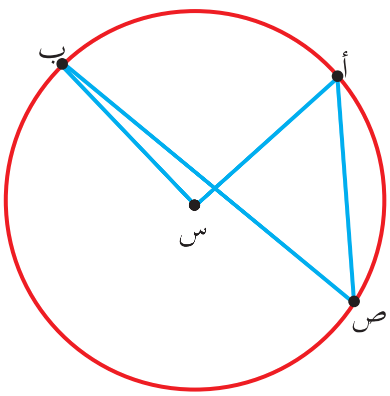
Central Angle and Inscribed Angle

النتاجات

- تتعرفُ الزاويةَ المركزيّةَ والزاويةَ المحيطيّةَ.
- تبرهنُ مبرهناتٍ على الزاويةِ المركزيّةِ والزاويةِ المحيطيّةِ.
- تحلُّ مسائلَ على الزاويةِ المركزيةِ والزاويةِ المحيطيّةِ.

الشكلُ (٢ – ٧) يمثلُ موقعَ سيارتيْنِ أ ، ب على مضمارٍ دائريٍّ، تُرصدانِ من نقطتيْنِ، الأولى س، التي تمثلُ مركزَ المضمارِ، والثانيةُ ص، على المضمارِ، بحيثُ تُقاسُ كلٌّ منَ الزاويتيْنِ أس ب ، أص ب.

ما العلاقةُ بينَ قياسَيْ هاتيْنِ الزاويتيْنِ ؟



الشكلُ (٢ – ٧)

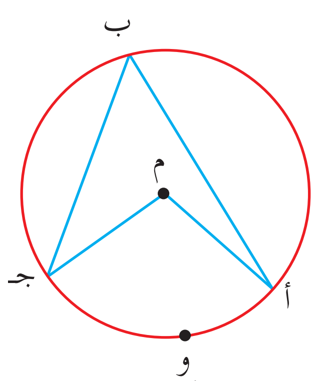
تعريفٌ

الزاويةُ المركزيّةُ: هيَ الزاويةُ التي يقعُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها يحتويانِ أنصافَ أقطارٍ.

الزاويةُ المحيطيّةُ: هيَ الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على محيطِ الدائرةِ، وضلعاها يحتويانِ وتريْنِ في الدائرةِ.

في الشكلِ (٢–٨) الزاويةُ أم جـ زاويةٌ مركزيةٌ، والزاويةُ أب جـ زاويةٌ محيطيةٌ، وهما مرسومتانِ على قوسٍ واحدٍ أ و جـ.

ناقشْ زميلَكَ: لماذا تُعدُّ الزاويةُ أب جـ زاويةً محيطيّةً؟ ولماذا تُعدُّ الزاويةُ أم جـ زاويةً مركزيةً؟



الشكلُ (٢ – ٨)

نشاطُ (٢ – ٢)

١) ارسمْ دائرةً مركزُها م، وطولُ نصفِ قطرِها (٥)سم.

٢) ارسمِ نصفَي القطريْنِ $\overline{\text{أم}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، بحيثُ يكونُ ق ∢ أم ب = ١٢٠°.

٣) ارسمِ الزاويةَ المحيطيةَ أ جـ ب، المرسومةَ على القوسِ $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

٤) استخدمِ المنقلةَ في قياسِ الزاويةِ أجـ ب.

٥) ما العلاقةُ بينَ قياسِ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ أم ب، أجـ ب؟

٦) كررِ النشاطَ مستخدمًا قياساتٍ مختلفةً للزاوية أ م ب، ماذا تلاحظُ؟

مبرهنةُ (٢ – ٢)

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مثلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيّةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.

١– المعطياتُ

∢أم ب زاويةٌ مركزيةٌ ، ∢أجـ ب زاويةٌ محيطيةٌ ، مرسومتانِ على القوسِ $\overset{\frown}{\text{أ و ب}}$، الشكلُ (٢–٩)

٢– المطلوبُ

إثباتُ أنَّ: ق ∢ أم ب = ٢ق ∢ أ جـ ب.

٣– البرهانُ

صِلْ $\overline{\text{جـ م}}$ ،ومُدّهُ إلى د.

المثلثُ أ م جـ متطابقُ الضلعيْنِ ، فيهِ م أ = م جـ.

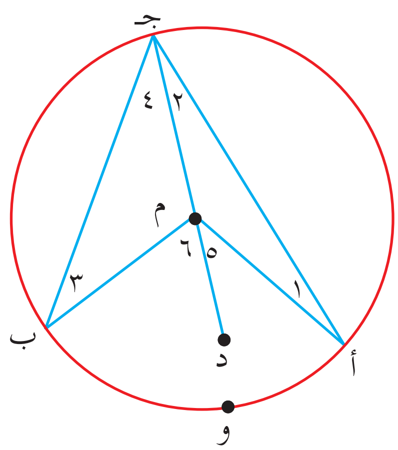
ق ∢ ١ = ق ∢ ٢ (زاويتا القاعدةِ في مثلثٍ متطابقِ الضلعيْنِ)

∢ ٥ زاويةٌ خارجةٌ للمثلثِ أم جـ

إذن ق ∢ ٥ = ق ∢ ١+ ق ∢ ٢

ق ∢ ٥= ٢ق ∢ ٢

بالمثلِ، يمكنُ إثباتُ أنَّ ق ∢ ٦ = ٢ق ∢ ٤



الشكلُ (٢ – ٩)

لكنَّ ق ∡ أم ب = ق ∡ ٥+ ق ∡ ٦ التبريرُ: ....

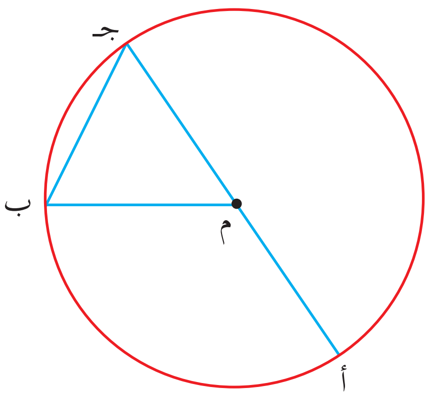
= ٢ق ∡ ٢ + ٢ق ∡ ٤ التبريرُ: ....

= ٢(ق ∡ ٢ + ق ∡ ٤)

= ٢ق ∡ أ جـ ب. (وهوَ المطلوبُ)

تدريبُ ٢–٦

أثبتِ المبرهنةَ (٢–٢)، إذا كانَ أحدُ ضلعَيِ الزاويةِ المحيطيةِ قطرًا في الدائرةِ، كما في الشكلِ (٢–١٠)



الشكلُ (٢ – ١٠)

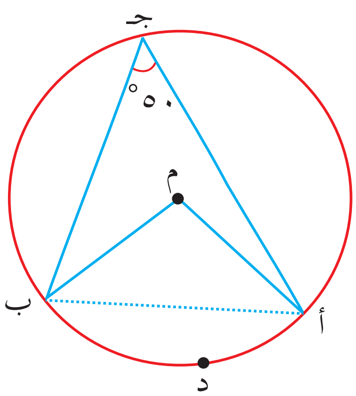
تدريبُ ٢–٧

أثبتْ أنَّ الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على قطرِ الدائرةِ قائمةٌ.

مثالُ (٢–٣)

في الشكلِ (٢–١١)، م مركزُ الدائرةِ، جدْ قياسَ كلٍّ مِنْ:

∡ أ م ب ، ∡ أ ب م.



الشكلُ (٢ – ١١)

الحلُّ

∡ أ م ب، ∡ أ جـ ب مركزيةٌ ومحيطيةٌ، مرسومتانِ على القوسِ $\overset{\frown}{\text{أ د ب}}$

ق∡ أ م ب = ١٠٠° التبريرُ: ....

ق∡ أ ب م = ق∡ ب أ م التبريرُ: ....

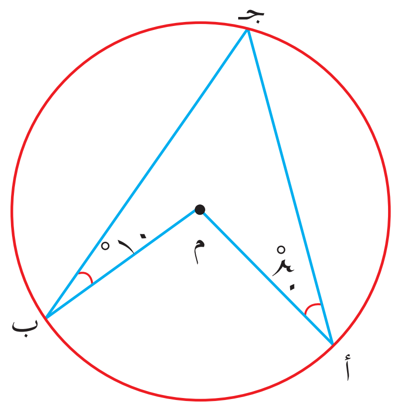
ق∡ أ ب م = $\frac{١}{٢}$ (١٨٠° – ١٠٠°) التبريرُ: ....

= ٤٠°

تدريبُ ٢-٨

يمثلُ الشكلُ (٢-١٢) دائرةً مركزُها م.

جدْ ق∢ أم ب.



الشكلُ (٢ - ١٢)

نشاطُ (٢ - ٣)

١) ارسمْ دائرةً مركزُها م.

٢) حددِ القوسَ $\frown{\text{أجـ ب}}$ على الدائرةِ .

٣) ارسمِ الزوايا المحيطيةَ أس ب، أص ب، أع ب، المقابلةَ للقوسِ $\frown{\text{أجـ ب}}$.

٤) استخدمِ المنقلةَ في قياسِ كلٍّ منَ الزوايا أس ب ، أص ب ،أع ب، ماذا تلاحظُ؟

٥) ارسمِ الزاويةَ المركزيةَ أ م ب.

٦) ما علاقةُ كلٍّ منَ الزوايا أ س ب، أص ب، أع ب، بالزاويةِ أ م ب؟

مبرهنةُ (٢ - ٣)

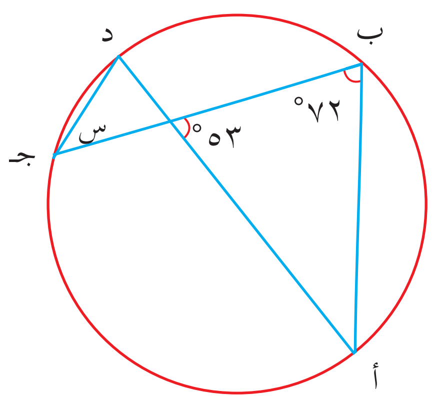
الزاويتانِ المحيطيتانِ المرسومتانِ على قوسٍ واحدٍ في الدائرةِ متساويتانِ في القياسِ .

تدريبُ ٢-٩

أثبتِ المبرهنةَ (٢-٣)

مثالُ (٢-٤)

جدْ قيمةَ س في الشكلِ (٢-١٣)



الشكلُ (٢ - ١٣)

الحلُّ

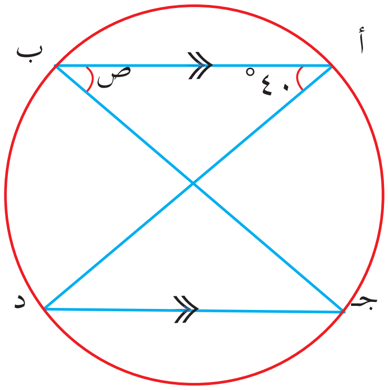
ق∢ ب جـ د = ق∢ ب أ د التبريرُ: ....

س= ١٨٠° - (٧٢° + ٥٣°) التبريرُ: ....

س= ٥٥°

مثالُ (٢-٥)

في الشكلِ (٢-١٤) ، أب // جـ د ، جدْ قيمةَ ص.



الشكلُ (٢ - ١٤)

الحلُّ

ق∢ أ د جـ = ق∢ د أ ب التبريرُ: ....

= ٤٠°

ق∢ أب جـ = ق∢ أ د جـ التبريرُ: ....

ص = ٤٠°

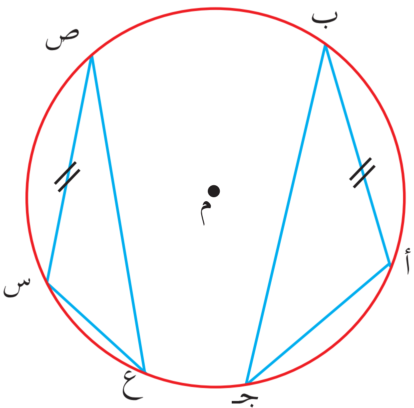
تدريبُ ٢-١٠

يمثلُ الشكلُ (٢-١٥) دائرةً مركزُها م، أب = س ص، أثبتْ أنَّ ق∢ أجـ ب = ق∢ س ع ص.

إرشادٌ: ارسمْ أنصافَ الأقطارِ $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$، $\overline{\text{س م}}$، $\overline{\text{ص م}}$.

ابحثْ في تطابقِ المثلثيْنِ أم ب ، س م ص.

استخدمْ مبرهنةَ (٢ - ٢).



الشكلُ (٢ - ١٥)

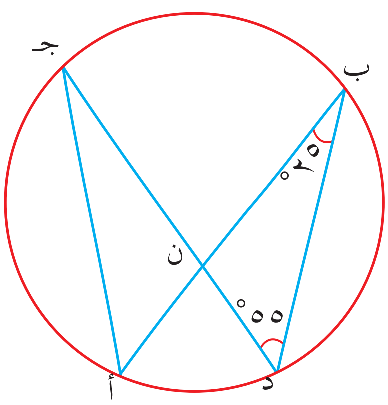
بصورةٍ عامةٍ

الزوايا المحيطيةُ المرسومةُ على أوتارٍ متطابقةٍ (وأقواسٍ متطابقةٍ) تتساوَى في القياسِ.

تدريبُ ٢-١١

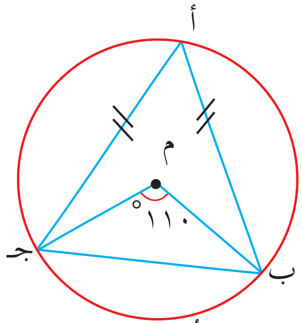
في الشكلِ (٢-١٦)، قالَ عبدُ الرحمنِ إنّ: ق∢ جـ ن أ = ٧٠°

هلْ توافقُ عبدَ الرحمنِ أمْ لا؟ برِّرْ إجابتَكَ.



الشكلُ (٢ - ١٦)

الأسئلةُ ؟



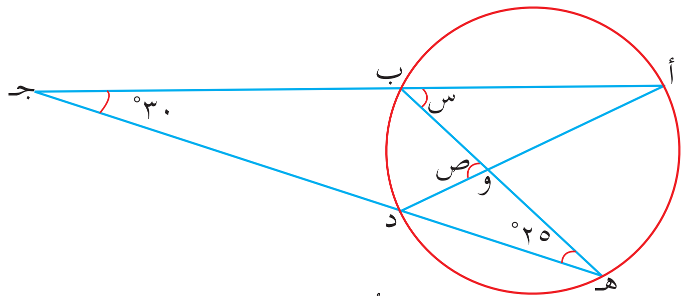
الشكلُ (٢ – ١٧)

١) يمثلُ الشكلُ (٢–١٧)، دائرةً مركزُها م، أب = أجـ ، جدْ قياسَ كلٍّ منْ:

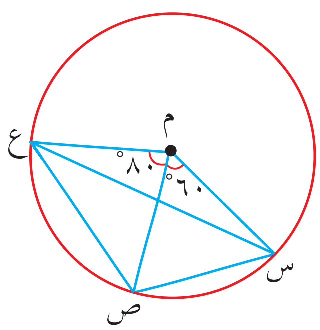
أ) ∡ ب أجـ

ب) ∡ أب م

٢) في الشكلِ (٢–١٨)، جدْ قيمةَ كلٍّ منْ: س، ص.



الشكلُ (٢ – ١٨)



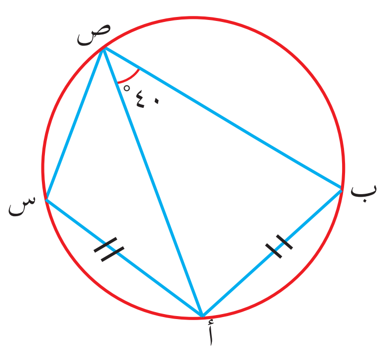
الشكلُ (٢ – ١٩)

٣) يمثلُ الشكلُ (٢–١٩)، دائرةً مركزُها م، احسبْ قياساتِ زوايا المثلثِ س ص ع.

٤) $\overline{\text{أب}}$ قطرٌ في دائرةٍ، جـ نقطةٌ على الـدائرةِ، بحيثُ إنَّ:

ق ∡أ ب جـ = ٤٠°، جدْ قياسَ ∡ب أجـ .

٥) في الشكلِ (٢–٢٠)، أ ب = أس، جِدْ ق ∡س ص ب.



الشكلُ (٢ – ٢٠)

٦) س ص ، ع ل ، وترانِ متقاطعانِ داخلَ دائرةٍ في النقطةِ و، بحيث إِنَّ ع ص = ٩سم ، ص و = ٦سم ، س ل = ٣سم، جِدْ طَولَ ل و.

٧) أب، جـ د، وترانِ متقاطعانِ داخلَ دائرةٍ في النقطةِ و:

أ) أثبتْ أنَّ: و أ × و ب = و جـ × و د.

ب) إذا كانَ و أ = ٤سم، وب = ٦سم، و د = ١٢سم، جِدْ قيمةَ كلٍّ منْ: و جـ ،جـ د.

جـ) إذا كانَ و أ = ٣سم، و ب = ٦سم، جـ د = ١١سم، جدْ قيمةَ كلٍّ منْ: و جـ ، و د.

المماساتُ

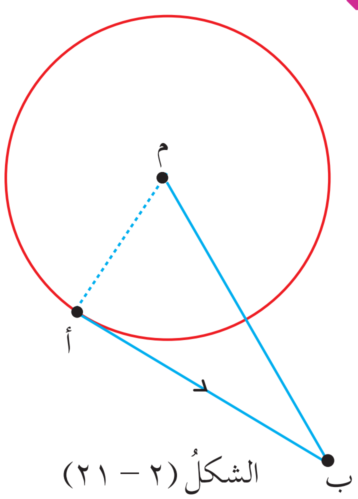
Tangents

النتاجاتُ

- تتعرفُ مماسَ الدائرةِ وخصائصَهُ.
- تبرهنُ مبرهناتٍ على مماسِ الدائرةِ.
- تحلُّ مسائلَ على مماسِ الدائرةِ.
- تتعرفُ الزاويةَ المماسيّةَ.
- تبرهنُ مبرهناتٍ على المماسِ والزاويةِ المماسيّةِ.
- تحلُّ مسائلَ على الزاويةِ المماسيّةِ.

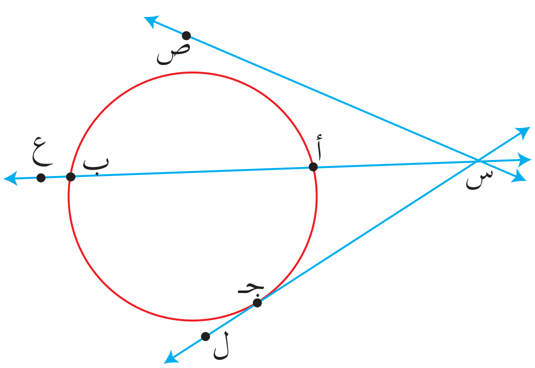
أوّلًا مماساتُ الدائرةِ Tangents of a Circle

الشكلُ (٢ – ٢١) يمثلُ طائرةً (أ)، التي تسير في مسارٍ دائريٍّ، طولُ نصفِ قطرِهِ (٦٠)كم، أُطلقتْ قذيفةٌ مِنَ الطائرةِ نحوَ الهدفِ (ب) الذي يبعدُ عنِ الرادارِ (م) الموجودِ في مركزِ الدائرةِ، مسافةَ (١٠٠)كم.
ما بعدُ الهدفِ عنِ الطائرةِ عندَ تلكَ اللحظةِ؟



الشكلُ (٢ – ٢١)

لتكنْ س نقطةً خارجَ دائرةٍ، رُسمَ مستقيمٌ يمرُّ بالنقطةِ س. ما علاقــةُ هــذا المستقيــمِ بالدائــرةِ؟ الشكلُ (٢–٢٢) يمثلُ الحالاتِ الممكنةَ لمثل هَذا المستقيمِ:



الشكلُ (٢ – ٢٢)

١) المستقيمُ يقعُ خارجَ الدائرةِ، ولا يقطعُها، مثل المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$.

٢) المستقيمُ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ ويحتوي وترًا فيها، ويسمَّى قاطعًا للدائرةِ، مثلُ المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$.

٣) المستقيمُ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، ويسمَّى مماسًا للدائرةِ، وتُسمَّى نقطةُ تقاطعِ المماسِ معَ الدائرةِ نقطةَ التماسِّ، مثلُ المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$.

تذكَّرْ

– أقصرُ قطعةٍ مستقيمةٍ تصلُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ هيَ القطعةُ العموديّةُ عليهِ منْ تلكَ النقطةِ.

– إذا كانتِ النقطةُ أ خارجَ الدائرةِ التي مركزُها م، وطولُ نصفِ قطرِها ر، فإنَّ: أم > ر.

مبرهنةُ (٢ – ٤)

مماسُ الدائرةِ يكونُ عموديًا على نصفِ القطرِ المرسومِ منْ نقطةِ التماسِ.

١– المعطياتُ

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسٌ للدائرةِ التي مركزها م، عندَ النقطةِ جـ ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصفُ قطرٍ للدائرةِ .الشكلُ (٢–٢٣)

٢– المطلوبُ

إثباتُ أنَّ: $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

٣– البرهانُ

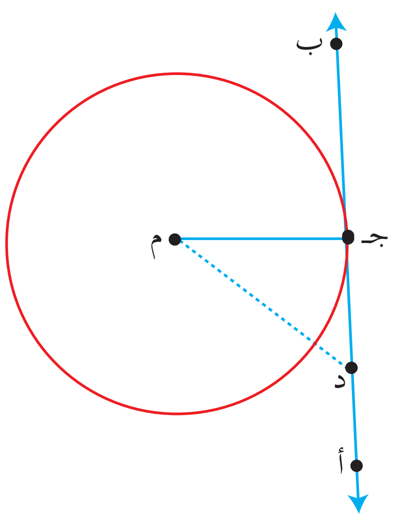
لتكنْ د ، أيةَ نقطةٍ على المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ غيرَ النقطةِ جـ ،

ارسمْ $\overline{\text{م د}}$.

د، تقعُ خارجَ الدائرةِ (المماسُ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ جـ)

م د > م جـ (م جـ = طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ)

فتكونُ $\overline{\text{م جـ}}$ أقصرَ قطعةٍ تصلُ بينَ المركزِ (م) وَالمماسِ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، إذن: $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (وهوَ المطلوبُ).

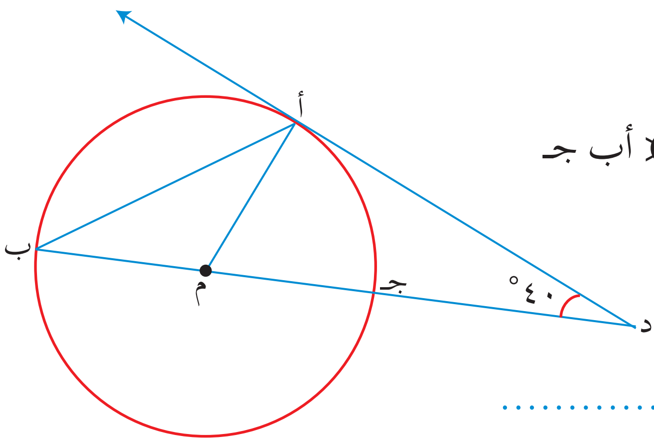


الشكلُ (٢ – ٢٣)

مبرهنة (٢ – ٥)

المستقيمُ الذي يعامدُ نصفَ قطرِ الدائرةِ عندَ نهايتِهِ على الدائرةِ يكونُ مماسًا لها.

مثالُ (٢–٦)



الشكلُ (٢ – ٢٤)

في الشكلِ (٢–٢٤)، دائرةٌ مركزُها م، جِدْ ق∡ أب جـ

الحلُّ

$\overleftarrow{\text{د أ}}$ مماسٌ للدائرةِ عندَ النقطةِ أ

فيكونُ $\overline{\text{م أ}} \perp \overleftarrow{\text{د أ}}$ التبريرُ: ....

ق∡ م أ د = ٩٠°

ق∡ أ م د = ١٨٠° – (٩٠° + ٤٠°) التبريرُ: ....

= ٥٠°

ق∡ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ق∡ أ م د التبريرُ: ....

= ٢٥°

تدريبُ (٢–١٢)

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمسُّ دائرةً مركزُها م عندَ النقطةِ ب، أب = ٦سم ، أم = ١٠سم ، جدْ طولَ قطرِ الدائرةِ.

مبرهنةُ (٢ – ٦)

إذا رُسمَ مماسانِ لدائرةٍ مركزُها (م)،من نقطةٍ خارجَها مثلِ (ن)، وكانتْ نقطتا التماسِ هما أ، ب فإنَّ:

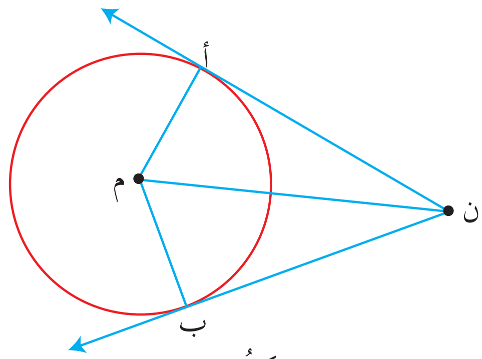
١) ن أ = ن ب

٢) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصّفُ الزاويةَ بينَ المماسيْنِ (∡ أ ن ب)

٣) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصّفُ الزاويةَ بينَ نصفي القطريْنِ (∡ أ م ب)

تدريبُ (٢–١٣)

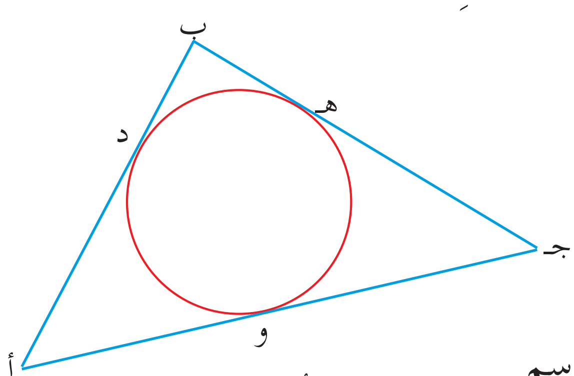
الشكلُ (٢ – ٢٥) يمثلُ الحالةَ العامةَ لمبرهنةِ (٢–٦)
أثبتْ هذهِ المبرهنةَ.



الشكلُ (٢ – ٢٥)

مثالُ (٢–٧)

يمثلُ الشكلُ (٢–٢٦) المثلثَ أ ب جـ الذي يمسُّ الدائرةَ في النقاطِ د، هـ، و
أد = ٣سم ، ب د = ٢سم ، ب جـ = ٦سم جِدْ أطوالَ أضلاعِ المثلثِ أب جـ.



الشكلُ (٢ – ٢٦)

الحلُّ

أو = أد = ٣ سم   التبريرُ: ....

ب هـ = ب د = ٢سم   التبريرُ: ....

جـ هـ = ب جـ – ب هـ = ٦ – ٢ = ٤سم

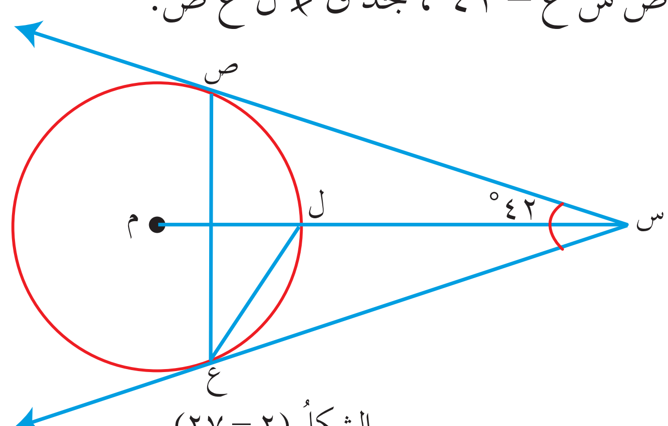
أطوالُ أضلاعِ المثلثِ أ ب جـ: أب = أد + دب = ٥سم

ب جـ = ٦سم (مُعطَى)

أ جـ = أو + و جـ = ٣ + ٤ = ٧سم

تدريبُ (٢–١٤)

يمثلُ الشكلُ (٢–٢٧) المماسيْنِ س ص، س ع، للدائرةِ التي مركُزها م عندَ النقطتيْنِ ص ، ع على التوالِي، ق ∢ص س ع = ٤٢°، جدْ ق ∢ ل ع ص.



الشكلُ (٢ – ٢٧)

فكِّرْ

جـ أ ↔ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها م في النقطةِ أ، طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ ٦سم ، جـ أ= ١٠سم،

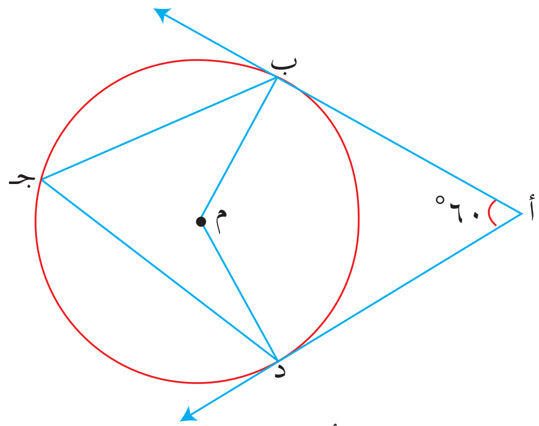
قالَ عدنانُ : جـ م = ٨سم ، لأنَّ: (جـ م)^{٢} = (جـ أ)^{٢} – (أ م)^{٢}= ٦٤

فهلْ توافقُهُ على ذلكَ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

الأسئلةُ

١) يمثلُ الشكلُ (٢–٢٨) دائرةً مركزُها م، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماسانِ لدائرةٍ عندَ النقطتيْنِ ب ، د على التوالي، بحيثُ أنّ ق∡ ب أ د = ٦٠°،

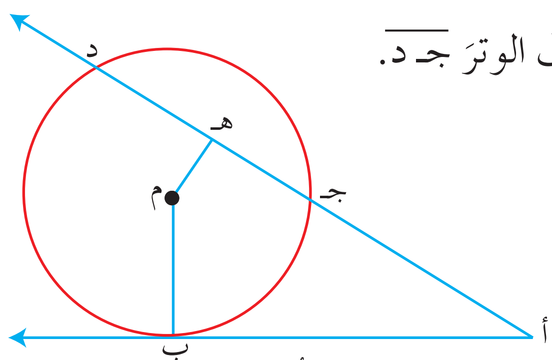
جِدْ قياسَ كلٍّ منْ ∡ أب د، ∡ ب جـ د



الشكلُ (٢ – ٢٨)

٢) يمثلُ الشكلُ (٢–٢٩) دائرةً مركزُها م، $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماسٌّ لها عندَ النقطةِ ب، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ قاطعٌ لها في النقطتيْنِ جـ ، د ، النقطةُ هـ تقعُ على الوترِ $\overline{\text{جـ د}}$، بحيثُ إنَّ الزاويتيْنِ ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتانِ.

أثبتْ أنَّ النقطةَ هـ تنصّفُ الوترَ $\overline{\text{جـ د}}$.



الشكلُ (٢ – ٢٩)

٣) $\overline{\text{س ص}}$ قطرٌ في دائرةٍ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسٌّ لها عنَد النقطةِ س، رُسمَ الوتُر $\overline{\text{ن ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$، أثبتْ أنَّ القطرَ $\overline{\text{س ص}}$ ينصفُ الوترَ $\overline{\text{ن ل}}$.

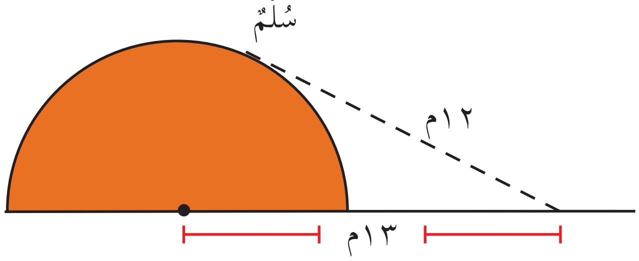
٤) مسّتْ دائرةٌ مركزُها م، مستقيميْنِ متوازييْنِ في النقطتيْنِ أ، ب، ثمَّ رُسمَ مماسٌّ ثالثٌ للدائرةِ، فقطعَ المماسيْنِ المتوازييْنِ في النقطتيْنِ جـ، د .

أثبتْ أنَّ الزاويةَ جـ م د قائمةٌ.

٥) ارسمِ المثلثَ أب جـ، استخدمْ خصائصَ المماساتِ في تحديدِ مركزِ الدائرةِ التي تمسُّ أضلاعَهُ.

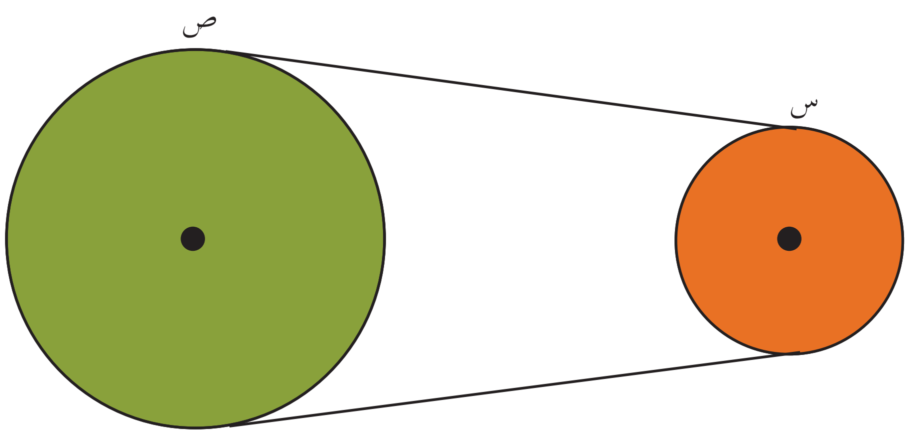
٦) وُضِعَ طبقٌ دائريُّ الشكلِ، في صندوقٍ قاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ ،طولُ ضلعِها ٢٤ سم ، بحيثُ إنَّ محيطَ الطبقِ يمسُّ جوانبَ الصندوقِ ،جِدْ بُعدَ مركزِ الطبقِ عنْ رأسِ قاعدةِ الصندوقِ.

٧) يمثلُ الشكلُ(٢-٣٠) سلمًا طولُه ١٢ مترًا، يرتكزُ بطرفِهِ السفليِّ على أرضٍ أفقيّةٍ، ويرتكزُ بطرفِهِ العلويِّ على قبةٍ إسمنتيةٍ، على شكلِ نصفِ كرةٍ، بحيثُ يبعدُ مركزُ الكرةِ ١٣مترًا عنْ طرفِ السلمِ السفليِّ . جِدْ طولَ نصفِ قطرِ القبةِ.



الشكلُ (٢ - ٣٠)

٨) يمثلُ الشكلُ(٢-٣١)، حزامًا يمرُّ على دولابيْنِ دائريْنِ، طولُ نصفِ قطرِ الدولابِ الأصغرِ ١٠سم، وطولُ نصفِ قطرِ الدولابِ الأكبرِ ٢٦ سم، والبعدُ بينَ مركزيْهِما ٥٦سم.
جِدْ طولَ الجزءِ المستقيمِ مِنَ الحزامِ بينَ النقطتيْنِ س، ص.

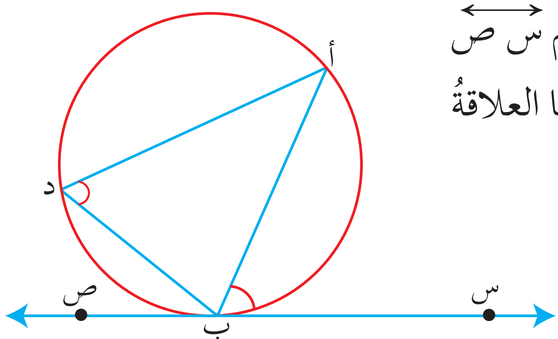


الشكلُ (٢ - ٣١)

٩) حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

ثانيًا الزاويةُ المماسيَّةُ Angle between a Tangent and a Chord

الشكلُ (٢ – ٣٢)، يمثلُ دائرةً يمسُّها المستقيمُ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ عندَ النقطةِ ب، النقطتانِ أ، د، نقطتانِ على الدائرةِ. ما العلاقةُ بينَ قياسَي الزوايتيْنِ س ب أ ، ب د أ؟

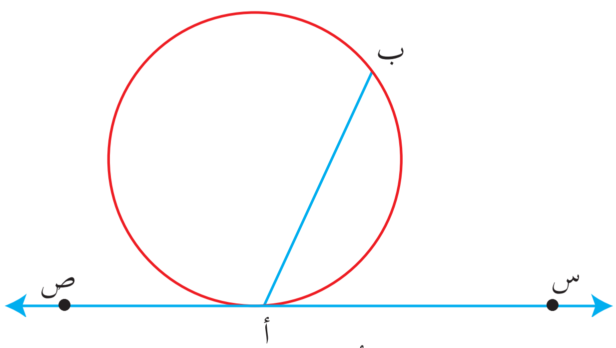


الشكلُ (٢ – ٣٢)

تعريفٌ

الزاويةُ المماسيةُ: هي الزاويةُ المحصورةُ بينَ مماسِ الدائرةِ وأيِّ وترٍ فيها مارٍّ بنقطةِ التماسِّ.

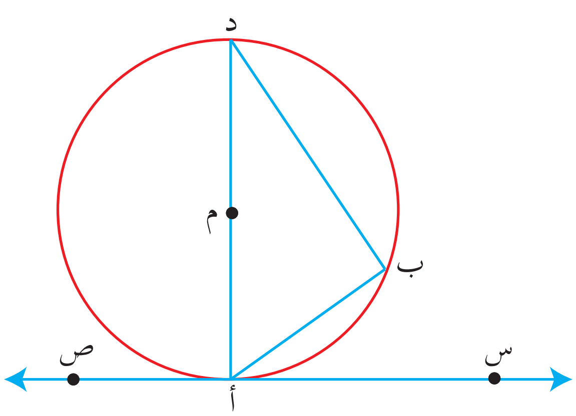
يمثلُ الشكلُ (٢ – ٣٣) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسًا لدائرةٍ عندَ النقطةِ أ، $\overline{\text{أب}}$ وترٌ في الدائرةِ، الزاويتانِ∡ س أب، ∡ ص أب زاويتانِ مماسيتانِ.



الشكلُ (٢ – ٣٣)

مثالُ (٢–٨)

يمثلُ الشكلُ (٢ – ٣٤) دائرةً مركزُها م، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسٌّ لها عندَ النقطةِ أ، $\overline{\text{أ د}}$ قطرٌ لها، ب نقطةٌ أُخرى على الدائرةِ. أثبتْ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسيةِ س أب، يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ ب د أ.



الشكلُ (٢ – ٣٤)

١ – المعطياتُ

$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها م ، عندَ النقطةِ أ، $\overline{\text{أ د}}$ قطرٌ فيها، ب نقطةٌ أخرى على الدائرةِ.

٢ – المطلوبُ

إثباتُ أن ق∡ س أ ب = ق∡ ب د أ.

٣ – البرهانُ

ق∡ س أ د = ٩٠°   التبريرُ: ....

ق∡ س أ ب + ق∡ ب أ د = ٩٠°

ق∡ أ ب د = ٩٠°.   التبريرُ: ....

ق∡ ب د أ + ق∡ ب أ د = ٩٠°   التبريرُ: ....

إذنْ: ق∡ س أب + ق∡ ب أ د = ق∡ ب د أ + ق∡ ب أ د = ٩٠°.

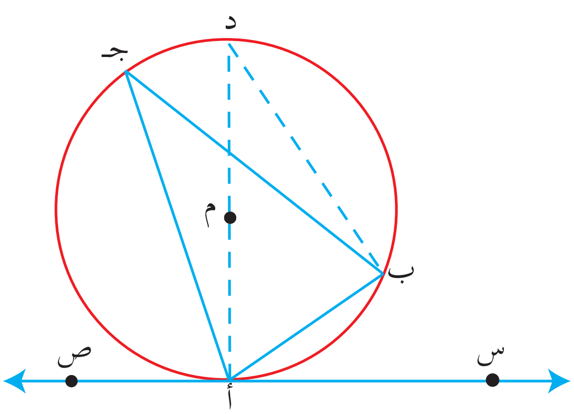
ومنهُ: ق∡ س أ ب = ق∡ ب د أ (وهوَ المطلوبُ).

مبرهنةُ (٢ – ٧)

قياسُ الزاويةِ المماسيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ.

١ – المعطياتُ

$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها م عندَ النقطةِ أ ، $\overline{\text{أب}}$ وترٌ فيها، ∡أ جـ ب زاويةٌ محيطيّةٌ مرسومةٌ على الوترِ $\overline{\text{أب}}$، مشتركةٌ مع الزاوية المماسيـةِ س أ ب في القوسِ، الشكلُ (٢–٣٥).



الشكلُ (٢ – ٣٥)

٢ – المطلوبُ

إثباتُ أنَّ: ق ∡س أ ب = ق ∡ ب جـ أ.

٣- البرهانُ

ارسمِ القطرَ $\overline{\text{أ د}}$، ارسمِ الوترَ $\overline{\text{ب د}}$.

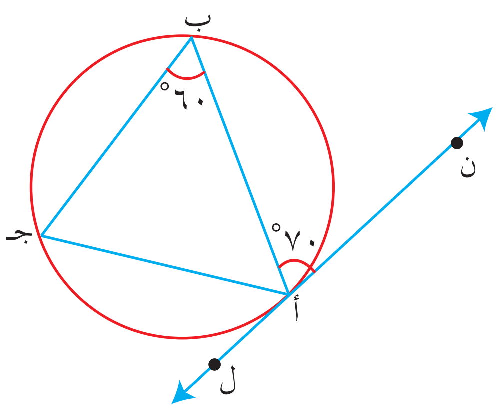
في مثالِ (٢-٨) تم إثبات أنَّ ق∡س أب = ق∡ب د أ.

ق∡ب جـ أ = ق∡ب د أ.   التبريرُ: ....

إذن: ق∡س أ ب = ق∡ب جـ أ (وهوَ المطلوبُ)

مثالُ (٢-٩)

في الشكلِ (٢-٣٦) جدْ قياساتِ زوايا المثلثِ أ ب جـ.



الشكلُ (٢ - ٣٦)

الحلُّ

ق ∡ أ جـ ب = ق ∡ ن أ ب   التبريرُ: ....

= ٧٠°

ق ∡ ل أ جـ = ق ∡ أ ب جـ   التبريرُ: ....

= ٦٠°

ق ∡ ب أ جـ = ١٨٠° - (ق ∡ أ ب جـ + ق ∡ أ جـ ب)   التبريرُ: ....

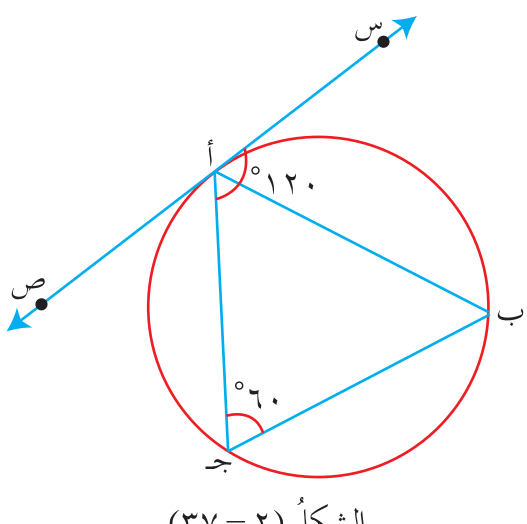
= ١٨٠° - (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠°

إذن قياساتُ زوايا المثلثِ أ ب جـ وهي:

ق ∡ أ ب جـ = ٦٠°، ق ∡ ب جـ أ = ٧٠°، ق ∡ ب أ جـ = ٥٠°

تدريبُ ٢-١٥

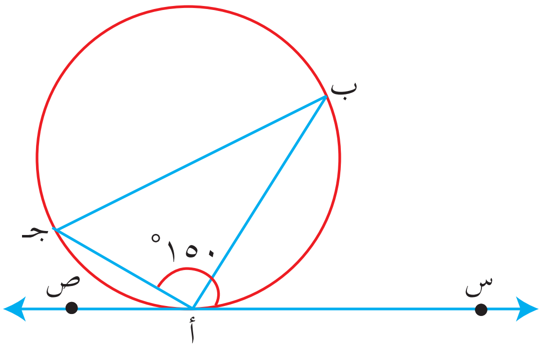
في الشكلِ (٢-٣٧) أثبتْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ متطابقُ الأضلاعِ.



الشكلُ (٢ - ٣٧)

الأسئلةُ

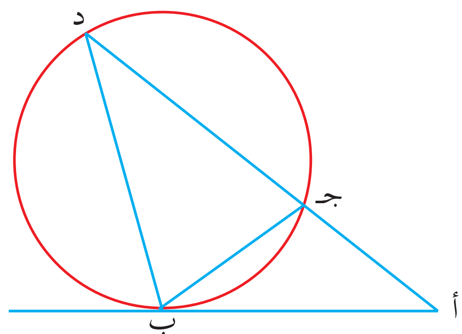
١) في الشكلِ (٢–٣٨)جِدْ قياسَ ∢ أ ب جـ.



الشكلُ (٢ – ٣٨)

٢) في الشكلِ (٢–٣٩) أثبتْ أنَّ (أب)^{٢} = أجـ × أد

إرشادٌ: ابحث في تشابه المثلثيْن أ ب جـ ، أ د ب.

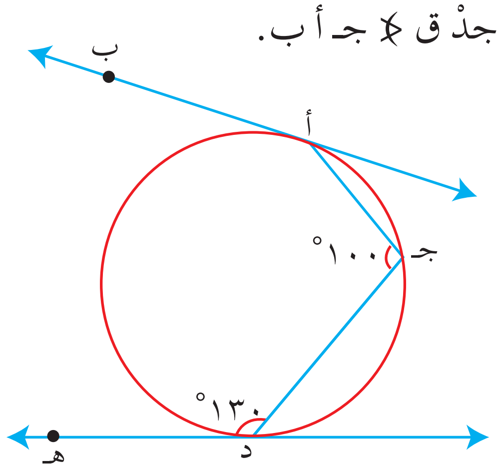


الشكلُ (٢ – ٣٩)

٣) تقاطعتْ دائرتانِ في س، ص، رُسمَ الوترُ $\overline{\text{س أ}}$ في إحدى الدائرتيْنِ، مُماسًّا للأخرى في النقطةِ س، ورُسمَ الوترُ $\overline{\text{ص ب}}$ في الدائرةِ الثانيةِ، مُماسًّا للأولى في النقطةِ ص.

أثبتْ أنَّ $\overleftrightarrow{\text{س ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ص أ}}$.

٤) في الشكلِ (٢–٤٠) جدْ ق ∢ جـ أ ب.



الشكلُ (٢ – ٤٠)

الفصلُ الرَّابعُ الشكلُ الرباعيُّ الدائريُّ والزاويةُ الخارجةُ عنهُ

Cyclic Quadrilateral and its Exterior Angle

النتاجاتُ

- تتعرفُ الشكلَ الرباعيَّ الدائريَّ، والزاويةَ الخارجةَ عنهُ، وخصائصَهُ.
- تبرهنُ مبرهناتٍ على الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ.
- تحلُّ مسائلَ على الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ.

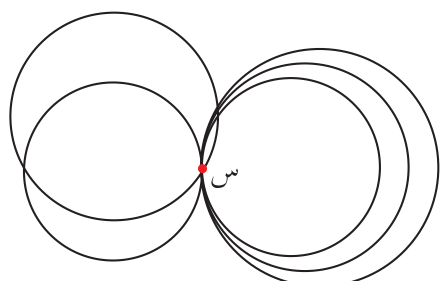
١) ما عددُ الدوائرِ التي يمكنُ رسمُها، بحيثُ تمرُّ كلٌّ منْها، بنقطةٍ معلومةٍ؟

٢) ما عددُ الدوائرِ التي يمكنُ رسمُها، بحيثُ تمرُّ كلٌّ منها، بنقطتيْنِ معلومتيْنِ؟

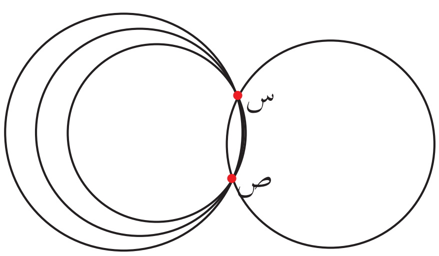
٣) ما عددُ الدوائرِ التي يمكنُ رسمُها، بحيثُ تمرُّ كلٌّ منها، بثلاثِ نقاطٍ معلومةٍ ليستْ على استقامةٍ واحدةٍ (أيْ رؤوسَ مثلثٍ)؟

٤) ما عددُ الدوائرِ التي يمكنُ رسمُها ، بحيثُ تمرُّ كلٌّ منها، بأربعِ نقاطٍ مستويةٍ، لا يوجدُ ٣ منها على استقامةٍ (أيْ رؤوسَ شكلٍ رباعيٍّ)؟ هلْ يمكنُ رسمُ مثلِ هذهِ الدائرةِ لجميعِ الأشكالِ الرباعيةِ؟

للإجابةِ عنِ السؤاليْنِ ١، ٢ تأملِ الشكليْنِ (٢ – ٤١)، (٢–٤٢)، ماذا تلاحظُ؟

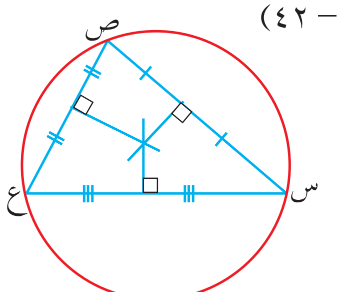


الشكلُ (٢ – ٤١)



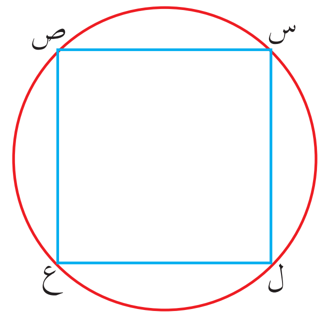
الشكلُ (٢ – ٤٢)

وللإجابةِ عنِ السؤالِ ٣، فإنَّ مركزَ الدائرةِ، التي تمرُّ برؤوسِ مثلثٍ، هوَ نقطةُ التقاءِ الأعمدةِ المنصّفةِ لأضلاعِه، أيْ أنّهُ توجدُ دائرةٌ واحدةٌ فقطْ تمرُّ برؤوسِ مثلثٍ معلومٍ (الشكلُ(٢–٤٣)).

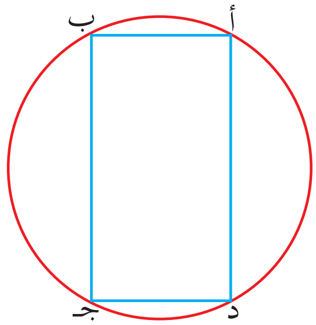


الشكلُ (٢ – ٤٣)

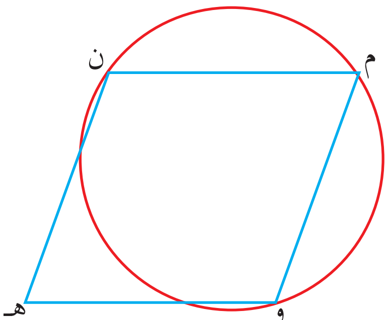
وللإجابةِ عنِ السؤالِ ٤، نأخذُ أيةَ ثلاثِ نقاطٍ منَ النقاطِ الأربعِ المعلومةِ، ونرسمُ الدائرةَ التي تمرُّ بهذهِ النقاطِ الثلاثِ، وهيَ دائرةٌ وحيدةٌ، فإذا مرتْ بالنقطةِ الرابعةِ فإنّها تكونُ الدائرةَ الوحيدةَ التي تمرُّ بالنقاطِ الأربعِ، أمّا إذا لمْ تمرَّ بالنقطةِ الرابعةِ، فإنّهُ لا يمكنُ رسمُ أيةِ دائرةٍ تمرُّ بالنقاطِ الأربعِ. تأمّلِ الأشكالَ (٢ – ٤٤)، (٢ – ٤٥)، (٢ – ٤٦).



الشكلُ (٢ – ٤٤)



الشكلُ (٢ – ٤٥)



الشكلُ (٢ – ٤٦)

تعريفٌ

الشكلُ الرباعيُّ الدائريُّ: هوَ الشكلُ الرباعيُّ الذي تقعُ رؤوسُهُ على دائرةٍ.

مبرهنةُ (٢ –٨)

في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ، مجموعَ قياسيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ يساوِي ١٨٠°.

١ – المعطياتُ

أب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ ، الشكلُ(٢–٤٧)

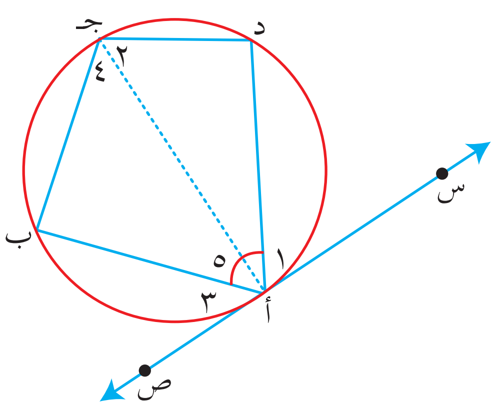
٢ – المطلوبُ

إثباتُ أنَّ : ق∡ أ ب جـ + ق∡ أ د جـ = ١٨٠°

ق∡ ب أ د + ق∡ ب جـ د = ١٨٠°

٣ – البرهانُ

ارسمِ المماسَ س ص↔، الذي يمسُّ الدائرةَ في النقطةِ أ.



الشكلُ (٢ – ٤٧)

ق∡١ = ق∡٢ التبريرُ: ....

ق∡٣ = ق∡٤ التبريرُ: ....

لكن ق∡٥ + (ق∡١ + ق∡٣) = ١٨٠° التبريرُ: ....

ق∡٥ + (ق∡٢ + ق∡٤) = ١٨٠°

ق∡ب أ د + ق∡ب جـ د = ١٨٠°

لكنَّ مجموعَ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ = ٣٦٠°

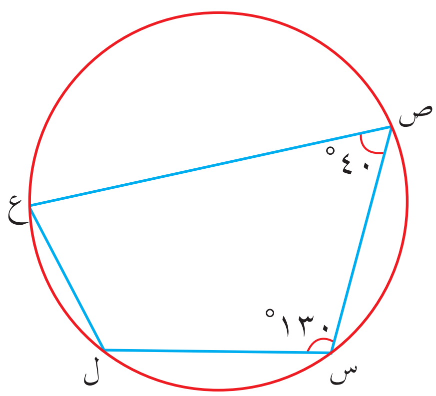
(ق∡ب أ د + ق∡ب جـ د) + (ق∡أ ب جـ + ق∡أ د جـ) = ٣٦٠°

١٨٠° + (ق∡أ ب جـ + ق∡أ د جـ) = ٣٦٠°

إذنْ: ق∡أ ب جـ + ق∡أ د جـ = ١٨٠° (وهو المطلوبُ)

مثالُ (٢-١٠)

س ص ع ل، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيهِ ق∡س = ١٣٠°، ق∡ص = ٤٠°، جِدْ قياسَ كلٍّ من: ∡ع، ∡ل .



الشكلُ (٢ - ٤٨)

الحلُّ

لاحظِ الشكلَ (٢-٤٨)،

ق∡س + ق∡ع = ١٨٠°

ق∡ع = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

كذلكَ: ق∡ص + ق∡ل = ١٨٠°

ق∡ل = ١٨٠° - ٤٠° = ١٤٠°

تدريبُ ٢-١٦

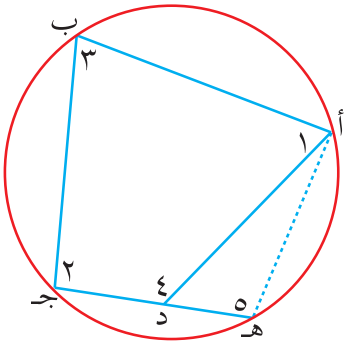
أ ب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيهِ ق∡أ يساوي ثلاثةَ أمثالِ ق∡جـ، جد ق∡جـ.

تدريبُ ٢-١٧

م ن ل ع، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ ،فيهِ ق∡م = ٨٠°، مُدَّ ع م باتجاهِ م إلى نقطةِ أ، جِدْ قياسَ كلٍّ منْ: ∡ن ل ع، ∡ن م أ، ماذا تلاحظُ؟

مبرهنة (٢ – ٩)

إذا كانَ مجموعُ قياسيْ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في شكلٍ رباعيٍّ يساوِي ١٨٠°، فإنَّ هذا الشكلَ يكونُ شكلًا رباعيًّا دائريًّا



الشكلُ (٢ – ٤٩)

١– المعطياتُ

أ ب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ، فيهِ قياسُ ∡ أ + قياس ∡جـ = ١٨٠°

٢– المطلوبُ

أثباتُ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ أب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ.

٣– البرهانُ

ارسمِ الدائرةَ التي تمرُّ بالنقاطِ أ، ب، جـ.

افرضْ أنَّ النقطةَ د، تقعُ داخلَ الدائرةِ، لاحظِ الشكلَ (٢–٤٩)

مدَّ $\overline{\text{جـ د}}$ منْ جهةِ د ، حتى يقطعَ الدائرةَ في النقطةِ هـ

ق∡ ١ + ق∡ ٢ = ١٨٠° التبريرُ: ....

فيكونُ ق∡ ٣ + ق∡ ٤ = ١٨٠° التبريرُ: ....

لكنَّ ق∡ ٣ + ق∡ ٥ = ١٨٠° التبريرُ: ....

فيكونُ ق∡ ٤ = ق∡ ٥، وهذا لا يتحققُ إلا إذا انطبقتْ د على هـ

أي أنَّ النقطةَ د تقعُ على الدائرةِ، أي أنّ الشكلَ أ ب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ. (وهوَ المطلوبُ).

تدريبُ ٢–١٨

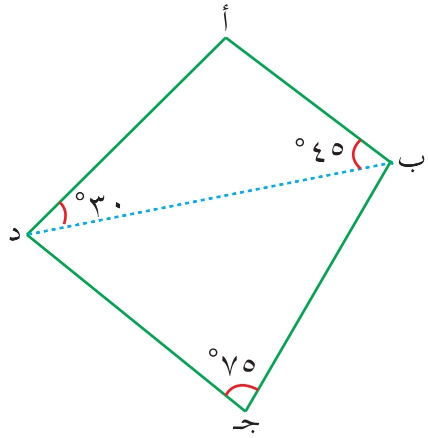
أثبتِ المبرهنةَ (٢–٨) على فرضِ أنَّ الرأسَ الرابعَ يقعُ خارجَ الدائرةِ.

تدريبُ ٢–١٩

هلْ يمكنُ رسمُ شكلٍ رباعيٍّ دائريٍّ، قياساتُ زواياهُ : ٥٠°، ١١٠°، ١٣٥°، ٦٥°؟ برِّرْ إجابتَكَ.

مثالُ (٢-١١)

أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ، فيهِ قياسُ ∡ب جـ د = ٧٥° قياسُ ∡ أ ب د = ٤٥°
قياسُ ∡ أ د ب = ٣٠°، أثبتْ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ أب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ.



الشكلُ (٢ – ٥٠)

الحلُّ

لاحظِ الشكلَ (٢-٥٠)

∡ أ = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٠°) = ١٠٥°   التبريرُ: ....

ق ∡ أ + ق ∡ جـ = ١٠٥° + ٧٥° = ١٨٠°

أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ، فيهِ زاويتانِ متقابلتانِ مجموعُ قياسيْهما يساوِي ١٨٠°، أيْ أنَّ:

أ ب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ. (وهوَ المطلوبُ)

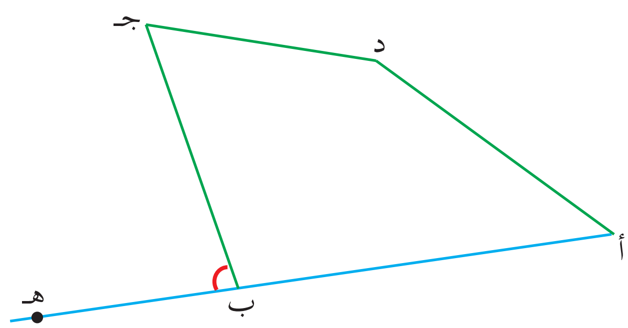
تدريبُ (٢-٢٠)

س ص ع ل شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ ، فيهِ ق∡ص ع ل = ٦٠°، ق ∡س ص ل = ٤٠°،
جدْ ق∡ص ل س.

تعريفٌ

الزاويةُ الخارجةُ عنِ الشكلِ الرباعيِّ: هيَ الزاويةُ المحصورةُ بينَ امتدادِ أحدِ أضلاعهِ والضلعِ المجاورِ لهُ.

في الشكلِ (٢-٥١) ، الزاويةُ هـ ب جـ ، زاويةٌ خارجةٌ عنِ الشكلِ الرباعيِّ أ ب جـ د.



الشكلُ (٢ – ٥١)

مبرهنةُ (٢ – ١٠)

قياسُ الزاويةِ الخارجةِ عنِ الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ يساوي قياسَ الزاويةِ الداخلةِ المقابلةِ للمجاورةِ لها.

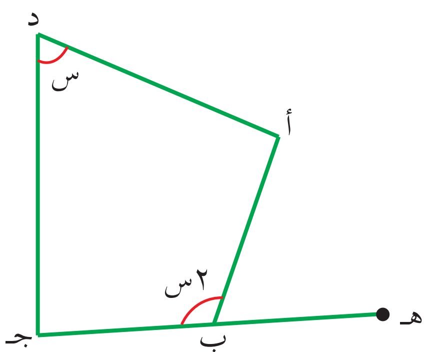
تدريبُ ٢–٢١

أثْبت مبرهنةَ (٢–١٠).

مثالُ (٢–١٢)

أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ فيهِ ق∢ أ د جـ يساوي نصفَ ق∢ أب جـ ، مُدَّ الضلعُ جـ ب منْ جهةِ ب إلى النقطةِ هـ، جد ق∢ أب هـ.

الحلُّ



الشكلُ (٢ – ٥٢)

الشكلُ (٢–٥٢) يمثلُ معطياتِ المثالِ.

نفرضُ أنَّ : ق∢ أدجـ = س

فيكونُ : ق∢أب جـ = ٢س

لكنَّ س + ٢س = ١٨٠° التبريرُ: ....

٣س = ١٨٠°

س = ٦٠°

قياسُ ∢أ دجـ = س = ٦٠°

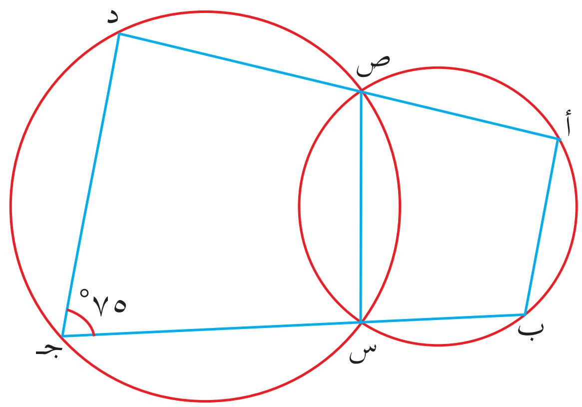
فيكونُ قياسُ ∢ أ ب جـ = ١٢٠° التبريرُ: ....

إذن ق∢أ ب هـ = ٦٠° التبريرُ: ....

تدريبُ ٢-٢٢

في الشكلِ (٢-٥٣)، جِدْ قياسَ كلٍّ منْ:

∡ أص س، ∡ أ ب س.



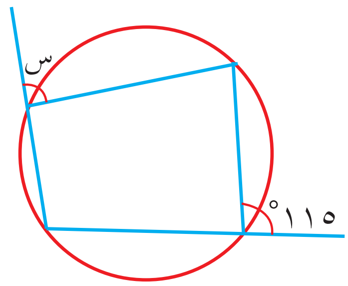
الشكلُ (٢ – ٥٣)

تدريبُ ٢-٢٣

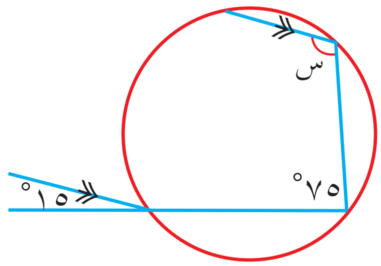
برهنْ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ، الذي فيهِ قياسُ الزاويةِ الخارجةِ، يساوي قياسَ الزاويةِ الداخلةِ المقابلةِ للمجاورةِ لها، يكونُ شكلًا رباعيًّا دائريًّا.

الأسئلةُ

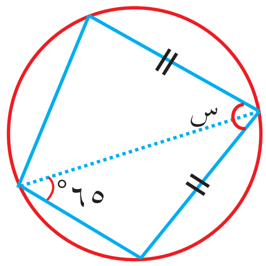
١) جدْ قيمةَ س، في كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ:



الشكلُ (٢ – ٥٤)



الشكلُ (٢ – ٥٥)

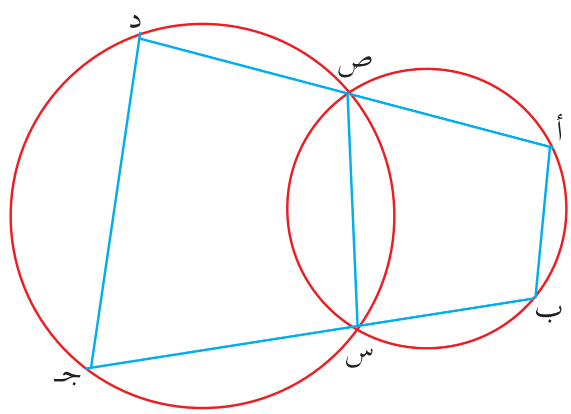


الشكلُ (٢ – ٥٦)

٢) أ ب جـ د، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيهِ ق∢ أ = ٣ ع + ١٠°، ق∢جـ = ٢ ع – ٣٠°، جِدْ قياسَ كلٍّ منْ: ∢ أ، ∢جـ .

٣) س ص ع ل، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ ، فيهِ $\overline{\text{س ع}}$ ينصّفُ كلًا منْ: ∢س، ∢ ع ، أثبتْ أنَّ $\overline{\text{س ع}}$ قطرٌ للدائرةِ .

٤) في الشكلِ (٢–٥٧) ، أثبتْ أنَّ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$.



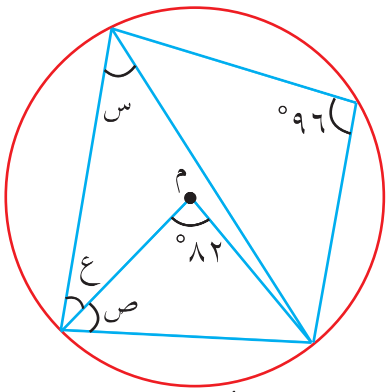
الشكلُ (٢ – ٥٧)

٥) (بصورةٍ عامّةٍ، يُعدُّ متوازِي الأضلاعِ، شكلاً رباعيًّا دائريًّا). بيّنْ صحةَ هذهِ العبارةِ.

٦) أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، فيهِ ق ∢ د ب جـ = س^{٢} – ٢س + ١٠°،
ق ∢جـ أد= ١٠س – ٢٥°، جِدْ القياساتِ المحتملةَ للزاويةِ د ب جـ .

أسئلةُ الوحدةِ

١) يمثلُ الشكلُ (٢–٥٨) دائرةً مركزُها م، جِدْ قيمةَ كلٍّ منْ :
س، ص، ع.



الشكلُ (٢ – ٥٨)

٢) أ ب جـ، مثلثٌ متساوِي الأضلاعِ، مرسومٌ داخلَ دائرةٍ، بحيثُ تقعُ رؤوسُهُ عليها، نُصّفَ القوسُ الأصغرُ أب في النقطةِ هـ، أَثبتْ أنَّ جـ هـ قطرٌ للدائرةِ.

٣) أب قطرٌ في دائرةٍ، أجـ ، أد ، وترانِ فيها، على جهتيْنِ مختلفتيْنِ منَ القطرِ أب، رُسِمَ مماسٌّ للدائرةِ عندَ النقطةِ ب، بحيثُ لاقى امتدادَ أجـ في النقطةِ هـ، ولاقى امتدادَ أ د في النقطةِ و، أثبتْ أنَّ الشكلَ جـ د و هـ، شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ .

٤) س ص ع ل ، شكلٌ ربــاعيٌّ دائريٌّ ، فيهِ س ص قُطْرٌ للدائرةِ، ق ∢ ع س ص= ٤٠°، جـِـدْ ق ∢س ل ع.

٥) دائرةُ مركزُها م، فيها س أ، س ب، مماسانِ عندَ النقطتيْنِ أ، ب أَثبتْ أنَّ الشكلَ س أ م ب شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ .

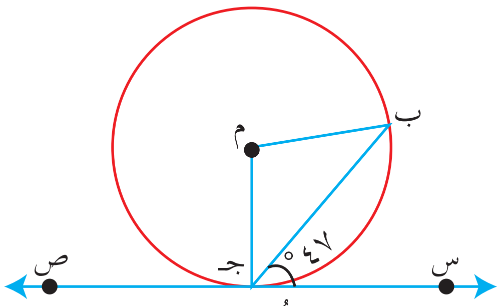
٦) أب قطْـرٌ في دائــرةٍ، النقطتــانِ جـ ، د على الــدائــرةِ بحيثُ أنَّ: ق ∢ جـ أب = ٤٠°، جــدْ ق ∢ أ دجـ. (جد جميع الحلول الممكنة).

٧) س ص ع ل ، شكـلٌ رباعيٌّ، مرسوم بداخلِـهِ دائـرةٌ تمسُّ أضلاعَهُ، أثبتْ أنَّ:
س ص+ ع ل = ص ع + ل س.

٨) تقاطعتْ دائرتانِ مركزاهُما م، ن، في النقطتيْن س ، ص ، النقطةُ أ منتصفُ س ص ،
أ) أثبتْ أنَّ النقاطَ م ، أ ، ن تقعُ على استقامةٍ واحدةٍ.
ب) إذا كانَ س ص = ٨سم، طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي مركزُها م = ٥سم، طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي مركزُها ن=٧ سم، جِدْ م ن.

٩) $\overline{\text{أب}}$ ، قطرٌ في دائرةٍ ينصّفُ الوترَ $\overline{\text{س ص}}$، أثبتْ أنَّ: ق∢أ ب س= ق ∢ أ س ص.

١٠) في الشكلِ (٢–٥٩)، دائرةٌ مركزُها م، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسٌّ لها عندَ النقطةِ جـ ، جدْ ق∢ب م جـ.



الشكلُ (٢ – ٥٩)

١١) أ ب جـ د شكْلٌ رباعيٌّ دائريٌّ فيه أد = جـ د، مدَّ $\overline{\text{أ ب}}$ في اتجاهِ ب إلى النقطةِ ل، بحيثُ أنَّ: ق∢جـ ب ل =٨٤°، جد ق∢ د جـ أ.

١٢) س ص ع ل، مستطيلٌ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ طولُ نصفِ قطرِها (١٧) سم، بحيثُ تمسُّ رؤوسَهُ، إذا كانَ س ص = ١٠ سم، جدْ مساحةَ المستطيلِ س ص ع ل.

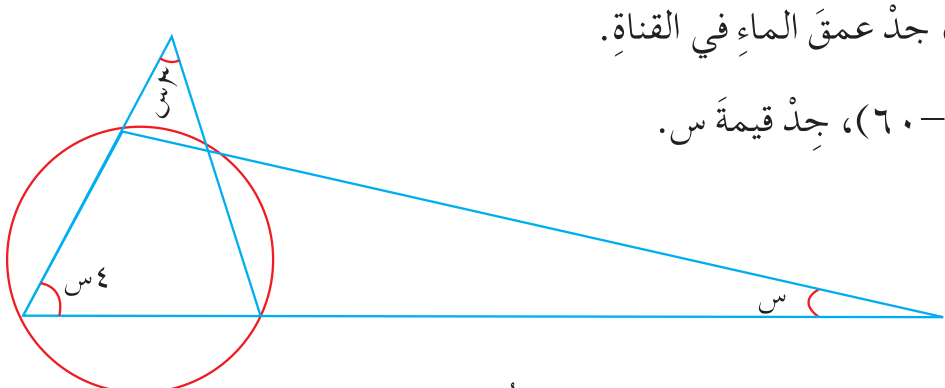
١٣) رُسمتْ دائرةٌ داخلَ المثلثِ أ ب جـ ، بحيثُ تمسُّ أضلاعَهُ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ في النقـاطِ س ، ص ، ع على التوالِي، إذا كانَ أب = ١٠ سم، ب جـ = ١٣سم، جـ أ = ٧سم، جدْ أ س.

١٤) $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ مماسانِ لدائرةٍ مركزُها م، عندَ النقطتيْن ب ، جـ ، ق∢ ب أ جـ =٣٤°، د نقطةٌ على القوسِ الأكبرِ $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ ، هـ نقطةٌ على القوسِ الأصغرِ $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$، جدْ قياسَ كلٍّ منْ:

∢ب د جـ ، ∢ب هـ جـ.

١٥) قناةٌ مائيةٌ، مقطُعها العرضيُّ على شكلِ نصفِ دائرةٍ، طولُ قطرِها (٥)م، عرضُ سطحِ الماءِ فيها (٤,٨) م، جدْ عمقَ الماءِ في القناةِ.

١٦) في الشكلِ (٢–٦٠)، جِدْ قيمةَ س.



الشكلُ (٢ – ٦٠)

الوحدةُ الثالثةُ

٣

أنظمةُ المعادلاتِ

تُعدُّ الرياضياتُ لغةً عالميةً، تمثلُ وعاءً ناقلاً للفكرِ الإنسانيِّ، منْ خلالِ ما تستخدمُهُ من رموزٍ محددةٍ، لتحويلِ التعابيرِ المختلفةِ إلى لغةِ الرياضياتِ.

ويُعدُّ الجبرُ لغةَ الرموزِ والعلاقاتِ، ومنْ ذلكَ تنطلقُ أهميةُ أنظمةِ المعادلاتِ، التي يُحوَّلُ عن طريقها كثيرٌ منَ المواقفِ الرياضيّةِ والحياتيّةِ، إلى صورٍ رمزيةٍ، يسهلُ التعاملُ معها، وحلُّها في تطبيقاتٍ هندسيّةٍ، واقتصاديّةٍ، وفيزيائيّةٍ، وغيرِها.

Systems of Equations

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- حلِّ نظامٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطيةٍ بثلاثةِ متغيراتٍ.
- حلِّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمتغيريْنِ.
- حلِّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلةٍ تربيعيةٍ ، ومعادلةٍ خطيةٍ بمتغيريْنِ .
- حلِّ مشكلاتٍ تتضمنُ تكوينَ أنظمةٍ منَ المعادلاتِ الخطيةِ والتربيعيةِ، وتبريرِ الحلِّ.

الفصلُ الأولُ

حلُّ نظامٍ مكونٍ من ثلاثِ معادلاتٍ خطيّةٍ

Solving a System of Three Linear Equations

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا مكونًا منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطيّةٍ بثلاثةِ متغيراتٍ.
- تحلُّ مسائلَ عمليةً على حلِّ نظامٍ مكونٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطيَّةٍ.

أرادَ معاذٌ أنْ يجدَ أبعادَ مسبحٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، فيهِ العرضُ يقلُّ عنِ الطولِ بمقدارِ مترٍ واحدٍ، ومجموعُ الطولِ والعرضِ ومثلَي الارتفاعِ، يساوي ٢٣ مترًا، ومجموعُ أبعادِهِ الثلاثةِ، يساوي ٢١ مترًا، كيفَ تساعدُ معاذًا في إيجادِ أبعادِ المسبحِ؟

الحلُّ

للتعاملِ معَ المسألةِ بأسلوبٍ رياضيٍّ، نتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) تحويلُ المتغيراتِ إلى رموزٍ كالآتي:

نفرضُ أنَّ الطولَ = س

والعرضَ = ص

والارتفاعَ = ع

٢) تحويلُ المعلوماتِ إلى معادلاتٍ كالآتي:

العرضُ يقلُّ عنِ الطولِ بمقدارِ مترٍ واحدٍ: ص = س − ١ .... (١)

مجموعُ الطولِ والعرضِ ومثلَي الارتفاعِ، يساوي ٢٣ مترًا: س+ص+٢ع= ٢٣ .... (٢)

مجموعُ أبعادِهِ الثلاثةِ يساوي ٢١ مترًا: س + ص + ع = ٢١ ..... (٣)

أصبحَ لدينا ثلاثُ معادلاتٍ خطيةٍ، والمطلوبُ إيجادُ حلٍ مشتركٍ لهذهِ المعادلاتِ الثلاثِ، منْ خلالِ إيجادِ قيمِ المتغيراتِ، ومثلُ هذهِ المعادلاتِ تسمى نظامًا منَ المعادلاتِ الخطيّةِ بثلاثةِ متغيراتٍ، ولحلِّ هذا النظامِ، نرتبُ المعادلاتِ، بحيثُ تكونُ المتغيراتُ في طرفٍ، والثوابتُ في الطرفِ الآخرِ على النحوِ الآتي:

−س + ص = −١ ....(١)

س + ص + ٢ ع = ٢٣ ....(٢)

س + ص + ع = ٢١ ....(٣)

ثمَّ نقومُ بحذفِ أحدِ المتغيراتِ الثلاثِة، وليكنْ س؛ فنحصلُ على نظامٍ مكونٍ منْ معادلتيْنِ خطيتيْنِ بمتغيريْنِ على النحوِ الآتي: نجمعُ المعادلتيْنِ (١) و (٢):

−س + ص = −١ ....(١)

س + ص + ٢ ع = ٢٣ ....(٢)

بالجمعِ ينتجُ ٢ص + ٢ ع = ٢٢ ....(٤)

ثمَّ نجمعُ المعادلتيْنِ (١) و (٣) :

−س + ص = −١ ....(١)

س + ص + ع = ٢١ ....(٣)

بالجمعِ ينتجُ ٢ص + ع = ٢٠ ....(٥)

وبهذا نحصلُ على نظامٍ مكونٍ من معادلتيْنِ خطيتيْنِ بمتغيريْنِ ص ، ع يتكوّن منَ المعادلتيْنِ (٤)، (٥) ولإيجادِ قيمةِ المتغيرِ ع، نحذفُ المتغيرَ ص منَ المعادلتينِ (٤)، (٥)، وذلك بطرحِ المعادلتيْنِ (٤)، (٥) :

٢ص + ٢ ع = ٢٢ ....(٤)

٢ص + ع = ٢٠ ....(٥)

بالطرحِ ينتجُ ع = ٢ مترًا

ولإيجادِ قيمةِ ص، نعوّضُ قيمةَ ع في المعادلةِ: ٢ص + ٢ ع = ٢٢ ....(٤)

ينتجُ أنَّ: ٢ص + ٤ = ٢٢ ومنهُ، ٢ص = ١٨ ومنهُ ، ص = ٩ أمتارٍ

ولإيجادِ قيمةِ س، نعوّضُ قيمتَيْ ع ، ص في المعادلةِ:

س + ص + ع = ٢١ .... (٣)

ينتجُ أنَّ: س + ٩ + ٢ = ٢١

ومنهُ، س + ١١ = ٢١، ومنهُ ، س = ١٠ أمتارٍ

ويكونُ حلُّ النظامِ هوَ: س = ١٠، ص = ٩ ، ع = ٢

إذن: أبعادُ المسبحِ: الطولُ = ١٠م ، العرضُ = ٩م، الارتفاعُ = ٢م.

فكِّرْ

هلْ تستطيعُ حلَّ النظامِ السابقِ، بحذفِ س + ص ، في آنٍ معًا ؟

تدريبٌ (٣-١)

ثلاثةُ أعدادٍ مختلفةٍ، مجموعُها يساوي ١٦، والأكبرُ يساوي مجموعَ العددَيْنِ الآخريْنِ، وثلاثةُ أمثالِ العددِ الأصغرِ، تزيدُ عنِ العددِ الأكبرِ بمقدارٍ واحدٍ. جدْ الأعدادَ الثلاثةَ.

مثالٌ (٣-١)

حلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتي، وتحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٢س + ص − ع = −٣

س − ص + ٢ ع = ٩

٥س + ٢ص + ٤ ع = ١٣

الحلُّ

لحذفِ المتغيرِ ص، نجمعُ المعادلتيْنِ (١) و (٢) على النحوِ الآتي:

٢س + ص − ع = −٣ .... (١)

س − ص + ٢ ع = ٩ .... (٢)

بالجمعِ ينتجُ : ٣س + ع = ٦ .... (٤)

ثمّ نضربُ المعادلةَ (٢) بالعددِ ٢، ونجمعُها للمعادلةِ (٣)، على النحوِ الآتي:

$$٢س - ٢ص + ٤ع = ١٨$$

$$٥س + ٢ص + ٤ع = ١٣ \quad ....(٣)$$

بالجمعِ ينتجُ : $٧س + ٨ع = ٣١$ ....(٥)

وبهذا نحصلُ على نظامٍ مكونٍ من معادلتيْنِ خطيتيْن بمتغيريْنِ س، ع (المعادلتيْنِ (٤) ، (٥)).

ولإيجادِ قيمةِ المتغيرِ س، نحذفُ المتغيرَ ع من المعادلتيْنِ (٤) ،(٥)، وذلكَ بضربِ المعادلةِ (٤) بالعددِ −٨، ونجمعُها للمعادلةِ (٥):

$$-٢٤س - ٨ع = -٤٨$$

$$٧س + ٨ع = ٣١ \quad ....(٥)$$

بالطرحِ ينتجُ : $-١٧س = -١٧$ ومنهُ، $س = ١$

ولإيجادِ قيمةِ ع، نعوّضُ قيمةَ س في المعادلةِ (٤) : $٣س+ع=٦$، فينتجُ أنَّ:

$٣ + ع = ٦$ ومنهُ، $ع = ٣$

ولإيجادِ قيمةِ ص، نعوّضُ قيَمَ س ، ع في المعادلةِ (١):

$٢س + ص - ع = -٣$ فينتجُ أنَّ: $٢ + ص - ٣ = -٣$

ومنهُ ، $ص - ١ = -٣$ ومنهُ ، $ص = -٢$

إذن حلُّ النظامِ هوَ: (١، −٢ ، ٣)

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ: ....

تفكيرٌ ناقدٌ

هذا النظامُ يتكوّن من معادلتيْن وثلاثةِ متغيراتٍ:

$س + ٢ص + ٤ع = ٤$

$٢س + ٣ص + ع = ١٢$

حاولْ حلَّ هذا النظامِ، وصِفْ ماذا سيحدثُ.

تدريبُ (٣-٢)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتي، وتحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

س −٣ص + ٣ ع = −٤

٢س + ٣ص = ع −١٥

٤س − ٣ص − ع = ١٩

مثالُ (٣-٢)

مثلثُ فيهِ قياسُ الزاويةِ الثانيةِ، يساوي مثلَيْ قياسِ الزاويةِ الأولى، وقياسُ الزاويةِ الثالثةِ، يزيدُ بمقدارِ ٣٠° على مجموع قياسَيِ الزاويتيْنِ الأولى والثانية. جدْ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الثلاثِ؛ وتحقق منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

نفرضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ الأولى = س ، وقياسَ الزاويةِ الثانيةِ = ص ، وقياسَ الزاويةِ الثالثةِ = ع ، ثمَّ نكوّنُ النظامَ على النحوِ الآتي:

س + ص + ع = ١٨٠°   مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ = ١٨٠°

ص = ٢س

ع = س + ص + ٣٠°

ثمَّ نرتبُ المعادلاتِ

س+ ص + ع = ١٨٠° .... (١)

−٢ س +ص = ٠ .... (٢)

− س −ص +ع = ٣٠° .... (٣)

لحذفِ المتغّيرِ س ، نضربُ المعادلةَ (١) بالعددِ ٢ ونجمعُها للمعادلةِ (٢) على النحوِ الآتي:

٢س + ٢ص + ٢ع = ٣٦٠°

−٢س + ص = ٠ .... (٢)

بالجمعِ ينتُجُ: ٣ص + ٢ع = ٣٦٠° .... (٤)

ونجمعُ المعادلتيْنِ (١) و(٣) على النحوِ الآتي:

س + ص + ع = ١٨٠° .... (٢)

−س − ص + ع = ٣٠° .... (٣)

بالجمعِ ينتُجُ: ٢ع = ٢١٠° ومنهُ، ع = ١٠٥° .... (٥)

ولإيجادِ قيمةِ ص، نعوّضُ قيمةَ ع في المعادلةِ (٤): ٣ص + ٢ع = ٣٦٠°، فينتجُ أنَّ:

٣ص + ٢١٠° = ٣٦٠° ومنهُ، ٣ ص = ١٥٠° ومنهُ، ص = ٥٠°

ولإيجادِ قيمةِ س، نعوّضُ قِيَمَ ص ، ع في المعادلةِ (١): س + ص + ع = ١٨٠° فينتجُ أنَّ: س + ٥٠° + ١٠٥° = ١٨٠° ومنهُ، س = ٢٥°

ويكونُ حلُّ النظامِ هوَ: س = ٢٥° ، ص = ٥٠° ، ع = ١٠٥°

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ: ....

فكِّرْ وناقشْ

قامَ خالدٌ بحلِّ مثالِ (٣−٢)، باستخدامِ طريقةِ التعويضِ: عوّضَ قيمةَ ص = ٢س .... (٢)

في المعادلةِ: ع = س + ص + ٣٠° .... (٣)، فنتجَ: ع = س + ٢س + ٣٠°

ومنهُ، ع = ٣س + ٣٠°، ثمَّ عوّضَ كلاً من ص ، ع في المعادلةِ

س + ص + ع = ١٨٠° .... (١)

هلْ تستطيعُ إكمالَ الحلِّ بطريقةِ خالدٍ ؟ برّرْ إجابتَكَ.

تدريبُ ٣-٣

مثلثٌ محيطُهُ ١٨ سم، طولُ الضلعِ الأولِ، يساوي مثلَيْ طولِ الضلعِ الثالثِ، وطولُ الضلعِ الثاني، يزيدُ عنْ طولِ الضلعِ الثالثِ بمقدارِ ٢سم. جدْ أطوالَ أضلاعِ المثلثِ.

اكتشفِ الخطأَ واكتبِ الصوابَ

استخدمَ عامرٌ عمليةَ الحذفِ؛ لتحويلِ نظامٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ بثلاثةِ مجاهيلَ، إلى نظامٍ منْ معادلتيْنِ بمجهوليْنِ، فحذفَ متغيرًا منْ معادلتيْنِ، وحذفَ كذلكَ متغيرًا مختلفًا منْ معادلتيْنِ أُخريْينِ، فحصَلَ على نظامٍ منْ معادلتيْنِ بثلاثةِ متغيراتٍ.

الأسئلةُ

١) اكتبْ نظامًا منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطيةٍ بثلاثةِ متغيراتٍ، بحيثُ يكونُ حلُّ النظامِ هوَ:

س = ٢، ص =−٣ ، ع =٤

٢) حُلَّ كلًا من أنظمةِ المعادلاتِ الخطيةِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

أ) س − ص + ع =٣

٢س +ص+ ع =٨

٣س + ص − ع =١

ب) أ + ب + جـ =١

−٢أ + ٢ب + ٣جـ = ٢٠

٢أ − ٢ب − جـ = −١٦

جـ) $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ + ٣ع = ١٢

ص − $\frac{\text{ع}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$

$\frac{\text{ص}}{\text{٢}}$ − $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ = ١

د) ٢ص +ع = ٣ (١− س)

س− ٣ص +ع =٤

−٢(٣س + ٢ص + ع) = ١

٣) عددٌ مكوّنٌ منْ ثلاثِ منازلَ، مجموعُ أرقامِ منازلِه ١٢ ، رقمُ منزلةِ العشراتِ، يقلُّ عنْ رقمِ منزلةِ المئاتِ بمقدارِ ٢، ورقمُ منزلةِ الآحادِ، يقلُّ عنْ مجموعِ رقمَيِ المنزلتيْنِ الأخريَيْنِ بمقدارِ ٤ . ما هذا العددُ؟

٤) جدْ معادلةَ الدائرةِ التي تمرُّ بالنقاطِ الثلاثِ: (٦، ٠) ، (−١، −١)، (−٢، ٠)

إرشادٌ: (معادلةُ الدائرةِ: س^{٢} + ص^{٢} + أس + ب ص + جـ = صفرًا حيث أ ، ب ، جـ أعدادٌ حقيقيةٌ)

٥) بينْ أنَّ نظامَ المعادلاتِ الآتي ليسَ لَهُ حلٌّ:

٢س − ص + ع = ٢

٣س − ٢ص − ع =٠

٥س − ٣ص + ٢ =٠

الفصلُ الثّاني حلُّ نظامٍ مكونٍ من معادلةٍ خطيّة ومعادلةٍ تربيعيةٍ

Solving a System of a Linear and a Quadratic Equations

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا منْ معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ.
- توظف حلَّ نظامٍ منْ معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ في حلِّ مسائلَ عملية.

عددانِ موجبانِ، يزيدُ الثاني على الأولِ بمقدارِ ٥، والفرقُ بينَ مربعيْهِما يساوِي ٤٥. فما العددانِ؟

لإيجادِ العدديْنِ، نفرضُ أنَّ العددَ الأولَ = س ، والثاني = ص :

يزيدُ الثاني على الأولِ بمقدارِ ٥: ص = س + ٥ .... (١)

والفرقُ بينَ مربعيْهِما يساوي ٤٥ : $ص^٢ - س^٢ = ٤٥$ .... (٢)

أصبحَ لديْنا معادلتانِ: خطيةٌ وتربيعيةٌ، والمطلوبُ إيجادُ حلٍّ مشتركٍ لهاتيْنِ المعادلتيْنِ، عنْ طريق إيجادِ قيَمِ المتغيراتِ، ومثلُ هاتيْنِ المعادلتيْنِ تُسمَّى نظامًا منْ معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ، ولحلِّ هذا النظامِ، نلاحظُ أنَّ المتغيرَ ص، مكتوبٌ بدلالةِ المتغيرِ س، وبذلك نعوِّضُ بقيمة ص في المعادلةِ التربيعيةِ فينتجُ أنَّ:

$(س + ٥)^٢ - س^٢ = ٤٥$ ومِنْها: $س^٢ + ١٠س + ٢٥ - س^٢ = ٤٥$

ومِنْها: ١٠ س = ٢٠ ومِنْها: س = ٢

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ س في المعادلةِ التربيعيةِ، ينتجُ أنَّ: $ص^٢ - (٢)^٢ = ٤٥$

$ص^٢ - ٤ = ٤٥$ ومِنْها، $ص^٢ = ٤٩$

إذن: ص = ٧ أو ص = −٧ (تُحذفُ) لماذا؟

إذن: حلُّ النظامِ هوَ النقطةُ (٢ ، ٧)

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ : ....

فكِّرْ وناقشْ

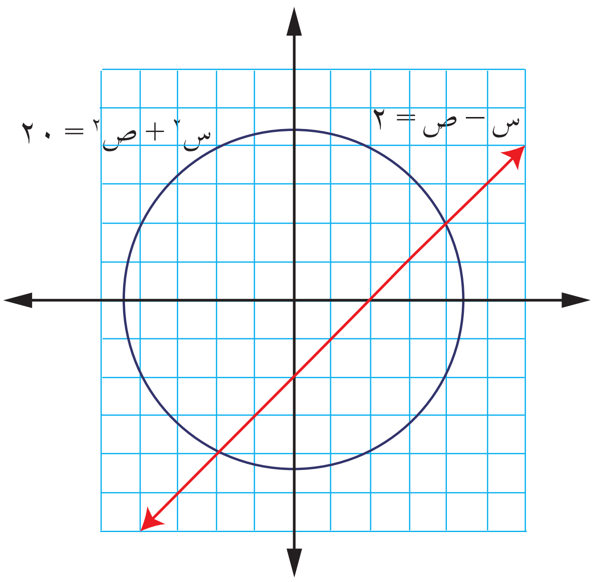
لماذا كُتبتِ المعادلةُ $ص^{٢} - س^{٢} = ٤٥$ ...... ٢ بهذهِ الصورةِ، ولمْ تُكتبْ على الصورةِ: $س^{٢} - ص^{٢} = ٤٥$ ؟

مثالُ (٣-٣)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي، ثُّم تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$

$س - ص = ٢$



الشكلُ (٣ – ١)

الحلُّ

نكتبُ المتغيرَ س بدلالةِ ص، من المعادلةِ الخطيةِ:

$س - ص = ٢$ فينتجُ:

$س = ص + ٢$

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ س في المعادلةِ التربيعيةِ، ينتجُ:

$(ص + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$

ومِنْها، $ص^{٢} + ٤ص + ٤ + ص^{٢} = ٢٠$

ومِنْها، $٢ص^{٢} + ٤ص - ١٦ = ٠$

$ص^{٢} + ٢ص - ٨ = ٠$ (بالقسمةِ على ٢)

أكملِ الحلَّ ، فَسِّرِ الحلَّ هندسيًا (لاحظِ الشكلَ (٣-١)).

تدريبُ ٣-٤

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي، ثمَّ تحقّقْ منْ صحةِ الحلِّ:

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٧$

$س = ٥ص - ١$

مثالُ (٣–٤)

حوضٌ للأزهارِ مستطيلُ الشكلِ، محيطُهُ يساوِي ١٤ م ، إذا كانتْ مساحتُهُ تساوِي ١٠ م^{٢}، فَجِدْ بُعْدَيْهِ.

الحلُّ

لإيجادِ بُعَدَيْ حوضِ الأزهارِ مستطيلِ الشكلِ ، نفرضُ أنَّ بعدَيْهِ س، ص

محيطُ المستطيلِ = ٢ (الطول + العرض)

١٤= ٢ (س + ص) ومنهُ: س + ص = ٧ .... (١)

مساحةُ المستطيلِ = الطول × العرض

١٠ = س × ص، ومنُه: س ص = ١٠ .... (٢)

ثمَّ نكتبُ أحدَ المتغيرَيْنِ بدلالةِ الآخرِ، في المعادلةِ الخطيةِ، فينتجُ أنَّ : ص = ٧ –س

ومِنْ ثمَّ نعوِّضُ (٧ – س) في المعادلةِ التربيعيّةِ بدلًا من ص، فينتجُ:

س × (٧ – س) = ١٠، ومِنْهُ: ٧ س – س^{٢} = ١٠

ومِنهُ: س^{٢} – ٧س + ١٠ = ٠ وهذهِ معادلةٌ تربيعيةٌ بمتغيّرٍ واحدٍ.

(س – ٢) (س – ٥) = ٠ (بالتحليلِ)

إذنْ: س = ٢ ، أو س = ٥

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ (س = ٢) في المعادلةِ الخطيةِ، (ص = ٧ – س)، نجدُ أنّ: ص =٥

وبالتعويضِ عن قيمةِ (س = ٥)، نجدُ أنّ: ص = ٢

إذنْ، مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ: {(٢،٥) ، (٥،٢)} أيْ أنَّ بُعدَيِ الحوضِ هُما: ٢م ، ٥م

تدريبُ ٣–٥

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي، ثمَّ تحقّقْ منْ صحةِ الحلِّ:

٣س – ص = ٠

س ص = ٤٨

مثالُ (٣–٥)

عددانِ، الفرقُ بينَهُما ٦، ومجموعُ مقلوبيْهِما يساوي $\frac{٥}{٨}$، فما العددانِ؟

الحلُّ

نفرضُ أنَّ العددَ الأولَ = س، والثاني = ص، فيكونُ:

$$س - ص = ٦$$

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٥}{٨}$$ حيث س ≠ صفرًا ، ص ≠ صفرًا

منَ المعادلةِ الخطيةِ: س − ص = ٦ ، نكتبُ ص بدلالةِ س، فينتجُ: ص = س−٦

ثمَّ نعوّضُ عنْ ص في المعادلة $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٥}{٨}$ ، فينتجُ:

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{س - ٦} = \frac{٥}{٨}$$

$$\frac{س - ٦ + س}{س(س - ٦)} = \frac{٥}{٨}$$ (توحيدُ مقاماتٍ)

$$\frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٦س} = \frac{٥}{٨}$$

$$٥س^{٢} - ٣٠س = ١٦س - ٤٨$$ (ضربٌ تبادليٌّ)

$$٥س^{٢} - ٤٦س + ٤٨ = ٠$$ لماذا؟

$$(٥س - ٦)(س - ٨) = ٠$$ (بالتحليلِ)

إذن: س = $\frac{٦}{٥}$ ، أو س = ٨

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ (س = $\frac{٦}{٥}$) في المعادلةِ الخطيةِ: س − ص = ٦ ، نجدُ أنَّ: ص = $\frac{-٢٤}{٥}$

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ (س = ٨)، نجدُ أنَّ: ص = ٢

إذن العددانِ هما: $\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{-٢٤}{٥}$ أو ٨ ، ٢

تحققْ منْ صحةِ الحلِّ، في مثالِ (٣–٥).

مثالُ (٣-٦)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي:

ص − س = ٢

$س^{٢}$ + س ص − ٤ = ٠

الحلُّ

منَ المعادلةِ الخطيةِ: ص − س = ٢، نكتبُ ص بدلالةِ س، فينتجُ : ص = س + ٢

ثمَّ نعوّضُ عن ص في المعادلةِ التربيعيةِ، فينتجُ: $س^{٢}$ + س (س + ٢) − ٤ = ٠

ومِنْها: $س^{٢}$ + $س^{٢}$ + ٢س − ٤ = ٠ ومِنْها: ٢$س^{٢}$ + ٢س − ٤ = ٠

$س^{٢}$ + س −٢ = ٠ (بالقسمةِ على ٢)

(س − ١) (س + ٢) = ٠ (بالتحليلِ)

إذنْ: س = ١ ، أو س = −٢

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ (س = ١) في المعادلةِ الخطيةِ: ص − س= ٢ ، نجدُ أنَّ: ص = ٣

ولإيجادِ الحلِّ الثاني، نقومُ بالتعويضِ عنْ قيمةِ (س = −٢) ، نجدُ أنَّ ص = ٠

إذنْ: مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ: {(١ ، ٣) ، (−٢، ٠)}

فكِّرْ

النظامُ في مثالِ (٣−٦) لهُ أكثرُ منْ حلٍّ. فسّرْ ذلكَ بيانيًا.

تدريبُ ٣-٦

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي، ثمّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ (جبريًّا وبيانيًا):

ص = $س^{٢}$ − ٣س − ٨

ص = س − ٣

الأسئلةُ ؟

١) جدْ حلَّ كلٍّ منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ مِنْ صحةِ الحلِّ:

أ) س + ص = ٩

$\frac{٢}{س} + \frac{٢}{ص} = ١$ (حيثُ س ≠ ٠، ص ≠ ٠)

ب) ص = س − ٢

ص = $س^٢$ −٦ س +١٠

جـ) $٣س^٢ - ٥ص^٢ = ٣٠$

ص − س = ٢

٢) مثِّلْ حلَّ نظامِ المعادلاتِ الآتي بيانيًا:

$(س + ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩$

س = ص

٣) مستطيلٌ، مجموعُ بُعدَيْهِ ١٧ سم، وطولُ قطرِهِ يساوي ١٣ سم، جِدْ بعدَيْهِ.

٤) جِدْ نقاطَ تقاطعِ الدائرةِ، التي مركزُها نقطةُ الأصلِ، ونصفُ قطرِها يساوي ٣ وحداتٍ، معَ المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = ٣ − س .

٥) عددانِ موجبانِ مجموعُهُما ١٠، ومجموعُ مربعيْهِما ٥٨، فما العددانِ؟

حلُّ نظامٍ مكونٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيّتيْنِ

Solving a System of Two Quadratic Equations

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا منْ معادلتيْن تربيعيتيْن.
- توظِّفُ حلَّ نظامٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيّتيْنِ في مواقفَ حياتيّةٍ.

في بيتِ أنسٍ سجادتانِ مربعتا الشكلِ، مجموعُ مساحتيْهِما يساوي ٤١م^٢، والفرقُ بينَ مساحتيْهِما يساوي ٩م^٢، جدْ بُعدَ كلٍّ منهُما.

لإيجادِ بعُدِ كلٍّ منَ السجادتيْنِ، نفرضُ أنَّ بُعدَ السجادةِ الأكبرِ = س، وبُعدَ الثانيةِ = ص، فيكونُ:

مجموعُ مساحتيْهِما ٤١ م^٢: س^٢ + ص^٢ = ٤١ ...... (١) لماذا؟

والفرقُ بينَ مساحتيْهِما ٩م^٢: س^٢ − ص^٢ = ٩ ...... (٢)

أصبحَ لديْنا معادلتانِ تربيعيتانِ، والمطلوبُ إيجادُ حلٍ مشتركٍ لهاتيْنِ المعادلتيْنِ، عن طريقِ إيجادِ قيمِ المتغيراتِ، ومثلُ هاتيْنِ المعادلتيْنِ اللتيْنِ لهُما حلٌ مشتركٌ، تسمّى **نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ**، ولحلِّ هذا النظامِ، نحذفُ أحدَ المتغيريْنِ، وليكنْ ص، على النحوِ الآتِي:

نجمعُ المعادلتيْنِ (١) و (٢) :

س^٢ + ص^٢ = ٤١ .... (١)

س^٢ − ص^٢ = ٩ .... (٢)

بالجمعِ ينتجُ: ٢س^٢ = ٥٠ .... (٣)

ومنهُ: $س^٢ = ٢٥$، وبالتّالِي: س= ٥ أو س= −٥، وهذهِ تهمَلُ؛ لأنّهُ لا يوجَدُ بُعدٌ سالبٌ.

ولإيجادِ قيمةِ ص، نعوّضُ عنْ قيمةِ س في المعادلةِ (١)، فينتج أنَّ:

$٢٥ + ص^٢ = ٤١$ ومِنْه: $ص^٢ = ١٦$

وبالتّالِي: ص = ٤ أو ص = −٤ ، وهذهِ تُهمَلُ؛ لأنّهُ لا يوجدُ بُعدٌ سالبٌ.

وبذلكَ يكونُ بُعدُ كلٍّ منَ السجادتيْنِ: ٥م ، ٤م

تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

مثالُ (٣–٧)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي، ثمّ تحققْ مِنْ صحةِ الحلِّ :

$٤س^٢ − ٣ص^٢ = ١٣$ .... (١)

$٣س^٢ + ٢ص^٢ = ١٤$ .... (٢)

الحلُّ

لحلِّ هذا النظامِ ، نحذفُ أحدَ المتغيريْنِ، وليكنْ ص، على النحوِ الآتي: نضرِبُ المعادلةَ (١) بالعدد ٢ ، ونجمعُها معَ ناتجِ ضربِ المعادلةِ (٢) بالعددِ ٣

$٨س^٢ − ٦ص^٢ = ٢٦$

$٩س^٢ + ٦ص^٢ = ٤٢$

بالجمعِ ينتجُ : $١٧س^٢ = ٦٨$

ومنْهُ: $س^٢ = ٤$ ومنْهُ: س = ٢ أو س = −٢

بالتعويضِ عنْ قيمةِ س = ٢ في إحدى المعادلتيْنِ، ينتجُ أنَّ: $ص^٢ = ١$، ومنهُ ص = ١ أو ص = −١

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ س = −٢ في إحدى المعادلتيْنِ، ينتجُ أنَّ: $ص^٢ = ١$، ومنهُ ص =١ أو ص = −١

إذنْ: مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ:

{(٢، ١) ، (٢، −١) ، (−٢، ١) ، (−٢، −١)}

وللتحققِ مِنْ صحةِ الحلِّ ، نعوّضُ النقاطَ في المعادلتيْنِ:

(٢ ، ١) ⟸ ٤ س^{٢} − ٣ص^{٢} = ٤(٢)^{٢} −٣(١)^{٢} = ١٦ − ٣ = ١٣

٣س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٣(٢)^{٢} + ٢(١)^{٢} = ١٢ + ٢ = ١٤

لاحظْ أنَّ النقطةَ (٢ ، ١) حققتِ المعادلتيْنِ، بالطريقة نفسِها، تأكدْ منْ بقيةِ النقاطِ.

تدريبُ ٣–٧

عددانِ موجبانِ، الفرقُ بينَ مربعيْهِما يساوي ٤٠، إذا كانَ مربَّعُ العددِ الأكبرِ، مضافًا إليهِ أربعةُ أمثالِ الأصغرِ، يساوِي ٨٥، فما العددانِ؟

مثالُ (٣–٨)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي:

س^{٢} + ص^{٢} = ٤

س^{٢} − ٢ ص = ٤

الحلُّ

لحلِّ هذا النظامِ، نحذفُ أحدَ المتغيريْنِ، وليكن س، على النحوِ الآتي: نطرحُ المعادلتيْنِ:

س^{٢} + ص^{٢} = ٤

س^{٢} − ٢ص = ٤

بالطرحِ ينتجُ : ص^{٢} + ٢ ص = ٠

ومنْهُ: ص(ص + ٢) = ٠ (بإخراجِ ص عاملًا مشتركًا)

إذنْ: ص = ٠ أو ص = −٢

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ (ص = ٠) في إحدى المعادلتيْنِ (الأولى مثلًا) ينتجُ أنَّ: س^{٢} = ٤

ومنْهُ: س = ٢ أو س = −٢

وبالتعويضِ عن قيمةِ (ص = −٢) في إحدى المعادلتيْنِ، ينتجُ أنَّ: س = ٠ ، لماذا ؟

إذنْ: مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ: {(٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) ، (٠ ،−٢)}

تدريب (٣-٨)

حُلَّ المثالَ (٣-٨) عنْ طريقِ كتابةِ ص بدلالةِ س، منَ المعادلةَ (٢)، وتعويضِها في المعادلةِ (١).

مثالُ (٣-٩)

حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتِي:

$٢س^٢ - ص^٢ = ٧$ .... (١)

$س^٢ + س ص = ٢$ .... (٢)

الحلُّ

لحلِّ هذا النظامِ، نحذفُ الثابتَ منَ المعادلتيْنِ، على النحوِ الآتي: نضربُ المعادلةَ (١) بالعددِ −٢، ونجمعُها معَ ناتجِ ضربِ المعادلةِ (٢) بالعددِ ٧:

$$-٤س^٢ + ٢ص^٢ = -١٤$$

$$٧س^٢ + ٧س ص = ١٤$$

بالجمعِ ينتجُ: $٣س^٢ + ٧ س ص + ٢ص^٢ = ٠$

ومِنْهُ : $(س + ٢ص)(٣س + ص) = ٠$ (بالتحليلِ)

ومِنْهُ: $ص = \frac{-١}{٢} س$ أو $ص = -٣س$

وبالتعويضِ عنْ قيمةِ $(ص = \frac{-١}{٢} س)$ في المعادلةِ (١) نجدُ أنَّ: $٢س^٢ - (\frac{-١}{٢}س)^٢ = ٧$

ومنه، $٢س^٢ - \frac{١}{٤}س^٢ = ٧$ ومنه، $\frac{٧}{٤} س^٢ = ٧$ ومنه ، $س^٢ = ٤$ ومنه، $س = ٢$ أو $س = -٢$،

وعندَ التعويضِ عنْ $(ص = -٣ س)$، ستحصلُ على معادلةٍ، ليسَ لها حلولٌ حقيقيةٌ، (تأكدْ منْ ذلكَ).

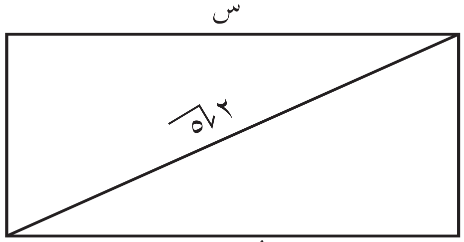
ولإيجادِ قيمةِ ص ، نعوّضُ عن قيمِ س في المعادلةِ : $ص = \frac{-١}{٢}س$، فينتجُ أنَّ $ص = -١$، أوْ $ص = ١$ على التوالي.

إذنْ: مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ: $\{(٢ ، -١) ، (-٢، ١)\}$

مثالُ (٣-١٠)

مستطيلٌ، مساحتُهُ تساوي ٨ سم^{٢} ، إذا كانَ طولُ قطرِهِ يساوي $٢\sqrt{٥}$ ، جدْ بُعدَيِ المستطيلِ؟

الحلُّ



الشكلُ (٣ – ٢)

نفرضُ أنَّ بُعدَيِ المستطيلِ س ، ص كما في الشكلِ (٣-٢).

مساحةُ المستطيلِ = ٨:

إذن س ص = ٨ .... (١)

طولُ قطرِهِ = $٢\sqrt{٥}$:

إذن س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ .... (٢) لماذا؟

لحلِّ هذا النظامِ ، نكتبُ ص بدلالةِ س، من المعادلةِ (١)، فينتجُ: ص = $\frac{٨}{س}$ حيثُ س ≠ صفرًا

ثمّ نعوّضُ عنْ ص في المعادلة (٢)، فينتجُ : س^{٢} + $(\frac{٨}{س})^{٢}$ = ٢٠

ومِنْهُ : س^{٢} + $\frac{٦٤}{س^{٢}}$ =٢٠

س^{٤} + ٦٤ = ٢٠س^{٢} (بضربِ المعادلةِ بـ س^{٢})

س^{٤} – ٢٠ س^{٢} + ٦٤ =٠

(س^{٢} – ١٦) (س^{٢} – ٤) = ٠ (بالتحليلِ)

س^{٢} = ١٦ ومنه ، س =٤ أو س = –٤ (تُهمل قيمةُ س السالبة لأنَّ الأبعادَ موجبةٌ)

أو س^{٢} = ٤ ومنه، س = ٢ أو س = –٢ (تُهمل القيمةُ السالبةُ)

ولإيجادِ قيمةِ ص ، نعوّضُ عنْ قِيَم س، في المعادلةِ س ص = ٨ ، فينتجُ :

س= ٤ يعُطِي ص = ٢ ، س = ٢ يُعطي ص = ٤

إذنْ، بُعْدا المستطيلِ هُما: ٤سم، ٢سم

هلْ يمكنُكَ حلَّ المثالِ (٣-١٠) بطريقةٍ أُخرَى؟

تدريبُ ٣-٩

حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها تساوي ١٢٠م^{٢}، فإذا كانَ طولُ قطرِها ١٧ م، فجدْ بُعْدَيْ الحديقةِ.

الأسئلةُ

١) حُلَّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ :

أ) $٥س^٢ - ٢ص^٢ = ١٨$

$٣س^٢ + ٥ص^٢ = ١٧$

ب) $س ص = ١٨$

$\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} = \frac{١}{٦}$ (حيثُ $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$)

جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٩$

$س^٢ - س = ٦$

د) $س^٢ + س ص = ٤$

$٢س ص - ص^٢ = -٣$

هـ) $س^٢ + ص^٢ = ٩$

$س^٢ + ص^٢ + ١٢س + ٢٧ = ٠$

و) $س^٢ - ص^٢ = ٢٤$

$س^٢ = (ص + ٤)^٢$

٢) إذا كانَ $س + \frac{١}{س} = ٢$، حيثُ $س \neq$ صفرًا، فجِدْ قيمة $س^٢ + \frac{١}{س^٢}$

٣) جِدْ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ: $س^٢ + ص^٢ = ٤$ ، $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٨$

٤) عددانِ، مجموعُ مربعيْهِما يساوي ٥٨، والفرقُ بينَ مربعيْهِما يساوِي ٤٠، فما العددانِ؟

٥) قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ متطابقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المتطابِقِ ٥٠م، ومساحتُهُ ١٢٠٠م^٢، جِدْ طُولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ.

أسئلةُ الوحدةِ

١) حُلَّ كلًا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

أ) س + ٢ص – ع = ٦
٢ س + ص + ع = ٣
س + ٢ص + ع = ٤

ب) ص = س^{٢} – ١
ص = ٥ – س

جـ) س^{٢} – ص^{٢} = ٩
ص^{٢} – ٢س = ٦

د) ٢أ + ٥ب + ٤جـ = ٤٤
٣أ + ٤ب = ٣٣
٥أ = ١٥

هـ) ٢س + ص = ٩
س – ٢ ع = –٣
٢ص + ٣ ع = ١٥

و) س^{٢} + ص^{٢} – س ص – ٢١ = ٠
س^{٢} – ٨ص^{٢} + ٢ س ص = ٠

ز) س^{٢} + ص^{٢} = ١٣
س – ص = ٥

٢) ثلاثةُ أعدادٍ موجبةٍ، مجموعُها ٢٠، إذا كانَ العددُ الأوّلُ يزيدُ بمقدارِ ٦ على العددِ الثاني، والعددُ الثانِي يقلُّ بمقدارِ ٥ عنِ العددِ الثالثِ ، فجدْ الأعدادَ الثلاثةَ.

٣) تتحركُ نقطةٌ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ٢ص = ٥س – ١، في لحظةٍ ما كانَ إحداثيُّها الصاديُّ، يساوي مثلَيْ مربّعِ إحداثيِّها السينيِّ، فجِدْ إحداثيّيْ هذهِ النقطةِ في تلكَ اللحظةِ.

٤) مثلثٌ قائمُ الزاويةِ، مساحتُهُ ٣٠ سم^{٢}، وطولُ وترِهِ ١٣ سم، جدْ طولَيْ ضِلعَيِ القائمةِ.

٥) لديكَ القيَمُ الآتيةُ التي تمثّلُ (س ، ص ، ع) على الترتيبِ: (١ ،٢،٣) ، (−٢ ، ٢ ، ٦) ، (٣ ، ٢ ، ١) ، أيٌّ مِنْها تمثلُ حلًا للنظامِ:

س + ص + ع = ٦

٢س − ص + ع = ٣

٣س = ٢ص − ١

٦) لدَى رغدَ ٢٠ قطعةً نقديةً منَ الفئاتِ : ٥ قروشٍ، ١٠ قروشٍ ،٢٥ قرشًا، إذا كانت القيمةُ النقديةُ لهذهِ القطعِ جميعِها تساوي ٣,٨ دينارًا، وكانَ عددُ القطعِ النقديةِ، منْ فئةِ العشرِ قروشٍ، أقلَّ منْ مثلَيْ عددِ القطعِ النقديةِ من فئةِ الخمسِ قروشٍ بمقدارِ ٢ ، فما عددُ القطعِ النقديةِ في كلِّ فئةٍ؟

٧) اكتبْ نظامًا مُكوّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، بحيثُ تكونُ النقطةُ (−٣ ، ٥) إحدى حلولِ ذلكَ النظامِ.

٨) إطارُ صورةٍ على شكلِ مستطيلٍ، محيطُهُ ٥٦سم، وطولُ قطرِهِ ١٧سم ،فما بُعْدَاه؟

٩) عددٌ مكوّنٌ منْ ثلاثِ منازلَ، مجموعُ الأرقامِ للمنازلِ الثلاثِ يساوي ٩، رقمُ منزلةِ العشراتِ يساوي ثلاثةَ أمثالِ رقمِ منزلةِ المئاتِ، ورقمُ منزلةِ الآحادِ يقلُّ عنْ رقمِ منزلةِ المئاتِ بمقدارِ ١، ما هوَ هذا العددُ؟

الوحدةُ الرابعةُ

٤

المصفوفاتُ

إنَّ علمَ الرياضياتِ يعتمدُ كثيرًا على ترتيبِ المعلوماتِ ليسهلَ التعاملُ معها، ومنَ الأمثلةِ على ذلكَ، تبويبُ المعلوماتِ في المصفوفاتِ، ففي حياتِنا اليوميةِ، نتعاملُ معَ الكثيرِ منَ الجداولِ البيانيةِ المبوَّبةِ، وعلى الرغم منْ أنَّ الاهتمامَ بالمصفوفاتِ والمحدداتِ، بدأَ عنْ طريقِ الاهتمامِ بحلِّ المعادلاتِ الخطيةِ، إلاّ أنَّ هذا الاهتمامَ قدْ تشعبَ إلى كثير منَ الأمورِ الأخرى في الرياضياتِ: كهندسةِ التحويلاتِ، والهندسةِ المستويةِ، وهندسةِ الفضاءِ. وأمتدَّ هذا الاهتمامُ ، ليشملَ مجالاتٍ عدةً مثلَ: مجالاتِ التخطيطِ، والتجارةِ، والاقتصادِ، والصناعةِ، والزراعةِ، وعلومِ الفيزياءِ، والأحياءِ وعلمِ الاجتماعِ، وعلمِ النفسِ.

Matrices

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٠ & ٤ \\ ٥ & ٢- & ١ \\ ٩ & ٨ & ٣ \\ ٧ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- التعـرفِ إلى المصـفوفاتِ، وكتابتِها، وتحديدِ رتبتِها، ومدخلاتِها وصـفوفِها وأعمدتِها.
- إيجادِ ناتجِ جمعِ مصفوفتيْن وطرحِهما، إنْ أمكنَ.
- إيجادِ ناتجِ ضربِ مصفوفتيْنِ، إنْ أمكنَ.
- حسابِ محددةِ مصفوفةٍ مربَّعةٍ حتى الرتبةِ ٣.
- حلِّ نظامِ معادلاتٍ خطيةٍ، باستخدامِ المصفوفاتِ والمحدداتِ (طريقةِ عملياتِ الصفِّ البسيطةِ لمصفوفةٍ ثنائيةٍ، وقاعدةِ كريمر).

المصفوفاتُ والعملياتُ عليها

Matrices Operations

النتاجاتُ

- تتعرّفُ المصفوفة.
- تتعرفُ تساوي المصفوفاتِ.
- تجري عمليةَ جمعِ المصفوفاتِ وطرحِها.
- تستنتجُ خصائصَ عمليتيِ الجمعِ أو الطرحِ على المصفوفاتِ.
- تُجري عمليةَ ضربِ المصفوفاتِ.
- تستنتجُ خصائصَ عمليةِ ضربِ المصفوفاتِ.
- تعبّرُ عنْ نظامِ معادلاتٍ خطيّةٍ باستخدامِ ضربِ المصفوفاتِ.
- تحلُّ معادلاتٍ باستخدامِ المصفوفاتِ.

أوّلًا مفهومُ المصفوفةِ Matrix

في مقصفِ المدرسةِ كانَ سعرُ الحجمِ الكبيرِ منَ العصيرِ ٣٠قرشًا، ومنَ البسكويتِ ٢٥ قرشًا، ومنَ الكعكِ ٢٢ قرشًا ، وسعرُ الحجمِ المتوسطِ منَ العصيرِ ٢٠ قرشًا، ومن البسكويتِ ٢١ قرشًا، ومنَ الكعكِ ١٧ قرشًا. وسعرُ الحجمِ الصغيرِ منَ العصيرِ ١٠ قروشٍ، ومن البسكويتِ ١٥ قرشًا، ومنَ الكعكِ ١٢ قرشًا.

١) ما الصنفُ الذي سعرُه ٢٠ قرشًا ؟

٢) أيَّ الأصنافِ سعرُه يتجاوزُ ٢٥ قرشًا ؟

٣) كمْ سيدفعُ الطالبُ إذا اشترَى الحجمَ الكبيرَ منْ جميعِ الأصنافِ؟

٤) كمْ ثمنُ كعكةٍ متوسطةِ الحجمِ؟

تلاحظُ أنَّ الإجابةَ عنِ الأسئلةِ الواردةِ في المسألةِ السّابقةِ، يحتاجُ بعضًا منَ الوقتِ والجهدِ، أما إذا قُمْنا بتنظيمِ البياناتِ بجدولٍ، بحيثُ تدلُّ الصفوفُ على الأحجامِ (كبيرٍ، متوسطٍ، صغيرٍ)، والأعمدةُ على الصنفِ (عصيرٍ، بسكويتٍ، كعكٍ)، فإنَّ الإجابةَ عنِ الأسئلةِ تصبحُ أسهلَ.

الجدولُ (٤-١)

النوعُ / الحجمُ	عصيرٌ	بسكويتٌ	كعكٌ
كبيرٌ	٣٠	٢٥	٢٢
متوسطٌ	٢٠	٢١	١٧
صغيرٌ	١٠	١٥	١٢

ويمكنُنا الاستغناءُ عنْ حدودِ الجدولِ وتبويبِهِ، بوضعِ المعلوماتِ في شكلِ مستطيلٍ، صفوفُه (كبيرٌ، متوسطٌ، صغيرٌ)، وأعمدتُهُ هيَ الأصنافُ: عصيرٌ، بسكويتٌ، كعكٌ. والشكلُ الناتجُ يُسمّى **مصفوفةً**، وسنسمِّيها **أ** بحيثُ:

العنصرُ ٢١ موجودٌ في الصفِّ الثاني العمودَ الثاني، ويرمزُ لَهُ بالرمزِ $أ_{٢٢}$

$$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٢٥ & ٣٠ \\ ١٧ & ٢١ & ٢٠ \\ ١٢ & ١٥ & ١٠ \end{bmatrix} = أ$$

العنصرُ ١٠ موجودٌ في الصِّفِ الثالثِ، العمودَ الأولَ ويرمزُ بالرمزِ $أ_{١٣}$

وكلُّ عنصرٍ داخلَ المصفوفةِ يُسمّى **مُدخلةً**، يرمزُ لها برمزِ اسمِ المصفوفةِ متبوعًا برقميْنِ، يدلّانِ على رقمِ الصفِّ، ثمَّ رقمِ العمودِ اللذيْنِ تقعُ فيهِما المُدخلةُ .

تعريفٌ

المصفوفةُ: منظومةُ المدخلاتِ أو العناصرِ المرتبةِ في صفوفٍ وأعمدةٍ، وتوضَعُ هذهِ المدخلاتُ بينَ قوسيْنِ [ ]، ويُرمزُ لها بأحدِ الحروفِ.

المصفوفةُ المكوَّنةُ من م صفًّا، ن عمودًا تُسمّى مصفوفةً منَ الرتبةِ م × ن

مثالُ (٤–١)

إذا كانتْ س = $\begin{bmatrix} ١- & ٦ & ٤ \\ ٠ & ١٣ & ٨ \end{bmatrix}$

١) حدّدْ رتبةَ المصفوفةِ س

٢) ما قيمةُ المدخلةِ $س_{٢١}$

الحلُّ

١) رتبةُ المصفوفةِ س هي ٢ × ٣

٢) $س_{٢١}$ = ٦

تدريبُ (٤–١)

ثلاثُ أخواتٍ: سارةُ، وسلمَى، ومريمُ، يمتلكْنَ ثلاثَ حقائبَ، تحوِي حقيبةُ سارةَ ٣ أقلامٍ وَ٦ دفاترَ وَ٥ كتبٍ، وحقيبةُ سلمى قلميْنِ اثنيْنِ وَ٤ دفاترَ وَ٤ كتبٍ، بينما تحوي حقيبةُ مريمَ قلمًا واحدًا وَ٣ كتبٍ.

١) رتّبِ المعلوماتِ السابقةَ في مصفوفةِ س، حيثُ صفوفُها تشيرُ إلى الأخواتِ الثلاثِ، ومدخلاتُ كلِّ صفٍّ تشيرُ إلى ما تحويهِ الحقيبةُ الخاصةُ بكلٍّ منهُنَّ.

٢) ما رتبةُ المصفوفةِ س؟

٣) حدّدْ قيمةَ كلٍّ منَ المدخلاتِ الآتيةِ: $س_{٢١}$ ، $س_{٢٢}$ ، $س_{٣٢}$

١ – مصفوفاتٌ خاصةٌ

هناكَ بعضُ المصفوفاتِ التي لها دورٌ خاصٌّ في دراسةِ المصفوفاتِ، ومنْها:

أ – المصفوفةُ المربّعةُ

هي المصفوفةُ التي يتساوَى فيها عددُ الصفوفِ، معَ عددِ الأعمدةِ، وفي هذهِ الحالةِ، تُسمَّى المصفوفةُ مصفوفةً مربعةً من الرتبةِ م، حيثُ م عددُ الصفوفِ أو عددُ الأعمدةِ.

فمثلاً المصفوفةُ **أ** = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$

هيَ مصفوفةٌ من الرتبةِ ٢ × ٢، أيْ: مصفوفةٌ مربعةٌ منَ الرتبةِ ٢.

ب – مصفوفة الصف

وهيَ المصفوفةُ المكوّنةُ منْ صفٍّ واحدٍ.

فمثلاً المصفوفةُ **ب** = $\begin{bmatrix} ١- & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ هيَ مصفوفةُ صفٍّ منَ الرتبةِ ١ × ٣

جـ – مصفوفةُ العمودِ

وهي المصفوفةُ المكوَّنةُ منْ عمودٍ واحدٍ.

فمثلاً المصفوفةُ **جـ** = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٦- \\ ١ \\ ١٢ \end{bmatrix}$ هيَ مصفوفةُ عمودٍ منَ الرتبةِ ٤ × ١

د – مصفوفةٌ صفريةٌ

هيَ مصفوفةٌ تكونُ جميعُ مدخلاتِها أصفارًا

فمثلاً المصفوفةُ **ف** = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ هيَ مصفوفةٌ صفريّةٌ منَ الرتبةِ ٢ × ٣

هـ – مصفوفةُ الوحدةِ

هيَ مصفوفةٌ مربّعةٌ و، حيثُ المُدخلةُ $و_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & \text{عندَما ي = هـ} \\ ٠ & \text{عندَما ي} \neq \text{هـ} \end{cases}$

ويرمزُلها عادةً بالرمزِ و

فمثلاً المصفوفةُ $و_{٢}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ هيَ مصفوفةُ وحدةٍ منَ الرتبةِ الثانيةِ

تدريبُ ٤–٢

أعطِ مثالًا على كلٍّ ممّا يأتِي:

١) مصفوفةٍ صفريةٍ منَ الرتبةِ ٣ × ٢

٢) مصفوفةِ صفٍّ منَ الرتبةِ ١ × ٥

٣) مصفوفةٍ مربعةٍ من الرتبةِ ٣

٤) مصفوفةٍ وحدةٍ منَ الرتبةِ ٤

٢– تساوِي المصفوفاتِ

تعريفٌ

تتساوَى المصفوفتانِ أ، ب إذا كانَ لُهما الرتبةُ نفسُها م × ن، وكانَتْ مدخلاتُهُما المتناظرةُ متساويةً.

وبالرموزِ: أ = ب إذا كانت $أ_{ي هـ} = ب_{ي هـ}$ ، ي = ١، ٢، ٣، ....، م

هـ = ١، ٢، ٣، ....، ن

مثالُ (٤–٢)

إذا كانتْ $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ \text{ب} & ٨ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & -١ & ٣ \\ ١ & ٨ & \text{أ} \end{bmatrix}$

جدْ قيمةَ كُلٍّ منْ: أ، ب، جـ

الحلُّ

بِما أنَّ المصفوفتيْنِ متساويتانِ، فإنَّ المدخلاتِ المتناظرةِ متساويةٌ.

أ = ٤ ، ب = ١ ، جـ = ٠

تدريبُ ٤–٣

إذا كانتْ $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & -٤ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٣\text{ص} \end{bmatrix}$ جِدْ قِيَمَ كلٍّ منْ: س ، ص

الأسئلةُ

١) حددْ رتبةَ كلٍّ مصفوفةٍ منَ المصفوفاتِ الآتيةِ:

$$س = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} \qquad ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ & ٠ \\ ١٧ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$ع = \begin{bmatrix} هـ & و \\ ي & د \end{bmatrix} \qquad ل = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

٢) أعطِ مثالًا على كلٍّ ممّا يأتي:

أ) مصفوفةٍ مربعةٍ منَ الرتبةِ الثانيةِ.

ب) مصفوفةٍ صفريةٍ رتبتُها ١ × ٣

٣) إذا كانتْ $س = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ & ٠ \\ ٢٣ & -١٥ & ٥ \\ ١٧ & ٣ & -١ \\ ٢ & ٩ & ٠ \end{bmatrix}$

أ) حدّدْ قيمةَ كلٍّ منَ المدخلاتِ الآتيةِ $س_{٣١}$ ، $س_{٢٤}$ ، $س_{١٤}$

ب) حدّدْ رمزَ المدخلةِ الذي يدلُّ عليهِ العددُ −١٥

٤) جدْ قِيَمَ س حيثُ: $\begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ س+١٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ س^{٢} & ٠ \end{bmatrix}$

ثانيًا جمعُ المصفوفاتِ وطرحُها وضربُها بعددٍ
Addition, Subtraction, and Scalar Multiplication of Matrices

تقدمتْ شادنُ، ورامةُ، لاختباريْنِ، لكلِّ مبحثٍ من مباحثِ اللغةِ العربيةِ، واللغةِ الإنجليزيةِ والرياضياتِ، والجدولُ (٤–٢)، يمثّلُ علاماتِ الاختبارِ الأولِ لكلِّ مبحثٍ، والجدولُ (٤–٣)، يمثّلُ علاماتِ الاختبارِ الثاني لكلِّ مبحثٍ، حيثُ إنَّ النهايةَ العُظمَى لكلِّ اختبارٍ ٢٠ علامةً.

١) ما مجموعُ علاماتِهنَّ في الاختباريْنِ في كلِّ مبحثٍ؟

٢) ما الفرقُ بينَ علاماتِهنَّ في الاختباريْنِ في كلِّ مبحثٍ؟

٣) كمْ ستصبحُ علاماتُهنَّ في الاختبارِ الأولِ، إذا أصبحتْ النهايةُ العظمى لكلِّ امتحانٍ ٤٠ علامةً؟

الجدولُ (٤–٢)

الطالبةُ \ المبحثُ	اللغةُ العربيةُ	اللغةُ الإنجليزيةُ	الرياضياتُ
شادنُ	١٥	١٧	١٨
رامةُ	١٦	١٤	٢٠

الجدولُ (٤–٣)

الطالبةُ \ المبحثُ	اللغةُ العربيةُ	اللغةُ الإنجليزيةُ	الرياضياتُ
شادنُ	١٨	١٥	١٩
رامةُ	١٧	١٦	١٩

١- جمعُ المصفوفاتِ

لمعرفةِ مجموعِ علاماتِهنَّ في الاختباريْنِ في كلِّ مبحثٍ، نقومُ بجمعِ المدخلاتِ المتناظرةِ في الجدوليْنِ، ونحصلُ على جدولٍ واحدٍ، يبيّنُ مجموعَ العلاماتِ في كلِّ مبحثٍ، لكلِّ طالبةٍ، والجدولُ (٤-٤) يبيّنُ هذا المجموعَ:

الجدولُ (٤-٤)

المبحثُ / الطالبةُ	اللغةُ العربيةُ	اللغةُ الإنجليزيةُ	الرياضياتُ
شادنُ	٣٣	٣٢	٣٧
رامةُ	٣٣	٣٠	٣٩

أيْ أنّ:

الطالبةُ شادنُ كانَ مجموعُ علاماتِها في اختبارِي اللغةِ العربيةِ = ١٥ + ١٨ = ٣٣

ومجموعُ علاماتِها في اختبارَي اللغةِ الانجليزيةِ = ١٧ + ١٥ = ٣٢

أما الطالبةُ رامةُ، فمجموعُ علاماتِها في اختبارَي اللغةِ العربيةِ = ١٦ + ١٧ = ٣٣

وهكذا ....

ويمكنُنا باختصارٍ، وضعُ هذهِ المعلوماتِ ضمنَ مصفوفاتٍ، حيثُ إن:

المصفوفةُ **أ**، تدلُّ على علاماتِ الطالبتيْنِ في الاختبارِ الأولِ، والمصفوفةُ **ب**، تدلُّ على علاماتِ الطالبتيْنِ في الاختبارِ الثاني:

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} ١٩ & ١٥ & ١٨ \\ ١٩ & ١٦ & ١٧ \end{bmatrix} \qquad \text{أ} = \begin{bmatrix} ١٨ & ١٧ & ١٥ \\ ٢٠ & ١٤ & ١٦ \end{bmatrix}$$

أمّا المصفوفةُ **جـ**، فتدلُّ على مجموعِ علاماتِ الطالبتيْنِ في الاختباريْنِ:

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣٧ & ٣٢ & ٣٣ \\ ٣٩ & ٣٠ & ٣٣ \end{bmatrix}$$

أيْ أنَّ: أ + ب = جـ

فعندَ جمعِ مصفوفتيْنِ، يجبُ أنْ تكونَ لهُما الرتبةُ نفسُها. وسنحصلُ على مدخلاتِ مصفوفةِ المجموعِ، بجمعِ كلِّ مدخلتيْنِ متناظرتيْنِ في المصفوفتيْنِ.

مثالُ (٤-٣)

إذا كانتْ س = $\begin{bmatrix} ١١- & ١ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٣ \\ ٦- & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

جِدْ (إنْ أمكنَ):

١) س + ص   ٢) ص + ع

الحلُّ

١) س + ص = $\begin{bmatrix} ١١- & ١ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٤ \\ ٢- & ١٤ \end{bmatrix}$

٢) ص + ع لا يمكنُ جمعُهما؛ لاختلافِ رتبتيْهِما، إذْ إنّ المصفوفةَ ص رتبتُها ٢ × ٢، أمّا المصفوفةُ ع فرتبتُها ٢ × ٣.

تدريبُ ٤-٤

في المثالِ السابقِ:

١) جِدْ : ص + س

٢) ما العلاقةُ بينَ س + ص ، ص + س؟

٣) هلْ عمليةُ جمعِ المصفوفاتِ تبديليّةٌ؟

٤) هلْ يوجدُ عنصرٌ محايدٌ لعمليةِ جمعِ المصفوفاتِ؟

٥) هلْ يوجدُ نظيرٌ جمعيٌّ للمصفوفةِ س؟

٢- طرحُ المصفوفاتِ

وكما جمَعنا بدايةَ الدرسِ المدخلاتِ المتناظرةَ؛ لمعرفةِ مجموعِ علاماتِ الطالبتيْنِ شادنَ ورامةَ، يمكنُ أنْ نطرحَ المدخلاتِ المتناظرةَ، لمعرفةِ الفرقِ بينَ علاماتِهنَّ في الاختبارِ

الثاني عنِ الأوّلِ، في كلِّ مبحثٍ، وذلكَ بطرحِ المصفوفةِ أ، منَ المصفوفةِ **ب**.

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ١٨ & ١٥ & ١٩ \\ ١٧ & ١٦ & ١٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٥ & ١٧ & ١٨ \\ ١٦ & ١٤ & ٢٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

عندَ طرحِ مصفوفتيْنِ، يجبُ أنْ تكونَ لهُما الرتبةُ نفسُها. ونحصلُ على مدخلاتِ مصفوفةِ الطرحِ، بطرحِ جميعِ المدخلاتِ المتناظرةِ في المصفوفتيْنِ.

مثالُ (٤-٤)

إذا كانتْ أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٩ & -١ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ،

جِدْ (إنْ أمكنَ):

١) أ − **ب**   ٢) **ب** − أ

الحلُّ

١) أ − **ب** = $\begin{bmatrix} ١ & ٩ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٧ \end{bmatrix}$

٢) **ب** − أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٩ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فكِّرْ

متَى يكونُ أ − **ب** = **ب** − أ؟

تدريبُ ٤-٥

في المثالِ (٤-٤) جِدْ (إنْ أمكنَ):

١) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ − أ   ٢) أ − $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$

٣) **ب** − $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

فكِّرْ

١) ما العلاقةُ بينَ أ – ب ، ب – أ ؟

٢) هلْ عمليةُ طرحِ المصفوفاتِ تبديليّةٌ؟

٣) هلْ يوجدُ عنصرٌ محايدٌ لعمليةِ طرحِ المصفوفاتِ؟

٣– ضربُ المصفوفةِ بعددٍ ثابتٍ

لضربِ مصفوفةٍ بعددٍ حقيقيٍّ مثلِ ك، نضربُ كلَّ مدخلةٍ منْ مدخلاتِها بهذا العددِ ، كما في المثالِ الآتِي:

مثالُ (٤–٥)

إذا كانتْ: س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ & ١٤ \\ ٧ & ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ١- \\ ٢ & ٩ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جِدْ ٢ س

الحلُّ

$$٢س = \begin{bmatrix} ٤ \times ٢ & ٧ \times ٢ & ١٤ \times ٢ \\ ٧ \times ٢ & ١ \times ٢ & ٥ \times ٢ \\ ٠ \times ٢ & ٣ \times ٢ & ١- \times ٢ \\ ٢ \times ٢ & ٩ \times ٢ & ٠ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١٤ & ٢٨ \\ ١٤ & ٢ & ١٠ \\ ٠ & ٦ & ٢- \\ ٤ & ١٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

الأسئلةُ ؟

١) إذا كانَتْ:

س = $\begin{bmatrix} ١١ & ٠ & ٣ \\ -٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ف = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ص = $\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٦ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

جِدْ (إنْ أمكنَ)

أ) س + ع   ب) س + **ف**   جـ) **ف** + س

د) س + ص   هـ) ٣ع   و) ص − ٢ع

ز) −٤ص   حـ) ع − **ف**

٢) في أحدِ المحلاتِ التجاريةِ، سُجلتْ مبيعاتُ قسمِ الملابسِ في نهايةِ الأسبوعِ الأولِ منْ شهرِ شباطَ ٥٠٤ دينارًا، وقسمِ الأحذيةِ ١٢٠ دينارًا، وقسمِ الأدواتِ المنزليةِ ٢٣٤ دينارًا، وقسمِ الألعابِ ٩٠ دينارًا. أمّا في الأسبوعِ الثاني منَ الشهرِ نفسِهِ، فكانتِ المبيعاتُ على النحوِ الآتِي: قسمُ الملابسِ ٤٩٥ دينارًا، وقسمُ الأحذيةِ ١٢٤ دينارًا، وقسمُ الأدواتِ المنزليةِ ٣٤٠ دينارًا، وقسمُ الألعابِ ١٥٥ دينارًا. رتِّبِ المبيعاتِ في المصفوفتيْنِ:

أ) مصفوفةٌ أ التي تمثلُ مبيعاتِ المحلِّ في الأسبوعِ الأولِ، في الأقسامِ الأربعةِ.

ب) مصفوفةٌ **ب** التي تمثلُ مبيعاتِ المحلِّ في الأسبوعِ الثانِي، في الأقسامِ الأربعةِ.

ثمَّ اكتبِ المصفوفةَ **جـ**، التي تمثلُ مجموعَ المبيعاتِ في الأسبوعيْنِ.

٣) إذا كانتْ أطوالُ ثلاثةِ طلابٍ، في بدايةِ العامِ الدراسيِّ السابقِ كالآتِي:

١٥٨سم ، ١٦٠سم ، ١٦٢سم . وفي بدايةِ العامِ الدراسيِّ الحاليِّ أصبحتْ أطوالُهمْ على التوالي كالآتِي: ١٦١سم ، ١٦٥سم ، ١٦٨سم . استخدمِ المصفوفاتِ لإيجادِ الفرقِ في طولِ كلٍّ منْهُمْ.

٤) جِدْ المجاهيلَ في المعادلةِ الآتيةِ:

$$\begin{bmatrix} \text{ص} & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٠ & ٨\text{س} \end{bmatrix}$$

٥) في المثالِ (٤–٣) جدْ ٢ص – ٣س (إنْ أمكنَ).

٦) حُلَّ الفرعَ الثالثَ، من المسألةِ الواردةِ بدايةَ الدرسِ.

ثالثًا ضربُ المصفوفاتِ Multiplication of Matrices

ذهبتْ ناديةُ لمتجرِ ألعابٍ، واشترتْ ٤ كراتٍ بسعرِ ٢٥ قرشًا للكرةِ الواحدةِ، ٥ سياراتٍ بسعرِ ٤٠ قرشًا للسيارةِ الواحدةِ، ودميتيْنِ بسعرِ ١٥٠ قرشًا للدميةِ الواحدةِ، كم ستدفعُ ناديةُ ثمنًا لما اشترتْهُ منَ المتجرِ؟

إذا وضعْنا المعلوماتِ السابقةَ في مصفوفتيْنِ، حيث $أ_{٣\times١}$ مصفوفةٌ تمثلُ عددَ الألعابِ التي اشترتْها ناديةُ، $ب_{١\times٣}$ مصفوفةٌ تمثلُ سعرَ اللعبةِ الواحدةِ منْ كلِّ نوعٍ، يصبحُ الحلُّ كالآتي:

تدفعُ ناديةُ ثمنًا للألعابِ $= ب_{١\times٣} \times أ_{٣\times١}$

$$[١٥٠ \times ٢ + ٤٠ \times ٥ + ٢٥ \times ٤] = \begin{bmatrix} ٢٥ \\ ٤٠ \\ ١٥٠ \end{bmatrix} \times [٢ \quad ٥ \quad ٤]$$

$$[٦٠٠] = [٣٠٠ + ٢٠٠ + ١٠٠] =$$

ولإجراءِ عمليةِ ضربِ مصفوفتيْنِ، يجبُ أنْ يكونَ عددُ أعمدةِ المصفوفةِ الأُولَى، يُساوي عددَ صفوفِ المصفوفةِ الثانيةِ.

ففي المسألةِ السابقةِ لاحظْنا أنَّ رتبةَ المصفوفةِ الأولى هيَ ١ × ٣، ورتبةَ المصفوفةِ الثانيةِ هيَ ٣ × ١، ورتبةَ المصفوفةِ الناتجةِ هَي ١ × ١ أيْ أنَّ:

$$جـ_{١\times١} = ب_{١\times٣} \times أ_{٣\times١}$$

مثالُ (٤–٦)

لتكنْ $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١- \end{bmatrix}$

جدْ (إنْ أمكنَ) أ × ب

الحلُّ

بما أنَّ عددَ أعمدةِ المصفوفةِ أ، يساوِي عددَ صفوفِ المصفوفةِ **ب**، فيمكنُ إجراءُ عمليةِ الضربِ، ولإجراءِ الضربِ، نضربُ صفوفَ المصفوفةِ الأولى، بأعمدةِ المصفوفةِ الثانيةِ كالآتِي:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = {}_{٣\times٢}\text{ب} \times {}_{٢\times٢}\text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٣\times٢+٤\times١ & ٢\times٢+٠\times١ & ١-\times٢+٠\times١ \\ ٣\times٠+٤\times٥ & ٢\times٠+٠\times٥ & ١-\times٠+٠\times٥ \end{bmatrix} = {}_{٣\times٢}\text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٤ & ٢- \\ ٢٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} =$$

هلْ تستطيعُ إيجادَ **ب** × أ؟ فسِّرْ إجابتَكَ.

تدريبُ ٤-٦

لتكنْ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{س}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١- \end{bmatrix} = \text{ص}$

١) جدْ (إنْ أمكنَ): س × ص ، ص × س

٢) هلْ عمليةُ ضربِ المصفوفاتِ تبديليةٌ ؟

يمكنُ استخدامُ ضربِ المصفوفاتِ؛ لتمثيلِ نظامٍ منَ المعادلاتِ، فلكتابةِ النظامِ الآتي باستخدامِ ضربِ المصفوفاتِ:

٣س − ٢ص = −٣

٤س + ص = ٥

نضعُ المعاملاتِ ضمنَ المصفوفةِ الأُولَى **أ**، والمجاهيلَ ضمنَ المصفوفةِ الثانيةِ **ب**، والنواتجَ ضمنَ المصفوفةِ **جـ** على الترتيبِ:

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \quad \times \quad \text{ب} \quad = \quad \text{جـ}$$

تأكدْ منْ أنَّ حاصلَ الضربِ يُعطِي المعادلتيْنِ الأصليتيْنِ.

تدريبُ (٤-٧)

اكتبِ النظامَ الآتِي مستخدمًا ضربَ المصفوفاتِ:

٢س − ٣ص = ٧

ص = س + ١

مثالُ (٤-٧)

إذا كانَتْ $\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

جدْ (إنْ أمكنَ): س × و ، و × س

الحلُّ

$$\text{س} \times \text{و} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{و} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

ماذا تلاحظُ؟

إنَّ مصفوفةَ الوحدةِ $\text{و}_{٢}$ ، هيَ المصفوفةُ المحايدةُ لعمليةِ الضربِ، منَ الرتبةِ الثانيةِ ؛ لأنَّها محايدةٌ بالنسبةِ لعمليةِ ضربِ المصفوفاتِ المربّعةِ، منَ الرتبةِ الثانيةِ.

تدريبُ (٤-٨)

اكتبِ المصفوفةَ المحايدةَ $\text{و}_{٣}$.

الأسئلةُ

١) إذا كانَتْ:

$$س = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & -١ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{bmatrix} ، ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} ، ع = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٢ \\ ٧ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$$

جِدْ (إنْ أمكنَ)

أ) س × ص　　　ب) ص × س　　　جـ) ص × ع

د) ع × س　　　هـ) ع × ص

٢) جدْ قيمةَ المصفوفة س في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ب) $س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٨ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

٣) ثلاثةُ مزارعينَ: نورٌ، ويوسفُ، وعبدُ الرحمنِ، يزرعُ كلٌّ مِنْهُم الأصنافَ الآتيةَ: زيتونًا، وتفاحًا، وعنبًا. والجدولُ (٤-٥)، يبيّنُ الانتاجَ منْ كلِّ صنفٍ بالكيلو غرام. فإذا بِيعَ في أحدِ المواسمِ الكيلوغرام منَ الزيتونِ بسعرِ ١٤٠ قرشًا، والكيلو غرام منَ التفاحِ بسعرِ ١٠٠ قرشٍ، والكيلو غرام منَ العنبِ بسعرِ ٨٠ قرشًا.

الجدول (٤-٥)

الصنفُ / المزرعةُ	الزيتونُ	التفاحُ	العنبُ
نورٌ	٤٥٠	١٥٠	١٠٠
يوسفُ	٦٠٠	٨٠	١٢٠
عبدُ الرحمن	٣٥٠	٥٠	٢٠٠

أ) اعتمدْ على الجدولِ، ونظِّمْ أصنافَ المزروعاتِ السابقةِ في المصفوفةِ **س** وأسعارَ كلِّ كيلو غرامِ منْها في مصفوفةِ العمود **ص**

ب) احسبِ الدخلَ لكلِّ مزرعةٍ باستخدامِ ضربِ المصفوفاتِ.

٤) اكتبِ النظامَ الآتِي مستخدمًا ضربَ المصفوفاتِ:

ص − ٣س = ٤

س + ص = ١٢

٥) أ) جد رتبة ناتج الضرب $أ_{٢×٣} \times \textbf{ب}_{٣×٥}$

ب) جد رتبة ناتج الضرب $\textbf{س}_{م×ن} \times \textbf{ص}_{ن×ك}$

حلُّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطيّةِ بالمصفوفاتِ

Solving of a System of Linear Equations by Matrices

النتاجاتُ

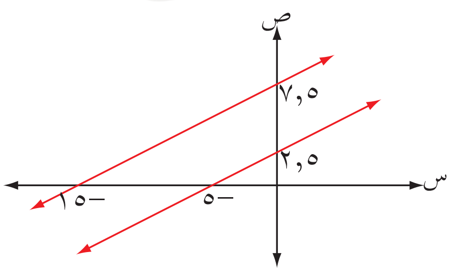
- تتعرفُ مفهومَ المحددةِ لمصفوفةٍ مربّعةٍ وتجدُها.
- تتعرفُ خصائصَ المحدداتِ.
- تحلُّ نظامًا مكونًا من معادلتيْنِ خطيتيْنِ بمتغيريْنِ مستخدمًا طريقةَ كريمر.
- تتعرفُ عملياتِ الصفِّ البسيطِ، وتستخدمُها في حلِّ أنظمةٍ منَ المعادلاتِ الخطيةِ.

أوّلًا المحدداتُ وخصائصُها Determinants and their Properties

عندَ التعاملِ معَ النظامِ الآتي بيانيًا، نجدُ أنّهُ يتكوّنُ منْ خطيْنِ متوازييْنِ، أيْ لا توجدُ نقطةُ تقاطعٍ تحققُ المعادلتيْنِ معًا، وهذا يعني أنّه لا يوجدُ حلٌّ لهذا النظامِ.

−س + ٢ص = ٥

−س + ٢ص = ١٥



يمكنُ استخدامُ مفهومِ محددةِ المصفوفةِ؛ لمعرفةِ فيما إذا كانَ للنظامِ الخطيِّ حلٌّ وحيدٌ أمْ لا.

تعريفٌ

إذا كانتْ $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، مصفوفةً مربعةً من الرتبةِ الثانيةِ

فإنَّ محددةَ أ التي يُرمزُ لها بالرمزِ | أ | تساوي

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$$

تعريفٌ

إذا كانتْ محددةُ مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فإنَّ تلكَ المصفوفةَ تُسمّى مصفوفةً منفردةً Singular Matrix

عند كتابةِ النظامِ السابقِ $-س + ٢ص = ١٥$

$-س + ٢ص = ٥$

باستخدامِ المصفوفاتِ، نجدُ محددةَ مصفوفةِ المعاملاتِ م = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

فإذا كانتْ المصفوفةُ م غير منفردةٍ، يكونُ للنظامِ حلٌّ وحيدٌ، أمَّا إذا كانتْ منفردةً، فإمّا أنْ يكونَ للنظامِ عددٌ لا نهائيٌّ منَ الحلولِ، أوْ لا يوجدُ حلٌّ للنظامِ.

$|م| = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = -١ \times ٢ - ٢ \times -١ = صفر$

وهُنا مصفوفةُ المعاملاتِ م مصفوفةٌ منفردةٌ، إذًا ليسَ للنظامِ حلٌّ وحيدٌ.

تدريبُ ٤-٩

بيِّنْ فيما إذا كانَ للنظامِ الآتِي حلٌّ وحيدٌ أمْ لا، باستخدامِ المحدداتِ:

$٣س + ص = ٥$

$٣س + ص = ٩$

ولحسابِ محددةِ المصفوفةِ المربعةِ س، منَ الرتبةِ ٣، نستخدمُ القانونَ الآتِي:

تعريفٌ

إذا كانتْ س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & س_{٣١} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} & س_{٣٢} \\ س_{١٣} & س_{٢٣} & س_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، مصفوفةً مربعةً من الرتبةِ الثالثةِ، فإنَّ:

$$|س| = س_{١١} \times \begin{vmatrix} س_{٢٢} & س_{٣٢} \\ س_{٢٣} & س_{٣٣} \end{vmatrix} - س_{٢١} \times \begin{vmatrix} س_{١٢} & س_{٣٢} \\ س_{١٣} & س_{٣٣} \end{vmatrix} + س_{٣١} \times \begin{vmatrix} س_{١٢} & س_{٢٢} \\ س_{١٣} & س_{٢٣} \end{vmatrix}$$

لاحظْ أنَّ محددةِ المصفوفةِ س يساوي :

$س_{١١}$ × (محددةِ المصفوفةِ س، بعدَ حذفِ الصفِّ الأولِ والعمودِ الأولِ) −

$س_{٢١}$ × (محددةِ المصفوفةِ س، بعدَ حذفِ الصفِّ الأولِ والعمودِ الثاني) +

$س_{٣١}$ × (محددةِ المصفوفةِ س، بعدَ حذفِ الصفِّ الأولِ والعمودِ الثالث).

(أيْ نضربُ كلَّ مدخلةٍ في الصفِّ الأولِ، في محددةِ المصفوفةِ الناتجةِ منْ حذفِ صفِّها وعمودِها، معَ مراعاةِ عمليةِ الطرحِ ثمَّ الجمعِ، مبتدئينَ بالمدخلةِ $س_{١١}$).

مثالُ (٤-٨)

جِدْ محددةَ كلٍّ منَ المصفوفتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$أ = \begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} -٤ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

الحلُّ

$$|أ| = \begin{vmatrix} -١ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١ \times ٣ - -٤ \times ٢ = ٥$$

$$|ب| = \begin{vmatrix} -٤ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -٤ \times ٢ - -١ \times ٣ = -٥$$

لاحظْ أنّهُ عندَ تبديلِ العمودِ الأولِ والثاني في المصفوفةِ أ، نحصلُ على المصفوفةِ ب، وبمقارنةِ محدداتِ المصفوفتيْنِ أ، ب، نجدُ أنَّ محددةَ كلٍّ منْ أ، ب متساويتانِ في المقدارِ ومتعاكستان في الإشارةِ، وكذلكَ الأمرُ بالنسبةِ لتبديلِ الصفوفِ.

خاصيةُ (١)

عندَ تبديلِ صفٍّ مكانَ صفٍّ (أو عمودٍ مكانَ عمودٍ) في مصفوفةٍ مربعةٍ، فإنَّ محددةَ المصفوفةِ الجديدةِ تساوي محددةَ المصفوفةِ الأصليةِ في المقدارِ، وتعاكسها في الإشارةِ.

تدريبٌ (٤–١٠)

جِدْ محددةَ كلٍّ منَ المصفوفتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثالُ (٤–٩)

إذا كانتْ: $\text{أ} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فجدْ: $|\text{أ}|$ ، $|\text{ب}|$

الحلُّ

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = -1 \times -15 - 3 \times 5 = 0$$

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 0$$

نلاحظُ انَّ الصفَّ الثاني في المصفوفةِ **أ** يساوي –٥ مضروبًا بالصفِّ الأولِ، وأنَّ العمودَ الثاني في المصفوفةِ **ب** يساوي مثلَيِ العمودِ الأولِ، وأنَّ محددةَ كلٍّ منهما تُساوِي صفرًا.

> **خاصيةُ (٢)**
>
> إذا كانَ أحدُ الصفوفِ (أو الأعمدةِ) في مصفوفةٍ ما يساوي عددًا ثابتًا، مضروبًا في الصفِّ الآخرِ (أو العمودِ الآخرِ)، فإنَّ محددةَ تلكَ المصفوفةِ تساوي صفرًا.

تدريبٌ (٤–١١)

أيُّ المصفوفتيْن الآتيتيْن منفردةٌ؟

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

مثالُ (٤-١٠)

جدْ محددةَ كلٍّ منَ المصفوفتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ٣ \end{bmatrix} \qquad ب = \begin{bmatrix} ٧- & ٠ & ٤ \\ ٦ & ٠ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٢- \end{bmatrix}$$

الحلُّ

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \times ٣ - ٠ \times \frac{١}{٢} = ٠$$

$$|ب| = ٧- \times \begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٢- \end{vmatrix} - ٠ \times \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٤ & ٢- \end{vmatrix} + ٤ \times \begin{vmatrix} ٦ & ٠ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$|ب| = ٧- \times ٠ - ٠ \times ٣٢- + ٤ \times ٠ = ٠$$

ماذا تلاحظُ على المصفوفاتِ السابقةِ؟

تدريبُ (٤-١٢)

أيُّ المصفوفتيْنِ الآتيتيْنِ منفردةٌ؟

$$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} ،\quad ب = \begin{bmatrix} ٥- & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

خاصيةُ (٣)

إذا كانتْ جميعُ مدخلاتِ صفٍّ (أو عمودٍ) في مصفوفةٍ ما أصفارًا، فإنَّ محددةَ تلكَ المصفوفةِ تساوي صفرًا .

مثالُ (٤–١١)

إذا كانتْ: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجِدْ: $|\text{أ}|$، $|\text{ب}|$

الحلُّ

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times ٣ - ١ \times ٢ = ١٣$$

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times ٣ - ٢ \times ١ = ١٣$$

نلاحظُ أنَّ الصفَّ الأولَ في المصفوفةِ **أ**، هوَ العمودُ الأولُ في المصفوفةِ **ب**، وأنَّ الصفَّ الثاني في المصفوفةِ **أ**، هوَ العمودُ الثاني في المصفوفةِ ب، وأنَّ محددة **أ** = محددةَ **ب**.

تدريبُ ٤–١٣

إذا كانتْ $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٥ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، حيثُ $|\text{أ}| = -٥٦$ ،

جِدْ محددةَ المصفوفةِ $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

خاصيةُ (٤)

عندَ تبديلِ الصفوفِ بالأعمدةِ، (أوِ الأعمدةِ بالصفوفِ) في مصفوفةٍ مربعةٍ، فإنَّ محددةَ المصفوفةِ الجديدةِ لا تتغيّرُ.

مثالُ (٤–١٢)

إذا كانتْ: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجِدْ: $|\text{أ}|$

الحلُّ

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times ٣ - ٣ \times ٥ = ٠ .$$

تدريبُ ٤–١٤

جدْ محددةَ كلٍّ منَ المصفوفتيْنِ الآتيتيْنِ :

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ١ & ٩ \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$

خاصيةُ (٥)

إذا تساوتْ المدخلاتُ المتناظرةُ في أيِّ صفيْنِ (أو عموديْنِ) في مصفوفةٍ مربعةٍ، فإنَّ محددةَ تلكَ المصفوفةِ تُساوي صفرًا.

تعريفُ النظيرِ الضَّرْبِيِّ

يكونُ النظيرُ الضربيُّ للمصفوفةِ $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ موجودًا، إذا كانتْ محددتُها لا تساوي صفرًا (غيرَ منفردةٍ) ويرمزُ لَهُ بالرمزِ $\text{س}^{-١}$ حيثُ:

$$\text{س}^{-١} = \frac{١}{|\text{س}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

مثالُ (٤–١٣)

جدْ النظيرَ الضربيَّ للمصفوفةِ س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، (إنْ أمكنَ).

الحلُّ

|س| = ٢ × ١- – ٣- × ١ = ١

المصفوفةُ س غيرُ منفردةٍ، ويمكنُ إيجادُ نظيرِها الضربيِّ

$$س^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$$

تدريبُ (٤–١٥)

في المثالِ السابقِ:

١) جِدْ ناتجَ ضربِ س × $س^{-١}$

٢) جدْ ناتجَ ضربِ $س^{-١}$ × س

٣) لماذا تُسمى المصفوفةُ $س^{-١}$ النظيرَ الضربيَّ للمصفوفةِ س؟

الأسئلةُ ؟

١) جدْ محددةَ كلٍّ منَ المصفوفاتِ الآتيةِ:

أ) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & \frac{١}{٢} \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ \sqrt{٢} & ٢ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١- & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) إذا كانتْ س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$

فجِدْ:

أ) س × ص ب) |س| جـ) |ص|

د) |س × ص | هـ) |س| × |ص| و) |س$^{-١}$|

٣) إذا كانتْ أ = $\begin{bmatrix} ١ & \text{س} \\ ١ - \text{س} & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجِدْ قيمَ س التي تجعلُ أ مصفوفةً منفردةً.

٤) إذا كانتْ س مصفوفةً مربعةً منَ الرتبةِ الثانيةِ ، وكانَ ع عددًا ثابتًا، بيّنْ أنَّ:

|ع س | = ع^{٢} |س|

٥) أيُّ المصفوفاتِ الآتيةِ مصفوفةٌ منفردةٌ؟

س = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ ٣\text{ب} & ٣\text{أ} \end{bmatrix}$ ص = $\begin{bmatrix} \text{ب} & ٣\text{أ} \\ ٣\text{ب} & \text{أ} \end{bmatrix}$ ع = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٦) إذا عملتَ أنّ ص ، مصفوفةٌ مربعةٌ منَ الرتبةِ ٣، وكانتْ |ص| =٥ ، وأبدلنا الصفّيْنِ الأولَ والثالثَ، ثمَّ أبدلْنا الثانيَ والثالثَ، فما محددةُ المصفوفةِ الجديدةِ؟

ثانيًا قاعدةُ كريمر Cramer's Rule

يُنتجُ مصنعُ أجهزةٍ كهربائيةٍ نوعيْنِ منَ الثلاجاتِ: ثلاجةً ١٢ قدمٍ، وثلاجةً ١٤ قدمٍ. وإنتاجُ كلِّ نوعٍ يمرُّ بمرحلتيْنِ هُما: مرحلةُ التصنيعِ، ومرحلةُ التجميعِ، فالثلاجةُ ١٢ قدمٍ تحتاجُ ٤ ساعاتِ تصنيعٍ، وساعتَيْ تجميعٍ، والثلاجةُ ١٤ قدمٍ، تحتاجُ ٥ ساعاتِ تصنيعٍ، ٣ ساعاتِ تجميعٍ. فإذا كانَ عددُ ساعاتِ العملِ السنويّةِ المخصصةِ للتصنيعِ ٢٤٠٠ ساعةٍ، وللتجميعِ ١٣٠٠ ساعةٍ، فما عددُ الثلاجاتِ المنتجةِ منْ كلِّ نوعٍ؟

بعدَ تحويلِ المسألةِ إلى نظامٍ مكوّنٍ منْ معادلتيْنِ خطيتيْنِ بمتغيريْنِ، يمكنُ حلُّها بالحذفِ، أو التعويضِ، أو عن طريقِ التمثيلِ البيانيِّ.

وستتعرفُ في هذا الدرسِ طريقةَ حلِّ نظامٍ مكوّنٍ منْ معادلتيْنِ خطيتيْنِ بمتغيريْنِ باستخدامِ المصفوفاتِ وهيَ **قاعدةُ كريمر**، في حلِّ نظامِ المعادلاتِ الخطيةِ.

وتستخدمُ طريقةُ كريمر في حلِّ أنظمةٍ تتكونُ منْ ن منَ المعادلاتِ الخطيةِ، تحتوي ن منَ المتغيراتِ.

مثالُ (٤-١٤)

جدْ حلَّ النظامِ الآتي:

٥س = ٦ص + ١٥

٣س + ٤ص = -٢٩

الحلُّ

٥س - ٦ص = ١٥ (كتابةُ كلّ معادلةٍ على الصورةِ: أ س + ب ص = جـ)

٣ س + ٤ ص = -٢٩

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}}_{\text{م}} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ \\ -٢٩ \end{bmatrix}$$

(كتابةُ المعادلةِ المرافقةِ للنظامِ باستخدامِ المصفوفات)

$$|\text{م}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٦ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٥ \times ٤ - -٦ \times ٣$$

$$= ٢٠ + ١٨ = ٣٨$$

(إيجادُ محددةِ مصفوفةِ المعاملاتِ)

وهيَ مصفوفةٌ غيرُ منفردةٍ، إذن يوجدُ حلٌّ وحيدٌ للنظامِ.

نكوّنُ المصفوفةَ $\text{م}_{\text{س}}$

$$\text{م}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١٥ & -٦ \\ -٢٩ & ٤ \end{bmatrix}$$

(استبدالُ العمودِ الأولِ الذي يمثلُ معاملاتِ س في مصفوفةِ المعاملاتِ م بعمودِ الحدودِ المطلقةِ)

$$|\text{م}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ١٥ & -٦ \\ -٢٩ & ٤ \end{vmatrix} = ١٥ \times ٤ - -٦ \times -٢٩ = -١١٤$$

(إيجادُ محددةِ $\text{م}_{\text{س}}$)

$$\text{س} = \frac{|\text{م}_{\text{س}}|}{|\text{م}|} = \frac{-١١٤}{٣٨} = -٣$$

(إيجادُ قيمةِ س)

ثمَّ نكوّنُ المصفوفةَ $\text{م}_{\text{ص}}$

$$\text{م}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٥ \\ ٣ & -٢٩ \end{bmatrix}$$

(استبدالُ العمودِ الثاني الذي يمثلُ معاملاتِ ص في مصفوفةِ المعاملاتِ م بعمودِ الحدودِ المطلقةِ)

$$|\text{م}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١٥ \\ ٣ & -٢٩ \end{vmatrix} = ٥ \times -٢٩ - ٣ \times ١٥ = -١٩٠$$

(إيجادُ محددةِ $\text{م}_{\text{ص}}$)

$$\text{ص} = \frac{|\text{م}_{\text{ص}}|}{|\text{م}|} = \frac{-١٩٠}{٣٨} = -٥$$

(إيجادُ قيمةِ ص)

تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

تدريبُ (٤-١٦)

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ، باستخدامِ قاعدةِ كريمر .

مثالُ (٤-١٥)

جدْ حلَّ النظامِ الآتي باستخدامِ قاعدةِ كريمر:

٢ س - ٣ص + ع = -٣

س + ٢ ص - ٢ ع = ٨

٣س + ٤ص - ع = ١٥

الحلُّ

نكتبُ مصفوفةَ المعاملاتِ م = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، مصفوفةَ الحدودِ المطلقةِ = $\begin{bmatrix} -٣ \\ ٨ \\ ١٥ \end{bmatrix}$

حيثُ: $|\text{م}| = ٢(٢ \times -١ - -٢ \times ٤) - -٣(١ \times -١ - -٢ \times ٣) + ١(١ \times ٤ - ٢ \times ٣) = ٢٥$

$|\text{م}_{\text{س}}| = -٣(٢ \times -١ - -٢ \times ٤) - -٣(٨ \times -١ - -٢ \times ١٥) + ١(٨ \times ٤ - ٢ \times ١٥) = ٥٠$

$|\text{م}_{\text{ص}}| = ٢(٨ \times -١ - -٢ \times ١٥) - -٣(١ \times -١ - -٢ \times ٣) + ١(١ \times ١٥ - ٨ \times ٣) = ٥٠$

$|\text{م}_{\text{ع}}| = ٢(٢ \times ١٥ - ٨ \times ٤) - -٣(١ \times ١٥ - ٨ \times ٣) + -٣(١ \times ٤ - ٢ \times ٣) = -٢٥$

ومنهُ $\text{س} = \dfrac{|\text{م}_{\text{س}}|}{|\text{م}|} = ٢$ ، $\text{ص} = \dfrac{|\text{م}_{\text{ص}}|}{|\text{م}|} = ٢$ ، $\text{ع} = \dfrac{|\text{م}_{\text{ع}}|}{|\text{م}|} = -١$

تدريبُ (٤-١٧)

استخدمْ قاعدةَ كريمر في حلِّ النظامِ الآتي:

س + ص - ع = ١

٢س + ص + ٣ ع = ١٥

ص - ٢ ع = -٤

الأسئلةُ

١) استخدمْ قاعدةَ كريمر في حلِّ كلٍّ منَ الأنظمةِ الآتيةِ:

أ) ص = ٦ − ٢س
ص − ٢س = −٢

ب) ٣س = ٤ − ٥ص
س = ٣ص − ١٠

٢) جدْ نقطةَ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتُه: ص = ٥س − ٢ معَ المستقيمِ الذي معادلتُه: ص = ٧ − ٤س، باستخدامِ قاعدةِ كريمر.

٣) جدْ حلَّ النظامِ الآتي باستخدامِ قاعدةِ كريمر:

س − ص + ع = ١
٢س − ص − ٧ = −٤ع
ص + س − ٢ع = ٣

٤) قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ محيطُها ٦٠م، إذا علمتَ أنّ طولَها يساوي مِثْلَيْ عرضِها، جدْ أبعادَ قطعةِ الأرضِ باستخدامِ قاعدةِ كريمر.

ثالثًا عملياتُ الصفِّ البسيطةِ Simple Row Operations

عائلةٌ مكونةٌ منَ الأبِ والأمِّ وخمسةِ أطفالٍ، تَنوي الذهابَ إلى منتجعٍ على البحرِ الميتِ، وكانتْ بطاقةُ دخولِ الطفلِ إلى شاطئِ سباحةٍ منظم تكلّفُ أقلَّ ممّا تكلّفُ للبالغِ بـ ١٥ دينارًا. إذا دفعتِ العائلةُ تكلفةَ الدخولِ للشاطئِ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ.

١) كمْ سعرُ بطاقةِ البالغِ ؟

٢) كمْ سعرُ بطاقةِ الطفلِ؟

لحلِّ هذهِ المسألةِ، نحوّلُ البياناتِ إلى نظامٍ منَ المعادلاتِ الخطيةِ، وقدْ تعلمتَ كيفَ تحلُّ النظامَ بالحذفِ،أو التعويضِ، أو التمثيلِ البيانيِ، أو قاعدةِ كريمر. ويمكنكَ حلُّ النظامِ بِما يُسمّى **طريقةَ عملياتِ الصفِّ البسيطةِ**.

وتستخدمُ طريقةُ عملياتِ الصفِّ البسيطةِ، في حلِّ أنظمةٍ، تتكونُ منْ ن من المعادلاتِ الخطيةِ، تحتوي ن منَ المتغيراتِ.

في المسألةِ السابقةِ نفرضُ أنّ: س سعرُ بطاقةِ البالغِ، لدينا شخصانِ بالغانِ (الأبُ، والأمُّ)
ص سعرُ بطاقةِ الطفلِ، لدينا خمسةُ أطفالٍ

ومنهُ نستنتجُ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

٢س + ٥ص = ١٠٠

س − ص = ١٥

نكوّنُ ما يُسمّى **المصفوفةَ الموسَّعَةَ**، التي يتكوّنُ كلُّ صفٍّ منها منْ معاملاتِ المجاهيلِ، والحدِّ المطلقِ في المعادلةِ الواحدةِ في النظامِ، كما يأتي :

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٢ & ٥ & ١٠٠ \\ ١ & -١ & ١٥ \end{array}\right]$$

ثمَّ نحوِّلُ هذه المِصفوفةَ الموسَّعةَ إلى مصفوفةٍ أُخرى، على الشكلِ الآتي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & س_١ \\ ٠ & ١ & ص_١ \end{array}\right]$$

وذلكَ ضمنَ عملياتٍ تهدفُ إلى تحويلِ النظامِ إلى الصورةِ الآتيةِ:

$١ \times س + ٠ \times ص = س_١ \longrightarrow س = س_١$

$٠ \times س + ١ \times ص = ص_١ \longrightarrow ص = ص_١$

وتكونُ النقطةُ ($س_١$ ، $ص_١$) حلاًّ للنظامِ.

للقيامِ بذلكَ نبدأُ بالعمودِ الأولِ، ونستخدمُ عملياتِ الصفِّ البسيطةِ لَجعْلِ المُدْخَلةِ ١١ (مدخلةِ العمودِ الأولِ الصفِّ الأولِ) واحدًا، ثمَّ نجعلُ باقي مدخلاتِ العمودِ أصفارًا .
وبعْدَها ننتقلُ إلى العمودِ الثاني ونجعلُ المدخلةَ ٢٢ (مدخلةِ العمودِ الثاني الصفِّ الثاني) واحدًا، ثمَّ بقيةَ مدخلاتِ العمودِ أصفارًا ،....وهكذا لبقيةِ الأعمدةِ.
وكما يمكنُنا إجراءُ عملياتٍ حسابيةٍ معينةٍ على أيِّ نظامٍ منَ المعادلاتِ، دونَ التأثيرِ على حلِّ هذا النظامِ؛ ليبقى ممثلاً للموقفِ ذاتِهِ، يمكنُنا إجراءُ **عملياتِ الصفِّ البسيطةَ** على المصفوفةِ الموسّعةِ كما في الجدولِ (٤–٦):

الجدولُ (٤–٦)

العملياتُ على النظامِ	عملياتُ الصفِّ البسيطةُ	مثالٌ
تبديلُ ترتيبِ المعادلاتِ	تبديلُ ترتيبِ صفوفِ المصفوفةِ الموسّعةِ	تبديلُ الصفِّ الأولِ والثاني نرمزُ لهُ $ص_١ \longleftrightarrow ص_٢$
ضُرْبُ أيِّ معادلةٍ بعددٍ حقيقيٍّ لا يساوي صفرًا	ضَرْبُ أيِّ صفٍّ في المصفوفةِ الموسّعةِ بعددٍ حقيقيٍّ لا يساوي صفرًا	ضربُ الصفِّ الثاني بالعددِ –٢ نرمزُ له: $-٢ص_٢ \longrightarrow ص_٢$
ضُرْبُ أيِّ معادلةٍ بعددٍ حقيقيٍّ، وإضافةُ الناتجِ لأيِّ معادلةٍ أخرى.	ضَرْبُ أيِّ صفٍّ في المصفوفةِ بعددٍ حقيقيٍّ، وإضافةُ المدخلاتِ الناتجةِ إلى المدخلاتِ المناظِرَةِ لها في أيِّ صفٍّ آخرَ.	ضَرْبُ الصفِّ الأولِ بـ ٤، وإضافةُ المدخلاتِ الناتجةِ إلى مدخلاتِ الصفِّ الثاني، ونرمزُ له: $٤ص_١ + ص_٢ \longrightarrow ص_٢$

والآنَ سنستخدمُ هذهِ العملياتِ أو بعضَها، لحلِّ المسألةِ الواردةِ بدايةَ الدرسِ:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٢ & ٥ & ١٠٠ \\ ١ & -١ & ١٥ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ص}_١ \longleftrightarrow \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٢ & ٥ & ١٠٠ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٢ & ٥ & ١٠٠ \end{array}\right] \xrightarrow{-٢\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ \longrightarrow \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٠ & ٧ & ٧٠ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٠ & ٧ & ٧٠ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{١}{٧}\text{ص}_٢ \longrightarrow \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٠ & ١ & ١٠ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} ١ & -١ & ١٥ \\ ٠ & ١ & ١٠ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ص}_٢ + \text{ص}_١ \longrightarrow \text{ص}_١} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & ٢٥ \\ ٠ & ١ & ١٠ \end{array}\right]$$

وهنا انتهتِ العملياتُ بتحويلِ القسْمِ الأيمنِ منَ المصفوفةِ الموسعةِ إلى مصفوفةٍ محايدةٍ؛ ليصبحَ القسُم الأيسرُ حلًّا للنظامِ حيثُ:

سعرُ بطاقةِ البالغِ س = ٢٥ دينار.

سعرُ بطاقةِ الطفلِ ص = ١٠ دنانير.

(تحقَّقْ منْ صحةِ الحلِّ)

تدريبُ ٤-١٨

مستخدمًا عملياتِ الصفِّ البسيطةَ، حُلَّ النظامَ الآتِي:

−٢س + ص = ٠

٥س − ٢ص = ٦

الأسئلة

١) اكتبِ المصفوفةَ الموسّعةَ لكلِّ نظامٍ منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) ٢س − ٣ص = ٥
س + ص = ٥

ب) س + ص = ٩
٤ص = ١٨ − س

٢) حُلَّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةِ مستخدمًا عملياتِ الصفِّ البسيطةَ، ثمَّ تحقَّقْ مِنْ صحةِ الحلِّ:

أ) س + ٣ص = ٥
−س − ٢ص = ٣

ب) ٣س = ١ − ٢ص
٢س − ص − ٣ = ٠

٣) اشترى عزُّالدينِ أسهمًا في شركتيْنِ مختلفتيْنِ بمبلغِ ٤٠٠٠ دينارٍ، وفي نهايةِ العامِ حصلَ على ربحٍ نسبتُهُ ١٪ منَ المبلغِ الذي استثمرَهُ في الشركةِ الأُولى، وربح نسبتُه ٤٪ منَ المبلغِ الذي استثمرَهُ في الشركةِ الثانيةِ، فإذا علمْتَ أنَّ مجموع أرباحِهِ بلغتْ ١١٠ دنانيرَ. فكمْ يكونُ المبلغُ الذي استثمرَهُ عزُّالدينِ في كلِّ شركةٍ؟

أسئلةُ الوحدةِ

١) إذا كانتْ س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٣ \\ ٧ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$

أ) ما رتبةُ المصفوفةِ س؟

ب) حدِّدْ قيمةَ كلٍّ منَ المدخلاتِ الآتيةِ: $\text{س}_{١١}$ ، $\text{س}_{٣٢}$

جـ)جدِ النظيرَ الجمْعيَّ للمصفوفةِ س

٢) إذا كانتْ أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٤ \\ ١ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٧ \\ ٠ & -١ & ٨ \\ ٢ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٥ \\ -٣ & ٠ & ٩ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

جِدْ كلًا ممّا يأتي:

أ) أ + ب　　　ب) ب + جـ　　　جـ) ٢أ − ٣ب + جـ

٣) اكتبِ النظامَ الآتيَ مستخدمًا ضَرْبَ المصفوفاتِ:

٤س − ٣ص = ١

٥ = ٣س + ص

٤)جِدْ قيمَ س، ص، ع التي تحققُ كلَّ معادلةٍ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) $\begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٣ & \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \text{س} + \text{ص} & ٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢\text{س} + ٣\text{ص} \\ \text{ع} & ٣ \end{bmatrix}$

٥) إذا كانت **م** = $\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

جدِ النظيرَ الضربيَّ للمصفوفةِ **م**

٦) إذا كانتْ **أ** = $\begin{bmatrix} ٢٠ & س - ١ \\ س & ١ \end{bmatrix}$ ، جدْ قيمَ س التي تجعلُ **أ** مصفوفةً منفردةً.

٧) باستخدامِ قاعدةِ كريمر، حُلَّ كلَّ نظامٍ منَ النظامَيْنِ الآتييْنِ:

أ) ٢ (س + ص) −٥ = ٠

٤(١ − ص) = ٣س

ب) ٤ل + ٥ن + ع = ١٤

٣ن + ل + ٢ ع = ٧

ن + ١٠ل = ١٢

٨) احسبْ مجموعةَ قيمِ س التي تجعلُ للمصفوفةِ **ل** = $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ س^{٢} & س \end{bmatrix}$ نظيرًا ضربيًّا.

٩) حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، محيطُها أربعون مترًا، وطولُها يزيدُ على عرْضِها بثمانيةِ أمتارٍ.

أ) اكتبْ نظامَ المعادلاتِ المرتبطَ بهذهِ المسألةِ.

ب) اكتبِ المصفوفةَ الموسّعةَ المرافقةَ للنظامِ.

جـ) جدْ أبعادَ الحديقةِ مستخدمًا عملياتِ الصفِّ البسيطةَ.

١٠) إذا كانتْ $س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

جدْ قيمةَ :

أ) $(س + ص)^٢$

ب) $س^٢ + ٢س ص + ص^٢$

جـ) $س - ص$

د) $|٢س|$

هـ) $|س \times ص|$

١١) لدى مصنعٍ للألبانِ صنفانِ منَ الحليبِ: الأولُ قليلُ الدسم بِنسبةِ دسمٍ ١٪، والثاني عالي الدسم بِنسبةِ دسمٍ ٤٪، يُرادُ خلطُ هذيْنِ الصنفيْنِ لتعبئةِ عبواتٍ كبيرةٍ منَ الحليبِ تحوي كلٌّ منها ٩ لتراتٍ، بحيثُ تكونُ نسبةُ الدسمِ فيها ٢٪

أ) حَوِّلِ البياناتِ الواردةَ في المسألةِ إلى نظامٍ منَ المعادلاتِ الخطيةِ.

ب) اكتبِ المصفوفةَ الموسّعةَ المرافقةَ للنظامِ.

جـ) استخدمْ عملياتِ الصفِّ البسيطةَ لمعرفةِ عددِ لتراتِ كلِّ صنفٍ منَ الحليبِ التي يجبُ أنْ تخلطَ في هذهِ العبوةِ.

١٢) إذا كانَ **أ** ، **ب** مصفوفتيْنِ منِ الرتبةِ ٢ × ن ، ٥ × م على التوالي، وكانَ **أ** × **ب** منَ الرتبةِ ل × ٣، فَجِدْ قيمةَ كلٍّ منْ م، ن، ل.

تمَّ بحمدِ اللّهِ تعالَى