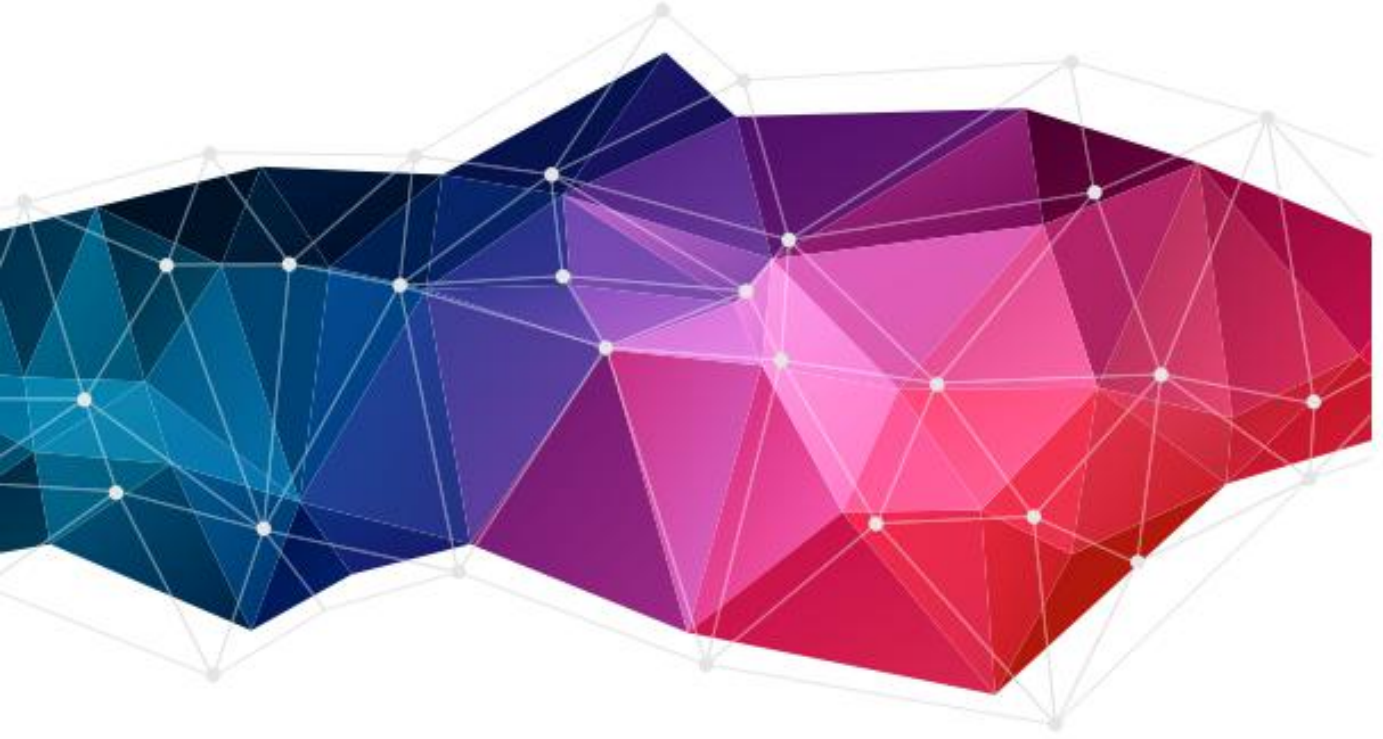
الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

2023-2024

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
12
تطبيقي

Mc Graw Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار التطبيقي

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 12 Applied Math Vol 2

FM. Front Matter, from Integrated Math III © 2012
4. Transformations and Symmetry, from Integrated Math III Chapter 14 © 2012
5. Trigonometric Functions, from Algebra 2 Chapter 12 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012

صورة الغلاف: Shanvood/shutterstock

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2021 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 0-891098-39-1-978 (نسخة الطالب)
MHID: 1-39-891098-8 (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 0-891100-39-1-978(نسخة الطالب)
MHID: 1-39-891100-3 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 7-891101-39-1-978 (نسخة المعلم)
MHID: 1-39-891101-1 (نسخة المعلم)

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الدوال و العلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 2 الدوال والعلاقات النسبية

الوحدة 3 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 4 التحويلات الهندسية والتناظر

الوحدة 5 الدوال المثلثية

الوحدة 6 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 7 الدوال من منظور التفاضل والتكامل

يتم تعريف المحتوى على تطبيق التعلم الذكي

Chapter Sourced From: FM Front Matter, from Integrated Math III © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

معتمد

المؤلفون

يضمن المؤلفون الرئيسون بأن برامج الرياضيات لـ Macmillan/McGraw–Hill تم ضبطها رأسياً بشكل صحيح من البداية إلى النهاية–للنجاح في الرياضيات المتكاملة I و ما يلحقها. بمراجعة المحتوى من برامج المدرسة الثانوية، جميع برامجنا الرياضية تم ضبطها بوضوح من حيث المجال و الترتيب.

المؤلفون الرئيسون

الدكتور ج. أ. كارتر.
المدير العام
مدرسة أدلاي أ. ستيفنسون الثانوية
لينكولن شاير، إلينوي

مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا و الطرق اليدوية لتصوير النظريات، إنجاز الرياضيات لمتعلمين اللغة الإنجليزية

الدكتور جيلبرت ج. كيوفاس.
أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

مجالات الخبرة: تطبيق النظريات و المهارات في السياقات الفنية في الرياضيات، التمثيلات الرياضية

الدكتور روجر داي، NBCT
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك ثاونشيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

مجالات الخبرة: تعلم و تطبيق الإحتمالية و الإحصاء، تعليم مدرس الرياضيات

الدكتور كارول مالوي.
أستاذ مساعد
جامعة شمال كارولينا في شابل هيل
شابل هيل، شمال كارولينا

مجالات الخبرة: التمثيلات و التفكير النقدي، نجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

راث كايسي
مستشار الرياضيات
مدرس إقليمي شريك
جامعة كنتاكي
ليكسنجتون، كنتاكي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

جيري كامينز
مستشار الرياضيات
رئيس سابق، المجلس الوطني لمشرفين الرياضيات
ويسترن سبرينج، إلينوي

مجالات الخبرة: تكنولوجيا التمثيل البياني و الرياضيات

الدكتور بيرتشي هوليداي Ed.D.
مستشار الرياضيات الوطني
سيلفر سبرينج، ماريلاند

مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لتمثيل و فهم البيانات من الحياة اليومية، تأثير الرسومات البيانية على فهم الرياضيات

باتريس مور لاتشين
مستشار الرياضيات
هيوستن، تكساس

مجالات الخبرة: تعليم الرياضيات، العمل مع متعلمين اللغة الإنجليزية

المؤلف المشارك

دينا زايك محظوظات
مستشار تعليمي
أنشطة Dinah–Might, Inc.
سان أنطونيو، تكساس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 1 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الاستعداد للوحدة 1 2

1-1 **اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية** 4

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني إختيار النموذج الأمثل 12

1-2 **حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية** 14

■ **إختبار منتصف الوحدة** 20

1-3 **خواص اللوغاريتمات** 21

1-4 **اللوغاريتمات العادية** 28

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية 35

1-5 **الأساس e واللوغايتمات الطبيعية** 37

استكشف: مختبر ورقة البيانات المرابحة المركبة 44

1-6 **استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية** 45

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 53

■ **تدريب على الاختبار** 57

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 58

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 60

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 2 الدوال والعلاقات النسبية

الاستعداد للوحدة 2 63

2-1 **ضرب التعابير النسبية وقسمتها** 65

2-2 **جمع التعابير النسبية وطرحها** 74

2-3 **تمثيل دوال المقلوب بيانياً** 81

■ **إختبار منتصف الوحدة** 88

2-4 **التمثيل البياني للدوال النسبية** 89

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية 97

2-5 **حل المعادلات والمتباينات النسبية** 98

توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية 107

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 109

■ **تدريب على الاختبار** 113

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 114

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 116

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 3

المتتاليات والمتسلسلات

الاستعداد للوحدة 3 119

3-1 المتتاليات كدوال 121

3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية 128

3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية 136

■ إختبار منتصف الوحدة 143

3-4 نظرية ذات الحدين 145

3-5 الاستقراء الرياضي 154

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 159

■ تدريب على الاختبار 163

■ التحضير للإختبارات المعيارية 164

■ تدريب على الاختبار المعياري 166

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4 التحويلات الهندسية والتناظر

الاستعداد للوحدة 4 169

4-1 **الإنعكاس** 171

4-2 **الإزاحة** 180

الاستكشاف: مختبر الهندسة عمليات الدوران 187

4-3 **الدوران** 188

التوسع: مختبر الهندسة المجسمات الناتجة عن الدوران 195

■ **اختبار منتصف الوحدة** 197

الاستكشاف: مختبر برنامج الهندسة تركيب التحويلات 198

4-4 **تركيب التحويلات** 199

التوسع: مختبر الهندسة الفسيفساء 208

4-5 **التناظر** 211

التوسع: مختبر الهندسة استكشاف الإنشاءات بواسطة جهاز عاكس 218

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) 220

4-6 **عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)** 222

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 230

■ **تدريب على الاختبار** 235

■ **التحضير للإختبارات المعيارية** 236

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 5

الدوال المثلثية

الاستعداد للوحدة 5 239

الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات استكشاف المثلثات القائمة الخاصة 241

5-1 **النسب المثلثية في المثلثات القائمة** 242

5-2 **الزوايا وقياس الزوايا** 251

التوسع: مختبر الهندسة مساحة متوازي الأضلاع 258

5-3 **النسب المثلثية للزوايا العامة** 259

5-4 **قانون الـ Sine** 266

الاستكشاف: مختبر الهندسة المضلعات المنتظمة 274

5-5 **قانون الـ Cosine** 275

■ **اختبار منتصف الوحدة** 281

5-6 **الدوال المثلثية الدائرية والدورية** 282

5-7 **التمثيل البياني للدوال المثلثية** 289

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيلات البيانية المثلثية 296

5-8 **إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية** 297

5-9 **الدوال المثلثية العكسية** 305

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 311

■ **تدريب على الاختبار** 317

■ **التحضير للإختبارات المعيارية** 318

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 320

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 6

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الاستعداد للوحدة 6

6-1 **المتطابقات المثلثية**

6-2 **إثبات صحة المتطابقات المثلثية**

6-3 **متطابقات مجموع زوايتين والفرق بينهما**

■ **اختبار منتصف الوحدة**

6-4 **متطابقات ضعف الزاوية ونصفها**

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية

6-5 **حل المعادلات المثلثية**

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة**

■ **تدريب على الاختبار**

■ **التحضير للإختبارات المعيارية**

■ **تدريب على الاختبار المعياري**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 7

الدوال من منظور التفاضل والتكامل

الاستعداد للوحدة 7

7-1 **الدوال**

7-2 **تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات**

7-3 **الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات**

7-4 **القيم القصوى ومتوسط معدل التغير**

■ **اختبار منتصف الوحدة**

7-5 **الدوال الأصلية والتحويلات**

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات غير الخطية

7-6 **العمليات على الدوال وتركيب الدوال**

7-7 **العلاقات والدوال العكسيّة**

التوسّع: معمل تكنولوجيا الرسم البياني تمثيل المعكوسات بيانيًا بأستخدام المعادلات الوسيطية

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة**

■ **تدريب على الاختبار**

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدل التغير عند نقطة**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التحويلات الهندسية والتناظر

Chapter Opener Source from: 4 Transformations and Symmetry, from Integrated Math II Chapter 14 © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

- لقد حدّدت الانعكاس والإزاحة والدوران.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تحديد أسماء أشكال عُكست أو أزيحت أو دُوّرت أو غُيّرت أبعادها (تمدّدت) ورسمها.
  - تمييز تركيب التحويلات ورسمها.
  - تحديد التناظر في الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.

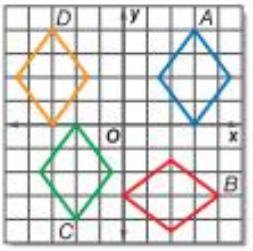
لماذا؟ ▲

- **التصوير الضوئي** يستخدم المصورون الانعكاس والدوران والتطابق ليجعلوا صورهم مثيرة للإعجاب وملفتة للنظر.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.



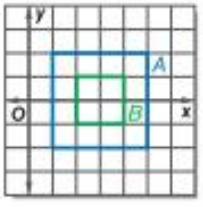
1. A إلى B
2. D إلى A
3. A إلى C

جـــد مجموع كل متّجهين.

4. $\langle 13, -4\rangle + \langle -11, 9\rangle$
5. $\langle 6, -31\rangle + \langle -22, 3\rangle$

6. **الفرقة الموسيقية** خلال جزءٍ من أغنية. يوجّه ضارب الطبل في فرقةٍ استعراضيةٍ الفرقة للتحرّك من النقطة (4, 1) إلى النقطة (1, 5). اكتب صورة مركّبة المتّجه الذي يصف هذه الحركة.

7. حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم جـــد معامل مقياس تغيير الأبعاد .

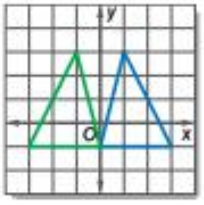


8. **المسرحيات** يصنع أحمد نموذج نملةٍ لمسرحية. جـــد معامل مقياس النموذج إذا كان طول النملة سنتيمترًا واحدًا وكان طول النموذج $\frac{1}{4}$ m.

مراجعة سريعة

مثال 1

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.



كل رأس وصورته على مسافة واحدة من المحور الرأسي y. هذا انعكاس

مثال 2

اكتب صورة مركّبة $\overrightarrow{AB}$ لـــ A(−1, 1) و B(4, −3).

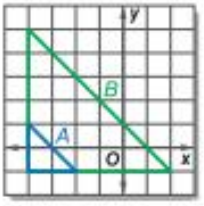
صورة مركبة المتّجه $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

بالتعويض $= \langle 4 - (-1), -3 - 1\rangle$

بالتبسيط $= \langle 5, -4\rangle$

مثال 3

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن *تكبير* أو *تصغير*. ثمّ جـــد معامل مقياس تغيير الأبعاد.



B أكبر من A. إذًا فهو تكبير.

المسافة بين رؤوس A تساوي 2 والمسافة المناظرة بالنسبة لـــ B تساوي 6.

عامل المقياس يساوي $\frac{6}{2}$ أو 3.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة.
ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

التحويلات والتطابق اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 4 حول التحويلات والتطابق. وابدأ بثلاث صفحاتٍ في الدفتر.

1 **اطوِ** كل ورقة إلى نصفين.

2 **افتح** الأوراق المطوية واطو كل ورقةٍ بالاتجاه الطولي لتشكيل جيب.

3 **ألصق** الورقات جنبًا إلى جنبٍ لتشكيل كتيّب.

4 **سمِّ** كلًا من الجيوب كما هو موضح.

المفردات الجديدة

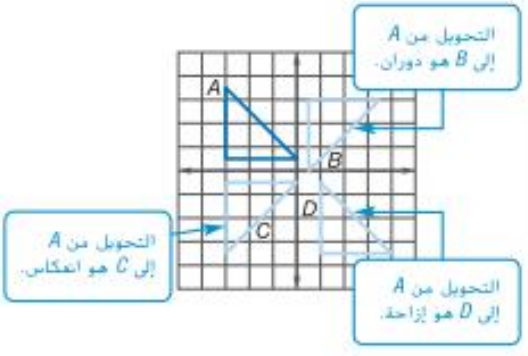
line of reflection	خط الانعكاس
center of rotation	مركز الدوران
angle of rotation	زاوية الدوران
composition of transformations	تركيب التحويلات
symmetry	التناظر (التماثل)
line symmetry	تناظر محوري
line of symmetry	خط التناظر(التماثل)

مراجعة المصطلحات

الانعكاس هو تحويلٌ يمثل قلب شكلٍ بالنسبة لنقطةٍ أو مستقيمٍ أو مستوى

الدوران هو تحويلٌ يدير كل نقطةٍ في صورةٍ أصليةٍ بزاويةٍ واتجاهٍ محددين حول نقطة ثابتة

الإزاحة هي تحويلٌ يحرك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

4-1 الانعكاس

.. السابق	.. الحالي	.. لماذا؟
• لقد حدّدت الانعكاس وأثبته على أنه تحويل تطابق.	1 تمثيل الانعكاس بيانيا.	• لاحظ في هذا الانعكاس في الماء أن المسافة التي تقع عندها نقطةٌ فوق خطّ الماء تبدو مماثلةً للمسافة التي تقع عندها صورة تلك النقطة تحت الماء.
	2 تمثيل الانعكاس في المستوى الإحداثي.	

المفردات الجديدة
خط الانعكاس
line of reflection

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

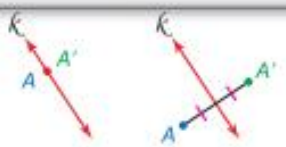
1 تمثيل الانعكاس بيانيا

تعلمت سابقًا أن الانعكاس أو القلب تحويلٌ بالنسبة لمستقيم يدعى **خط الانعكاس**. تبعد كل نقطة في الصورة الأصلية ونظيرتها في الصورة المسافة نفسها عن هذا المستقيم.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة لمستقيم

الانعكاس بالنسبة لمستقيم هو دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها بحيث:

- إذا كانت النقطة تقع على المستقيم. فإن فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها أو
- إذا لم تكن النقطة تقع على المستقيم. فالمستقيم هو المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.



A تقع على المستقيم k.

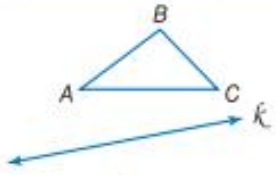
A لا تقع على المستقيم k.

A′، A″، A‴ وهكذا دواليك هي تسميات النقاط المتناظرة لتحويل أو أكثر.

لتعكس مضلعًا بالنسبة لمستقيم. اعكس كلًا من رؤوس المضلع. ثم صل هذه الرؤوس لتشكّل الصورة المنعكسة.

مثال 1 انعكاس شكل بالنسبة لمستقيم

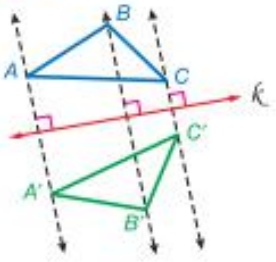
انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.



الخطوة 1 ارسم مستقيمًا من خلال كل رأس بحيث يكون عموديًا على المستقيم k.

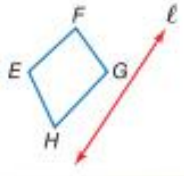
الخطوة 2 قِس المسافة من النقطة A إلى المستقيم k. ثم حدّد A' على المسافة نفسها من المستقيم k على الطرف المقابل

الخطوة 3 كرّر الخطوة 2 لتحديد النقطتين B' و C'. ثم صل الرؤوس A' و B' و C' لتشكيل الصورة المنعكسة.

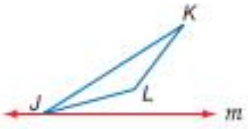


تمرين موجّه

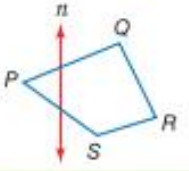
1A.



1B.



1C.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تذكّر أن الانعكاس هو تحويل تطابق أو تساوي أبعاد. في الشكل المبيّن في المثال 1، $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

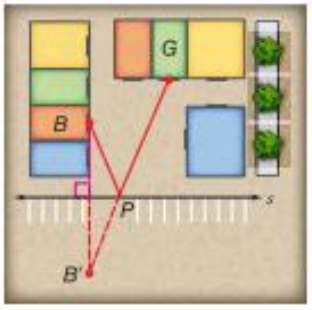
مهنة من الحياة اليومية

المصوّر يلتقط العاملون في مجال التصوير الصور لأسباب متعددة. منها ما يتعلق بالثقافة أو الفنّ أو تسجيل حدثٍ ما. ومنها ما يكون لأغراض علمية. وتطلب بعض الاختصاصات كالتصوير الصحفي والتصوير العلمي نيل درجة البكالوريوس. بينما لا تستلزم بعض مجالات التصوير الأخرى، كالتقاط الصور الشخصية، سوى براعة فنية.

مثال 2 من الحياة اليومية تصغير المسافات باستخدام الانعكاس

التسوّق افترض أنك ستشتري ملابس من المتجر B، ثم ستعود إلى سيارتك، ثم ستشتري حذاءً من المتجر G. فأين عليك أن تركن سيارتك على طول المستقيم s من أماكن إيقاف السيارات لتحدّ من المسافة التي ستمشيها سيرًا على الأقدام إلى الحدّ الأدنى؟

استيعاب المسألة تطلب المسألة منك تحديد نقطة P على المستقيم s بحيث يكون لـ $BP + PG$ أقل قيمة ممكنة.

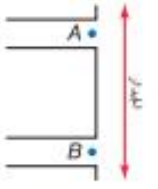


التخطيط تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أصغر ما يمكن حين تكون النقاط الثلاثة على استقامةٍ واحدة. استخدم انعكاس النقطة B بالنسبة للمستقيم s لإيجاد موقع النقطة P.

الحلّ ارسم $\overline{B'G}$. حدّد P عند تقاطع المستقيم s و $\overline{B'G}$.

التحقق قارن المجموع $PG + BP$ لكل حالة لتتحقق من أن موقع P الذي وجدته يصغّر هذا المجموع.

تمرين موجّه



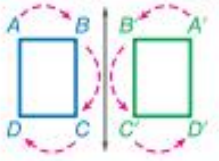
2. بيع البطاقات تريد إيمان اختيار موقعٍ جيدٍ لبيع بطاقات حضور حفل التخرج. حدّد نقطة P بحيث تكون المسافة التي على شخص ما أن يقطعها من الزدهة A إلى النقطة P على الجدار، ومن ثمّ إلى الصّف التالي في الردهة B أصغر ما يمكن.

2 تمثيل الانعكاس في المستوى الإحداثي

يمكن إجراء الانعكاس أيضا في المستوى الإحداثي عبر استخدام التقنيات المقدّمة في المثال 3.

نصيحة دراسية

خواص الانعكاس تحافظ الانعكاس، شأنها شأن جميع حالات تساوي القياس، على المسافات وقياسات الزوايا وبينيّة النقاط ووقوعها على استقامةٍ واحدة. ولكن توجيه الصورة الأصلية وصورتها يكونان متعاكستين.

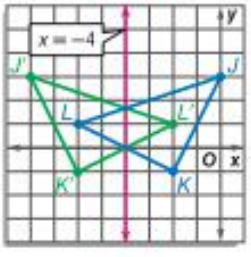


مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيم أفقي أو رأسي

للمثلث JKL الرؤوس $J(0, 3)$ و $K(-2, -1)$ و $L(-6, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

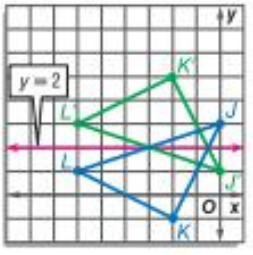
a. $x = -4$

جِد نقطةً مناظرةً لكل رأسٍ بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $x = -4$.



b. $y = 2$

جِد نقطةً مناظرةً لكل رأسٍ بحيث يكون الرأس وصورته متساويي البعد عن المستقيم $y = 2$.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

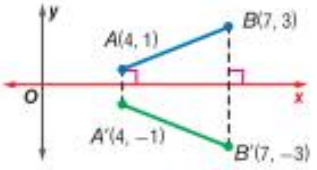
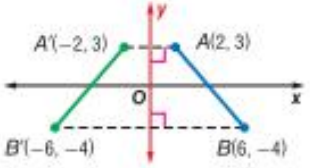
تمرين موجّه

لشبه المنحرف $RSTV$ الرؤوس $R(-1, 1)$ و $S(4, 1)$ و $T(4, -1)$ و $V(-1, -3)$. مثل شبه المنحرف $RSTV$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.

3A. $y = -3$ **3B.** $x = 2$

حين يكون خط الانعكاس هو المحور الأفقي x أو المحور الرأسي y. فيمكنك استخدام القاعدة التالية.

المفهوم الأساسي الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x أو المحور الرأسي y

	الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y
الشرح	لتعكس نقطة بالنسبة للمحور الأفقي x، اضرب الإحداثي الرأسي y الخاص بها بـ -1.	لتعكس نقطة بالنسبة للمحور الرأسي y، اضرب الإحداثي الأفقي x الخاص بها بـ -1.
الرموز	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال		

قراءة في الرياضيات

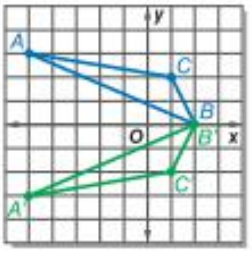
الرمز الإحداثي للدالة يمكن قراءة التعبير $P(a, b) \rightarrow P'(a, -b)$ على النحو: *النقطة P التي إحداثياها a و b تربطت بموقع جديد P' إحداثياه a وناقص b.*

مثال 4 انعكاس شكل بالنسبة للمحور الإحداثي x أو المحور الإحداثي y

مثّل بيانيًا كل شكل وصورته وفق الانعكاس المعطى.

a. المثلث ABC ذو الرؤوس $A(-5, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(1, 2)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس بـ -1.



$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

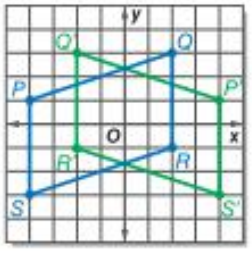
$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5, -3)$

$B(2, 0) \rightarrow B'(2, 0)$

$C(1, 2) \rightarrow C'(1, -2)$

b. متوازي الأضلاع $PQRS$ ذو الرؤوس $P(-4, 1)$ و $Q(2, 3)$ و $R(2, -1)$ و $S(-4, -3)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

اضرب الإحداثي الأفقي x لكل رأس بـ -1.



$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$P(-4, 1) \rightarrow P'(4, 1)$

$Q(2, 3) \rightarrow Q'(-2, 3)$

$R(2, -1) \rightarrow R'(-2, -1)$

$S(-4, -3) \rightarrow S'(4, -3)$

نصيحة دراسية

النقاط الثابتة في المثال 4a، تدعى النقطة B بالنقطة *الثابتة* لأنها ترتبط بنفسها فقط. وإن النقاط التي تقع على خط الانعكاس تبقى ثابتة عند الانعكاس بالنسبة لهذا المستقيم.

تمرين موجّه

4A. المستطيل ذو الرؤوس $E(-4, -1)$ و $F(2, 2)$ و $G(3, 0)$ و $H(-3, -3)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

4B. المثلث JKL ذو الرؤوس $J(3, 2)$ و $K(2, -2)$ و $L(4, -5)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا عكس صورة بالنسبة للمستقيم $y = x$.

ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1. وفي التمثيل البياني المبيّن $\overline{CC'}$ عمودي على $y = x$. فإن ميله يساوي -1. من النقطة $C(-3, 2)$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدة وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدة لتصل إلى $y = x$. ومن هذه النقطة على المستقيم $y = x$، تحرّك يمينًا لمسافة 2.5 وحدة وإلى الأسفل لمسافة 2.5 وحدة لتحدد النقطة $C'(2, -3)$. وباستخدام طريقة مشابهة، تجد أن صورة النقطة $D(-3, -1)$ هي النقطة $D'(-1, -3)$.

تعطي مقارنة إحداثيات هذه الأمثلة وغيرها القاعدة التالية للانعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$.

مراجعة المصطلحات

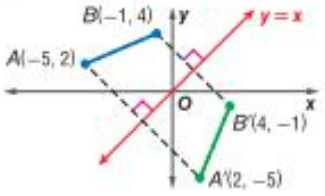
المستقيمات المتعامدة
يكون مستقيمان غير رأسيان متعامدين فقط وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.

المفهوم الأساسي انعكاس بالنسبة للمستقيم $y = x$

الشرح لعكس نقطة بالنسبة للمستقيم $y = x$، بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, x)$

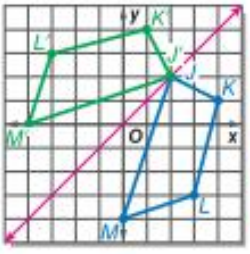
مثال



مثال 5 انعكاس شكل بالنسبة للمستقيم $y = x$

للشكل الرباعي $JKLM$ الرؤوس $M(0, -4)$، $L(3, -3)$، $K(4, 1)$، $J(2, 2)$. مثّل $JKLM$ بيانيًا وصورته $J'K'L'M'$ بالنسبة للمستقيم $y = x$.

بدّل بين إحداثيات x و y لكل رأس.



$(x, y) \rightarrow (y, x)$

$J(2, 2) \rightarrow J'(2, 2)$

$K(4, 1) \rightarrow K'(1, 4)$

$L(3, -3) \rightarrow L'(-3, 3)$

$M(0, -4) \rightarrow M'(-4, 0)$

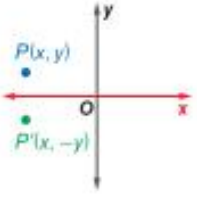
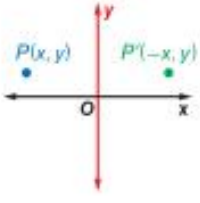
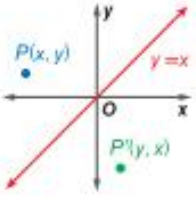
نصيحة دراسية

الصورة الأصلية وصورتها
سنعتمد في هذا الكتاب دائمًا اللون الأزرق للصورة الأصلية واللون الأخضر لصورتها المحوّلة.

تمرين موجّه

5. للمثلث BCD الرؤوس $B(-3, 3)$ و $C(1, 4)$ و $D(-2, -4)$. مثّل بيانيًا المثلث BCD وصورته بالنسبة للمستقيم $y = x$.

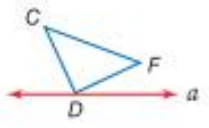
ملخص المفهوم الانعكاس في المستوى الإحداثي

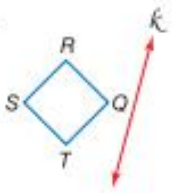
الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x	الانعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y	انعكاس بالنسبة لمستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

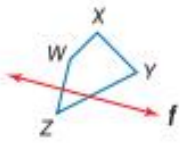
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

المثال 1 **انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا الخط باستخدام مسطرة.**

1. 

2. 

3. 

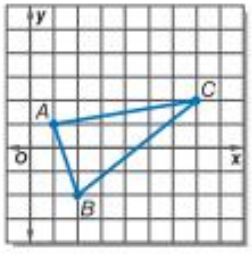
المثال 2

4. **الأحداث الرياضية** ينتظر أحمد في المقهى أن يحضر له صديقه بطاقةً لحضور حدثٍ رياضي بسعرٍ مخفض. فعند أي نقطة P على طول الطريق يتعيّن على الصديق إيقاف سيارته لتقليل المسافة التي على أحمد أن يسيرها من المقهى إلى السيارة ومن ثم إلى مدخل الصالة إلى الحدّ الأدنى؟ ارسم مخططًا.

المثال 3 **مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بالنسبة للمستقيم المعطى.**

5. $y = -2$

6. $x = 3$



المثالان 4–5 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته مما يلي وفق عملية الانعكاس المعطاة.**

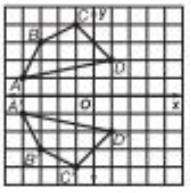
7. المثلث $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه $X(0, 4)$ و $Y(-3, 4)$ و $Z(-4, -1)$ بالنسبة للمحور y

8. متوازي الأضلاع $\square QRST$ الذي رؤوسه $Q(-1, 4)$ و $R(4, 4)$، $S(3, 1)$ و $T(-2, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x

9. الشكل الرباعي $JKLM$ الذي رؤوسه $J(-3, 1)$ و $K(-1, 3)$ و $L(1, 3)$ و $M(-3, -1)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10. يعرض الشكل الموضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فأي عبارة يمكن استخدامها لتحديد نوع التحويل الذي حدث؟



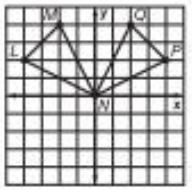
A ميل $\overline{AB} = 2$، ميل $\overline{B'C'} = -\frac{1}{2}$؛ بما أن قيمتي الميلين سالبتان، فالتحويل هو دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة.

B إن صورة كل من النقاط A و B و C و D هي انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x. فإن فالتحويل هو انعكاس.

C بما أن B' تبعد ست نقاط أسفل B، فالتحويل هو إزاحة لمسافة ستّ وحدات إلى الأسفل.

D $CD = 2\sqrt{2}$ و $C'D' = 2\sqrt{2}$؛ بما أن $CD = C'D'$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل يساوي 1.

11. المثلث $\triangle PQN$ هو تحويل للمثلث $\triangle LMN$. فما العبارة التي تثبت أن التحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



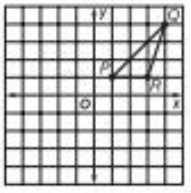
A ميل $\overline{MN}$ • ميل $\overline{NP} = -1$

B ميل $\overline{LN}$ • ميل $\overline{QN} = -1$

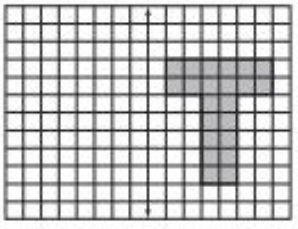
C صورة كل نقطة (x, y) هي $(-x, y)$.

D $\overline{MN} \cong \overline{QN}$

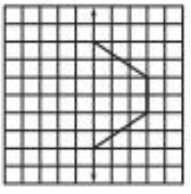
12. إذا انعكس المثلث PQR بالنسبة للمحور الأفقي x ليصبح المثلث $P'Q'R'$. فماذا سيكون إحداثيا النقطة Q'؟



13. الهندسة ارسم شكلاً إلى يسار المستقيم بحيث يكون الشكل المعطى والشكل الذي رسمته متماثلين بالنسبة لذلك المستقيم.

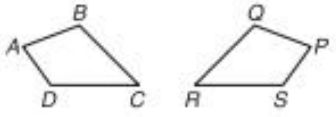


14. الهندسة توضح الشبكة أدناه ثلاث قطع مستقيمة. ارسم ثلاث قطع مستقيمة أخرى لإتمام سداسي أضلاع متماثلٍ بالنسبة للمستقيم الرأسي.



15. في الرسم التخطيطي، حوّل الشكل الرباعي $ABCD$ إلى الشكل الرباعي $PQRS$.

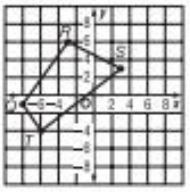
فما الصورة الأصلية لـ $\overleftrightarrow{PS}$؟



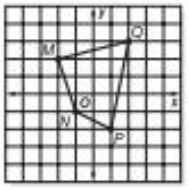
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

16. يعرض الشكل أدناه الشكل الرباعي $QRST$.

إذا انعكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ومن ثم بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكّل شكل رباعي $Q''R''S''T''$. فماذا سوف يكون إحداثيا T''؟

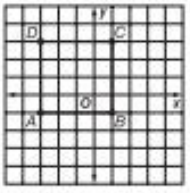


17. يعرض الشكل التمثيل البياني لـ $MNPQ$. ماذا سوف يكون إحداثيا Q' إذا ما انعكس الشكل الرباعي بالنسبة للمحور الأفقي x؟

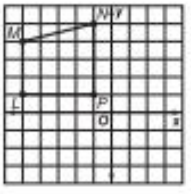


18. يوضح الشكل أدناه المربع $ABCD$.

إذا انعكس المربع $ABCD$ بالنسبة للمحور y. فماذا سيكون إحداثيا D'؟



19.



إذا انعكس شبه المنحرف $LMNP$ بالنسبة للمحور الرأسي y. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

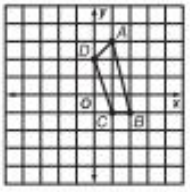
20. للمثلث ABC الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا ما انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle WXY$؟

21. يريد إسماعيل أن يعكس المستطيل $HIJK$ ذا الرؤوس $H(2, 4)$ و $I(5.5, 4)$ و $J(5.5, -1)$ و $K(2, -1)$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليشكّل المستطيل $LMNP$. فماذا ستكون إحداثيات النقطة L إذا كانت هذه النقطة هي نقطة الانعكاس H؟

22. للمثلث $\triangle UVW$ الرؤوس $U(-3, 1)$ و $V(2, 4)$ و $W(7, 2)$. وللمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(-3, -1)$ و $Y(2, -4)$ و $Z(7, -2)$. فما هو نوع التحويل الذي يمكن استخدامه لربط المثلث $\triangle UVW$ بالمثلث $\triangle XYZ$؟

23. إذا انعكس المثلث $\triangle LMN$ ذو الرؤوس $L(-2, 6)$ و $M(5, 2)$ و $N(-6, -1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x. فماذا سيكون إحداثيا L'؟

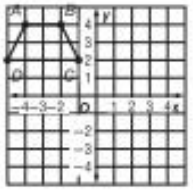
24. يعكس الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(1, 3)$ و $B(2, -1)$ و $C(1, -1)$ و $D(0, 2)$. $ABCD$ بالنسبة للمستقيم $x = 1$ ليعطي الشكل الرباعي $WXYZ$. فماذا ستكون مجموعة إحداثيات $WXYZ$؟



25. تقع رؤوس مثلث عند النقاط $(1, 0)$ و $(1, -1)$ و $(-1, -1)$. ما هو المستقيم الذي إذا ما انعكس المثلث بالنسبة إليه سيعطي مثلثًا تقع رؤوسه عند النقاط $(0, 1)$ و $(-1, 1)$ و $(-1, -1)$؟

26. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0, 6)$ و $B(2, 1)$ و $C(-3, 4)$. فإذا انعكس الشكل بالنسبة للمحور الأفقي x ليعطي المثلث $\triangle WXY$. فماذا ستكون إحداثيات المثلث $\triangle WXY$؟

27. ما هما إحداثيا النقطة B' إذا انعكس شبه المنحرف $ABCD$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟

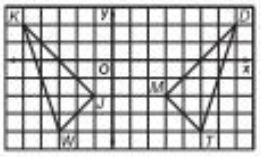


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

28. أيّ ممّا يلي هي نقطة انعكاس النقطة $E(-7, 1)$ بالنسبة للمحور الأفقي x؟

29. للمثلث ΔABC الرؤوس $A(-3, 1)$ و $B(1, 5)$ و $C(7, 0)$. فما هي إحداثيات الصورة $\Delta A'B'C'$ بموجب انعكاس المثلث الأصلي بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

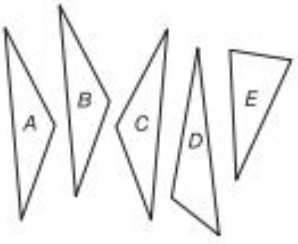
30. ما هو المستقيم الذي يعدّ المثلث ΔMDT بالنسبة إليه انعكاسًا للمثلث ΔJKW؟



31. ما هو انعكاس النقطة $P(-3, 10)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$؟

32. ما هما المستقيمان الذي تعدّ بالنسبة إليهما القطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P''(10, 0)$ و$Q''(12, 4)$ نتيجةً لانعكاس مضاعف للقطعة المستقيمة التي نقطتاها الطرفيتان هما $P(0, 0)$ و $Q(2, 4)$؟

33. أيّ من الأشكال التالية يبدو أنه انعكاس للشكل A بالنسبة لمستقيمٍ ما؟



34. أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

A إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y. فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

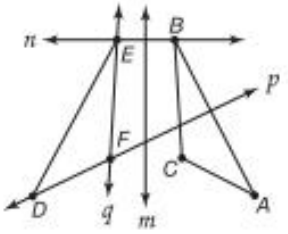
B إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y. فإن إحداثيي الصورة هما $P''(y, -y)$.

C إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الرأسي y. فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, y)$.

D إذا انعكست النقطة $P(x, y)$ بالنسبة للمحور الرأسي y وانعكست صورتها بالنسبة للمحور الأفقي x. فإن إحداثيي الصورة هما $P''(x, -y)$.

35. بناءً على أحد التحويلات. يكون لسداسي الأضلاع $PQRSTU$ الصورة $ABRSCD$. فأي من التحويلات التالية يعطي ذلك؟

36. ما هو المستقيم الذي معكوس المثلث ΔDEF بالنسبة إليه هو المثلث ΔABC؟



37. ما الصورة التي تمثل انعكاسًا؟

A

C

B

D

38. أي من النقاط التالية هي انعكاس للنقطة $L(-2, -9)$ بالنسبة للمحور الرأسي y؟

A $L'(-9, -2)$

C $L'(2, -9)$

B $L'(2, 9)$

D $L'(-9, -2)$

39. بموجب الانعكاس الانزلاقي $R_{x=0} \rightarrow T_{x, y}$. فإن صورة $A(1, 3)$ هي $A'(-1, 6)$. فما قيمتا x و y؟

A $x = -2$ و $y = 3$

B $x = 0$ و $y = 3$

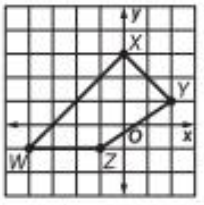
C $x = 3$ و $y = -2$

D $x = 3$ و $y = 0$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

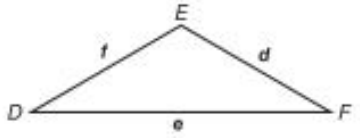
40. الإجابة القصيرة إذا انعكس الشكل الرباعي $WXYZ$ بالنسبة للمحور الرأسي y ليعطي الشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$. فما إحداثيا X'؟



41. الجبر إذا كان الوسط الحسابي للأعداد $6x$ و $3x$ و 27 هو 18. فما قيمة x؟

A 2
B 3
C 5
D 6

42. في المثلث $\triangle DEF$. لدينا $m\angle E = 108$. $m\angle F = 26$ و $f = 20$. جـــد طول d مقربًا إلى أقرب عددٍ كلّي.



F 26 G 33 H 60 J 65

43. SAT/ACT في مستوى إحداثي. للنقطتين A و B الإحداثيان $(-2, 4)$ والإحداثيان $(3, 3)$. على الترتيب. فما قيمة AB؟

A $\sqrt{50}$
B $(1, 7)$
C $(5, -1)$
D $(1, -1)$
E $\sqrt{26}$

مراجعة شاملة

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبيرٍ مما يلي إذا كانت $0° < \theta < 90°$

44. إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$. جـــد $\sin \theta$.

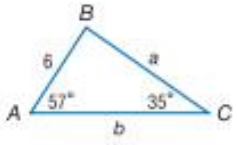
45. وإذا كان $\tan \theta = 2$. فجـــد $\cot \theta$.

46. إذا كان $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. جـــد $\cos \theta$.

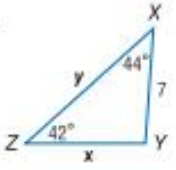
47. وإذا كان $\csc \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. فجـــد $\tan \theta$.

حُـلّ كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

48.



49.



50. الهندسة الإحداثية في المثلث $\triangle LMN$. تقسم القطعة المستقيمة $\overline{PR}$ الضلعين $\overline{NL}$ و $\overline{MN}$ إلى أطوال متناسبة. فإذا كانت إحداثيات الرؤوس على النحو $N(8, 20)$ و $P(11, 16)$ و $R(3, 8)$ و $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$. جـــد إحداثيات L و M.

حُلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

51. $\text{Sin } \theta = -0.58$

52. $\text{Cos } \theta = 0.32$

53. $\text{Tan } \theta = 2.7$

مراجعة المهارات

جـــد مقدار كل متجه واتجاهه.

54. $\overrightarrow{RS}$: $R(-3, 3)$ و $S(-9, 9)$

55. $\overrightarrow{FG}$: $F(-4, 0)$ و $G(-6, -4)$

56. $\overrightarrow{JK}$: $J(8, 1)$ و $K(2, 5)$

57. $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 10)$ و $B(1, -12)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

4-2 الإزاحة

السابق
- لقد وجدت مقادير متجهاتٍ واتجاهاتها

الحالي
1 تمثيل الإزاحة بيانيا.
2 تمثيل الإزاحة في المستوى الإحداثي.

لماذا
- إن تقنية الرسوم المتحركة هي تقنية يُحرّك فيها جسمٌ بمقادير صغيرة جدًا بين صورٍ ملتقطةٍ كل على حدة. وعند تشغيل سلسلة من الصور على هيئة سلسلةٍ مستمرة، ينتج خداعٌ حركي.

المفردات الجديدة
متّجه الإزاحة
translation vector

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 تمثيل الازاحة بيانيا

تعلّمت سابقًا أن الإزاحة أو الانزلاق تحويلٌ يحرّك جميع نقاط شكلٍ المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. وبما أنه يمكن استخدام متجهاتٍ لوصف المسافة والاتجاه، فيمكن استخدام متّجهاتٍ لتعريف الإزاحة.

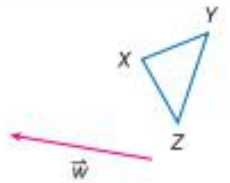
المفهوم الأساسي الإزاحة

الإزاحة هي دالةٌ تربط كل نقطةٍ بصورتها على طول متجهٍ يدعى **متجه الإزاحة**، بحيث:
- يكون لكل قطعة مستقيمة تربط نقطةً بصورتها طول المتجه نفسه، و
- تكون هذه القطعة المستقيمة موازيةً للمتجه أيضًا.

النقطة A' هي إزاحة للنقطة A على طول متّجه الإزاحة $\vec{k}$.

مثال 1 رسم الإزاحة

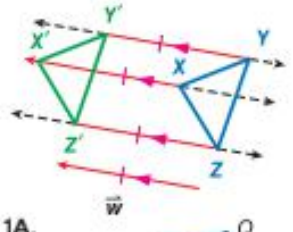
انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.



الخطوة 1 ارسم مستقيمًا عبر كل رأسٍ بحيث يوازي المتجه $\vec{w}$.

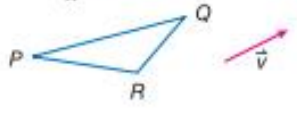
الخطوة 2 قِس طول المتجه $\vec{w}$. وحدّد النقطة X' عبر تحديد هذه المسافة على طول المستقيم المار بالرأس X والذي مبدؤه هو النقطة X واتجاهه هو اتجاه المستقيم نفسه.

الخطوة 3 كرر الخطوة 2 لتحديد نقطتين Y' و Z'. ثم اربط الرؤوس X' و Y' و Z' لتشكيل الصورة المزاحة.

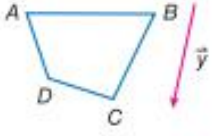


تمرين موجّه

1A.



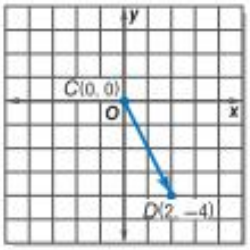
1B.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2 تمثيل الإزاحة في المستوى الإحداثي

تذكّر أن أيّ متجهٍ في المستوى الإحداثي يمكن أن يكتب في الصورة $\langle a, b \rangle$. حيث a يمثل التغير الأفقي و b هو التغير الرأسي من رأس المتّجه إلى ذيله. $\overline{CD}$ ممثّلة بالزوج المرتّب $\langle 2, -4 \rangle$.



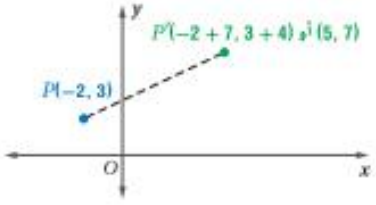
يمكن استخدام المتجهات وفق هذه الصيغة المدعوة بالصورة المركبة لإزاحة شكلٍ في المستوى الإحداثي.

المفهوم الأساسي الإزاحة في المستوى الإحداثي

الشرح لإزاحة نقطةٍ على طول المتّجه $\langle a, b \rangle$. اجمع a بالإحداثي x و b بالإحداثي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال صورة النقطة $P(-2, 3)$ المزاحة على طول المتّجه $\langle 7, 4 \rangle$ هي $P'(5, 7)$.



قراءة في الرياضيات

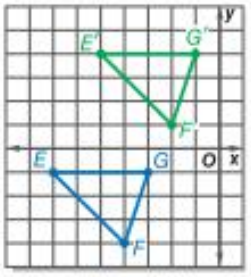
الإزاحة الأفقية والرأسية عندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle a, 0 \rangle$. فإن الإزاحة تكون أفقية فقط. وعندما يكون متجه الإزاحة من الصيغة $\langle 0, b \rangle$. فإن الإزاحة تكون رأسية فقط.

الإزاحة هي شكلٌ آخر من تحويل التطابق أو تساوي الأبعاد.

مثال 2 الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتّجه المعطى.

a. المثلث EFG ذو الرؤوس $E(-7, -1)$ و $F(-4, -4)$ و $G(-3, -1)$؛ $\langle 2, 5 \rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 2 وحدتين يمينًا و 5 وحدات إلى الأعلى.

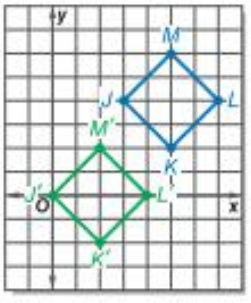
$(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

$E(-7, -1) \rightarrow E'(-5, 4)$

$F(-4, -4) \rightarrow F'(-2, 1)$

$G(-3, -1) \rightarrow G'(-1, 4)$

b. المربع $JKLM$ ذو الرؤوس $J(3, 4)$ و $K(5, 2)$ و $L(7, 4)$ و $M(5, 6)$؛ $\langle -3, -4 \rangle$



يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

$(x, y) \rightarrow (x + (-3), y + (-4))$

$J(3, 4) \rightarrow J'(0, 0)$

$K(5, 2) \rightarrow K'(2, -2)$

$L(7, 4) \rightarrow L'(4, 0)$

$M(5, 6) \rightarrow M'(2, 2)$

تمرين موجّه

2A. المثلث ABC ذو الرؤوس $A(2, 6)$ و $B(1, 1)$ و $C(7, 5)$؛ $\langle -1, -4 \rangle$

2B. الشكل الرباعي $QRST$ ذو الرؤوس $Q(-8, -2)$ و $R(-9, -5)$ و $S(-4, -7)$ و $T(-4, -2)$؛ $\langle 7, 1 \rangle$

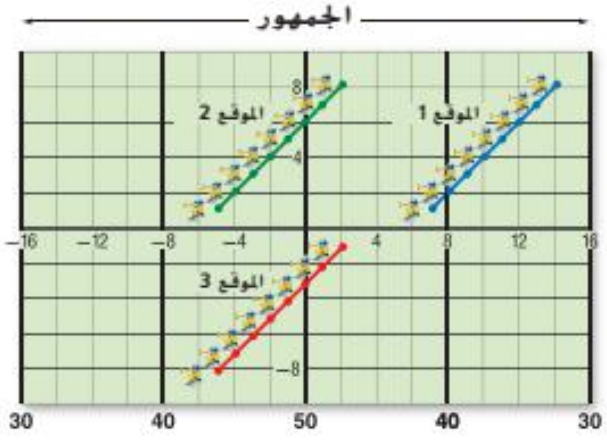
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط بالحياة اليومية

غالبًا ما تستخدم الفرق الموسيقية العسكرية سلسلةً من التشكيلات التي تضم أشكالاً هندسية. ويحدّد لكل عضوٍ في الفرقة موقعٌ محددٌ في كل نوعٍ من التشكيلات. *الحركة العائمة* هي حركة مجموعة من الأعضاء معًا دون أن يغيروا شكل تشكيلتهم أو حجمها.

مثال 3 من الحياة اليومية وصف الإزاحة

الفرقة الموسيقية خلال إحدى فقرات عرض فرقةٍ موسيقيةٍ عسكرية. يبدأ نافخو البوق بالعزف عند الموقع 1. ثم يسيرون إلى الموقع 2. ومن ثمّ إلى الموقع 3. وتمثل كل وحدة على التمثيل البياني خطوة واحدة.



a. صف إزاحة خط نافخي البوق من الموقع 1 إلى الموقع 2 باستخدام رمز الدالة وبالكلمات.

إحدى النقاط الواقعة على المستقيم في الموقع 1 هي (14, 8). وفي الموقع 2، تتحرك هذه النقطة إلى (2, 8). استخدم دالة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ لإعادة حل المعادلات من أجل إيجاد a و b.

$(14 + a, 8 + b)$ أو (2, 8)

$14 + a = 2$ $\qquad$ $8 + b = 8$

$a = -12$ $\qquad$ $b = 0$

رمز الدالة: $(x, y) \rightarrow (x + (-12), y + 0)$

إذًا، يزاح خطّ نافخي البوق 12 خطوة يسارًا ولكنه لا يزاح أي خطوة إلى الأمام أو الخلف من الموقع 1 إلى الموقع 2.

b. صف إزاحة خط نافخي البوق من الموقع 1 إلى الموقع 3 باستخدام متجه إزاحة.

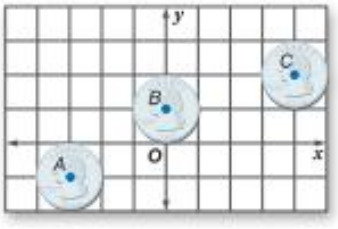
$(14 + a, 8 + b)$ أو (2, −1)

$14 + a = 2$ $\qquad$ $8 + b = -1$

$a = -12$ $\qquad$ $b = -9$

متّجه الإزاحة: $\langle -12, -9 \rangle$

تمرين موجّه

3. الرسوم المتحركة يجري إعداد مخطط لقطعةٍ تقنية باستخدام تقنية الرسوم المتحركة بحيث تبدو وكأنها تتحرك.

A. صف الإزاحة من A إلى B بواسطة رمز الدالة وبالكلمات.

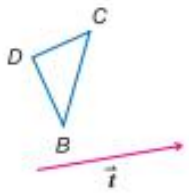
B. صف الإزاحة من A إلى C باستخدام متجه إزاحة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

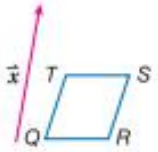
التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.**

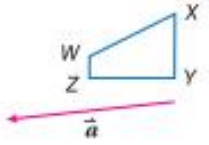
1.



2.



3.



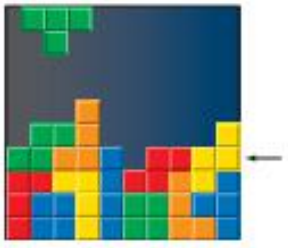
مثال 2 **مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتجّه المعطى.**

4. شبه المنحرف $JKLM$ ذو الرؤوس $J(2, 4)$ و $K(1, 1)$ و $L(5, 1)$ و $M(4, 4)$؛ $\langle 7, 1 \rangle$

5. المثلث $\triangle DFG$ ذو الرؤوس $D(-8, 8)$ و $F(-10, 4)$ و $G(-7, 6)$؛ $\langle 5, -2 \rangle$

6. متوازي الأضلاع $WXYZ$ ذو الرؤوس $W(-6, -5)$ و $X(-2, -5)$ و $Y(-1, -8)$ و $Z(-5, -8)$؛ $\langle -1, 4 \rangle$

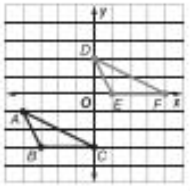
مثال 3



7. **ألعاب الفيديو** الهدف من لعبة الفيديو المبينة هو تحريك المكعبات الملونة يمينًا أو شمالاً حالما تسقط من أعلى الشاشة حتى تملأ كل صف دون ترك أي فراغات. فإذا كان موقع البداية للمكعب الموجود في أعلى الشاشة هو (x, y). استخدم رمز الدالة لوصف الإزاحة التي تملأ الصّف المحدد.

التدريب وحل المسائل

8. يوضح الشكل المثلث ABC وصورته الممثلة بالمثلث DEF. فأي عبارة مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



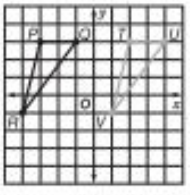
A ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{DF}$؛ بما أن الميل هو نفسه. فالتحويل هو دوران.

B تنعكس كل من النقاط A و B و C بالنسبة للمحور الأفقي x.

C في كلٍ من النقاط A و B و C. يزاد كل إحداثي أفقي x بمقدار 4 وحدة. ويزاد كل إحداثي رأسي y بمقدار 3 وحدات. إذًا. فالتحويل عبارة عن إزاحة.

D بما أن $BC \neq DF$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياس يساوي 1.

9. يوضح الشكل المثلث PQR وصورته TUV. فأي عبارة مما يلي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



A بما أن كلاً من الإحداثيات الأفقية x للنقاط P و Q و R تُزاد بمقدار 5. فالتحويل هو إزاحة.

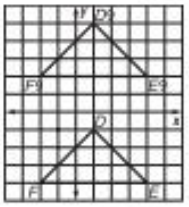
B صورة كلٍ من النقاط P و Q و R هي انعكاسٌ بالنسبة للمحور الرأسي y.

C $R = (-4, -1)$; $U = (4, 3)$؛ بما أن الإحداثيات الأفقية x متعاكسة. فالتحويل هو انعكاسٌ بالنسبة للمحور الأفقي x.

D بما أن $QR = UV$. فالتحويل هو تغييرٌ للأبعاد بمعامل مقياس يساوي 1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10. في الشكل الموضح، يتشكل المثلث $D'E'F'$ عبر إضافة 6 وحدات إلى الإحداثي الرأسي y لكل رأس في المثلث DEF. المصطلح الأفضل لوصف المثلث $D'E'F'$ هو



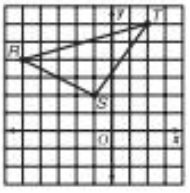
A دورانٌ للمثلث DEF.

B انعكاسٌ للمثلث DEF.

C مثلث مشابه للمثلث DEF.

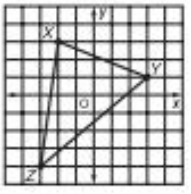
D مثلث مطابق للمثلث DEF.

11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $T(2, 6)$ و $S(-1, 2)$. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل



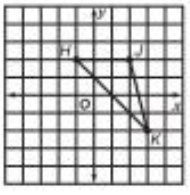
12. توضح الشبكة الإحداثية المثلث XYZ.

إذا أزيح المثلث XYZ بحيث تقع النقطة X على المحور الرأسي y والنقطة Y عند $(5, -3)$، فما الإحداثيان الجديدان للنقطة Z؟



13. يُزاح المثلث HJK المبيّن أدناه بحيث تكون الإحداثيات الجديدة لرؤوسه هي $H'(-2, 4)$ و $J'(1, 4)$ و $K'(2, 0)$.

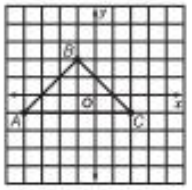
ما العبارة التي تصف هذا التحويل؟



14. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أُزيح الشكل مسافة 4 وحدات يمينًا ووحدتين إلى الأعلى، فما إحداثيا الرأس B'؟

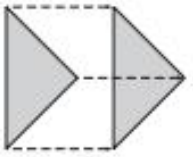
15. تريد إزاحة المثلث ABC إلى $\triangle A'B'C'$ باستخدام القاعدة التالية. $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 3)$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



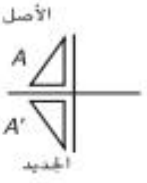
16. للمثلث $\triangle ABC$ الرؤوس $A(0.5, 8)$ و $B(7.5, 7)$ و $C(4.2, 2)$. فما هي مجموعة إحداثيات رؤوس الصورة الناتجة عن إزاحة المثلث $\triangle ABC$ 3.5 وحدات إلى الأسفل؟

17. ما التحويل الموضح في الشكل من بين التحويلات التالية؟



18. ما الرسم التخطيطي الذي يوضح إزاحة الشكل A؟

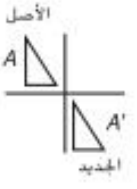
A



B

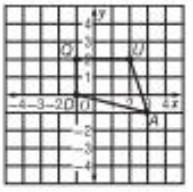
C

D



19. للشكل الرباعي $QUAD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

ما التحويل الذي سيضع رأسين عند $(5, 2)$ و $(1, -6)$؟



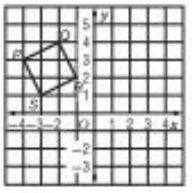
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

20. رؤوس المثلث $\triangle LMN$ هي $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل وكان للصورة رؤوس تقع عشوائيًا عند $(-2, 0)$ و $(1, 6)$ و $(-12, 8)$. إذًا فما القاعدة التي تصف الإزاحة؟

21. للمثلث قائم الزاوية GHI الرؤوس $G(0, 0)$ و $H(3, 0)$ و $I(0, 4)$. يُحوّل المثلث بحيث يكون لـ H' الإحداثيان $(3, 2)$. فماذا يمكن أن يكون التحويل المطبّق على $\triangle GHI$؟

22. يزاح المربع $PQRS$ المبين أدناه إلى المربع $P'Q'R'S'$ عبر اتّباع قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x + 2, y - 6)$$

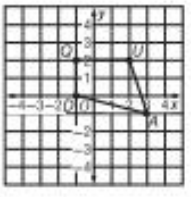


ماذا سيكون إحداثيا النقطة الرأس P'؟

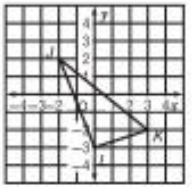
23. لمتوازي الأضلاع $ABCD$ الرؤوس $A(-3, 0)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-1, -2)$ و $D(-3, -5)$. فإذا أزيح الشكل مسافة 4 وحدات يمينًا ووحدتين إلى الأعلى. فما إحداثيا الرأس B'؟

24. يزاح الشكل الرباعي $QUAD$ لمسافة وحدات يسارًا و 3 وحدات إلى الأعلى.

فما إحداثيا الرأس A'؟

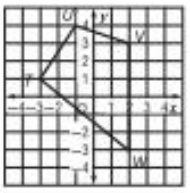


25. يُزاح المثلث $\triangle JKL$ مسافة 3 وحدات يسارًا ووحدتين إلى الأعلى ليعطي المثلث $\triangle J'K'L'$. فما إحداثيات الرؤوس؟



26. للمثلث $\triangle LMN$ الرؤوس $L(5, 6)$ و $M(2, 0)$ و $N(-8, 8)$. فإذا أزيح الشكل. وكانت الرؤوس الجديدة هي $L'(1, 6)$ و $M'(-2, 0)$ و $N'(-12, 8)$. فما القاعدة التي تصف التحويل؟

27. يُزاح الشكل الرباعي $TUVW$ بحيث تكون الرؤوس الجديدة هي $T'(-1, 0)$ و $U'(1, 3)$ و $V'(4, 2)$ و W'. فما إحداثيا W'؟



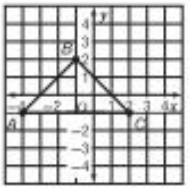
A $(0, -3)$ C $(4, -3)$

B $(0, -4)$ D $(4, -4)$

28. تريد إزاحة المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle A'B'C'$ وفق قاعدة الحركة التالية.

$$(x, y) \longrightarrow (x - 2, y + 3)$$

ماذا سيكون إحداثيا النقطة B'؟



29. للشكل الرباعي $ABCD$ الرؤوس $A(-2, 1)$ و $B(-2, 5)$ و $C(3, 5)$ و $D(3, 1)$. فإذا أزيح الشكل الرباعي $ABCD$ لمسافة 6 وحدات إلى الأسفل و 5 وحدات يمينًا لإعطاء $D'E'F'G'$. فما إحداثيات رؤوس $D'E'F'G'$؟

30. ما إحداثيا الصورة P' الخاصة بالنقطة $P(4, 1)$ وفق التحويل $T_{-3, -3}$؟

31. ما هي الإزاحة التي تنتج بموجبها النقطة $B(-2, 5)$ عن النقطة $A(-7, 8)$؟

32. للمثلث $\triangle RST$ الإحداثيات $R(3, 1)$ و $S(5, 4)$ و $T(7, 11)$. فما إحداثيات رؤوس الصورة $\triangle R'S'T'$. وفق التحويل $T_{-6, 1}$؟

33. ما إحداثيات الصورة H' للنقطة $H(-8, 3)$ وفق التحويل $T_{8, 7}$؟

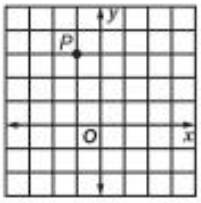
34. ما التحويل الذي ينتج الصورة $P'(-4, 2)$ من النقطة $P(2, -1)$؟

35. ما التحويل الذي يحافظ على المساحة والتوجيه؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. حدّد موقع النقطة P وفق الإزاحة $(x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ C $(2, -4)$
B $(0, 3)$ D $(2, 4)$

37. الإجابة القصيرة ما المتجه الذي يصف على النحو الأمثل إزاحة $A(3, -5)$ إلى $A'(-2, -8)$؟

38. الجبر خلال الأيام الأربعة القادمة، تخطّط ميسون لقيادة سيارتها مسافة 160 km و 235 km و 185 km و 220 km. فإذا كانت السيارة تقطع 32 km مقابل كل لتر تستهلكه من البنزين، فكم لترًا من البنزين عليها أن تتوقع استهلاكها بالإجمال؟

F 25 G 30 H 35 J 40

39. SAT/ACT يحتوي كيس 5 كرات رخام حمراء وكرتي رخام زرقاوين و 4 كرات رخام بيضاء وكرة رخام صفراء واحدة. فإذا اختيرت كرتا رخام على التوالي دون إعادة، فما احتمال الحصول على كرتي رخام بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ C $\frac{1}{9}$ E $\frac{2}{5}$
B $\frac{1}{11}$ D $\frac{5}{33}$

مراجعة شاملة

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الإزاحة المعطاة. (الدرس 1-4)

40. القطعة المستقيمة $\overline{DJ}$ ذات النقطتين الطرفيتين $D(4, 4)$ و $J(-3, 2)$ بالنسبة للمحور الرأسي y

41. المثلث $\triangle XYZ$ ذو الرؤوس $X(0, 0)$ و $Y(3, 0)$ و $Z(0, 3)$ بالنسبة للمحور x

42. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ و $C(3, -2)$ بالنسبة للمستقيم $y = x$

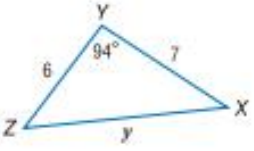
43. الشكل الرباعي $JKLM$ ذو الرؤوس $J(-2, 2)$ و $K(3, 1)$ و $L(4, -1)$ و $M(-2, -2)$ بالنسبة لنقطة الأصل

حُـلّ كل معادلة بحيث $0° \le \theta \le 360°$.

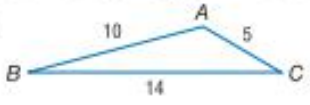
44. $2 \sin \theta = 1$ **45.** $2 \cos \theta + 1 = 0$ **46.** $4 \cos^2 \theta - 1 = 0$

حُـلّ كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

47.



48.

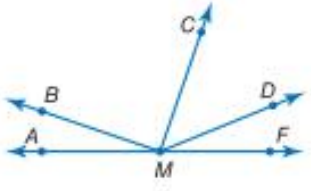


حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم الأمر.

49. $\sin \theta = -0.58$ **50.** $\cos \theta = 0.32$ **51.** $\tan \theta = 2.7$

مراجعة المهارات

انسخ الرسم التخطيطي المبيّن ومدّد كل شعاع. وصنّف كل زاويةٍ على أنها *قائمة* أو *حادّة* أو *منفرجة*. ثم استخدم منقلةً لقياس الزاوية مقربةً إلى أقرب درجة.



52. $\angle AMC$ **53.** $\angle FMD$

54. $\angle BMD$ **55.** $\angle CMB$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

4-3 مختبر الهندسة
عمليات الدوران

الدوران هو نوعٌ من التحويل يُحرّك شكلاً حول نقطةٍ ثابتةٍ أو مركزٍ للدوران بزاويةٍ محددةٍ وباتجاهٍ محدد. وفي هذا النشاط، سوف تستخدم ورق الرسم الاستشافي لاستكشاف خواصّ الدوران.

النشاط استكشاف العلاقات باستخدام ورق الشمع

الخطوة 1 ارسم على ورقةٍ للرسم الاستشافي الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P.

الخطوة 2 وعلى ورقةٍ أخرى للرسم الاستشافي. ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ ونقطة P استشافيًا. سمِّ الشكل الرباعي الجديد $A'B'C'D'$ والنقطة الجديدة P.

الخطوة 3 ضع ورقة الرسم الاستشافي بحيث تنطبق النقطتان P. دوِّر الورقة بحيث لا يتداخل الشكلان $ABCD$ و $A'B'C'D'$. ألصق ورقتي الرسم الاستشافي معًا.

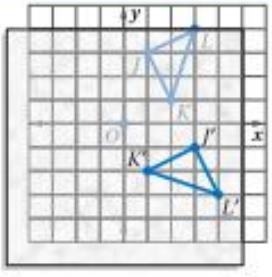
الخطوة 4 قِس المسافة بين النقاط A و B و C و D والنقطة P كرّر العملية نفسها بالنسبة للشكل الرباعي $A'B'C'D'$. ثم انسخ الجدول أدناه وأكمله.

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

الخطوة 1

الخطوتان 2 و 3

التمارين



1. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ ذا الرؤوس $J(1, 3)$ و $K(2, 1)$ و $L(3, 4)$ على مستوىً إحداثي. ومن ثمّ ارسمه على ورق الرسم الاستشافي.
   a. استخدم منقلةً لدوران كل رأسٍ بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل وفق ما هو موضح في الشكل على الجهة اليمنى. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟
   b. دوِّر المثلث $\triangle JKL$ بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل. ما هي رؤوس الصورة المدوّرة؟
   c. استخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة من النقطتين J، K و L إلى نقطة الأصل. وكرّر الأمر نفسه بالنسبة لـ $JK'L'$ و $J''K''L''$.
2. **الكتابة في الرياضيات** إذا دوّرت النقطة $(2, 4)$ بزاوية $90°$ و $180°$ حول نقطة الأصل، فكيف يتغير الإحداثيان الأفقي x والرأسي y ؟
3. **التنبؤ** ما الإحداثيان الجديدان (x, y) المدوّر بزاوية $270°$؟
4. **التخمين** خمّن المسافة من مركز لدوران P إلى كل رأسٍ مقابلٍ في الشكلين الرباعيين $ABCD$ و $A'B'C'D'$.

McGraw-Hill Education Ed-Imaging محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

4-3 الدوران

السابق
- لقد حدّدت الدوران وأثبتّه على أنه تحويل تطابق.

الحالي
1. تمثيل الدوران بيانيا.
2. تمثيل الدوران في المستوى الإحداثي.

لماذا؟
- قد تكون تقنية طواحين الهواء الحديثة بديلاً هاما للوقود الأحفوري. وتحوّل طواحين الهواء طاقة الرياح إلى كهرباء من خلال دوران ريش توربينات.

المفردات الجديدة
مركز الدوران
center of rotation
زاوية الدوران
angle of rotation

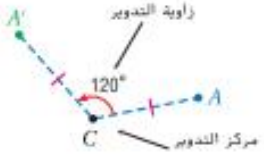
ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية. استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 تمثيل الدوران بيانيا

تعلمت سابقًا أن عملية الدوران فالدوران تحرّك جميع نقاط صورة أصلية بزاوية واتجاه محددين حول نقطة ثابتة.

المفهوم الأساسي الدوران

الدوران حول نقطة ثابتة. تدعى **مركز الدوران**. بزاوية $x°$ هو دالة تربط نقطة بصورتها بحيث:
- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران. فإن الصورة والصورة الأصلية هما النقطة نفسها
- إذا لم تكن النقطة مركز الدوران. فالصورة والصورة الأصلية تبعدان مسافة واحدة عن مركز الدوران. قياس **زاوية الدوران** بين الصورة الأصلية ومركز الدوران وصورة النقطة يساوي القيمة x.



A' هي صورة A بعد دوران بزاوية قياسها 120° حول النقطة C.

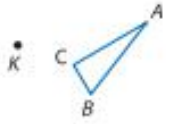
يمكن أن يكون الدوران إما باتجاه دوران عقارب الساعة أو بعكسه. افترض أن جميع الدورانات بعكس اتجاه عقارب الساعة ما لم يذكر خلاف ذلك.

عكس دوران عقارب الساعة

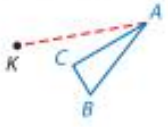
باتجاه دوران عقارب الساعة

مثال 1 رسم الدوران

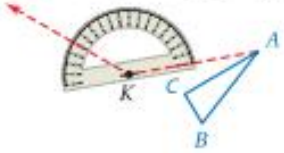
انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة K. ثم استخدم منقلة ومسطرة لرسم دوران بزاوية قياسها 140° للمثلث $\triangle ABC$ حول النقطة K.



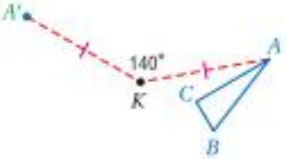
الخطوة 1 ارسم قطعة مستقيمة من A إلى K.



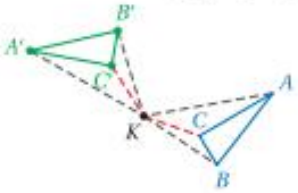
الخطوة 2 ارسم زاوية قياسها 140° باستخدام $\overline{KA}$.



الخطوة 3 استخدم مسطرة لرسم A' بحيث تكون $KA' = KA$.



الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 بالنسبة للرأسين B و C وارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.

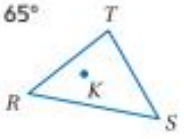


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

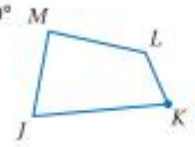
تمرين موجّه

انسخ كل شكل والنقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم دورانًا للشكل وفق العدد المعطى من الدرجات حول K.

1A. $65°$



1B. $170°$



2 رسم الدوران في المستوى الإحداثي

عند دوران نقطةٍ بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فيمكنك استخدام القواعد التالية.

نصيحة دراسية

الدوران باتجاه عقارب الساعة يمكن التدليل على الدوران بعكس عقارب الساعة بقياس زاوية سالب. كالدوران بزاوية قياسها $-90°$ حول نقطة الأصل والدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل على سبيل المثال.

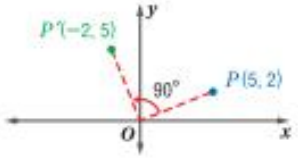
المفهوم الأساسي الدوران في المستوى الإحداثي

الدوران بزاوية $90°$

لدوران نقطة بزاوية $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. اضرب الإحداثي الرأسي y بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال

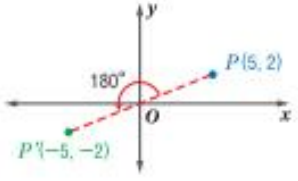


الدوران بزاوية $180°$

لدوران نقطة بزاوية $180°$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فاضرب الإحداثيين x و y بـ -1.

الرموز $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال

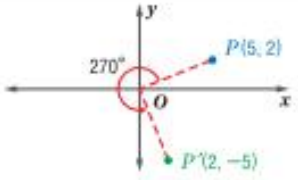


الدوران بزاوية $270°$

لدوران نقطة بزاوية $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. اضرب الإحداثي الأفقي x بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

الرموز $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال

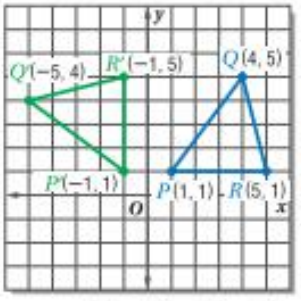


نصيحة دراسية

الدوران بزاوية $360°$ يعيد الدوران بزاوية قياسها $360°$ حول نقطة الشكل إلى موقعه الأصلي. أي تساوي الصورة الناتجة عن دوران بزاوية قياسها $360°$ الصورة الأصلية.

مثال 2 الدوران في المستوى الإحداثي

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(4, 5)$ و $R(5, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث PQR وصورته بعد الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.



اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس بـ -1 وبدّل.

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$

$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$

$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$

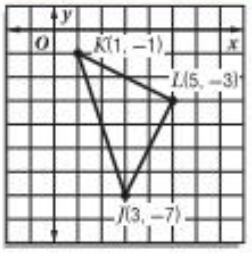
مثّل بيانيًا المثلث PQR وصورته المثلث $P'Q'R'$.

تمرين موجّه

2. لمتوازي الأضلاع $FGHJ$ الرؤوس $F(2, 1)$ و $G(7, 1)$ و $H(6, -3)$ و $J(1, -3)$. مثّل بيانيًا $FGHJ$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها $180°$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 على الاختبار المعياري الدوران في المستوى الإحداثي



ليكن لديك المثلث JKL المبيّن على الجهة اليمنى. ما صورة النقطة J بعد دوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

قراءة فقرة الاختبار

من المعلوم لديك أن للمثلث $\triangle JKL$ الإحداثيات $J(3, -7)$ و $K(1, -1)$ و $L(5, -3)$ ويُطلب منك تحديد إحداثيات صورة النقطة J بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حَل فقرة الاختبار

لإيجاد إحداثيي النقطة J بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. اضرب الإحداثي الأفقي x بـ -1 وبدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

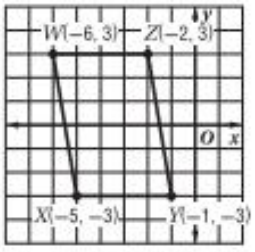
الإجابة هي الخيار C.

نصيحة دراسية

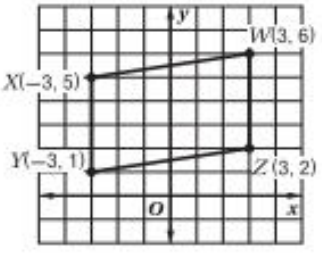
الدوران بزاوية $270°$ يمكنك إتمام دوران بزاوية $270°$ عبر إجراء دوران بزاوية $90°$ و دوران بزاوية $180°$ على التسلسل.

تمرين موجّه

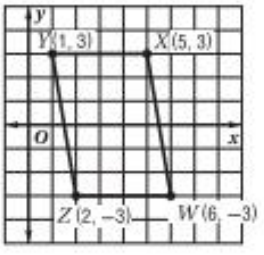
3. يُدوّر متوازي الأضلاع $WXYZ$ بزاوية $180°$ بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فأيّ من التمثيلات البيانية يمثّل الصورة الناتجة؟



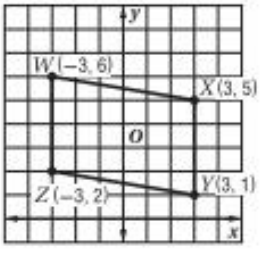
F



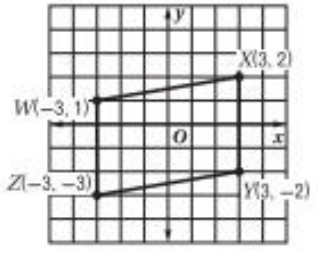
H



G



J



نصيحة عند حل الاختبار

التبرير المنطقي

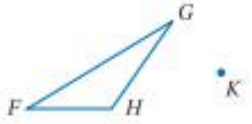
بدلاً من التحقق من رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ جميعها في كل تمثيل بياني، تحقق من رأس واحد فقط. مثل X.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

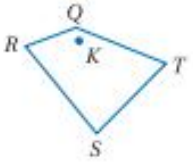
التحقق من فهمك

مثال 1 **الأدوات** **انسخ كل مضلعٍ ونقطة K. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة K.**

1. $45°$

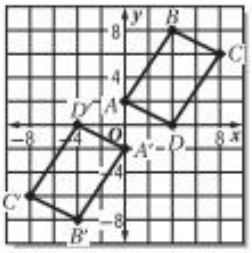


2. $120°$



مثال 2 (3) للمثلث DFG الرؤوس $D(-2, 6)$ و $F(2, 8)$ و $G(2, 3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle DFG$ وصورته بعد الدوران بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل.

مثال 3 4. **الاختيار من متعدد** في التحويل الموضّح. ما قياس زاوية الدوران الشكل $ABCD$ حول نقطة الأصل؟



A $90°$

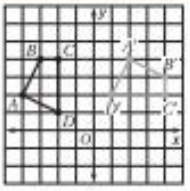
B $180°$

C $270°$

D $360°$

التدريب وحل المسائل

5. يوضح الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ في المستوى. فما العبارات التي تصف نوع التحويل الذي وقع؟



A ميل $\overleftrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}$ ؛ ميل $\overleftrightarrow{D'O} = 2$ ؛ بما أن الميلين معكوسان ضربيان. فالتحويل هو دورانٌ باتجاه عقارب الساعة بزاوية $90°$.

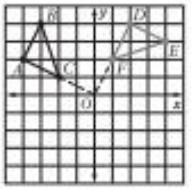
B $C = (-2, 4)$، $A' = (2, 4)$؛ بما أن A' هي صورة C بالنسبة للمحور الرأسي y. فالتحويل هو انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y.

C $A = (-4, 2)$، $A' = (2, 4)$؛ التحويل إزاحةٌ لمسافة 6 وحدات يمينًا ووحدتان إلى الأعلى.

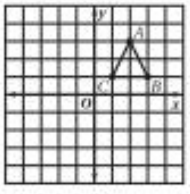
D $CD = 3$ و $B'C' = 1$؛ بما أن طول $B'C'$ يساوي ثلث طول $\overline{CD}$. فالتحويل تغيير للأبعاد بمعامل مقياس يساوي $\frac{1}{3}$.

6. المثلث $\triangle DEF$ هو دوران للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى.

فما هي العبارة التي تثبت أن زاوية الدوران تساوي $90°$؟

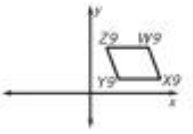


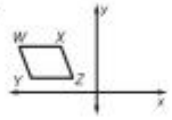
7. إذا أدير المثلث ABC بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ليعطي المثلث $A'B'C'$ t. فما الإحداثيان الجديدان للرأس A'؟

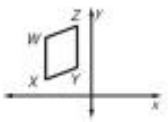


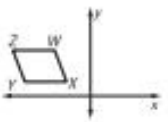
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

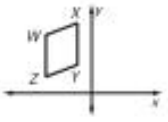
8. ما الصورة الأصلية للشكل الرباعي $W'X'Y'Z'$ التي توضح أن التحويل $WXYZ \rightarrow W'X'Y'Z'$ هو دوران؟



A


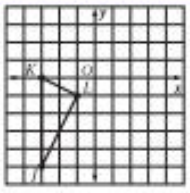
B


C


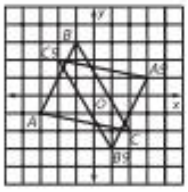
D


مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

9. المثلث JKL مرسوم على المستوى الإحداثي كما هو موضح أدناه. فإذا أدير المثلث $\triangle JKL$ بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل. فما إحداثيا J'؟



في المستوى الإحداثي المبيّن أدناه، تم دوران المثلث $\triangle ABC$ حول نقطة الأصل بزاوية 180° لتشكيل المثلث $\triangle A'B'C'$.

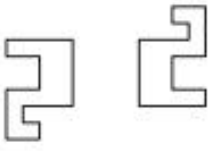


أكمل الجدول أدناه لمقارنة إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle ABC$ بإحداثيات الرؤوس المقابلة في المثلث $\triangle A'B'C'$.

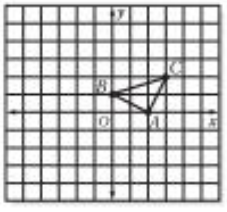
$\triangle ABC$	$\triangle A'B'C'$
A(-3, -1)	A '
B(-1, 3)	B '
C(2, -2)	C '

اختر إحداثيات رؤوس مثلث آخر $\triangle XYZ$ واكتبها في الجدول أدناه. استخدم النمط الذي اكتشفته في الجدول لإيجاد إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle X'Y'Z'$، الذي يمثل صورة المثلث $\triangle XYZ$ بعد الدوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل. اشرح كيف استخدمت النمط لإكمال الجدول أدناه.

10. ما نوع التحويل الذي طُبّق على الشكل الأيسر لتشكيل الشكل الأيسر؟



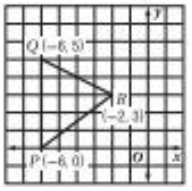
11. إذا أدير المثلث ABC بزاوية قياسها 90° باتجاه دوران عقارب الساعة حول النقطة B. فما إحداثيات B'؟



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

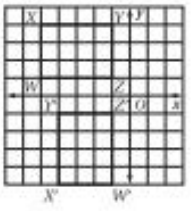
12. للمثلث PQR الرؤوس $P(-6, 0)$ و $Q(-6, 5)$ و $R(-2,3)$ كما هو موضح أدناه.

ما صورة النقطة R بعد الدوران بزاوية قياسها $270°$ حول نقطة الأصل؟

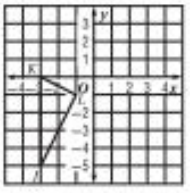


13. انظر إلى التحويل أدناه.

ما قياس زاوية دوران الشكل $WXYZ$ حول نقطة الأصل بعكس اتجاه عقارب الساعة؟



14. إذا أدير المثلث JKL بزاوية قياسها 180 درجة حول نقطة الأصل. فما إحداثيا J'؟



A (5, 3)

B (3, 0)

C (3, 5)

D (3, −5)

15. للمثلث JKL رؤوس عند النقاط $J(0, 1)$ و $K(2, 3)$ و $L(4, 0)$. فإذا أدير المثلث بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل. فماذا سيكون إحداثيا K'؟

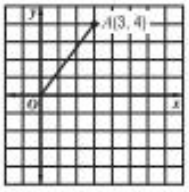
16. ما إحداثيا النقطة C' إذا دار المستطيل $ABCD$ بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

17. ما هي صورة $P(0, 7)$ وفق دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟

18. أي مما يلي هي صورة $Q(-3, 0)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عقارب الساعة؟

19. تدار النقطة $R(4, -2)$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $90°$ وبعكس اتجاه عقارب الساعة. فأي ربع ستقع صورة النقطة؟

20. النقطة A هي أحد رؤوس مربع في الرسم التخطيطي الموضح أدناه. يُدار المربع بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الأصل. فما إحداثيا A'. التي تمثل صورة A نتيجة الدوران؟



21. ما الدوران حول نقطة الأصل الذي يجعل من النقطة $P'(-6, 1)$ صورة للنقطة $P(1, 6)$؟

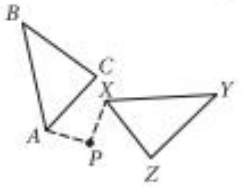
22. صورة النقطة $P(x, y)$ بموجب الدوران حول نقطة الأصل O وبزاوية قياسها $x°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة هي النقطة $P'(x', y')$. فما الدوران حول نقطة الأصل O الذي يمكن بموجبه دوران $P'(x', y')$ بحيث تنتج الصورة $P(x, y)$؟

23. تدار نقطة في الربع الأول بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة. فأي ربع ستقع صورة النقطة؟

24. النقطة $P(x, y)$ نقطة تقع في الربع الثاني. ما هو الدوران الذي بموجبه يكون إحداثيا الصورة هما $P(-y, x)$؟

25. ما النقطة التي تمثّل صورة دوران بعكس اتجاه عقارب الساعة وبزاوية $90°$ للنقطة $P(-4.7, 3.5)$ حول نقطة الأصل؟

26. أحد المثلثات هو دورانٌ لمثلثٍ آخر حول P. فأي عبارة مما يلي **ليست** صحيحة؟



A المثلثان متطابقان.

B توجيه أحد المثلثين مختلف عن المثلث الآخر.

C تدار كل من A و B و C بالعدد نفسه من الدرجات لتشكل المثلث ΔXYZ.

D $\angle X \cong \angle A$ و $\angle Y \cong \angle B$ و $\angle Z \cong \angle C$

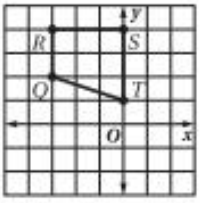
27. ما هي صورة $P(-5, 12)$ بموجب دوران بزاوية قياسها $90°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة؟

28. المضلعان الموضحان أدناه متطابقان. فما التحويل الذي يمكن استخدامه لإثبات تطابقهما؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

29. ما الدوران الذي يخضع له شبه المنحرف $QRST$ ليعطي صورةً فيها النقطة R' تقع عند $(4, 3)$؟



A دوران بزاوية $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

B دوران بزاوية $180°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة وحول النقطة T

C دوران بزاوية $180°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

D دوران بزاوية $90°$ باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

31. الإجابة القصيرة للمثلث $\triangle XYZ$ الرؤوس $X(1, 7)$ و $Y(0, 2)$ و $Z(-5, -2)$. فما إحداثيا X' بعد دوران بزاوية قياسها $270°$ بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

30. جبريًا يقدّر أن عدد السكان في الولايات المتحدة الأمريكية عام 2007 تخطى 301,000,000 نسمة. وفي الوقت نفسه، قُدّر أن عدد سكان العالم قد تجاوز 6,602,000,000 نسمة. فما هي النسبة المئوية لعدد سكان الولايات المتحدة إلى عدد سكان العالم في ذلك الوقت؟

F 3.1%
G 3.5%
H 4.2%
J 4.6%

32. SAT/ACT يُسند سلّم طوله 18 m على الحائط الخارجي لأحد المنازل. تبعد قاعدة السلّم 8 m عن الحائط. فما الارتفاع الذي تبلغه قمّة السلّم على حائط المنزل مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

A 10.0 m
B 16.1 m
C 19.7 m
D 22.5 m
E 26.0 m

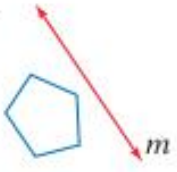
مراجعة شاملة

33. البراكين تتحرك سحابةٌ من الغازات الكثيفة والغبار صادرةً عن أحد البراكين مسافة 64 km باتجاه الغرب ومن ثم 48 km باتجاه الشمال. صمم تمثيلاً يوضح إزاحة حبيبات الغبار. ثم جد مسافة المسار الأقصر الذي يوصل الحبيبات إلى الموقع نفسه. (الدرس 2-4)

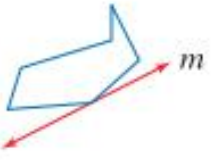
انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى، ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة. (الدرس 1-4)

34.

35.



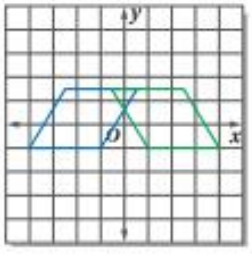
36.



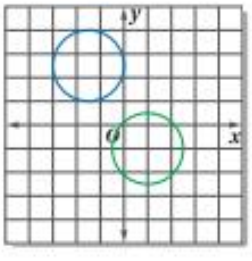
مراجعة المهارات

حدد نوع تحويل التطابق الظاهر باعتباره *انعكاسًا*، أو *إزاحة*، أو *دورانًا*.

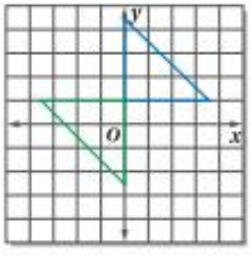
37.



38.



39.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر الهندسة
المجسمات الناتجة عن الدوران

المجسم الناتج عن الدوران هو شكلٌ ثلاثي الأبعاد ينتج عن دوران شكلٍ أو منحنى موجودٍ في مستوى حول مستقيم.

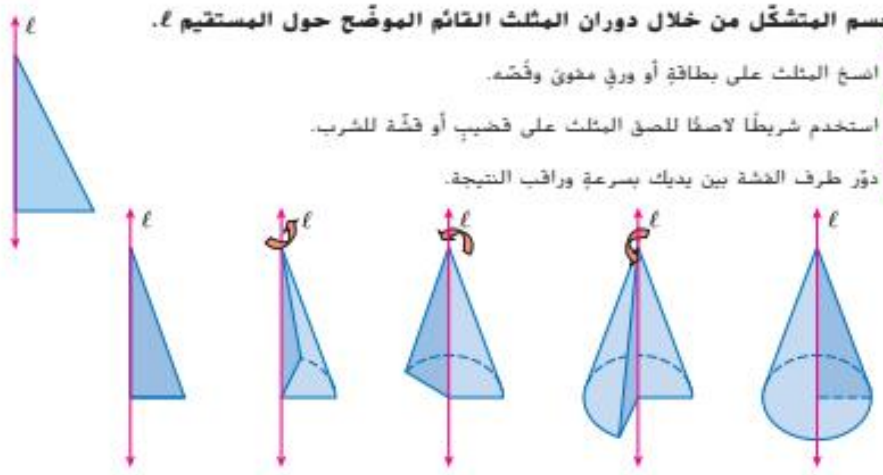
النشاط 1

حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران المثلث القائم الموضّح حول المستقيم ℓ.

الخطوة 1 انسخ المثلث على بطاقةٍ أو ورقٍ مقوى وقصّه.

الخطوة 2 استخدم شريطًا لاصقًا للصق المثلث على قضيبٍ أو قشّة للشرب.

الخطوة 3 دوّر طرف القشة بين يديك بسرعةٍ وراقب النتيجة.

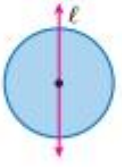


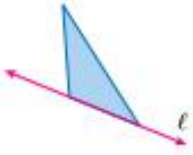
الصورة المشوشة التي تلاحظها هي صورة مخروط.

تمثيل النماذج والتحليل

حدّد المجسم المتشكّل من خلال دوران كل شكل ثنائي الأبعاد مما يلي حول المستقيم ℓ ومثّله.

1.

2. 

3. 

4. مثّل وحدّد المجسّم المتشكّل نتيجة لدوران المستطيل الموضح حول المستقيم المؤلّف من

   a. الضلع $\overline{AB}$

   b. الضلع $\overline{AD}$

   c. نقطة منتصف الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$

5. **التصميم** ارسم شكلاً ثنائي الأبعاد يمكن دورانه لتشكيل الإناء الموضح. بما في ذلك المستقيم الذي ينبغي الدوران حوله.

6. **التبرير** صواب أو خطأ: يمكن أن تتشكل جميع المجسمات عبر دوران شكلٍ ثنائي الأبعاد. اشرح استنتاجك

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لشركة McGraw-Hill Education

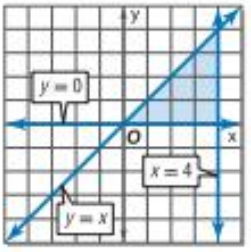
مختبر الهندسة
المجسمات الناتجة عن الدوران تابع

سيطلب منك في حساب التفاضل والتكامل إيجاد أحجام مجسماتٍ ناتجةٍ عن دوران منطقةٍ على مستوى إحداثي حول المحور الأفقي x أو الرأسي y. ومن أولى الخطوات الهامة في حل هذه المسائل تصوّر المجسّمات المتشكلة.

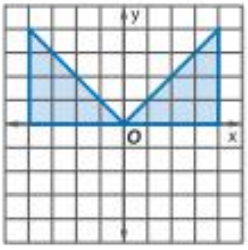
النشاط 2

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران المنطقة المحدّدة بـ $y = x$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول المحور الرأسي y.

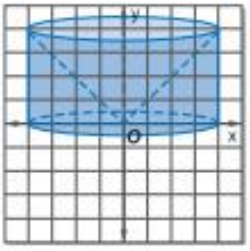
الخطوة 1 مثّل بيانيًا كل معادلة مما يلي لإيجاد المنطقة التي سيتم دورانها.



الخطوة 2 اعكس المنطقة حول المحور الرأسي y.



الخطوة 3 صل رؤوس المثلثات الناتجة باستخدام خطوطٍ منحنية.



المجسّم أسطوانةٌ ذات مخروط مقتطعٍ في مركزها.

تمثيل النماذج والتحليل

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تحكمها كل معادلة مما يلي حول المحور الرأسي y.

7. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

8. $y = x^2$
$y = 4$

9. $y = x^2$
$y = 2x$

مثّل المجسّم الذي ينتج عند دوران كل منطقة تحددّها كل معادلة مما يلي حول المحور الأفقي x.

10. $y = -x + 4$
$x = 0$
$y = 0$

11. $y = x^2$
$y = 0$
$x = 2$

12. $y = x^2$
$y = 2x$

13. **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل منطقةً في الربع الأول من المستوى الإحداثي.
   a. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الرأسي y.
   b. ارسم التمثيل البياني للمنطقة عند دورانها حول المحور الأفقي x .

14. **التحدي** جـــد معادلةً تحدّ منطقةً حين تُدوّر حول المحور الأفقي x. ينتج شكلٌ حجمه 18π وحدة مربعة.

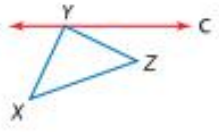
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-4 إلى 3-4

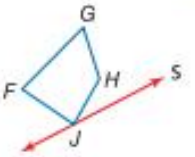
4

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.
(الدرس 1-4)

1.



2.

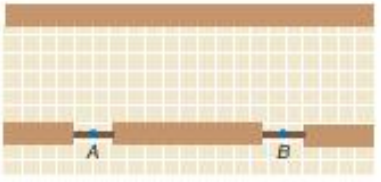


مثّل كل شكلٍ مما يلي وصورته بيانيًا وفق الانعكاس المحدد.
(الدرس 1-4)

3. للمثلث $\triangle FGH$ الرؤوس $F(-4, 3)$ و $G(-2, 0)$ و $H(-1, 4)$؛ بالنسبة للمحور الرأسي y

4. للمعين $QRST$ الرؤوس $Q(2, 1)$ و $R(4, 3)$ و $S(6, 1)$ و $T(4, -1)$؛ بالنسبة للمحور الأفقي x

5. **النوادي** يبيع نادي الدراما الحلوى خلال استراحة إحدى المسرحيات المدرسية. حدّد نقطة P على طول الجدار لتمثيل طاولة الحلوى بحيث يقطع الأشخاص القادمون من أي من البابين A أو B المسافة نفسها إلى الطاولة. (الدرس 1-4)



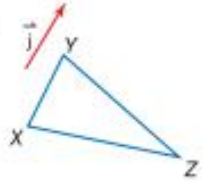
مثّل كل شكلٍ بياني وصورته بعد الإزاحة المحددة.
(الدرس 2-4)

6. المثلث $\triangle ABC$ ذو الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(2, 1)$ و $C(1, -3)$؛ $(3, -1)$

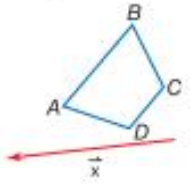
7. للمستطيل $JKLM$ الرؤوس $J(-4, 2)$ و $K(-4, -2)$ و $L(-1, -2)$ و $M(-1, 2)$؛ $(5, -3)$

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة. (الشكل 2-4)

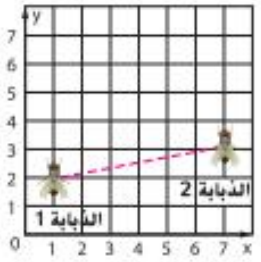
8.



9.

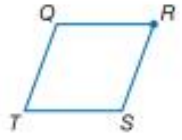


10. **الصور المتحركة** يصنع فارس صورةً متحركة. حيث يستخدم ورقًا للتمثيل البياني للتحقق من دقة أبعاد رسوماته. فإذا رسم مستوى إحداثيًا يضم ذبابتين كما هو موضح أدناه، فما المتجه الذي يمثل الحركة من الذبابة 1 إلى الذبابة 2؟
(الدرس 2-4)

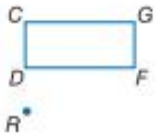


انسخ كل مضلعٍ ونقطة R. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكلٍ حول النقطة R.
(الدرس 3-4)

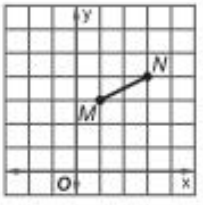
11. 45°



12. 60°



13. **الاختيار من متعدد** ما صورة النقطة M بعد دوران بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-4)



A $(-3, 1)$
C $(-1, -3)$
B $(-3, -1)$
D $(3, 1)$

مثّل كل شكلٍ بياني وصورته بعد الدوران المحدد.
(الدرس 3-4)

14. للمثلث $\triangle RST$ الرؤوس $R(-3, 0)$ و $S(-1, -4)$ و $T(0, -1)$؛ 90°

15. للمربع $JKLM$ الرؤوس $J(-1, 2)$ و $K(-1, -2)$ و $L(3, -2)$ و $M(3, 2)$؛ 180°

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

مختبر برنامج الهندسة
تركيب التحويلات

سوف تستخدم في هذا المختبر لوح الرسم الهندسي لاستكشاف آثار القيام بتحويلاتٍ متعددةٍ على شكلٍ ما.

النشاط

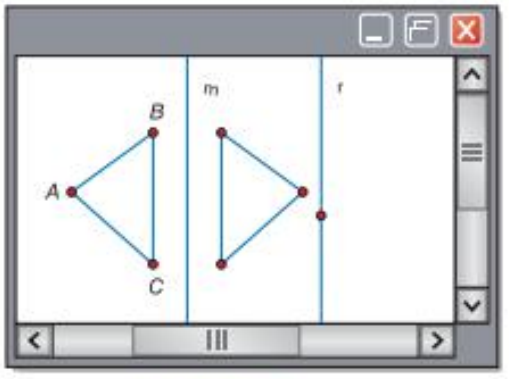
عكس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين رأسيين.

الخطوة 1 استخدم أداة القطع المستقيمة لإنشاء مثلثٍ يتجه أحد رؤوسه نحو اليسار بحيث يمكنك أن ترى بسهولةٍ التحويلات التي تجريها. سَمِّ المثلث ABC.

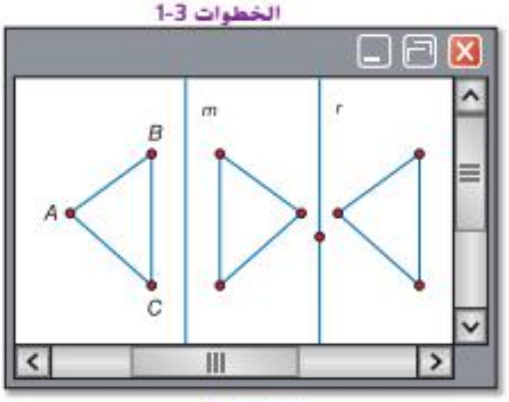
الخطوة 2 أدخل مستقيمًا وسمّه m إلى يمين المثلث $\triangle ABC$. أدخل نقطةً بحيث تكون المسافة منها إلى المستقيم m أكبر من عرض المثلث $\triangle ABC$. ارسم المستقيم الموازي للمستقيم m من خلال النقطة وسمّ المستقيم الجديد r.

الخطوة 3 اختر المستقيم m واختر Mark Mirror من قائمة Transform (التحويل). اختر جميع أضلاع المثلث $\triangle ABC$ ورؤوسه واختر Reflect (العكس) من قائمة Transform (التحويل).

الخطوة 4 كرر العملية التي استخدمتها في الخطوة 3 لعكس الصورة الجديدة بالنسبة للمستقيم r.



الخطوات 3-1



الخطوة 4

تحليل النتائج

1. كيف يرتبط الشكل الأصلي بالشكل النهائي؟
2. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي؟
3. إذا حركت المستقيم. فما الذي يحدث؟
4. **التخمين** إذا عكست الشكل بالنسبة لمستقيم ثالث. فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.
5. كرر النشاط لمستقيمين متعامدين. ما التحويل الوحيد الذي يمكن استخدامه لإنتاج الشكل النهائي نفسه؟
6. **التخمين** إذا عكست الشكل الوارد في التدريب 5 بالنسبة لمستقيم ثالث عمودي على الثاني. فما التحويل الوحيد الذي تعتقد أنه يمكن أن يستخدم لإنتاج الشكل النهائي؟ اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

4-4 تركيب التحويلات

السابق:
- لقد رسمت الانعكاس والإزاحة والدوران.

الحالي:
1. تمثيل الانعكاسات الإنزلاقية وغيرها من تركيب حالات التساوي بيانيا في المستوى الإحداثي.
2. تمثيل تركيبات الانعكاسات بالنسبة لمستقيمات متوازية ومتقاطعة بيانيا.

لماذا؟
- توضح آثار الأقدام التي يخلفها في الرمال شخص يسير على طول حافة شاطئ تركيب تحويلين مختلفين. وهما الإزاحة والانعكاس.

المفردات الجديدة

تركيب التحويلات composition of transformations

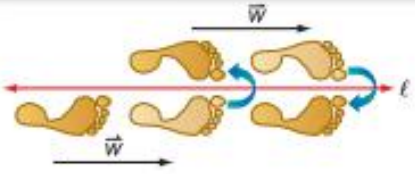
الانعكاس الانزلاقي glide reflection

ممارسات في الرياضيات
قيم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الانعكاس الانزلاقي عند تطبيق تحويل على شكل ومن ثم تطبيق تحويل آخر على صورته. فيطلق على النتيجة اسم **تركيب التحويلات**. والانعكاس الانزلاقي نوعٌ من تركيب التحويلات.

المفهوم الأساسي الانعكاس الانزلاقي

الانعكاس الانزلاقي هو تركيبٌ لإزاحةٍ يتبعها انعكاسٌ بالنسبة لمستقيمٍ موازٍ لمتّجه الإزاحة.



مثال

الانعكاس الانزلاقي الموضح هو تركيبٌ لإزاحةٍ على طول $\vec{w}$ يتبعها انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم ℓ.

مثال 1 تمثيل انعكاسٍ انزلاقي

للمثلث JKL الرؤوس $J(6, -1)$ و $K(10, -2)$ و $L(5, -3)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد إزاحةٍ على طول $\langle 0, 4 \rangle$ انعكاسٍ بالنسبة للمحور الرأسي y.

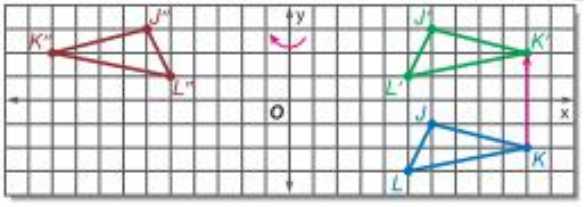
الخطوة 1 إزاحة على طول $\langle 0, 4 \rangle$

$(x, y) \rightarrow (x, y + 4)$
$J(6, -1) \rightarrow J'(6, 3)$
$K(10, -2) \rightarrow K'(10, 2)$
$L(5, -3) \rightarrow L'(5, 1)$

الخطوة 2 انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$J'(6, 3) \rightarrow J''(-6, 3)$
$K'(10, 2) \rightarrow K''(-10, 2)$
$L'(5, 1) \rightarrow L''(-5, 1)$

الخطوة 3 مثّل المثلث $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$ بيانيًا.



تمرين موجّه

للمثلث PQR الرؤوس $P(1, 1)$ و $Q(2, 5)$ و $R(4, 2)$. مثّل المثلث $\triangle PQR$ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدد.

1A. إزاحة: على طول $\langle 0, -2 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

1B. إزاحة: على طول $\langle -3, -3 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمستقيم $y = x$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في المثال 1، $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$ و $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$. بناءً على خاصية التعدي في التطابق، فإن $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقترح النظرية التالية.

النظرية 4.1 تركيب حالات تساوي الأبعاد

تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد (أو أكثر) هو تساوٍ للأبعاد أيضًا.

سنُثبتُ إحدى حالات النظرية 4.1 في التدريب 30.

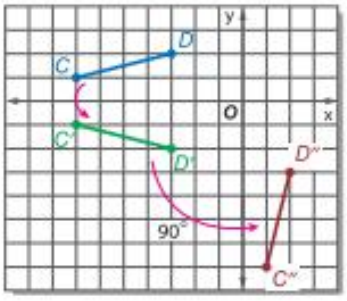
نصيحة دراسية

الحركات الصلبة إن الانعكاس الانزلاقي والانعكاس والإزاحة والدوران هي الأنواع الأربعة الوحيدة *للحركات الصلبة* أو حالات تساوي الأبعاد في مستوى.

إذًا، يعطي تركيب حالتي تساوٍ للأبعاد، بما في ذلك الانعكاس أو الإزاحة أو الدوران، صورةً مطابقةً لصورتها الأصلية.

مثال 2 تمثيل تركيبات تساوي الأبعاد الأخرى

النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1)$ و $D(-3, 2)$. مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها بعد الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل.



الخطوة 1 الانعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$

$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2 الدوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$

$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$

الخطوة 3 مثّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

قراءة في الرياضيات

الفواصل العلوية المزدوجة تستخدم الفواصل العلوية المزدوجة للإشارة إلى أن رأسًا هو صورة تحويل ثانٍ.

تمرين موجّه

للمثلث ABC الرؤوس $A(-6, -2)$ و $B(-5, -5)$ و $C(-2, -1)$.
مثّل بيانيًا المثلث $\triangle ABC$ وصورته بعد تركيب التحويلات بالترتيب المدرج التالي.

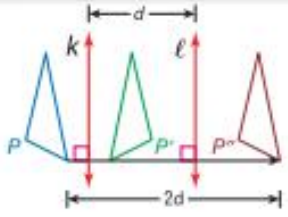
2A. إزاحة: على طول $\langle 3, -1 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي

2B. دوران: $180°$ حول نقطة الأصل
إزاحة: على طول $\langle -2, 4 \rangle$

2 تركيب انعكاسين

تركيب انعكاسين تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين يماثل عملية إزاحة واحدة.

النظرية 4.2 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متوازيين



يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين بواسطة متجه إزاحة

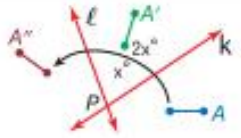
- عمودي على المستقيمين.
- طوله يساوي ضعف المسافة بين المستقيمين.

سوف تثبت النظرية 4.2 في التدريب 28.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين يماثل عملية دورانٍ واحدة.

النظرية 4.3 الانعكاس بالنسبة لمستقيمين متقاطعين



يمكن وصف تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين على أنه عملية دورانٍ واحدة.

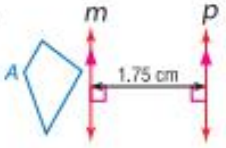
- حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان و
- بزاوية تساوي ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة التي يشكلها المستقيمان.

سوف تثبت النظرية 4.3 في التدريب 37.

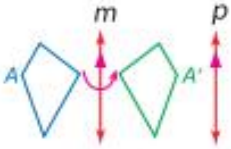
مثال 3 انعكاس شكلٍ بالنسبة لمستقيمين

انسخ الشكل A واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط A بـ A''.

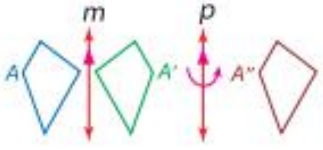
a.



الخطوة 1 اعكس A بالنسبة للمستقيم m.

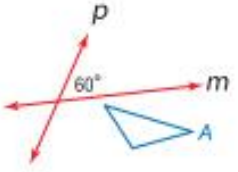


الخطوة 2 اعكس A' بالنسبة للمستقيم p.

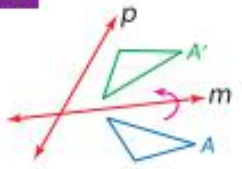


بحسب النظرية 4.2، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين رأسيين متوازيين m و p إزاحةٌ أفقيةٌ إلى الجهة اليمنى لمسافة 1.75 · 2 أو 3.5 cm.

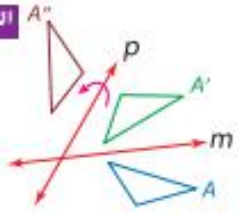
b.



الخطوة 1



الخطوة 2



بحسب النظرية 4.3، يكافئ تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين m و p دورانًا بزاوية تساوي 60° · 2 أو 120° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان m و p.

انتبه!

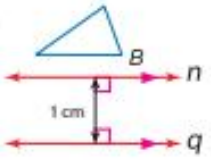
ترتيب التركيب

تحقق من تركيب تحويلين بحسب ترتيبهما المعطى

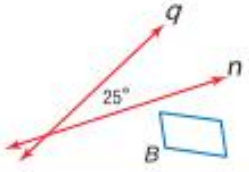
تمرين موجّه

انسخ الشكل B واعكسه بالنسبة للمستقيم n ثم بالنسبة للمستقيم q. ثمّ صف تحويل الزاوية الذي يربط B بـ B''.

3A.



3B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتشكل الكثير من الأنماط في الحياة اليومية باستخدام تركيب التحويلات.

مثال 4 من الحياة اليومية وصف التحويلات

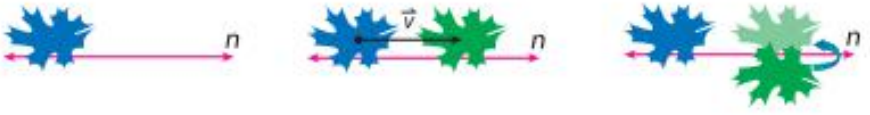
أنماط الحواشي صِف التحويلات المركّبة لتشكيل كل شكلٍ من أشكال أنماط الحواشي الموضحة.

a.

ينتج النمط عبر إزاحات متعاقبةٍ لأصص النباتات الأربعة الأولى. وبموجب ذلك يمكن تشكيل هذا النمط عبر تركيب انعكاسين بالنسبة للمستقيمين m و p كما هو موضح. لاحظ أن المستقيم m يمرّ بمركز الصورة الأصلية.

b.

ينتج النمط من خلال الانعكاس الانزلاقي. ولذلك يمكن تشكيل النمط عبر تركيب إزاحةٍ على طول متّجه الإزاحة $\vec{v}$ ثمّ انعكاسٍ بالنسبة للمستقيم الأفقي n كما هو موضح.

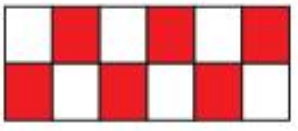


تمرين موجّه

4. نقوش السجّاد صِف التحويلات المركّبة لتشكيل نقش كلٍ من السجادتين الموضحتين.

A.

B.



الربط بالحياة اليومية

تنتج أنماط الحواشي في السجاد عند تكرار أي نوع من عدة أنواع من التحويلات الأساسية باتجاهٍ واحد. وثمّة العديد من التشكيلات الممكنة لهذه التحويلات: الإزاحات والانعكاس الأفقي والانعكاس الرأسية والانعكاسا الرأسية المتبوعة بانعكاس أفقي والانعكاس الانزلاقي والدوران والانعكاس المتبوع بانعكاس انزلاقي.

المصدر: متحف السجاد

ملخص المفهوم تركيب الإزاحات

انعكاس انزلاقي	الإزاحة	دوران
تركيب انعكاسٍ وإزاحة	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1

للمثلث CDE الرؤوس $C(-5, -1)$ و $D(-2, -5)$ و $E(-1, -1)$. مثّل المثلث $\triangle CDE$ وصورته بيانيًا بعد الانعكاس الانزلاقي المحدّد.

1. إزاحة: على طول $\langle 4, 0 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الأفقي x

2. إزاحة: على طول $\langle 0, 6 \rangle$
انعكاس: بالنسبة للمحور الرأسي y

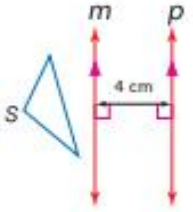
مثال 2

3. النقطتان الطرفيتان لـ $\overline{JK}$ هما $J(2, 5)$ و $K(6, 5)$. مثّل $\overline{JK}$ وصورتها بيانيًا بعد انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x ودوران بزاوية قياسها $90°$ حول نقطة الأصل.

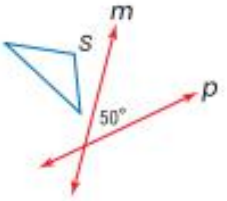
مثال 3

انسخ الشكل S واعكسه بالنسبة للمستقيم m ثم بالنسبة للمستقيم p. ثم صِف تحويلاً وحيدًا يربط S بـ S''.

4.



5.



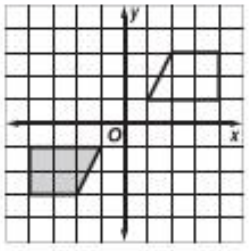
مثال 4

6. **أنماط المكعبات** يشكّل إسماعيل نمطًا من مكعبات على أشكال مثلثات متساوية الأضلاع لوضعها فوق سطح طاولة. صِف تشكيلة التحويلات التي استخدمت لإعداد النمط.

التدريب وحل المسائل

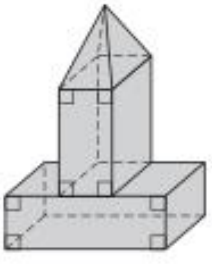
مثال 1

7. ما التحويلان اللذان قد يكونان استخدما لتغيير الشكل المظلل إلى الشكل غير المظلل؟



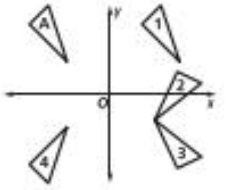
مثال 2

8. يمثل هذا الرسم بناءً يتوضع على الطرف الأخر من فندق في أبو ظبي. فما الأشكال الممثلة في الشكل؟

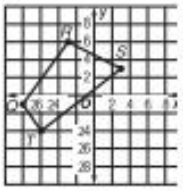


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9. إذا حوّل الشكل A بعملية دوران ثم انعكاس. فما الشكل الذي يمكن أن تأخذه الصورة الأخيرة؟



10. إذا عُكس الشكل الرباعي $QRST$ بالنسبة للمحور الأفقي x ثم عُكس بالنسبة للمحور الرأسي y. ففي أي أرباعٍ ستقع الصورة النهائية؟



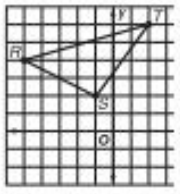
A الربع الأول والثالث والرابع

B الربع الثاني والثالث والرابع

C الربع الأول والثاني فقط

D الربع الثاني والرابع فقط

11. للمثلث RST الإحداثيات $R(-5, 4)$ و $S(-1, 2)$ و $T(2, 6)$. ماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للنقطة T إذا أزيح المثلث لمسافة 5 وحدات إلى الأسفل وعُكس بالنسبة للمحور الرأسي y؟



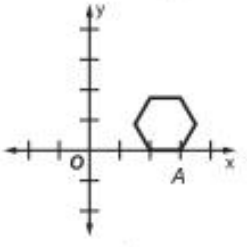
A $(-2, 1)$

B $(-1, 2)$

C $(2, -1)$

D $(2, 1)$

12. يقع سداسي أضلاعٍ منتظم في المستوى الإحداثي بحيث تقع النقطة A عند $(3, 0)$.

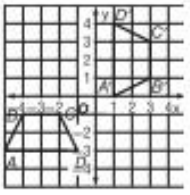


ما إحداثيا الرأس A بعد انعكاس بالنسبة للمحور الرأسي y وإزاحة إلى الأعلى لمسافة وحدتين؟

13. يُمدّد المثلث JKL بمعامل يساوي 1.5 ويُعكس بالنسبة للمحور الرأسي y ويُزاح لمسافة وحدتين يسارًا. فماذا سيكون الإحداثيان الجديدان للرأس J بعد التحويلات الثلاث؟

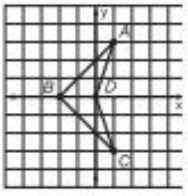
14. لشبه المنحرف $ABCD$ الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه.

يحوّل الشكل $ABCD$ لتشكيل صورةٍ مطابقة. فما التحويلات الحادثة لتشكيل $A'B'C'D'$؟



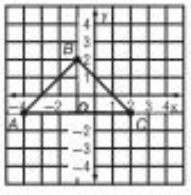
15. يُدار الشكل الرباعي $ABCD$ ويُزاح لتشكيل صورة تضم الرأسين $A(-3, 3)$ و $B(0, 0)$.

فما إحداثيا النقطة D'؟



16. يُمدّد المثلث ABC حول نقطة الأصل بمعامل مقياس يساوي 2 ثم يُزاح بحيث يكون لنقطة منتصف $\overline{A'B'}$ الإحداثيان المماثلان لإحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

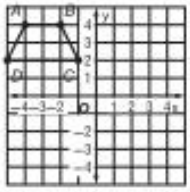
ما إحداثيا النقطة C'؟



17. يتشكّل مثلثٌ من النقاط $P(2, -2)$ و $Q(-2, -4)$ و $R(6, -2)$. تتغير أبعاد المثلث بمعامل مقياس يساوي $\frac{1}{2}$ ثم يُزاح لمسافة أربع وحداتٍ يمينًا وأربعةٍ إلى الأعلى.

ما إحداثيات المثلث $\triangle P'Q'R'$؟

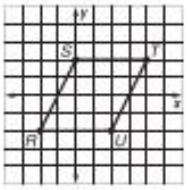
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف



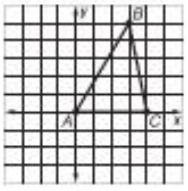
18. لشبه المنحرف *ABCD* الرؤوس الموضحة في المستوى الإحداثي أدناه. فإذا عكس *ABCD* بالنسبة للمحور الرأسي *y* ثم أدير بزاوية قياسها 90° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فماذا سيكون إحداثيا الرأس *C′*؟

19. للمثلث *STU* الرؤوس *S*(−5, −2) و *T*(−1, 4) و *U*(6, 3). فإذا أزيح المثلث لمسافة 3 وحدات يمينًا و 5 وحدات إلى الأسفل ثم عكس بالنسبة للمحور الأفقي *x*. فماذا سيكون إحداثيا *T′* وهي صورة *T*؟

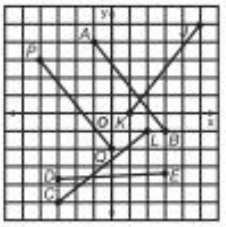
20. إذا أزيح متوازي الأضلاع *RSTU* لمسافة 5 وحدات يسارًا و 3 وحدات إلى الأعلى ثم عكس بالنسبة للمحور الرأسي *y*. فماذا سيكون إحداثيا *T′*. وهي صورة *T* وفق هذين التحويلين؟



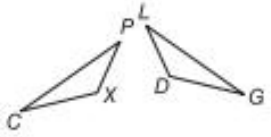
21. إذا أدير المثلث $\triangle ABC$ كما هو موضح بزاوية قياسها 180° بعكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. فستكون صورته $\triangle A'B'C$. فما التحويل أو تشكيلات التحويلات على المثلث $\triangle ABC$ والتي ستنتج صورة مختلفة عن المثلث $\triangle A'B'C$؟



22. ما القطعة المستقيمة التي تمثل صورة $\overline{PQ}$ بموجب إزاحة انزلاقية؟



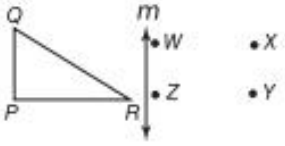
23. ما نوع التحويل الذي يمكنك استخدامه لتثبت أن $\triangle CXP \cong \triangle GDL$؟



24. تقع رؤوس مثلثٍ في الربع الثاني. ففي أي ربع ستقع صورة المثلث بموجب الانعكاس الانزلاقي $T_{0,4} \rightarrow R_{x=0}$ ؟

25. تُعكس النقطة *P*(*x*, *y*) بالنسبة للمحور الرأسي *y*. ثم أزيحت صورتها رأسيًا لمسافة a وحدة. حيث $a > 0$. فأيّ مما يلي يعطي إحداثيات الصورة النهائية *P′*؟

26. أي من مجموعات النقاط التالية يمكن أن تكون رؤوسًا لصورة المثلث *PQR* بموجب انعكاس انزلاقي بحيث يكون المستقيم *m* هو خط الانعكاس؟



27. تقع رؤوس مثلث عند النقاط (3, −1) و (5, 2) و (1, 0). فإذا أزيح المثلث 4 وحدات يسارًا. ثم مُدّد بمعامل مقياس قيمته 3. فما إحداثيات صورة المثلث؟

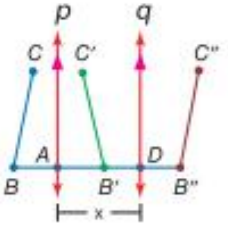
28. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 4.2.

المعطيات: يطبّق انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم *p* على $\overline{BC}$ لتعطي $\overline{B'C'}$. ويطبّق انعكاسٌ بالنسبة للمستقيم *q* على $\overline{B'C'}$ لتعطي $\overline{B''C''}$.

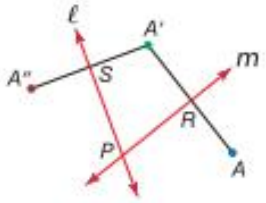
$p \parallel q, AD = x$

المطلوب إثباته: a. $\overline{BB''} \perp p, \overline{BB''} \perp q$

b. $BB'' = 2x$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



29. البرهان اكتب فقرة برهان للنظرية 4.3.

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ و m عند النقطة P.
A هي أي نقطة على المستقيم ℓ أو المستقيم m.

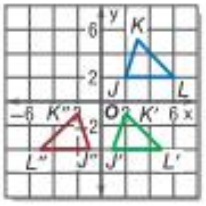
المطلوب إثباته: a. إذا عكست النقطة A بالنسبة للمستقيم m.
ثم عكست صورتها A' بالنسبة للمستقيم ℓ. فإن A''
هي صورة A بعد دوران حول النقطة P.

b. $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

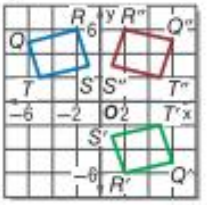
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

صِف التحويلات التي رُكّبت لتشكيل صورة كل شكلٍ مما يلي.

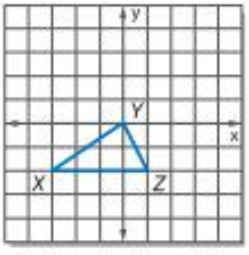
30.



31.

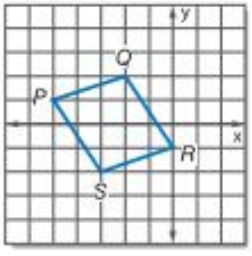


32. تحليل الخطأ تزيح أسماء وأماني المثلث $\triangle XYZ$ على طول $\langle 2, 2 \rangle$ وتعكسانه بالنسبة للمستقيم $y = 2$. تقول أسماء إن التحويل هو انعكاس انزلاقي. وتخالفها أماني قائلةً إن التحويل تركيبٌ من تحويلات متعددة.
فهل أيٌّ منهما على صواب؟
اشرح استنتاجك.



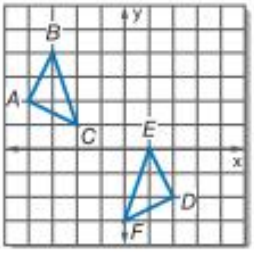
33. الكتابة في الرياضيات هل تبقى أي نقاطٍ ثابتةً بموجب الانعكاس الانزلاقي؟ وهل تبقى كذلك بموجب تركيباتِ لتحويلات؟ اشرح.

34. التحدي إذا أزيح الشكل $PQRS$ على طول $\langle -2, 3 \rangle$. وعُكس بالنسبة للمستقيم $y = -1$. وأُدير بزاوية قياسها 90° حول نقطة الأصل. فما إحداثيات الشكل $P'''Q'''R'''S'''$؟



35. الفرضيات إذا أردنا عكس صورةٍ بالنسبة للمستقيم $y = x$ والمحور الأفقي x. فهل يؤثر ترتيب الانعكاس في الصورة النهائية؟ اشرح.

36. مسألة غير محددة الإجابة اكتب انعكاسًا انزلاقيًا أو تركيبًا لتحويلاتٍ يمكن استخدامها لتحويل المثلث $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$.



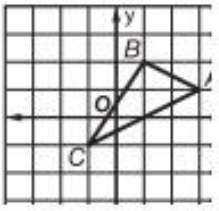
37. التبرير عند إجراء دورانين على صورةٍ وحيدة. فهل يؤثر ترتيب الدوران *أحيانًا* أو *دائمًا* أو *لا يؤثر إطلاقًا* في موقع الصورة النهائية؟
اشرح.

38. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل الانعكاس الانزلاقي وتركيب التحويلات.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

39. يزاح المثلث $ABC\triangle$ على طول المتجه $\langle 3, -2\rangle$ ثم يعكس بالنسبة للمحور الأفقي x. فما إحداثيا النقطة A' بعد التحويل؟



A $(1, -4)$
B $(1, 4)$
C $(-1, 4)$
D $(-1, -4)$

40. الإجابة القصيرة ما إحداثيا D'' إذا أزيحت القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ التي فيها الرأسان $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$ على طول $\langle -6, 2\rangle$ ثم عكست بالنسبة للمحور الرأسي y؟

41. جبريًا اكتب $\frac{18x^2 - 2}{3x^2 - 5x - 2}$ بأبسط صورة.

F $\frac{18}{3x + 1}$
H $\frac{2(3x - 1)}{x - 2}$
G $\frac{2(3x + 1)}{x - 2}$
J $2(3x - 1)$

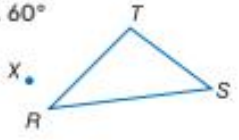
42. SAT/ACT إذا كانت $f(x) = x^3 - x^2 - x$، فما هي قيمة $f(-3)$؟

A -39
B -33
C -21
D -15
E -12

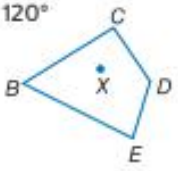
مراجعة شاملة

انسخ كل مضلع ونقطة X. ثم استخدم منقلةً ومسطرةً لرسم الدوران المحدد لكل شكل حول النقطة X. (الدرس 3-4)

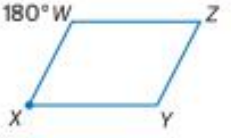
43. 60°



44. 120°



45. 180°



مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته على طول المتّجه المعطى. (الدرس 2-4)

46. المثلث $FGH\triangle$ ذو الرؤوس $F(1, -4)$ و $G(3, -1)$ و $H(7, -1)$؛ $\langle 2, 6\rangle$

47. الشكل الرباعي $ABCD$ ذو الرؤوس $A(-2, 7)$ و $B(-1, 4)$ و $C(2, 3)$ و $D(2, 7)$؛ $\langle -3, -5\rangle$

48. الشراع طول ضلعٍ في شراعٍ مستطيل يساوي 7.5 m. وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع يساوي 40°. وقياس زاويةٍ أخرى يشكّلها الشراع يساوي 55°. فكم يساوي محيط الشراع مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

49. تنسيق الحدائق أطوال أضلاع حوض أزهارٍ مثلثي الشكل 1.35 m و 1.8 m و 2.25 m. جـــد قياس أصغر زوايا المثلث.

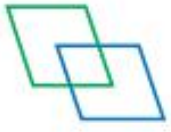
مراجعة المهارات

يعرض كل شكلٍ صورةً أصليةً وصورتها المنعكسة بالنسبة لخطٍ ما. انسخ كل شكلٍ وارسم خط الانعكاس

50.

51.

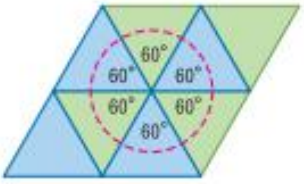
52.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-4 مختبر الهندسة
الفسيفساء

الفسيفساء عبارة عن نمط شكلي أو أكثر يغطي مستوى معين بحيث لا تبقى مسافات فارغة أو متداخلة. مجموع الزوايا التي تحيط برأس الفسيفساء يساوي 360°.



تتشكل **الفسيفساء المنتظمة** بنوع واحد من المضلعات المنتظمة. سيشكل المضلع المنتظم فسيفساء إذا كان به قياس زاوية داخلية يمثل معامل بمقدار 360 درجة. وتتشكل **الفسيفساء شبه المنتظمة** بمضلعين منتظمين أو أكثر.

النشاط 1 الفسيفساء المنتظمة

حدد ما إذا كان كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اشرح.

a. سداسي الأضلاع

لنفترض أن x يمثل قياس إحدى الزوايا الداخلية لسداسي الأضلاع.

$$x = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{قانون الزوايا الداخلية}$$
$$= \frac{180(6-2)}{6} \quad n = 6$$
$$= 120 \quad \text{بسّط.}$$

بما أن 120 هو معامل 360. سيشكل سداسي الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

b. عشاري الأضلاع

لنفترض أن x يمثل قياس أحدى الزوايا الداخلية في عشاري الأضلاع المنتظم.

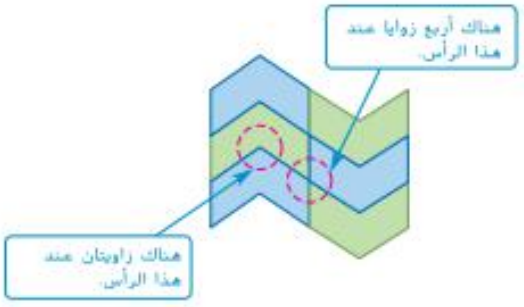
$$x = \frac{180(n-2)}{n} \quad \text{قانون الزوايا الداخلية}$$
$$= \frac{180(10-2)}{10} \quad n = 10$$
$$= 144 \quad \text{بسّط.}$$

بما أن 144 ليس معامل 360. لن يشكل عشاري الأضلاع المنتظم فسيفساء في المستوى الإحداثي.

تصبح الفسيفساء **موحدة** إذا كان بها تنظيم واحد للأشكال والزوايا في كل رأس.

موحدة

غير موحدة

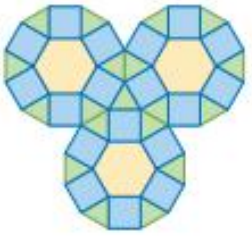


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 تصنيف الفسيفساء

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو فسيفساء *منتظمة، أم شبه منتظمة، أم ليست أي منهما، وموحدة أو ليست موحدة*.

a.



لا يوجد مسافات فارغة، ولا يوجد أشكال متداخلة. إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

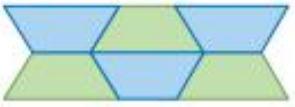
تتكون الفسيفساء من أشكال منتظمة من سداسيات الأضلاع والمربعات والمثلثات متساوية الأضلاع. إذًا هي فسيفساء **شبه منتظمة**.

توجد أربع زوايا حول بعض الرؤوس وخمس زوايا حول البعض الآخر. إذًا الفسيفساء **ليست موحدة**.

b.

توجد مسافة غير مملوءة. إذًا النمط **ليس فسيفساء**.

c.



لا توجد مسافات فارغة، ولا توجد أشكال متداخلة. إذًا النمط عبارة عن **فسيفساء**.

تتكون الفسيفساء من أشكال منحرف، وهي مضلعات ليست منتظمة. إذًا الفسيفساء **ليست** منتظمة ولا شبه منتظمة.

توجد أربع زوايا حول كل رأس من الرؤوس وقياسات الزوايا واحدة عند كل رأس. إذًا الفسيفساء **موحدة**.

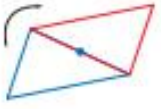
يمكنك استخدام خصائص الفسيفساء لتصميم الفسيفساء وإنشائها.

النشاط 3 رسم الفسيفساء

ارسم مثلثًا واستخدمه لإنشاء فسيفساء.

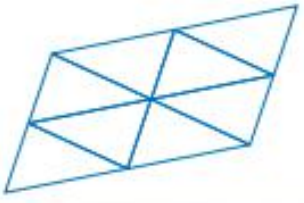
الخطوة 1 ارسم مثلثًا وجد نقطة منتصف أحد أضلاعه.

الخطوة 2 قم بدوران المثلث بمقدار 180° حول النقطة.



الخطوة 3 قم بإزاحة المثلثين لعمل صف.

الخطوة 4 قم بإزاحة الصف لعمل فسيفساء.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نشاط 4 الفسيفساء باستخدام التكنولوجيا

استخدم برنامج Geometer's Sketchpad لإنشاء فسيفساء.

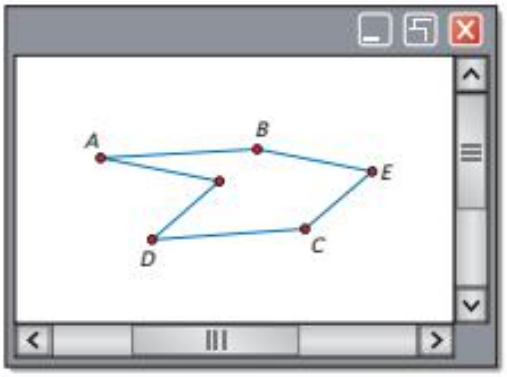
الخطوة 1 أدخل ثلاث نقاط وأنشئ مستقيمًا يمر بنقطتين منها. ثم أنشئ مستقيمًا يوازي المستقيم الأول ويمر بالنقطة الثالثة باستخدام خيار **Parallel Line (مستقيم موازٍ)** من قائمة **Construct (إنشاء)**. أكمل متوازي الأضلاع وحدد النقاط A و B و C و D. ثم بإخفاء المستقيمات.

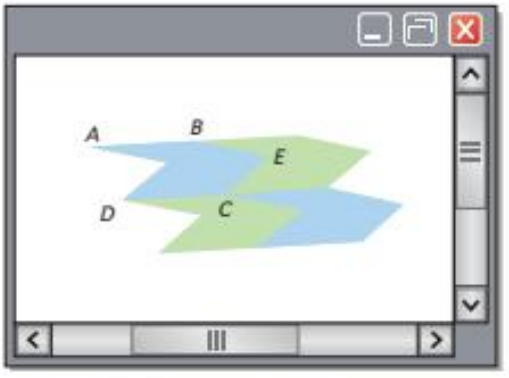
الخطوة 2 أدخل نقطة أخرى ولتكن E داخل متوازي الأضلاع. ارسم قطعًا مستقيمة بين A و B و B و E و E و C و C و D.

الخطوة 3 ظلّل النقطة B ثم النقطة A. من قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Mark Vector (تحديد المتجهات)**. واختر $\overline{BE}$ و $\overline{EC}$. والنقطة E. ومن قائمة **Transform (تحويل)**. اختر **Translate (إزاحة)**.

الخطوة 4 بدءًا من النقطة A. اختر جميع الرؤوس التي حول محيط المضلع. اختر **Hexagon Interior (داخل سداسي الأضلاع)** من قائمة **Construct (إنشاء)**.

الخطوة 5 اختر النقطة A ثم النقطة B وحدد المتجه كما فعلت في الخطوة 3. حدد داخل المضلع واختر **Translate (إزاحة)** من قائمة **Transform (تحويل)**. استمر في عمل الفسيفساء بتحديد المتجهات وإزاحة المضلع. يمكنك اختيار **Color (اللون)** من قائمة **Display** لإنشاء نمط ملون.





التمارين

حدد هل كل مضلع منتظم سيشكّل فسيفساء في المستوى الإحداثي أو لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.

1. مثلث
2. خماسي أضلاع
3. سداسي عشري

حدد ما إذا كان كل نمط مما يلي عبارة عن فسيفساء أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر هل هو *فسيفساء منتظمة، أو شبه منتظمة، أو ليس أي منهما وفسيفساء موحدة أو ليست موحدة*.

4.

5.

6.

ارسم فسيفساء باستخدام الشكل (الأشكال) التالية

7. ثماني أضلاع ومربع
8. سداسي أضلاع ومثلث
9. مثلث قائم الزاوية
10. شبه منحرف ومتوازي أضلاع

11. **الكتابة في الرياضيات** اذكر أمثلة على استخدام الفسيفساء في المعمار والترصيع بالفسيفساء والأعمال الفنية. واشرح طريقة استخدام الفسيفساء في كل مثال.

12. التخمين اذكر شكلاً تعتقد أنه سيشكل فسيفساء في مساحة ثلاثية الأبعاد. اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 4-5 التناظر

السابق:
- لقد رسمت انعكاس الأشكال ودورانها.

الحالي:
1. تحديد عمليات التناظر المحوري والدوراني في الأشكال ثنائية الأبعاد.
2. تحديد عمليات التناظر المحوري وفي المستوى الإحدائي في الأشكال ثلاثية الأبعاد.

لماذا؟
- في مملكة الحيوانات، غالبًا ما يدل التناظر في جسم الحيوان على تعقيد جسم الحيوان. والحيوانات التي تظهر تناظرًا محوريًا، مثل الحشرات، عادة ما تكون أنماط حياتها أكثر تعقيدًا من تلك التي تظهر تناظرًا دورانيًا، مثل قنديل البحر.

المفردات الجديدة

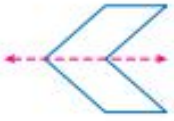
symmetry	التناظر
line symmetry	تناظر محوري
line of symmetry	خط / محور التناظر
rotational symmetry	التناظر الدوراني
center of symmetry	مركز التناظر
order of symmetry	ترتيب التناظر
magnitude of symmetry	مقدار التناظر
plane symmetry	التناظر في المستوى الإحدائي
axis symmetry	التناظر المحوري

1 التناظر في الأشكال ثنائية الأبعاد

يوجد في الشكل **تناظر** إذا كان هناك انعكاس ذو حركة ثابتة، أو إزاحة، أو دوران. أو انعكاس انزلاقي يرسم الشكل على نفسه. وأحد أنواع التناظر هو التناظر المحوري.

المفهوم الأساسي التناظر المحوري

الشكل في المستوى له **تناظر محوري** (أو تناظر انعكاس) إذا كان من الممكن انعكاس الشكل على ذاته عن طريق انعكاس في أحد المستقيمات. ويسمى **محور التناظر**.



مثال 1 من الحياة اليومية تعريف التناظر المحوري

الشواطئ اذكر هل الجسم يبدو أن به تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

a.

نعم؛ السلطعون له مستقيم تناظر واحد.

b.

نعم؛ نجم البحر له خمسة مستقيمات تناظرية.

c.

لا؛ لا توجد مستقيمات في صدفة المحار يمكن أن تنعكس فيه بحيث تتماثل مع ذاتها.

تمرين موجّه

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

1A.

1B.

1C.

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات. البحث عن التوافق في التبريرات المتكررة والتعبير عن ذلك.

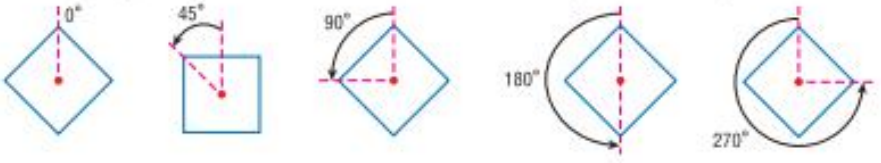
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ويوجد نوع آخر من أنواع التناظر وهو التناظر الدوراني.

المفهوم الأساسي التناظر الدوراني

يكون للشكل في المستوى الإحداثي **تناظر دوراني** (أو تناظر قطري) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران ما بين °0 و°360 حول مركز الشكل. ويسمى **مركز التناظر** (أو نقطة *التناظر*).

الأمثلة الشكل التالي له تناظر دوراني لأن الدوان بمقدار °90 أو °270 يعكس الشكل على نفسه.



عدد المرات التي ينعكس فيها الشكل على نفسه عند الدوران من °0 إلى °360 يطلَق عليه **ترتيب التناظر**. **مقدار التناظر** (أو زاوية التناظر) هي أصغر زاوية يمكن أن يدور بها الشكل بحيث ينعكس على ذاته. ويرتبط ترتيب الدوران ومقداره بالمعادلة التالية.

$$\text{المقدار} = 360° \div \text{الترتيب}$$

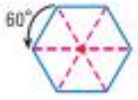
في الشكل السابق يوجد تناظر دوران بترتيب 4 ومقداره °90.

مثال 2 تعريف التناظر الدوراني

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أو لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

a.

نعم؛ الشكل السداسي المنتظم له 6 تناظرات دورانية ومقداره $360° \div 6$ أو °60. المركز هو تقاطع الأقطار.

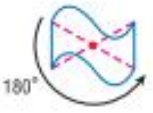


b.

لا؛ لا يوجد تناظر دوراني بين °0 و °360 ينعكس المثلث قائم الزاوية على نفسه.

c.

نعم؛ الشكل له 2 من التناظرات الدورانية ومقداره $360° \div 2$ أو °180. المركز هو تقاطع الأقطار.



تمرين موجّه

الزهور اذكر هل يبدو أن في الزهرة تناظر دوراني أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الزهرة وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

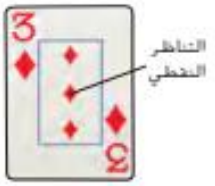
2A.

2B.

2C.

نصيحة دراسية

التناظر النقطي يوجد في الشكل تناظر نقطي إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق الدوران بزاوية °180. يوضح الشكل التناظر النقطي. وذلك لأنه يوجد شعاع بين الجانب العلوي جهة اليسار والجانب المقابل له في الأسفل.

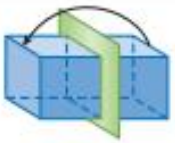


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد قد يوجد تناظر في الأشكال ثلاثية الأبعاد أيضًا.

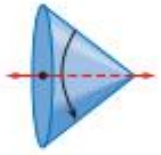
المفهوم الأساسي التناظرات ثلاثية الأبعاد

التناظر في المستوى الإحدائي



يحدث **التناظر في المستوى الإحدائي** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الانعكاس في المستوى الإحدائي.

التناظر المحوري

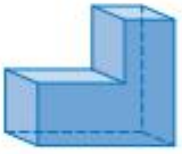


يحدث **التناظر المحوري** في الشكل ثلاثي الأبعاد إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين °0 و °360 في أحد المستقيمات.

مثال 3 التناظر ثلاثي الأبعاد

اذكر هل الشكل به تناظر في *المستوى الإحدائي* أم تناظر محوري أم *كلاهما* أم *ليس أيًا منهما*.

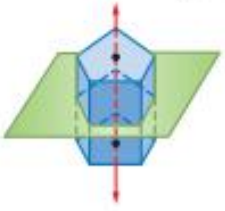
a. منشور على شكل حرف L

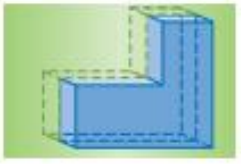


التناظر في المستوى الإحدائي الإحدائي

b. منشور خماسي منتظم

كلاهما. تناظر في المستوى الإحدائي وتناظر محوري





مراجعة المصطلحات

المنشور هو شكل متعدد الوجوه له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان يتصل بعضه عن طريق أوجه متوازي الأضلاع

تمرين موجّه

الرياضات اذكر هل كل أداة من الأدوات الرياضية بها تناظر في *المستوى الإحدائي* أم تناظر محوري أم *كليهما* أم *ليس أيًا منهما* (مع تجاهل الخياطة أو العلامات في الأداة).

3A.

3B.

3C.

3D.

الربط بالحياة اليومية

تم تصميم كرة القدم بطريقة ديناميكية هوائية حتى تلف بعد ركلها، بحيث يكون شكلها كروي متطاول. وهذا يعني أن أحد محاور التناظر أطول من المحاور الأخرى.

المصدر: الدليل الإرشادي الكامل إلى كرة القدم

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر هل يبدو أن الشكل به تناظر خطي أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.**

1.

2.

3.

مثال 2 **اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.**

4.

5.

6.

المثالان 1 و 2 7. **مبنى البرلمان الأمريكي** تعدّ القبة التي تم اكتمال بنائها في عام 1863. أحدث الإضافات لمبنى البرلمان الأمريكي في الولايات المتحدة. وهي مدعومة بدعامات حديدية عددها 36 وبها 108 نافذة مقسمة بالتساوي على ثلاثة مستويات.

a. باستثناء قمة القبة، كم عدد مستقيمات التناظر الأفقية والرأسية التي يبدو أنها موجودة في القبة؟

b. هل القبة لها تناظر دوراني؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره.

مثال 3 8. اذكر هل الشكل به تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كلا *التناظرين* أم لا شيء منهما.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **الانتظام** **ذكر هل يبدو أن الشكل يتضمن تناظرًا محوريًا أو لا. اكتب نعم أو لا. إذا كان الأمر كذلك، فانسخ الشكل، وارسم كل مستقيمات التناظر، واذكر عددها.**

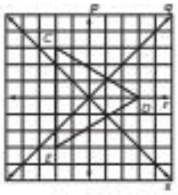
9.

10.

11.

12.

13. تم رسم المثلث CDE في المستوى الإحداثي. أي مستقيم هو مستقيم التناظر؟



اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

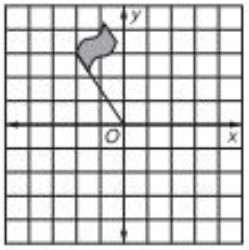
14.

15.

16.

17.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



18. تم دوران علَم بمقدار 180° في المستوى الإحداثي. أي عبارة صحيحة؟

A الشكل متناظر حول النقطة $(0, 0)$.

B الشكل متناظر حول المحور الرأسي y.

C الشكل متناظر حول المحور الأفقي x.

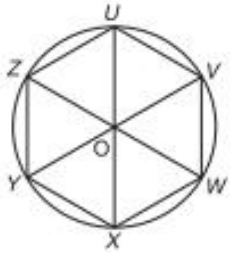
D الشكل متناظر حول النقطة $(-3, 2)$.

اذكر هل الشكل به تناظر في المستوى الإحداثي أم تناظر محوري أم كلاهما أم ليس أيًا منهما.

19.

20.

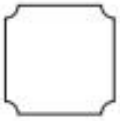
21.



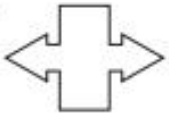
22. سداسي الأضلاع $UVWXYZ$ محاط بدائرة لتصميم بلاطة. أي نقطة توضح موقع النقطة U بعد الدوران حول نقطة المركز O بمقدار 120° باتجاه عقارب الساعة ؟

23. فنان جرافيك يريد تصميم شعار باستخدام مستقيمات التناظر. أي شعار لا يوجد به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد؟

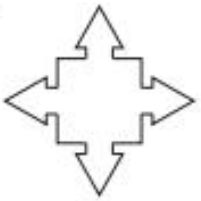
A



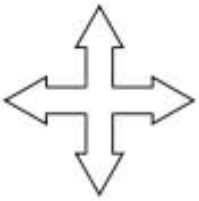
B



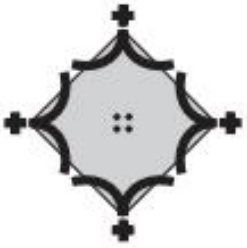
C



D



24. تنظر أمل إلى تصميمات سترة. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



A التصميم به 4 مستقيمات تناظر بالتحديد.

B التصميم به 3 مستقيمات تناظر بالتحديد.

C التصميم به مستقيمان تناظر بالتحديد.

D التصميم به مستقيم تناظر واحد بالتحديد.

25. يصمم أحمد شعارًا لناديه. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟

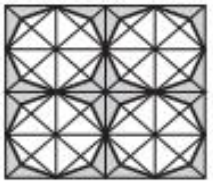
A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



26. ابتكر فنان فسيفساء برسم مستقيمات التناظر في مربع ثم استخدمها في رسم التصميم. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأحد الأشكال ثمانية الأضلاع المحددة في التصميم؟

هندسة الإحداثيات **حدد ما إذا كان الشكل الموضح بالرؤوس له تناظر محوري و/أو دوراني.**

27. A(−4, 0) B(0, 4) C(4, 0) D(0 −4)

28. R(−3, 3) S(−3 −3) T(3, 3)

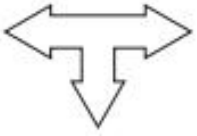
الجبر **مثّل الدالة بيانيًا وحدد ما إذا كان التمثيل البياني له تناظر محوري و/أو دوراني أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر ترتيب التناظر ومقداره واكتب معادلات لأي مستقيمات تناظر.**

29. $y = x$

30. $y = x^2 + 1$

31. $y = -x^3$

32. يصمم إسماعيل شعارًا لناديه. أي عبارة تصف التناظر في التصميم؟



A التصميم به مستقيم تناظر واحد فقط.

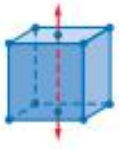
B التصميم به مستقيما تناظر فقط.

C التصميم به 3 مستقيمات تناظر فقط.

D التصميم به 4 مستقيمات تناظر فقط.

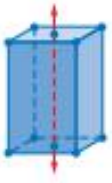
علم البلوريات **حدد هل البلورات التالية لها تناظر في *المستوى الإحداثي* و/أو تناظر محوري أم لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فاذكر مقدار التناظر.**

33.



34.

35.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **النقد** يقول أسامة أن الشكل A له تناظر محوري فقط. ويقول أيمن أن الشكل A له تناظر دوراني فقط. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

الشكل A

37. **التحدي** شكل رباعي له بالتحديد مستقيما تناظر. $y = x - 1$ و $y = -x + 2$. جـــد الرؤوس المحتملة للشكل. مثل الشكل ومستقيمات التناظر بيانيًا.

38. **التبرير** شكل متعدد الوجوه له تناظر محوري بترتيب 3، ولكن ليس له تناظر في المستوى. ما هو الشكل؟ اشرح. انظر الهامش.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

39. كم عدد مستقيمات التناظر التي يمكن رسمها على صورة العلم الكندي التالي؟

A 0
B 1
C 2
D 4

40. الإجابة الشبكية ما ترتيب التناظر للشكل التالي؟

41. الجبر شركة حواسيب تشحن الحواسيب في صناديق خشبية يزن الواحد منها 45 kg عندما تكون فارغة. فإذا كان كل حاسوب لا يزن أكثر من 13 kg. أي متباينة تعطي أفضل وصف لإجمالي الوزن بالكيلو جرامات w لصندوق الحاسوب الذي يحتوي على عدد c من الحواسيب؟

F $c \leq 13 + 45w$
G $c \geq 13 + 45w$
H $w \leq 13c + 45$
J $w \geq 13c + 45$

42. SAT/ACT ما هو ميل المستقيم المحدد بالمعادلة الخطية $5x - 2y = 10$؟

A -5
B $-\frac{5}{2}$
C $-\frac{2}{5}$
D $\frac{2}{5}$
E $\frac{5}{2}$

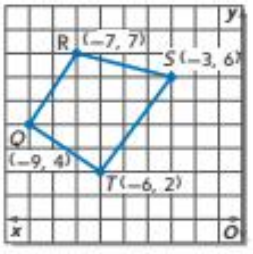
مراجعة شاملة

المثلث JKL له الرؤوس $J(1, 5)$ و $K(3, 1)$، و $L(5, 7)$. مثّل بيانيًا المثلث $\triangle JKL$ وصورته بعد التحويل المشار إليه.
(الدرس 4-4)

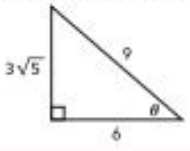
43. الإزاحة: بطول $\langle -7, -1 \rangle$
الانعكاس: في المحور x

44. الإزاحة: بطول $\langle 1, 2 \rangle$
الانعكاس: في المحور y

45. الشكل الرباعي $QRST$ موضح إلى اليسار. ما هي صورة النقطة R بعد الدوران حول نقطة الأصل بمقدار 180° عكس اتجاه عقارب الساعة؟
(الدرس 3-4)



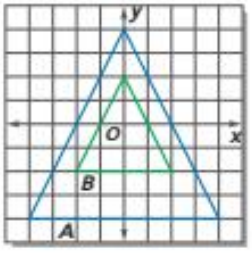
46. الإنشاءات نافذة أبعادها موضحة فيما يلي. استخدم قياسات أضلاع المثلث لتوضيح أن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



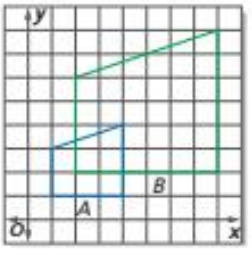
مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل A إلى الشكل B عبارة عن تكبير أو تصغير. ثمّ جد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

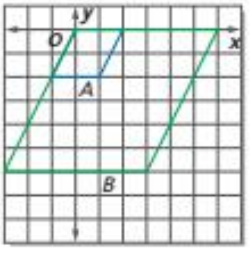
47.



48.



49.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لشركة مؤسسة McGraw-Hill Education

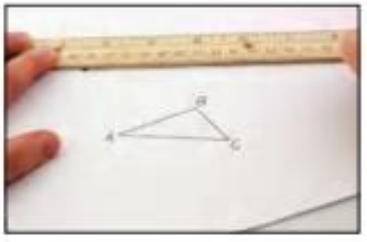
4-5 مختبر الهندسة
استكشاف الإنشاءات بواسطة جهاز عاكس

الجهاز العاكس هو عبارة عن أداة مصنوعة من البلاستيك شبه الشفاف تعكس الأجسام. وأفضل درجة انعكاس لها تكون عندما توضع على سطح مسطح في غرفة جيدة الإضاءة. ويمكنك استخدام الأداة العاكسة لتحويل الأشكال الهندسية.

النشاط 1 انعكاس مثلث

استخدم الجهاز العاكس لعكس المثلث $\triangle ABC$ في w. ضع اسمًا للانعكاس $\triangle A'B'C'$.

الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$ وخط الانعكاس w.



الخطوة 2 باستخدام الجهاز العاكس على المستقيم w. ارسم النقاط لرؤوس الانعكاس.

الخطوة 3 استخدم المسطرة لتوصيل النقاط لتكوين المثلث $\triangle A'B'C'$.

استخدمنا الفرجار والمسطرة المستقيمة والخيط والمطويات الورقية لعمل الإنشاءات الهندسية. ويمكنك أيضا استخدام الأداة العاكسة في تلك الإنشاءات.

النشاط 2 إنشاء محاور التناظر

استخدم الأداة العاكسة لإنشاء محاور التناظر لسداسي الأضلاع المنتظم.

الخطوة 1 ارسم شكل سداسي منتظم. ضع الأداة العاكسة على الشكل وحركها حتى يتطابق أحد نصفي الشكل مع انعكاس النصف الآخر. ثم ارسم محور التناظر.

الخطوة 2 كرر الخطوة رقم 1 حتى تجد جميع محاور التناظر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 3 إنشاء مستقيم موازٍ

استخدم الجهاز العاكس لعكس المستقيم ℓ على المستقيم m الموازي والذي يمر بالنقطة P.

الخطوة 1

ارسم المستقيم ℓ والنقطة P. ضع الجانب القصير للجهاز العاكس على المستقيم ℓ والجانب الطويل على النقطة P. ارسم مستقيمًا بحيث يكون متعامدًا على المستقيم ℓ من خلال النقطة P.

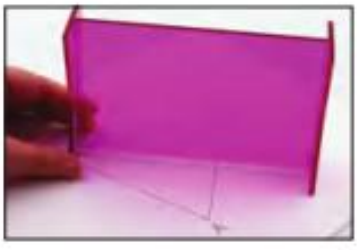
الخطوة 2

ضع الأداة العاكسة بحيث يتطابق المستقيم العمودي مع ذاته ويمر انعكاس المستقيم ℓ بالنقطة P. استخدم المسطرة لرسم المستقيم الموازي m الذي يمر بالنقطة P.

في درس الاستكشاف 1-5، أنشأنا منصفات عمودية بالمطويات الورقية. ويمكنك أيضا استخدام الأداة العاكسة لإنشاء منصفّات عمودية للمثلث.

النشاط 4 إنشاء المنصفات العمودية

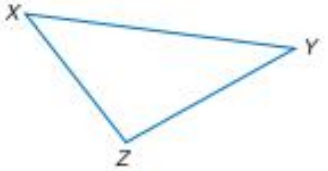
استخدم الأداة العاكسة لإيجاد مركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$.



الخطوة 1 ارسم المثلث $\triangle ABC$. ضع الجهاز العاكس بين النقطة A والنقطة B واضبطها إلى أن تتطابق النقطة A مع النقطة B. ارسم محور التناظر.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 مع الضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$. ثم ضع نقطة عند تعامد المنصفات العمودية الثلاثة. وهذا هو مركز الدائرة المحيطة للمثلث.

تمثيل النماذج والتحليل



1. كيف تعرف أن الخطوات في النشاط 4 تعطي المنصّف العمودي الفعلي ومركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ABC$؟

2. أنشئ منصّف الزاوية وجـــد مركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle XYZ$. اذكر كيف استخدمت الأداة العاكسة في الرسم.

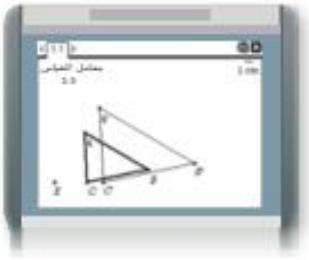
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
عمليات تغيير الأبعاد (التمدّد)

يمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لاستكشاف خواص عمليات تغيير الأبعاد.أو التمدد

النشاط 1 تغيير أبعاد المثلث

تغيير أبعاد المثلث بمعامل مقياس 1.5.



الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة. ثم من قائمة **Points & Lines (النقاط والمستقيمات)**. استخدم أداة **Point (نقطة)** لإضافة نقطة وسمّها النقطة X.

الخطوة 2 من قائمة **Shapes (الأشكال)**. حدد **Triangle (مثلث)** وحدد ثلاث نقاط. وقم بتسمية النقاط A و B و C.

الخطوة 3 من قائمة **Actions (الإجراءات)**. استخدم أداة **Text** لإضافة النص **Scale Factor (معامل المقياس)** و 1.5 بشكل منفصل في الصفحة.

الخطوة 4 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X. و $\triangle ABC$. والنص 1.5.

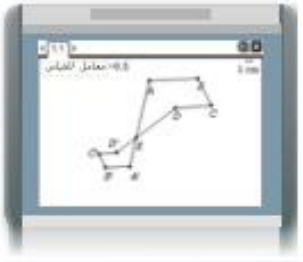
الخطوة 5 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C'.

تحليل النتائج

1. باستخدام أداة **Slope (الميل)** في قائمة **Measurement (القياس)**. اذكر تأثير تغيير الأبعاد على $\overline{AB}$ وبذلك، كيف ترتبط المستقيمات التي تمر بالقطع المستقيمة $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ ببعضها البعض؟
2. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CA}$؟
3. ما تأثير تغيير الأبعاد على المستقيم الذي يقطع الضلع $\overline{CB}$؟

النشاط 2 تغيير أبعاد المضلع

تغيير أبعاد المضلع بمعامل مقياس 0.5−.



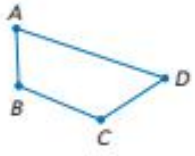
الخطوة 1 أضف صفحة **Geometry (هندسة)** جديدة وارسم المضلع $ABCDX$ كما هو موضح. أضف النص *Scale Factor* (*معامل المقياس*) و 0.5− في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة **Transformation (تحويل)**. حدد **Dilation (تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X. والمضلع $ABCDX$. والنص 0.5−.

الخطوة 3 قم بتسمية النقاط على الصورة A' و B' و C' و D'.

تمثيل النماذج والتحليل

4. حلّل تأثير تغيير الأبعاد في النشاط 2 على الأضلاع التي تضم مركز تغيير الأبعاد.



5. حلّل تأثير تغيير أبعاد شبه المنحرف $ABCD$ الموضح بمعامل المقياس 0.75 ومركز تغيير الأبعاد عند النقطة A.
6. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على المستقيمات التي تمر بمركز تغيير الأبعاد والمستقيمات التي لا تمر به.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 3 تغيير أبعاد القطعة المستقيمة

غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ بمعامل المقياس المشار إليه.

a. معامل المقياس: 0.75

الخطوة 1 في صفحة Geometry **(هندسة)** جديدة، ارسم القطعة المستقيمة باستخدام قائمة Points & Lines **(النقاط والمستقيمات)**. سمي النقطتين الطرفيتين A و B، ثم أضف النقطة X وقم بتسميتها.

الخطوة 2 أضف النص *Scale Factor* (*معامل المقياس*) و 0.75 إلى الصفحة.

الخطوة 3 من قائمة Transformation **(تحويل)**، حدد Dilation **(تغيير الأبعاد)**. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 0.75.

الخطوة 4 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A'B'}$.

b. معامل المقياس: 1.25

الخطوة 1 أضف النص *1.25* في الصفحة.

الخطوة 2 من قائمة Transformation، حدد Dilation. ثم حدد النقطة X، و $\overline{AB}$، والنص 1.25.

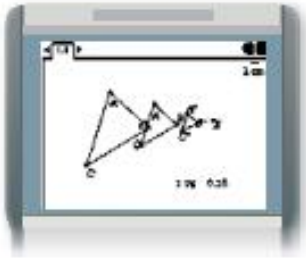
الخطوة 3 قم بتسمية القطعة المستقيمة التي تغيرت أبعادها $\overline{A''B''}$.

تمثيل النماذج والتحليل

7. باستخدام أداة Length **(الطول)** من قائمة Measurement **(القياس)**، جـــد قياسات $\overline{AB}$، و $\overline{A'B'}$، و $\overline{A''B''}$.

8. ما نسبة الضلع $A'B'$ إلى الضلع AB؟ وما نسبة الضلع $A''B''$ إلى AB؟

9. ما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 0.75 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟
وما تأثير تغيير الأبعاد بمعامل المقياس 1.25 على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟



10. غيّر أبعاد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في النشاط 3 بمعامل المقياس -0.75 و -1.25. اذكر التأثير على طول كل قطعة مستقيمة تم تغيير أبعادها.

11. **التخمين** اذكر تأثير تغيير الأبعاد على طول القطعة المستقيمة.

12. اذكر تغيير الأبعاد من $\overline{AB}$ إلى $\overline{A'B'}$ ومن $\overline{A'B'}$ إلى $\overline{A''B''}$ في المثلثات الموضحة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-6 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)

السابق:
- تم تعريف تغيير الأبعاد (التمدد) والتحقق منها في صورة تحويلات التشابه.

الحالي:
1. تمثيل عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) بيانيا.
2. تمثيل عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) في المستوى الإحداثي.

لماذا؟
- لا يزال بعض المصورين الفوتوغرافيين يفضلون الكاميرات التقليدية والأفلام لإنشاء صور سلبية. ومن تلك الصور السلبية، يستطيع المصورون الفوتوغرافيون عمل صور ذات أبعاد معينة.

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

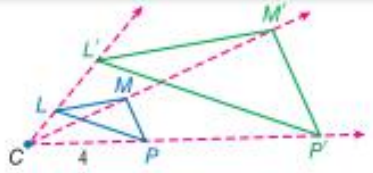
1 تمثيل عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)

تغيير الأبعاد (التمدد) أو *المقياس* عبارة عن تحوّل تشابه يكبّر أو يصغّر من الشكل نسبيًا فيما يتعلق بنقطة *المركز* ومعامل *المقياس*.

المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد (التمدد)

عملية تغيير الأبعاد (التمدد) ذات المركز C ومعامل المقياس الموجب k، $k \neq 1$، عبارة عن دالة تحدد نسبة النقطة P في الشكل إلى الصورة بحيث

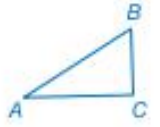
- إذا كانت النقطة P والنقطة C متطابقتين، فإن الصورة والصورة الأصلية يتكونان من النقطة ذاتها، أو
- إذا لم تكن النقطة P هي مركز عملية تغيير الأبعاد (التمدد)، فإن النقطة P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ أو $CP' = k(CP)$.



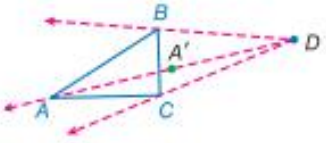
$\triangle L'M'P'$ عبارة عن صورة المثلث $\triangle LMP$ بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها C ومعامل المقياس 2.5.

مثال 1 رسم عملية تغيير الأبعاد (التمدد)

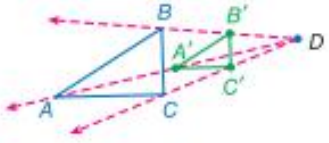
انسخ المثلث $\triangle ABC$ والنقطة D. ثم استخدم مسطرة لرسم صورة المثلث $\triangle ABC$ بناء على عملية تغير أبعاد مركزها D ومعامل القياس $\frac{1}{2}$.



الخطوة 1 ارسم أشعة من النقطة D بحيث تمر بكل رأس.



الخطوة 2 حدد موقع النقطة A' على $\overrightarrow{DA}$ بحيث $DA' = \frac{1}{2}DA$.



الخطوة 3 حدد موقع النقطة B' على $\overrightarrow{DB}$ والنقطة C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة ذاتها. ثم ارسم المثلث $\triangle A'B'C'$.

تمرين موجّه

انسخ الشكل وحدد النقطة J. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها J ومعامل القياس المحدّد هو k المُشار إليه.

1A. $k = \frac{3}{2}$

1B. $k = 0.75$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تعلّمت أيضًا أنه إذا كانت $k > 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد (التمدد) عبارة عن تكبير. وإذا كان $0 < k < 1$، فإن عملية تغيير الأبعاد (التمدد) عبارة عن تصغير. بما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن عملية تغيير الأبعاد (التمدد) في المثال 1 عبارة عن تصغير.

تغيير الأبعاد (التمدد) باستخدام معامل المقياس 1 يُطلق عليه تغيير الأبعاد *(التمدد) متساوي القياس*. فهو ينتج صورة تتطابق مع الصورة الأصلية. وبالتالي يكون الشكلان متطابقين.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد معامل القياس لعملية تغيير الأبعاد (التمدد)

التصوير الفوتوغرافي **لإنشاء صور مختلفة الأحجام، يمكنك تعديل المسافة بين صورة الفيلم السالبة والصورة المكبّرة باستخدام أداة التكبير الفوتوغرافي. افترض أن المسافة بين مصدر الضوء C والصورة السالبة تساوي 45 mm (CP). فإلى أي مسافة PP' ينبغي ضبط أداة التكبير لإنشاء صورة بعرض 22.75 cm ($X'Y'$) من الصورة السلبية التي عرضها 35 mm (XY)؟**

الفهم تتضمن هذه المسألة عملية تغيير أبعاد. ومركز تغيير الأبعاد (التمدد) هو النقطة C، $XY = 35\ mm$ أو $X'Y' = 22.75\ cm$. $CP = 45\ mm$ و $227.5\ mm$. والمطلوب إيجاد PP'.

الخطة جـــد معامل القياس لتغيير الأبعاد (التمدد) من الصورة الأصلية XY إلى الصورة $X'Y'$. استخدم معامل المقياس لإيجاد CP' ثم استخدم CP و CP' لإيجاد PP'.

الحل معامل المقياس k للتكبير هو نسبة الطول في الصورة إلى الطول الموجود في الصورة الأصلية.

$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الصورة الأصلية}}$ معامل قياس الصورة

$= \frac{X'Y'}{XY}$ $X'Y'$ = الصورة، XY = الصورة الأصلية

$= \frac{227.5}{35}$ أو 6.5 اقسم.

استخدم معامل القياس 6.5 لإيجاد CP'.

$CP' = k(CP)$ (تعريف تغيير الأبعاد (التمدد

$= 6.5(45)$ $k = 6.5$ و $CP = 45$

$= 292.5$ اضرب.

استخدم CP' و CP لإيجاد PP'.

$CP + PP' = CP'$ إضافة قطعة مستقيمة

$45 + PP' = 292.5$ $CP = 45$ و $CP' = 292.5$

$PP' = 247.5$ اطرح 45 من كل طرف.

إذًا ينبغي ضبط أداة التكبير بحيث تكون المسافة من الصورة السلبية إلى الصورة المكبرة (PP') 247.5 mm أو 24.75 cm.

تحقق بما أن تغيير الأبعاد (التمدد) عبارة عن تكبير، فإن معامل القياس ينبغي أن يكون أكبر من 1. وبما أن $6.5 > 1$، فإن معامل القياس الموجود منطقي. ✓

نصيحة في حل المسائل

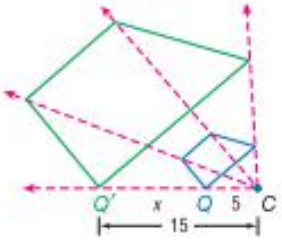
المثابرة

لتجنب الوقوع في أخطاء السهو في حساباتك، قدّر إجابة المسألة قبل حلها. في المثال 2، يمكنك تقدير معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد) ليصبح حوالي $\frac{240}{40}$ أو 6. ثم CP' ستكون الإجابة حوالي 6 • 50 أو 300 و PP' حوالي 300 − 50 أو 250 ميليمترًا. وهذا يساوي 25 cm. والقياس 24.75 cm قريب من هذا التقدير. إذًا فالإجابة منطقية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من الشكل Q إلى Q' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم جـــد معامل القياس و x.



2 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) في المستوى الإحداثي

يمكن استخدام القواعد التالية لإيجاد صورة شكل بعد تمركز عملية تغيير الأبعاد (التمدد) على نقطة الأصل.

المفهوم الأساسي عمليات تغيير الأبعاد (التمدد) في المستوى الإحداثي

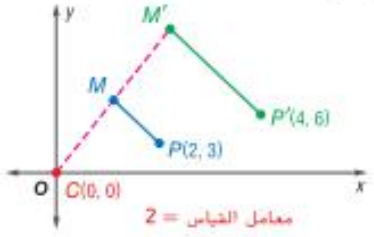
الشرح

لإيجاد إحداثيات صورة بعد تغيير الأبعاد (التمدد) المتمركز في نقطة الأصل، اضرب الإحداثيين x و y لكل نقطة من الصورة الأصلية في معامل القياس لتغيير الأبعاد (التمدد) k.

الرموز

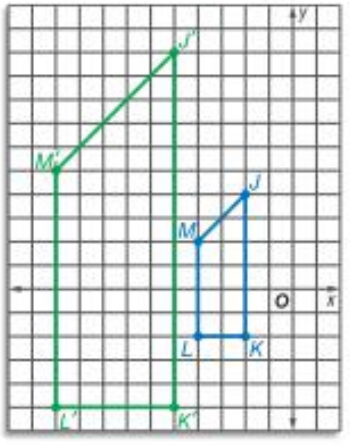
$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال



مثال 3 تغيير الأبعاد (التمدد) في المستوى الإحداثي

الشكل الرباعي $JKLM$ له الرؤوس $J(-2, 4)$، و $K(-2, -2)$، و $L(-4, -2)$، و $M(-4, 2)$. مثّل صورة الشكل $JKLM$ بيانيًا بعد تغيير الأبعاد (التمدد) المتمركزة في نقطة الأصل باستخدام معامل القياس 2.5.



اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل القياس 2.5.

$(x, y) \rightarrow (2.5x, 2.5y)$

$J(-2, 4) \rightarrow J'(-5, 10)$

$K(-2, -2) \rightarrow K'(-5, -5)$

$L(-4, -2) \rightarrow L'(-10, -5)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(-10, 5)$

مثّل الشكل $JKLM$ وصورته بيانيًا $J'K'L'M'$.

تمرين موجّه

جـــد صورة كل مضلع له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير للأبعاد مركزه نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.

3A. $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3); k = \frac{1}{3}$

3B. $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1); k = 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

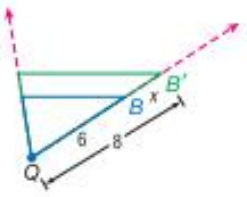
التحقق من فهمك

مثال 1 **انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل بناء على عملية تغيير أبعاد مركزها النقطة M ومعامل القياس المحدّد k.**

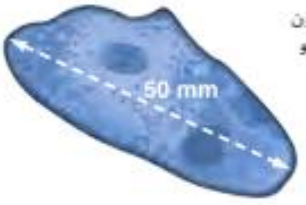
1. $k = \frac{1}{4}$

2. $k = 2$

مثال 2 3 حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من الشكل B إلى B' عبارة عن تكبير أو تصغير. ثم جـــد معامل القياس وقيمة x.



4. **الأحياء** تحت المجهر، كانت دقيق أحادي الخلية بطول200 ميكرون يبدوا بطول 50 mm. فإذا كان $1\ mm = 1000$ ميكرون. فما هو ضبط التكبير (معامل القياس) المستخدم؟ اشرح إجابتك.

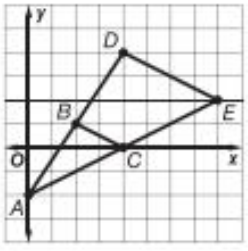


مثال 3 **مثّل صورة كل مضلع له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير الأبعاد (التمدد) التي مركزها نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.**

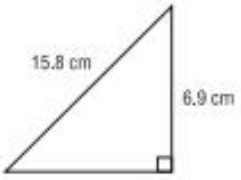
5. $W(0, 0)$, $X(6, 6)$, $Y(6, 0)$; $k = 1.5$
6. $Q(-4, 4)$, $R(-4, -4)$, $S(4, -4)$, $T(4, 4)$; $k = \frac{1}{2}$
7. $A(-1, 4)$, $B(2, 4)$, $C(3, 2)$, $D(-2, 2)$; $k = 2$
8. $J(-2, 0)$, $K(2, 4)$, $L(8, 0)$, $M(2, -4)$; $k = \frac{3}{4}$

التدريب وحل المسائل

9. المثلث $\triangle ADE$ عبارة عن تغيير أبعاد للمثلث $\triangle ABC$ في المستوى. اكتب عبارة يمكن استخدامها للتأكد أن $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



10. فكّر في الرسم التخطيطي التالي.

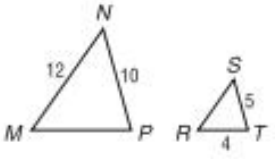


تم تغيير أبعاد المثلث بحيث يصبح محيط المثلث الجديد 82.4 cm. فما هو طول الضلع المفقود في المثلث الجديد؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

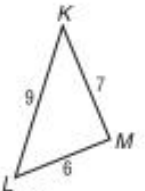
11. في الشكل التالي، المثلث MNP مشابه للمثلث RST.

أي معامل قياس استُخدم لتحويل المثلث $\triangle MNP$ إلى $\triangle RST$؟

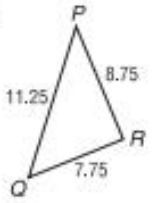


12. المثلث $\triangle KLM$ موضح أدناه.

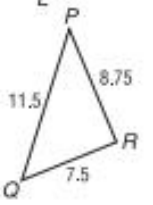
أي مما يلي يوضح المثلث $\triangle KLM$ الذي تغيرت أبعاده باستخدام معامل المقياس $\frac{5}{4}$ لإنشاء المثلث المشابه $\triangle PQR$؟



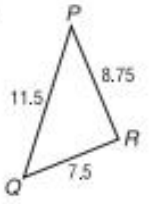
A



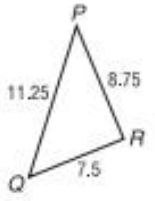
C



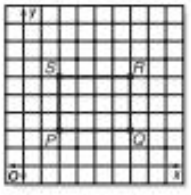
B



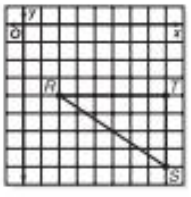
D



13. المستطيل $PQRS$ موضح فيما يلي. إذا تغيرت أبعاد المستطيل بمعامل المقياس 2، ومع جعل نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد (التمدد). جـــد الإحداثيات الجديدة للنقطة R'.



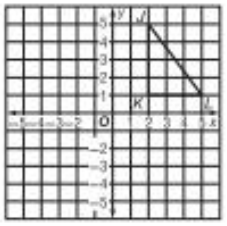
14. $\triangle RST$ موضح فيما يلي. فإذا تغيرت أبعاده باستخدام معامل القياس 2 وكانت نقطة الأصل هي مركز تغيير الأبعاد (التمدد)، فما هي إحداثيات النقطة S'؟



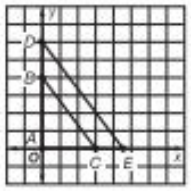
15. يحرك بدر شخصية كرتونية في المستوى الإحداثي. باستخدام تغيير الأبعاد (التمدد) بمعامل مقياس 2. فإذا كانت $A(1, 3)$ و $B(3, 4)$. و $C(2, -3)$ عبارة عن ثلاث نقاط على صورة السمكة المنتفخة قبل أن ينفخها. فما هي إحداثيات النقاط ذات الصلة D. و E. و F على صورة السمكة المنتفخة؟

16. أي نوع من التحويل يحتفظ بالاتجاهات ولا يحتفظ بالحجم؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف



17. المثلث قائم الزاوية *JKL* تغيرت أبعاده ليكوّن صورة المثلث $\triangle J'K'L'$. فإذا كان محيط المثلث $\triangle J'K'L'$ يساوي *36 cm*. فما هي مساحة الصورة؟



18. المثلث *ABC* الذي رؤوسه *A*(0, 0). و *B*(0, 4). و *C*(3, 0) عبارة عن مثلث تغيّرت أبعاده من المثلث *ADE*.

فما هو طول $\overline{DE}$ إذا كان للنقطة *D* الإحداثيات (0, 5)؟

19. المربع *JKLM* له الرؤوس *J*(1, 0). و *K*(2, 1). و*L*(3, 0). و*M*(2, −1). فإذا كان الشكل تغيرت أبعاده وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس $\sqrt{2}$. فما هو طول كل ضلع في المربع الذي تغيرت أبعاده؟

20. شبه المنحرف متساوي الساقين *LMNO* له الرؤوس *L*(−4, −3). و *M*(−4, 0). و *N*(−2, 1). و*O*(−2, −4). فإذا تغيرت أبعاد الشكل وكان المركز هو نقطة الأصل وكان معامل القياس 1.5. فما هو طول $\overline{L'M'}$ في شبه المنحرف متساوي الساقين المنسوخ؟

21. علَم ولاية كاليفورنيا موضح على الشبكة أدناه. افترض أن العلم تم تكبيره بحيث أصبحت رؤوس العلم الجديد (0, 0). و (0, 6). و (9, 6). و (9, 0). فما هي نسبة محيط العلم الأصلي إلى العلم الذي تم تكبيره؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

22. بعد تغيير الأبعاد (التمدد). المثلث $\triangle XYZ$ عبارة عن صورة للمثلث $\triangle ABC$ و $XY = \frac{5}{8}AB$. فما هو معامل القياس؟

23. أي مما يلي يمثل إحداثيات صورة $A(4, -12)$ بعد عملية تغيير الأبعاد (التمدد) يقع مركزها في نقطة الأصل ومعامل القياس يساوي 0.25؟

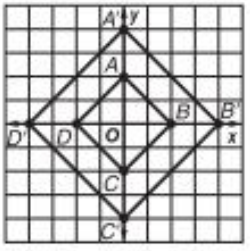
24. باستخدام أي معامل قياس r ستكون النقطة $Q(-20, 8)$ صورة من $P(-5, 2)$؟

25. بعد تغيير الأبعاد (التمدد). صورة المربع $ABCD$ هي المربع $AXYZ$. أي نقطة مما يلي هي مركز تغيير الأبعاد (التمدد)؟

26. النقطتان الطرفيتان في $\overline{AB}$ هما $A(3, -7)$ و $B(7, -12)$. صورة $\overline{AB}$ بعد عملية تغيير الأبعاد (التمدد) التي يقع مركزها في نقطة الأصل هي $\overline{A'B'}$. إحداثيات النقطة A' هي $A'(9, -21)$. فما هي إحداثيات النقطة B'؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

27. انظر إلى الأشكال على الشبكة على اليمين.



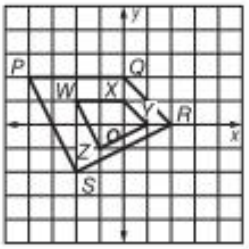
A صف عملية التحويل في الشكل الرباعي $ABCD$ التي أنتجت الشكل الرباعي $A'B'C'D'$.

B صف نتيجة دوران الشكل الرباعي $ABCD$ 90° حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

28. الإجابة الموسعة الشكل الرباعي *PQRS* عبارة عن نسخة متغيرة الأبعاد(التمدد) من الشكل الرباعي *WXYZ*.



a. هل تغيير الأبعاد (التمدد) من *PQRS* إلى *WXYZ* عبارة عن تكبير أم تصغير؟

b. أي عدد يعطي أفضل تمثيل لمعامل قياس تغيير الأبعاد (التمدد)؟

29. الجبر كم جرامًا من الماء النقي يجب أن يضيفه الصيدلي إلى 50 g من المحلول الملحي بتركيز 15% لعمل محلول يكون تركيز الملح فيه 10%؟

A 25 **C** 15

B 20 **D** 50

30. تريد بثينة نسخ لوحة في المتحف الفني. يبلغ عرض اللوحة 0.90 m وطولها 1.80 m. وتقرر استخدام معامل تصغير في تغيير الأبعاد (التمدد) بقيمة 0.25. فما حجم الورق الذي ينبغي أن تستخدمه؟

F 10 cm × 20 cm **H** 20 cm × 40 cm

G 15 cm × 30 cm **J** 25 cm × 50 cm

31. SAT/ACT لجميع قيم x، $(x - 7)^2 =$؟

A $x^2 - 49$ **D** $x^2 - 14x + 49$

B $x^2 + 49$ **E** $x^2 + 14x - 49$

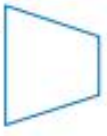
C $x^2 - 14x - 49$

مراجعة شاملة

اذكر هل الشكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها. (الدرس 5-4)

32.

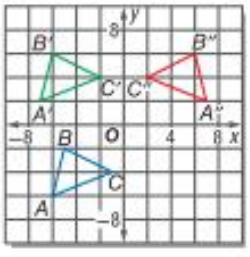
33 .



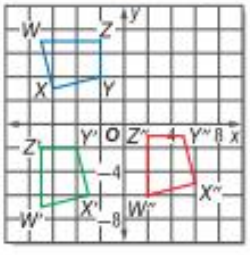
34.

صف التحويلات المجموعة لرسم كل شكل. (الدرس 4-4)

35.



36.



37. الطوابير يوزّع عدد الطوابير في مدرسة الشارقة الثانوية كل عام توزيعًا طبيعيًا باستخدام المتوسط 12.4 والانحراف المعياري 1.6.

a. ما احتمال الزيادة بمقدار 10 طوابير في عام معين؟

b. إذا كانت المدرسة مؤسسة منذ 30 عامًا، ففي كم عامٍ كانت تتراوح أعداد الطوابير ما بين 11 إلى 13 طابورًا؟

مراجعة المهارات

جـــد قيمة x إلى أقرب جزء من عشرة.

38. $58.9 = 2x$ **39.** $\frac{108.6}{\pi} = x$ **40.** $228.4 = \pi x$ **41.** $\frac{336.4}{x} = \pi$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 4-1)

- الانعكاس هو تحويل يمثل عكس شكلٍ بالنسبة لنقطةٍ أو مستقيمٍ أو مستوى إحداثي.

الإزاحة (الدرس 4-2)

- الإزاحة هي تحويل يحرّك كل نقاط شكل ما للمسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه.
- الإزاحة تطابق كل نقطة بالنقطة المنسوخة منها بطول المتجه.

الدوران (الدرس 4-3)

- يلف الدوران كل نقطة في الشكل من خلال الزاوية ذاتها حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات (الدرس 4-4)

- يمكن تمثيل الإزاحة في صورة تركيب من تركيب الانعكاسات في المستقيمات المتوازية ويمكن تمثيل الدوران في صورة تركيب من تركيب الانعكاس في المستقيمات المتقاطعة.

التناظر (الدرس 4-5)

- مستقيم التناظر في الشكل هو المستقيم الذي يمكن طي الشكل عنده مناصفة بحيث يتطابق النصفان تطابقًا دقيقًا.
- يُطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم ترتيب التناظر.
- مقدار التناظر هو أصغر زاوية يمكن دوران الشكل من خلالها بحيث ينعكس على نفسه.

تغيير الأبعاد(التمدّد) (الدرس 4-6)

- تغيير الأبعاد/التمدّد هو تكبير الأشكال أو تصغيرها نسبيًا.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

المفردات الأساسية

زاوية الدوران angle of rotation

التناظر المحوري axis symmetry

مركز الدوران center of rotation

تركيب التحويلات composition oftransformations

الانعكاس الانزلاقي glide reflection

خط الانعكاس line of reflection

محور التناظر line of symmetry

تناظر محوري line symmetry

مقدار التناظر magnitude of symmetry

ترتيب التناظر order of symmetry

التناظر في المستوى plane symmetry

التناظر الدوراني rotational symmetry

التناظر symmetry

متّجه الإزاحة translation vector

مراجعة المصطلحات

اختر أفضل مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. عند تطبيق تحويل على الشكل، ثم تطبيق تحويل آخر على صورته، فهذا يسمى (تركيب تحويلات، ترتيب عمليات التناظر).
2. إذا تم طي الشكل بطول خط مستقيم وتطابق النصفان تطابقًا تامًا، فإن محور الطي يسمى (محور الانعكاس، محور التناظر).
3. (تغيير الأبعاد/التمدّد، الانعكاس الانزلاقي) يكبّر الشكل أو يصغّره نسبيًا.
4. يطلَق على عدد مرات انعكاس الشكل على نفسه أثناء الدوران من 0° إلى 360° اسم (مقدار التناظر، ترتيب التناظر).
5. A (خط الانعكاس، متجه الإزاحة) هو المسافة ذاتها من كل نقطة في الشكل إلى ما يقابلها في الصورة.
6. يكون للشكل (مركز دوران، تناظر) إذا كان يمكن انعكاسه على نفسه عن طريق حركة ثابتة.
7. يتضمن الانعكاس الانزلاقي كلاً من الانعكاس و (الدوران، الإزاحة).
8. لدوران نقطة بمقدار (90°، 180°) عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ثم بدّل بين الإحداثيين الأفقي x والرأسي y.
9. (المتجه، الانعكاس) هو أحد تحويلات التطابق.
10. يكون للشكل (تناظر في المستوى، تناظر دوراني) إذا كان يمكن أن ينعكس الشكل على نفسه عن طريق الدوران بين 0° و 360° حول مركز الشكل.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

4-1 الانعكاس

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق الانعكاس المعطى.

11. المستطيل $ABCD$ له الرؤوس $A(2, -4)$ و $B(4, -6)$ و $C(7, -3)$ و $D(5, -1)$ على المحور x.

12. المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(-1, 1)$ و $Y(-1, -2)$ و $Z(3, -3)$ في المحور y

13. الشكل الرباعي $QRST$ الذي رؤوسه $Q(-1, -4)$ و $R(-1, 2)$ و $S(2, 2)$ و $T(0, -4)$ في المستقيم $y = x$

14. **الفن** تصنع بدرية النحت المكون من قطعتين الموضح لحديقة نصب تذكاري. في تصميمها. إحدى قطع النحت عبارة عن انعكاس للقطعة الأخرى. وذلك لتوضع بجانب الممر الذي قد يوجد بطول خط الانعكاس. انسخ الأشكال وارسم خط الانعكاس.

مثال 1

مثّل بيانيًا المثلث JKL الذي رؤوسه $J(1, 4)$ و $K(2, 1)$ و $L(6, 2)$ وصورته المنعكسة على المحور x.

اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1.

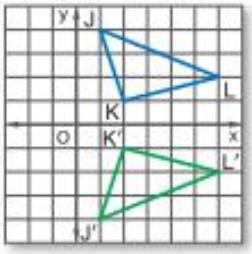
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$

$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$

$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$

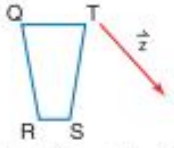
مثّل بيانيًا المثلث JKL وصورته $J'K'L'$.



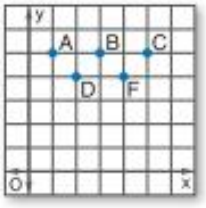
4-2 الإزاحة

15. مثّل بيانيًا المثلث ABC الذي رؤوسه $A(0, -1)$ و $B(2, 0)$ و $C(3, -3)$ وصورته بطول $\langle -5, 4 \rangle$.

16. انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.



17. **الأداء** خمس فنانين موجودون على المسرح كما هو موضح. يتحرك كل من B و F و C بطول $\langle 0, -2 \rangle$. بينما يتحرك A بطول $\langle -5, 1 \rangle$. ارسم الأوضاع النهائية.



مثال 2

مثّل بيانيًا المثلث XYZ الذي رؤوسه $X(2, 2)$ و $Y(5, 5)$ و $Z(5, 3)$ وصورته بطول $\langle -3, -5 \rangle$.

يشير المتجه إلى إزاحةٍ لمسافة 3 وحدات يسارًا و 5 وحدات إلى الأسفل.

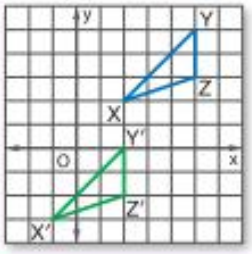
$(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 5)$

$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$

$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$

$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$

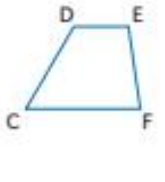
مثّل بيانيًا المثلث XYZ وصورته المثلث $X'Y'Z'$.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-3 الدوران

18. انسخ شبه المنحرف $CDEF$ والنقطة P. ثم استخدم المنقلة والمسطرة لرسم دوران بمقدار $50°$ للشكل $CDEF$ حول النقطة P.



مثّل بيانيًا كل شكل وصورته بعد الدوران المحدد حول نقطة الأصل.

19. المثلث MNO الذي رؤوسه: $O(1, 0)$، $N(0, -2)$، $M(-2, 2)$ $180°$

20. المثلث DGF الذي رؤوسه: $F(1, 3)$، $G(2, 3)$، $D(1, 2)$ $90°$

يوضح كل شكل الصورة الأصلية ونسختها بعد الدوران حول النقطة P. انسخ كل شكل، وحدد موقع النقطة P، وجـــد زاوية الدوران.

21.

22.

مثال 3

المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 0)$ و $B(-3, 4)$ و $C(-1, 1)$. مثّل بيانيًا المثلث ABC وصورته بعد الدوران $270°$ حول نقطة الأصل.

تتمثل إحدى طرق حل هذه المسألة في الجمع بين الدورانين بمقدار $180°$ والدوران بمقدار $90°$. وضرب كل من الإحداثي x والإحداثي y لكل رأس في -1.

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$

$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$

$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$

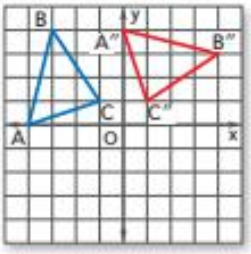
اضرب الإحداثي الرأسي y لكل رأس في -1 وبدّل.

$(-x, -y) \rightarrow (y, -x)$

$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$

$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$

$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$



مثّل بيانيًا المثلث ABC وصورته $\triangle A''B''C''$.

4-4 تركيب التحويلات

مثّل بيانيًا كل شكل له الرؤوس المعطاة وصورته بعد التحويل المشار إليه.

23. $\overline{CD}$: $C(3, 2)$ و $D(1, 4)$
الانعكاس: في $y = x$
الدوران بمقدار $270°$ حول نقطة الأصل.

24. $\overline{GH}$: $G(-2, -3)$ و $H(1, 1)$
الإزاحة: بطول $\langle 4, 2 \rangle$
الانعكاس: في المحور الأفقي x

25. الأنماط يبتكر جاسم نمطًا لجعله إطارًا لملصق باستخدام رسم مطبوع. اذكر تركيب التحويل الذي استخدمه لابتكار النمط التالي.

مثال 4

النقطتان الطرفيتان للقطعة المستقيمة $\overline{RS}$ تساويان $R(4, 3)$ و $S(1, 1)$. مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها بعد الإزاحة بطول $\langle -1, -5 \rangle$ والدوران بمقدار $180°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 الإزاحة بطول $\langle -1, -5 \rangle$

$(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 1)$

$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$

$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$

الخطوة 2 الدوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

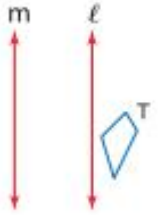
$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$

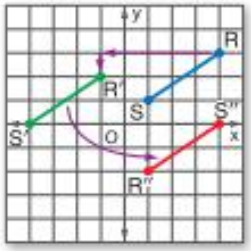
$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

26. انسخ واعكس الشكل T في المستقيم ℓ ثم المستقيم m. ثم اذكر تحويلاً واحدًا يعكس المستقيم T على المستقيم T''.



الخطوة 3 مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.



4-5 التناظر

اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا محوريًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، فانسخ الشكل وارسم جميع مستقيمات التناظر واذكر عددها.

27.

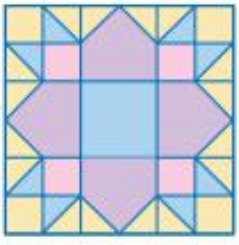
28.

اذكر هل كل شكل يبدو أن به تناظرًا دورانيًا أم لا. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة بنعم، انسخ الشكل وحدد مركز التناظر واذكر ترتيبه ومقداره.

29.

30.

31. النسج تبتكر حصة نمطًا لكوفية تنسجها لصديقتها. كم عدد مستقيمات التناظر الموجودة في النمط؟



مثال 5

اذكر هل كل شكل له تناظر في *المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم كلاهما أم *ليس أيًا منهما*.

a.

لمصباح الإضاءة تناظر في المستوى الإحداثي وتناظر محوري.

b.

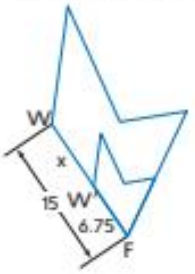
المنشور له تناظر في المستوى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-6 عمليات تغيير الأبعاد(التمدد)

32. انسخ الشكل والنقطة S.
ثم استخدم المسطرة لرسم صورة الشكل وفق المركز S ومعامل المقياس $r = 1.25$.

33. حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من الشكل W إلى الشكل W' عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم جـــد معامل المقياس لتغيير الأبعاد والنقطة x.



34. النوادي يستخدم أعضاء نادي الرياضيات جهاز عرض الصور الشفافة لعمل ملصق. إذا كان عرض الصورة الأصلية 15 cm. وعرضها على الملصق 1.2 cm. فما هو معامل مقياس للتكبير؟

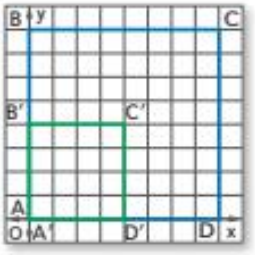
مثال 6

المربع $ABCD$ له الرؤوس $A(0, 0)$ و $B(0, 8)$ و $C(8, 8)$ و $D(8, 0)$. جـــد صورة المربع $ABCD$ بعد تغيير الأبعاد وفق المركز عند نقطة الأصل ومعامل المقياس 0.5.

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل المقياس 0.5.

(x, y)	→	$(0.5x, 0.5y)$
$A(0, 0)$	→	$A'(0, 0)$
$B(0, 8)$	→	$B'(0, 4)$
$C(8, 8)$	→	$C'(4, 4)$
$D(8, 0)$	→	$D'(4, 0)$

مثل بيانيا الشكل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$.

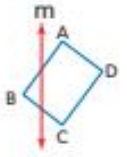


McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

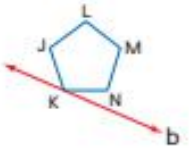
4 تدريب على الاختبار

انسخ الشكل وخط الانعكاس المعطى. ثم ارسم الصورة المنعكسة بالنسبة لهذا المستقيم باستخدام مسطرة.

1.



2.



3. **المشروعات** يريد جمال تكبير الصورة التالية إلى 10 cm إلى 15 cm من أجل مشروع في المدرسة. إذا كانت ماكينة التصوير في المدرسة لا يمكن أن تكبر إلا حتى 150% في النسب المئوية للعدد الكلي. جـــد نسبتين مئويتين لأعداد كلية يمكن تكبير الصورة بهما وجعلها قريبة من 10 cm إلى 15 cm أو أقل.

انسخ الشكل والنقطة M. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه M بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

4. $r = 1.5$

5. $r = \frac{1}{3}$

6. **الحدائق** في إحدى حدائق التنزه، تركب حليمة إحدى ألعاب الملاهي التي تجعل الراكب ينزلق جهة اليمين. ثم تدور عكس اتجاه عقارب الساعة حول مركزها بمقدار 60° كل ثانيتين. كم عدد الثواني التي تمر قبل أن ترجع حليمة إلى موقع البداية؟

اذكر هل كل شكل له تناظر في *المستوى الإحداثي* أم تناظر محوري أم *كليهما* أم *ليس أيًا منهما*.

7.

8.

مثّل بيانيًا كل شكلٍ وصورته وفق التحويل المعطى.

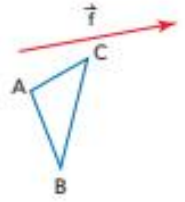
9. $FGHJ$ □ له الرؤوس $F(-1, -1)$، و $G(-2, -4)$ و $H(1, -4)$ و $J(2, -1)$ في المحور x

10. المثلث ABC △ له الرؤوس $A(0, -1)$، $B(2, 0)$، $C(3, -3)$ $\langle -5, 4 \rangle$

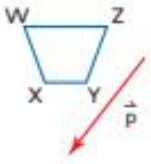
11. الشكل الرباعي $WXYZ$ له الرؤوس $W(2, 3)$، $X(1, 1)$، $Y(3, 0)$ حول نقطة الأصل $Z(5, 2)$, 180°

انسخ الشكل ومتجه الإزاحة المعطى. ثم ارسم إزاحة الشكل على طول متجه الإزاحة.

12.



13.



14. **الفنون** موضح فيما يلي تصور أحد الفنانين للصورة التي كان عليها وهو موقع ستونهنج، موقع أثري في إنجلترا. قبل سقوط الأحجار أو إزالتها، ما ترتيب التناظر ومقداره للحلقة الخارجية؟

15. **الاختيار** من متعدد ما التحويل أو تركيب التحويلات التي يمثلها الشكل التالي؟

A تغيير الأبعاد
B انعكاس انزلاقي
C دوران
D إزاحة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل بترتيب عكسي

في معظم المسائل، تتوفر مجموعة من الشروط والمعطيات ويجب عليك إيجاد النتيجة النهائية. ولكن بعض المسائل تعطيك النتيجة النهائية وتطلب منك إيجاد شيء قد حدث من قبل في العملية. ولحل المسائل من هذا النوع، يجب عليك الحل بترتيب عكسي.

إستراتيجيات الحل بترتيب عكسي

الخطوة 1

ابحث عن الكلمات الأساسية التي تشير إلى ما ستحتاج إليه للحل بترتيب عكسي لحل المسألة.

نموذج من الكلمات الأساسية:

- ماذا كانت **نقطة الأصل**...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل**...؟
- أين كان **البدء** أو **البداية**...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة لحلها.

- أدرج تسلسل الخطوات من البداية إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ بالنتيجة النهائية. وتتبع الخطوات بترتيب عكسي.
- "تراجع" عن كل خطوة باستخدام المعكوسات للرجوع إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من حلّك إذا سمح الوقت.

- تأكد من منطقية إجابتك.
- ابدأ بإجابتك واتبع تقدم الخطوات في نص المسألة لترى هل حصلت على النتيجة ذاتها أم لا.

مثال على الاختبار المعياري

حُـلّ المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

يستخدم حمادة برنامجًا هندسيًا ليجربه في التحويلات على الشبكة الإحداثية. فبدأ بنقطة وأزاحها بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى و 8 وحدات جهة اليسار. ثم عكس الصورة في المحور x. وأخيرًا غيّر أبعاد هذه الصورة الجديدة وفق معامل المقياس 0.5 وفيما يتعلق بنقطة الأصل ليصل إلى $(-4, -1)$. ما هي الإحداثيات الأصلية للنقطة؟

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة صحيحة ولكن التفسير كامل.	1
لن يتم منح درجات: إما أن الإجابة غير مكتوبة أو غير منطقية.	0

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ نص المسألة جيدًا. لديك سلسلة من التحويلات لنقطة على الشبكة الإحداثية. وتعرف إحداثيات الصورة النهائية ومطلوب منك إيجاد الإحداثيات الأصلية. تراجع عن كل تحويل للحل بترتيب عكسي وحل المسألة.

مثال على إجابة من نقطتين:

النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تغيير أبعاد ← النتيجة النهائية

ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحل بترتيب عكسي.

غير الأبعاد بمقدار 2 وتراجع عن تغيير الأبعاد بمقدار 0.5.

$(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$

اقلب الانعكاس عبر المحور x للتراجع عن الانعكاس:

$(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$

أزح بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل و 8 وحدات جهة اليمين للتراجع عن الإزاحة:

$(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$

الإحداثيات الأصلية للنقطة هي (6, 4).

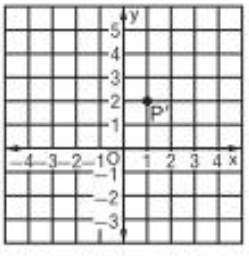
تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والتبرير. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

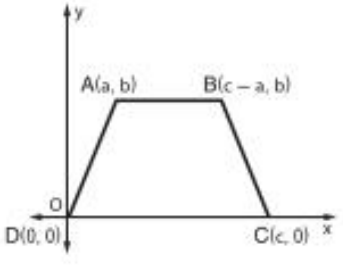
حل كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. استقر برغوث على الشبكة الإحداثية. قفز البرغوث عبر المحور x ثم عبر المحور y ليشكل انعكاسين متتاليين. ثم انتقل 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأسفل. إذا كان المكان النهائي للبرغوث عند (−1, 4). فما هي النقطة التي استقر عليها في البداية؟

2. توضح الشبكة الإحداثية التالية الصورة النهائية عندما تم دوران صورة بزاوية 90° باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. وتم تغيير أبعادها وفق معامل المقياس 2. وانتقلت 7 وحدات جهة اليمين. فما هي الإحداثيات الأصلية؟



3. الشكل $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.



أي مما يلي يمثل إحداثيات النقطتين الطرفيتين لوسيط $ABCD$؟

A $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

B $\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

C $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

D $\left(\frac{c}{2}, b\right)$

4. إذا كان قياس زاوية داخلية في مضلع منتظم يساوي 108. فما نوع المضلع؟

F ثماني أضلاع

G سداسي أضلاع

H خماسي أضلاع

J مثلث

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الفصل 5

الدوال المثلثية

Chapter 5 Trigonometric Functions from Algebra 2 Chapter 12 © 2014 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والنشر © لمجموعة ماكجرو هيل التعليمية

.. السابق

- لقد مثلت الدوال ب ان وحللتها.

.. الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادر ا على:
  - إ جاد ق م الدوال المثلث ة
  - حل المسائل باستخدام حساب مثلثات المثلث القائم
  - حل المثلثات باستخدام قانون sine وقانون cosine
  - تمث ل الدوال المثل ث ة ب ان ا

.. لماذا؟

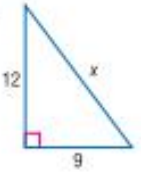
- **الرياضات المائية** لمعرفة الدوال المثلث ة تطب قات عمل ة ف الر اضات المائ ة. مكنك مثلا استخدام حساب مثلثات المثلث القائم ف إ جاد المسافة الت قطعها قارب الكا اك ف النهر. وإذا كنت ماهر ا ف الروا ا وق اساتها فستعهم بشكل أفضل مدى روعة أن تتمكن من عمل دورة 540° على لوح التزلج على الماء.

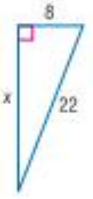
الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

جد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

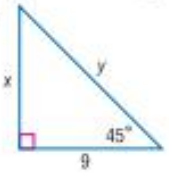
1.

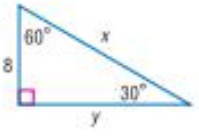
2. 

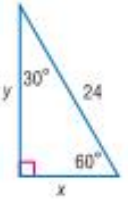
3. 

4. لدى سهى قطعة مستطيلة الشكل خلف منزلها. في اليوم 12 m في 15 m. تريد سهى أن تضع ممشى صخريا على قطر المستطيل. كم سيكون طول الممشى؟ قرب إلى أقرب عشرة من المتر.

جد القياس المجهول، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.

5. 

6. 

7. 

8. مشى سلمى على الحائط بزاوية 45°. إذا كان طول السلم 12 m، فما الارتفاع الذي يصل إليه السلم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

جد القياس المجهول في المثلث القائم.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$18^2 = a^2 + 5^2$ عوّض عن c بـ 18 وعن b بـ 5.

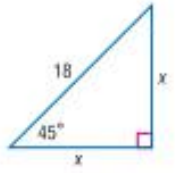
$324 = a^2 + 25$ بسّط.

$299 = a^2$ اطرح 25 من الطرفين.

$17.3 \approx a$ أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

مثال 2

جد القياسات المجهولة، واكتب جميع الجذور في أبسط صورة.



$x^2 + x^2 = 18^2$ نظرية فيثاغورس

$2x^2 = 18^2$ جمّع الحدود المتشابهة.

$2x^2 = 324$ بسّط.

$x^2 = 162$ اقسم كل طرف على 2.

$x = \sqrt{162}$ أخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

$x = 9\sqrt{2}$ بسّط.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

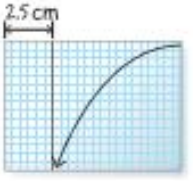
البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال المثلثية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 5 عن الدوال المثلثية. وابدأ بأربع ورقات من ورق التبطين الأبيض.

1 **ثنِ** الأوراق مع الوقوس 2.5 cm من أسفل.



2 **اطوِ** الأوراق بشكل مائل.

3 **ثنِ** الأوراق بالطول لعمل الكتاب.

4 **اكتب** على الحافة الدوال المثلثية.

المفردات الجديدة

trigonometry	حساب المثلثات
sine	جيب الزاوية
cosine	cosine
tangent	ظل الزاوية
cosecant	قاطع التمام
secant	القاطع
cotangent	ظل التمام
angle of elevation	زاوية الارتفاع
angle of depression	زاوية الانخفاض
standard position	الوضع القياسي
radian	راديان
Law of Sines	قانون sine
ambiguous case	حالة مبهمة
Law of Cosines	قانون cosine
unit circle	دائرة الوحدة
circular function	دالة دائرية
periodic function	دالة دورية
cycle	دورة
period	فترة
amplitude	سعة
frequency	التردد

مراجعة المصطلحات

الدالة علاقة تقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

الدالة العكسية تكون الدالتان f و g متعاكستين إذا وفقط إذا كان تركيبهما عبارة عن الدالة المحايدة.

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والنشر

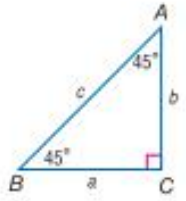
5-1 مختبر ورقة البيانات
استكشاف المثلثات القائمة الخاصة

يمكنك استخدام ورقة بيانات في استكشاف قياسات أضلاع المثلثات القائمة الخاصة.

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في التبريرات المتكررة والتعبير عن ذلك.

النشاط مثلث 45°-45°-90°

قياس الساقين a و b في المثلث ذي القياس 45°-45°-90°، متساويان. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟



الخطوة 1 أدخل الصيغ الموضحة في ورقة البيانات. تستخدم الصيغة نظرية فيثاغورس في صورة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

=SQRT(A2^2+B2^2) =B2/A2 =B2/C2 =A2/C2

45-45-90 triangles

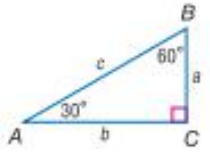
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

الخطوة 2 افحص النتائج. لأن المثلثات ذات القياس 45°-45°-90° تشترك في قياسات الزوايا نفسها، فهي جميعًا تكون متشابهة. وتكون جميع نسب الأضلاع بهذه المثلثات متشابهة. نسب الضلع b إلى الضلع a تكون 1. نسب الضلع b إلى الضلع c والضلع a إلى الضلع c تكون 0.71 تقريبًا.

النموذج والتحليل

استخدم ورقة البيانات أدناه للمثلثات 30°-60°-90°.



30-60-90 triangles

◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

1. انسخ ورقة البيانات أعلاه وأكملها.
2. صف العلاقة بين المثلثات 30°-60°-90° مستخدمًا الأبعاد الموضحة.
3. ما الأنماط التي تلاحظها في نسب قياسات الأضلاع في تلك المثلثات؟

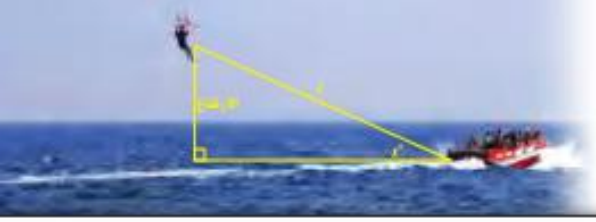
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

5-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

السابق
- استخدمت نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة.

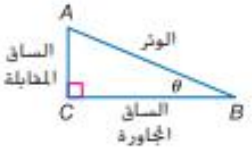
الحالي
1. إيجاد قيم النسب المثلثية.
2. استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع المثلثات القائمة وقياسات زواياها.

لماذا؟
- ارتفاع الشخص الذي يمارس التزلج المائي بالمظلة يعتمد على حبل السحب ℓ والزاوية التي يصنعها الحبل مع محور "x الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، فإنه يمكنك استخدام نسبة لإيجاد ارتفاع الشخص الذي يمارس هذا النشاط.



1 النسب المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات هو دراسة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث القائم. وتقارن **النسبة المثلثية** بين أطوال الأضلاع في المثلث القائم. وتكون **للدالة المثلثية** قاعدة تعطيها نسبة مثلثية.

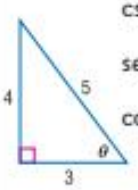


يُستخدم الحرف الإغريقي *theta* θ غالبًا في تمثيل قياس زاوية حادة في مثلث قائم. ويُستخدم كلٌ من الوتر، والساق المقابلة θ، والساق المجاورة θ في تعريف النسب المثلثية الست.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية في المثلثات القائمة

الشرح إذا كان θ هو قياس زاوية حادة في مثلث قائم، فإذًا النسب المثلثية التالية المشتملة على الضلع المقابل *opp*، والضلع المجاور *adj*، والوتر *hyp*، صحيحة.

الرموز



$\sin$ (sine) $\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\quad \csc$ (قاطع التمام) $\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$

$\cos$ (cosine) $\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\quad \sec$ (القاطع) $\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$

$\tan$ (ظل الزاوية) $\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ $\quad \cot$ (ظل التمام) $\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

أمثلة

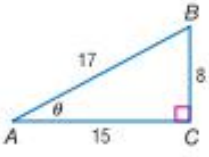
$\sin \theta = \frac{4}{5}$ $\quad \cos \theta = \frac{3}{5}$ $\quad \tan \theta = \frac{4}{3}$

$\csc \theta = \frac{5}{4}$ $\quad \sec \theta = \frac{5}{3}$ $\quad \cot \theta = \frac{3}{4}$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية

جـــد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

الساق المقابلة θ: CB = 8 الساق المجاورة θ: AC = 15 الوتر: AB = 17



$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17}$ $\quad \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{15}{17}$ $\quad \tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{8}{15}$

$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{17}{8}$ $\quad \sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{17}{15}$ $\quad \cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{15}{8}$

تمرين موجّه

1. جـــد قيم النسب المثلثية الست للزاوية *B*.

المفردات الجديدة

حساب المثلثات	trigonometry
النسبة المثلثية	trigonometric ratio
دالة مثلثية	trigonometric function
	sine
	cosine cosine
ظل الزاوية	tangent
قاطع التمام	cosecant
القاطع	secant
ظل التمام	cotangent
الدوال العكسية	reciprocal functions
معكوس	sine inverse sine
معكوس	cosine inverse cosine
معكوس ظل الزاوية	inverse tangent
زاوية الارتفاع	angle of elevation
زاوية الانخفاض	angle of depression

ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

لاحظ أن نسب cosecant و secant و cotangent معكوسات لنسب sine وcosine و tangent على التوالي. ويُطلق عليها اسم **النسب المثلثية العكسية**.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مجال أي دالة مثلثية يكون مجموعة كل الزوايا الحادة θ في المثلث القائم. إذًا، تعتمد الدوال المثلثية في المثلث القائم على قياسات الزوايا الحادة فقط. وليس أطوال الأضلاع.

نصيحة دراسية

احفظ النسب المثلثية تمد SOH-CAH-TOA وسيلة لتذكر الحرف الأول من كل كلمة في النسب تعويضًا عن sine و cosine و tangent.

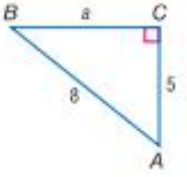
$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$، فجـــد القيمة الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ B.



الخطوة 1 ارسم مثلثًا قائمًا مع تسمية زاوية حادة واحدة B.

قم بتسمية الضلع المقابل 5 والوتر 8.

الخطوة 2 استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + 5^2 = 8^2$	$c = +8$ و $b = 5$
$a^2 + 25 = 64$	بسّط.
$a^2 = 39$	اطرح 25 من كل طرف.
$a = \pm\sqrt{39}$	خذ الجذر التربيعي من كل طرف.
$a = \sqrt{39}$	الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

الخطوة 3 جـــد القيم الأخرى.

بما أن $\sin B = \frac{5}{8}$، فإن $\csc B = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ أو $\frac{8}{5}$.

$\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ $\qquad$ $\sec B = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{8}{\sqrt{39}} = \frac{8\sqrt{39}}{39}$

$\tan B = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{5}{\sqrt{39}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$ $\qquad$ $\cot B = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\sqrt{39}}{5}$

تمرين موجّه

2. إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$، فجـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية المتبقية لـ B.

قراءة في الرياضيات

تسمية المثلثات

في جميع أنحاء هذه الوحدة، سيُستخدم حرف كبير لتمثيل كل من رأس المثلث وقياس الزاوية عند هذا الرأس. ويُستخدم نفس الحرف ولكن بالصورة الصغيرة له لتمثيل الضلعين المتقابلين لهذه الزاوية وطول الأضلاع.

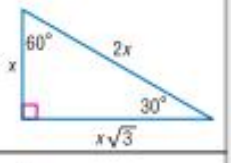
الزوايا التي تكون قياساتها 30° و45° و60° تحدث كثيرًا في حساب المثلثات.

المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

30°-60°-90°

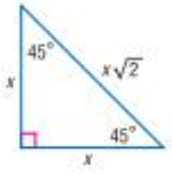
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan 60° = \sqrt{3}$



45°-45°-90°

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\tan 45° = 1$

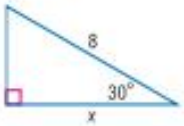


McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2 استخدام النسب المثلثية يمكنك استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة وقياسات الزوايا الناقصة في المثلثات القائمة.

مثال 3 إيجاد طول الضلع الناقص

استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



طول الوتر هو 8. القياس الناقص هو الضلع المجاور للزاوية 30°. استخدم دالة cosine لإيجاد x.

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ دالة cosine

$\cos 30° = \frac{x}{8}$ عوّض عن θ بـ 30°، وعن adj بـ x، وعن hyp بـ 8.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ اضرب كل طرف في 8.

$6.9 \approx x$ استخدم آلة حاسبة.

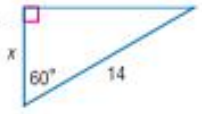
نصيحة دراسية

اختر دالة

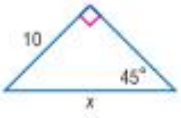
إذا كان طول الوتر مجهولاً، فينبغي إذا استخدام إما دالة sine أو cosine لإيجاد القياس الناقص.

تمرين موجّه

3A.



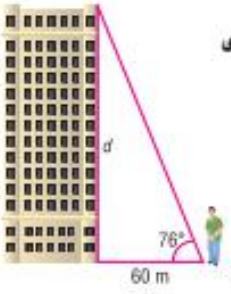
3B.



يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع الناقصة في المثلثات التي ليس لها زوايا بقياس 30° أو 45° أو 60°

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع الناقص

المباني لحساب ارتفاع مبنى، سار مازن مسافة 60 m من قاعدة المبنى واستخدم أداة الميمال لقياس الزاوية من عينيه إلى قمة المبنى. إذا كان مستوى عينيه هو مترين، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



الزاوية المقيسة هي 76°. الضلع المجاور للزاوية يبلغ 60 m. القياس الناقص هو الضلع المقابل للزاوية. استخدم دالة Tangent لإيجاد d.

$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$ دالة Tangent

$\tan 76° = \frac{d}{60}$ عوّض عن θ بـ 76°، وعن opp بـ d، وعن adj بـ 60.

$60 \tan 76° = d$ اضرب كل طرف في 60.

$240 \approx d$ استخدم آلة حاسبة للتبسيط: 60 TAN 76 ENTER

لأن قياس الميمال بلغ مترين أعلى مستوى الأرض. فارتفاع المبنى هو 242 m تقريبًا.

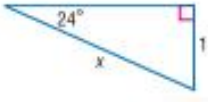
الربط بالحياة اليومية

تقيس أدوات الميمال زاوية المجال المغناطيسي للأرض وكذلك الانحدار والتمايل للمركبات والمراكب الشراعية والطائرات. وهي تُستخدم أيضًا في رصد البراكين وحفر الآبار.

المصدر: مجلة العلوم

تمرين موجّه

4. استخدم دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

عند حل معادلات مثل $3x = -27$، أنت تستخدم معكوس الضرب لإيجاد x. يمكنك أيضًا إيجاد قياسات الزوايا باستخدام معكوس sine أو cosine أو tangent.

المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و sine زاوية A هو x، فإن **معكوس sine** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\sin A = x$، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و cosine A هو x، فإن **معكوس cosine** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\cos A = x$، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\cos A = \sqrt{22} \rightarrow \cos^{-1} \sqrt{22} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

الشرح إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و tangent لـ A هو x، فإن **معكوس الظل** لـ x هو قياس $\angle A$.

الرموز إذا كان $\tan A = x$، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

مثال $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

قراءة في الرياضيات

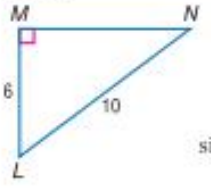
الدقة التعبير $\sin^{-1} x$ يُقرأ معكوس sine لـ x ويُفسر على أنه الزاوية التي sine لها هو x. انتبه ولا تخلط بين هذا الترميز والترميز الخاص بالأسس السالبة؛ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. بدلاً من ذلك، هذا الترميز يُشبه الترميز الخاص بمعكوس الدالة، $f^{-1}(x)$.

إذا كنت تعرف sine أو cosine أو tangent الخاص بزاوية حادة، فإنه يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية. وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

مثال 5 إيجاد قياس الزاوية الناقصة

جـــد قياس كل زاوية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

a. $\angle N$



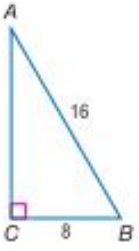
أنت تعلم قياس الضلع المقابل لـ $\angle N$ وقياس الوتر. استخدم دالة sine.

$\sin N = \frac{6}{10}$ — $\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$ — معكوس sine

$36.9° \approx m\angle N$ — استخدم آلة حاسبة.

b. $\angle B$



استخدم دالة cosine.

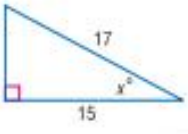
$\cos B = \frac{8}{16}$ — $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$ — معكوس cosine

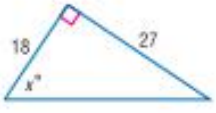
$60° = m\angle B$ — استخدم آلة حاسبة.

تمرين موجّه **جـــد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5A.



5B.



محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

نصيحة دراسية

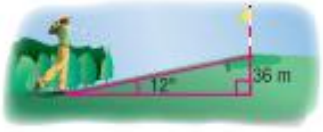
زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض متطابقتان بما أنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لمستقيمات متوازية.

في الشكل المبين على اليسار. الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية السباح ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الارتفاع**. الزاوية التي يصنعها مستقيم رؤية حارس الإنقاذ ومستقيم موازٍ للأفق تُسمى **زاوية الانخفاض**.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض

a. الجولف يقف لاعب الجولف عند قاعدة الكرة وينظر لأعلى إلى العشب الذي يكسو التل. إذا كانت القاعدة أدنى من العشب 36 m وزاوية الارتفاع من القاعدة إلى الحفرة تساوي 12°، فجد المسافة من القاعدة إلى الحفرة.



اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل لزاوية 12°) والمسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة (الوتر).

$\sin 12^\circ = \frac{36}{x}$ — $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

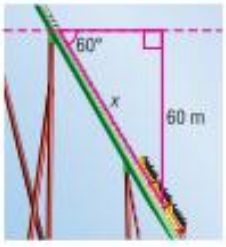
$x \sin 12^\circ = 36$ — اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{36}{\sin 12^\circ}$ — اقسم كل طرف على $\sin 12^\circ$.

$x \approx 173.2$ — استخدم آلة حاسبة.

إذًا، المسافة من قاعدة الكرة إلى الحفرة هي حوالي 173.2 m.

b. قطار الملاهي تل قطار الملاهي له *زاوية هبوط*، أو زاوية انخفاض، تساوي 60°. وهبوط رأسي يبلغ 60 m. قدّر طول التل.



اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الهبوط الرأسي (الضلع المقابل لزاوية 60°) وطول التل (الوتر).

$\sin 60^\circ = \frac{60}{x}$ — $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$x \sin 60^\circ = 60$ — اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{60}{\sin 60^\circ}$ — اقسم كل طرف على $\sin 60^\circ$.

$x \approx 70$ — استخدم آلة حاسبة.

إذًا، طول التل هو حوالي 70 m.

الربط بالحياة اليومية

أكثر قطارات الملاهي انحدارًا في العالم لها زوايا هبوط تقترب من 90°.

المصدر: التيت رولر كوستر

تمرين موجّه

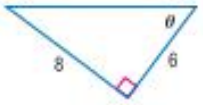
6A. النقل منحدر مُستخدَم لتفريغ شاحنة منقولات له زاوية ارتفاع 32°. إذا كانت قمة المنحدر ترتفع عن الأرض 1.2 m. فقدّر طول المنحدر.

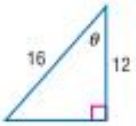
6B. السلالم إذا وُضع سلم طوله 14 m في منزل بزاوية ارتفاع 72°. فما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

التحقق من فهمك

مثال 1 جـــد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

1. 

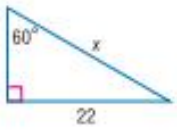
2. 

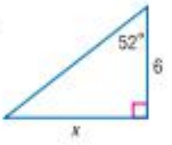
مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ حادة. جـــد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

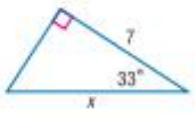
3. $\cos A = \frac{4}{7}$

4. $\tan A = \frac{20}{21}$

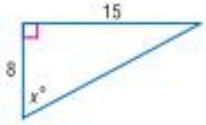
المثالان 3 و 4 استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

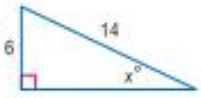
5. 

6. 

7. 

مثال 5 جـــد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

8. 

9. 

10.

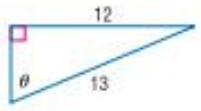
مثال 6

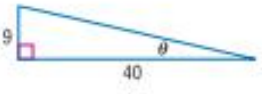
11. **التبرير المنطقي** وجد عمر شجرتين أمام بعضهما مباشرة على كل جانب من الوادي. عندما تحرك مسافة 100 m من الشجرة على جانبه (بشكل موازٍ مع حافة الوادي)، تشكلت زاوية قياسها 70° بالشجرة على جانبه والشجرة على الجانب الآخر. جـــد المسافة عبر الوادي.

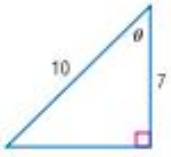
12. **السلالم** زاوية الارتفاع الموصي بها للسلم المستخدم في مكافحة الحريق هي 75°. ما الارتفاع الذي يصل إليه سلم طوله 21 m على مبنى إذا تم استخدام زاوية الارتفاع الموصي بها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 جـــد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.

13. 

14. 

15. 

16.

مثال 2 في مثلث قائم، تكون $\angle A$ و $\angle B$ حادتين. جـــد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية.

17. $\tan A = \frac{8}{15}$

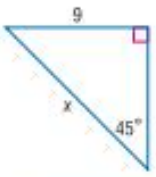
18. $\cos A = \frac{3}{10}$

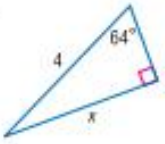
19. $\tan B = 3$

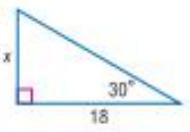
20. $\sin B = \frac{4}{9}$

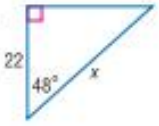
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

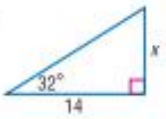
المثالان 3 و 4 **استخدم نسبة مثلثية لإيجاد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

21. 

22. 

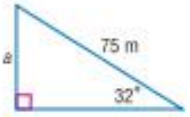
23. 

24. 

25. 

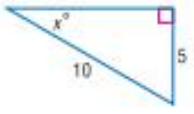
26.

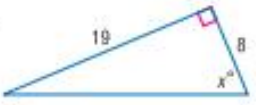
27. **التزلج المائي بالمظلة** ارجع إلى بداية الدرس والشكل الموضح على اليسار. جـــد قيمة a. ارتفاع الشخص المتزلج. إذا كان حبل السحب طوله 75 m والزاوية الناشئة قياسها 32°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

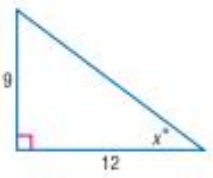


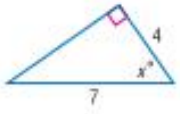
28. **تمثيل النماذج** يرغب علي في بناء جسر من حبال بين منزل الشجرة الخاص به ومنزل الشجرة الخاص بخالد. افترض أن منزل الشجرة الخاص بعلي يقع خلف نظيره الخاص بخالد مباشرة. وعلى مسافة 20 m على اليسار من منزل الشجرة الخاص بعلي. توجد زاوية قياسها 52° بين المنزلين. جـــد طول الحبال.

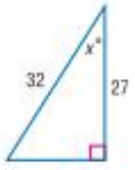
مثال 5 **جـــد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

29. 

30. 

31. 

32. 

33. 

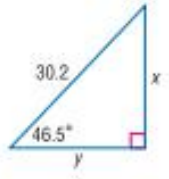
34.

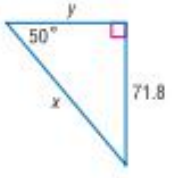
مثال 6

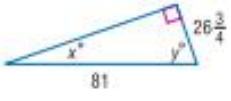
35. **السناجب** السناجب الطائرة البالغة تستطيع أن تصنع قفزة منزلقة من ارتفاع 50 m. إذا طار سنجاب منزلقًا من مسافة رأسية تبلغ 50 m وزاوية هبوط 9°. فجـــد التغير في ارتفاع السنجاب.

36. **الطيران الشراعي** قفزت طائرة شراعية بزاوية ارتفاع 20°. جـــد التغير في ارتفاع هذه الطائرة إذا طارت مسافة أفقية تبلغ 18 m.

استخدم النسب المثلثية لإيجاد قيمتي x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

37. 

38. 

39. 

جـــد حل كل من المعادلات التالية.

40. $\cos A = \frac{3}{19}$

41. $\sin N = \frac{9}{11}$

42. $\tan X = 15$

43. $\sin T = 0.35$

44. $\tan G = 0.125$

45. $\cos Z = 0.98$

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

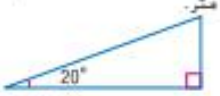
46. المعالم مَعْلَم يلقي بظل طوله 24 m. وزاوية الارتفاع من نهاية الظل إلى قمة المَعْلَم قياسها 50°.

a. ارسم مثلثًا قائمًا مع تسميته لتمثيل هذه الحالة.

b. اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد ارتفاع المَعْلَم.

c. جـــد قيمة الدالة لتحديد ارتفاع المَعْلَم مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

47. أعشاش الطيور ترتفع عينا أماني 1.5 m عن الأرض وهي تنظر إلى عش طائر في شجرة. إذا كانت زاوية الارتفاع هي 74.5° وهي تقف على بعد 4 m من قاعدة الشجرة. فما ارتفاع عش الطائر؟ قرّب إلى أقرب متر.

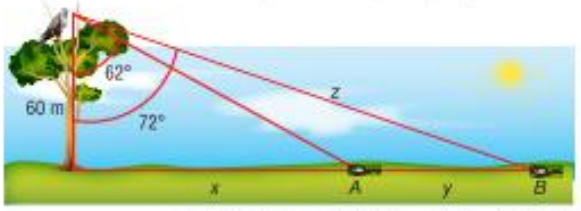


48. المنحدرات منحدران للدراجات يغطي كل منهما مسافة أفقية من 8 m. وتبلغ زاوية الارتفاع لأحدهما 20°. والآخر 35°. كما هو موضح على اليسار.

a. بكم يزيد ارتفاع المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

b. بكم يزيد طول المنحدر الثاني عن الأول؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

49. الصقور صقر على ارتفاع 60 m يرى فأرين A و B. كما هو موضح في الرسم التخطيطي.



a. ما المسافة التقريبية z بين الصقر والفأر B؟

b. ما المسافة الفاصلة بين الفأرين؟

في المثلث ABC، تكون $\angle C$ زاوية قائمة. استخدم القياسات المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا الناقصة للمثلث ABC. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

50. $m\angle A = 36°$, $a = 12$

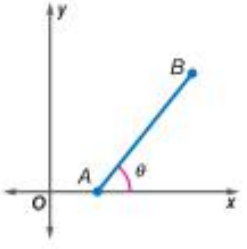
51. $m\angle B = 31°$, $b = 19$

52. $a = 8$, $c = 17$

53. $\tan A = \frac{4}{5}$, $a = 6$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. التحدي قطعة مستقيمة لها نقطتا النهاية $A(2, 0)$ و $B(6, 5)$. كما هو موضح في الشكل على اليسار. ما قياس الزاوية الحادة θ التي تصنعها القطعة المستقيمة والمحور الأفقي x؟ اشرح كيف وجدت القياس.



55. الفرضيات حدد ما إذا كان العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

بالنسبة لأي زاوية حادة، دالة sine لا تكون لها قيمة سالبة أبدًا.

56. مسألة غير محددة الإجابة في المثلث القائم CBA، $\sin A = \sin C$. ما الذي يمكنك استنتاجه بشأن $\triangle ABC$؟ برر استنتاجك.

57. الكتابة في الرياضيات سطح له ميل $\frac{2}{3}$. صف العلاقة بين الميل وزاوية الارتفاع θ التي يصنعها السطح مع المحور الأفقي. ثم استخدم دالة مثلثية عكسية لإيجاد قيمة θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

58. الإجابة الموسعة تحتاج مدرستك إلى 5 حافظات للكتب السنوية. تعرض شركة الأمل للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 153.85 مع تخفيض 10% على طلب 5 حافظات. وتعرض شركة التفوق للكتب السنوية حافظة الكتاب السنوي بسعر AED 157.36 مع تخفيض 15% على طلب 5 حافظات.

a. أي شركة ستختارها؟

b. ما أقل مبلغ يمكنك إنفاقه على الكتب السنوية؟

59. الإجابة القصيرة باعت فرقة العزف قميصانًا وقبعات لجمع التبرعات. وبلغ إجمالي ما باعوه 105 سلع وجمعوا AED 1170. إذا كانت تكلفة القبعة AED 10 وتكلفة القميص AED 15. فكم قميصًا بيعت؟

60. كشك شطائر يقدم الشطيرة بسعر x والمشروب بسعر y. وتبلغ تكلفة شطيرتين ومشروب واحد AED 4.50. وثلاث شطائر ومشروبين AED 7.25. أي مصفوفة يمكن ضربها في $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة x و y؟

A $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

61. SAT/ACT طول مستطيل وعرضه تمثلهما النسبة 5:12. إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm مربعًا. فما طول قطره، بالسنتيمتر؟

F 24 H 28 K 32

G 26 J 30

مراجعة شاملة

حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة. ثم حدد أي عبارة تمثل الافتراض.

62. يعتقد ناصر أن قطع المسافة من منزله إلى المتجر بدراجته يستغرق أقل من 10 دقائق.

63. لافتة طعام تنص على أن شطيرة الديك الرومي البالغة 30 cm تحتوي على تسعين جرامًا من اللحم.

64. تستغرق السيدة منى 15 دقيقة على الأقل لإعداد كعكة.

65. حمام السباحة عدد الزيارات إلى حمام سباحة عام التي يقوم بها 425 عضوًا في العام موزع طبيعيًا باستخدام المتوسط 90 والانحراف المعياري 15.

a. ما النسبة المئوية التقريبية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة 45 مرة على الأقل؟

b. ما احتمال اختيار عضو عشوائيًا يكون ذهب إلى حمام السباحة أكثر من 120 مرة؟

c. ما النسبة المئوية للأعضاء الذين ذهبوا إلى حمام السباحة ما بين 75 و105 مرات؟

66. الاستطلاعات شركة استطلاعات ترغب في تقدير عدد الأشخاص المؤيدين لقانون بيئي جديد. تجري الشركة استطلاعها على 20 شخصًا. ما احتمال أن يكون الشخص المؤيد للقانون هو 0.5.

a. ما احتمال وجود 12 شخصًا بالضبط مؤيدين للقانون الجديد؟

b. ما العدد المتوقع للأشخاص المؤيدين للقانون؟

مراجعة المهارات

جـــد ناتج ضرب كل مما يلي. واستخدم الوحدات المناسبة في إجابتك.

67. $4.3 \text{ km} \cdot \frac{5280 \text{ m}}{1 \text{ km}}$

68. $8 \text{ L} \cdot \frac{8 \text{ mL}}{1 \text{ L}}$

69. $\frac{5 \text{ dirhams}}{3 \text{ m}} \cdot 21 \text{ m}$

70. $\left(\frac{18 \text{ cubic centimeters}}{5 \text{ seconds}}\right) 24 \text{ sec}$

71. $65 \text{ degrees} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{3 \text{ degrees}}$

72. $\frac{7 \text{ L}}{30 \text{ min}} \cdot 10 \text{ min}$

محفوظ للطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-2 الزوايا وقياس الزوايا

.. السابق	.. الحالي	.. لماذا؟
• استخدمت الزوايا بمقياس الدرجات.	1 • رسم الزوايا في وضع قياسي وإيجادها. 2 التحويل بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان	• الساعة الشمسية أداة تشير إلى الوقت من اليوم عن طريق الظل الذي تلقيه على سطح موسوم لإظهار الساعات أو أجزاء من الساعات. ويتحرك الظل حول القرص بزاوية 15° كل ساعة.

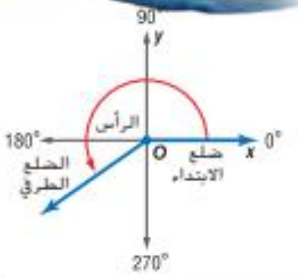
المفردات الجديدة

الوضع القياسي **standard position**
ضلع الابتداء **initial side**
ضلع الانتهاء **terminal side**
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء **coterminal angles**
راديان **radian**
الزاوية المركزية **central angle**
طول القوس **arc length**

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 الزوايا في الوضع القياسي

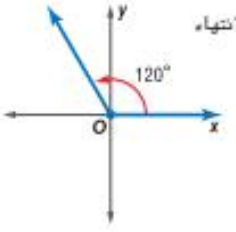
الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في **وضع قياسي** إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على محور x الموجب.



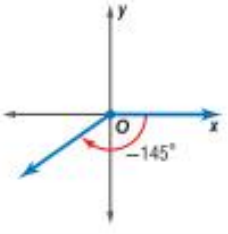
- الشعاع الموجود على محور x يُسمى **ضلع الابتداء** للزاوية.
- الشعاع الذي يدور حول المركز يُسمى **ضلع الانتهاء**.

المفهوم الأساسي قياسات الزوايا

إذا كان قياس الزاوية موجبًا، يدور ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة.



إذا كان قياس الزاوية سالبًا، يدور ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

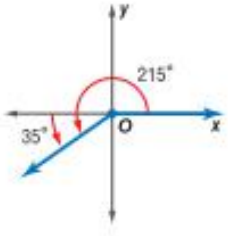


مثال 1 رسم الزوايا في وضع قياسي

ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المعطى.

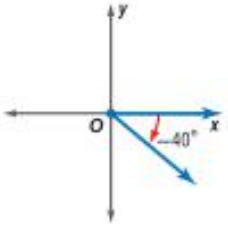
a. 215° $215° = 180° + 35°$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° في عكس اتجاه عقارب الساعة من بعد محور x السالب.



b. −40°

الزاوية سالبة. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° في اتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب.



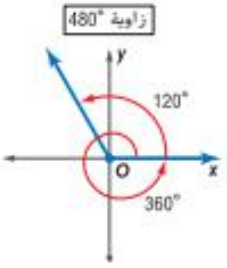
تمرين موجّه

1A. 80°

1B. −105°

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يستطيع ضلع الانتهاء لأي زاوية إتمام أكثر من دورة كاملة واحدة. على سبيل المثال، الدوران الكامل بزاوية 360° زائد دوران بزاوية 120° يشكلان زاوية قياسها 120° + 360° أو 480°.



الربط **بالحياة اليومية**

يعد التزلج المائي بالألواح من أسرع الرياضات المائية انتشارًا في الولايات المتحدة، حيث ازدادت المشاركة فيها بأكثر من 100% في الأعوام الأخيرة.

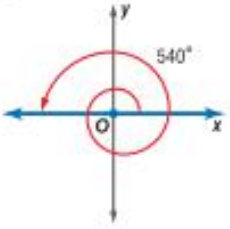
المصدر: King of Wake

مثال 2 من الحياة اليومية رسم الزوايا في وضع قياسي

التزلج المائي بالألواح ***التزلج على الماء بالألواح*** **يجمع بين ركوب الأمواج والتزلج على الألواح والتزلج على الجليد بالألواح والتزلج على الماء. وتتمثل إحدى مناورات التزلج في الدوران بزاوية 540° في الهواء. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 540°.**

$540° = 360° + 180°$

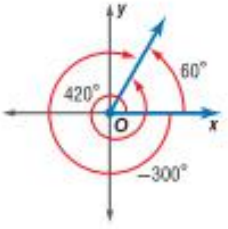
ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° من بعد محور x الموجب.



تمرين موجّه

2. ارسم زاوية في وضع قياسي قياسها 600°.

إذا كانت توجد زاويتان أو أكثر في وضع قياسي وتشترك في ضلع الانتهاء، فهي تُسمى **زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء**. على سبيل المثال، الزوايا التي يكون قياسها 60° و 420° و −300°. تكون زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء، كما هو موضح في الشكل على اليسار.



يمكن إيجاد الزاوية التي تكون مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، عن طريق الجمع إلى مضاعف 360° أو الطرح منه.

- $60° + 360° = 420°$
- $60° - 360° = -300°$

مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

جـــد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

a. 130°

$130° + 360° = 490°$ زاوية موجبة: اجمع إلى 360°.

$130° - 360° = -230°$ زاوية سالبة: اطرح 360°.

b. −200°

$-200° + 360° = 160°$ زاوية موجبة: اجمع إلى 360°.

$-200° - 360° = -560°$ زاوية سالبة: اطرح 360°.

تمرين موجّه

3A. 15° **3B.** −45°

قراءة في الرياضيات

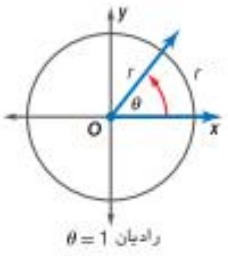
زاوية الدوران

في حساب المثلثات، يُشار إلى الزاوية في بعض الأحيان بزاوية الدوران.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التحويل بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان

يمكن قياس الزوايا أيضًا بالوحدات المستندة إلى طول القوس. **راديان** واحد هو قياس زاوية θ في وضع قياسي يقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا له نفس الطول كما هو الأمر مع نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1$ راديان

محيط الدائرة هو $2\pi r$. لذا، الدوران الكامل حول الدائرة يساوي 2π راديان. بما أن 2π راديان $= 360°$، فإن القياس بالدرجة والقياس بالراديان تربط بينهما علاقة توضحها المعادلات التالية.

$360° = 2\pi$ راديان $180° = \pi$ راديان

نصيحة دراسية

البنية كما هو الحال مع الدرجات، يقيس الراديان مقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

- قياس الزاوية بالراديان يكون موجبًا إذا كان دورانه عكس اتجاه عقارب الساعة.
- يكون القياس سالبًا إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

المفهوم الأساسي التحويل بين الدرجات والراديان

درجات إلى راديان	راديان إلى درجات
للتحويل من درجات إلى راديان، اضرب عدد الدرجات في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$	للتحويل من راديان إلى درجات، اضرب عدد الراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

مثال 4 التحويل بين الدرجات والراديان

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

a. $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ راديان}$$

b. $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ راديان} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$$

$$= \frac{900°}{2} \text{ أو } 450°$$

قراءة في الرياضيات

القياسات بالراديان تُحذف كلمة راديان عادةً عندما يتم التعبير عن الزوايا بقياس الراديان. لذلك، في حالة ذُكرت الزاوية دون وحدات قياس، يكون القياس بالراديان ضمنيًا.

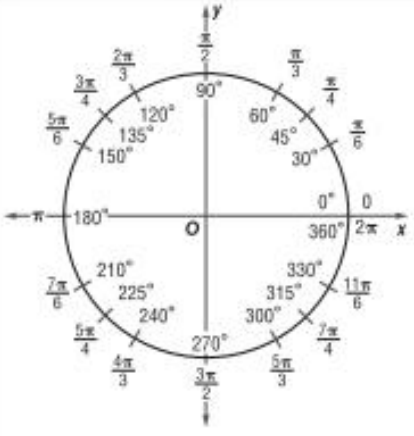
تمرين موجّه

4A. $120°$

4B. $-\frac{3\pi}{8}$

ملخص المفهوم الدرجات والراديان

يوضح الرسم التخطيطي قياسات متكافئة بالدرجات والراديان لزوايا خاصة.



قد تستفيد من حفظ ما يلي من القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان. ولا تكون الزوايا الخاصة الأخرى سوى مضاعفات لهذه الزوايا.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ $90° = \frac{\pi}{2}$

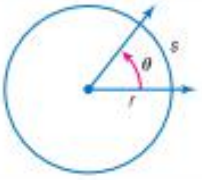
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الزاوية المركزية للدائرة هي زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة. إذا كنت تعلم قياس الزاوية المركزية ونصف قطر الدائرة، فإنه يمكنك إيجاد طول القوس الذي تقطعه هذه الزاوية.

المفهوم الأساسي طول القوس

الشرح بالنسبة لدائرة نصف قطرها r وزاويتها المركزية θ (بالراديان)، **طول القوس** s يساوي ناتج ضرب r و θ.

النموذج



الرموز $s = r\theta$

ستبرر هذه الصيغة في التدريب 52.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد طول القوس

الشاحنات إذا كان نصف قطر إطارات الشاحنة الكبيرة يساوي 82 cm. فما المسافة التي تقطعها شاحنة كبيرة بالمتر بعد ثلاثة أرباع قفط من دوران الإطار؟

الخطوة 1 جـــد الزاوية المركزية بالراديان.

$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ الزاوية تساوي $\frac{3}{4}$ دورة كاملة.

الخطوة 2 استخدم نصف القطر والزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$s = r\theta$ اكتب صيغة لطول القوس.

$= 82 \cdot \frac{3\pi}{2}$ عوّض عن r بـ 28 وعن θ بـ $\frac{3\pi}{2}$.

$= 388.8$ cm استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$= 3.9$ m اقسم على 100 للتحويل إلى أمتار.

إذًا، تقطع الشاحنة حوالي 3.9 m بعد ثلاثة أرباع من دوران الإطار.

انتبه!
طول القوس تذكر عند إيجاد طول القوس أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجة. وتذكر كذلك أن عدد الراديان في دوران كامل هو 2π.

تمرين موجّه

5. دائرة قطرها 9 cm. جـــد طول القوس إذا كانت الزاوية المركزية تساوي 60°. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المُعطى.**

1. 140°
2. −60°
3. 390°

مثال 3 **جـــد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

4. 25°
5. 175°
6. −100°

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

7. $\frac{\pi}{4}$
8. 225°
9. −40°

مثال 5

10. **التبرير** صنع لاعب تنس دورة بيده تحركت على امتداد مسار قوس. إذا كان نصف قطر دائرة القوس هو 1.2 m وزاوية الدوران هي 100°. فما طول القوس؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ارسم زاوية في وضع قياسي حسب القياس المُعطى.**

11. $75°$
12. $160°$
13. $-90°$
14. $-120°$
15. $295°$
16. $510°$

17. **الجمباز** لاعب جمباز على المتوازي المختلف الارتفاع يتأرجح ليصنع زاوية دوران $240°$.

18. **الطعام** تم تدوير غطاء برطمان صلصة المعكرونة $420°$ قبل أن يُفتح.

مثال 3 **جـــد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.**

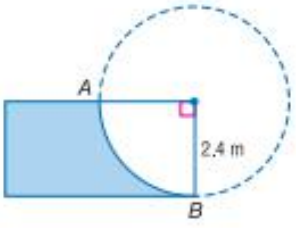
19. $50°$
20. $95°$
21. $205°$
22. $350°$
23. $-80°$
24. $-195°$

مثال 4 **أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.**

25. $330°$
26. $\frac{5\pi}{6}$
27. $-\frac{\pi}{3}$
28. $-50°$
29. $190°$
30. $-\frac{7\pi}{3}$

مثال 5

31. **التزلج على الألواح** منحدر التزلج على الألواح المبين على اليسار يسمى أنبوب ربعي *(quarter pipe)*. والسطح المنحني يحدده نصف قطر الدائرة. جـــد طول الجزء المنحني من المنحدر.

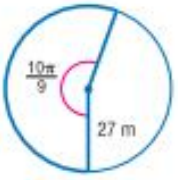


32. **القوارب النهرية** ناعور القارب النهري له قطر 7.2 m. جـــد طول القوس للدائرة التي يصنعها الناعور عندما يدور $300°$.

جـــد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

33.

34.



35. **الساعات** كم يستغرق عقرب الدقائق في الساعة للمرور عبر 2.5π راديان؟

36. **المثابرة** راجع بداية الدرس. ظل يتحرك حول ساعة شمسية بزاوية $15°$ كل ساعة.
   a. بعد كم ساعة ستكون زاوية دوران الظل $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟
   b. ما زاوية الدوران بالراديان بعد 5 ساعات؟
   c. ساعة شمسية نصف قطرها 20 cm. ما القوس الذي يشكله ظل بعد 14 ساعة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

جـــد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء مع كل زاوية.

37. $620°$
38. $-400°$
39. $-\frac{3\pi}{4}$
40. $\frac{19\pi}{6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. **أرجوحات** زاوية دوران الأرجوحة قياسها 165°.

a. ارسم الزاوية في وضع قياسي.

b. اكتب قياس الزاوية بالراديان.

c. إذا كانت سلاسل الأرجوحة طولها 2 m. فما طول القوس الذي تصنعه الأرجوحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. صف كيف سيتغير طول القوس إذا تمت مضاعفة أطوال سلاسل الأرجوحة.

42. **التمثيلات المتعددة** تأمل $A(-4, 0)$ و $B(-4, 6)$ و $C(6, 0)$ و $D(6, 8)$.

a. **هندسيًا** ارسم $\triangle EAB$ و $\triangle ECD$ مع جعل E عند نقطة الأصل.

b. **جبريًا** جد قيمة كلاً من tangent لـ $\angle BEA$ و tangent لـ $\angle DEC$.

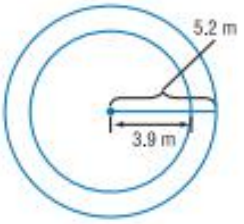
c. **جبريًا** جد ميل $\overline{BE}$ و $\overline{ED}$.

d. **لفظيًا** ما التبريرات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الميل وزاوية الظل؟

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

43. $\frac{21\pi}{8}$ 44. 124° 45. −200° 46. 5

47. **لعبة الدوّارات** تصنع لعبة الدوّارة 5 دورات في الدقيقة. الدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الخارجي لها نصف قطر يساوي 5.2 m. والدائرة التي تشكلها مقاعد الركاب في الصف الداخلي لها نصف قطر يساوي 3.9 m.

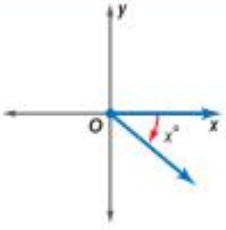


a. جد الزاوية θ بالراديان التي تدورها الدوّارة في ثانية واحدة.

b. في ثانية واحدة، ما الفرق بين طول القوسين لمقاعد الركاب في الصف الخارجي ومقاعد الركاب في الصف الداخلي؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **التفكير النقدي** يكتب سعيد وأيوب تعبيرًا لقياس زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الموضحة على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



سعيد	أيوب
قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هو $(x - 360)°$.	قياس *الزاوية المشتركة* في ضلع الانتهاء هو $(360 - x)°$

49. **التحدي** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع محور x الموجب عند النقطة (2, 0). جد معادلة لهذا المستقيم.

50. **التبرير** عبّر عن $\frac{1}{8}$ الدورة بالدرجات والراديان. اشرح استنتاجك.

51. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم زاوية حادة في وضع قياسي مع تسميتها. جد زاويتين. إحداهما موجبة والأخرى سالبة. تشتركان في ضلع الانتهاء مع الزاوية.

52. **التبرير** برر صيغة طول القوس.

53. **الكتابة في الرياضيات** استخدم دائرة نصف قطرها r لوصف ما تمثله درجة واحدة وراديان واحد. ثم اشرح كيفية التحويل بين القياسين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

54. الإجابة القصيرة إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$ فجـــد قيمة x.

55. أي مما يلي يمثل تغيرًا عكسيًا؟

A

x	2	5	10	20	25	50
y	50	20	10	5	4	2

B

x	2	4	6	8	10	12
y	−4	−8	−12	−16	−20	−24

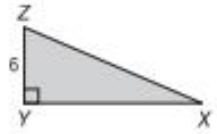
C

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30

D

x	10	9	8	7	6	5
y	5	6	7	8	9	10

56. الهندسة إذا كانت مساحة الشكل هي 60 وحدة مربعة. فما طول الضلع $\overline{XZ}$؟



F $2\sqrt{34}$
G $2\sqrt{109}$
H $4\sqrt{34}$
J $4\sqrt{109}$

57. SAT/ACT الحد الأول من المتتالية هو 6−. وكل حد يأتي بعد الأول يكون أكبر بمقدار 8 من الحد السابق له مباشرة. ما قيمة الحد رقم 101؟

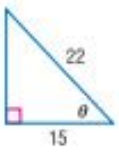
A 788
B 794
C 802
D 806
E 814

مراجعة شاملة

جـــد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 1-5)

58.

59.



60.

حدد فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة، ثم حدد العبارة التي تمثل الافتراض. (الدرس 6-5)

61. يشرب يوسف ما لا يقل عن ثمانية أكواب من الماء كل يوم.

62. تقول سها إن معها مظلتين في سيارتها.

63. التصنيع أحجام الأسطوانات المضغوطة التي تصنعها شركة ما يتم توزيعها طبيعيًا بانحراف معياري 1 mL. من المفترض أن يبلغ قطر الأسطوانات المضغوطة 120 mL. وهي تُصنّع لمحركات أسطوانات عرضها 122 mL. (الدرس 2-5)

a. ما النسبة المئوية للأسطوانات المضغوطة التي تتوقع أن تكون أكبر من 120 mL؟

b. إذا كانت تصنع الشركة 1000 أسطوانة مضغوطة في الساعة. فكم عدد الأسطوانات التي تتوقع أن يكون قطرها 119 mL و 122 mL ضمن الأسطوانات التي تُصنع في ساعة واحدة؟

c. حوالي كم أسطوانة مضغوطة في الساعة ستكون أكبر من أن تكون ملاءمة لمحركات الأسطوانات؟

64. المعرفة المالية إذا كان معدل التضخم 2%. ويمكن إيجاد تكلفة سلعة ما في السنوات القادمة عن طريق تكرار المعادلة $c(x) = 1.02x$. فجـــد تكلفة مشغل صوت رقمي سعره 70 AED بعد أربعة أعوام إذا ظل معدل التضخم ثابتًا.

مراجعة المهارات

استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر لكل مثلث قائم علمًا بأطوال الأضلاع المعطاة.

65. $a = 12, b = 15$

66. $a = 8, b = 17$

67. $a = 14, b = 11$

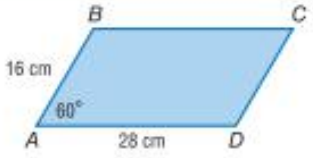
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الهندسة
مساحة متوازي الأضلاع

يمكن إيجاد مساحة أي مثلث باستخدام نسبة sine في المثلث. ويمكن استخدام عملية مشابهة لإيجاد مساحة متوازي الأضلاع.

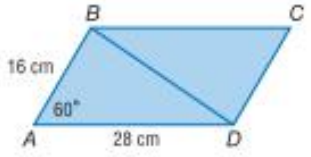
النشاط

جـــد مساحة متوازي الأضلاع *ABCD*.



الخطوة 1 ارسم القطر $\overline{BD}$

$\overline{BD}$ يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين. $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.



الخطوة 2 جـــد مساحة $\triangle ABD$.

استخدم نسبة sine لتحديد الارتفاع h من B إلى $\overline{AD}$.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	تعريف sine
$\sin\theta = \frac{h}{AB}$	$h = \text{opp}$, $AB = \text{hyp}$
$AB \sin\theta = h$	حل لإيجاد h.

إذا، $h = AB \sin\theta$.

المساحة $= bh\frac{1}{2}$	مساحة المثلث
$= \frac{1}{2}(AD)(AB)\sin A$	$b = AD$, $h = AB \sin A$
$= \frac{1}{2}(28)(16)\sin 60°$	$AD = 28$, $AB = 16$, $A = 60°$
$= 224\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	اضرب وجـــد قيمة sin 60°
$= 112\sqrt{3}$	بسّـــط.

الخطوة 3 جـــد مساحة $\square ABCD$.

مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$.
بما أن $\triangle CDB \cong \triangle ABD$. فإن مساحتي $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ متساويتان.
إذًا، مساحة $\square ABCD$ تساوي ضعف مساحة $\triangle ABD$.

$224\sqrt{3} = 112\sqrt{3} \cdot 2$ أو حوالي 387.98 cm2.

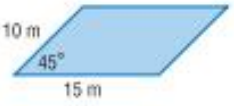
التمارين

لكل شكل مما يلي،

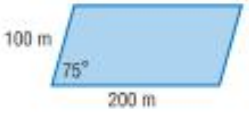
a. جـــد مساحة كل متوازي أضلاع.

b. جـــد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة نصف القياس المُعطى.

c. جـــد مساحة كل متوازي أضلاع إذا كان قياس الزاوية المحصورة ضعف القياس المُعطى.

1.


2.

3.


McGraw-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

5-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

.. السابق	.. الحالي	.. لماذا؟
• وجـــدتَ قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة.	1 إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة. 2 إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع.	• في لعبة الملاهي المبينة على اليسار، تدور السيارات ذهابًا وإيابًا حول نقطة مركزية. ويمكن وصف مواضع الأذرع التي تدعم السيارات، باستخدام زوايا مثلثية في الوضع القياسي مع جعل النقطة المركزية للعبة عند نقطة الأصل بالمستوى الإحداثي.

المفردات الجديدة

زاوية ربعية
quadrantal angle

زاوية مرجع
reference angle

ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

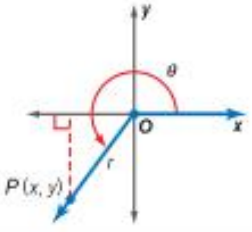
1 النسب المثلثية للزوايا العامة

يمكنك إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الأكبر من 90° أو الأقل من 0°.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية للزوايا العامة

افترض أن θ هي زاوية في وضع قياسي وأن $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء. باستخدام نظرية فيثاغورس، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

النسب المثلثية الست للزاوية θ معرّفة أدناه.

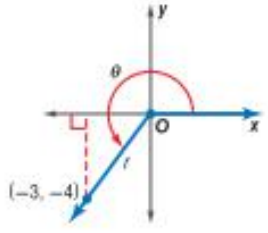


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

مثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية عند معرفة نقطة

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(-3, -4)$. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



الخطوة 1 ارسم الزاوية. وجـــد قيمة r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 2 استخدم $x = -3$ و $y = -4$ و $r = 5$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

تمرين موجّه

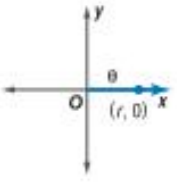
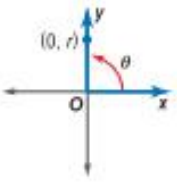
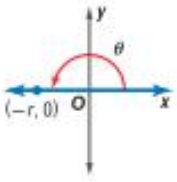
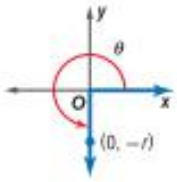
1. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(-6, 2)$. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في وضع قياسي على المحور x أو y، فتسمى الزاوية **زاوية ربعية**.

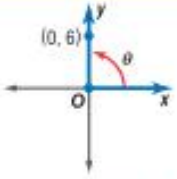
تصيحة دراسية
الزوايا الربعية قياس الزاوية الربعية هو مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية

$\theta = 0°$ أو 0 راديان	$\theta = 90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ راديان	$\theta = 180°$ أو π راديان	$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان
			

مثال 2 الزوايا الربعية

ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن النقطة عند $(0, 6)$. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـــ θ.



النقطة عند $(0, 6)$ تقع عند محور y الموجب. إذًا، الزاوية الربعية θ هي $90°$. استخدم $x = 0$ و $y = 6$ و $r = 6$ لكتابة النسب المثلثية.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = \theta$ $\quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0}$ = غير مُعرَّفة

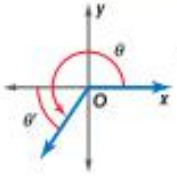
$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0}$ = غير مُعرَّفة $\quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = \theta$

تمرين موجّه

2. ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يمر بالنقطة $(0, -2)$. جـــد قيم النسب المثلثية الست لـــ θ.

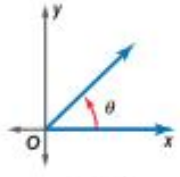
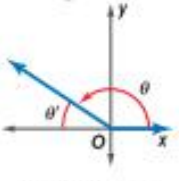
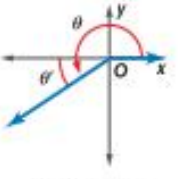
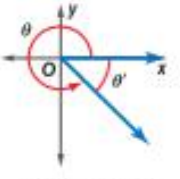
2 النسب المثلثية باستخدام زوايا المرجع

إذا θ كانت زاوية غير ربعية في وضع قياسي، فإن **زاوية المرجع** θ' لها تكون الزاوية الحادة التي يصنعها ضلع الانتهاء لـــ θ مع المحور x. فيما يلي قواعد إيجاد قياسات زوايا المرجع حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



قراءة في الرياضيات
زاوية ثيتا الأولية θ' تُقرأ ثيتا الأولية.

المفهوم الأساسي زوايا المرجع

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

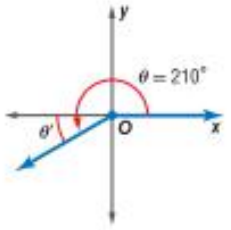
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان قياس θ أكبر من $360°$ أو أقل من $0°$. فاستخدم إذًا زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء يكون قياسها موجب بين $0°$ و $360°$ لإيجاد زاوية المرجع.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية مما يلي، ثم جـــد زاوية المرجع لها.

a. $210°$



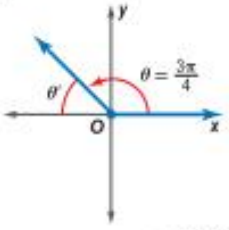
ضلع الانتهاء لـــ $210°$ يقع في الربع الثالث.

$\theta' = \theta - 180°$

$210° - 180° = 30°$

b. $-\frac{5\pi}{4}$

$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$، زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء.



ضلع الانتهاء لـــ $210°$ يقع

يقع ضلع الانتهاء لـــ $\frac{3\pi}{4}$ في الربع الثاني.

$\theta' = \pi - \theta =$

$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

تمرين موجّه

3A. $-110°$

3B. $\frac{2\pi}{3}$

نصيحة دراسية

تمثيل الزوايا بيانيًا يمكنك الرجوع إلى الرسم التخطيطي في ملخص المفهوم. الدرس 5-2 ليساعدك على رسم الزوايا.

يمكنك استخدام زوايا المرجع لإيجاد قيمة النسب المثلثية لأي زاوية θ. رمز النسبة يحدده الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ. استخدم الخطوات التالية لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيمة النسب المثلثية

الخطوة 1 جـــد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 جـــد قيمة النسبة المثلثية لـــ θ'.

الخطوة 3 حدد رمز قيمة النسبة المثلثية. استخدم رمز الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لـــ θ.

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta$: +	$\sin\theta, \csc\theta$: +
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: −	$\tan\theta, \cot\theta$: +
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta$: −	$\sin\theta, \csc\theta$: −
$\cos\theta, \sec\theta$: −	$\cos\theta, \sec\theta$: +
$\tan\theta, \cot\theta$: +	$\tan\theta, \cot\theta$: −

يمكنك استخدام القيم المثلثية للزوايا التي قياسها $30°$ و$45°$ و$60°$ التي تعلمتها في الدرس 5-1.

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

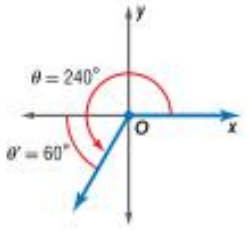
sine	cosine	Tangent	Cosecant	Secant	Cotangent
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 استخدام زاوية المرجع لإيجاد قيمة مثلثية

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

a. cos 240°



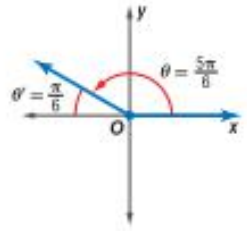
ضلع الانتهاء لـ 240° يقع في الربع الثالث.

جـــد قياس زاوية المرجع. $\theta' = \theta - 180^\circ$

$= 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ $\theta = 240^\circ$

نسبة cosine سالبة في الربع الثالث. $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

b. csc $\frac{5\pi}{6}$



ضلع الانتهاء لـ $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.

جـــد قياس زاوية المرجع. $\theta' = \pi - \theta$

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

نسبة cosecant موجبة في الربع الثاني. $\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$

$30^\circ = \text{راديان } \frac{\pi}{6}$ $= \csc 30^\circ$

$= \frac{1}{\sin 30} \csc 30^\circ$ $= 2$

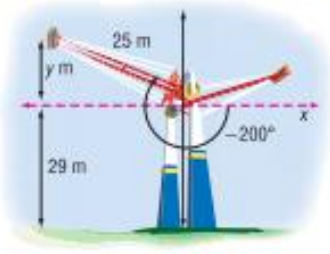
تمرين موجّه

4A. cos 135°

4B. tan $\frac{5\pi}{6}$

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام النسب المثلثية

ألعاب الملاهي الأذرع الدوارة للعبة الملاهي الموضحة على اليسار طولها 25 m وارتفاع المحور الذي تتأرجح منه الذراع طوله 29 m. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟



الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء: $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$

زاوية المرجع: $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

نسبة sine $\sin \theta = \frac{y}{r}$

$r = 25$ و $\theta = 20^\circ$ $\sin 20^\circ = \frac{y}{25}$

اضرب كل طرف في 25. $25 \sin 20^\circ = y$

استخدم آلة حاسبة لإيجاد y. $8.6 \approx y$

بما أن y يساوي 8.6 m تقريبًا، فإن الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة لها هو 29 + 8.6 أو حوالي 37.6 m.

تمرين موجّه

5. ألعاب الملاهي لعبة ملاهٍ مماثلة لها أذرع دوّارة أقصر طولها 22 m. ارتفاع المحور الذي تتأرجح الذراع منه يساوي 26 m. وزاوية الدوران من الوضع القياسي هي 195°−. ما الارتفاع الإجمالي للعبة الملاهي عند أعلى نقطة للقوس؟

الربط بالحياة اليومية

على لعبة ملاهٍ دوّارة، اختبر الركاب انعدام الوزن كما في الهبوط الجانبي لقطار الملاهي تمامًا. دامت اللعبة لدقيقة وبلغت السرعة 96 كيلومترًا في الساعة في كلا الاتجاهين.

المصدر: سيدار بوينت

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.**

1. $(1, 2)$ **2.** $(-8, -15)$ **3.** $(0, -4)$

مثال 3 **ارسم كل زاوية، ثم جـــد زاوية المرجع لها.**

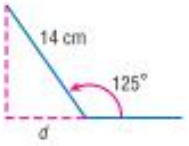
4. 300° **5.** 115° **6.** $-\frac{3\pi}{4}$

مثال 4 **جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

7. $\sin \frac{3\pi}{4}$ **8.** $\tan \frac{5\pi}{3}$ **9.** $\sec 120^\circ$ **10.** $\sin 300^\circ$

مثال 5

11. الترفيه فتحت ميساء مشغل DVD المحمول بحيث يصنع زاوية 125°. ويبلغ طول الشاشة 14 cm.



a. أعد تصميم الرسم التخطيطي بحيث تكون الزاوية في وضع قياسي على المستوى الإحداثي.

b. جـــد زاوية المرجع. ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة إلى الجدار d التي يمكن وضع مشغل DVD عندها.

c. استخدم النسبة لإيجاد المسافة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.**

12. $(5, 12)$ **13.** $(-6, 8)$ **14.** $(3, 0)$

15. $(0, -7)$ **16.** $(4, -2)$ **17.** $(-9, -3)$

مثال 3 **ارسم كل زاوية، ثم جـــد زاوية المرجع لها.**

18. 195° **19.** 285° **20.** -250°

21. $\frac{7\pi}{4}$ **22.** $-\frac{\pi}{4}$ **23.** 400°

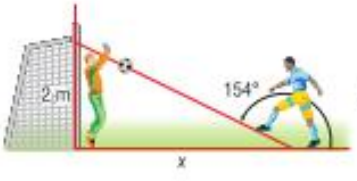
مثال 4 **جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.**

24. $\sin 210^\circ$ **25.** $\tan 315^\circ$ **26.** $\cos 150^\circ$ **27.** $\csc 225^\circ$

28. $\sin \frac{4\pi}{3}$ **29.** $\cos \frac{5\pi}{3}$ **30.** $\cot \frac{5\pi}{4}$ **31.** $\sec \frac{11\pi}{6}$

مثال 5

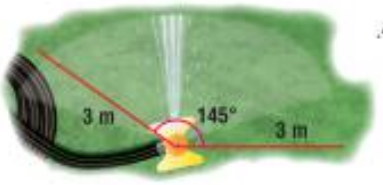
32. التبرير يقف لاعب كرة قدم على بعد x أمتار من حارس المرمى. ركل الكرة صوب المرمى، كما هو موضح في الشكل. قفز حارس المرمى وأمسك بالكرة على ارتفاع مترين في الهواء.



a. جـــد زاوية المرجع. ثم اكتب نسبة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد المسافة بين حارس المرمى واللاعب عندما ركل الكرة.

b. كم المسافة تقريبًا بين حارس المرمى ولاعب كرة القدم؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



33. **آلة الرش** آلة رش تدور ذهابًا وإيابًا ترش المياه على مسافة 3 m. من وضع أفقي. تدور الآلة 145° قبل أن تعكس اتجاهها. عند الزاوية 45°. ما المسافة التقريبية التي تبلغها المياه على يسار آلة الرش؟

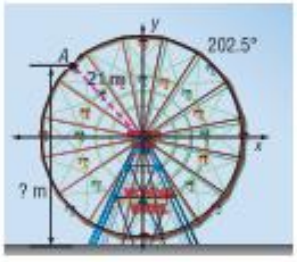
34. **كرة السلة** الصيغة $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$ تعطي مسافة ضربة كرة السلة بسرعة متجهة أولية V_0 متر في الثانية بزاوية θ مع الأرض.

a. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 7 m/s بزاوية 75°. فما المسافة التي ستقطعها كرة السلة؟

b. إذا ضُربت كرة السلة بزاوية 65° وقطعت 3 m. فكم كانت سرعتها المتجهة الأولية؟

c. إذا ضُربت كرة السلة بسرعة متجهة أولية 9 m/s وقطعت 4 m. فما زاوية ضرب الكرة؟

35. **الفيزياء** رُميت صخرة من حافة واد بمنحدر بزاوية 65° وسرعة متجهة أولية قدرها 6 m/s. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للصخرة x هي $x = v_0 (\cos \theta)t$ حيث v_0 هي السرعة المتجهة الأولية. و θ هي الزاوية التي ضُربت بها. و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التي ستقطعها الصخرة تقريبًا بعد 4 ثوانٍ؟



36. **عجلة فيريس** نصف قطر عجلة الملاهي فيريس 21 m قريبًا وترتفع 4.5 m عن الأرض. بعد أن يركب الشخص في العربة السفلية. تدور العجلة بزاوية 202.5° عكس اتجاه عقارب الساعة قبل أن تتوقف. كم كان ارتفاع هذه العربة فوق الأرض عندما توقفت العجلة؟

افترض أن θ زاوية في وضع قياسي ضلع الانتهاء لها في الربع المُعطى. لكل نسبة، جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

37. $\sin \theta = \frac{4}{5}$ الربع الثاني

38. $\tan \theta = -\frac{2}{3}$ الربع الرابع

39. $\cos \theta = -\frac{8}{17}$ الربع الثالث

40. $\cot \theta = -\frac{12}{5}$ الربع الرابع

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية مما يلي.

41. cot 270° 0

42. csc 180°

43. sin 570°

44. $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

45. $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

46. $\cot \frac{9\pi}{4}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

47. **التحدي** بالنسبة للزاوية θ في وضع قياسي. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan \theta = -1$. هل يمكن أن تكون قيمة θ تساوي 225°؟ برر استنتاجك.

48. **الفرضيات** حدد إذا ما كانت العبارة $\sin 180° = 3 \sin 60°$ صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

49. **التبرير** استخدم دالتي sine و cosine واشرح لماذا تكون 180° غير مُعرّفة.

50. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالاً لزاوية سالبة θ يكون فيها $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$.

51. **الكتابة في الرياضيات** صف خطوات إيجاد قيمة النسبة المثلثية لأي زاوية θ تكون أكبر من 90°. أدرج وصفًا لزاوية المرجع.

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبارات المعيارية

52. الإجابة الشبكية إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينهما 3. فما ناتج ضربهما؟

53. الهندسة D هي نقطة منتصف $\overline{BC}$. و A و E هما نقطتا منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$ على التوالي. إذا كان طول $\overline{AE}$ يساوي 12. فما طول $\overline{BC}$؟

A 6
B 12
C 24
D 48

54. التعبير $(-6 + i)^2$ مكافئ لأي من التعابير التالية؟

F $-12i$
G $36 - i$
H $36 - 12i$
J $35 - 12i$

55. SAT/ACT ما الأقل فيما يلي؟

A $1 + \frac{1}{4}$
B $1 - \frac{1}{4}$
C $1 \div \frac{1}{4}$
D $1 \times \frac{1}{4}$
E $\frac{1}{4} - 1$

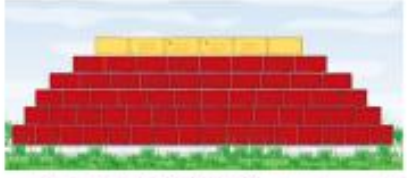
مراجعة شاملة

أعد كتابة كل قياس بالراديان بالدرجات. (الدرس 2-5)

56. $\frac{4}{3}\pi$
57. $\frac{11}{6}\pi$
58. $-\frac{17}{4}\pi$

حُـلّ المعادلات الآتية. (الدرس 1-5)

59. $\cos a = \frac{13}{17}$
60. $\sin 30 = \frac{h}{6}$
61. $\tan c = \frac{9}{4}$



62. العمارة الهندسية يتم إنشاء نصب تذكاري في حديقة بالمدينة. سيكون عبارة عن حائط طوبي يتكون فيه الصف العلوي من ست طوبات مطلية بالذهب محفور عليها أسماء ستة أشخاص محليين مشهورين. ويزيد كل صف بطوبتين عن الصف الذي يعلوه. أثبت أن عدد الطوب في أعلى n صفوف هو $n^2 + 5n$.

63. أساطير تقول الإسطورة إن ملكًا أراد مكافأة فتى على فعل حسن. ولكنه منحه الاختيار. إما أن يحصل على AED 1,000,000 دفعةً واحدة، أو يحصل على مكافأة يومية لمدة شهر، بحيث يحصل على فلس واحد في اليوم الأول، وفلسين في اليوم الثاني، وهكذا. وبهذا يحصل على ضعف الفلسات كل يوم أكثر من اليوم السابق. كم ستكون قيمة الخيار الثاني؟

اكتب معادلة لكل دائرة علمًا بنقطتي نهاية القطر.

64. $(2, -4), (10, 2)$
65. $(-1, -10), (-7, 6)$
66. $(9, 0), (4, -7)$

بسّط كل تعبير مما يلي.

67. $\frac{5}{x^2 + 6x + 8} + \frac{x}{x^2 - 3x - 28}$
68. $\frac{3x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{6}{x^2 + 7x - 18}$
69. $\frac{4}{3x^2 + 12x} + \frac{2x}{x^2 - 2x - 24}$

حُـلّ كل معادلة أو متباينة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

70. $8^x = 30$
71. $5^x = 64$
72. $3^{x+2} = 41$

جـــد قيمة كل تعبير مما يلي.

73. $16^{-\frac{1}{4}}$
74. $27^{\frac{4}{3}}$
75. $25^{-\frac{3}{2}}$

مراجعة المهارات

حُـلّ لإيجاد x.

76. $\frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9}$
77. $\frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4}$
78. $\frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20}$

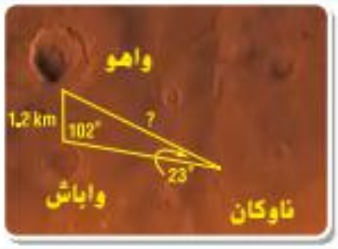
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-4 قانون الـ Sine

السابق
- لقد وجـــدت أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية للمثلثات القائمة.

الحالي
1. إيجاد مساحة المثلث باستخدام ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.
2. استخدام قانون الجيب sine لحل المثلثات.

لماذا؟
- يوجد في كوكب المريخ مئات الآلاف من الفوهات التي سميت بأسماء أشهر العلماء ومؤلفي قصص الخيال العلمي وأسماء المدن على كوكب الأرض. يوضح الشكل الفوهات "واهو" و"واباش" و"ناوكان". يمكنك استخدام حساب المثلثات في إيجاد المسافة بين "واهو" و"ناوكان".

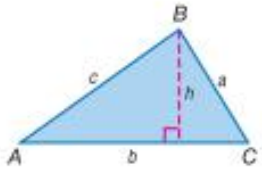


المفردات الجديدة
- قانون الـ Sines — Law of Sines
- حل المثلث solving a triangle
- حالة مبهمة ambiguous case

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 إيجاد مساحة مثلث

في المثلث الموجود على اليسار، $\sin A = \frac{h}{c}$ أو $h = c \sin A$.

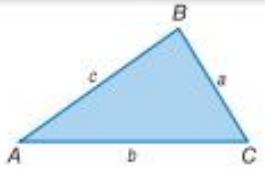


قانون مساحة المثلث	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bh$
استبدل بـ h $c \sin A$.	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}b(c \sin A)$
بسّط.	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$

يمكنك استخدام هذه الصيغة وصيغتين أخريين في إيجاد مساحة المثلث إذا علمت طولي ضلعيه وقياس الزاوية المحصورة.

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

الشرح مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب ضلعين و sine الزاوية المحصورة بينهما.

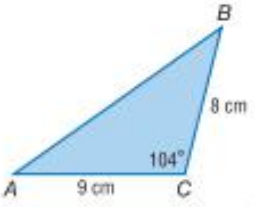


الرموز $\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث.

جـــد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرّبة إلى أقرب عشرة.

في $\triangle ABC$. $a = 8$ و $b = 9$ و $C = 104°$.



بحسب القياسات المعلومة، استخدم صيغة المساحة الثالثة.	$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C$
التعويض	$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$
بسّط.	$\approx 34.9 \text{ cm}^2$

التحقق الذهني قرّب $104°$ sine إلى $90°$ sine لأن $90°$ sine يساوي 1.

$\frac{1}{2}(8)(9)\sin 90° = \frac{1}{2}(8)(9)(1) = 36$

وهذا قريب من الإجابة 34.9 سنتيمترا مكعبا.

تمرين موجّه

1. جـــد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا كانت $A = 31°$، و $b = 18 \text{ m}$، و $c = 22 \text{ m}$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

2 استخدام قانون الجيب sine لحل المثلثات

يمكنك استخدام صيغ المساحة في اشتقاق **قانون ال sine** الذي يبين العلاقات بين أطوال الأضلاع في المثلث وجيوب الزاوية المقابلة لها.

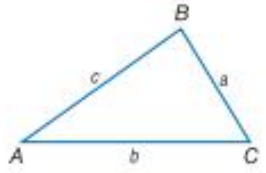
$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ اضبط صيغ المساحة المساوية لبعضها البعض.

$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$ اضرب كل تعبير في 2.

$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$ اقسم كل تعبير على abc.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ بسّط.

المفهوم الأساسي قانون الـ Sine

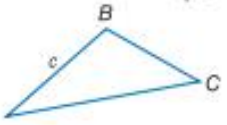


في المثلث $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C، على الترتيب، فإن الحل التالي صحيح.

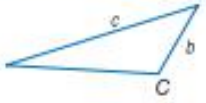
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يمكنك استخدام قانون الـ Sine في حل مثلث إذا كنت تعرف أيًا مما يلي.

- قياس زاويتين وأي ضلع (الحالتان زاوية–زاوية–ضلع أو زاوية–ضلع–زاوية)



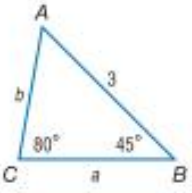
- قياس ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما (الحالة ضلع–ضلع–زاوية)



يُسمى استخدام القياسات المعطاة في إيجاد طول الضلع وقياسات الزاوية غير المعلومة في المثلث باسم **حل المثلث**.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة زاويتين وضلع

جـــد حل المثلث $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.



الخطوة 1 جـــد قياس الزاوية الثالثة.

$m\angle A = 180 - (80 + 45) = 55°$ أو

الخطوة 2 استخدم قانون الـsine في إيجاد طول الضلعين a و b. اكتب معادلة لإيجاد كل متغير.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ قانون ال sine
$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$	$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$ التعويض
$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$	$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$ جـــد حل كل متغير.
$b \approx 2.2$	$a \approx 2.5$ استخدم حاسبة.

إذا، $A = 55°$ و $a \approx 2.5$ و $b \approx 2.2$.

تمرين موجّه

2. جـــد حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 42°$ و $Q = 65°$ و $n = 5$.

الربط بتاريخ الرياضيات

بولين سبيري (1967–1885)

وضعت بولين سبيري كتابين مدرسيين خلال العقد الثاني من القرن العشرين. وهما Short Course in Spherical Trigonometry و Plane Trigonometry. وفي عام 1923 أصبحت أول امرأة تُرقى لمنصب أستاذ مساعد في قسم الرياضيات في جامعة كاليفورنيا. بيركلي.

نصيحة دراسية

التبرير يمكن أيضا كتابة قانون الـsine بالشكل $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

إذا. يمكن أيضا استخدام التعابير الموضحة أدناه في حل المثلث في المثال 2.

- $\frac{a}{\sin 55°} = \frac{3}{\sin 80°}$
- $\frac{b}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 80°}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

إذا علمت قياسات زاويتين وضلع، فسيمكنك حل مثلث واحد تحديدًا. ولكن، إذا علمت قياسات ضلعين والزاوية المقابلة لأي منهما، يمكن أن تحصل على صفر مثلث، أو مثلث واحد، أو اثنين. وتُعرف هذه الحالة باسم **الحالة المبهمة**. إذًا، عند حل مثلث باستخدام الحالة ضلع-ضلع-زاوية، يمكن الحصول على الحل صفر أو واحد أو اثنين.

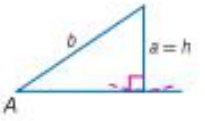
نصيحة دراسية

الحلان يُطلق على الحالة عندما يوجد حلان للمثلث اسم الحالة المبهمة.

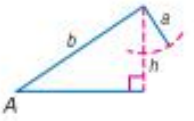
المفهوم الأساسي المثلثات المحتملة في حالة ضلع-ضلع-زاوية

تأمل المثلث عند معرفة a و b و $m\angle A$.

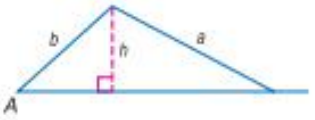
$\angle A$ زاوية حادة.



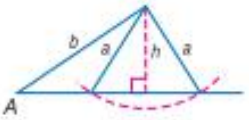
$a = h$
حل واحد



$a < h$
بلا حل



$a \geq b$
حل واحد



$h < a < b$
حلان

$\angle A$ زاوية قائمة أو منفرجة.

$a \leq b$
بلا حل

$a > b$
حل واحد

نصيحة دراسية

A زاوية حادة في الأشكال على اليسار، الارتفاع h يقارن إلى a حيث h أقل مسافة من C إلى $\overline{AB}$ عندما تكون الزاوية A حادة.

$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

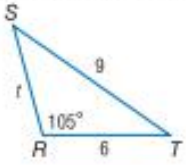
$\sin A = \frac{h}{b}$

نظرًا لأن $\sin A = \frac{h}{b}$، يمكنك استخدام $h = b \sin A$ في إيجاد h في المثلثات الحادة.

مثال 3 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية

حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل *واحد*، أو *حلين*. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

a. في $\triangle RST$، $R = 105°$ و $r = 9$ و $s = 6$.



حيث إن $\angle R$ زاوية منفرجة و $6 > 9$. فلهذا تعلم أن هناك حلاً واحدًا للمثلث.

الخطوة 1 طبّق قانون الـsine في إيجاد قيمة $m\angle S$.

$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

$\sin S = \frac{6 \sin 105°}{9}$ اضرب كل طرف في 6.

$\sin S \approx 0.6440$ استخدم حاسبة.

$S \approx 40°$ استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 2 جِد $m\angle T$.

$m\angle T \approx 180 - (105 + 40)$ أو $35°$

الخطوة 3 طبّق قانون الـsine لإيجاد قيمة t.

$\frac{\sin 35°}{t} \approx \frac{\sin 105°}{9}$ قانون الـ Sine

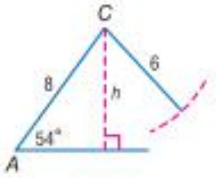
$t \approx \frac{9 \sin 35°}{\sin 105°}$ حل لإيجاد t.

$t \approx 5.3$ استخدم الحاسبة.

إذًا، $T \approx 35°$ و $S \approx 40°$ و $t \approx 5.3$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

b. في $\triangle ABC$، $A = 54°$ و $a = 6$ و $b = 8$.



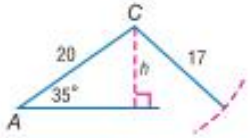
بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $6 < 8$. فجـــد h و قارنها بـــ a.

$b \sin A = 8 \sin 54°$ $A = 54°$ و $b = 8$

≈ 6.5 استخدم الحاسبة.

بما أن $6 \leq 6.5$ أو $a \leq h$. فليس هناك حل.

c. في المثلث $\triangle ABC$، $A = 35°$، و $a = 17$، و $b = 20$.



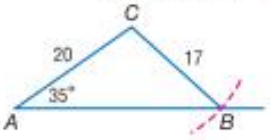
بما أن $\angle A$ زاوية حادة، و $20 > 17$. فجـــد h وقارنها بـــ a.

$b \sin A = 20 \sin 35°$ $A = 35°$ و $b = 20$

≈ 11.5 استخدم الحاسبة.

بما أن $20 > 17 > 11.5$ أو $b > a > h$. فهناك حلان. إذًا هناك مثلثان يمكن حلهما

الحالة 1 $\angle B$ زاوية حادة.



الخطوة 1 جـــد $m\angle B$.

قانون الـــ Sine $\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35°}{17}$

جـــد $\sin B$. $\sin B = \frac{20 \sin 35°}{17}$

استخدم الحاسبة. $\sin B \approx 0.6748$

جـــد $\sin^{-1} 0.6748$ $B \approx 42°$

الخطوة 2 جـــد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 42)$ أو $103°$

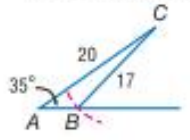
الخطوة 3 جـــد c.

قانون الـــ Sine $\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$

جـــد قيمة c. $c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$

بسّط. $c \approx 28.9$

الحالة 2 $\angle B$ زاوية منفرجة.



الخطوة 1 جـــد $m\angle B$.

صيغة الـsine لها أيضًا قيمة موجبة في الربع الثاني. إذًا. جـــد زاوية حادة B قيمة sin لها $B \approx 0.6748$.

$m\angle B \approx 180° - 42°$ أو $= 138°$

الخطوة 2 جـــد $m\angle C$.

$m\angle C \approx 180 - (35 + 138)$ أو $= 7°$

الخطوة 3 جـــد c.

قانون الـــ Sine $\frac{\sin 103°}{c} = \frac{\sin 35°}{17}$

جـــد قيمة c. $c = \frac{17 \sin 103°}{\sin 35°}$

بسّط. $c \approx 28.9$

إذًا. أحد الحلين هو $B \approx 42°$، و $C \approx 103°$، و $c \approx 28.9$. والحل الثاني هو $B \approx 138°$، و $C \approx 7°$، و $c \approx 3.6$.

نصيحة دراسية

زاوية مرجع ستستخدم في المثلث في الحالة 2 زاوية المرجع $42°$ لإيجاد القيمة الأخرى لـــ B.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل واحد، أو حلين. ثم حل المثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A. في المثلث $\triangle RST$، $R = 95°$، و $r = 10$، و $s = 12$.

3B. في المثلث $\triangle MNP$، $N = 32°$، و $n = 7$، و $p = 4$.

3C. في $\triangle ABC$. $A = 47°$، و $a = 15$، و $b = 18$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ sine في حل المسألة

لعبة البيسبول تُضرب كرة البيسبول بين القاعدتين الثانية والثالثة وتُلتقط عند النقطة B. مثلما هو موضح في الشكل. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثانية؟

$\frac{\sin 72^\circ}{27} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$	قانون الـ Sine
$x \sin 72^\circ = 27 \sin 43^\circ$	الضرب التقاطعي
$x = \frac{27 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$	حل لإيجاد قيمة x.
$x \approx 19.4$	استخدم الحاسبة.

إذًا، تبعد المسافة 19.4 m تقريبًا.

تمرين موجّه

4. كم تبعد نقطة التقاط الكرة عن القاعدة الثالثة؟

الربط بالحياة اليومية

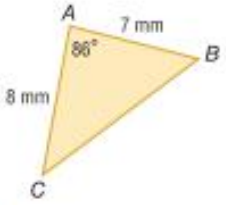
تشترك ملاعب البيسبول في المدرسة الثانوية والكلية في أبعاد الملعب الداخلي مثل ملاعب البيسبول للمحترفين. بينما تختلف أبعاد الملعب الخارجي اختلافًا كبيرًا.

المصدر، مجلة *Baseball Digest Magazine*

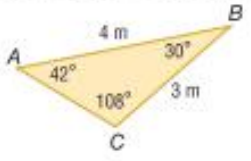
التحقق من فهمك

مثال 1 **جـــد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب عشرة إذا لزم الأمر.**

1.



2.

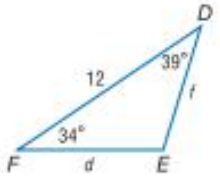


3 $A = 40°$, $b = 11$ cm, $c = 6$ cm

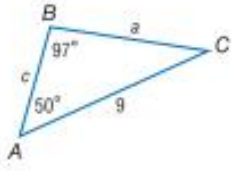
4. $B = 103°$, $a = 20$ cm, $c = 18$ cm

مثال 2 **حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

5.



6.



7. جـــد حل المثلث $\triangle FGH$. إذا كانت $G = 80°$ و $H = 40°$ و $g = 14$.

مثال 3 **المتابرة حدد هل كل مثلث $\triangle ABC$ بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له حلان. ثم جـــد حل المثلث. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

8. $A = 95°$, $a = 19$, $b = 12$

9. $A = 60°$, $a = 15$, $b = 24$

10. $A = 34°$, $a = 8$, $b = 13$

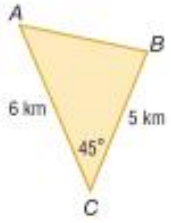
11. $A = 30°$, $a = 3$, $b = 6$

مثال 4 **12. الفضاء** راجع بداية الدرس. جـــد المسافة بين فوهة واهو وفوهة ناوكان على كوكب المريخ.

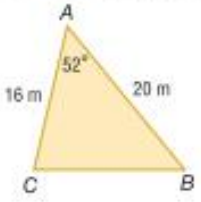
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 1 **جـــد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.**

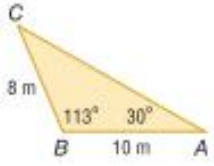
13.



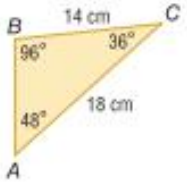
14.



15.



16.



17. $C = 25°$, $a = 4$ m, $b = 7$ m

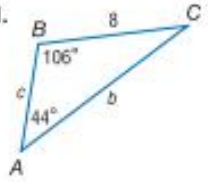
18. $A = 138°$, $b = 10$ cm, $c = 20$ cm

19. $B = 92°$, $a = 14.5$ m, $c = 9$ m

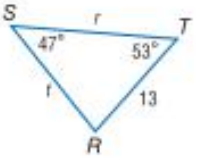
20. $C = 116°$, $a = 2.7$ cm, $b = 4.6$ cm

مثال 2 **التبرير** **حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

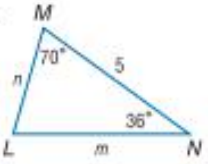
21.



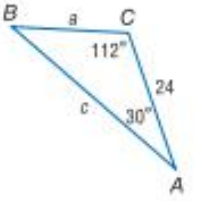
22.



23.



24.



25. جـــد حل $\triangle HJK$ إذا كانت $H = 53°$، و $J = 20°$، و $h = 31$.

26. جـــد حل المثلث $\triangle NPQ$ إذا كانت $P = 109°$، و $Q = 57°$، و $n = 22$.

27. جـــد حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $A = 50°$، و $a = 2.5$، و $C = 67°$.

28. جـــد حل المثلث $\triangle ABC$ إذا كانت $B = 18°$، و $C = 142°$، و $b = 20$.

مثال 3 **حدد ما إذا كان كل مثلث $\triangle ABC$ بلا حل، أم له واحد، أم له حلان. ثم حل المثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

29. $A = 100°$, $a = 7$, $b = 3$

30. $A = 75°$, $a = 14$, $b = 11$

31. $A = 38°$, $a = 21$, $b = 18$

32. $A = 52°$, $a = 9$, $b = 20$

33. $A = 42°$, $a = 5$, $b = 6$

34. $A = 44°$, $a = 14$, $b = 19$

35. $A = 131°$, $a = 15$, $b = 32$

36. $A = 30°$, $a = 17$, $b = 34$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

الجغرافيا في مدينة هاواي، تقدر المسافة من "هيلو" إلى "كايلوا" بـ 57 km. والمسافة من "هيلو" إلى "كابتن كوك" بـ 55 km.

37. ما قياس الزاوية المتكونة عند "هيلو"؟

38. ما المسافة بين "كايلوا" و"كابتن كوك"؟

39. **الأعاصير** تكون صافرات إنذار الأعاصير A و B. و C منطقة مثلثية الشكل في إحدى مناطق المدينة. تبعد صافرتا الإنذار A و B عن بعضهما 8 km. وقياس الزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار A تساوي 112°. والزاوية المتكونة عند صافرة الإنذار B تساوي 40°. ما المسافة بين الصافرتين B و C؟

40. **الألغاز** مثلث برمودا هو منطقة في المحيط الأطلنطي بين برمودا، وميامي، وفلوريدا. وسان جوان، وبورتو ريكو. ولقد أشيع عنه أن السفن والطائرات تختفي فيه في ظروف غامضة.

a. ما المسافة بين ميامي وبرمودا؟

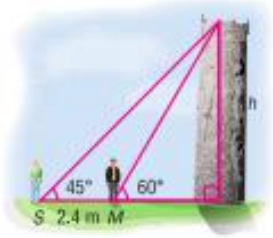
b. ما مساحة مثلث برمودا تقريبًا؟

41. **ركوب الدراجات** طول الضلع في مسار ركوب الدراجة المثلث الشكل يساوي 4 km. والزاوية المقابلة لهذا الضلع تساوي 64°. ولقد تكونت زاوية أخرى في المسار المثلثي قياسها 66°.

a. صمم رسمًا للموقف. وقم بتسمية الأضلاع الناقصة a و b.

b. اكتب المعادلات التي يمكن استخدامها في إيجاد أطوال الأضلاع الناقصة.

c. ما محيط المسار ؟



42. **تسلق الصخور** سعيد (المشار إليه بالرمز S) وماجد (المشار إليه بالرمز M) يقفان على مسافة 2.4 m بعيدًا عن بعضهما البعض أمام حائط تسلق الصخور. مثلما هو موضح في الشكل على اليسار. ما ارتفاع الحائط؟ قرب إلى أقرب عشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **التفكير النقدي** في المثلث $\triangle RST$. $R = 56°$ و $r = 24$ و $t = 12$. تستخدم ميسون ومها قانون الsine لإيجاد T. هل أي منهما على صواب؟ فسّر استنتاجك.

ميسون

$$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56°}{24}$$

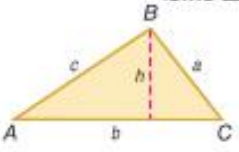
$$\sin T \approx 0.4145$$

$$T \approx 24.5°$$

مها

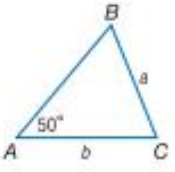
بما أن $t > r$، فلا يوجد حل.

44. **مسألة غير محددة** الإجابة ابتكر مسألة تطبيق تتضمن مثلثات قائمة الزاوية وقانون الـ Sine. ثم حل المسألة. وصمم رسمًا تخطيطيًا إذا لزم الأمر.



45. **التحدي** مستخدمًا الشكل الموضح على اليسار. استنبط الصيغة المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$.

46. **التبرير** جد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC التي يمكن تكوينها إذا كانت $A = 55°$ و $C = 20°$.



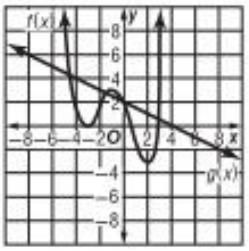
47. **الكتابة في الرياضيات** استخدم قانون الsine في توضيح لماذا a و b ليست لهما قيم مميزة في الشكل الموضح.

48. **مسألة غير محددة الإجابة** إذا علمت أن $E = 62°$ و $d = 38$. فجد قيمة e بحيث لا يوجد المثلث DEF. فسّر استنتاجك.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبارات المعيارية

49. الإجابة القصيرة مستخدمًا التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$؟



50. الإحصاء إذا كان متوسط سبعة أعداد صحيحة فردية متتالية هو n. فما وسيط تلك الأعداد الصحيحة السبعة؟

A 0
B 7
C n
D $n - 2$

51. صفر واحد في $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ يساوي 4. ما الصيغة ذات العوامل للتعبير $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$؟

F $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
G $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
H $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
J $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

52. SAT/ACT يقتسم ثلاثة أشخاص AED 48,000 حسب النسبة 3 : 4 : 5. ما قيمة المبلغ صاحب النصيب الأكبر؟

A AED 12,000
B AED 16,000
C AED 20,000
D AED 24,000
E AED 30,000

مراجعة شاملة

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 3-5)

53. $\sin 210^\circ$ **54.** $\cos \frac{3}{4}\pi$ **55.** $\cot 60^\circ$

جـــد زاوية ذات قياس موجب وزاوية ذات قياس سالب مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية. (الدرس 2-5)

56. 125° **57.** -32° **58.** $\frac{2}{3}\pi$

59. المبيعات يكسب مندوب المبيعات AED 10 في الساعة زائد عمولة بنسبة 10% على المبيعات. اكتب دالة تصف دخل مندوب المبيعات. إذا كان مندوب المبيعات يريد أن يكسب AED 1000 في أسبوع يعمل خلاله 40 ساعة. فما رقم المبيعات الذي ينبغي أن يحققه؟

60. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x} = 3$ **61.** $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$ **62.** $(6n - 5)^{\frac{1}{3}} + 3 = -2$

63. علم الفلك. تبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 146.9 مليون كيلو متر عند أقرب نقطة لها. وتبتعد الأرض عن مركز الشمس مسافة 151.8 مليون كيلو متر عند أبعد نقطة لها. اكتب معادلة تصف مدار الأرض. معتبرًا أن مركز المدار هو نقطة الأصل وأن الشمس تقع على المحور x.

بسّط.

64. $\sqrt{(x - 4)^2}$ **65.** $\sqrt{(y + 2)^4}$ **66.** $\sqrt[3]{(a - b)^6}$

مراجعة المهارات

جـــد قيمة كل تعبير إذا كانت $w = 6$، و $x = -4$، و $y = 1.5$، و $z = \frac{3}{4}$.

67. $w^2 + y^2 - 6xz$ **68.** $x^2 + z^2 + 5wy$ **69.** $wy + xz + w^2 - x^2$

محفوظ الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-4 مختبر الهندسة
المضلعات المنتظمة

يمكنك استخدام الزوايا المركزية للدوائر لاستكشاف خواص المضلعات المنتظمة المحاطة بدائرة. تذكر أن المضلع المنتظم يكون محاطًا بدائرة إذا كان كل رأس من رؤوسه يقع على الدائرة.

النشاط جمع البيانات

الخطوة 1 استخدم فرجارًا لرسم دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.

الخطوة 2 أحط مثلثًا متساوي الأضلاع بدائرة. وللقيام بذلك، استخدم منقلة لقياس ثلاث زوايا 120° في مركز الدائرة. حيث إن $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

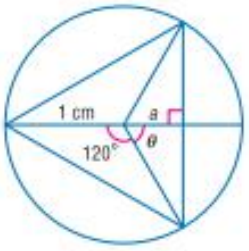
ثم صل النقاط حيث تتقاطع أضلاع الزوايا مع الدائرة باستخدام مسطرة.

الخطوة 3 **عامد** المضلع المنتظم هو قطعة مستقيمة مرسومة من مركز المضلع وتكون عمودية على أحد أضلاعه. استخدم θ cosine لإيجاد طول العامد. المسمى a في الرسم التخطيطي.

النماذج والتحليل

1. أعد جدولاً مثل ذلك المبين أدناه ودوّن طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع. وأدخل كل مضلع منتظم مذكور في الجدول. في دائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد. انسخ وأكمل الجدول.

عدد الأضلاع، n	θ	a	عدد الأضلاع، n	θ	a
3	60		7		
4	45		8		
5			9		
6			10		



2. ما الذي تلاحظه بشأن قياس θ مع تزايد عدد أضلاع المضلع المحاط؟
3. ما الذي تلاحظه بشأن قيمة a؟
4. **التخمين** افترض أنك أحطت مضلعًا منتظمًا من 30 ضلعًا بدائرة. جد قياس الزاوية θ.
5. اكتب القانون الذي يقدم قياس الزاوية θ لمضلع عدد أضلاع n.
6. اكتب قانونًا يعطي طول العامد لمضلع منتظم محاط بدائرة نصف قطرها سنتيمتر واحد.
7. كيف سيتغير القانون الذي كتبته في التدريب 6 إذا لم يكن نصف قطر الدائرة سنتيمترًا واحدًا؟

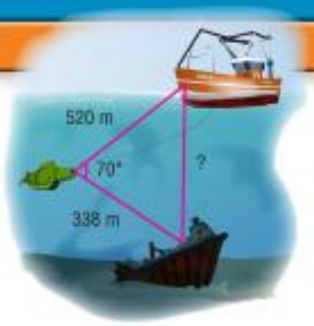
محفوظ الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education

5-5 قانون الـ Cosine

:: السابق
- وجـــدت حل المثلثات باستخدام قانون الـ Sine.

:: الحالي
1 استخدام قانون جيب التمام cosine لحل المثلثات.
2 الاختيار بين طرق حل المثلثات.

:: لماذا؟
- *الفواصة* هي مركبة مائية تُستخدم في استكشاف أعماق المحيط. يمكنك استخدام حساب المثلثات لإيجاد المسافة من السفينة المستخدمة لإنزال الفواصة في المحيط وحطام السفينة الذي عثرت الفواصة عليه في قاع المحيط.



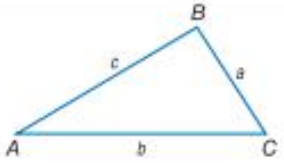
المفردات الجديدة
قانون الـ Cosines
Law of Cosines

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 استخدام قانون جيب التمام cosine لحل المثلثات

لا يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل مثلث مثل ذلك المبين أعلاه. ولكن يمكنك استخدام **قانون cosine** في حالة:
- معرفة قياسات ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (حالة ضلع-زاوية-ضلع).
- معرفة قياسات الأضلاع الثلاثة (حالة ضلع-ضلع-ضلع).

المفهوم الأساسي قانون الـ Cosine

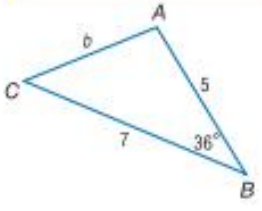


في $\triangle ABC$. إذا كانت الأضلاع التي طولها a و b و c مقابلة لزوايا قياساتها A و B و C. على التوالي. إذًا فينطبق ما يلي.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال 1 حل المثلث عند معرفة ضلعين وزاوية محصورة بينهما

جـــد حل $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد طول الضلع المجهول.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ قانون الـ Cosine

$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36°$ $a = 7, c = 5, B = 36°$

$b^2 \approx 17.4$ استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$b \approx 4.2$ جـــد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{\sin A}{7} \approx \frac{\sin 36°}{4.2}$ اضرب كل طرف في 7.

$\sin A \approx \frac{7 \sin 36°}{4.2}$

$A \approx 78°$ استخدم نسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 3 جـــد قياس الزاوية الأخرى.

$m\angle C \approx 180° - (36° + 78°)$ أو $66°$

إذًا. $b \approx 4.2$ و $A \approx 78°$ و $C \approx 466$.

تمرين موجه

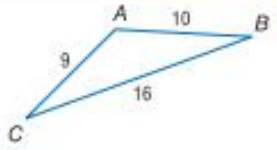
1. جـــد حل $\triangle FGH$ إذا كانت $G = 82°$ و $f = 6$ و $h = 4$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عندما تعلم فقط أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث، يمكنك حل المثلث باستخدام قانون الـ Cosine. تتمثل الخطوة الأولى في إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ويتم ذلك لضمان أن الزاويتين الأخريين حادتان عند استخدام قانون الـ Sine.

مثال 2 حل المثلث عند معرفة الأضلاع الثلاثة

جـــد حل $\triangle ABC$.



الخطوة 1 استخدم قانون cosine لإيجاد قياس الزاوية الأكبر، $\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ — قانون الـ Cosine

$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$ — $a = 16$، $b = 9$، و $c = 10$

$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$ — اطرح 9^2 و 10^2 من كل طرف.

$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$ — اقسم كل طرف على $-2(9)(10)$.

$-0.4167 \approx \cos A$ — استخدم آلة حاسبة للتبسيط.

$115° \approx A$ — استخدم النسبة $\cos^{-1}$.

الخطوة 2 استخدم قانون الـ Sine لإيجاد قياس $\angle B$.

$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115°}{16}$ — $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\sin B \approx \frac{9 \sin 115°}{16}$ — اضرب كل طرف في 9.

$\sin B \approx 0.5098$ — استخدم آلة حاسبة.

$B \approx 31°$ — استخدم النسبة $\sin^{-1}$.

الخطوة 3 جـــد قياس $\angle C$.

$m\angle C \approx 180° - (115° + 31°)$ **أو حوالي** $= 34°$

إذا، $A \approx 115°$ و $B \approx 31°$ و $C \approx 34°$.

تمرين موجّه

2. جـــد حل $\triangle ABC$ إذا كان $a = 5$ و $b = 11$ و $c = 8$.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استخدام قانون cosine مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية الثانية.

2 اختيار طريقة لحل المثلثات

يمكنك استخدام قانون الـ Sine وقانون cosine لحل مسائل تشتمل على مثلثات مائلة. وتحتاج إلى معرفة قياس ضلع واحد على الأقل وأي جزأين آخرين. إذا كان المثلث له حل، فيجب أن تحدد ما إذا كنت ستستخدم قانون الـ Sine أم قانون cosine لحل المثلث.

مراجعة المصطلحات

مائل مثلث لا يتضمن زاوية قائمة

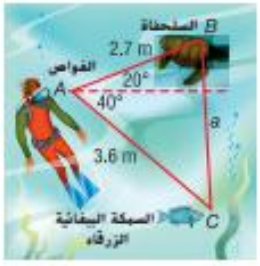
ملخص المفهوم حل المثلثات المائلة

المعطيات	ابدأ باستخدام
زاويتان وأي أضلاع	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما	قانون الـ Sine
ضلعان وزاوية محصورة بينهما	قانون الـ Cosine
ثلاثة أضلاع	قانون الـ Cosine

محفوظ الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام قانون الـ Cosine

الغطس **نظر الغواص لأعلى بزاوية 20° ورأى سلحفاة على بعد 2.7 m منه. ثم نظر لأسفل بزاوية 40° ورأى سمكة ببغائية زرقاء على بعد 3.6 m منه. ما المسافة الفارقة بين السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء؟**



الفهم أنت تعلم الزاويتين اللتين تشكلتا عندما نظر الغواص لأعلى ولأسفل. وتعلم أيضًا كم تبعد السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء عن الغواص.

التخطيط استخدم المعلومات لتصميم رسم تخطيطي وتسميته. بما أنه معلوم ضلعان وزاوية محصورة بينهما في المثلث، يمكنك استخدام قانون الـ Sine لحل المسألة.

الحل

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ قانون cosine

$a^2 = 3.6^2 + 2.7^2 - 2(3.6)(2.7) \cos 60$ $A = 60$ و $c = 2.7$ و $b = 3.6$

$a^2 = 10.53$ استخدم آلة حاسبة.

$a \approx 3.2$ جذر القيمة الموجبة لـ a.

إذًا، السلحفاة والسمكة الببغائية الزرقاء تفصل بينهما مسافة حوالي 3.2 m.

التحقق باستخدام قانون الـ Sine، يمكنك إيجاد أن $B \approx 74°$ و $C \approx 46°$. بما أن $C < A < B$ و $c < a < b$. فالحل منطقي.

الربط بالحياة اليومية

بلغ أعمق غطس في مياه البحار مسجل 313 m. وقام به غطاس في البحر الأحمر.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

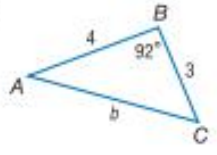
تمرين موجّه

3. **سباقات الماراثون** ركضت نهلة 6 km في نفس الاتجاه. ثم انعطفت بزاوية 79° وركضت 7 km في نهاية السباق. ما المسافة التي تبعدها نهلة عن نقطة البداية لها؟

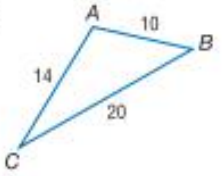
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

1.



2.

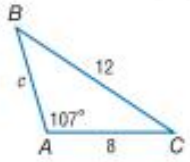


3. $a = 5, b = 8, c = 12$

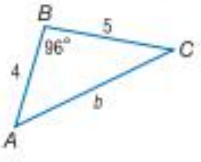
4. $B = 110°, a = 6, c = 3$

مثال 3 **الدقة** **حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حل المثلث.**

5.



6.



7. في $\triangle RST$، $R = 35°$ و $s = 16$ و $t = 9$.

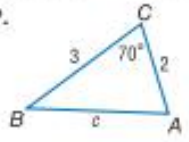
8. **كرة القدم** في مباراة كرة قدم، يبعد حارس المرمى عن المدافع A بمسافة 20 m. ودار بزاوية 40° لرؤية المدافع B الذي يبعد عنه بمسافة 16 m. ما المسافة التي تفصل بين هذين المدافعين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

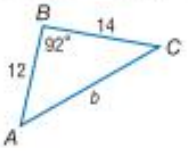
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 حُـلّ كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

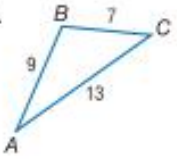
9.



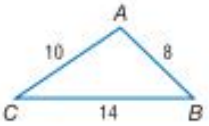
10.



11.



12.



13. $A = 116°$, $b = 5$, $c = 3$

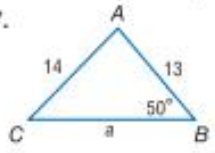
14. $C = 80°$, $a = 9$, $b = 2$

15. $f = 10$, $g = 11$, $h = 4$

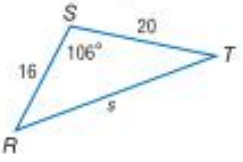
16. $w = 20$, $x = 13$, $y = 12$

مثال 3 حدد ما إذا كان كل مثلث ينبغي حله بدءًا بقانون الـ *Sine* أم قانون الـ *Cosine*. ثم حل المثلث.

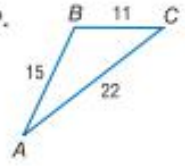
17.



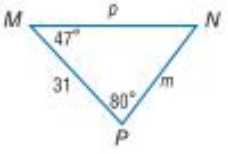
18.



19.



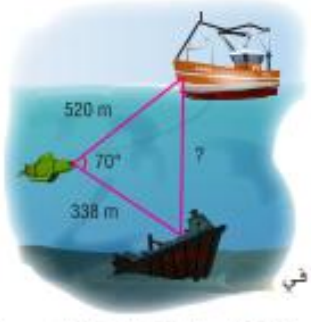
20.



21. في $\triangle ABC$، $C = 84°$ و $c = 7$ و $a = 2$.

22. في $\triangle HJK$، $h = 18$ و $j = 10$ و $k = 23$.

23. الاستكشاف جـــد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الموضحين في الرسم التخطيطي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



24. الهندسة متوازي أضلاع به ضلعان طولهما 8 cm و 12 cm. وتوجد زاوية محصورة بينهما قياسها 42°. ما طول الخطر الأقصر مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟

25. السباق مسار سباق ريفي على شكل مثلث أطوال أضلاعه هي 1.8 km و2 km و1.2 km. ما الزوايا التي يشكلها كل زوج من الأضلاع؟

26. تمثيل النماذج مزرعة على قطعة أرض مثلثية الشكل قياسها 0.9 km في 0.5 km في 1.25 km.

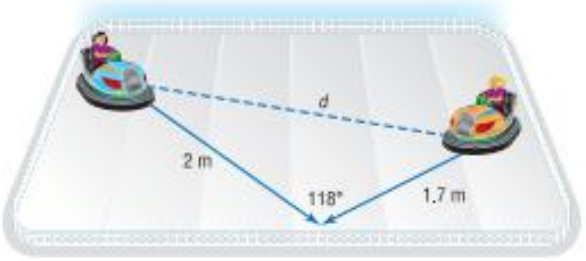
a. إذا كانت قطعة الأرض محاطة بسياج. فماذا سيكون قياس الزوايا التي تتلاقى أسياج الأضلاع الثلاثة عندها؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. ما مساحة قطعة الأرض؟

27. الأرض قطعة أرض على شكل مثلث. المسافات بين كل رأس في المثلث هي 140 m و 210 m و 300 m على التوالي. استخدم قانون cosine لإيجاد مساحة الأرض مع التقريب إلى أقرب متر مربع.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

28. الملاهي سيارتان متصادمتان في لعبة ملاهٍ اصطدمتا على النحو أدناه.



a. ما المسافة d التي كانت تبعدها السيارتان قبل التصادم؟

b. قبل التصادم، كانت توجد سيارة ثالثة على بعد 3 m من السيارة 1، و 4 m من السيارة 2. صف الزوايا التي شكلتها السيارات 1 و 2 و 3 قبل التصادم.

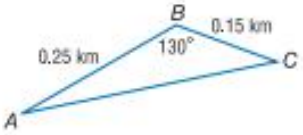
29. المتنزهات متنزه على شكل مثلث مساحته 11 m في 14 m في 10 m.

a. ارسم مساحة المتنزه لتمثيلها مع تسميتها.

b. صف كيف يمكنك إيجاد مساحة المتنزه.

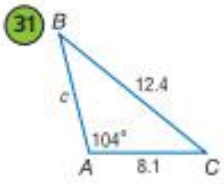
c. كم تبلغ المساحة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

30. الرياضات المائية امرأة على زورق شخصي قامت برحلة من النقطة A إلى النقطة B إلى النقطة C وهي تقطع مسافة 28 km/h. ثم عادت من النقطة C إلى نقطة البداية لها وهي تقطع مسافة 35 km/h. فكم عدد الدقائق التي استغرقتها الرحلة بالكامل؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

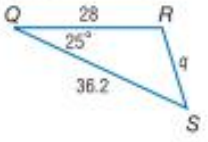


حل كل مثلث، وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

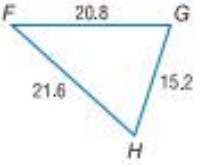
31



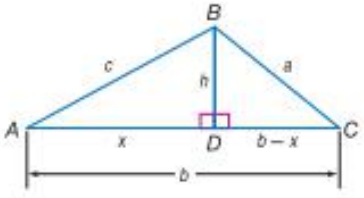
32.



33.



34. التحدي استعن بالشكل ونظرية فيثاغورس لاشتقاق قانون Cosines. استعد من الإرشادات أدناه.



- استخدم نظرية فيثاغورس أولًا لحل $\triangle DBC$.
- في $\triangle ADB$، $c^2 = x^2 + h^2$.
- $\cos A = \frac{x}{c}$

35. الفرضيات مثلث أطوال أضلاعه هي 10.6 cm و 8 cm و 14.5 cm. اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية الأكبر. ثم جد قياس هذه الزاوية مع التقريب إلى أقرب درجة.

36. مسألة غير محددة الإجابة ابتكر مسألة تطبيقية تتضمن مثلثات قائمة وقانون الـ Cosine. ثم حل مسألتك وصمم رسومًا تخطيطية إذا لزم الأمر.

37. الكتابة في الرياضيات كيف تحدد أي طريقة ينبغي استخدامها عند حل مثلث؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

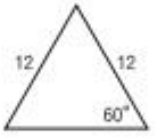
38. SAT/ACT إذا كان c و d عددين صحيحين موجبين و $4c + d = 26$. فما مجموع كل القيم الممكنة لـ c؟

A 6
B 10
C 15
D 21
E 28

39. إذا كان $6y = 21$. فما قيمة y؟

F $\log 12 - \log 6$
G $\frac{\log 21}{\log 6}$
H $\frac{\log 6}{\log 21}$
J $\log\left(\frac{6}{21}\right)$

40. الهندسة جـــد محيط الشكل.



A 24 B 30 C 36 D 48

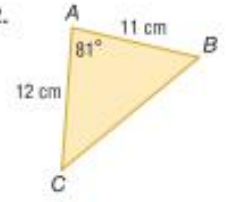
41. الإجابة القصيرة حلّ المعادلة أدناه لإيجاد x.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$$

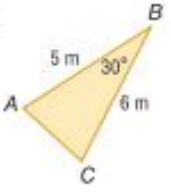
مراجعة شاملة

جـــد مساحة $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 4-5)

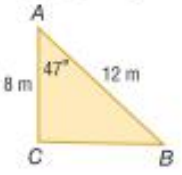
42.



43.



44.



ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 3-11)

45. (8, 5)

46. (−4, −2)

47. (6, −9)

48. الأحذية الرياضية أسعار عينة عشوائية من الأحذية الرياضية موضحة أدناه. (الدرس 2-5)

السعر (بالدرهم)				
70	300	400	250	250
150	120	250	100	70
150	160	200	170	300

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإنشاء مخطط رسم صندوقي. ثم صف شكل التوزيع.

b. صف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

49. الأعمال خلال شهر يونيو، حققت شركة «الوسائط الدولية» عائدا قدره AED 2700 من مبيعات مجموعة كاملة معينة من أسطوانات DVD. وخلال موسم تخفيضات شهر يوليو، كانت المجموعة معروضة بتخفيض AED 10. وبلغ العائد من بيع هذه المجموعة AED 3750 في يوليو مع بيع 30 مجموعة إضافية عما تم بيعه في يونيو. جـــد سعر مجموعة أسطوانات DVD لشهري يونيو ويوليو

بدون كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، حدد إذا ما كان التمثيل البياني لكل معادلة *قطعًا مكافئًا* أم *دائرةً* أم *قطعًا ناقصًا* أم *قطعًا زائدًا*.

50. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$

51. $3x^2 - 2y^2 + 32y - 134 = 0$

52. $y^2 + 18y - 2x = -84$

مراجعة المهارات

ارسم كل زاوية، ثم جـــد زاوية المرجع لها.

53. 245°

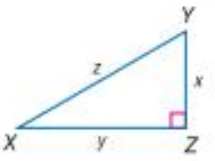
54. −15°

55. $\frac{5}{4}\pi$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

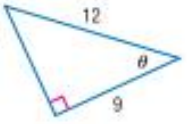
اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 5-1 إلى 5-5

حُـلّ $\triangle XYZ$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-1)



1. $Y = 65°, x = 16$
2. $x = 25°, x = 8$

3. **جـــد** قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. (الدرس 5-1)

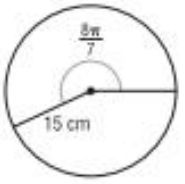


4. ارسم زاوية قياسها $-80°$ في وضع قياسي. (الدرس 5-2)

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة. (الدرس 5-2)

5. $215°$
6. $-350°$
7. $\frac{8\pi}{5}$
8. $\frac{9\pi}{2}$

9. **الاختيار من متعدد** ما طول القوس أدناه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟ (الدرس 5-2)



A 4.2 cm
B 17.1 cm
C 53.9 cm
D 2638.9 cm

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. (الدرس 5-3)

10. $\tan \pi$
11. $\cos \frac{3\pi}{4}$

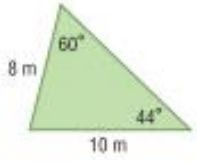
ضلع الانتهاء للزاوية θ الموجودة في وضع قياسي، يتضمن كل نقطة. جـــد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ. (الدرس 5-3)

12. $(0, -5)$
13. $(6, 8)$

14. **الاختيار من متعدد** افترض أن θ زاوية في وضع قياسي حيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع/ أرباع يقع ضلع الانتهاء لـ θ ؟ (الدرس 5-3)

F الأول
G الثاني
H الثالث
J الأول والرابع

15. **الحديقة** لدى هالة حديقة على شكل مثلث كما هو موضح في الصورة أدناه. وهي تريد تغطية الحديقة بتربة سطحية. فما مساحة المثلث؟ (الدرس 5-4)

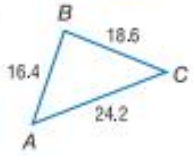


حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل واحد، أو حلّان. ثم حل المثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-4)

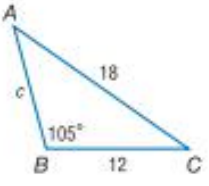
16. $A = 38°, a = 18, c = 25$
17. $A = 65°, a = 5, b = 7$
18. $A = 115°, a = 12, b = 8$

حل كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-5)

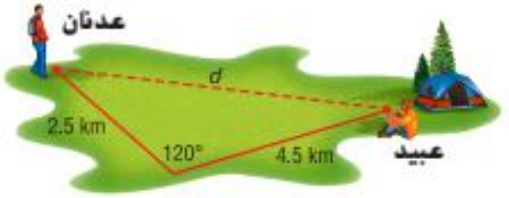
19.



20.



21. يخيم كل من عدنان وعبيد. ترك عدنان عبيد عند موقع التخييم وسار 4.5 km. ثم انعطف بزاوية 120° وسار 2.5 km. إذا سار عدنان مباشرة عائدًا إلى عبيد، فما المسافة التي سيقطعها مشيًا؟ (الدرس 5-5)



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

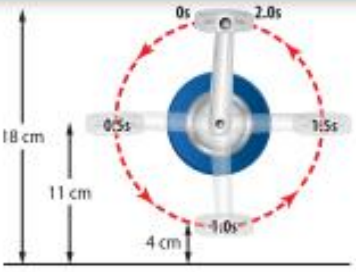
5-6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية

السابق:
- قمت بإيجاد قيمة الدوال المثلثية باستخدام زوايا المرجع.

الحالي:
1. التعرف على دائرة الوحدة والنسب المثلثية.
2. استخدام خصائص الدوال الدورية لإيجاد قيمة الدوال المثلثية.

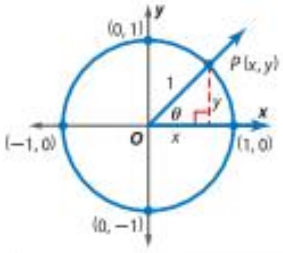
لماذا؟
- تدور دواسات الدراجة أثناء قيادتها. ويكون ارتفاع الدواسة دالة زمن. كما هو موضح بالشكل على اليسار.

لاحظ أن الدواسة تصنع دورة كاملة كل ثانيتين.



1 الدوال الدائرية

دائرة الوحدة هي دائرة يبلغ نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام النقطة P على دائرة الوحدة لتعميم دوال sine و cosine.



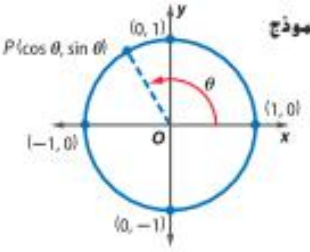
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

إذًا، قيمة $\sin\theta$ وقيمة $\cos\theta$ هما الإحداثي y والإحداثي x، على التوالي، للنقطة التي يتقاطع فيها ضلع الانتهاء لـ θ مع دائرة الوحدة.

المفهوم الأساسي الدوال على دائرة وحدة

الشرح: إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.

النموذج:



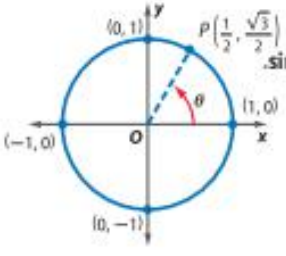
الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$، فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$.

كل من $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$ دالة لـ θ. ولأنه تم تحديدهما باستخدام دائرة وحدة، فإنه يُطلق عليهما **دوال دائرية**.

مثال 1 إيجاد sine و cosine بدلالة نقطة على دائرة الوحدة

يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. جد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.



$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين موجّه

1. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. جد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

المفردات الجديدة
- دائرة الوحدة — unit circle
- دائرية — circular function
- دالة دورية — periodic function
- دورة — cycle
- فترة — period

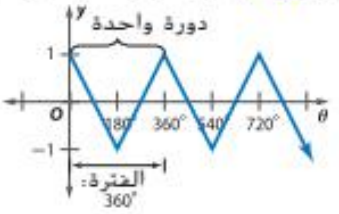
ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدوال الدورية

تحتوي **الدالة الدورية** على قيم y التي تتكرر على فترات منتظمة. ويُسمى النمط الواحد المكتمل **دورة**. ويُسمى الطول الأفقي للدورة الواحدة **فترة**.

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

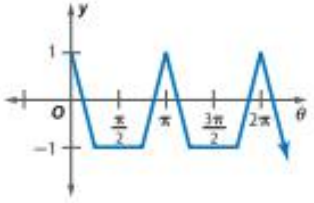


تتكرر الدورة كل 360°.

نصيحة دراسية

الدورات يمكن أن تبدأ الدورة من أي نقطة على التمثيل البياني للدالة الدورية. ففي المثال 2، إذا كانت بداية دائرة الوحدة عند النقطة $\frac{\pi}{2}$، فإن النمط يتكرر عند $\frac{3\pi}{2}$ الفترة هي $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$ أو π.

مثال 2 تحديد الفترة



حدد فترة الدالة.

يتكرر النمط عند 2π و π وهكذا.
إذًا، الفترة هي π.

تمرين موجّه

2. ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة لها فترة من 4.

يعد دوران العجلات والدواسات ودوامات الخيل بمدن الملاهي والأجسام في الفضاء دورانًا دوريًا.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية

قيادة الدراجات **راجع بداية الدرس. يختلف ارتفاع دواسة الدراجة دوريًا كدالة زمن، مثلما هو موضح في الشكل.**

الزمن (s)	الطول (cm)
0	18
0.5	11
1.0	4
1.5	11
2.0	18
2.5	11
3.0	4

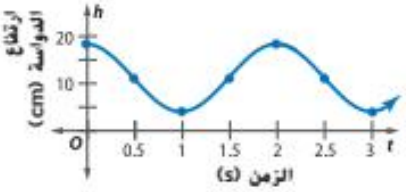
a. ارسم جدولًا يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

بعد 0 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 18 cm.
وبعد 0.5 ثانية، يكون ارتفاع الدواسة 11 cm.
وبعد 1.0 ثانية، يكون الارتفاع 4 cm وهكذا.

b. حدد فترة الدالة.

الفترة هي الوقت المستغرق لعمل لفة واحدة كاملة. إذًا، الفترة هي ثانيتان.

c. مثّل الدالة بيانيًا. وافترض أن المحور الأفقي يمثل الوقت t والمحور الرأسي يمثل ارتفاع h الدواسة عن الأرض بالسنتيمترات.



أقصى ارتفاع للدواسة هو 18 cm. وأدنى ارتفاع هو 4 cm. ولأن فترة الدالة ثانيتان. يتكرر نمط التمثيل البياني على فترات من ثانيتين.

تمرين موجّه

3. قيادة الدراجات يقود سائق آخر الدراجة ذاتها بمعدل لفة واحدة كل ثانية.

A. ارسم جدولاً يبين ارتفاع دواسة الدراجة بعد 0، 0.5، 1.0، 1.5، 2.0، 2.5، 3.0 ثوانٍ.

B. حدد الفترة ومثل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

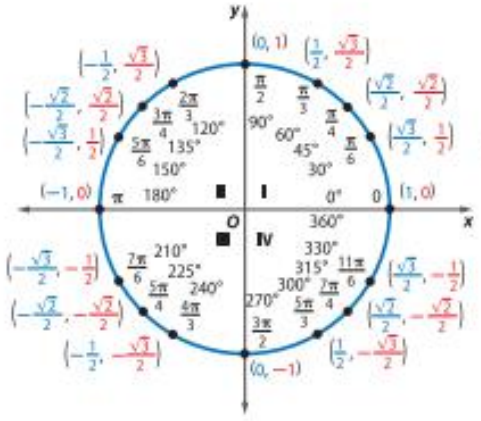
يقود معظم سائقي الدراجات المتنافسين دراجاتهم بمعدلات أكبر من 200 لفة في الدقيقة. ويقود معظم الأشخاص الآخرين دراجاتهم بمعدل يتراوح بين 90 و 120 لفة في الدقيقة.

المصدر: SpringerLink

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

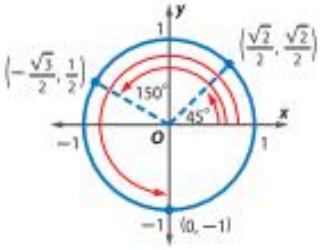
sine و cosine لمساعدتك على تذكر أنه بالنسبة إلى نقطة (x, y) على دائرة وحدة، فإن x. $= \cos \theta$ و $y = \sin \theta$. لاحظ أن الحرف x يسبق الحرف y أبجديًا وكذلك *cosine* يسبق *sine* الزاوية.



موضح على دائرة الوحدة المبينة على اليسار القيم الدقيقة لكل من $\cos \theta$ و $\sin \theta$ للزوايا الخاصة. وقيم cosine هي الإحداثي x للنقاط الواقعة على دائرة الوحدة. أما قيم sine فهي الإحداثي y.

يمكنك استخدام هذه المعلومات لتمثيل دوال sine الزاوية و cosine بيانيًا. وذلك بفرض أن المحور الأفقي يمثل قيم θ والمحور الرأسي يمثل قيم $\sin \theta$ أو $\cos \theta$.

تتكرر دورة دوال sine و cosine كل $360°$. ولذا، فهي دوال دورية. وفترة كل دالة هي $360°$ أو 2π.



تأمل النقاط الواردة على دائرة الوحدة عندما تكون $\theta = 45°$، و$\theta = 150°$، و$\theta = 270°$.

$$(\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

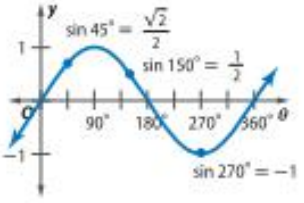
$$(\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

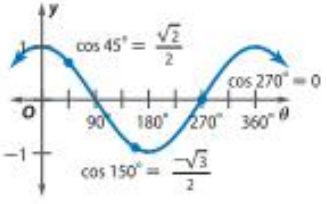
$$(\cos 270°, \sin 270°) = (0, -1)$$

نصيحة دراسية

الراديان يمكن تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا باستخدام الراديان باعتبارها الوحدات المستخدمة على المحور θ.

يمكن توضيح هذه النقاط أيضًا على تمثيلات بيانية لدوال sine و cosine.





حيث إن فترة دوال sine و cosine هي $360°$. فإن القيم تتكرر كل $360°$.
إذًا $\sin (x + 360°) = \sin x$ و $\cos (x + 360°) = \cos x$.

مثال 4 إيجاد قيم التعابير المثلثية

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos 480°$

$$\cos 480° = \cos (120° + 360°)$$
$$= \cos 120°$$
$$= -\frac{1}{2}$$

b. $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$$
$$= \sin \frac{3\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرين موجّه

4A. $\cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

4B. $\sin 420°$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

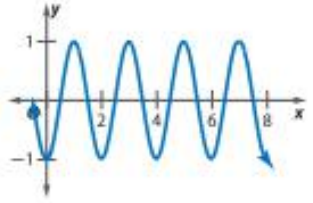
مثال 1 **البنية** يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. جـــد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

1. $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

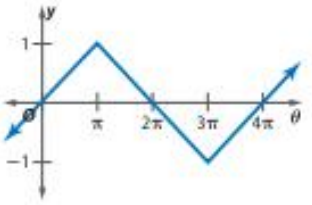
2. $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 حدد فترة كل دالة.

3.



4.



مثال 3

5. **الأرجوحات** يتغير ارتفاع الأرجوحة دوريًا كدالة الزمن. فالأرجوحة تتحرك للأمام وتصل إلى نقطة بارتفاع 6 m. ثم تعود للوراء وتصل إلى ارتفاع 6 m مرة أخرى. وتبلغ أدنى نقطة لها 2 m. والزمن المستغرق للتأرجح من أعلى نقطة إلى أدنى نقطة هو ثانية واحدة.

   a. ما المدة التي تستغرقها الأرجوحة في الحركة إلى الأمام والخلف مرة واحدة؟

   b. مثّل ارتفاع الأرجوحة h بيانيًا كدالة زمن t.

مثال 4 جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

6. $\sin\frac{13\pi}{6}$

7. $\sin(-60^\circ)$

8. $\cos 540^\circ$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند كل نقطة P. جـــد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

9. $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

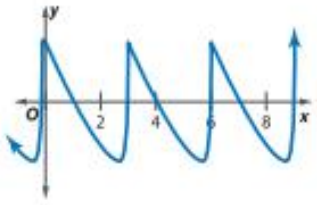
10. $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

11. $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

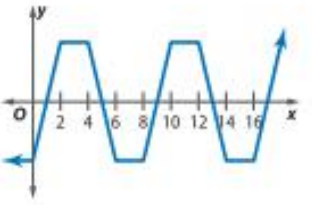
12. $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 حدد فترة كل دالة.

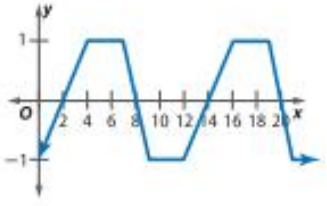
13.



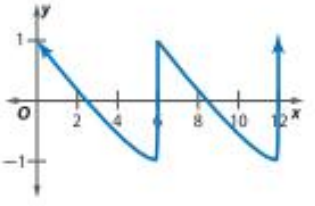
14.



15.



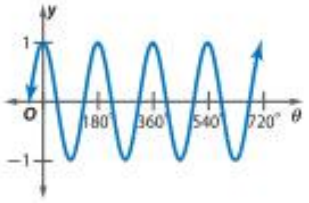
16.



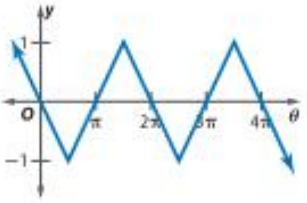
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدد فترة كل دالة.

17.



18.



مثال 3

19. **الطقس** موضح بالجدول متوسط درجة الحرارة العظمى في كل شهر لإحدى المدن.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة يمثل هذه الحالة.

b. صف فترة الدالة.

متوسط درجة الحرارة العظمى			
الشهر	درجة الحرارة (°C)	الشهر	درجة الحرارة (°C)
يناير	2	يوليو	29
فبراير	5	أغسطس	28
مارس	11	سبتمبر	26
أبريل	18	أكتوبر	19
مايو	23	نوفمبر	11
يونيو	28	ديسمبر	5

المصدر: The Weather Channel

مثال 4

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

20. $\sin \frac{7\pi}{3}$

21. $\cos(-60°)$

22. $\cos 450°$

23. $\sin \frac{11\pi}{4}$

24. $\sin(-45°)$

25. $\cos 570°$

26. **التبرير المنطقي** في صورة المحرك الموضحة على اليسار. تُسمى المسافة d الواقعة بين المكبس ومركز الدائرة العمود المرفقي، وهي عبارة عن دالة السرعة لعصا المكبس. وتدور النقطة R الواقعة على عصا المكبس 150 لفة في الثانية.

a. حدد فترة الدالة على هيئة جزء من الثانية.

b. إذا كانت أقصى مسافة d هي 0.5 cm. وأطول مسافة هي 3.5 cm. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t. والمحور الرأسي يمثل المسافة d.

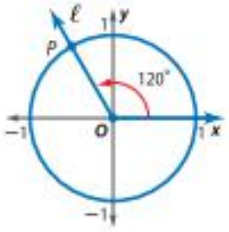
27. **الأعاصير** تصنع صافرة إنذار الأعاصير 2.5 لفة في الدقيقة ويصل نصف قطر شعاع الصوت 1 km. يقع منزل السيدة هدى على بُعد 1 km من الصافرة. ويختلف بُعد الشعاع الصوتي عن منزلها دوريًا على هيئة دالة زمن.

a. حدد فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة مع فرض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t من 0 ثانية حتى 60 ثانية. وفرض أن المحور الرأسي يمثل المسافة d بين الشعاع الصوتي ومنزل السيدة هدى في زمن t.

28. **عجلة فيريس الدوارة** يصل قطر عجلة دوارة في الصين إلى 155 m تقريبًا. وبعد ارتفاع المقصورة h دالة للزمن t. ويستغرق عمل لفة واحدة كاملة حوالي 30 ثانية. افترض أن الارتفاع عند مركز العجلة يمثل الارتفاع عند الزمن 0. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



29. التمثيلات المتعددة يتقاطع ضلع الانتهاء لزاوية ما في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة عند النقطة P. كما هو موضح في الشكل.

a. هندسيًا انسخ الشكل. وارسم مستقيمات تمثل الزوايا $30°, 60°, 150°, 210°, 315°$.

b. جدوليًا استخدم جدول قيم لتوضيح ميل كل مستقيم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

c. تحليليًا ما التبريرات التي يمكنك الخلوص إليها عن العلاقة بين ضلع الانتهاء للزاوية والميل؟ اشرح استنتاجك.

30. عكاز البهلوان يقفز شخص لأعلى وأسفل على عكاز بهلوان بمعدل ثابت. والفرق بين أعلى وأدنى نقطتين له هو 60 cm. يقفز هذا الشخص 50 مرة في الدقيقة.

a. صف المتغير المستقل والمتغير التابع للدالة الدورية التي تمثل هذه الحالة. ثم اذكر فترة الدالة بالثواني.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يعبر عن تغير ارتفاع الشخص الواثب بالنسبة إلى نقطة البداية لديه. افترض أن نقطة البداية في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة له. وافترض أيضًا أن المحور الأفقي يمثل الزمن t بالثواني وأن المحور الرأسي يمثل الارتفاع h.

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

31 $\cos 45° - \cos 30°$

32. $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

33. $2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

34. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$

35. $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

36. $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. التفكير النقدي تعمل هداية ونجلاء على إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير $\cos \frac{-\pi}{3}$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

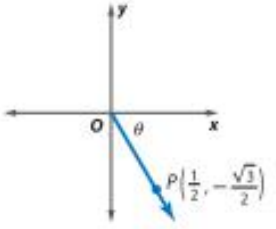
هداية

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نجلاء

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{5\pi}{3}$$
$$= 0.5$$

38. التحدي شعاع له نقطة طرفية عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. وتقع النقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على الشعاع. جـــد الزاوية θ التي كوّنها المحور x مع الشعاع.



39. التبرير هل تكون فترة منحنى sine من مضاعفات π أحيانًا، أم دائمًا، أم لا تكون أبدًا؟ برر استنتاجك.

40. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة دورية قيمتها العظمى 10 وقيمتها الصغرى 10−. صف فترة الدالة.

41. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقة تحديد فترة دالة دورية من تمثيلها البياني مع تضمين وصف للدورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

42. الإجابة القصيرة صف إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + 4)^2 - 3$.

43. يتم تمثيل التناقص في المعدل السكاني لمدينة هامبتون كوف بيا بلي $P(t) = 24{,}000e^{-0.0064t}$. حيث t هو الزمن بالأعوام و24,000 هو عدد السكان الحالي. بعد كم عام سيكون تعداد السكان 10,000؟

A 14 B 104 C 137 D 375

44. SAT/ACT إذا كان $d^2 + 8 = 21$. فإن $d^2 - 8 =$

F 0 H 13 K 161

G 5 J 31

45. الإحصائيات إذا كان متوسط ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة هو 65. فما أكبر قيمة محتملة لواحد من هذه الأعداد الصحيحة؟

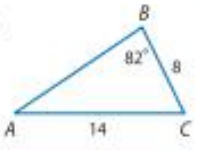
A 192 B 193 C 194 D 195

46. الإجابة الشبكية إذا كان $8xy + 3 = 3$. فما قيمة xy؟

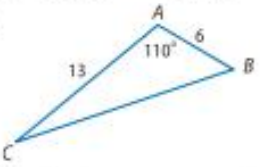
مراجعة شاملة

حُـلّ كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-5)

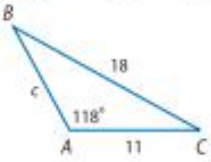
47.



48.



49.



حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أو له حل *واحد*، أو حلّان. ثم حل المثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 4-5)

50. $A = 72^\circ$, $a = 6$, $b = 11$

51. $A = 46^\circ$, $a = 10$, $b = 8$

52. $A = 110^\circ$, $a = 9$, $b = 5$

تصل نسبة نجاح التوزيع ذي حدين إلى 70%. وهناك 10 محاولات.

53. ما احتمال فشل 3 محاولات؟

54. ما احتمال نجاح 7 محاولات على الأقل؟

55. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

56. الألعاب يوضح الرسم التخطيطي لوحة إحدى الألعاب التي يتم فيها إسقاط كرات من ممر مائل. وحسب نمط من المسامير والحواجز، تتجه الكرات في مسارات مختلفة إلى الأقسام السفلية. بالنسبة إلى كل قسم، كم عدد المسارات الموجودة باللوحة التي تؤدي إلى ذلك القسم؟

57. الرواتب يصل الراتب الحالي لفهد AED 40,000 في العام. وداتما ما تكون الزيادة السنوية في راتبه نسبة من الراتب في ذلك الوقت. فماذا سيكون راتبه إذا حصل على أربع زيادات متتالية نسبتها 4%؟

حُـلّ كل نظام من المعادلات.

58. $y = x + 2$
$y = x^2$

59. $4x + y^2 = 20$
$4x^2 + y^2 = 100$

مراجعة المهارات

بسّط كل تعبير.

60. $\dfrac{240}{\left|1 - \frac{5}{4}\right|}$

61. $\dfrac{180}{\left|2 - \frac{1}{3}\right|}$

62. $\dfrac{90}{\left|2 - \frac{11}{4}\right|}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 5-7

التمثيل البياني للدوال المثلثية

السابق
- لقد استكشفت الدوال الدورية.

الحالي
1. وصف دوال الجيب sine وجيب التمام cosine والظل tan وتمثيلها بيانيًا.
2. وصف الدوال المثلثية غير دوال الجيب sine وجيب التمام cosine والظل tan وتمثيلها بيانيًا.

لماذا؟
- موجات الضوء المرئي لها أطوال موجية أو فترات مختلفة. فالأحمر له أطول طول موجي والبنفسجي له أقصر طول موجي.

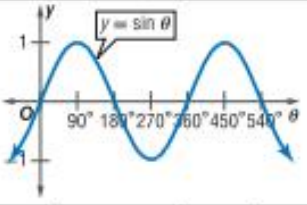
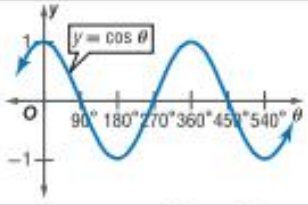
المفردات الجديدة
- **السعة** amplitude
- **التردد** frequency

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 دوال الجيب sine وجيب التمام cosine والظل tan

من الممكن أيضًا تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا على المستوى الإحداثي. تذكر أن التمثيلات البيانية للدوال الدورية لها أنماط متكررة، أو دورات. يُسمى الطول الأقصى لكل دورة الفترة. وتساوي **سعة** التمثيل البياني لدالة sine أو cosine نصف الفارق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

المفهوم الأساسي دالة sine ودالة cosine

الدالة الأصلية	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	{جميع الأعداد الحقيقية}	{جميع الأعداد الحقيقية}
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
الفترة	360°	360°

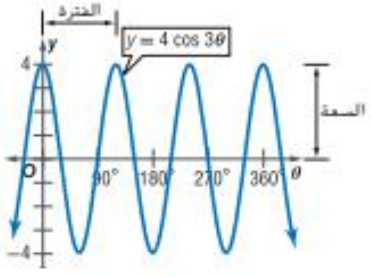
ومثلما هو الحال مع الدوال الأخرى، فإن الدوال المثلثية قابلة للتحويل. بالنسبة للتمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$، فإن السعة $= |a|$ والفترة $= \frac{360^\circ}{|b|}$.

مثال 1 إيجاد السعة والفترة

جـــد السعة والفترة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: $|a| = |4| = 4$

الفترة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|3|} = 120^\circ$



تمرين موجّه

جـــد السعة والفترة لكل دالة.

1A. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

1B. $y = 3 \sin 5\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استخدم التمثيلات البيانية للدوال الأصلية لتمثيل $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ بيانيًا. ثم استخدم السعة والفترة لرسم المنحنيات الصحيحة لـ sine و cosine. يمكنك أيضًا استخدام نقاط تقاطع θ لمساعدتك على تمثيل الدوال بيانيًا.

نقاط تقاطع θ في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ في دورة واحدة هي كالآتي.

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

نصيحة دراسية

الفترات في $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$. تمثل b عدد الدورات بـ 360°. في المثال 1، يشير العدد 3 في $y = 4 \cos 3\theta$ إلى وجود ثلاث دورات بـ 360°. إذًا، توجد دورة واحدة بـ 120°.

مثال 2 التمثيل البياني لدالة sine ودالة cosine

مثّل كل دالة بيانيًا.

a. $y = 2 \sin \theta$

جد السعة والفترة ونقاط التقاطع مع المحور الأفقي لـ x: $a = 2$ و $b = 1$.

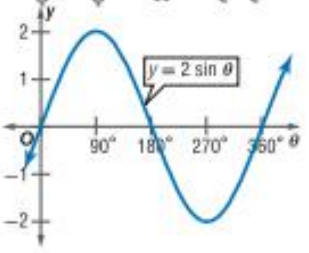
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← التمثيل البياني ممدد رأسيًا. ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|1|} = 360^\circ$ ← دورة واحدة لها طول يساوي 360°.

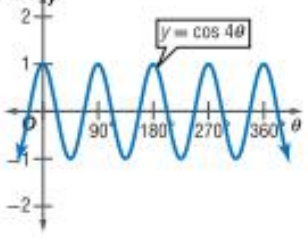
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$

$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$



b. $y = \cos 4\theta$



السعة: $|a| = |1| = 1$

الفترة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x.

$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$

نصيحة دراسية

السعة التمثيلات البيانية لكل من $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ والتي سعتها $|a|$ لها قيم عظمى عند $y = a$ وقيم صغرى عند $y = -a$.

تمرين موجّه

2A. $y = 3 \cos \theta$

2B. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل الحركة الدورية بالحياة اليومية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو الموجات الصوتية. وغالبًا ما توصف هذه الموجات باستخدام التردد. و**التردد** هو عدد الدورات في وحدة زمنية محددة.

وتردد التمثيل البياني للدالة هو المعكوس الضربي لفترة هذه الدالة.

إذًا، إذا كانت فترة الدالة تساوي $\frac{1}{100}$ من الثانية، فإن التردد يساوي 100 دورة في الثانية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية تمثيل الحالات الدورية بالنماذج

الصوت **يُعرف الصوت الذي يقل تردده عن نطاق أذن الإنسان باسم *الصوت دون السمعي*. تستطيع الأفيال سماع أصوات في المدى دون السمعي، بترددات منخفضة تصل إلى 5 هرتز (Hz). أو 5 دورات في الثانية.**

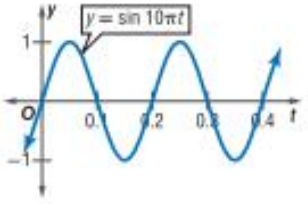
a. جـــد فترة الدالة التي تمثل الموجات الصوتية.

توجد 5 دورات في الثانية. والفترة هي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة.

إذًا، الفترة هي $\frac{1}{5}$ أو 0.2 ثانية.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل الموجات الصوتية y على هيئة دالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$\text{الفترة} = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	اكتب العلاقة بين الفترة و b.
$0.2 = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	التعويض
$0.2\lvert b \rvert = 2\pi$	بضرب كل طرف في $\lvert b \rvert$.
$b = 10\pi$	بضرب كل طرف في 5، تكون b موجبة.
$y = a \sin b\theta$	اكتب المعادلة العامة لدالة sine.
$y = 1 \sin 10\pi t$	$\theta = t$ و $b = 10\pi$، $a = 1$
$y = \sin 10\pi t$	بسّط.



تمرين موجّه

3. الصوت يستطيع الإنسان سماع أصوات بترددات منخفضة تصل إلى 20 هرتز.

A. جـــد فترة الدالة.

B. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة cosine لتمثيل الموجات الصوتية. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

تستطيع الأفيال سماع الصوت القادم من مسافة تبعد 8 km. ويستطيع الإنسان سماع أصوات ينحصر ترددها بين 20 Hz و 20000 Hz.

المصدر: School for Champions

نصيحة دراسية

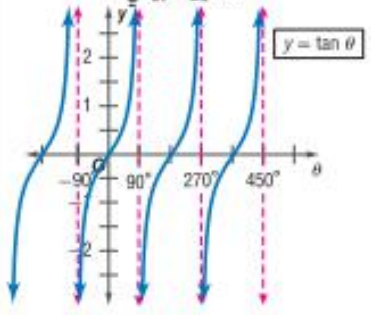
السعة والفترة لاحظ أن السعة تؤثر على المحور الرأسي بالتمثيل البياني. والفترة تؤثر على المحور الأفقي.

دالة tangent الزاوية هي إحدى الدوال المثلثية التي يوجد في تمثيلاتها البيانية خطوط تقارب.

المفهوم الأساسي دالة tangent الزاوية

الدالة الأصلية	$y = \tan\theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n\}$ n عدد صحيح}
المدى	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة
الفترة	$180°$
نقاط تقاطع θ في دورة واحدة	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

التمثيل البياني



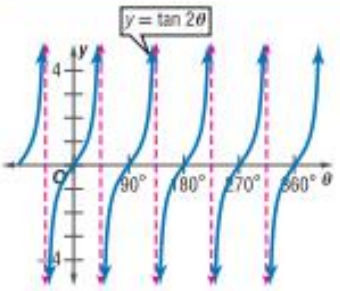
بالنسبة للتمثيل البياني لـ $y = a \tan b\theta$. الفترة $= \frac{180°}{\lvert b \rvert}$. لا توجد سعة وخطوط التقارب هي مضاعفات فردية لـ $\frac{180°}{2\lvert b \rvert}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

Tangent الزاوية ليس لدالة Tangent الزاوية سعة لأنه ليس لها قيم عظمى أو صغرى.

مثال 4 تمثيل دوال Tangent الزاوية بيانيًا



جـــد فترة $y = \tan 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

الفترة: $\frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$

خطوط التقارب: $\frac{180^\circ}{2|b|} = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$

ارسم خطوط التقارب عند $45^\circ \cdot 1-$ أو -45°، $45^\circ \cdot 1$ أو 45°، $45^\circ \cdot 3$ أو 135°، وهكذا.

استخدم $y = \tan \theta$. ولكن ارسم دورة واحدة كل 90°.

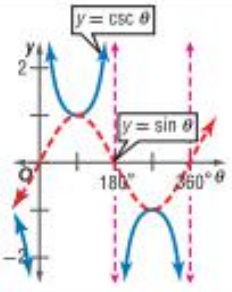
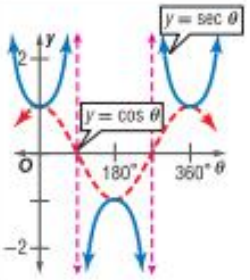
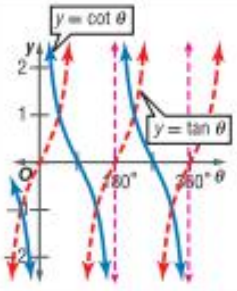
تمرين موجّه

4. جـــد فترة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

2 التمثيلات البيانية للدوال المثلثية غير دوال الجيب sine وجيب التمام cosine والظل tan

ترتبط التمثيلات البيانية لدوال Tangent و secant و cotangent بالتمثيلات البيانية لدوال sine و cosine وظل الزاوية.

المفهوم الأساسي دوال Cosecant و Secant و Cotangent

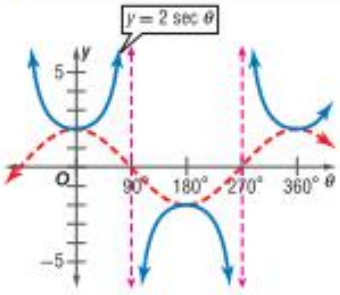
الدالة الأصلية	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n\}$ n عدد صحيح	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n\}$ n عدد صحيح	$\{\theta \mid \theta \neq 180n\}$ n عدد صحيح
المدى	عدد حقيقي $\{y \mid y < -1$ أو $y > 1\}$	عدد حقيقي $\{y \mid y < -1$ أو $y > 1\}$	{جميع الأعداد الحقيقية}
السعة	غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة
الفترة	360°	360°	180°

نصيحة دراسية

الدوال العكسية

يمكنك استخدام التمثيلات البيانية لـ $y = \sin\theta$، $y = \cos\theta$، و $y = \tan\theta$ لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا. إلا أن هذه التمثيلات البيانية لا تكون جزءًا من التمثيلات البيانية لدوال cosecant و secant و cotangent.

مثال 5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى



جـــد الفترة $y = 2\sec\theta$. ثم مثل الدالة بيانيًّا.

حيث إن $2\sec\theta$ معكوس ضربي لـ $2\cos\theta$، إذًا فالتمثيلات البيانية لها الفترة نفسها: 360°. وتحدث خطوط التقارب الرأسية عند النقاط التي يكون فيها $\cos\theta = 0$ 2. إذًا، توجد خطوط التقارب عندما تكون $\theta = 90^\circ$ و $\theta = 270^\circ$.

ارسم $y = 2\cos\theta$ واستخدمها لتمثيل $y = 2\sec\theta$ بيانيًا.

تمرين موجّه

5. جـــد فترة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **جـــد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

1. $y = 4 \sin \theta$
2. $y = \sin 3\theta$
3. $y = \cos 2\theta$
4. $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

مثال 3 5. **العناكب** عند تعلق حشرة في شبكة عنكبوت، تهتز الشبكة بتردد 14 هرتز.

a. جـــد فترة الدالة.

b. افرض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب معادلة sine لتمثيل اهتزاز الشبكة y كدالة للزمن t. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

المثالان 5-4 **جـــد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = 3 \tan \theta$
7. $y = 2 \csc \theta$
8. $y = \cot 2\theta$

التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **جـــد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

9. $y = 2 \cos \theta$
10. $y = 3 \sin \theta$
11. $y = \sin 2\theta$
12. $y = \cos 3\theta$
13. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$
14. $y = \sin 4\theta$
15. $y = \frac{3}{4} \cos \theta$
16. $y = \frac{3}{2} \sin \theta$
17. $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$
18. $y = 4 \cos 2\theta$
19. $y = 3 \cos 2\theta$
20. $y = 5 \sin \frac{2}{3}\theta$

مثال 3 21. **التبرير** قارب في البحيرة يترنح لأعلى ولأسفل مع الأمواج. والفرق بين أعلى نقطة وأسفل نقطة يصل إليها القارب هو 8 cm. ويقع القارب عند نقطة التوازن عندما يكون في منتصف طريقه بين أعلى نقطة وأسفل نقطة. وكل دورة من دورات الحركة تستمر لمدة 3 ثوانٍ.

a. اكتب معادلة تمثل حركة القارب. واقرض أن h تمثل أعلى نقطة مقاسة بالسنتيمترات واقرض أن t تمثل الزمن مقاسًا بالثواني. بفرض أن القارب يكون عند نقطة توازنه عندما $t = 0$ ثانية.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح ارتفاع القارب في صورة دالة الزمن.

22. **الكهرباء** الجهد المتوفر في أحد المنافذ الكهربية عبارة عن دالة دورية يتذبذب، أو يتأرجح أعلى وأسفل، بين 165− فولت و 165 فولت بتردد 50 دورة في الثانية.

a. اكتب معادلة تمثل الجهد V في صورة دالة للزمن t. افرض أنه عندما يكون $t = 0$ ثانية، فإن التيار يساوي 165 فولت.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

المثالان 5-4 **جـــد فترة كل دالة ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

23. $y = \tan \frac{1}{2}\theta$
24. $y = 3 \sec \theta$
25. $y = 2 \cot \theta$
26. $y = \csc \frac{1}{2}\theta$
27. $y = 2 \tan \theta$
28. $y = \sec \frac{1}{3}\theta$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. **الزلازل** رصدت محطة لرصد الزلازل موجة زلزال ترددها 0.5 هرتز وسعتها 1 m.

a. اكتب معادلة تتضمن sine لتمثيل ارتفاع الموجة h في صورة دالة للزمن t. افرض أن نقطة توازن الموجة، $h = 0$، عند نقطة المنتصف بين أعلى نقطة وأسفل نقطة.

b. مثل الدالة بيانيًا. ثم حدد ارتفاع الموجة بعد مرور 20.5 ثانية.

30. **المثابرة** جسم معلق في زنبرك كما هو موضح على اليسار. وهو يتذبذب حسب المعادلة $y = 20 \cos \pi t$. حيث تكون y هي المسافة مقاسة بالسنتيمترات من موضع نقطة التوازن في الزمن t.

a. صف حركة الجسم بإيجاد ما يلي: السعة مقاسة بالسنتيمترات، والتردد مقاس بعدد الاهتزازات في الثانية الواحدة، والفترة مقاسة بالثواني.

b. جـــد المسافة التي يقطعها الجسم من نقطة توازنه عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثانية.

c. المعادلة $v = (-20 \text{ cm})(\pi \text{ rad/s}) \cdot \sin(\pi \text{ rad/s} \cdot t)$ تمثل سرعة v الجسم في زمن t. جـــد السرعة عندما تكون $t = \frac{1}{4}$ ثوان.

31. **البيانو** تهتز أوتار البيانو بتردد 130 هرتز.

a. اكتب معادلة باستخدام cosine ومثلها بيانيًا لتمثيل اهتزاز الوتر y في صورة دالة للزمن t. وافرض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

b. افرض أن تردد الاهتزاز قد تضاعف. فهل تظل السعة والفترة كما هي أم تزيد أم تقل؟ اشرح.

جـــد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

32. $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta$

33. $y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4}\theta$

34. $y = 2 \tan \frac{1}{2}\theta$

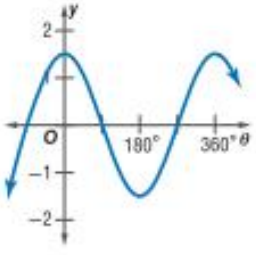
35. $y = 2 \sec \frac{4}{5}\theta$

36. $y = 5 \csc 3\theta$

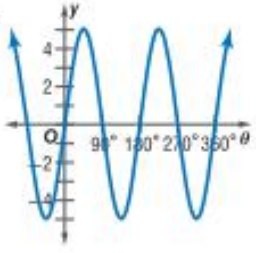
37. $y = 2 \cot 6\theta$

حدد فترة التمثيل البياني واكتب معادلة كل دالة.

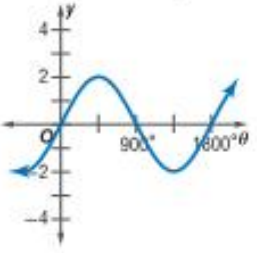
38.



39.



40.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **التحدي** صف مجال ومدى $y = a \cos \theta$ و $y = a \sec \theta$. حيث a هي أي عدد حقيقي موجب.

42. **التبرير** قارن بين التمثيلات البيانية لـ $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $y = \sin \frac{1}{2}\theta$.

43. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة مثلثية لها سعة 3 وفترة 180°. ثم مثل الدالة بيانيًا.

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام خواص دالة مثلثية من أجل رسم تمثيلها البياني؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

45. الإجابة القصيرة جـــد الحد رقم 100,001 في التسلسل.

13, 20, 27, 34, 41, ...

46. الإحصاء لعبت خمس جولات في البولينج وكانت النتيجة كالآتي: 156, 133, 167, 171, 143. فماذا كان متوسطك؟

A 147 **B** 153 **C** 154 **D** 156

47. بلغ التعداد السكاني في مدينتك 312,430 منذ عشرة أعوام. فإذا كان التعداد الحالي هو 418,270. فما نسبة النمو على مدار 10 أعوام ماضية؟

F 25% **G** 34% **H** 66% **J** 75%

48. SAT/ACT إذا كان $h + 4 = b - 3$. فإن $(h - 2)^2 =$

A $h^2 + 4$ **D** $b^2 - 14b + 49$

B $b^2 - 6b + 3$ **E** $b^2 - 10b + 25$

C $b^2 - 18b + 81$

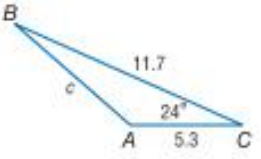
مراجعة شاملة

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 2-5)

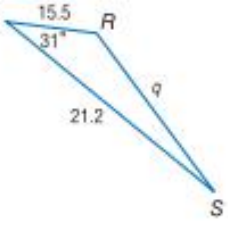
49. $\cos 120^\circ - \sin 30^\circ$ **50.** $3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$ **51.** $4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

حُـلّ كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (الدرس 5-5)

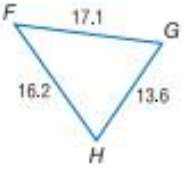
52.



53.



54.



تصل نسبة نجاح التوزيع ذي الحدين إلى 40%. وهناك 12 محاولة.

55. ما احتمال فشل 5 محاولات؟

56. ما احتمال نجاح 8 محاولات على الأقل؟

57. ما العدد المتوقع للمحاولات الناجحة؟

58. خدمات مصرفية أودعت نورا 1000 AED في حساب مصرفي. وبنهاية كل عام يصدر المصرف مرابحة إلى حسابها بمقدار 3% من الرصيد. ثم يخصم رسومًا سنوية قيمتها 10 AED.

a. افرض أن b_0 هو المبلغ الذي أودعته نورا. اكتب معادلة تكرارية للرصيد b_n الذي سيكون في حسابها بنهاية عدد n من الأعوام.

b. جـــد الرصيد المودع في الحساب بعد أربعة أعوام.

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة شروط مما يلي.

59. يقع المركز عند (3, 6)، وإحدى بؤرتيه عند (3, 2)، ويقع الرأس المرافق عند (1, 6)

60. تقع البؤرتان عند (1, 2) و (13, 2)، ويقع الرأس المرافق عند (7, 5)

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا.

61. $y = 2(x - 3)^2 - 4$ **62.** $y = \frac{1}{3}(x + 5)^2 + 2$ **63.** $y = -3(x + 6)^2 + 7$

McGraw-Hill Education مجموعة شركات © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح

5-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيلات البيانية المثلثية

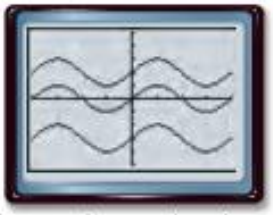
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف تحويلات التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 k في $y = \sin \theta + k$

مثّل بيانيًا $y = \sin \theta$ و $y = \sin \theta + 2$ و $y = \sin \theta - 3$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

اضبط نافذة العرض لتطابق النافذة الموضحة على اليسار.
وافترض أن Y1 = sin θ و Y2 = sin θ + 2 و Y3 = sin θ − 3.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

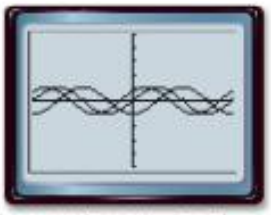
خطوات العملية على الحاسبة: Y= SIN X,T,θ,n) ENTER
SIN X,T,θ,n) + 2 ENTER
SIN X,T,θ,n) − 3 GRAPH

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه ولكن بمواضع رأسية مختلفة.

النشاط 2 h في $y = \sin (\theta - h)$

مثّل بيانيًا $y = sin\ \theta$ و $y = sin\ (\theta + 45°)$ و $y = sin\ (\theta - 90°)$ على المستوى الإحداثي نفسه. ووضح أي أوجه تشابه أو اختلاف بين التمثيلات البيانية.

افرض أن Y1 = sin θ و Y2 = sin (θ + 45) و Y3 = sin (θ − 90).
تأكد من مسح الإدخالات التي وضعتها من النشاط 1.


[−360, 360] scl: 90 by [−5, 5] scl: 1

خطوات العملية على الحاسبة: Y= SIN X,T,θ,n) ENTER
SIN X,T,θ,n + 45) ENTER
SIN X,T,θ,n − 90) GRAPH

التمثيلات البيانية لها شكل واحد ولكن بمواضع أفقية مختلفة.

النموذج والتحليل

كرر الأنشطة مع دالة cosine ودالة tangent الزاوية.

1. ما مجال الدوال الواردة في النشاطين 1 و 2 ومداها؟
2. ما تأثير إضافة ثابت إلى دالة مثلثية؟
3. ما تأثير إضافة ثابت إلى θ في الدالة المثلثية؟

كرر الأنشطة مع كل مما يلي. صف العلاقة بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

4. $y = sin\ \theta + 4$
   $y = sin\ (2\theta) + 4$
5. $y = cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$
   $y = cos\frac{1}{2}(\theta + 45°)$
6. $y = 2\ sin\ \theta$
   $y = 2\ sin\ \theta - 1$
7. $y = cos\ \theta - 3$
   $y = cos\ (\theta - 90°) - 3$
8. اكتب معادلة عامة لدوال sine و cosine و tangent الزاوية بعد التغيرات في السعة a والفترة b. والموضع الأفقي h. والموضع الرأسي k.

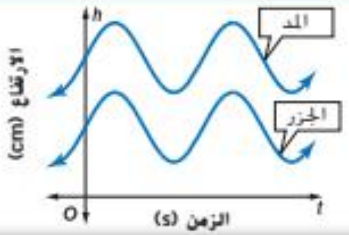
McGraw-Hill Education محفوظ لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

الدرس 8-5 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

السابق:
- لقد قمت بإزاحة الدوال الأسية.

الحالي:
1. تمثيل الإزاحات الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية وإيجاد إزاحات الطور.
2. تمثيل الإزاحات الرأسية للدوال المثلثية.

لماذا؟
- تعبر التمثيلات البيانية الموضحة على اليسار عن الأمواج في أحد الخلجان أثناء تيارات المد والجزر. لاحظ أن شكل الأمواج لا يتغير.



المفردات الجديدة
- إزاحة الطور — phase shift
- إزاحة رأسية — vertical shift
- خط متوسط — midline

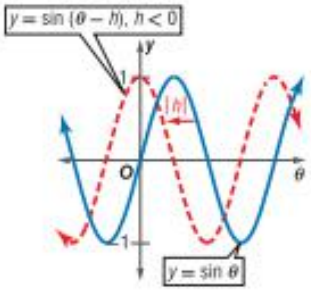
ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الإزاحة الأفقية
تذكر أن الإزاحة تحدث عندما يتحرك الشكل من مكان إلى آخر على المستوى الإحداثي دون تغير اتجاهه. وتُسمى الإزاحة الأفقية للدالة الدورية باسم **إزاحة الطور**.

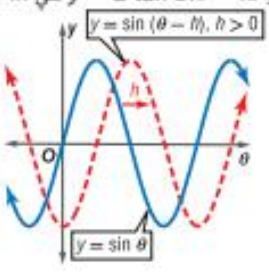
المفهوم الأساسي إزاحة الطور

الشرح
إزاحة الطور للدوال $y = a \sin b(\theta - h)$ و $y = a \cos b(\theta - h)$ و $y = a \tan b(\theta - h)$ هي h. حيث $b > 0$.

النماذج



إذا كان $h < 0$. فإن الإزاحة تكون $|h|$ وحدات إلى اليسار.



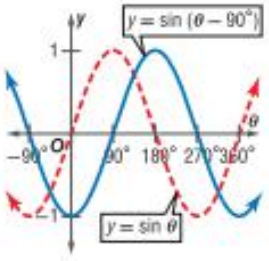
إذا كان $h > 0$. فإن الإزاحة تكون h وحدات إلى اليمين.

أمثلة
إزاحة الطور 90° إلى اليمين. $y = \cos(\theta - 90°)$
إزاحة الطور 30° إلى اليسار. $y = \tan(\theta + 30°)$

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

مثال 1 التمثيل البياني لإزاحة الطور

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = \sin(\theta - 90°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



السعة: $a = 1$

الفترة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{1} = 360°$

إزاحة الطور: $h = 90°$

مثّل $y = \sin \theta$ بيانيًا بعد إزاحتها 90° إلى اليمين.

تمرين موجّه

1. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \cos(\theta + 45°)$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الإزاحة الرأسية

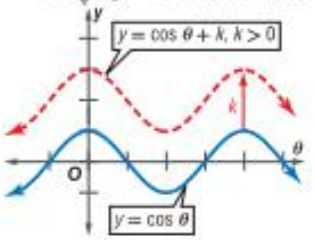
تذكر أن التمثيل البياني للدالة $y = x^2 + 5$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = x^2$ مزاحا 5 وحدات لأعلى. وبالمثل، يمكن إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية رأسيًا باستخدام **الإزاحة الرأسية**.

المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية

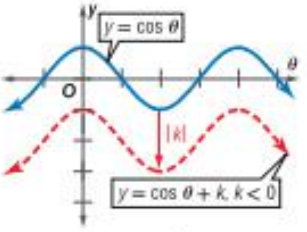
الشرح

الإزاحة الرأسية للدوال $y = a \sin b\theta + k$ و $y = a \cos b\theta + k$ و $y = a \tan b\theta + k$ هي k.

النماذج



إذا كانت $k > 0$، فإن الإزاحة تكون عدد k من الوحدات لأعلى.



إذا كانت $k < 0$، فإن الإزاحة تكون عدد $|k|$ من الوحدات لأسفل.

أمثلة

$y = \sin \theta + 4$ الإزاحة الرأسية تكون 4 وحدات لأعلى.

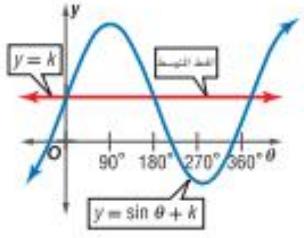
$y = \tan \theta - 3$ الإزاحة الرأسية تكون 3 وحدات لأسفل.

يمكن تمثيل secant و cosecant و cotangent بيانيًا باستخدام القواعد نفسها.

نصيحة دراسية

الترميز لاحظ أن $\sin (\theta + x) \neq \sin \theta + x$ يشير التعبير الأول إلى إزاحة الطور. ويشير التعبير الثاني إلى الإزاحة الرأسية.

عند إزاحة دالة مثلثية رأسيًا عدد k من الوحدات، يكون المستقيم $y = k$ المحور الأفقي الجديد الذي يتحرك التمثيل البياني حوله. ويسمى هذا المستقيم **الخط المتوسط**. ويمكن استخدامه للمساعدة في رسم الإزاحة الرأسية.

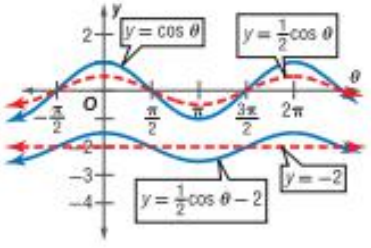


نصيحة دراسية

استخدام الألوان قد يساعدك تمثيل الدالة الأصلية بيانيًا بلون. ثم تطبيق الإزاحة الرأسية والتمثيل البياني للدالة بلون آخر. وبعد ذلك تطبيق التغير في السعة والتمثيل البياني للدالة بلون ثالث.

مثال 2 التمثيل البياني للإزاحات الرأسية

اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.



السعة: $|a| = \frac{1}{2}$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

الإزاحة الرأسية: $k = -2$

الخط المتوسط: $y = -2$

لتمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta - 2$ بيانيًا. ارسم أولاً الخط المتوسط. ثم استخدمه في تمثيل $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ بيانيًا بعد إزاحة وحدتين لأسفل.

تمرين موجّه

2. اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط للدالة $y = \tan \theta + 3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

يمكنك استخدام الخطوات التالية في التمثيل البياني للدوال المثلثية المتضمنة إزاحات طور وإزاحات رأسية.

ملخص المفهوم التمثيل البياني للدوال المثلثية

$$y = a \sin b(\theta - h) + k$$

السعة: a — الفترة: b — إزاحة الطور: h — الإزاحة الرأسية: k

الخطوة 1 تحديد الإزاحة الرأسية وتمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 تحديد السعة إن وجدت. واستخدام المستقيمات المتقطعة للإشارة إلى القيمتين العظمى والصغرى للدالة.

الخطوة 3 تحديد فترة الدالة وتمثيل الدالة الصحيحة بيانيًا.

الخطوة 4 تحديد إزاحة الطور وإزاحة التمثيل البياني وفقًا لها.

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}(\theta - \pi) + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

السعة: $|a| = 3$

الفترة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$ — تشير الفترة إلى أن التمثيل البياني سوف يتمدد.

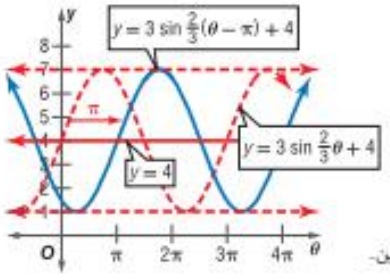
إزاحة الطور: $h = \pi$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني π إلى اليمين.

الإزاحة الرأسية: $k = 4$ — سوف تتم إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لأعلى.

الخط المتوسط: $y = 4$ — سوف يتحرك التمثيل البياني حول المستقيم $y = 4$.

الخطوة 1 تمثيل الخط المتوسط بيانيًا.

الخطوة 2 بما أن السعة تساوي 3، فارسم مستقيمات متقطعة أعلى الخط المتوسط بمقدار 3 وحدات وأسفله بمقدار 3 وحدات.



الخطوة 3 التمثيل البياني للدالة $y = 3 \sin \frac{2}{3}\theta + 4$ باستخدام الخط المتوسط باعتباره مرجعًا.

الخطوة 4 إزاحة التمثيل البياني عدد π وحدات إلى اليمين.

التحقق يمكنك التحقق من دقة تحويلك عن طريق إيجاد قيمة الدالة مع القيم المختلفة لـ θ وتأكيد أماكنها على التمثيل البياني.

تمرين موجّه

3. اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية للدالة $y = 2 \cos \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 2$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

نصيحة دراسية

التحقق من التمثيل البياني

بعد رسم التمثيل البياني لدالة مثلثية، اختر قيم θ وجد قيمها في المعادلة للتحقق من التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحدث الموجة الجيبية sine غالبًا في الفيزياء ومعالجة الإشارات والموسيقى والهندسة الكهربية والعديد من المجالات الأخرى.

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل الدوال الدورية

حمام السباحة **يتذبذب ارتفاع الماء في حمام السباحة بين قيمة عظمى قدرها 13 m وقيمة صغرى قدرها 5 m. ويضخ مولد الموجات 6 موجات في الدقيقة. اكتب دالة sine التي تمثل ارتفاع الماء في الزمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.**

الخطوة 1 اكتب معادلة للخط المتوسط، وحدد الإزاحة الرأسية.

$$y = \frac{13 + 5}{2} = 9$$ يقع خط الوسط في المنتصف بين القيمتين العظمى والصغرى.

بما أن الخط المتوسط هو $y = 9$، فإن الإزاحة الرأسية تساوي $k = 9$.

الخطوة 2 جد السعة.

$$|a| = |13 - 9| = 4$$ جد الفرق بين قيمة الخط المتوسط والقيمة العظمى.

إذًا، $a = 4$.

الخطوة 3 جد الفترة.

بما أنه يتم توليد 6 موجات في الدقيقة، فهناك موجة واحدة كل 10 ثوانٍ. إذًا، الفترة هي 10 ثوانٍ.

$10 = \frac{2\pi}{|b|}$ الفترة $= \frac{2\pi}{|b|}$

$|b| = \frac{2\pi}{10}$ جد الحل لـ $|b|$.

$b = \pm\frac{\pi}{5}$ بسّط.

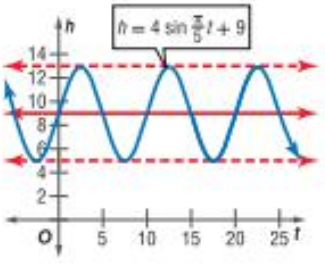
الخطوة 4 اكتب معادلة للدالة.

$h = a \sin b(t - h) + k$ اكتب معادلة sine التي تربط بين الارتفاع h والزمن t.

$= 4 \sin \frac{\pi}{5}(t - 0) + 9$ التعويض: $a = 4,\ b = \frac{\pi}{5},\ h = 0,\ k = 9$

$= 4 \sin \frac{\pi}{5}t + 9$ بسّط.

ثم مثّل الدالة بيانيًا.



الربط بالحياة اليومية

في بعض مسابح الأمواج الاصطناعية، يستطيع المترحلقون على المياه ركوب أمواج يصل ارتفاعها إلى 70 m.

المصدر: Orlando Wave Pool

انتبه!

الدوال الأصلية غالبًا ما يمكن تمثيل الدالة المثلثية بأكثر من معادلة. على سبيل المثال، التمثيلات البيانية للدالة $y = \cos \theta$ والدالة $y = \sin(\theta + 90°)$ هي نفسها.

تمرين موجّه

4. مسبح أمواج اصطناعية يتردد ارتفاع الماء في مسبح أمواج اصطناعية بين 14 m كحد أقصى و 6 m كحد أدنى. تضخ ماكينة توليد الأمواج 5 موجات في الدقيقة. اكتب دالة cosine التي تمثل ارتفاع الماء في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

محفوظ الطبع والتأليف © لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

1. $y = \sin(\theta - 180°)$
2. $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
4. $y = \frac{1}{2}\cos(\theta + 90°)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

5. $y = \cos\theta + 4$
6. $y = \sin\theta - 2$
7. $y = \frac{1}{2}\tan\theta + 1$
8. $y = \sec\theta - 5$

مثال 3 **الانتظام** اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

9. $y = 2\sin(\theta + 45°) + 1$
10. $y = \cos 3(\theta - \pi) - 4$
11. $y = \frac{1}{4}\tan 2(\theta + 30°) + 3$
12. $y = 4\sin\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5$

مثال 4

13. **تدريب** عند ممارسة نشاط جسدي متوسط، يتراوح ضغط الدم عند الإنسان ما بين قيمة عظمى قدرها 130 وقيمة صغرى قدرها 90. ومعدل ضربات قلب الإنسان يساوي 90 ضربة في الدقيقة. اكتب معادلة sine التي تمثل ضغط دم الإنسان P في زمن t ثانية. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

14. $y = \cos(\theta + 180°)$
15. $y = \tan(\theta - 90°)$
16. $y = \sin(\theta + \pi)$
17. $y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
18. $y = \tan\frac{1}{2}(\theta + 30°)$
19. $y = 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

مثال 2 اذكر السعة والفترة والإزاحة الرأسية ومعادلة الخط المتوسط لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

20. $y = \cos\theta + 3$
21. $y = \tan\theta - 1$
22. $y = \tan\theta + \frac{1}{2}$
23. $y = 2\cos\theta - 5$
24. $y = 2\sin\theta - 4$
25. $y = \frac{1}{3}\sin\theta + 7$

مثال 3 اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

26. $y = 4\sin(\theta - 60°) - 1$
27. $y = \cos\frac{1}{2}(\theta - 90°) + 2$
28. $y = \tan(\theta + 30°) - 2$
29. $y = 2\tan 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 5$
30. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \cos 3(\theta - 45°) + \frac{1}{2}$
32. $y = 3 + 5\sin 2(\theta - \pi)$
33. $y = -2 + 3\sin\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 4

34. **المد والجزر** يرتفع مستوى الماء في إحدى الموانئ إلى أقصى ارتفاع له عند 15 m في تمام الساعة 6:00 مساءً، ثم ينخفض بعدها إلى أقل مستوى قدره 3 m في تمام 3:00 صباحًا. يمكن تمثيل مستوى الماء بدالة sine. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h الذي يصل إليه الماء في زمن t ساعات بعد الظهيرة في اليوم الأول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

35. **البحيرات** عوامة تحدد مساحة السباحة في إحدى البحيرات تترنح كلما مر بها قارب سريع. ومسافتها d مقاسة بالأمتار من قاع البحيرة ممثلة بالمعادلة $d = 1.8 \sin \frac{3\pi}{4}t + 12$. حيث إن t هي الوقت مقاس بالثواني. مثّل الدالة بيانيًا. صف أقصى مسافة وأقل مسافة للعوامة من قاع البحيرة عندما يمر بها القارب.

36. **الأرجوحة الدوارة** افرض أن الأرجوحة الدوارة لها قطر قياسه 520 m تقريبًا وتصنع دورة كاملة خلال 30 ثانية. افرض أن العربة السفلية في الأرجوحة تبعد مسافة 5 m من الأرض. افرض أن الارتفاع أعلى قمة الأرجوحة يمثل الارتفاع عندما يكون الزمن 0. اكتب معادلة لارتفاع العربة h في صورة دالة للزمن t دقيقة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

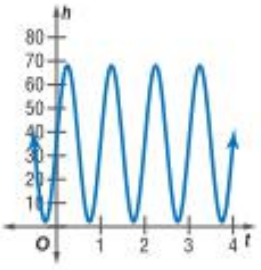
اكتب معادلة لكل إزاحة.

37. $y = \sin x$. 4 وحدات إلى اليمين و 3 وحدات لأعلى

38. $y = \cos x$. 5 وحدات إلى اليسار ووحدتين لأسفل

39. $y = \tan x$. π من الوحدات إلى اليمين و 2.5 وحدة لأعلى

40. **حبل القفز** التمثيل البياني الموضح على اليسار يقرّب ارتفاع حبل القفز h مقاسًا بالسنتيمترات في صورة دالة للزمن t مقاسًا بالثواني. أعلى نقطة على التمثيل البياني هي (1.25, 68). وأسفل نقطة هي (2.75, 2).



a. صف ما تعنيه أقصى نقطة وأسفل نقطة في سياق الموقف.

b. ما معادلة الخط المتوسط والسعة والفترة للدالة؟

c. اكتب معادلة للدالة.

41. **لعبة الدوّارات** حصان في لعبة الدوّارات يعلو ويدنو 3 مرات كلما أتمت لعبة الدوّارات دورة كاملة. وأقصى ارتفاع يصل إليه الحصان هو 55 cm. وأقل ارتفاع هو 37 cm. وتدور لعبة الدوّارات مرة كل 21 s. افرض أن الحصان يبدأ ويتوقف عند ارتفاعه المتوسط.

a. اكتب معادلة لتمثيل ارتفاع الحصان h في صورة دالة للزمن t ثانية.

b. مثّل الدالّة بيانيًا.

c. استخدم تمثيلك البياني لتقدير ارتفاع الحصان بعد 8 s. ثم استخدم الحاسبة لإيجاد الارتفاع مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

42. **التبرير** خلال شهر واحد، تتراوح درجة الحرارة في الخارج بين 40°C و 50°C. يقرّب منحنى cosine التغيير الحاصل في درجة الحرارة. مع ارتفاع يصل إلى 50°C يتحقق كل أربعة أيام.

a. صف السعة والفترة والخط المتوسط في الدالة التي تقرّب درجة الحرارة y في اليوم d.

b. اكتب دالة cosine لتقدير درجة الحرارة y في اليوم d.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة.

d. قدر درجة الحرارة في اليوم السابع من الشهر.

جـــد الإحداثي الذي يمثل قيمة عظمى لكل تمثيل بياني.

43. $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

45. $y = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

46. $y = -3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4$

محفوظ للطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قارن بين كل زوجين من التمثيلات البيانية.

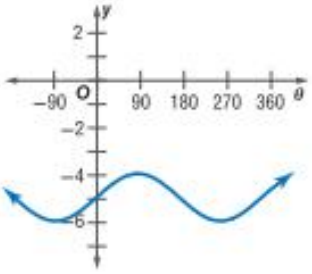
47. $y = -\cos 3\theta$ و $y = \sin 3(\theta - 90°)$

48. $y = 2 + 0.5 \tan \theta$ و $y = 2 + 0.5 \tan (\theta + \pi)$

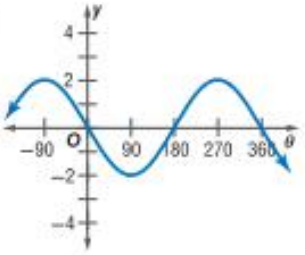
49. $y = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ و $y = -2 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$

حدد فترة كل دالة. ثم اكتب معادلة للتمثيل البياني باستخدام الدالة المثلثية المحددة.

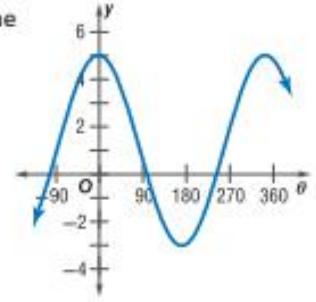
50. sine



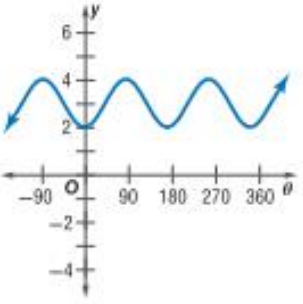
51. cosine



52. cosine



53. sine



اذكر الفترة، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية ثم مثّل الدالة بيانيًا.

54. $y = \csc (\theta + \pi)$

55. $y = \cot \theta + 6$

56. $y = \cot \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

57. $y = \frac{1}{2} \csc 3(\theta - 45°) + 1$

58. $y = 2 \sec \frac{1}{2}(\theta - 90°)$

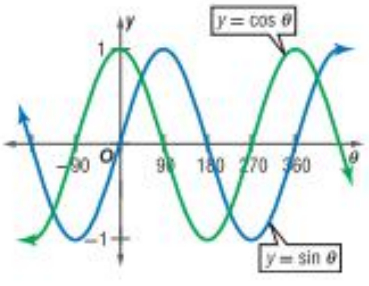
59. $y = 4 \sec 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

60. **الفرضيات** إذا أعطيت السعة والفترة لدالة cosine، فهل من الممكن *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير ممكن *أبدًا* إيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة. اشرح استنتاجك.

61. **التبرير** صف وجه اختلاف التمثيل البياني لـ $y = 3 \sin 2\theta + 1$ عن $y = \sin \theta$.

62. **الكتابة في الرياضيات** صف إزاحتي طور مختلفتين من شأنهما إزاحة منحنى sine على منحنى cosine الموضح على اليسار. ثم اكتب معادلة لمنحنى sine الجديد باستخدام كل إزاحة طور.



63. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة دورية سعتها تساوي 2 والخط المتوسط عند $y = -3$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

64. **التبرير** ما عدد التمثيلات البيانية المختلفة لـ sine التي تمر بنقطة الأصل $(n\pi, 0)$؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

65. الإجابة الشبكية ما مقدار زيادة التعبير $\frac{3x-1}{4} + \frac{x+6}{4}$ عن x؟

66. فكّك $(a-b)^4$.

A $a^4 - b^4$

B $a^4 - 4ab + b^4$

C $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

D $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

67. جـــد حل $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$.

F 7 **H** 7, 13

G 0, 7 **J** لا يوجد حل

68. الهندسة باستخدام الأشكال الموضحة أدناه. ما متوسط f و d و c و b و a؟

A 21 **B** 45 **C** 50 **D** 54

مراجعة شاملة

جـــد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 3-5)

69. $y = 2\cos\theta$ **70.** $y = 3\sin\theta$ **71.** $y = \sin 2\theta$

جـــد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 2-5)

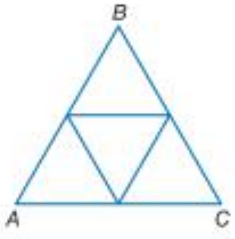
72. $\sin\frac{4\pi}{3}$ **73.** $\sin(-30°)$ **74.** $\cos 405°$

حدد ما إذا كان كل موقف يصف *استطلاع رأي* أو *تجربة* أو *دراسة وصفية*. ثم حدد العينة، واقترح مجتمعًا إحصائيًا يتم الاختيار منه.

75. انقسمت مجموعة مكونة من 220 بالغًا بطريقة عشوائية إلى مجموعتين. مجموعة تمارس التمارين لمدة ساعة في اليوم والأخرى لا تتمرن. وتمت مقارنة مؤشرات كتلة الجسم حينئذ.

76. اختار مدرب كرة القدم بعضًا من لاعبيه بشكل عشوائي وقدم لهم استبيانًا يسألهم فيه عن عاداتهم اليومية في النوم.

77. اختار معلم 100 طالب بشكل عشوائي يعملون في وظائف بدوام جزئي وقارن درجاتهم.



78. الهندسة مثلث متساوي الأضلاع ABC محيطه 39 cm. إذا كانت نقاط المنتصف في جميع الأضلاع متصلة. نتج مثلث متساوي الأضلاع أصغر. افرض أن عملية اتصال نقاط المنتصف في الأضلاع ورسم مثلثات جديدة مستمرة بلا انقطاع.

a. اكتب متسلسلة لا نهائية لتمثيل مجموع محيطات جميع المثلثات.

b. جـــد مجموع محيطات جميع المثلثات.

79. البناء تتعرض إحدى شركات البناء لدفع غرامة عن كل يوم تتأخر فيه عن إكمال الجسر. وسوف تكون الغرامة اليومية قدرها AED 4000 عن اليوم الأول ثم تزيد بمقدار AED 1000 كل يوم. وبحسب الميزانية، لا يمكن للشركة دفع تكلفة غرامات أكثر من AED 60000 إجمالاً. فما أقصى عدد من الأيام يمكنها أن تتأخره؟

مراجعة المهارات

جـــد كل قيمة لـ x. قرّب إلى أقرب درجة.

80. $\sin\theta = \frac{7}{8}$ **81.** $\tan\theta = \frac{9}{10}$ **82.** $\cos\theta = \frac{1}{4}$

83. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ **84.** $\sin\theta = \frac{5}{6}$ **85.** $\tan\theta = \frac{2}{7}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 9-5 الدوال المثلثية العكسية

السابق
- قمت بتمثيل الدوال المثلثية بيانيًا.

الحالي
1. إيجاد قيم النسب المثلثية العكسية.
2. حل المعادلات باستخدام الدوال المثلثية العكسية.

لماذا؟
- يبلغ طول رف الكتب المائل الموجود إلى اليسار 40 سنتيمترًا من الجدار ويصل إلى ارتفاع 200 سنتيمتر. في الدرس 1-13، تعلمت كيفية استخدام معكوس الدالة المثلثية لإيجاد قياس الزاوية الحادة θ.

$\tan \theta = \frac{15}{75}$ أو 0.2 استخدم دالة tangent.

جد زاوية تساوي 0.2 tan.

2nd [TAN^{-1}] .2 ENTER 11.30993247

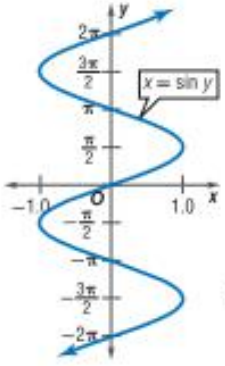
إذا فقياس θ يساوي حوالي 11°.

المفردات الجديدة

قيم أساسية
principal values
دالة قوس الجيب
Arcsine function
دالة قوس جيب التمام
Arccosine function
دالة قوس الظل
Arctangent function

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 النسب المثلثية العكسية إذا عرفت قيمة نسبة مثلثية لزاوية يمكنك استخدام معكوسها لإيجاد الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي يكون فيها جميع قيم x و y معكوسة. معكوس $y = \sin x$، $x = \sin y$. ممثل بيانيًا إلى اليسار.



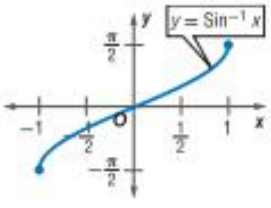
لاحظ أن المعكوس ليس بدالة. حيث يوجد الكثير من قيم y لكل قيمة من قيم x. وإذا قيّدت مجال دالة sine بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يصبح المعكوس دالة.

يطلق على قيم المجال المقيد **القيم الأساسية**. توضح الدوال المثلثية ذات المجالات المقيدة بحروف كبيرة.

- $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
- $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ و $0 \le x \le \pi$.
- $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ و $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

يمكنك استخدام الدوال ذات المجالات المقيدة لتحديد الدوال المثلثية العكسية. ويعتبر معكوس دوال sine وCosine و tangent هي دالة **Arcsine** و **Arccosine** و **Arctan** على التوالي.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

دالة عكسية	الرموز	المجال	المدى	النموذج
Arcsine قوس جيب الزاوية	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
Arccosine قوس جيب تمام الزاوية	$y = \text{Arccos } x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
Arctan قوس ظل الزاوية	$y = \text{Arctan } x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	جميع الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في العلاقة $y = \cos^{-1} x$. إذا كان $x = \frac{1}{2}$. فإن $y = 60°$ و $300°$ وجميع الزوايا التي تشترك في ضلع الانتهاء مع هذه الزوايا. في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$. إذا كان $x = \frac{1}{2}$. فإن $y = 60°$ فقط.

مراجعة المصطلحات

الدوال العكسية إذا كان f و f^{-1} دالتين عكسيتين. فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

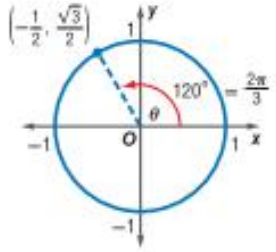
مثال 1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية

جـــد كل قيمة مما يلي. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

a. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

جـــد الزاوية θ حيث $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة Cosine لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1 استخدام دائرة الوحدة.



جـــد نقطة على دائرة الوحدة تكون قيمة إحداثي x لها هي $-\frac{1}{2}$.

عندما تكون $\theta = 120°$. فإن $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

إذا. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

الطريقة 2 استخدام الحاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [COS^{-1}] (−) 1 ÷ 2) ENTER 120

إذا. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

نصيحة دراسية

قياس الزاوية تذكر أنه عند إيجاد قيمة دالة مثلثية عكسية، ستكون النتيجة قياس زاوية.

b. $\text{Arctan } 1$

جـــد الزاوية θ حيث $-90° \le \theta \le 90°$ التي تساوي قيمة ظلها 1.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TAN^{-1}] 1 ENTER 45 إذا. $\text{Arctan } 1 = 45°$ أو $\frac{\pi}{4}$.

تمرين موجّه

1A. $\text{Cos}^{-1} 0$

1B. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند إيجاد قيمة مع وجود عدة دوال مثلثية، استخدم ترتيب العمليات للحل.

مثال 2 إيجاد القيمة المثلثية

جـــد $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرب إلى أقرب جزء من مئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: TAN 2nd [COS^{-1}] 1 ÷ 2)) ENTER 1.732050808

إذا. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 1.73$.

التحقق $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = 60°$ و $\tan 60° \approx 1.73$. إذا. الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

جـــد قيمة كل مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.

2A. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

2B. $\cos\left(\text{Arccos} -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة

2 إيجاد حل المعادلة باستخدام المعكوس

يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية بالحل لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على الاختبار المعياري إيجاد قياس الزاوية

إذا كان $\sin \theta = -0.35$، فجد θ.

A $-20.5°$ **B** $-0.6°$ **C** $0.6°$ **D** $20.5°$

قراءة فقرة الاختبار

sine θ sine هو -0.35. يمكن كتابة ذلك في الصورة $\theta = \text{Arcsin}\ (-0.35)$.

حَل فقرة الاختبار

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [SIN^{-1}] (–) .35 ENTER -20.48731511

إذًا، $\theta \approx -20.5°$. الإجابة هي A.

تمرين موجّه

3. إذا كان $\tan \theta = 1.8$، فجد θ.

F $0.03°$ **G** $29.1°$ **H** $60.9°$ **J** لا يوجد حل

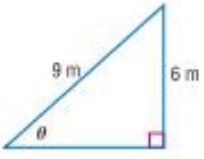
نصيحة عند حل الاختبار

تقدير الاحتمالات تقيّد دالة sin قياسات الزوايا المحتملة إلى الربع الأول أو الرابع. ولأن -0.35 سالبة، فابحث عن قياس الزاوية في الربع الرابع.

يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية لتحديد قياس زاويا الميل والانخفاض والارتفاع.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام الدوال المثلثية العكسية

التزلج على المياه يبلغ ارتفاع منحدر تزلج على المياه 6 m وطوله 9 m كما هو مبين على اليسار. جد الدالة المثلثية العكسية التي يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المنحدر مع المياه، ثم جد قياس الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



نظرًا لمعرفة قياسي الضلع المقابل والوتر، يمكن استخدام دالة sine.

$\sin \theta = \frac{6}{9}$ دالة sine

$\theta = \text{Sin}^{-1} \frac{6}{9}$ دالة معكوس sine

$\theta \approx 41.8°$ استخدم حاسبة.

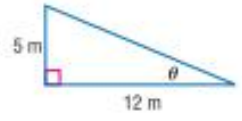
إذًا، فإن زاوية المنحدر تساوي حوالي $41.8°$.

التحقق باستخدام حاسبتك، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{6}{9}$.

إذًا، الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

4. التزلج موضح على اليسار مسار تزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ. الزاوية التي يشكلها المسار مع أرض الوادي. ثم جد الزاوية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



مهنة من الحياة اليومية

مسؤول علوم التربية الرياضية

يقدم مسؤول علوم التربية الرياضية معلومات التربية الرياضية إلى اللاعبين والمدربين وأولياء الأمور. وينفذ برامج بالاختبار والتدريب والعلاج للرياضيين. ويحبذ لهذه الوظيفة الحصول على درجة الماجستير في علم التربية الرياضية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـــد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

1. $\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$
2. $\text{Arctan}\,(-\sqrt{3})$
3. $\text{Arccos}\,(-1)$

مثال 2 **جـــد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

4. $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{4}{5}\right)$
5. $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$
6. $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

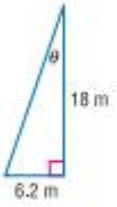
مثال 3 7. **الاختيار من متعدد** إذا كان $\text{Sin}\,\theta = 0.422$. فجـــد θ.

A 25° B 42° C 48° D 65°

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

8. $\text{Cos}\,\theta = 0.9$
9. $\text{Sin}\,\theta = -0.46$
10. $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

مثال 4 11. **التزحلق على الجليد** يوضح إلى اليسار مقطع عرضي لأنبوب ضخم للتزحلق على الجليد. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ، الزاوية التي تصف انحدار الأنبوب الضخم. بعد ذلك، جـــد قياس الزاوية لأقرب درجة.



التدريب وحل المسائل

مثال 1 **جـــد قيمة كل مما يلي. اكتب قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.**

12. $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
13. $\text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
14. $\text{Sin}^{-1}\,(-1)$
15. $\text{Tan}^{-1}\,\sqrt{3}$
16. $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
17. $\text{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

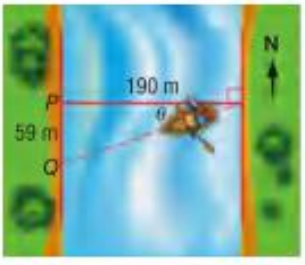
مثال 2 **جـــد قيمة كل مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.**

18. $\tan\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$
19. $\tan\left[\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
20. $\cos\left(\text{Tan}^{-1}\,\frac{3}{5}\right)$
21. $\sin\left(\text{Arctan}\,\sqrt{3}\right)$
22. $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\,\frac{4}{9}\right)$
23. $\sin\left[\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

حُـلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

24. $\text{Tan}\,\theta = 3.8$
25. $\text{Sin}\,\theta = 0.9$
26. $\text{Sin}\,\theta = -2.5$
27. $\text{Cos}\,\theta = -0.25$
28. $\text{Cos}\,\theta = 0.56$
29. $\text{Tan}\,\theta = -0.2$

مثال 4 30. **التبرير المنطقي** يتحرك قارب غربًا عبر نهر يبلغ عرضه 190 m. وبسبب التيار، انتهى بالقارب المطاف عند النقطة Q والتي تبعد 59 m عن نقطة وجهته P. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها لإيجاد θ الزاوية التي انحرف بها القارب جنوب المحور الأفقي. ثم جـــد قياس الزاوية بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

31. الأشجار تميل شجرة طولها 24 m بمقدار 2.5 m يسار المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ، الزاوية التي تميل بها الشجرة. ثم جـــد قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة.

32. القيادة منحنى فرعي على الطريق السريع يبلغ نصف قطره 52 m وصمم لحركة السيارات بأمان بسرعة 45 km في الساعة (أو 12.5 m في الثانية). تمثل المعادلة أدناه زاوية θ للمنحنى. ما قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة؟

$$\tan\theta = \frac{(12.5\text{ m/s})^2}{(52\text{ m})(9.8\text{ m/s}^2)}$$

33. ألعاب القوى يقوم رامي الكرة الحديدية برمي كرة بسرعة مبدئية مقدارها 15 m/s. ويمثل التعبير $\frac{15\text{ m/s}\,(\sin x)}{9.8\text{ m/s}^2}$ الزمن بالثانية الذي بلغت فيه الكرة الحديدية أقصى ارتفاع لها. في التعبير، تمثل x الزاوية التي رميت بها الكرة الحديدية. وإذا كانت الكرة قد بلغت أقصى ارتفاع في 1.0 s. فما قياس الزاوية التي رميت بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

جـــد حل كل معادلة حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

34. $\csc\theta = 1$ **35.** $\sec\theta = -1$ **36.** $\sec\theta = 1$

37. $\csc\theta = \frac{1}{2}$ **38.** $\cot\theta = 1$ **39.** $\sec\theta = 2$

40. التمثيلات المتعددة افرض أن $y = \text{Cos}^{-1}\,x$.

a. بيانيًا ارسم تمثيلاً بيانيًا للدالة. واذكر المجال والمدى.

b. رمزيًا اكتب الدالة باستخدام رموز مختلفة.

c. عدديًا اختر قيمة للمتغير x بين -1 و 0. ثم جـــد قيمة دالة معكوس Cosine. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

d. تحليليًا قارن التمثيلات البيانية لكل من $y = \cos x$ و $y = \text{Cos}^{-1}\,x$.

41. التحدي حدد ما إذا كان $\cos(\text{Arccos}\,x) = x$ لجميع قيم x صحيحًا أم خطأً. وإذا كان خطأً. فقدم مثالاً عكسيًا.

42. التفكير النقدي تحل كل من نجاة ونسرين $\cos\theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. هل أي منهما على صواب. اشرح استنتاجك.

نجاة	نسرين
$\cos\theta = 0.3$	$\cos\theta = 0.3$
$\cos^{-1} 0.3 = 162.5°$	$\cos^{-1} 0.3 = 72.5°$

43. التبرير اشرح العلاقة بين مجال $y = \text{Sin}^{-1}\,x$ ومدى $y = \text{Sin}\,x$.

44. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلة بدالة قوس الجيب ومعادلة بدالة sine تتضمن كلاهما نفس قياس الزاوية.

45. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين العلاقتين $y = \tan^{-1}\,x$ و $y = \text{Tan}^{-1}\,x$. اذكر معلومات حول المجال والمدى.

46. التبرير اشرح كيف يكون $\text{Sin}^{-1}\,8$ و $\text{Cos}^{-1}\,8$ غير معرّفين بينما يكون $\text{Tan}^{-1}\,8$ معرفًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبارات المعيارية

47. بسّط $\dfrac{\frac{2}{x}+2}{\frac{2}{x}-2}$.

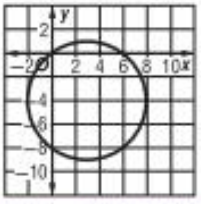
A $\dfrac{1+x}{1-x}$

B $\dfrac{2}{x}$

C $\dfrac{1-x}{1+x}$

D $-x$

48. الإجابة القصيرة ما معادلة التمثيل البياني أدناه؟



49. إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = 4 - 2x$ فما $g[f(x)]$؟

F $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

G $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

H $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

J $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

50. إذا كان g عددًا موجبًا. فأي مما يلي يساوي $12g$؟

A $\sqrt{144g}$

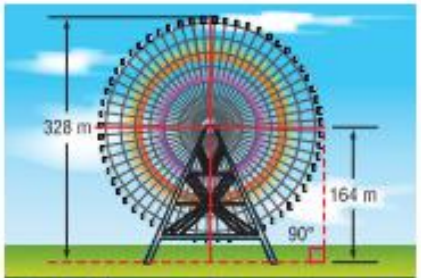
B $\sqrt{12g^2}$

C $\sqrt{24g^2}$

D $6\sqrt{4g^2}$

مراجعة شاملة

51. ألعاب الملاهي كوزمو كلوك 21 هي عجلة دوارة ضخمة بمدينة ملاهي في اليابان يبلغ قطرها 328 m. افترض أن راكبًا دخلها عند ارتفاع 0 m. ثم دار بزيادات 90° عكس اتجاه الساعة. يوضح الجدول قياسات زوايا الدوران وارتفاع الراكب بالأمتار عن مستوى الأرض. (الدرس 8-5)



الزاوية	الارتفاع	الزاوية	الارتفاع
0°	0	450°	164
90°	164	540°	328
180°	328	630°	164
270°	164	720°	0
360°	0		

a. إن الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 164 \cdot [\sin(x - 90°)] + 164$. حدد الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة باستخدام sine تمثل موقع الراكب على عجلة فيينا العملاقة في النمسا. والتي يبلغ قطرها 200 متر. تحقق بتعيين النقاط والمعادلة بحاسبة تمثيل بياني.

52. المد والجزر يحدث أقصى ارتفاع مسجل يبلغه المد في حوض ميناس. بنوفا سكوشا في كندا. حيث يبلغ مدى المد والجزر 16.4 m. ويكون المد والجزر في موضع توازنه عندما يكون بمستواه الطبيعي أي بمنتصف أدنى نقطة وأقصى نقطة له. اكتب معادلة تمثل الارتفاع h للمد والجزر. افترض أن المد والجزر يكون عند موضع توازنه عند $t = 0$ التي يبدأ عندها المد. وأن المد يكمل دورة كاملة في 12 ساعة. (الدرس 7-5)

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

53. $\log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$

54. $\log_4 a + \log_4 9 = \log_4 27$

55. $\log_{10} 16 - \log_{10} 2t = \log_{10} 2$

56. $\log_7 24 - \log_7 (y + 5) = \log_3 8$

مراجعة المهارات

جـــد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

57. $\cos 3\pi$

58. $\tan 120°$

59. $\sin 300°$

60. $\sec \frac{7\pi}{6}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

النسب المثلثية في المثلثات القائمة (الدرس 1-5)

- $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$, $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$, $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$, $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

قياسات الزوايا والنسب المثلثية للزوايا العامة (الدرسان 2-5 و 3-5)

- يحدد قياس الزاوية بمقدار الدوران من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.
- يمكنك إيجاد القيمة الدقيقة لست دوال مثلثية لـ θ. بافتراض إحداثيات نقطة $P(x, y)$ على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الـ Sines وقانون الـ Cosines (الدرسان 4-5 و 5-5)

- $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

الدوال المثلثية العكسية والدائرية (الدرسان 6-5 و 9-5)

- إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية θ يتقاطع في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$. فإن $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$.
- $y = \text{Sin } x$ إذا كان $y = \sin x$ و $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

تمثيل الدوال المثلثية بيانيًّا (الدرس 7-5)

- للدوال المثلثية بالصيغة $y = a\sin b\theta$ و $y = a\cos b\theta$.
  تكون السعة $|a|$ s والفترة $\frac{360°}{|b|}$ أو $\frac{2\pi}{b}$.
- فترة $y = a\tan b\theta$ هي $\frac{180°}{|b|}$ أو $\frac{\pi}{|b|}$.

المفردات الأساسية

ambiguous case حالة مبهمة	period فترة
amplitude السعة	periodic function دالة دورية
angle of depression زاوية الانخفاض	phase shift إزاحة الطور
angle of elevation زاوية الارتفاع	principal values قيم أساسية
Arccosine دالة قوس جيب التمام function	quadrantal angle زاوية ربعية
	radian راديان
Arcsine function دالة قوس الجيب	reference angle زاوية مرجع
Arctangent function دالة قوس الظل	secant القاطع
central angle الزاوية المركزية	sine
circular function دالة دائرية	solving a triangle حل المثلث
cosecant قاطع التمام	standard position الوضع القياسي
cosine	tangent ظل الزاوية
cotangent ظل التمام	terminal side ضلع الانتهاء
coterminal angles زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	trigonometric function دالة مثلثية
cycle دورة	trigonometric ratio النسبة المثلثية
frequency التردد	trigonometry حساب المثلثات
initial side ضلع الابتداء	unit circle دائرة الوحدة
Law of Cosines Cosines قانون الـ	vertical shift إزاحة رأسية
Law of Sines Sines قانون الـ	
midline خط متوسط	

مراجعة المصطلحات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صواب* أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. يستخدم قانون الـ Cosines في حل المثلثات عند معرفة قيم زاويتين وأي أضلاع. *صواب*
2. الزاوية التي توجد على المستوى الإحداثي تكون في الوضع القياسي إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل وكان أحد شعاعيها موجودًا على المحور الأفقي x الموجب. *صواب*
3. الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء هي زوايا في الوضع القياسي لها نفس ضلع الانتهاء. *صواب*
4. يطلق على الإزاحة الأفقية لدالة دورية إزاحة الطور. *صواب*
5. معكوس دالة sine هو دالة cosecant. *صواب*
6. تساوي **نصف** التمثيل البياني لدالة sine أو دالة Cosine نصف الفارق بين القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للدالة. *صواب*

مطويات منظّم الدراسة

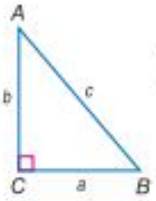
تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

5-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

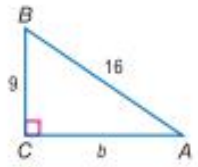
جـــد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



7. $c = 12, b = 5$
8. $a = 10, B = 55°$
9. $B = 75°, b = 15$
10. $B = 45°, c = 16$
11. $A = 35°, c = 22$
12. $\sin A = \frac{2}{3}, a = 6$
13. **شاحنات** يرتفع ظهر شاحنة متحركة 1 m عن الأرض. ما الطول الذي يفترض أن يكون عليه المنحدر الممتد من ظهر الشاحنة لتكون زاوية ارتفاع المنحدر $20°$؟

مثال 1

جـــد حل $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



جـــد قيمة b.

$a^2 + b^2 = c^2$

$9^2 + b^2 = 16^2$

$b = \sqrt{16^2 - 9^2}$

$b \approx 13.2$

جـــد قيمة A.

$\sin A = \frac{9}{16}$

استخدم حاسبة.

قياس الزاوية إلى أقرب درجة. $A = 34°$

جـــد قيمة B

$34° + B \approx 90°$

$B \approx 56°$

إذًا. $b \approx 13.2$ و $A \approx 34°$ و $B \approx 56°$.

5-2 الزوايا وقياس الزوايا

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

14. $215°$
15. $\frac{5\pi}{2}$
16. -3π
17. $-315°$

جـــد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء.

18. $265°$
19. $-65°$
20. $\frac{7\pi}{2}$

21. **الدراجة** يؤدي إطار دراجة 8 لفات في الثانية الواحدة. ويبلغ نصف قطر الإطار 38 cm. جـــد الزاوية θ التي يدور من خلالها الإطار في الثانية الواحدة بمقياس الراديان.

مثال 2

أعد كتابة $160°$ بالراديان.

$160° = 160°\left(\frac{\text{راديان } \pi}{180°}\right)$

$= \frac{160\pi}{180}$ راديان $= \frac{8\pi}{9}$

مثال 3

جـــد زاوية واحدة ذات قياس موجب وزاوية واحدة ذات قياس سالب تشتركان في ضلع الانتهاء لزاوية $150°$.

زاوية موجبة:

$150° + 360° = 510°$ اجمع $360°$.

زاوية سالبة:

$150° - 360° = -210°$ اطرح $360°$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

5-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

جـــد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يلي.

22. $\cos 135°$

23. $\tan 150°$

24. $\sin 2\pi$

25. $\cos \frac{3\pi}{2}$

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي كل نقطة. جـــد القيم الدقيقة لست دوال مثلثية للزاوية θ.

26. $P(-4, 3)$

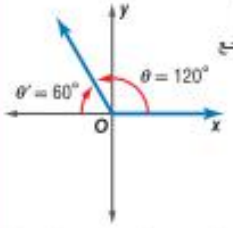
27. $P(5, 12)$

28. $P(16, -12)$

29. الكرة رُميت كرة من أعلى مبنى بزاوية $70°$ وسرعة متجهة أولية قدرها 5 m/s. المعادلة التي تمثل المسافة الأفقية للكرة x هي $x = v_0 (\cos \theta) t$ حيث إن v_0 هي السرعة الأولية وθ هي الزاوية التي ضُربت بها و t هو الزمن بالثواني. ما المسافة التقريبية التي ستقطعها الكرة تقريبًا بعد 10 s؟

مثال 4

جـــد القيمة الدقيقة لـــ $\sin 120°$.



حيث إن ضلع الانتهاء للزاوية $120°$ يقع في الربع الثاني. فإن زاوية المرجع θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$.

دالة sine موجبة في الربع الثاني.

إذًا $\sin 120° = \sin 60°$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مثال 5

يتضمن ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي النقطة عند $(6, 5)$. جـــد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـــ θ.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ أو $\frac{5\sqrt{61}}{61}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ أو $\frac{6\sqrt{61}}{61}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{6}$

$\csc \theta = \frac{r}{y}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{5}$

$\sec \theta = \frac{r}{x}$ أو $\frac{\sqrt{61}}{6}$

$\cot \theta = \frac{x}{y}$ أو $\frac{6}{5}$

5-4 قانون الـ Sines

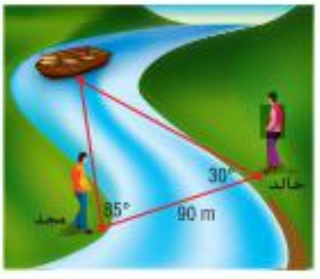
حدد ما إذا كان كل مثلث بلا حل، أم له حل *واحد*، أم له حلان. ثم جـــد حل كل مثلث. وقرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

30. $C = 118°, c = 10, a = 4$

31. $A = 25°, a = 15, c = 18$

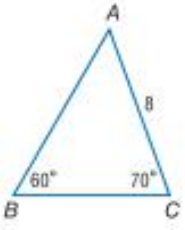
32. $A = 70°, a = 5, c = 16$

33. القارب يقف خالد ومجد على الضفاف المتقابلة لنهر. كم يبعد خالد عن القارب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم لأمر.



مثال 6

جـــد حل $\triangle ABC$.



أولاً. جـــد قياس الزاوية الثالثة.

$60° + 70° + a = 180°$

$A = 50°$

والآن استخدم قانون الـ Sines وجـــد a و c. اكتب معادلتين. كل منها بمتغير واحد.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 70°}{c}$

$c = \frac{8 \sin 70°}{\sin 60°}$

$c \approx 8.7$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

$\frac{\sin 60°}{8} = \frac{\sin 50°}{a}$

$a = \frac{8 \sin 50°}{\sin 60°}$

$a \approx 7.1$

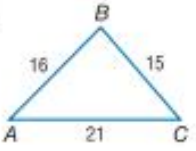
إذًا $A = 50°$ و $c \approx 8.7$ و $a \approx 7.1$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

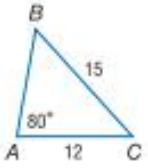
5-5 قانون الـ Cosines

حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ كل مثلث عبر البدء بقانون الـ *Sines* أو قانون الـ *Cosines*. ثمّ حلّ كل مثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

34.



35.



36. $C = 75°, a = 5, b = 7$

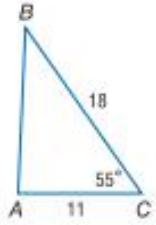
37. $A = 42°, a = 9, b = 13$

38. $b = 8.2, c = 15.4, A = 35°$

39. الزراعة يرغب مزارع في إحاطة قطعة من أرضه بسياج. ويبلغ طول ضلعين من أضلاع حقله المثلث الشكل 120 m و 325 m ويبلغ قياس الزاوية المحصورة بينهما 70°. ما قدر السياج التي سيحتاجه المزارع؟

مثال 7

جـــد حل $\triangle ABC$ حيث $C = 55°$ و $b = 11$ و $a = 18$.



تذكر لك المعطيات قياس ضلعين وزاوية محصورة. ابدأ بتصميم رسم تخطيطي واستخدام قانون الـ Cosines لتحديد c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$c^2 = 182 + 112 - 2(18)(11)\cos 55°$$

$$c^2 \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثانيًا. يمكنك استخدام قانون الـ Sines لإيجاد قياس الزاوية A.

$$\frac{\sin A}{18} \approx \frac{\sin 55°}{14.8}$$

$$\sin A \approx \frac{18\sin 55°}{14.8}$$ أو A تساوي حوالي $85.0°$

قياس الزاوية B يساوي تقريبًا

$$180 - (85.0 + 55) = 40.0°$$

وبالتالي. $c \approx 14.8$ و $A \approx 85.0°$ و $B \approx 40.0°$.

5-6 الدوال الدائرية والدورية

جـــد القيمة الدقيقة لكل دالة.

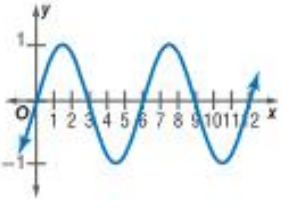
40. $\cos(-210°)$

41. $(\cos 45°)(\cos 210°)$

42. $\sin -\frac{7\pi}{4}$

43. $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

44. حدد فترة الدالة.



45. تكبل عجلة قطرها 18 cm 4 دورات في دقيقة واحدة. ما فترة الدالة التي تصف ارتفاع بقعة على الحافة الخارجية للعجلة كدالة للزمن؟

مثال 8

جـــد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510°$.

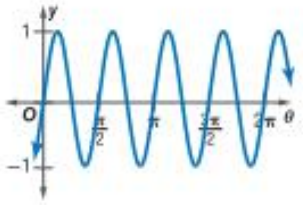
$$\sin 510° = \sin(360° + 150°)$$

$$= \sin 150°$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 9

حدد فترة الدالة أدناه.



يتكرر النمط نفسه عند $\frac{\pi}{2}$، π. وهكذا. إذًا، الفترة هي $\frac{\pi}{2}$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

5-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

جـــد السعة، إن وجدت، والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

46. $y = 4 \sin 2\theta$

47. $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

48. $y = 3 \csc \theta$

49. $y = 3 \sec \theta$

50. $y = \tan 2\theta$

51. $y = 2 \csc \frac{1}{2}\theta$

52. عندما تقفز هناء على منطة قفز تهتز المنصة بتردد 10 هرتز. افترض أن السعة تساوي 1.5 m. اكتب معادلة sine لتمثيل تردد منصة القفز y كدالة للزمن t.

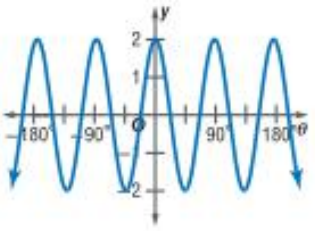
مثال 10

جـــد سعة وفترة $y = 2 \cos 4\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

السعة: $|a| = |2|$ أو 2. التمثيل البياني ممدد رأسيًا. ولذا فالقيمة العظمى هي 2 والقيمة الصغرى هي -2.

الفترة:

$$\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$$



5-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

اذكر الإزاحة الرأسية والسعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

53. $y = 3 \sin [2(\theta - 90°)] + 1$

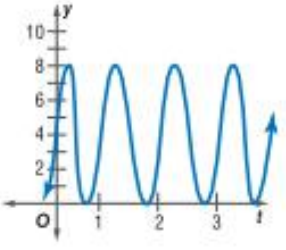
54. $y = \frac{1}{2} \tan [2(\theta - 30°)] - 3$

55. $y = 2 \sec \left[3\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2$

56. $y = \frac{1}{2} \cos \left[\frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$

57. $y = \frac{1}{3} \sin \left[\frac{1}{3}(\theta - 90°)\right] + 2$

58. يبين التمثيل البياني أدناه قيمة تقريبية للارتفاع y لحبل يقوم شخصان بتدويره كدالة للزمن t بالثواني. اكتب معادلة للدالة.



مثال 11

اذكر الإزاحة الرأسية السعة والفترة وإزاحة الطور للدالة $y = 2 \sin \left[3\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] + 4$. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

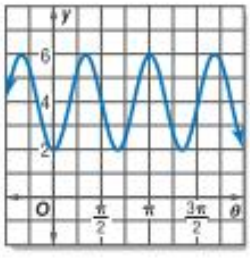
حدد قيم k و a و b و h.

$k = 4$. إذًا الإزاحة الرأسية تساوي 4.

$a = 2$. إذًا تساوي السعة 2.

$b = 3$. إذًا الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$.

$h = -\frac{\pi}{2}$. تساوي إزاحة الطور $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-9 الدوال المثلثية العكسية

جـــد قيمة كل دالة مثلثية عكسية. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

59. $\text{Sin}^{-1}(1)$

60. $\text{Arctan}(0)$

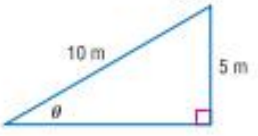
61. $\text{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}$

62. $\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\text{Tan}^{-1}1$

64. $\text{Arccos}\,0$

65. المنحدرات يبلغ ارتفاع منحدر دراجات 5 m ويبلغ طوله 10 m كما هو موضح أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استخدامها في إيجاد θ وهي الزاوية التي يشكلها المنحدر مع الأرض. ثم جـــد الزاوية.



جـــد قيم كل دالة مثلثية عكسية. قرب إلى أقرب جزء من المئة إذا لزم الأمر.

66. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}\right)$

67. $\sin\left(\text{Arcsin}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

68. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}0\right)$

حـــلّ كل معادلة مما يلي. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

69. $\text{Tan}\,\theta = -1.43$

70. $\text{Sin}\,\theta = 0.8$

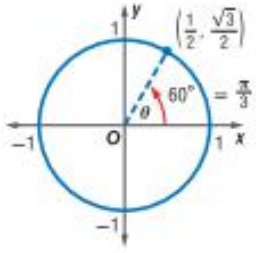
71. $\text{Cos}\,\theta = 0.41$

مثال 12

جـــد قيمة $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{2}$. اكتب قياسات الزوايا بالدرجات والراديان.

جـــد الزاوية θ لـــ $0° \le \theta \le 180°$ التي تساوي قيمة cosine لها $\frac{1}{2}$.

استخدام دائرة الوحدة.



جـــد نقطة على دائرة الوحدة التي يكون الإحداثي x لها يساوي $\frac{1}{2}$. عندما يكون $\theta = 60°$. $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}$.

إذًا. $\text{Cos}^{-1} = 60°$ أو $\frac{\pi}{3}$.

مثال 13

جـــد قيمة $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة:

SIN 2nd [TAN^{-1}] 1 ÷ 2)) ENTER 0.4472135955

إذًا. $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right) \approx 0.45$.

مثال 14

إذا كان $\text{Cos}\,\theta = 0.72$. فجـــد θ.

استخدم حاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة:

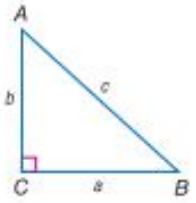
2nd [COS^{-1}] .72) ENTER 43.9455195623

إذًا. $\theta \approx 43.9°$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار

حُـلّ $\triangle ABC$ باستخدام القياسات المعطاة. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



1. $A = 36^\circ, c = 9$
2. $a = 12, A = 58^\circ$
3. $B = 85^\circ, b = 8$
4. $a = 9, c = 12$

أعد كتابة كل قياس بالدرجة بالراديان وكل قياس بالراديان بالدرجة.

5. 325°
6. -175°
7. $\frac{9\pi}{4}$
8. $-\frac{5\pi}{6}$

9. حدد ما إذا كان $\triangle ABC$ الذي يحتوي على الزوايا $A = 110^\circ$ و $a = 16$ و $b = 21$ لا يوجد له حل أم حل واحد أم حلان. ثم جـــد حل المثلث إن أمكن. وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

جـــد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية. اكتب قياس الزوايا بالدرجات.

10. $\cos(-90^\circ)$
11. $\sin 585^\circ$
12. $\cot \frac{4\pi}{3}$
13. $\sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
14. $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{4}{5}\right)$
15. $\text{Arccos}\frac{1}{2}$

16. يتقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $p\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
جـــد $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

17. **الاختيار من متعدد** ما الزاوية التي تكون قيمة ظلها وقيمة sine سالبتين؟

A 65°

B 120°

C 265°

D 310°

18. **الملاحة** تقيس الطائرات والسفن المسافة بالأميال البحرية. ويمكن استخدام الدالة $6077 - 31\cos 2\theta$ قدم. حيث θ هي خط العرض بالدرجات. في إيجاد الطول التقريبي للميل البحري عند خط عرض معين. جـــد طول الميل البحري عندما يكون خط العرض يساوي 120°.

جـــد السعة والفترة لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

19. $y = 2\sin 3\theta$
20. $y = \frac{1}{2}\cos 2\theta$

21. **الاختيار من متعدد** ما فترة الدالة $y = 3\cot\theta$؟

F 120°

G 180°

H 360°

J 1080°

22. حدّد إذا ما كان ينبغي حلّ $\triangle XYZ$ الذي معطياته $y = 15$ و $z = 9$ و $X = 105^\circ$ عبر البدء بقانون الـــ Sines أم قانون الـــ Cosines. ثم حلّ المثلث. وقرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

اذكر السعة والفترة وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

23. $y = \cos(\theta + 180)$
24. $y = \frac{1}{2}\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

25. **العجلات** ساقية مياه قطرها 20 m. وتكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن الارتفاع عند أعلى الساقية يمثل الارتفاع عندما الزمن يساوي 0. اكتب معادلة ارتفاع النقطة h في الرسم التخطيطي أدناه كدالة للزمن t. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية

تعتبر الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني من الأدوات الفعالة لحل المسائل. وكما رأيت، تتضمن بعض مسائل الاختبارات التي تواجهها خطوات أو عمليات حسابية تتطلب استخدام حاسبة علمية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها.

- **الرمز العلمي**—لحساب الأعداد الكبيرة
- **الدوال الأسيّة واللوغاريتمية**—مسائل النمو والاضمحلال والمرابحة المركبة
- **الدوال المثلثية**—المسائل المتعلقة بالزوايا والمثلثات ومسائل القياسات غير المباشرة
- **الجذور التربيعية والجذور النونية n**—المسافة على المستوى الإحداثي. نظرية فيثاغورث

الخطوة 2

استخدم الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر الحل بأكبر قدر ممكن من الكفاءة. فيمكن إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما في خطوات أخرى يجب استخدام الحاسبة.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

عندما تقف خديجة على مسافة 18 m من قاعدة شجرة، فإنها تشكل زاوية مقدارها 57° من أعلى الشجرة. فما ارتفاع الشجرة إلى أقرب جزء من عشرة؟

A 27.7 m

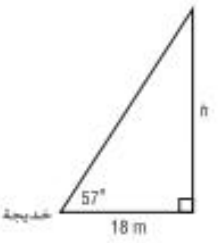
B 28.5 m

C 29.2 m

D 30.1 m

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

اقرأ المسألة بعناية. أعطيت بعض القياسات وطلب منك إيجاد ارتفاع الشجرة. قد يكون من المفيد أن ترسم أولاً نموذجًا للمسألة.



استخدم دالة مثلثية لربط الأطوال وقياس الزاوية في المثلث القائم.

$\text{tangent } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ تعريف نسبة tangent

$\tan 57° = \frac{h}{18}$ التعويض.

تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57°$ في الحل لإيجاد قيمة ارتفاع الشجرة h. استخدم حاسبة علمية.

$1.53986 \approx \frac{h}{18}$ استخدم حاسبة.

$27.71748 \approx h$ اضرب كل طرف في 18.

يبلغ ارتفاع الشجرة حوالي 27.7 m. الإجابة الصحيحة هي A.

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. تقلع طائرة وترتفع بسرعة ثابتة. بعد التحرك 800 m أفقيًا، ارتفعت الطائرة 285 m رأسيًا. ما زاوية الارتفاع للطائرة أثناء الإقلاع والارتفاع المبدئي؟

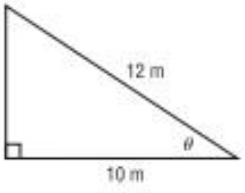
A 15.6°

B 18.4°

C 19.6°

D 22.3°

2. ما قياس زاوية منحدر الدراجات أدناه؟



F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما قيمة x؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

A 6.5

B 6.9

C 7.1

D 7.3

2. يقود حسام دراجته بسرعة 21 km/h ويمكنه قطع حلقة التدريب 10 مرات في الوقت الذي يستغرقه أخوه الأصغر لقطع حلقة التدريب 8 مرات. ما التقدير المنطقي لسرعة الأخ الأصغر لحسام؟

F بين 14 km/h و 15 km/h

G بين 15 km/h و 16 km/h

H بين 16 km/h و 17 km/h

J بين 17 km/h و 18 km/h

3. افرض أن محيط عجلة دوارة يبلغ 68 m. وتدور العجلة 12° في كل مرة يتم التقاط راكب جديد بها. فكم تكون المسافة التي تتحركها عندما تدور العجلة 12°؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

A 7.1 m

B 7.5 m

C 7.8 m

D 14.2 m

4. ما ميل المستقيم الموازي لـ $y - 2 = 4(x + 1)$؟

F -4

G $-\frac{1}{4}$

H $\frac{1}{4}$

J 4

5. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B $-\frac{1}{2}$

C $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. ما حل نظام المعادلات المبين أدناه؟

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

F (0, 3, 3)

G (2, 5, 3)

H لا يوجد حل

J عدد لا نهائي من الحلول

7. جد قيمة m في المثلث MNO إذا كان $n = 12.4$ cm و $M = 35°$ و $N = 74°$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm

B 8.5 cm

C 14.6 cm

D 35.9 cm

8. رُتب نتائج اقتراع حديث في المصفوفة.

	لصالح	ضد
المقترح 1	1553	771
المقترح 2	689	1633
المقترح 3	2088	229

بناء على هذه النتائج، أي النتائج لا تكون صالحة؟

F يوجد 771 تصويتًا ضد المقترح 1.

G عدد المصوتين ضد المقترح 1 أكبر من عدد المصوتين للمقترح 2.

H فرصة فوز المقترح 2 ضئيلة.

J عدد المصوتين للمقترح 1 أكثر من عدد المصوتين للمقترح 3.

9. أي من التمثيلات البيانية للمعادلات التالية يكون متناظرًا حول المحور الرأسي y؟

A $y = x^2 + 3x - 1$

B $y = -x^2 + x$

C $y = 6x^2 + 9$

D $y = 3x^2 - 3x + 1$

10. ما الباقي عند قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

F -11 **G** -1 **H** 1 **J** 11

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 7 استخدم قانون الـ Sines في حل مسألة المثلث.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

11. يمكن تمثيل السرعة التي تقطعها أمواج تسونامي، أو موجة المد، بالمعادلة $s = 356\sqrt{d}$ ، حيث s تمثل السرعة بالكيلومترات في الساعة و d تمثل متوسط عمق المياه بالكيلومترات. وقد توصلنا إلى أن أمواج تسونامي تقطع 145 km/h. ما متوسط عمق المياه؟ قرب إلى أقرب جزء من مئة.

12. **الإجابة الشبكية** افرض أنك أودعت مبلغ AED 500 في حساب يدفع نسبة مرابحة مركبة نصف سنوية قدرها 5.4%. جـــد قيمة الحساب بالدرهم مقربًا إلى أقرب فلس بعد 10 سنوات.

13. لكي يظل الحصان بصحة جيدة، يحتاج إلى تناول 5 kg من التبن كل يوم.

a. اكتب معادلة لتمثيل مقدار التبن اللازم للحفاظ على صحة x من الأحصنة لعدد d من الأيام.

b. هل تمثل معادلتك تغيرًا طرديًا أم مشتركًا أم عكسيًا؟ اشرح سبب اختيارك.

c. ما مقدار التبن الذي تحتاجه ثلاثة من الأحصنة في شهر يوليو؟

14. **الإجابة الشبكية** ما نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 28 = 0$؟

15. تتدرب بدرية لتجري سباق 10 km. ويوضح الجدول أدناه الأزمنة التي حققتها في العديد من سباقات طولها 1 km. وترد الأزمنة بالدقائق. صف المركز وقك البيانات باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

7.25	8.10
7.40	6.75
7.20	7.35
7.10	7.25
8.00	7.45

16. **الإجابة الشبكية** يستمر نمط المربعات أدناه إلى ما لا نهاية. مع إضافة مزيد من المربعات في كل خطوة. فكم عدد المربعات في الخطوة العاشرة؟

الخطوة 1 الخطوة 2 الخطوة 3

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

17. توضح ساعات حمدة بوظيفتها الصيفية لأسبوع واحد في الجدول أدناه. وتحصل على AED 6 في الساعة.

	ساعات عمل حمدة
الأحد	6
الاثنين	6
الثلاثاء	4
الأربعاء	0
الخميس	2
الجمعة	0
السبت	8

a. اكتب تعبيرًا لإجمالي ما تكسبه حمدة أسبوعيًا.

b. جـــد قيمة التعبير من الجزء a باستخدام خاصية التوزيع.

c. تعمل أمل مع حمدة وتحصل أيضًا على AED 6 في الساعة. فإذا كان إجمالي ما ربحته أمل هذا الأسبوع AED 192 اكتب معادلة وحلها لإيجاد عدد الساعات الإضافية التي عملت بها أمل أكثر من حمدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

Chapter Sourced From: EM End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من. أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من. أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا. السرعة الزاويّة
α	ألفا. قياس الزاوية
β	بيتا. قياس الزاوية
γ	جاما. قياس الزاوية
θ	ثيتا. قياس الزاوية
λ	لامدا. طول الموجة
ϕ	فاي. قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p. ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية. إذا كان p فإن q
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط. p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$. المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x. قيمة f لـ x
$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y. دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x. تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو nP_r	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو nC_r	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما. رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\bar{x}$	متوسط x . متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 باردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 باردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 باردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مدرسة © حقوق الطبع والتأليف

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a. يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$. يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$. فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$. فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b. $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c. $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c. $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a. يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$. حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$. يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a. يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$. فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a = b$. فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c. حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$. فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c.إذا كان $a > b$. فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c. إذا كان $a > b$. فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$. فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$. فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b. إذا كان $ab = 0$. فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$	المتسلسلة الأسيّة	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

نظرية ذات الحدين

$$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$$

متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مسقط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطيّة

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	**دائرة**	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	**قطع زائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ ، $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المعادلات الوسيطيّة

الموقع العمودي	$y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	**المسافة الأفقية**	$x = tv_0\cos\theta$

الاعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	**صيغة القسمة**	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	**نظرية ديموافر**	$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$	**المسافة على خط الأعداد**	$d = \lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	**طول القوس**	$\ell = \frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	**نقطة المنتصف على خط الأعداد**	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	**نظرية فيثاغورس**	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	**مستطيل**	$P = 2\ell + 2w$	**دائرة**	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	**هرم**	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	**مخروط**	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	**مخروط**	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	**إسطوانة**	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	**كرة**	$S = 4\pi r^2$	**مكعب**	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	**مخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h^2$	**إسطوانة**	$V = \pi r^2h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	**كرة**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	**مكعب**	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال المثلثية

النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	صيغة هيرون	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاوية	$\omega = \frac{\theta}{t}$

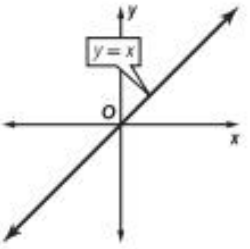
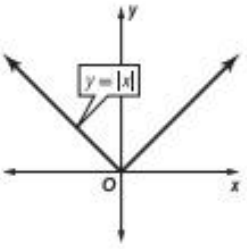
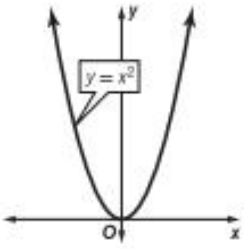
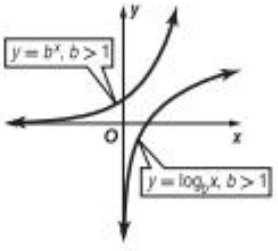
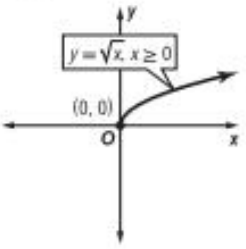
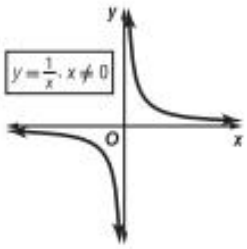
المتطابقات المثلثية

متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$		$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$		$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال الخطية	دوال القيمة المطلقة	الدوال التربيعية
		
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية	**دوال الجذر التربيعي**	**الدوال العكسية والنسبية**
		

العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظية: $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ المتوسطة: $v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية، $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شكر وتقدير

نسخة الطلاب

ix Ingram Publishing; **viii** Roine Magnusson/Photodisc/Getty Images, Purestock/SuperStock; **x** I. Rozenbaum & F. Cirou/PhotoAlto; **xi** J. Castro/Flickr/Getty Images; **xii** Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; **xiii** ZouZou/Shutterstock; **xiv** ra2studio/Shutterstock; **168** J. Castro/Flickr/Getty Images; **171** (tl)Ivan Kuzmin/Shutterstock.com; **172** (tr)George Doyle & Ciaran Griffin/Superstock; **180** (tl)Redsnapper/Alamy Images; **182** (tr)Aceshot1/Shutterstock; **187** (t)Ed-Imaging, (b)Ed-Imaging; **188** (tl)Ingram Publishing/age fotostock; **194** (cl)M.E. Young/USGS; **199** (tl)Fotosearch RF/Glow Images; **202** (tr)Martin Child/Photodisc/Getty Images; **211** (tl)Image Source, (tr)Brian Hagiwara/Stockbyte/Getty Images, (bl)Stockbyte/age fotostock, (bc)Ingram Publishing/SuperStock, (br)Siede Preis/Getty Images; **212** (bl)JupiterImages/Thinkstock/Alamy Images, (bc)Del Boy/Shutterstock, (br)Tamara Kulikova/Shutterstock; **213** (b)Lasha/Shutterstock.com, (bl)D. Hurst/Alamy Stock Photo, (bcl)Comstock Images/Alamy, (bcr)Comstock Images/Alamy Stock Photo, (br)David Lee/Shutterstock; **214** (c)Hisham F. Ibrahim/Getty Images; **218** McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education; **219** McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education, McGraw-Hill Education; **222** (tl)Mark Dierker/McGraw Hill; **236** (tl)Zurijeta/Shutterstock; **238** Dennis Welsh/UpperCut Images/Getty Images; **242** (tl)Dejan Gileski/Shutterstock; **246** (br)Kotsovolos Panagiotis/Shutterstock.com; **251** (tl)Nick Koudis/Getty Images; **252** (cr)2xSamara.com/Shutterstock.com; **259** (tl)Alexey Stiop/Shutterstock; **262** (br)Salajean/Shutterstock.com; **266** (tl)JPL/NASA; **270** (tr)Ffooter/Shutterstock.com, (bl)JPL/NASA; **274** (tl)IT Stock Free/Alamy Images; **277** (tr)Tamara Kulikova/Shutterstock; **283** (br)Fredrick Kippe/Alamy Stock Photo; **291** (tr)Chris Willig; **300** (tr)Anders Brownworth/Shutterstock.com; **305** (tl)Africa Studio/Shutterstock.com; **318** (tl)McGraw-Hill Education.

دلائـــل رمـــوز الغلاف

لون الحلقة الثالثة

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم

اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

04-2176855

www.moe.gov.ae

ccc.moe@moe.gov.ae