أ.عبدالعزيز الشملان قناة التلغرام : اضغط هنا

القسم الإلكتروني

1	Find the critical points of a given function إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة

في التمارين 6-3، جـد كل الأعداد الحرجة يدويًا. استخدم معرفتك بنوع التمثيل البياني (مثل القطع المكافئ أو الدالة التكعيبية) لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا

3. (a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$ (b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

4. (a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$

5. (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ (b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

6. (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

2	Find the absolute extrema of a given function إيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة معطاة

محلية أو لا يمثل أيًا منهما.

في التمارين 34-25، جـد القيم القصوى المطلقة لدالة

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 2]$

26. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ في الفترتين (a) $[-3, 1]$ و (b) $[-1, 3]$

27. $f(x) = x^{2/3}$ في الفترتين (a) $[-4, -2]$ و (b) $[-1, 3]$

28. $f(x) = \sin x + \cos x$ في الفترتين (a) $[0, 2\pi]$ و (b) $[\pi/2, \pi]$

29. $f(x) = e^{-x^2}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 2]$

30. $f(x) = x^2 e^{-4x}$ في الفترتين (a) $[-2, 0]$ و (b) $[0, 4]$

31. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 3}$ في الفترتين (a) $[-2, 2]$ و (b) $[2, 8]$

32. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ في الفترتين (a) $[0, 1]$ و (b) $[-3, 4]$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[-3, 3]$

34. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 16}$ في الفترتين (a) $[0, 2]$ و (b) $[0, 6]$

3	Identify increasing and decreasing functions التعرف على مفهومي الدالة المتناقصة والدالة المتزايدة

في التمارين 10-1، جـد (يدويًا) الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة. استخدم هذه المعلومات في تحديد جميع القيم القصوى المحلية وارسم تمثيلا بيانيًا.

1. $y = x^3 - 3x + 2$ 2. $y = x^3 + 2x^2 + 1$

3. $y = x^4 - 8x^2 + 1$ 4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

5. $y = (x + 1)^{2/3}$ 6. $y = (x - 1)^{1/3}$

7. $y = \sin x + \cos x$ 8. $y = \sin^2 x$

9. $y = e^{x^2 - 1}$ 10. $y = \ln(x^2 - 1)$

4	Find the local extrema of a given function using the First Derivative test إيجاد القيم القصوى المحلية لدالة معينة باستخدام اختبار المشتقة الأولى

في التمارين 11-20، جـد (يدويًا) جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف كل واحدة على أنها قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك.

11. $y = x^4 + 4x^3 - 2$
12. $y = x^5 - 5x^2 + 1$
13. $y = xe^{-2x}$
14. $y = x^2e^{-x}$
15. $y = \tan^{-1}(x^2)$
16. $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$
17. $y = \dfrac{x}{1+x^3}$
18. $y = \dfrac{x}{1+x^4}$
19. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$
20. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

5	Learn the notion of an Inflection Point and find one التعريف على مفهوم نقطة الانعطاف وإيجادها

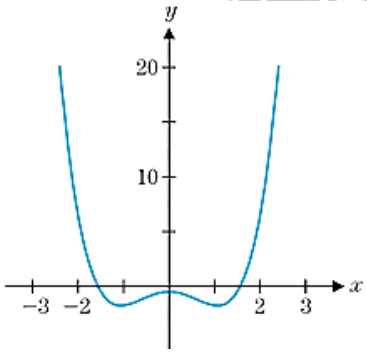
في التمارين 1–8، حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاة مقعّرًا إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها مقعّرًا إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$
3. $f(x) = x + 1/x$
4. $f(x) = x + 3(1-x)^{1/3}$
5. $f(x) = \sin x - \cos x$
6. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$
7. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
8. $f(x) = xe^{-4x}$

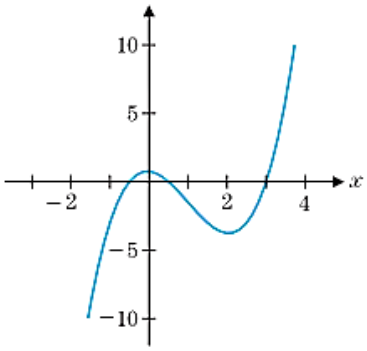
6	Determine the concavity of a function using the first and second derivatives تحديد فترات التقعر إلى أعلى وإلى أسفل لدالة معينة باستخدام المشتقتين الأولى والثانية

في التمرينين 45 و46، قدّر الفترات المتزايدة والمتناقصة، ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

45.



46.



7	Sketch the graph of a given function using its properties and its first and second derivative رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها

مثال 9.7 نمذجة التيار الكهربائي في السلك

تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل 4.103 مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري، ومكثّف 0.05 – فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $232 \sin 2t$. حيث إن t تقاس بالثواني. فجـــد التيار في الدارة عند أي t.

الحل يمكن إثبات أن الشحنة في هذه الدارة تعطى بالدالة (باستخدام القوانين الكهربائية الأساسية)

$$Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3\sin 2t - 7\cos 2t$$

فالتيار إذن

$$Q'(t) = -50e^{-5t} + 2e^{-2t} - 4te^{-2t} + 6\cos 2t + 14\sin 2t$$

استكشفنا سابقًا باختصار معدل النمو السكاني. الديناميات السكانية أحد مجالات علم الأحياء التي توفر الاستخدام الواسع لحساب التفاضل والتكامل. الآن، فإننا نستكشف أحد جوانب النموذج الأساسي للنمو السكاني وهو ما باسم المعادلة اللوجستية. ويبين ذلك أنه إذا كانت $p(t)$ يمثل التعداد السكاني (الذي يقاس على كسر من القيمة العظمى للتعداد السكاني المستدام)، إذن فمعدل تغير التعداد السكاني يحقق المعادلة

$$p'(t) = rp(t)[1 - p(t)]$$

للثابت r. نحصل على الحل النموذجي [لـ $r = 1$ و $p(0) = 0.05$] في الشكل 4.104. وعلى الرغم من أننا لا نعلم كيفية ايجاد قيمة الحل ولكن يمكننا تحديد بعض خواص الرياضيات بأن تطرح جميع الحلول.

33. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ كولوم. جـــد التيار.

34. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ كولوم. جـــد التيار

35. على فرض أن الشحنة في مكان محدد في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{-3t}\cos 2t + 4\sin 3t$ كولوم. ماذا يحدث لهذه الدالة إذا كان $t \to \infty$؟ اشرح لماذا يسمى الحد $e^{-3t}\cos 2t$ **حالة عابر** و $4\sin 3t$ يعرف بأنه **حالة ثابتة** أو قيمة **خط التقارب** لدالة الشحنة. جـــد قيم الحالة الثابتة والعابرة لدالة التيار.

36. كما في التمرين 35. جـــد قيم الحالة الثابتة والعابرة إذا خددت دالة الشحنة من خلال $Q(t) = e^{-2t}(\cos t - 2\sin t) + te^{-3t} + 2\cos 4t$

McGraw-Hill Education

9	Find the antiderivative of a given function إيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة

في التمارين 28–5، جـــد الدالة الأصليّة

5. $\int (3x^4 - 3x)\,dx$
6. $\int (x^3 - 2)\,dx$
7. $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$
8. $\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$
9. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$
10. $\int \frac{x + 2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$
11. $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$
12. $\int (3\cos x - \sin x)\,dx$
13. $\int 2\sec x \tan x\,dx$
14. $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
15. $\int 5\sec^2 x\,dx$
16. $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$
17. $\int (3e^x - 2)\,dx$
18. $\int (4x - 2e^x)\,dx$
19. $\int (3\cos x - 1/x)\,dx$
20. $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$
21. $\int \frac{4x}{x^2 + 4}\,dx$
22. $\int \frac{3}{4x^2 + 4}\,dx$
23. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$
24. $\int \left(2\cos x - \sqrt{e^{2x}}\right)dx$
25. $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$
26. $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\,dx$
27. $\int x^{\frac{1}{4}}\,(x^{\frac{5}{4}} - 4)\,dx$
28. $\int x^{\frac{2}{3}}\,(x^{-\frac{4}{3}} - 3)\,dx$

10	Understand the notion of indefinite integral as finding an antiderivative التعرف على مفهوم التكامل غير المحدود بصفته عكس المشتقة

45. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

46. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

47. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = 3\sin t + 1$. والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

48. حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$. والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

11	Use the sigma notation to compute basic summation استخدام رمز المجموع سيجما لإيجاد المجاميع البسيطة

في التمارين 8–5، اكتب كل الحدود واحسب المجموع.

5. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$

6. $\sum_{i=3}^{7} (i^2 + i)$

7. $\sum_{i=6}^{10} (4i + 2)$

8. $\sum_{i=5}^{8} (i^2 + 2)$

في التمارين 18–9، استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع.

9. $\sum_{i=1}^{20} (3i - 1)$

10. $\sum_{i=1}^{45} (3i - 4)$

11. $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

12. $\sum_{i=1}^{50} (8 - i)$

13. $\sum_{n=1}^{100} (n^2 - 3n + 2)$

14. $\sum_{n=1}^{140} (n^2 + 2n - 4)$

15. $\sum_{i=3}^{30} [(i - 3)^2 + i - 3]$

16. $\sum_{i=4}^{20} (i - 3)(i + 3)$

17. $\sum_{k=3}^{n} (k^2 - 3)$

18. $\sum_{k=0}^{n} (k^2 + 5)$

12	Estimate the area under a curve on a given interval using rectangles تقدير المساحة تحت المنحنى لدالة في فترة محددة باستخدام المستطيلات

في التمارين 38–35، استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى.

35.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

36.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

37.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

38.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

13	التعرف على خصائص التكامل المحدود Learn the properties of definite integrals

في التمرينين 23 و24، احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$.

23. $f(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ 4 & x\ge 1\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}2 & x\le 2 \text{ إذا}\\ 3x & x>2 \text{ إذا}\end{cases}$

في التمرينين 35 و36، استخدم النظرية 4.2 لكتابة تعبير في صورة تكامل منفرد.

35. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx$

36. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^1 f(x)\,dx$ (b) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

في التمرينين 37 و38، فرضاً أنّ $\int_1^3 f(x)\,dx=3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx=-2$ اوجد

37. (a) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx$

38. (a) $\int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx$ (b) $\int_1^3 [4g(x)-3f(x)]\,dx$

14	Apply the Integral Mean Value Theorem تطبيق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

في التمارين 28–25، احسب القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة.

25. $f(x)=2x+1,[0,4]$ 26. $f(x)=x^2+2x,[0,1]$

27. $f(x)=x^2-1,[1,3]$ 28. $f(x)=2x-2x^2,[0,1]$

في التمرينين 33 و34، جد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل.

33. $\int_0^2 3x^2\,dx\,(=8)$ 34. $\int_{-1}^1 (x^2-2x)\,dx\,(=\frac{2}{3})$

15	Learn the Fundamental Theorem of Calculus (Part I) and use it to compute various definite integrals التعرف على النظرية الأساسية الأولى للتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال متنوعة لإيجاد تكاملات محدود

في التمارين 1–18، استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1. $\int_0^2 (2x-3)\,dx$
2. $\int_0^3 (x^2-2)\,dx$
3. $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx$
4. $\int_0^2 (x^3+3x-1)\,dx$
5. $\int_1^4 \left(x\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)dx$
6. $\int_1^2 \left(4x-\frac{2}{x^2}\right)dx$
7. $\int_0^1 (6e^{-3x}+4)\,dx$
8. $\int_0^2 \left(\frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\right)dx$
9. $\int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin x-\cos x)\,dx$
10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3\csc x\cot x\,dx$
11. $\int_0^{\pi/4} \sec t\tan t\,dt$
12. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$
13. $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
14. $\int_{-1}^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$
15. $\int_1^4 \frac{t-3}{t}\,dt$
16. $\int_0^4 t(t-2)\,dt$
17. $\int_0^t (e^{x/2})^2\,dx$
18. $\int_0^t (\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx$

16	Solve mathematical and real-life optimization problems حل مسائل رياضية وحياتية على القيم القصوى لإيجاد القيم المثلى

القسم الورقي

1. يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر. الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي $1800\ ft^2$. جد أصغر قيمة ممكنة للمحيط المناظر لهذه المساحة.
2. يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر. الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر $96\ ft$ من السياج. جـد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.
3. يجب بناء إسطبل مكون من حظيرتين. بشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك $120\ ft$ من السياج متوفر. فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج؟
4. يجب أن تكون صالة عرض بمتجر متعدد الأقسام مستطيلة بثلاثة جدران في ثلاثة جوانب وفتحات باب $6\ ft$ في الجانبين المتقابلين وفتحة باب $10\ ft$ في الجدار المتبقي. يجب أن تكون مساحة أرضية صالة العرض $800\ ft^2$. ما هي الأبعاد التي ستكون أصغر طول للجدار المستخدم؟
5. بيّن أن المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطه قيمة ثابتة P يشكل مربع دائمًا.
6. بيّن أن المستطيل ذي المحيط الأصغر ومساحته قيمة ثابتة A يشكل مربع دائمًا.
7. يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده $6\ in - 10\ in$ وذلك بقص مربعات قياس ضلعها $x\ in$ من كل زاوية وطي الجوانب. جد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للصندوق.
8. يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته $12\ in$-في- $16\ in$ وقص مربعات مساحة كل منها $x\ in^2$ من كل زاوية وطي الجوانب. جـد قيمة x تحقق القيمةالعظمى لحجم الصندوق.
9. (a) تم بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ قطعة من الورق المقوى مساحتها $6\ in$-في- $6\ in$ وقص مربعات بحجم x-in من كل زاوية وطي الجوانب. ثم تم لصق المربعات الأربعة بمساحة $x\ in^2$ معًا لتشكل صندوقًا ثانيًا (مفتوح من الأعلى أو سفلي).
جـد قيمة x تحقق القيمة العظمى لأحجام الصناديق.
(b) كرر المسألة بدءًا بقطعة من الورق المقوى مساحتها $4\ in$-في- $6\ in$

17	Solve mathematical and real-life problems on related rates حل مسائل رياضية وحياتية على المعدلات المرتبطة

1. يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل **120 gl/min**. النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. نظرًا لأن $1\ \text{ft}^3$ يساوي 7.5 براميل، حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصـ نصف القطر إلى (a) **100 m** و (b) **200 m** اشرح سبب تناقص المعدل بتزايد نصف القطر.

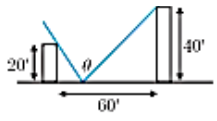
2. يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل **90 gl/min**. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{8}''$. حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى **100 ft**

3. يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 8 برميل في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. (a) على فرض أن نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل **0.6 m/min** عندما يساوي نصف القطر **100 ft** فحدد قيمة 8. (b) إذا تضاعف سمك النفط، فكيف يتغير معدل تزايد نصف القطر؟

4. على فرض أن المنطقة المصابة بإصابة ما دائرية. (a) فإذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 mm وتزداد بمعدل 1 mm/hr. فما هو معدل تزايد المنطقة المصابة؟ (b) جـد معدل تزايد المنطقة المصابة عند وصول نصف القطر إلى 6 mm. اشرح بمنطق سليم سبب كون هذا المعدل أكبر من معدل الجزء (a).

5. على فرض أن قطرة مطر تتبخر بطريقة تحافظ معها على شكلها الكروي. علماً ان حجم شكل كروي بنصف قطر r هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ وأن مساحة سطحه هي $A = 4\pi r^2$. فإذا تغير نصف القطر مع الزمن، واصبح الحجم $V' = Ar'$. إذا كان معدل التبخر (V') يتناسب مع مساحة السطح، بيّن أن نصف القطر يتغير بمعدل ثابت.

6. على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 ft/min عندما يصل نصف القطر إلى **200 ft**. فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟



9. تقع طائرة على بعد $x = 40$ mi (أفقيًا) عن المطار وارتفاع h كيلومتر مكعب. يوجد رادار في المطار $s(t)$ يكشف المسافة بين الطائرة والمطار ويتغير بمعدل $s'(t) = -240$ mph (a). إذا حلقت الطائرة نحو المطار بارتفاع ثابت $h = 4$. فما هي السرعة $|x'(t)|$ للطائرة؟ (b) كرر العملية بارتفاع 6 mi. استنادًا إلى إجاباتك، ما أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

10. (a) أعد صياغة المثال 8.3 إذا كانت سيارة الشرطة لا تتحرك. هل هذا يجعل قياس الرادار أكثر دقة؟ (b) بيّن أن الرادار المذكور في المثال 8.3 يحدد السرعة الصحيحة إذا كانت سيارة الشرطة تقع في نقطة الأصل.

11. بيّن أن الرادار المذكور في المثال 8.3 يحدد السرعة الصحيحة $x = \frac{1}{2}$ إذا كانت سيارة الشرطة تتحرك بسرعة $50(\sqrt{2} - 1)$ mph.

12. جـد موقع وسرعة الرادار المذكور في المثال 8.3 عندما تكون قراءته أبطأ من السرعة الفعلية.

13. تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات. على فرض أن مبيعاتها السنوية $AED X$ بآلاف من الدراهم تساوي $s = 60 - 40e^{-0.05x}$. تتضح أعداد إعلاناتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

18	Solve mathematical and real-life problems on related rates حل مسائل اقتصادية وعلمية على القيم القصوى

مثال 9.8 إيجاد القيمة العظمى لمعدل النمو السكاني

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (المعادلة اللوجستية باستخدام $r = 2$). جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى. فسّر هذه النقطة بيانيًا.

الحل لتوضيح المسألة، نكتب معدل التعداد السكاني على أنه

$$f(p) = 2p(1 - p)$$

ويكون هدفنا عندئذٍ هو إيجاد التعداد السكاني $p \geq 0$ الذي يحقق القيمة العظمى $f(p)$.

لدينا

$$\begin{aligned} f'(p) &= 2(1)(1 - p) + 2p(-1) \\ &= 2(1 - 2p) \end{aligned}$$

وبالتالي، فإن العدد الحرج الوحيد هو $p = \frac{1}{2}$ لاحظ أن التمثيل البياني لـ $y = f(p)$ هو قطع مكافئ مفتوح لأسفل وبالتالي، يجب أن يناظر العدد الحرج القيمة العظمى المطلقة. في الشكل 4.104، لاحظ أن ارتفاع $p = \frac{1}{2}$ تناظر الجزء من التمثيل البياني حيث الميل له القيمة العظمى. كذلك، لاحظ أن هذه النقطة تناظر الجزء من التمثيل البياني حيث الميل له القيمة العظمىلك بحل المعادلة $f'(p) = 0$. حيث إن $f(p)$ تساوي $p'(t)$. فأن، $p = \frac{1}{2}$ هي قيمة p المناظرة لحل $p''(t) = 0$ o. وقد يكون هذا الأمر هامًا لعلماء البيولوجيا السكانية. إذا تتبعوا التعداد السكاني الذي يصل إلى نقطة انعطاف، عندئذٍ (على فرض أن المعادلة اللوجستية تعطي نموذجًا دقيقًا) فإن التعداد السكاني سيتضاعف في الحجم في نهاية الأمر.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

37. على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)]$. جد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

38. على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ جد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

19	Compute the area under a curve using summations and limits إيجاد المساحة تحت المنحنى لدالة باستخدام المجاميع والنهايات

المثال 3.2 إيجاد قيمة المساحة بدقة

جـد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$.

الحل باستخدام n فترة جزئية متساوية الطول. يكون لدينا

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

وبهذا $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}$. وهكذا إذا $x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n}$. حيث $x_i = \frac{i}{n}$. من $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (3.1). تساوي المساحة تقريبًا

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[2\frac{i}{n} - 2\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{من نظرية 2.1 (ii) و (iii)}$$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$$

بما أنه لدينا صيغة لـ A_n ، لأي n. فإنه يمكننا إيجاد قيم متعددة بسهولة.

$$A_{200} = \frac{(201)(199)}{3(40{,}000)} = 0.333325$$

$$A_{500} = \frac{(501)(499)}{3(250{,}000)} = 0.333332$$

أخيرًا. يمكننا إيجاد النهاية لـ A_n. لدينا

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1/n^2}{3} = \frac{1}{3}$$

المساحة الدقيقة في الشكل 5.8 هي $1/3$. كما كنا نقدر. ■

في التمارين 14–11، استخدم مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى.

11. $y = x^2 + 1$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[0, 2]$; (c) $[1, 3]$

12. $y = x^2 + 3x$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[0, 2]$; (c) $[1, 3]$

13. $y = 2x^2 + 1$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[-1, 1]$; (c) $[1, 3]$

14. $y = 4x^2 - x$ on (a) $[0, 1]$; (b) $[-1, 1]$; (c) $[1, 3]$

20	Learn the Fundamental Theorem of Calculus (Part II) and use it to compute derivatives of functions defined as definite integrals التعرف على النظرية الأساسية الثانية للتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال معرفة كتكاملات محدودة لإيجاد مشتقاتها

في التمارين 32–25، جـــد المشتقة $f'(x)$.

25. $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\, dt$

26. $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\, dt$

27. $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\, dt$

28. $f(x) = \int_x^2 \sec t\, dt$

29. $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 dt$

30. $f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} dt$

31. $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\, dt$

32. $f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\, dt$