



الرياضيات

9

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الرياضيات

الصف التاسع - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

هبة ماهر التميمي إبراهيم أحمد عمايرة أيمن ناصر صندوقه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor @ feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

© HarperCollins Publishers Limited 2022.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعِيناً على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائعة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظُفَتْ فيها التكنولوجيا لتُسهِم في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المقدمة لهم.

لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحو يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، لا سيّما في شبكة الإنترنت التي أصبحت أداة تعليمية مُهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت طلبتنا أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأنّ نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 5 العلاقات في المثلثات والنسب المثلثية 6

مشروع الوحدة: الهندسة والفن 7

الدرس 1 الأجزاء المتناسبة في المثلثات 8

معمل برمجيّة جوجيرا: توسّع: مثلث القطع المُنصف 18

الدرس 2 مُنصفات في المثلث 19

نشاط مفاهيمي: القطع المتوسط في المثلث 30

الدرس 3 القطع المتوسط والارتفاعات في المثلث 31

نشاط مفاهيمي: النسب المثلثية 39

الدرس 4 النسب المثلثية 40

الدرس 5 تطبيقات النسب المثلثية 49

اختبار نهاية الوحدة 58

الوحدة 6 المقادير الأسية والمقادير الجذرية 60

مشروع الوحدة: المُجسّمات والمقادير الأسية والجذرية 61

الدرس 1 تبسيط المقادير الأسية 62

الدرس 2 العمليات على المقادير الجذرية 69

الدرس 3 حلّ المعادلات الجذرية 79

اختبار نهاية الوحدة 88

قائمة المحتويات

الوحدة 7 المقادير الجبرية النسبية 90

مشروع الوحدة: المدينة الرياضية 91

الدرس 1 ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها 92

الدرس 2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرؤها 101

الدرس 3 حل المعادلات النسبية 108

اختبار نهاية الوحدة 116

الوحدة 8 الإحصاء والاحتمالات 118

مشروع الوحدة: جمع البيانات، وتنظيمها، وتحليلها 119

الدرس 1 مقياس التشتت 120

الدرس 2 الجداول التكرارية ذات الفئات 135

الدرس 3 المُدرجات التكرارية 144

الدرس 4 الاحتمالات وأشكال فن 153

الدرس 5 الاحتمال الهندسي 165

اختبار نهاية الوحدة 172

ما أهمية هذه الوحدة؟

المثلث هو أبسط المضلعات، لكن أضلاعه وزواياه تمتاز بخصائص فريدة جعلته أحد أكثر الأشكال الهندسية استعمالاً في التطبيقات العلمية والحياتية. فمثلاً، يستعمل المهندسون المثلثات لتصميم جسور قوية تتوزع فيها الأحمال على الأعمدة بالتساوي، ويستعملون النسب بين أطوال أضلاع المثلثات لتحديد المسافات التي يصعب قياسها بصورة مباشرة.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ▶ تطبيق النظريات الخاصة بالأجزاء المتناسبة في المثلث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- ▶ استعمال منصفات المثلث العمودية ومنصفات زوايا المثلث لإيجاد قياسات مجهولة.
- ▶ إيجاد مركز مثلث، وملتقى ارتفاعاته.
- ▶ تمييز جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلها، بوصفها نسباً بين أضلاع مثلث قائم الزاوية، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تحديد المثلثات المشابهة باستعمال حالات التشابه: SAS، وSSS، وAA.
- ✓ توظيف نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال مجهولة في المثلث قائم الزاوية.
- ✓ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- ✓ استعمال تشابه المثلثات لإيجاد قياسات مجهولة.

توظيف مفاهيم هندسية في عمل لوحة فنية.

فكرة المشروع



ورقة مقاسها (A3)، ألوان، أدوات هندسية.

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أرسم على الورقة مجموعة من المثلثات المختلفة، بحيث تكون متداخلة في ما بينها، وتمتد على مساحة الورقة كلها.
- 2 أختار مثلثين من هذه المثلثات، ثم أرسم مثلث القطع المُنصف لكل منهما.
- 3 أشاهد مقطع الفيديو في الرمز المجاور الذي تظهر فيه خطوات رسم دائرة خارجية للمثلث.
- 4 أختار مثلثين من الشكل، ثم أرسم لكل منهما دائرة خارجية، متبعا الخطوات الواردة في مقطع الفيديو.
- 5 أشاهد مقطع الفيديو في الرمز المجاور الذي تظهر فيه خطوات رسم دائرة داخلية للمثلث.
- 6 أختار مثلثين من الشكل، ثم أرسم لكل منهما دائرة داخلية، متبعا الخطوات الواردة في مقطع الفيديو.
- 7 أختار مثلثا من الشكل، ثم أرسم ارتفاعاته الثلاثة.
- 8 ألون أجزاء اللوحة بالألوان مناسبة.
- 9 أختار ثلاثة مثلثات قائمة من اللوحة، ثم أجد جميع النسب المثلثية لزواياها الحادة.
- 10 أختار مثلثا من اللوحة، ثم أكتب مسألة لإيجاد طول ضلع مجهول في هذا المثلث، ثم أطلب إلى زميل لي إيجاد الطول المجهول.
- 11 أختار مثلثا من اللوحة، ثم أكتب مسألة لإيجاد قياس زاوية حادة في هذا المثلث، ثم أطلب إلى زميل لي إيجاد قياس الزاوية المجهولة.



عرض النتائج:

أصمم مطوية أعرض فيها:

- خطوات عمل المشروع، والنتائج التي توصلت إليها.
- شرحا مختصرا عن العلاقات في المثلثات التي ظهرت في اللوحة.
- معلومة إضافية عرفتُها عن المثلثات في أثناء العمل في المشروع.

الدرس 1

الأجزاء المتناسبة في المثلثات Proportional Parts in Triangles

• تعرّف الأجزاء المتناسبة في المثلث، واستعملها لإيجاد قياسات مجهولة.

فكرة الدرس



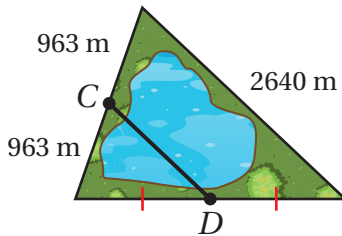
القطعة المنصّفة في المثلث.

المصطلحات

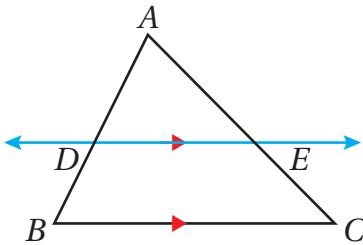


يُمثّل الشكل المجاور بحيرة شيدّ فوقها الجسر CD .
أجد طول الجسر.

مسألة اليوم



الأجزاء المتناسبة في المثلث



يُبين الشكل المجاور المثلث ABC ، حيث: $\overrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ ،
و $\overrightarrow{DE}$ يقطع $\overline{AB}$ في D ، ويقطع $\overline{AC}$ في E . ما العلاقة بين
 $\triangle ADE$ و $\triangle ABC$ ؟

يُمكن استكشاف هذه العلاقة عن طريق تنفيذ النشاط الهندسي الآتي:

التناسب في المثلث

نشاط هندسي

الإجراءات:

الخطوة 1: أرسم المثلث ABC مختلف

الأضلاع كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أقسم أحد أضلاع المثلث، وليكن

$\overline{AC}$ ، إلى أربعة أجزاء متطابقة،

ثم استعملها لرسم قطع مستقيمة

موازية للضلع $\overline{CB}$ كما في الشكل المجاور.

أحلّ النتائج:

1 كم مثلثًا في الشكل يُشابه المثلث ABC ؟ أبرّر إجابتي.

2 ما علاقة طول كل قطعة من القطع المستقيمة المتوازية بطول $\overline{CB}$ ؟ أبرّر إجابتي.

أتذكّر

تعلمت سابقاً أنّه يُمكن إثبات تشابه مثلثين باستعمال عدد من المُسلّمات والنظريات مثل: التشابه بزوايتين (AA)، والتشابه بثلاثة أضلاع (SSS)، والتشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS).

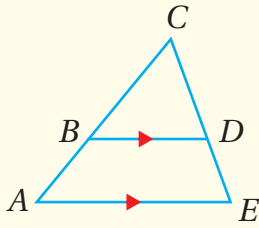
أستنتج من النشاط السابق أنه عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث، ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يمكن إثبات أن المثلثين الناتجين متشابهان، وذلك باستعمال مُسلِّمة التشابه AA. وبما أن المثلثين متشابهان، فإن أطوال أضلاعهما متناسبة، وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية.

أَتَذَكَّرُ

تنصُّ مُسلِّمة التشابه
بزواويتين (AA) على
أنه إذا طابقت زاويتان
في مثلث زاويتين في
مثلث آخر، فإن المثلثين
متشابهان.

التناسب في المثلث

نظرية



بالكلمات: إذا وازى مستقيم ضلعاً من أضلاع مثلث، وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يُقسَّمُهُما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.

بالرموز: إذا كان $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ ، فإن $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

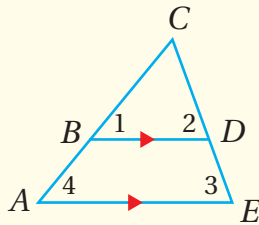
إثبات نظرية

الخطوة 1: أحدد المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

الخطوة 2: أخطِّط للبرهان باتِّباع الخطوات الآتية:



• أسمى الزوايا كما هو مبين في الشكل المجاور.

• أستعمل مُسلِّمة التشابه AA لإثبات أن

$$\triangle ACE \sim \triangle BCD$$

• أستعمل تشابه المثلثات وتناسب الأضلاع في المثلثات المتشابهة لإثبات التناسب المطلوب.

التناسب في المثلث (يتبع)

نظرية

الخطوة 3: أبرهن.

- بما أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 4$ ، و $\angle 2 \cong \angle 3$ ، وفقاً لمسلمة الزاويتين المتناظرتين. وبذلك، فإن $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ بحسب مسلمة التشابه (AA).
- بناءً على تعريف المضلعات المتشابهة، فإن $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$.
- بما أن $CA = BA + CB$ ، و $CE = DE + CD$ ، فإنه يمكن إيجاد التناسب المطلوب على النحو الآتي:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$$

تعريف المضلعات المتشابهة

$$\frac{BA + CB}{CB} = \frac{DE + CD}{CD}$$

بالتعويض

$$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$$

بتوزيع المقام على البسط

$$\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$$

$$\frac{CB}{CB} = 1, \frac{CD}{CD} = 1$$

$$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$$

ب طرح 1 من طرفي المعادلة

أندكّر

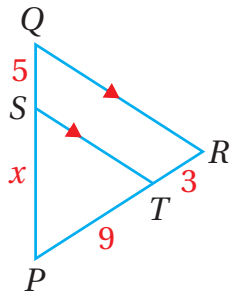
تعلّمت سابقاً أنه إذا قطع مستقيمان مستقيمين متوازيين في المستوى نفسه، فإن هذا يقود إلى مجموعة من النظريات عن العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة من هذا التقاطع، مثل النظرية التي تنص على أن الزوايا المتناظرة متطابقة.

أندكّر

إذا تشابه مضلعان، فإن زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

يمكن استعمال نظرية الأجزاء المتناسبة في المثلث لإيجاد أطوال قطع مستقيمة مجهولة.

مثال 1



في $\triangle PQR$ ، إذا كان $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$ ، $SQ = 5$ ، $PT = 9$ ، $TR = 3$ ، فأوجد PS .

$$\frac{SQ}{PS} = \frac{TR}{PT}$$

نظرية الأجزاء المتناسبة

$$\frac{5}{x} = \frac{3}{9}$$

بالتعويض

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{3}$$

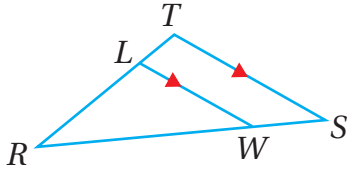
بالتبسيط

$$x = 15$$

باستعمال خاصية الضرب التبادلي

أفكّر

هل يمكن كتابة التناسب بطريقة أخرى؟



أتحقق من فهمي

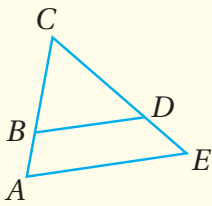
في $\triangle RTS$ ، إذا كان $RL = 5$, $RT = 9$, $WS = 6$ ، فأجد $\overline{LW} \parallel \overline{TS}$.

عكس نظرية التناسب في المثلث

إن عكس نظرية التناسب في المثلث صحيح أيضًا، وهذا ما تنص عليه النظرية الآتية.

عكس نظرية التناسب في المثلث

نظرية

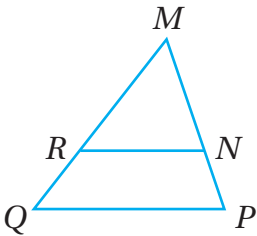


بالكلمات: إذا قطع مستقيمان ضلعين في مثلث، وقسمتهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

بالرموز: إذا كان $\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC}$ ، فإن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

إثبات النظرية جاء في صورة تدريب في المسألة 17.

مثال 2



في $\triangle QMP$ ، إذا كان $MN = 12$, $NP = 3$, $MR = 16$ ، $RQ = 4$ ، فأحدد إذا كان $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ ، مُبرِّرًا إجابتي.

$$\frac{RQ}{MR} = \frac{4}{16}$$

بتعويض $MR = 16$, $RQ = 4$

$$= \frac{1}{4}$$

بالتبسيط

$$\frac{NP}{MN} = \frac{3}{12}$$

بتعويض $MN = 12$, $NP = 3$

$$= \frac{1}{4}$$

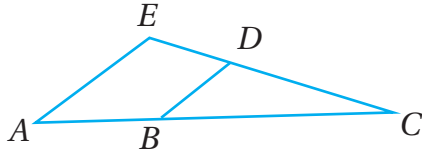
بالتبسيط

ومن ثم، فإن:

$$\frac{RQ}{MR} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{4}$$

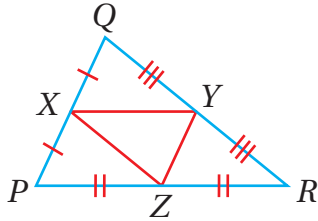
إذن، وبحسب عكس نظرية التناسب في المثلث، فإن $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$.

أتحقق من فهمي



في $\triangle AEC$ ، إذا كان $ED = 12$, $DC = 20$, $BC = 25$, $AB = 15$
فأحدّد إذا كان $\overline{DB} \parallel \overline{AE}$ ، مُبرّرًا إجابتي.

القطعة المنصّفة في المثلث



القطعة المنصّفة في المثلث (midsegment) هي قطعة مستقيمة طرفيها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث، وفي كلّ مثلث ثلاث قطع منصّفة. فمثلاً، القطع المنصّفة في $\triangle PQR$ المجاور هي: $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{XZ}$.

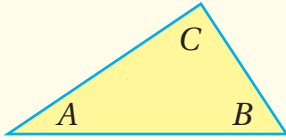
سأستكشف في النشاط الآتي العلاقة بين أضلاع المثلث وقطعة منصّفة فيه.

القطعة المنصّفة في المثلث

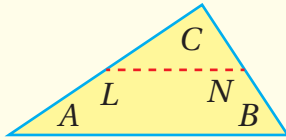
نشاط هندسي

الإجراءات:

الخطوة 1: أرسم مثلثاً مُنفَرَجَ الزاوية، ثمّ أقصّه، وأسمّي رؤوسه: A , B , C كما في الشكل المجاور.

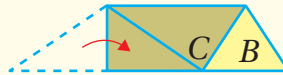
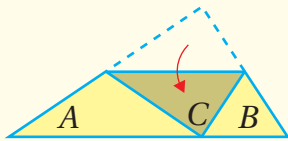


الخطوة 2: أرسم مثلثاً حادّ الزوايا، ومثلثاً قائم الزاوية، مُكرّراً ما فعلته في الخطوة 1.



الخطوة 3: في كلّ مثلث، أطوي A على C لإيجاد نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، وأسمّيها L ، ثمّ أطوي B على C لإيجاد نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وأسمّيها N ، ثمّ أرسم $\overline{LN}$.

الخطوة 4: أطوي كلّ مثلث حول $\overline{LN}$ ، ثمّ أطوي كلّاً من A و B على C كما في الشكل الآتي.



أحلّل النتائج:

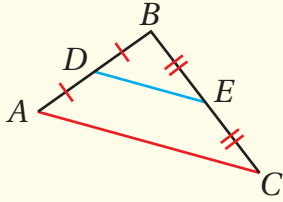
- 1 ما علاقة طول $\overline{LN}$ بطول $\overline{AB}$ ؟ أبرّر إجابتي.
- 2 أعطي تخميناً يختصّ بعلاقة القطعة المنصّفة لضلعين في مثلث بالضلع الثالث فيه، مُبرّرًا إجابتي.
- 3 أقارن إجابتي بإجابة زملائي.

توجد علاقتان بين القطعة المُنصفَة في المثلث والضلع المُقابل لها، وهما موضحَتان في النظرية الآتية.

القطعة المُنصفَة في المثلث

نظرية

بالكلمات: القطعة المُنصفَة في المثلث توازي الضلع المُقابل لها، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.



بالرموز: إذا كانت النقطة D والنقطة E هما نقطتي منتصف $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على الترتيب، فإن:

$$\overline{DE} \parallel \overline{AC} \text{ and } DE = \frac{1}{2} AC$$

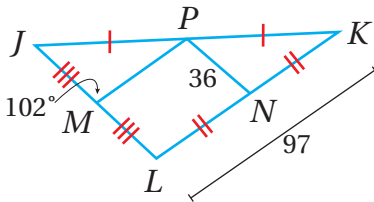
أتعلم

تعدُّ نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث حالة خاصة من عكس نظرية التناسب في المثلث.

إثبات النظرية جاء في صورة تدريب في المسألة 18.

يُمكن استعمال نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث لإيجاد أطوال قياسات مجهولة.

مثال 3



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المُجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

1 طول $\overline{JL}$.

$$PN = \frac{1}{2} JL \quad \text{نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث}$$

$$36 = \frac{1}{2} JL \quad \text{بتعويض } PN = 36$$

$$JL = 72 \quad \text{بالتبسيط}$$

2 طول $\overline{PM}$.

$$PM = \frac{1}{2} LK \quad \text{نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث}$$

$$= \frac{1}{2} (97) \quad \text{بتعويض } LK = 97$$

$$= 48.5 \quad \text{بالتبسيط}$$

3 قياس $\angle MPN$.

$$\begin{aligned}\angle MPN &\cong \angle JMP \\ m\angle MPN &= m\angle JMP \\ &= 102^\circ\end{aligned}$$

نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

تعريف تطابق الزوايا

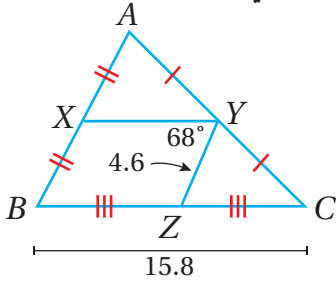
بالتعويض

أنذكر

بما أن $\overline{PN} \parallel \overline{JL}$ ، فإن $\angle MPN \cong \angle JMP$ لأنهما زاويتان متبادلتان داخلياً.

أتحقق من فهمي

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي:



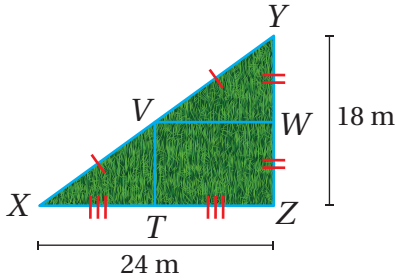
(a) طول $\overline{XY}$.

(b) طول $\overline{AX}$.

(c) قياس $\angle YZC$.

يمكن استعمال نظرية القطعة المُنصفَة في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4: من الحياة



حديقة: يُبين الشكل المجاور مُخطّطاً لحديقة عامة على شكل مُثلث قائم الزاوية، وفي داخلها ممراً مشاة بحاجة إلى إعادة تبليط، هما: $\overline{TV}$ و $\overline{VW}$. أجد تكلفة تبليط الممرين التي ستدفعها إدارة البلدية، علماً بأن تكلفة تبليط المتر الطولي الواحد للممر هي JD 12.

الخطوة 1: أجد طول كل من الممرين.

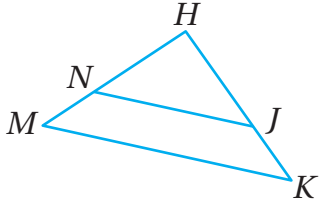
• أجد طول الممر $\overline{VW}$:

$$\begin{aligned}VW &= \frac{1}{2} XZ \\ &= \frac{1}{2} (24) \\ &= 12\end{aligned}$$

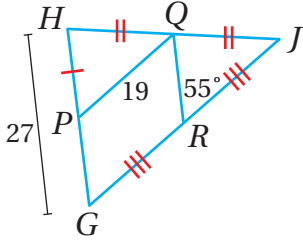
نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث

بتعويض $XZ = 24$

بالتبسيط



3 في $\triangle HKM$ ، إذا كان $HJ = 2JK$ ، $HN = 10$ ، $HM = 15$ ، فأحدد إذا كان $\overline{NJ} \parallel \overline{MK}$ ، مُبرِّراً إجابتي.



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المُجاوِر لإيجاد كلِّ ممَّا يأتي:

4 GJ

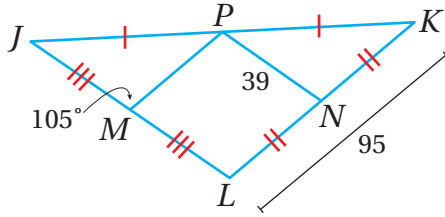
5 RQ

6 RJ

7 $m \angle PQR$

8 $m \angle HGJ$

9 $m \angle GPQ$

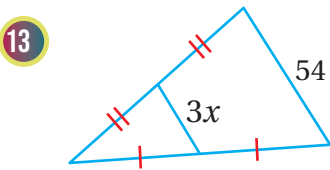


10 JL

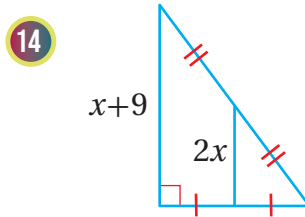
11 PM

12 $m \angle MPN$

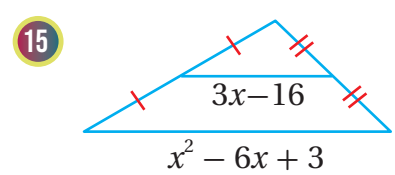
أجد قيمة x في كلِّ ممَّا يأتي:



13

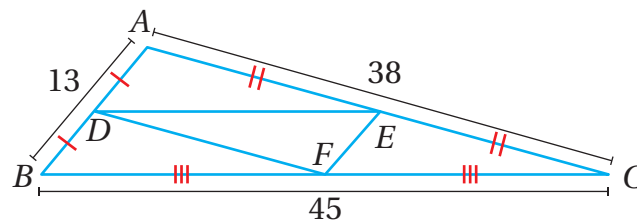


14



15

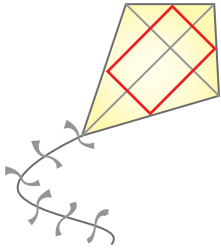
16 أجد محيط $\triangle DEF$ المُبيَّن في الشكل الآتي.



أثبت كلاً من النظريتين الآتيتين باستعمال البرهان ذي العمودين:

17 إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث، وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

18 القطعة المُنصفَة في المثلث توازي أحد أضلاعِهِ، وطولُها يساوي نصفَ طول ذلك الضلع.



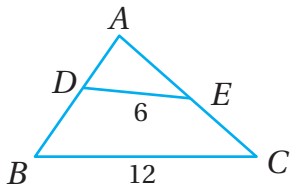
19 طائرة ورقية: صنعت هديل طائرة ورقية، طول قُطْرَيْها 80 cm و 60 cm، ثم استعملت شريطاً لربط نقاط منتصف أضلاع الطائرة. أجد طول الشريط.

20 أعيد إثبات نظرية التناسب في المثلث باستعمال البرهان الإحداثي.

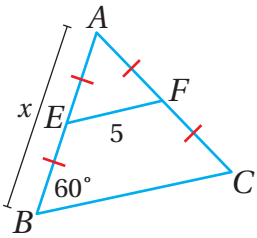
21 أحل المسألة الواردة بدايةً الدرس.



مهارات التفكير العليا

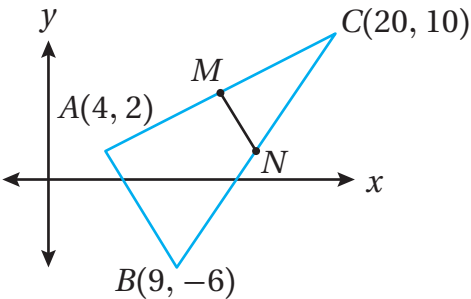


22 **اكتشف الخطأ:** قال خالد: "بما أن $DE = \frac{1}{2} BC$ في الشكل المُجاوِر، فإن $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ بحسب نظرية القطعة المُنصفَة في المثلث". هل ما قاله خالد صحيح؟ أبرر إجابتي.



23 **تبرير:** أجد قيمة x في الشكل المُجاوِر، مُبرراً إجابتي.

24 **تحذّر:** إذا كانت مساحة $\triangle ABC$ هي 48 cm^2 ، وكانت النقطة D والنقطة E هما نقطتي منتصف $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على الترتيب، فأجد مساحة $\triangle ADE$ ، مُبرراً إجابتي.

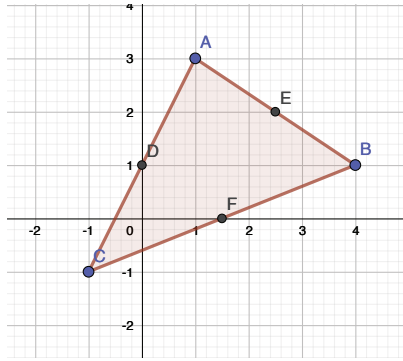


25 **تبرير:** في الشكل المُجاوِر، إذا كانت $\overline{MN}$ هي قطعة منتصف في $\triangle ABC$ ، فأجد ميل $\overline{MN}$ بطريقتين مختلفتين، مُبرراً إجابتي.

توسّع: مُثَلَّثُ القَطْعِ المُنَصِّفِ Extension: Midsegment Triangle

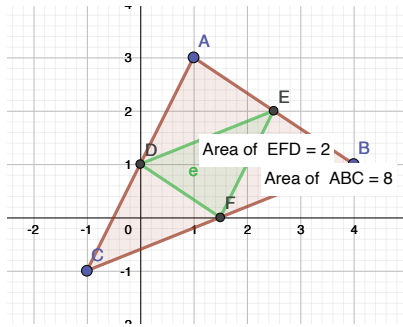
مُثَلَّثُ القَطْعِ المُنَصِّفِ هو مُثَلَّثٌ ناتجٌ من القَطْعِ المُنَصِّفِ الثلاث في المُثَلَّثِ.
يُمْكِنُ استعمالُ برمجيّة جيو جيرا لاستكشافِ علاقةٍ مساحةٍ مُثَلَّثِ القَطْعِ المُنَصِّفِ بمساحةِ المُثَلَّثِ الأصليّ.

نشاط



1 أرسم المُثَلَّثَ مختلفَ الأضلاعِ ABC في المستوى الإحداثي، وذلك بتحديد ثلاث نقاط في المستوى باستعمال أيقونة من شريط الأدوات، ثم اختيار أيقونة من شريط الأدوات، ثم الضغط بالمؤشر على مواقع النقاط التي تُمثّل رؤوس المُثَلَّثِ في المستوى الإحداثي، ثم نقر الرأس الأوّل لإغلاق الشكل.

2 أجدّد نقطة منتصف كلّ ضلعٍ من أضلاع المُثَلَّثِ باختيار أيقونة من شريط الأدوات، ثم الضغط على كلّ ضلعٍ من أضلاع المُثَلَّثِ.



3 أرسم مُثَلَّثَ القَطْعِ المُنَصِّفِ، مُتَّبِعًا الإجراءاتِ نفسها الواردة في الخطوة 1.

4 أجدّد مساحة $\triangle ABC$ ، ومساحة مُثَلَّثِ القَطْعِ المُنَصِّفِ باختيار أيقونة من شريط الأدوات، ثم النقر داخل كلّ مُثَلَّثِ.

5 أكمل الفراغ بما هو مناسبٌ في الجملة الآتية:

تُعَادِلُ مساحةُ مُثَلَّثِ القَطْعِ المُنَصِّفِ مساحة $\triangle ABC$.

6 أكرّر الخطوات الست السابقة، وأطبّقها على مُثَلَّثِ حادّ الزوايا، ومُثَلَّثِ قائم الزاوية، ثم أدوّن النتيجة التي أتوصّل إليها.

7 أثبت النتيجة باستعمال البرهان الإحداثي.

الدرس 2

مُنَصِّفَاتُ فِي المثلث Bisectors in Triangle

- تعرّف نظرية المُنَصِّفَاتِ العمودية للمثلث، واستعملها لإيجاد قياسات مجهولة.
- تعرّف نظرية مُنَصِّفَاتِ زوايا المثلث، واستعملها لإيجاد قياسات مجهولة.
- المُنَصِّفُ العمودي، مركز الدائرة الخارجية للمثلث، مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

فكرة الدرس



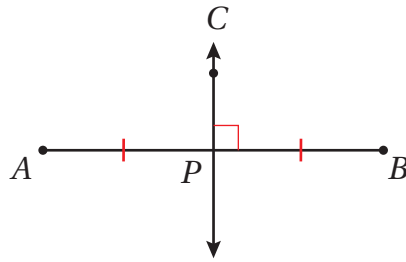
المصطلحات



مسألة اليوم



يظهر في الصورة المجاورة جزء من جسر كمال الشاعر في العاصمة عمّان. إذا كانت حافة الجسر عمودية على الدعامه $\overline{BD}$ ، وكان $AD = CD$ ، فما العلاقة بين $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ ؟



المُنَصِّفُ العمودي

(perpendicular bisector) المُنَصِّفُ العمودي

لقطعة مستقيمة هو مستقيم عمودي على القطعة المستقيمة عند نقطة منتصفها.

للمُنَصِّفِ العمودي بعض الخصائص التي تمثلها النظريتان الآتيتان.

$\overrightarrow{CP}$ المُنَصِّفُ العمودي لـ $\overline{AB}$.

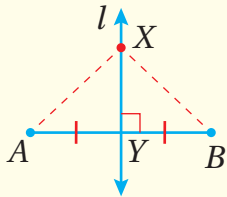
المُنَصِّفُ العمودي

نظريتان

نظرية المُنَصِّفِ العمودي:

كل نقطة على المُنَصِّفِ العمودي لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.

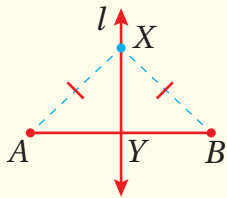
مثال: إذا كان l مُنَصِّفًا عموديًا لـ $\overline{AB}$ ، فإن $AX = BX$ ، لأي نقطة X على l .



عكس نظرية المُنَصِّفِ العمودي:

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على المُنَصِّفِ العمودي لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AX = BX$ ، و l مُنَصِّفًا عموديًا لـ $\overline{AB}$ ، فإن X تقع على l .



أندكّر

يشير الرمز AB إلى طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

مثال 1

أجد كلاً مما يأتي:

طول $\overline{HJ}$.

الخطوة 1: أجد قيمة x .

نظرية المُنصفِ العموديِّ

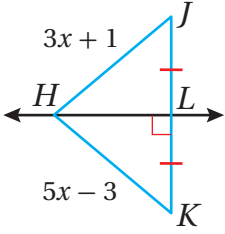
بالتعويض

بحلّ المعادلة لـ x

الخطوة 2: أجد طول $\overline{HJ}$.

بتعويض $x = 2$

بالتبسيط



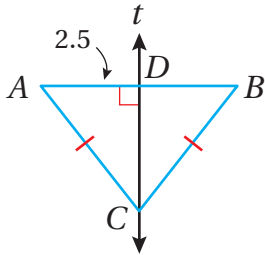
$$HJ = HK$$

$$3x + 1 = 5x - 3$$

$$x = 2$$

$$HJ = 3(2) + 1$$

$$= 7$$



بما أن $AC = BC$ ، و t عموديٌّ على $\overline{AB}$ ، فإنَّ t مُنصفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$ بحسبِ عكسِ نظريةِ المُنصفِ العموديِّ:

$$AB = 2AD$$

$$= 2(2.5)$$

$$= 5$$

تعريفُ المُنصفِ العموديِّ

بالتعويض

بالتبسيط

أتعلّم

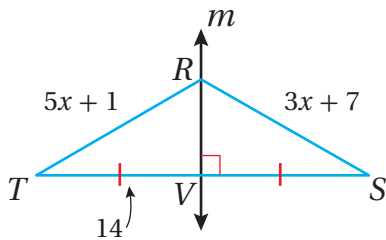
أن يكون $AC = BC$ لا يُعدُّ شرطاً كافياً للحكم على أن t هو مُنصفٌ عموديٌّ لـ $\overline{AB}$.

أتحقّق من فهمي

أجد كلاً مما يأتي:

(a) طول $\overline{TS}$.

(b) طول $\overline{RS}$.



تعلّمت سابقاً أنّه يُمكن إيجاد معادلة أيّ مستقيم إذا عُلِمَ ميله ونقطة يمرُّ بها. ومن ثمّ، فإنّه يُمكن إيجاد معادلة المُنصفِ العموديِّ كما في المثال الآتي.

مثال 2

أجد معادلة المُنصفِ العموديِّ للقطعة المستقيمة PQ ، حيث: $P(-1, 4)$ و $Q(1, 2)$.

الخطوة 1: أجد نقطة منتصف القطعة المستقيمة PQ .

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي}$$

$$M\left(\frac{-1 + 1}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) \quad \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$M(0, 3) \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، إحداثيّات النقطة M الواقعة منتصف PQ هما: $(0, 3)$.

الخطوة 2: أجد ميل المُنصفِ العموديِّ.

ميل المُنصفِ العموديِّ يساوي سالب مقلوب ميل القطعة المستقيمة نفسها؛ لذا أجد أولاً ميل القطعة المستقيمة:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\ &= \frac{2 - 4}{1 - (-1)} && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2) \\ &= \frac{-2}{2} = -1 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، ميل المُنصفِ العموديِّ هو سالب مقلوب ميل PQ ، ويساوي 1.

الخطوة 3: أجد معادلة المُنصفِ العموديِّ.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{صيغة الميل ونقطة} \\ y - 3 &= 1(x - 0) && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (0, 3), m = 1 \\ y &= x + 3 && \text{بالتبسيط، وإعادة ترتيب المعادلة} \end{aligned}$$

إذن، معادلة المُنصفِ العموديِّ للقطعة المستقيمة PQ هي: $y = x + 3$.

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان كلٌّ منهما ليس رأسياً، فإنّ حاصل ضرب ميليهما هو -1 ؛ أي إنّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

أتذكّر

يُمكن كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة إذا عُلِمَ ميل المستقيم وإحداثيات نقطة يمرُّ بها.

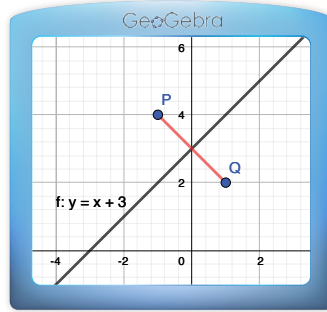
الدعم البياني:

أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد معادلة المُنصف العمودي لقطعة مستقيمة، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

(1) أحدد نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة، وذلك باختيار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم الضغط على موقعي النقطتين في المستوى الإحداثي.

(2) أرسم القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين، وذلك باختيار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم الضغط على النقطتين.

(3) أختار أيقونة  لإظهار المُنصف العمودي في المستوى الإحداثي، وإظهار معادلته في شريط المعادلة.



أتحقق من فهمي

أجد معادلة المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ ، حيث: $P(-1, -5)$ و $Q(3, -1)$.

المُنصفات العمودية للمثلث، ومركز الدائرة الخارجية

إذا تلاقت ثلاثة مستقيمت أو أكثر في نقطة مشتركة، فإن هذه المستقيمت تُسمى مستقيمت مُتلاقية، وتسمى النقطة التي تلتقي فيها المستقيمت نقطة التلاقي.

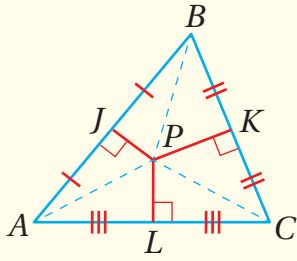
بما أن المثلث ثلاثة أضلاع، فإن له ثلاثة مُنصفات عمودية تلتقي في نقطة واحدة كما تُبين النظرية الآتية.

المنصفات العمودية للمثلث

نظرية

أتعلم

يوجد فرق بين المنصف العمودي للمثلث والقطعة المنصفة في المثلث. فالقطعة المنصفة تنصف الضلعين اللذين يتقاطعان معها، ولا يكون التقاطع عمودياً بالضرورة. أما المنصف العمودي فهو منصف لضع واحد في المثلث، وهو عمودي بالضرورة على ذلك الضلع.



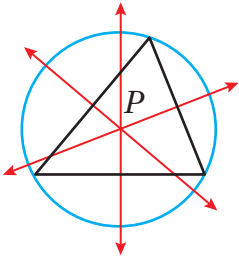
تلتقي المنصفات العمودية لأضلاع مثلث في نقطة لها البعد نفسه عن كل من رؤوس المثلث.

مثال: إذا كانت PJ , PL , PK هي المنصفات العمودية لـ $\triangle ABC$ ، وكانت النقطة P هي نقطة تلاقيها، فإن $PA = PB = PC$.

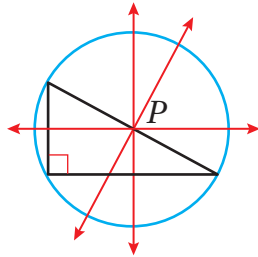
إثبات النظرية جاء في صورة تدريب في المسألة 14.

نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع مثلث ما هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث (circumcenter of the triangle)؛ وهي دائرة تمر برؤوس المثلث جميعها؛ إذ إن نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع مثلث ما تبعد المسافة نفسها عن كل من رؤوسه؛ لذا فهي مركز الدائرة الخارجية.

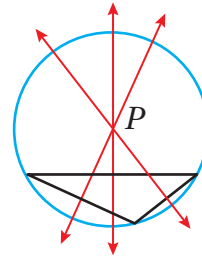
يعتمد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث على نوع المثلث كما في الأشكال الآتية:



مثلث حادّ الزوايا، وفيه تقع P داخل المثلث.



مثلث قائم الزاوية، وفيه تقع P على وتر المثلث.



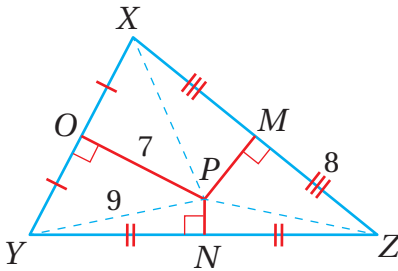
مثلث منفرج الزاوية، وفيه تقع P خارج المثلث.

مثال 3

إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle XYZ$ في الشكل المجاور، فأجد كلاً مما يأتي:

طول PX .

1



$$PX = PY$$

$$= 9$$

نظرية المنصفات العمودية للمثلث

بتعويض $PY = 9$

2 طول $\overline{PM}$.

$$(PX)^2 = (MX)^2 + (PM)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$(9)^2 = (8)^2 + (PM)^2$$

بتعويض $PX = 9$, $MX = 8$

$$81 = 64 + (PM)^2$$

بإيجاد القوى

$$(PM)^2 = 17$$

بطرح 64 من طرفي المعادلة

$$PM = \pm \sqrt{17}$$

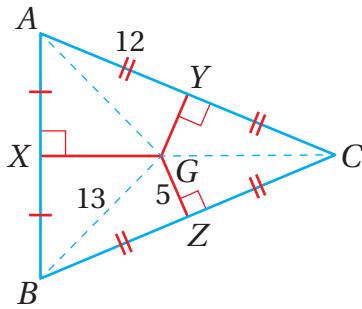
بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبا، فإن $PM = \sqrt{17}$.

أندكز

بالرجوع إلى تعريف
المُنصف العمودي، فإن:
 $MX = ZM = 8$.

أتحقق من فهمي



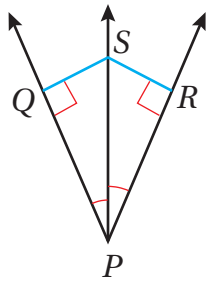
إذا كانت النقطة G هي مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ في الشكل المجاور، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) طول $\overline{AG}$.

(b) طول $\overline{GY}$.

(c) طول $\overline{CZ}$.

مُنصف الزاوية

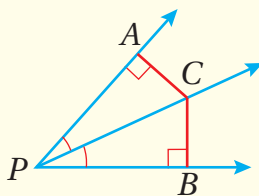


تعلمت سابقاً أن مُنصف الزاوية شعاع يُقسّم الزاوية إلى زاويتين مُتطابقتين، وتعلمت أيضاً أن البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة. ومن ثم، فإن $\overrightarrow{PS}$ في الشكل المجاور مُنصف لـ $\angle QPR$ ، والبُعد بين النقطة S و $\overrightarrow{PQ}$ هو SQ .

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\overrightarrow{PS}$ للدلالة على الشعاع الذي يبدأ بالنقطة P ويمرّ بالنقطة S .

مُنصف الزاوية



نظريتان

• نظرية مُنصف الزاوية:

كل نقطة على مُنصف الزاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

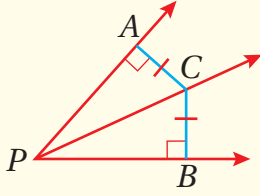
مثال: إذا كان $\overrightarrow{PC}$ مُنصفاً لـ $\angle APB$ ، وكان $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{PB}$ ، فإن $CA = CB$.

مُنْصَفُ الزاويةِ (تابع)

نظريتان

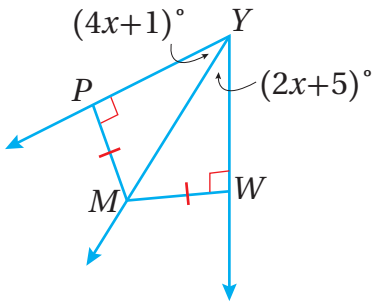
• عكسُ نظريةِ مُنْصَفِ الزاويةِ:

إذا وقعت نقطة داخل زاوية، وكانت على بُعدين متساويين من ضلعيها، فإنها تقع على مُنْصَفِ الزاوية.



مثال: إذا كان $CA = CB$, $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{PB}$, فإن $\overrightarrow{PC}$ مُنْصَفُ $\angle APB$.

مثال 4



أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجاد $m\angle PYM$.

الخطوة 1: أجد قيمة x .

عكسُ نظريةِ مُنْصَفِ الزاويةِ

تعريفُ تطابقِ الزوايا

بالتعويضِ

بحلّ المعادلةِ لـ x

$$\angle PYM \cong \angle WYM$$

$$m\angle PYM = m\angle WYM$$

$$4x + 1 = 2x + 5$$

$$x = 2$$

الخطوة 2: أجد $m\angle PYM$.

معطى

بتعويضِ $x = 2$

بالتبسيطِ

$$m\angle PYM = (4x + 1)^\circ$$

$$= (4(2) + 1)^\circ$$

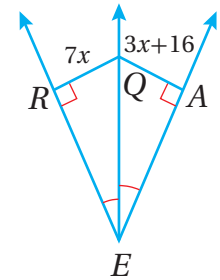
$$= 9^\circ$$

أتحقق من فهمي

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجاد QA .

أتعلّم

أن يكون $MP = MW$ لا يُعدُّ شرطًا كافيًا للحكم على أن $\overrightarrow{YM}$ هو مُنْصَفُ $\angle PYW$ ، وإنما يشترط أن يكون $\overrightarrow{MW} \perp \overrightarrow{YW}$ و $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{YP}$.

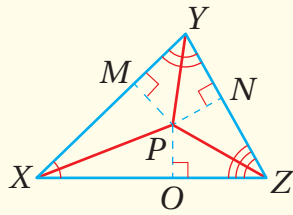


مُنْصَفَاتُ زوايا المثلث، ومركزُ الدائرة الداخلية للمثلث

بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنَّ له ثلاثة مُنْصَفَاتٍ للزوايا تلتقي في نقطة واحدة كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتية.

مُنَصِّفَاتُ زَوَايَا المثلثِ

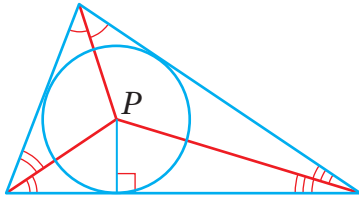
نظرية



تلتقي مُنَصِّفَاتُ زَوَايَا المثلثِ في نقطةٍ لها البُعدُ نفسه عن كلِّ من أضلاعِ المثلثِ.

مثال: إذا كانت $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$ هي مُنَصِّفَاتِ زَوَايَا $\triangle XYZ$ ، وكانت النقطة P هي نقطة تلاقِيها، فإنَّ $PM = PN = PO$.

إثباتُ النظرية جاءَ في صورة تدريب في المسألة 15.



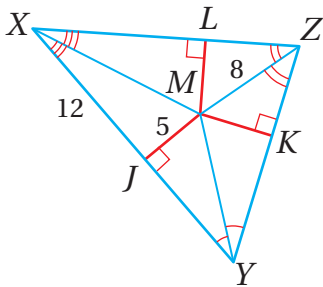
نقطةُ تلاقِي مُنَصِّفَاتِ زَوَايَا المثلثِ هي **مركزُ الدائرة**

الداخلية للمثلث (incenter of the triangle)؛

وهي دائرةُ تمسُّ أضلاعَ المثلثِ جميعها؛ ذلك أنَّ

نقطةُ تلاقِي مُنَصِّفَاتِ زَوَايَا المثلثِ تبعدُ المسافةَ

نفسها عن كلِّ من أضلاعه؛ ما يعني أنَّها مركزُ الدائرة الداخلية.



مثال 5

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ LZ .

$$(MZ)^2 = (LM)^2 + (LZ)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$(8)^2 = (5)^2 + (LZ)^2$$

بتعويض $MZ = 8$, $LM = MJ = 5$

$$64 = 25 + (LZ)^2$$

بإيجادِ القوي

$$(LZ)^2 = 39$$

بطرح 25 من طرفي المعادلةِ

$$LZ = \pm\sqrt{39}$$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ

بما أنَّ الطولَ لا يُمكنُ أن يكونَ سالِباً، فإنَّ $LZ = \sqrt{39}$.

أتذكَّر

$LM = MJ$ بحسبِ نظرية مُنَصِّفَاتِ زَوَايَا المثلثِ.

أتحقق من فهمي

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل في المثال 5 لإيجاد XL .

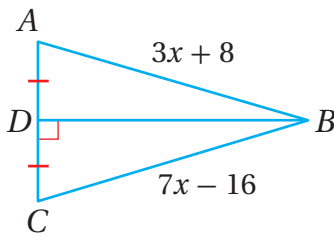


أدرب وأحل المسائل

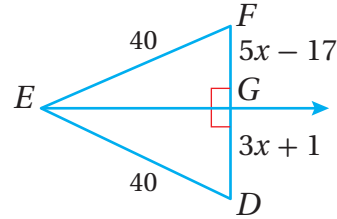


أجد كل قياس مما يأتي:

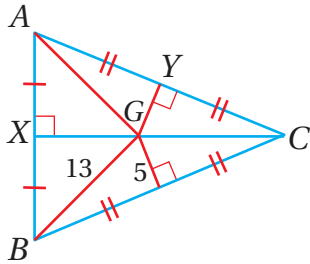
1 AB



2 FG



أجد كل قياس مما يأتي:



3 GA

4 AY

5 AC

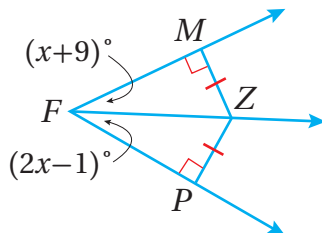
أجد معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة PQ المعطى نهايتها في كل مما يأتي:

6 $P(-2, 0), Q(6, 12)$

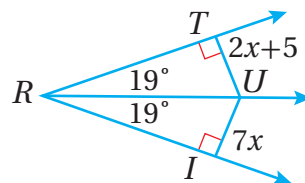
7 $P(-7, 5), K(1, -1)$

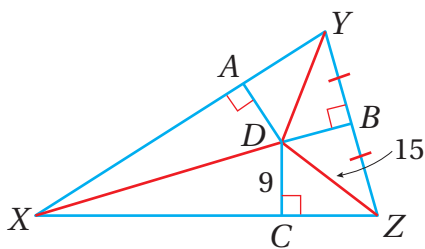
أجد كل قياس مما يأتي:

8 $m\angle MFZ$



9 TU



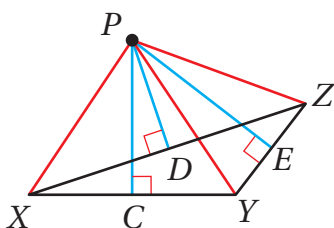


إذا كانت النقطة D هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$ ، فأجد كل قياس مما يأتي:

10 DB

11 CZ

12 YZ



13 إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle XYZ$ ، فأستعمل المعلومة المعطاة تاليًا لإيجاد PY .

$$PX = 4x + 3$$

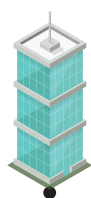
$$PZ = 6x - 11$$

أثبت كلاً من النظريتين الآتيتين:

14 نظرية المُنصفَات العمودية للمُثلث.

15 نظرية مُنصفَات زوايا المُثلث.

16 **اتصالات:** ترغب شركة اتصالات في بناء بُرجٍ للبت على أبعادٍ متساوية من ثلاثة مباني كبيرة. أوضّح كيف يُمكن استعمال الشكل التالي لتحديد موقع البُرج.



المبنى (1)

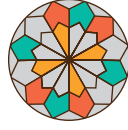
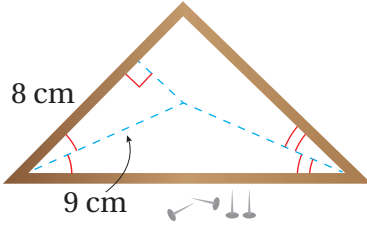


المبنى (2)



المبنى (3)

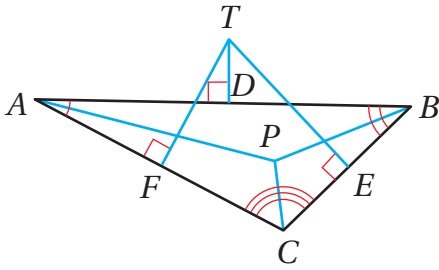
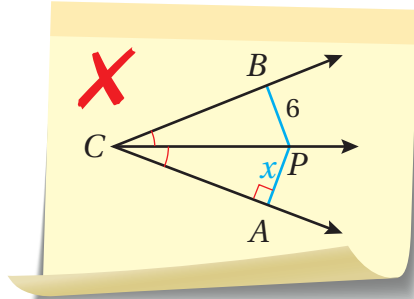
17 أحل المسألة الواردة بدايةً الدرس.



18 يريدُ فنانٌ أن يضعَ قطعةً دائريةً من الزجاجِ الملونِ داخلَ إطارٍ على شكلِ مثلثٍ أبعادهُ مُبيَّنةٌ في الشكلِ المُجاوِرِ، وأن يجعلَ الزجاجَ يلامسُ كلاً من جوانبِ الإطارِ. أجدُ طولَ قُطرِ قطعةِ الزجاجِ الدائريةِ لأقربِ جزءٍ من عشرة.

مهارات التفكير العليا

19 **اكتشف الخطأ:** قالت أحلام: "قيمة x في الشكل الآتي هي 6 بحسب نظرية مُنصفِ الزاوية". اُكتشف الخطأ في قول أحلام، ثم أصحِّحهُ.

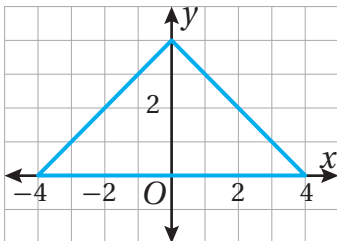


إذا كانتِ النقاط: D ، و E ، و F هي مُنصفَات أضلاع $\triangle ABC$ في الشكلِ المُجاوِرِ، فاستعملِ المعلوماتِ المعطاة في الشكلِ للإجابة عن الأسئلة الآتية، مُبرِّراً إجابتي:

20 أيُّ نقاطِ الشكلِ هي مركزُ الدائرةِ المارةِ بالنقاط: A ، و B ، و C ؟

21 أيُّ نقاطِ الشكلِ هي مركزُ دائرةٍ تمسُّ كلَّ ضلعٍ من أضلاعِ $\triangle ABC$ ؟

22 إذا كان $TA = 8.2$ ، فما طولُ TC ؟



23 **تحذّر:** أجدُ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ للمثلثِ في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.

القطع المتوسط في المثلث

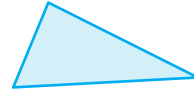
Medians of Triangle

الهدف: استكشاف العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث ونقطة توازن المثلث، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة منتصف ضلع المثلث والرأس المقابل لها.

نشاط 1

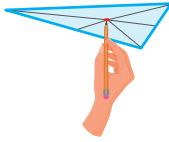
الخطوة 1:

أرسم مثلثًا على قطعة من الورق المقوى، ثم أقصه.



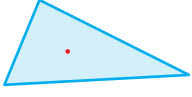
الخطوة 2:

أضع المثلث على قلم الرصاص، ثم أعد موقعه حتى يتوازن.



الخطوة 3:

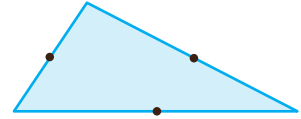
أحدد نقطة توازن المثلث، ثم أضع علامة عندها.



نشاط 2

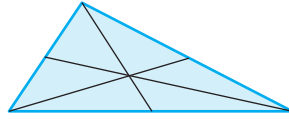
الخطوة 1:

أستعمل المسطرة لتحديد نقطة المنتصف لكل من أضلاع المثلث الذي رسمته في النشاط 1.



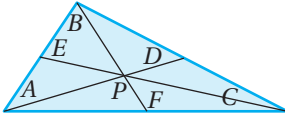
الخطوة 2:

أرسم قطعة مستقيمة تصل بين كل منتصف ضلع ورأس المثلث المقابل له.



الخطوة 3:

أسمي المثلث كما في الشكل الآتي.



أحلل النتائج:

1 ما العلاقة بين النقطة P في النشاط 2 ونقطة توازن المثلث في النشاط 1؟

2 أستخدم المسطرة لإكمال الفراغ في الجدول الآتي:

$AD =$ ____	$BF =$ ____	$CE =$ ____
$AP =$ ____	$BP =$ ____	$CP =$ ____
$PD =$ ____	$PF =$ ____	$PE =$ ____

3 ما العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث والنقطة P ، وطول القطعة المستقيمة

الواصلة بين منتصف ضلع المثلث والنقطة P ؟

4 ما العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث والنقطة P ، وطول القطعة المستقيمة

الواصلة بين منتصف ضلع المثلث والرأس المقابل له؟

الدرس 3

القطع المتوسط والارتفاعات في المثلث Medians and Altitudes in Triangle

- تعرّف نظرية مركز المثلث، واستعملها لإيجاد قياسات مجهولة.
 - إيجاد ملتي ارتفاعات المثلث في المستوى الإحداثي.
- القطعة المتوسطة، مركز المثلث، ارتفاع المثلث، ملتي الارتفاعات.

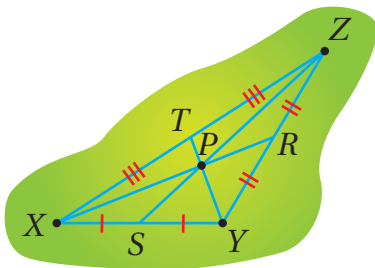
فكرة الدرس



المصطلحات

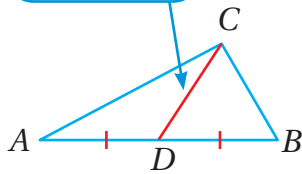


مسألة اليوم



تمثل النقطة P في الشكل المجاور موقع مستشفى حكومي في إحدى المحافظات الأردنية، وتمثل النقاط الأخرى في الشكل عددًا من المناطق السكنية القريبة منه. إذا كان بُعد المنطقة S عن المنطقة Z هو 8 km ، فما بُعد المستشفى عن المنطقة Z ؟

قطعة متوسطة



القطع المتوسط في المثلث

القطعة المتوسطة للمثلث (median of triangle)

هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.

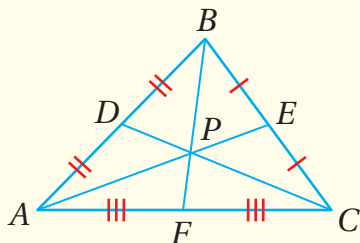
لكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تلتقي في نقطة واحدة تسمى **مركز المثلث** (centroid)، وكنت قد توصلت في النشاط المفاهيمي الذي سبق هذا الدرس إلى أنها نقطة اتزان المثلث.

أتعلم

يقع مركز المثلث دائماً داخل المثلث.

مركز المثلث

نظرية

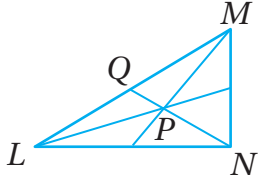


يبعد مركز المثلث عن كل من رؤوسه ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت النقطة P هي مركز $\triangle ABC$ ، فإن:

$$AP = \frac{2}{3} AE, BP = \frac{2}{3} BF, CP = \frac{2}{3} CD$$

مثال 1



إذا كانت النقطة P هي مركز $\triangle LMN$ ، وكان $NQ = 30$ ،
فأجد كلاً مما يأتي:

1 طول $\overline{NP}$.

$$NP = \frac{2}{3} NQ$$

نظرية مركز المثلث

$$= \frac{2}{3} (30)$$

بتعويض $NQ = 30$

$$= 20$$

بالتبسيط

2 طول $\overline{PQ}$.

$$NP + PQ = NQ$$

نظرية مركز المثلث

$$20 + PQ = 30$$

بتعويض $NQ = 30, NP = 20$

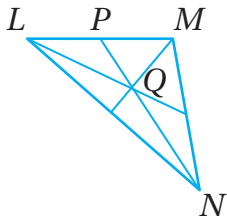
$$PQ = 10$$

بطرح 20 من طرفي المعادلة

أتعلم

$$PQ = \frac{1}{3} NQ$$

أتحقق من فهمي



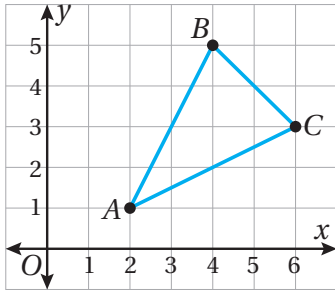
إذا كانت النقطة Q هي مركز $\triangle LMN$ ، وكان $NP = 20$ ،
فأجد كلاً مما يأتي:

(a) طول $\overline{NQ}$.

(b) طول $\overline{QP}$.

يُمكنُ إيجاد مركز أيّ مثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلِمَت إحداثيات رؤوسه.

مثال 2



يظهر المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي المجاور.
أجد إحداثي مركز هذا المثلث.

الخطوة 1: أجد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث.

أستعمل صيغة نقطة المنتصف لإيجاد منتصف $\overline{AC}$ ،
ولتكن D :

$$D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

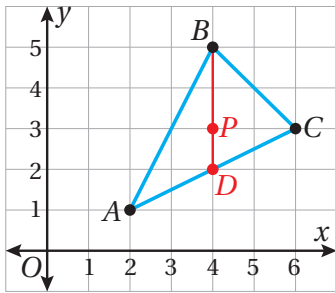
صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$$D\left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right)$$

بتعويض $(x_1, y_1) = (2, 1)$, $(x_2, y_2) = (6, 3)$

$$D(4, 2)$$

بالتبسيط



الخطوة 2: أجد مركز المثلث.

• أعيّن النقطة D في المستوى الإحداثي، ثم
أرسم $\overline{DB}$.

• ألاحظ أن $\overline{DB}$ رأسية، وأنه يمكن إيجاد طولها
على النحو الآتي:

$$DB = |y_2 - y_1|$$

صيغة طول قطعة مستقيمة رأسية

$$= |5 - 2|$$

بالتعويض $y_1 = 2$, $y_2 = 5$

$$= 3$$

بالتبسيط، وإيجاد القيمة المطلقة

إذن، طول $\overline{DB}$ هو 3 وحدات.

• أفترض أن النقطة P هي مركز $\triangle ABC$. ومن ثم، فإن $BP = \frac{2}{3} DB$ ؛ لذا يقع المركز على
بُعد $2 = \frac{2}{3}(3)$ وحدة أسفل الرأس B .

إذن، إحداثي مركز هذا المثلث (إحداثي النقطة P) هما: $(4, 3)$.

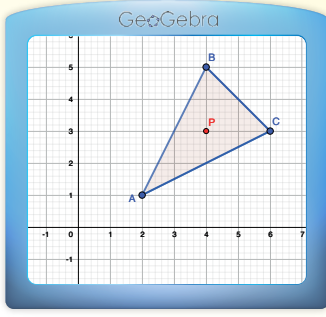
أتعلم

يمكن إيجاد طول القطعة
المتوسطة $\overline{DB}$ بسهولة؛
لأنها رأسية، ولأن الضلع
 $\overline{AC}$ هو الذي اختير في
بادئ الأمر؛ ما يعني أن
اختيار الضلع المناسب
للمثلث يُسهّل أحياناً
إجراء الحل.

أتعلم

يمكن التحقق من صحة
الحل باستعمال قطعة
متوسطة أخرى لإيجاد
مركز المثلث.

الدعم البياني:



أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد مركز مُثلث، وذلك
باتّباع الخطوتين الآتيتين:

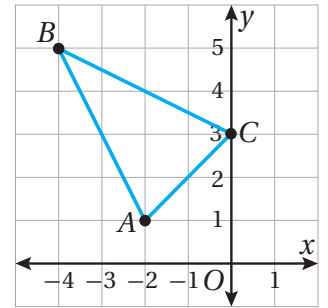
(1) أرسم المثلث في المستوى الإحداثي، مُتّبِعًا
الخطوات التي تعلّمناها سابقًا.

(2) أجد مركز المثلث باختيار أيقونة

من شريط الأدوات، ثمّ النقر في وسط المثلث لإظهار إحداثي مركز
المثلث في شريط المعادلة.

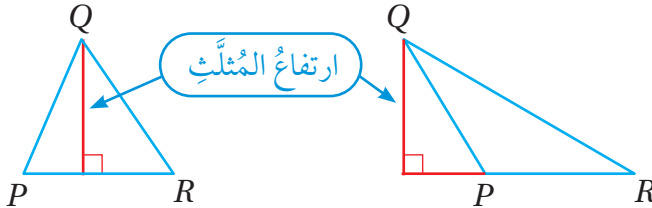
أتحقّق من فهمي

يظهر المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي المُجاوِر. أجد إحداثي مركز هذا المثلث.



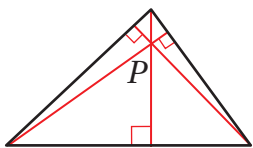
ارتفاعات المثلث

ارتفاع المثلث (altitude of a triangle) هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من

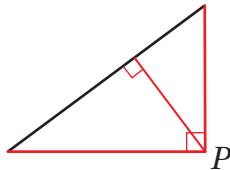


أحد رؤوس المثلث إلى
الضلع المُقابل لها، أو إلى
المستقيم الذي يحوي
الضلع المُقابل لها.

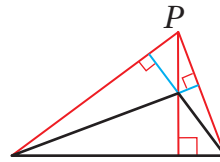
لكلّ مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتقاطع في نقطة مُشتركة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**
(orthocenter)، ويعتمد موقعها على نوع المثلث كما في الأشكال الآتية:



مثلث حادّ الزوايا، وفيه
تقع P داخل المثلث.



مثلث قائم الزاوية، وفيه
تقع P عند رأس القائمة.

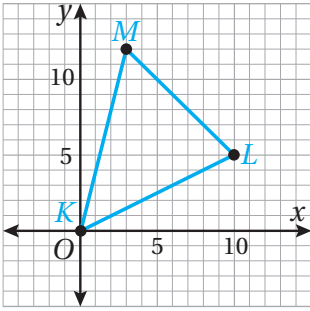


مثلث مُنفرج الزاوية،
وفيه تقع P خارج
المثلث.

أنعلّم

ألاحظُ في الأشكال
المُجاورة أنّ ساقَي
المثلث قائم الزاوية هما
من ارتفاعاتِه، وأنّ رأس
الزاوية القائمة هو ملتقى
ارتفاعاتِه.

مثال 3



إذا كانت: $K(0, 0)$, $M(3, 12)$, $L(10, 5)$ ، فأجد
إحداثيي ملتقى ارتفاعات رؤوس ΔKLM .

الخطوة 1: أمثل ΔKLM بيانياً.

الخطوة 2: أجد ميلي ضلعين من أضلاع المثلث.

$$m_{\overline{KL}} = \frac{5 - 0}{10 - 0} = \frac{1}{2} \quad \text{ميل } \overline{KL}$$

$$m_{\overline{LM}} = \frac{12 - 5}{3 - 10} = -1 \quad \text{ميل } \overline{LM}$$

الخطوة 3: أجد معادلة الارتفاع العمودي على كل من الضلعين اللذين اخترتُهما في الخطوة السابقة.

• معادلة الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 12 = -2(x - 3) \quad \text{بالتعويض } (x_1, y_1) = (3, 12), m = -2$$

$$y = -2x + 18 \quad \text{بالتبسيط، وإعادة ترتيب المعادلة}$$

• معادلة الارتفاع العمودي على $\overline{LM}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 0 = 1(x - 0) \quad \text{بالتعويض } (x_1, y_1) = (0, 0), m = 1$$

$$y = x \quad \text{بالتبسيط، وإعادة ترتيب المعادلة}$$

الخطوة 4: أحل نظام المعادلتين الناتج لإيجاد إحداثيي ملتقى الارتفاعات.

بما أن المعادلة الثانية مكتوبة بالنسبة إلى y ، فإنني أعوض x بدلاً من y في المعادلة الأولى:

$$y = -2x + 18 \quad \text{المعادلة الأولى}$$

$$x = -2x + 18 \quad \text{بالتعويض عن } y \text{ بـ } x$$

$$3x = 18 \quad \text{بجمع } 2x \text{ لطرفي المعادلة}$$

$$x = 6 \quad \text{بقسمة طرفي المعادلة على 3}$$

بما أن $x = 6$ ، فإن $y = 6$ ، وذلك بتعويض قيمة x في أي من المعادلتين.

إذن، إحداثيًا ملتقى ارتفاعات رؤوس ΔKLM هما: $(6, 6)$.

رموز رياضية

يشير الرمز $m_{\overline{KL}}$ إلى ميل القطعة المستقيمة $\overline{KL}$.

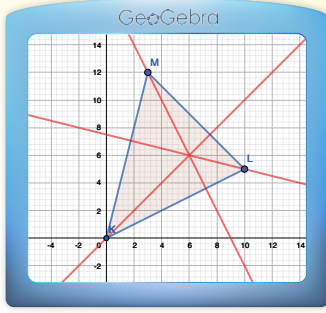
أتعلم

- الرأس M هو الرأس المقابل لـ $\overline{KL}$ ؛ لذا يقع على الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$.
- ميل الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{KL}$ ؛ أي إنه يساوي -2 .

أتعلم

- الرأس K هو الرأس المقابل لـ $\overline{LM}$ ؛ لذا يقع على الارتفاع العمودي على $\overline{LM}$.
- ميل الارتفاع العمودي على $\overline{LM}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{LM}$ ؛ أي إنه يساوي 1 .

الدعم البياني:



أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد ملتقى ارتفاعات مثلث، وذلك باتباع الخطوتين الآتيتين:

(1) أرسم المثلث في المستوى الإحداثي، متبعا الخطوات التي تعلمتها سابقا.

(2) أرسم جميع الارتفاعات في المثلث، وذلك

باختيار أيقونة من شريط الأدوات، ثم الضغط على رأس كل زاوية والضلع المقابل لها.

أتحقق من فهمي

إذا كانت: $A(-5, -1)$, $B(-2, 4)$, $C(3, -1)$ ، فأجد إحداثيي ملتقى ارتفاعات رؤوس ΔABC .

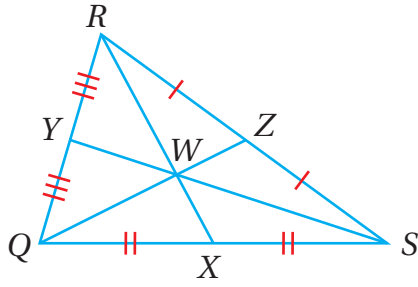
أفكر

لماذا يُعدُّ إيجاد إحداثيي نقطة التقاء ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة كافيا لتحديد ملتقى الارتفاعات؟ أبرر إجابتي.

قطع مستقيمة ونقاط خاصة في المثلث

ملخص المفهوم

الارتفاعات	القطع المتوسطة	مُنَصِّفَات الزوايا	المُنَصِّفَات العمودية	القطع الخاصة:
ملتقى الارتفاعات.	مركز المثلث.	مركز الدائرة الداخلية للمثلث.	مركز الدائرة الخارجية للمثلث.	نقطة التلاقي:
النقطة P هي ملتقى ارتفاعات ΔABC .	النقطة P مركز ΔABC ، وهي تبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔABC ، وهي تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه.	النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ ΔABC ، وهي تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه.	الخاصية:
				مثال:



إذا كانت النقطة W هي مركز $\triangle QRS$ ، وكان $QW = 30$ ، $RX = 48$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

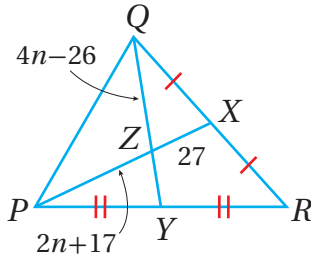
1 RW

2 WX

3 QZ

4 WZ

أجد كلاً مما يأتي:

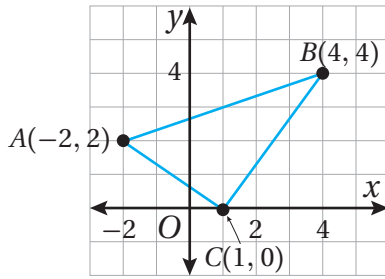


5 PZ

6 PX

7 QZ

8 YZ

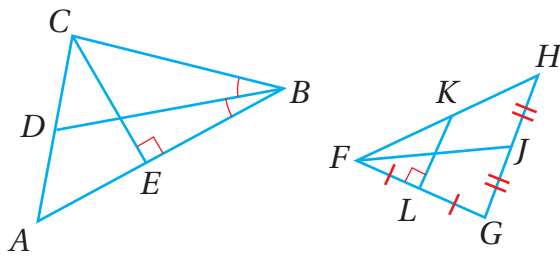


9 يظهر المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي المجاور. أجد إحداثي مركز هذا المثلث.

أجد إحداثي مركز المثلث المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي:

10 $F(1, 5)$, $G(-2, 7)$, $H(-6, 3)$

11 $A(5, 5)$, $B(11, -3)$, $C(-1, 1)$



يظهر $\triangle ABC$ و $\triangle GFH$ في الشكل المجاور. أحدد إذا كانت كل قطعة مستقيمة في ما يأتي تمثل ارتفاعاً، أو عموداً منصفاً، أو قطعة متوسطة، أو منصف زاوية:

12 BD

13 FJ

14 CE

15 KL

أجد إحداثي ملتقى ارتفاعات المثلث المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي:

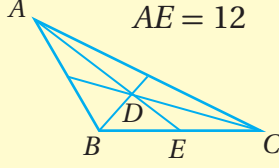
16 $X(-2, -2), Y(6, 10), Z(6, 6)$

17 $A(4, -3), B(8, 5), C(8, -8)$

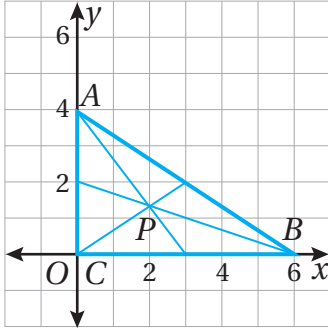
18 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

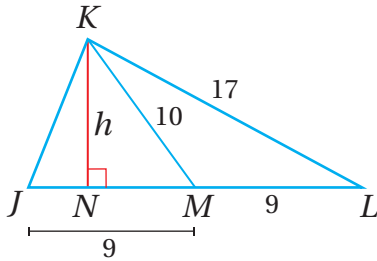
❌ $DE = \frac{2}{3} AE$
 $DE = \frac{2}{3} (12)$
 $DE = 8$



19 **أكتشف الخطأ:** يُمثل الشكل المجاور حل خالد لإيجاد طول $\overline{DE}$ في $\triangle ABC$ ، حيث D مركز المثلث. أكتشف الخطأ في حل خالد، ثم أصححه.



20 **تبرير:** يظهر في المستوى الإحداثي المجاور $\triangle ABC$ الذي مركزه النقطة P . إذا حُرِّكت النقطة B إلى اليمين على المحور x ، وظلَّت كلٌّ من النقطة A والنقطة C في موقعها، فما تأثير ذلك في موقع كلٍّ من مركز $\triangle ABC$ وملتقى ارتفاعاته؟ أبرِّر إجابتي.



تحذّر: يُبين الشكل المجاور $\triangle JKL$. أستخدم المعلومات المعطاة في الشكل للإجابة عن السؤالين الآتيين:

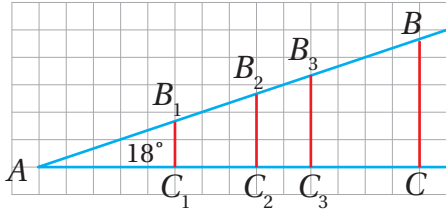
21 أجد مساحة كلٍّ من $\triangle JKM$ و $\triangle KML$ بدلالة h ، مُقارِنًا بين مساحتي المثلثين.

22 في السؤال السابق، هل تختلف العلاقة بين مساحتي المثلثين الناتجين من القطعة المتوسطة للمثلث تبعًا لاختلاف نوع المثلث، مُبرِّرًا إجابتي؟

النسب المثلثية Trigonometric Ratios

الهدف: استقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات ذات الزوايا القائمة.

نشاط



الخطوة 1: أرسم الشكل المجاور على ورقة مربعة.

الخطوة 2: في كل من مثلثات الشكل، أجد طول الضلع المقابل

للزاوية، وطول الضلع المجاور لها، وطول الوتر، مُقَرَّبًا

إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية (إن لزم)، ثم أدون ما أتوصل إليه في الجدول التالي.

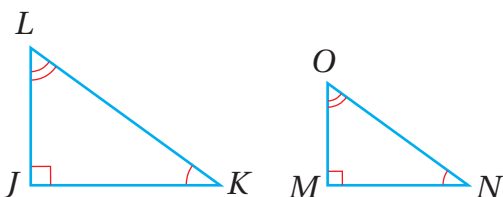
الخطوة 3: أجد النسب المطلوبة في الجدول الآتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية.

المثلث	طول الضلع المقابل للزاوية A	طول الضلع المجاور للزاوية A	طول الوتر	النسب		
				$\frac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}}$	$\frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}}$	$\frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}}$
$\triangle AB_1C_1$						
$\triangle AB_2C_2$						
$\triangle AB_3C_3$						
$\triangle ABC$						

أحلل النتائج:

- 1 ما قياس الزاوية A لكل مثلث في الشكل؟
- 2 ما العلاقة بين المثلثات جميعها في الشكل؟ أبرر إجابتي.
- 3 أدرس النسب بين أطوال الأضلاع في الجدول، ثم أكتب ثلاث جمل لوصف النمط الذي يظهر.

أفكر:



1 أكتب ثلاثة تناسبات باستعمال أطوال ساقي المثلثين

المجاورين.

الدرس 4

النسب المثلثية Trigonometric Ratios

تعرف جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلها، بوصفها نسباً بين أضلاع مثلث قائم الزاوية. النسب المثلثية، الجيب، جيب التمام، الظل، معكوس النسبة المثلثية، متطابقة فيثاغورس.



تبيّن الصورة المجاورة آلة حاسبة علمية. فيم يستعمل كل من المفاتيح الثلاثة المشار إليها؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



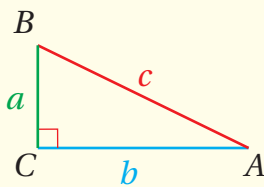
النسب المثلثية

النسبة المثلثية (trigonometric ratio) هي نسبة بين طولَي ضلعين من أضلاع المثلث قائم الزاوية.

تتضمن النظرية الآتية ثلاث نسب مثلثية مشهورة، لها أسماء ورموز خاصة بها.

النسب المثلثية

نظرية



إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية، وكانت $\angle A$ زاوية حادة فيه، فإن نسب المثلث التي هي أكثر شيوعاً تعرف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:

- $\sin A = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{a}{c}$ **الجيب** (sine)
- $\cos A = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{b}{c}$ **جيب التمام** (cosine)
- $\tan A = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{a}{b}$ **الظل** (tangent)

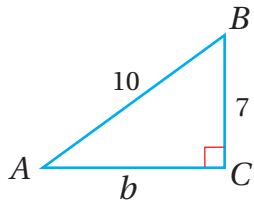
رموز رياضية

تشير الأحرف الكبيرة (A, B, C) إلى رؤوس المثلث، في حين تشير الأحرف الصغيرة (a, b, c) إلى الأطوال المقابلة لتلك الرؤوس. فمثلاً، يشار إلى طول الضلع المقابل للزاوية A بالحرف a ، وهكذا.

مثال 1

أفكر

هل يُمكنُ استعمالُ وصفِ النسبِ المثلثية لإيجادِ النسبِ المثلثية للزاوية القائمة في المثلث قائم الزاوية؟ أبرر إجابتي.



أجدُ قيمَ النسبِ المثلثية الثلاث للزاوية A في المثلث المُجاوِر.

الخطوة 1: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b .

$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظريةَ فيثاغورس

$$7^2 + b^2 = 10^2$$

بتعويض $a = 7, c = 10$

$$49 + b^2 = 100$$

بالتبسيط

$$b^2 = 51$$

ب طرح 49 من طرفي المعادلة

$$b = \pm\sqrt{51}$$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

بما أن الطول لا يُمكنُ أن يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

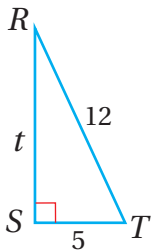
الخطوة 2: أجدُ النسبَ المثلثية الثلاث.

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

أتحقق من فهمي



أجدُ قيمَ النسبِ المثلثية الثلاث للزاوية T في المثلث المُجاوِر.

النسب المثلثية، والآلة الحاسبة

يُمكن إيجاد قيم النسب المثلثية لزوايا معلومة باستعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

1 $\sin 54^\circ$

أضغطُ على مفتاح **sin** ، ثم أدخل القيمة 54، ثم أضغطُ على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة:

sin 5 4 = 0.8090169944

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، فإن النتيجة هي: 0.809

إذن، $\sin 54^\circ \approx 0.809$.

2 $\cos 80^\circ$

أضغطُ على مفتاح **cos** ، ثم أدخل القيمة 80، ثم أضغطُ على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة:

cos 8 0 = 0.1736481777

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، فإن النتيجة هي: 0.174

إذن، $\cos 80^\circ \approx 0.174$.

3 $\tan 25^\circ$

أضغطُ على مفتاح **tan** ، ثم أدخل القيمة 25، ثم أضغطُ على مفتاح **=** ، فتظهر النتيجة:

tan 2 5 = 0.466306582

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، فإن النتيجة هي: 0.466

إذن، $\tan 25^\circ \approx 0.466$.

أتعلَّم

أضبط الآلة الحاسبة على خيار (DEGREES) قبل استعمالها.

أنتحَقُّ مِن فهمي

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

a) $\sin 36^\circ$

b) $\cos 70^\circ$

c) $\tan 82^\circ$

يُمكن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أيِّ زاوية حادَّة في المثلث قائم الزاوية إذا عُلِمَتْ إحدى نسبها، وذلك باستعمال **معكوس النسبة المثلثية** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيب الزاوية، فإنني أستعمل معكوس الجيب ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ تمام الزاوية، فإنني أستعمل معكوس جيب التمام ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاوية، فإنني أستعمل معكوس الظل ($\tan^{-1}$).

مثال 3

أجد قياس $\angle A$ الحادَّة في كلِّ ممَّا يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

1 $\sin A = \frac{3}{8}$

$$\sin A = \frac{3}{8}$$

النسبة المعطاة

$$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$$

معكوس الجيب

والآن أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 8) = 22.024312837

بالتقريب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، فإن النتيجة هي: 22°

إذن، $m\angle A \approx 22^\circ$

2 $\cos A = \frac{10}{13}$

$$\cos A = \frac{10}{13}$$

النسبة المعطاة

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$$

معكوس جيب التمام

لغة الرياضيات

• يُقرأ معكوس الجيب:

sine inverse، ويُرمزُ

إليه بالرمز $\sin^{-1}$.

• يُقرأ معكوس جيب

التمام: cosine

inverse، ويُرمزُ إليه

بالرمز $\cos^{-1}$.

• يُقرأ معكوس الظل:

tan inverse، ويُرمزُ

إليه بالرمز $\tan^{-1}$.

أتعلَّم

تحتوي بعض الآلات

الحاسبة على مفاتيح

خاصة بمعكوس كلِّ من

النسب المثلثية، ويُمكن

استعمال هذه المفاتيح

مباشرة من دون استعمال

مفتاح SHIFT.

والآن أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (10 ÷ 13) = 39.7151372318

بالتقريب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، فإن النتيجة هي: 39.7°
إذن، $m\angle A \approx 39.7^\circ$.

3 $\tan A = \frac{12}{5}$

$\tan A = \frac{12}{5}$

النسبة المعطاة

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

معكوس الجيب

والآن أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ كما يأتي:

SHIFT tan (12 ÷ 5) = 67.380135052

بالتقريب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، فإن النتيجة هي: 67.4°
إذن، $m\angle A \approx 67.4^\circ$.

أتحقق من فهمي

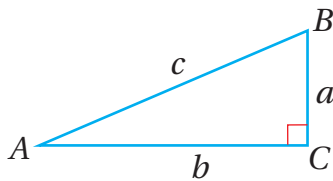
أجد قياس $\angle A$ في كل مما يأتي، مُقرباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

a) $\sin A = \frac{4}{9}$

b) $\cos A = 0.64$

c) $\tan A = 0.707$

العلاقة بين الجيب وجيب التمام



في المثلث المُجاوِر، إذا كان $\sin A = \frac{a}{c}$ ، $\cos A = \frac{b}{c}$ فما قيمة $\sin^2 A + \cos^2 A$ ؟

يُمكنُ إيجاد قيمة $\sin^2 A + \cos^2 A$ بالتّباع الخطوات الآتية:

$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

بالتعويض

$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$

بالتبسيط

أتعلّم

$\sin^2 A$ تعني $(\sin A)^2$ ،
و $\cos^2 A$ تعني $(\cos A)^2$.

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

بجمع الكسور

$$= \frac{c^2}{c^2}$$

باستعمال نظرية فيثاغورس

$$= 1$$

بالتبسيط

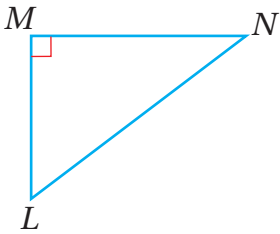
إذن، $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، وهذه العلاقة تُسمى **مُتطابقة فيثاغورس** (Pythagorean identity).

مُتطابقة فيثاغورس

نظرية

في أيّ مثلث قائم الزاوية، حيث A زاوية حادة في المثلث، فإن:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$



مثال 5

في المثلث المُجاوِر، إذا كان $\sin N = \frac{2}{3}$ ، فأوجد $\cos N$.

$$\sin^2 N + \cos^2 N = 1$$

مُتطابقة فيثاغورس

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$$

بتعويض $\sin N = \frac{2}{3}$

$$\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$$

بالتربيع

$$\cos^2 N = \frac{5}{9}$$

ب طرح $\frac{4}{9}$ من طرفي المعادلة

$$\cos N = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

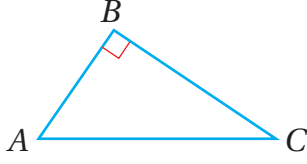
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

بما أن جيب التمام للزاوية N في المثلث قائم الزاوية LMN هو ناتج قسمة طول الضلع المُجاوِر على الوتر، وبما أن الأطوال لا يمكن أن تكون سالبة، فإن $\cos N$ قيمة موجبة؛ أي إن $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

أتعلم

قيمة كل من الجيب، وجيب التمام، والظل موجبة لأي زاوية حادة.

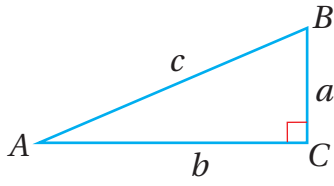
أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



في المثلث المُجاوِر، إذا كان $\cos A = \frac{4}{5}$ ، فأجد $\sin A$.

أَتَعَلَّمُ

الزاويتان المُتتامتان هما
زاويتان مجموع قياسيهما
 90° .



تُعَدُّ الزاويتان الحادَّتان في أيِّ مثلث قائم الزاوية مُتتامَّتين.
ولكن، ما العلاقة بين نسيهما المُثلثية؟
في المثلث المُجاوِر، ألاحظُ أنَّ:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \sin B = \frac{b}{c}, \cos B = \frac{a}{c}$$

ومن ثَمَّ، يُمكنُ استنتاج أنَّ جيب الزاوية الحادَّة في المثلث قائم الزاوية يساوي جيب تمام مُتَمِّتها، وأنَّ جيب تمام الزاوية الحادَّة في المثلث قائم الزاوية يساوي جيب مُتَمِّتها.

الجيب وجيب التمام للزاويا المُتتامَّة

مفهوم أساسي

إذا كان A و B زاويتين مُتتامَّتين في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ:

$$\sin A = \cos (90^\circ - A) = \cos B \quad \sin B = \cos (90^\circ - B) = \cos A$$

$$\cos A = \sin (90^\circ - A) = \sin B \quad \cos B = \sin (90^\circ - B) = \sin A$$

مثال 5

إذا كان $\cos 34^\circ = 0.829$ ، فأجد $\sin 56^\circ$.

$$\cos A = \sin (90^\circ - A) \quad \text{تعريف الجيب وجيب التمام للزاويا المُتتامَّة}$$

$$\cos 34^\circ = \sin (90^\circ - 34^\circ) \quad \text{بتعويض } A = 34^\circ$$

$$\cos 34^\circ = \sin 56^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

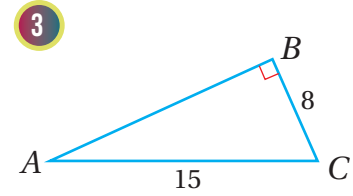
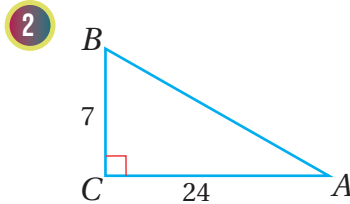
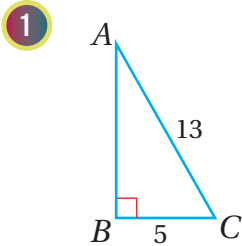
$$\sin 56^\circ = 0.829 \quad \text{بتعويض } \cos 34^\circ = 0.829$$

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

إذا كان $\sin 70^\circ = 0.9397$ ، فأجد $\cos 20^\circ$.



أَجِدْ قِيَمَ النِّسَبِ الْمُثَلَّثَةِ الثَّلَاثِ لِلزَّوَايَةِ A فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي، تَارِكًا إِجَابَتِي فِي صُورَةِ كَسْرٍ:



أَجِدْ قِيَمَةَ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ الآلَةِ الْحَاسِبَةِ، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ ثَلَاثِ مَنَازِلَ عَشْرِيَّةٍ:

4 $\sin 43^\circ$

5 $\sin 67.2^\circ$

6 $\sin 90^\circ$

7 $\cos 80^\circ$

8 $\cos 22^\circ$

9 $\cos 90^\circ$

10 $\tan 20^\circ$

11 $\tan 45^\circ$

12 $\tan 30^\circ$

13 $4 \sin 63^\circ$

14 $7 \tan 52^\circ$

15 $9 \cos 8^\circ$

16 $\frac{5}{\sin 31^\circ}$

17 $\frac{3}{\tan 64^\circ}$

18 $\frac{7}{\cos 60^\circ}$

أَجِدْ قِيَاسَ $\angle B$ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ مَنْزِلَةٍ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ:

19 $\sin B = 0.5$

20 $\sin B = 0.999$

21 $\sin B = 0.877$

أَجِدْ قِيَاسَ $\angle N$ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ مَنْزِلَةٍ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ:

22 $\cos N = 0.2$

23 $\cos N = 0.5$

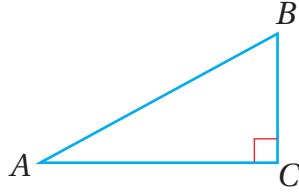
24 $\cos N = 0.999$

أَجِدْ قِيَاسَ $\angle M$ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ مَنْزِلَةٍ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ:

25 $\tan M = 0.6$

26 $\tan M = 2.67$

27 $\tan M = 4.38$

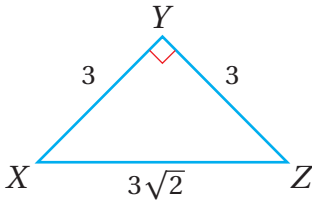


28 في المثلث المُجاوِر، إذا كان $\sin A = \frac{8}{17}$ ، فأجد $\cos A$.

29 إذا كان $\cos 55^\circ = 0.57358$ ، فأجد $\sin 35^\circ$.

30 إذا كان $\sin 78^\circ = 0.9781$ ، فأجد $\cos 12^\circ$ ، و $\sin 12^\circ$.

مهارات التفكير العليا



تبرير: أستمعمل المعلومات المعطاة في الشكل المُجاوِر للإجابة عن الأسئلة الآتية، مُبرراً إجابتي:

31 أحدد النسب المثلثية المتساوية في الشكل.

32 ما قياس كل من الزاوية X ، والزاوية Z ؟

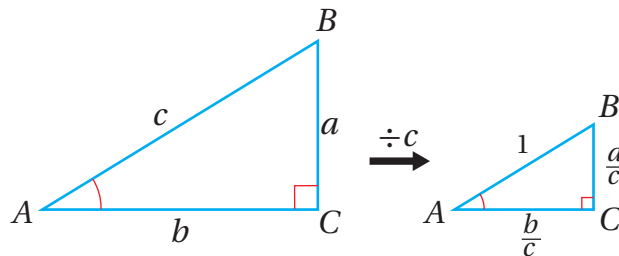
33 أكتب استنتاجاً بناءً على إجابتي عن السؤالين السابقين.

تبرير: إذا كان $\triangle LMN$ قائم الزاوية في M ، فأثبت صحة كل متباينة مما يأتي:

34 $\sin L < 1$

35 $\cos L < 1$

36 تحد: مُعتمداً الشكل الآتي، أثبت أن $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.



تطبيقات النسب المثلثية

Applications of Trigonometric Ratios

استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث.

فكرة الدرس

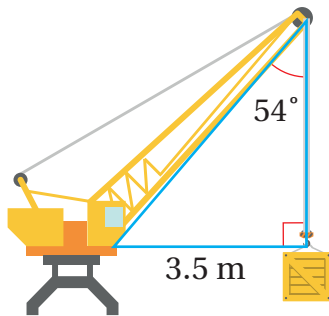


زاوية الارتفاع، زاوية الانخفاض.

المصطلحات



مسألة اليوم

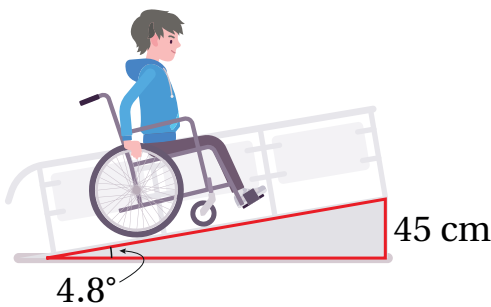


يُبين الشكل المُجاوِرُ رافعةً، في نهاية ذراعها حبلٌ متينٌ يرفعُ حاويةً كبيرةً. إذا كانت الزاوية بين الحبل والذراع 54° ، وكان بُعد الحاوية عن بداية الذراع 3.5 m، فأجد طول ذراع الرافعة.

استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث

يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في المثلث في كثير من السياقات الحياتية والعلمية.

مثال 1: من الحياة



بناءً: يُبين الشكل المُجاوِرُ الممرّ المنحدر الخاص بذوي الإعاقة الحركية في أحد الأبنية. إذا كان ارتفاع نهاية هذا الممرّ عن سطح الأرض هو 45 cm، وكانت الزاوية التي يصنعها الممرّ مع الأرض هي 4.8° ، فأجد طوله، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

ألاحظ من الشكل أن الزاوية المقاسة هي 4.8° ، وأن طول الضلع المُقابل لها هو 45 cm، وأن الضلع المجهول هو الوتر؛ لذا أستعمل نسبة الجيب لإيجاد طول الممرّ المنحدر.

أفترض أن طول الوتر هو d :

$$\sin A = \frac{\text{المُقابل}}{\text{الوتر}}$$

نسبة الجيب

$$\sin 4.8^\circ = \frac{45}{d}$$

بالتعويض

$$d (\sin 4.8^\circ) = 45$$

بضرب طرفي المعادلة في d

$$d = \frac{45}{\sin 4.8^\circ}$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\sin 4.8^\circ$

$$d \approx 538$$

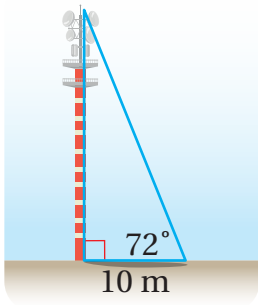
باستعمال الآلة الحاسبة

أفكر

هل يمكن استعمال نسبة مُثلثية أخرى لإيجاد طول الممر المنحدر؟ أبرد إجابتي.

إذن، طول الممر المنحدر هو 538 cm تقريباً.

أتحقق من فهمي



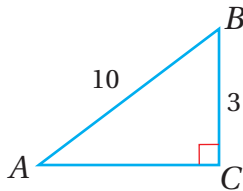
يُبين الشكل المُجاور برج اتصالات، طول ظله 10 m. إذا كانت الزاوية التي تصنعها أشعة الشمس مع نهاية الظل على سطح الأرض هي 72° ، فأجد ارتفاع البرج.

تعلمت في المثال السابق استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث. والآن سأتعلم كيف أجد قياسات زوايا مجهولة في المثلث باستعمال النسب المثلثية ومعكوس النسبة المثلثية.

مثال 2

أجد قياس $\angle A$ في كل مما يأتي، مُقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1



بما أن طول الضلع المُقابل لـ $\angle A$ وطول الوتر معلومان، فإنني أستعمل الجيب:

$$\sin A = \frac{3}{10}$$

تعريف الجيب

$$m\angle A = \sin^{-1} \left(\frac{3}{10} \right)$$

معكوس الجيب

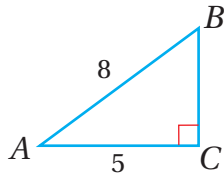
والآن أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 10) = 17.4576031237

بالتقريب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، فإن النتيجة هي: 17.5°

إذن، $m\angle A \approx 17.5^\circ$.

2



بما أن طول الضلع المجاور لـ $\angle A$ وطول الوتر معلومان،
فإنني أستخدم جيب التمام:

$\cos A = \frac{5}{8}$ تعريف جيب التمام

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ معكوس جيب التمام

والآن أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ كما يأتي:

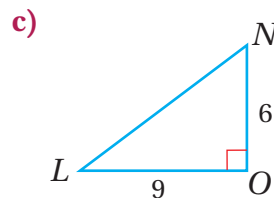
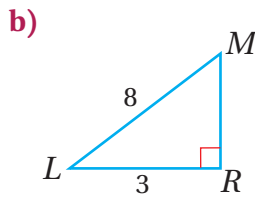
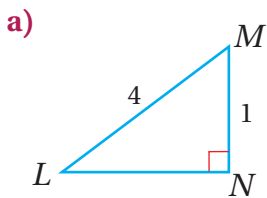
SHIFT cos (5 ÷ 8) = 51.3178125465

بالتقريب إلى أقرب منزلة عشرية واحدة، فإن النتيجة هي: 51.3°

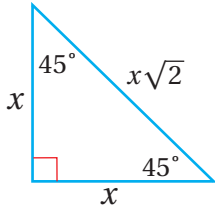
إذن، $m\angle A \approx 51.3^\circ$.

أتحقق من فهمي

أجد قياس $\angle L$ في كل مما يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

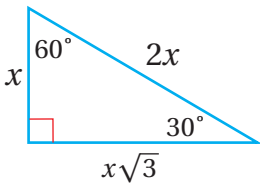


استعمال النسب المثلثية في المثلثات الخاصة



يُبين الشكل المجاور المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ؛ وهو مثلث قائم الزاوية، ومتطابق الضلعين.

يمتاز هذا المثلث بأن طول وتره يساوي $\sqrt{2}$ مرة طول كل ساق من ساقيه.



أما الشكل المجاور الآخر فيبين المثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ الذي يمتاز بأن طول وتره يساوي مثلي طول الساق المقابلة للزاوية 30° ، وبأن طول الساق المقابلة للزاوية 60° يساوي $\sqrt{3}$ مرة طول الساق المقابلة للزاوية 30° .

أتعلم

بكلمات أخرى، فإن طول الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ يساوي نصف طول الوتر.

تُستعمل النسب المثلثية للزوايا الخاصة: 30° , 60° , 45° لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث. وفي ما يأتي تلخيص لهذه النسب:

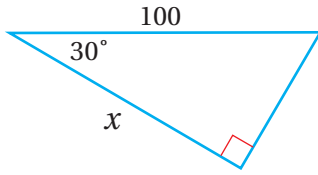
النسب المثلثية للزوايا الخاصة

مفهوم أساسي

المثلث	الجيب	جيب التمام	الظل
	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45^\circ = 1$
	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

مثال 3

أجد قيمة x في المثلث المجاور.



$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

نسبة جيب التمام

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{100}$$

بالتعويض

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

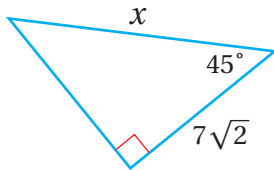
$$\frac{100\sqrt{3}}{2} = x$$

بضرب طرفي المعادلة في 100

$$x = 50\sqrt{3}$$

بالتبسيط

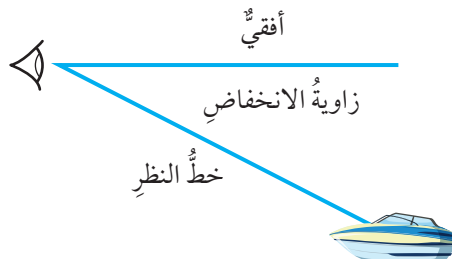
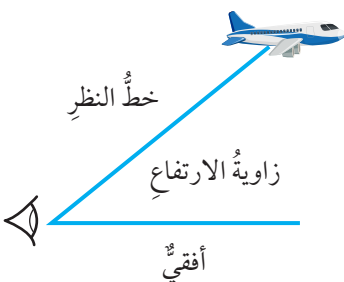
أتحقق من فهمي



أجد قيمة x في المثلث المجاور.

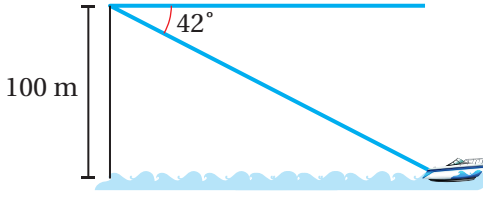
زوايا الارتفاع والانخفاض

يُطلق على الزاوية المحصورة بين خط النظر إلى الأعلى والخط الأفقي اسم **زاوية الارتفاع** (angle of elevation)، مثل الزاوية المحصورة بين خط النظر من سطح الأرض إلى طائرة في السماء والخط الأفقي. ويُطلق على الزاوية المحصورة بين خط النظر إلى الأسفل والخط الأفقي اسم **زاوية الانخفاض** (angle of depression)، مثل الزاوية المحصورة بين خط النظر من منارة إلى سفينة في البحر والخط الأفقي.

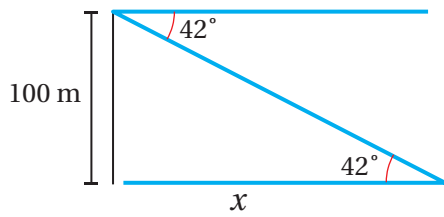


يُمكن استعمالُ زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد قياسات مجهولة في المثلث قائم الزاوية.

مثال 4: مِنَ الحَيَاةِ



قارب: ينظرُ عليّ من أعلى جُرفٍ إلى قاربٍ في البحرِ بزاوية انخفاضٍ مقدارها 42° . إذا كان ارتفاع الجُرف عن سطح البحر هو 100 m ، فأجد بُعد القارب عن قاعدة الجُرف.



بما أن قياس الزاوية المحصورة بين خط النظر والخط الأفقي (زاوية الانخفاض) هو 42° ، فإن قياس الزاوية المحصورة بين خط النظر وسطح البحر هو 42° ؛ لأنهما زاويتان متبادلتان داخلياً. أفترض أن بُعد القارب عن قاعدة الجُرف هو x :

$$\tan A = \frac{\text{المُقابل}}{\text{المجاور}}$$

نسبة الظل

$$\tan 42^\circ = \frac{100}{x}$$

بالتعويض

$$x \tan 42^\circ = 100$$

بضرب طرفي المعادلة في x

$$x = \frac{100}{\tan 42^\circ}$$

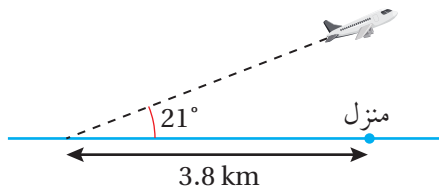
بقسمة طرفي المعادلة على $\tan 42^\circ$

$$x \approx 111$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، بُعد القارب عن قاعدة الجُرف هو 111 m تقريباً.

أتحقّق مِنْ فهمي



طائرة: رصدت ليلي طائرة في السماء بزاوية ارتفاع مقدارها 21° لحظة مرورها فوق سطح أحد المنازل. إذا كان بُعد ليلي عن المنزل هو 3.8 km ، فأجد ارتفاع الطائرة عن المنزل.

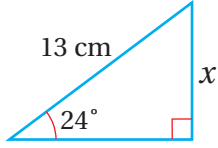
أتعلّم

الخط الأفقي ومستوى سطح البحر متوازيان؛ لذا فإن الزاوية المحصورة بين خط النظر والخط الأفقي والزاوية المحصورة بين خط النظر وسطح البحر متبادلتان داخلياً.

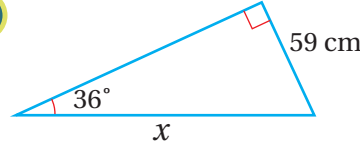


أَجِدْ قِيَمَةَ x فِي كُلِّ مُثَلِّثٍ مِمَّا يَأْتِي، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ مِئَةٍ:

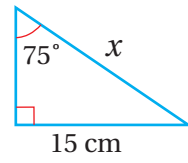
1



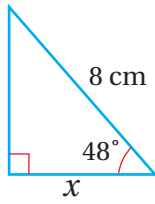
2



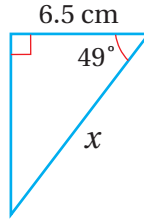
3



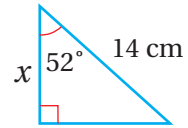
4



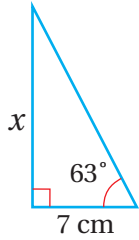
5



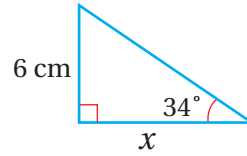
6



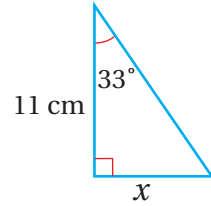
7



8

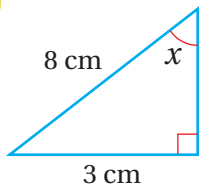


9

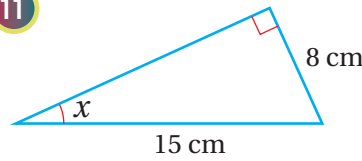


أَجِدْ قِيَمَةَ x فِي كُلِّ مُثَلِّثٍ مِمَّا يَأْتِي، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ:

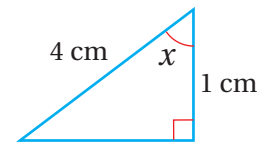
10



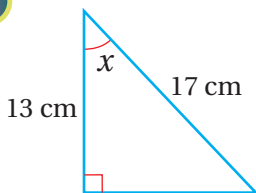
11



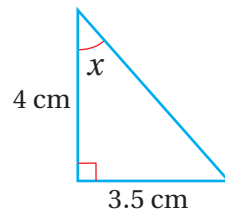
12



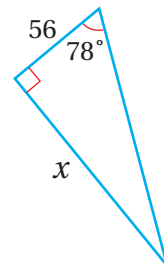
13

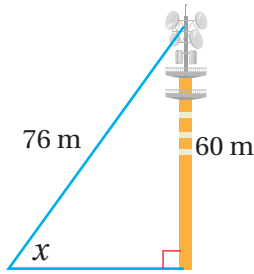


14



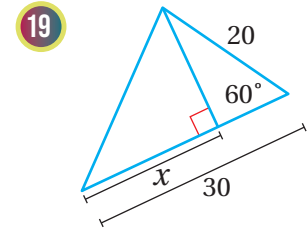
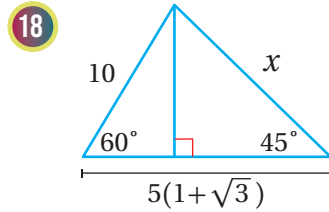
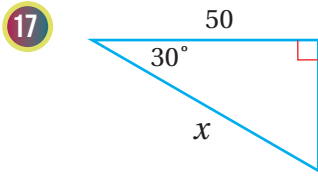
15



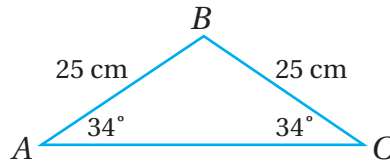


- 16 وُضِعَ هوائيٌّ بثٌّ فوقَ بُرْجٍ مَحْطَّةٍ إِذَاعِيَّةٍ، وَاسْتَعْمِلَ سَلْكٌ دَاعِمٌ طَوْلُهُ 76 m لِتَشْيِيتِ طَرَفِ الْهَوَائِيِّ بِسَطْحِ الْأَرْضِ كَمَا فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ. إِذَا كَانَ ارْتِفَاعُ الْبُرْجِ وَالْهَوَائِيِّ هُوَ 60 m، فَاجِدْ الزَّاوِيَةَ بَيْنَ السَّلْكِ وَسَطْحِ الْأَرْضِ.

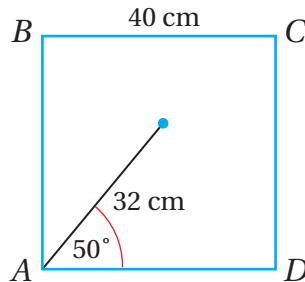
أَسْتَعْمِلُ النَّسَبَ الْمُثَلَّثِيَّةَ لِإِيجَادِ قِيَمَةِ x فِي كُلِّ مَثَلَّثٍ مِمَّا يَأْتِي:

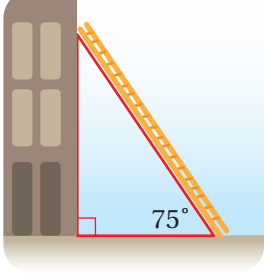


- 20 يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْآتِي $\triangle ABC$. أَسْتَعْمِلُ الْمَعْلُومَاتِ الْمَعْطَاةَ فِي الشَّكْلِ لِإِيجَادِ أَقْصَرِ مَسَافَةٍ بَيْنَ النِّقْطَةِ B وَ $\overline{AC}$.



- 21 يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْآتِي الْمُرَبَّعَ $ABCD$ الَّذِي طَوْلُ ضَلْعِهِ 40 cm. إِذَا كَانَتِ النِّقْطَةُ P تَقَعُ دَاخِلَ الْمُرَبَّعِ كَمَا فِي الشَّكْلِ، فَاجِدْ بُعْدَ هَذِهِ النِّقْطَةِ عَنْ كُلِّ مِنْ $\overline{AD}$ ، وَ $\overline{AB}$ ، وَ $\overline{CD}$.





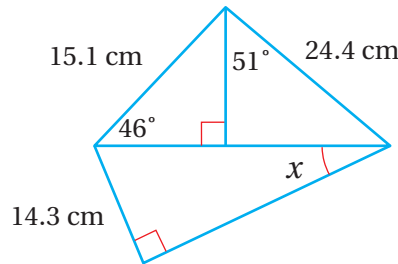
- 22 وُضِعَ سُلَّمٌ على أحدِ أطرافِ مَبْنًى كما في الشكلِ المُجاوِرِ، وكانتِ الزاويةُ التي يصنعها السُّلَّمُ مع الأرضِ هي 75° ؛ لتجنُّبِ السقوطِ عنه. أجد ارتفاعَ طرفِ السُّلَّمِ عن سطحِ الأرضِ في هذه الحالة إذا كان طوله 6 m.

- 23 وقفَ عصفورٌ على شجرةٍ ارتفاعها 12 m، مُراقِباً دودةً على سطحِ الأرضِ بزاوية انخفاضٍ مقدارها 34° . أجد المسافةَ بين الدودة والعصفور.

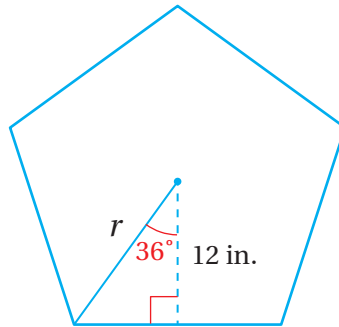
- 24 أحلّ المسألة الواردة بدايةً الدرس.

مهارات التفكير العليا

- 25 تبرير: أجد قيمة x في الشكل الآتي، مُبرِّراً إجابتي.



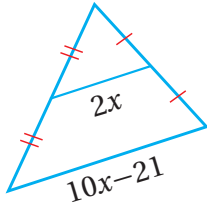
- 26 تحدّ: يُبين الشكل الآتي خماسياً مُنتظماً، طول نصف قطره r . أستخدم المعلومات المعطاة في الشكل لإيجاد مساحة الخماسي.



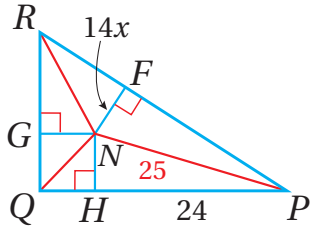
اختبار نهاية الوحدة

أجد قيمة x في كل مما يأتي:

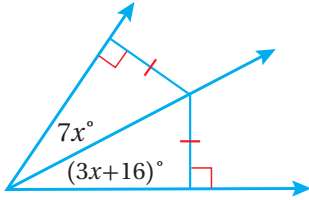
5



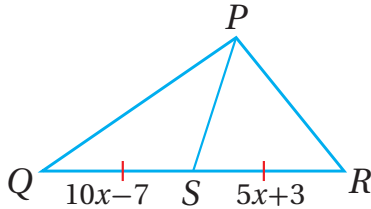
6



7



8



أجد إحداثي ملتقى ارتفاعات المثلث المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي:

9

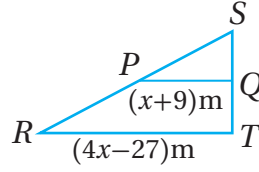
$$L(0, 5), M(3, 1), N(8, 1)$$

10

$$A(-4, 0), B(1, 0), C(-1, 3)$$

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1

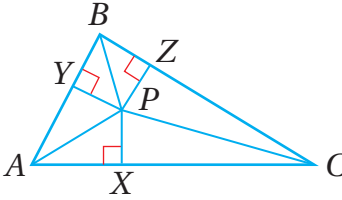


في الشكل المجاور،
إذا كانت PQ هي قطعة
متصفية في المثلث
 RST ، فإن طول RT بالأمتار هو:

- a) 9 b) 21 c) 45 d) 63

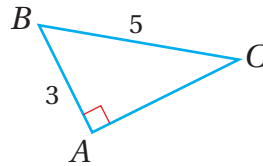
2

في الشكل المجاور، إذا كانت النقطة P هي مركز
الدائرة الداخلية
لـ $\triangle ABC$ ، فإن
الجملة الصحيحة
مما يأتي هي:



- a) $PA = PB$ b) $YA = YB$
c) $PX = PY$ d) $AX = BZ$

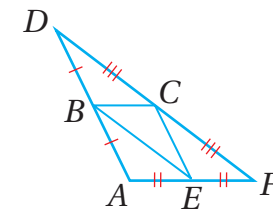
3



جيب تمام الزاوية C
في الشكل المجاور
يساوي:

- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

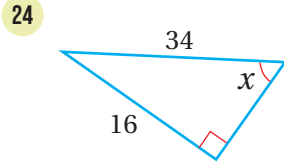
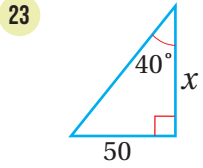
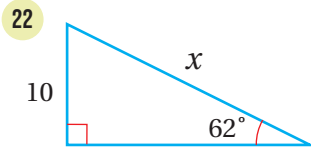
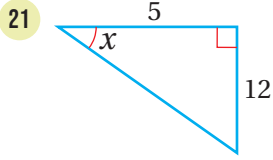
4



في الشكل المجاور،
إذا كان: $DF = 24$ ،
 $BC = 6$ ، $DB = 8$
فأجد محيط
المثلث ADF .

اختبار نهاية الوحدة

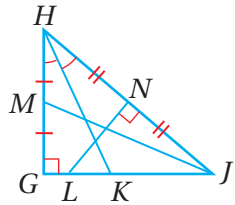
أجد قيمة x في كل مثلث مما يأتي، مُقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:



تدريب على الاختبارات الدولية

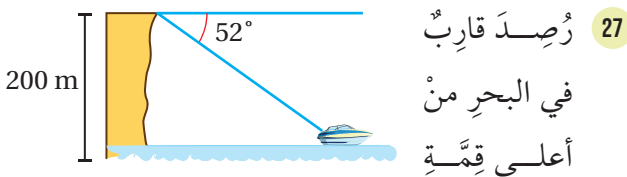
25 إذا كانت $A(1, 3)$ وكانت $B(1, 9)$ ، فإن النقطة التي تقع على المُنصف العمودي لـ $\overline{AB}$ هي:

- a) (3, 3) b) (1, 5)
c) (6, 6) d) (3, 12)



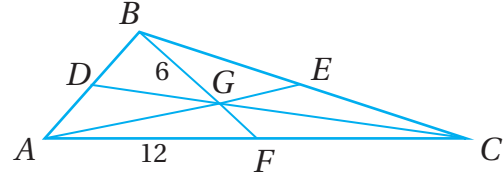
26 الوصف الصحيح لـ $\overline{LN}$ في الشكل المجاور هو:

- a) مُنصف عمودي. b) قطعة متوسطة.
c) مُنصف زاوية. d) ارتفاع.



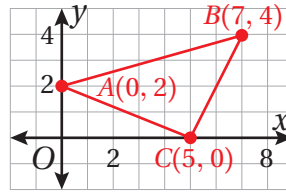
جُرفٍ بزاوية انخفاضٍ مقدارها 52° . إذا كان ارتفاع الجُرف عن سطح البحر 200 m، فأجد بُعد القارب عن قاعدة الجُرف.

إذا كانت النقطة G هي مركز $\triangle ABC$ المُبين في الشكل الآتي، فأستعمل المعلومات المعطاة في الشكل لإيجاد كل قياس مما يلي:



11 FC

12 BF



13 يظهر $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي المُجاور. أجد إحداثي مركز هذا المثلث.

14 إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة في مثلث، وكان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فأجد $\sin A$.

أجد قيمة كل مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة، مُقرباً إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

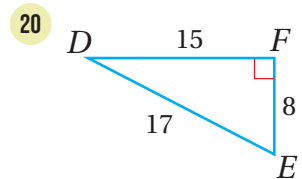
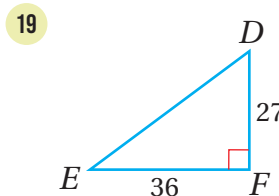
15 $\sin 5^\circ$

16 $\sin 81^\circ$

17 $\cos 33^\circ$

18 $\tan 70^\circ$

أجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية E في كل مما يأتي:



المقادير الأسية والمقادير الجذرية

Exponential and Radical Expressions

الوحدة 6

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المقادير الأسية والمقادير الجذرية لنمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية، ويمكنُ توظيف المعادلات الجذرية في تحديد قيم علمية دقيقة، مثل: سرعة الصوت، والزمن الذي يستغرقه البندول في أثناء حركته التذبذبية ذهابًا وإيابًا.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- استعمال قوانين الأسس الصحيحة لتبسيط مقادير أسية.
- تبسيط المقادير الجذرية.
- إجراء العمليات على المقادير الجذرية.
- حل معادلات تحوي جذورًا.

تعلمت سابقًا:

- ✓ تبسيط المقادير الجبرية التي تحوي جذورًا صماء.
- ✓ استعمال قوانين الأسس الصحيحة لتبسيط مقادير أسية.
- ✓ استعمال قوانين الأسس النسبية لتبسيط مقادير أسية.
- ✓ حل المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية.

فكرة المشروع تصميم مُجَسَّمات، وتوظيف المقادير الأسيّة والمقادير الجذرية في التعبير عن أبعادها.



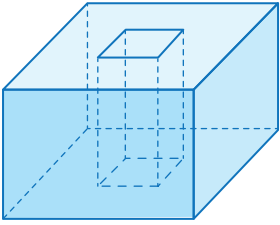
المواد والأدوات قطع من البولسترين، أدوات هندسيّة، مقصّ.



خطوات تنفيذ المشروع:

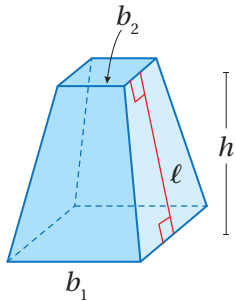
المهمة 1:

- 1 أصنع من قطع البولسترين مكعبًا، وأعبّر عن طولِه بمقدار أُسِّيّ يحوي مُتغيّرين على الأقلّ.
- 2 أجد حجم المكعب ومساحة سطحه في أبسط صورة بدلالة مُتغيّرات المقدار الأسيّ.
- 3 أنشئ في وسط المكعب متوازي مستطيلات قاعدته مُربّعة، وطول ضلعها يقلّ بمقدار 5 cm عن طول ضلع المكعب.
- 4 أجد حجم متوازي المستطيلات الذي أنشأته في الخطوة السابقة.
- 5 أجد مساحة سطح المكعب بعد إنشاء متوازي المستطيلات داخله في أبسط صورة.
- 6 أعبّر عن طول ضلع المكعب بمقدار جبريّ آخر، وليكن مقدارًا جذريًا.
- 7 أجد حجم المكعب ومساحة سطحه بدلالة المقدار الجذريّ في أبسط صورة.



المهمة 2:

- 1 أصنع من قطع البولسترين هرمًا قاعدته مُربّعة.
- 2 أقصّ الهرم من الأعلى بموازية القاعدة كما في الشكل المُجاور.
- 3 أجد علاقة يُمكن بها إيجاد الارتفاع الجانبيّ للمُجَسَّم، مُفترضًا أن طول قاعدته الكبيرة هو b_1 ، وطول قاعدته الصغيرة هو b_2 ، وارتفاعه هو h ، وارتفاعه الجانبيّ هو ℓ .
- 4 أقيس طول القاعدة الكبيرة، وطول القاعدة الصغيرة، والارتفاع الجانبيّ للمُجَسَّم إلى أقرب سنتيمتر، ثم استعمل العلاقة التي توصّلت إليها في الفرع السابق لإيجاد ارتفاع المُجَسَّم.



عرض النتائج:

- أعدّ عرضًا تقديميًا يتضمّن صورًا توضح خطوات العمل في المشروع.
- أعرض المُجَسَّمات التي صمّمتها أمام طلبة الصفّ، موضحًا كيف وظفّت ما تعلّمتُه في الوحدة في تنفيذ هذا المشروع.

تبسيط المقادير الأسية

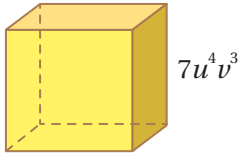
Simplifying Exponential Expressions

- استعمال خصائص الأسس الصحيحة لتبسيط مقادير أسية.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



يُبين الشكل المجاور مكعبًا طول ضلعه $7u^4v^3$ وحدة. أجد حجم المكعب بدلالة u و v في أبسط صورة.

تبسيط المقادير الأسية باستعمال خصائص ضرب الأسس

تعلمت سابقًا كيف أستعمل الأسس للتعبير عن الضرب المتكرر لعدد في نفسه. والآن سأتعلم أن عدد مرات تكرار الضرب يُسمى الأس، وأن العدد نفسه يُسمى الأساس، وأن كلاً من الأساس والأس معاً يُسمى القوة.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

الأس الأساس

الصيغة الأسية

مراجعة المفهوم

إذا كان a عددًا حقيقيًا، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

حيث:

a : الأساس.

n : الأس.

أندكز

الصيغة الأسية هي صيغة يُكتب فيها الضرب المتكرر باستعمال الأسس.

تعلمت أيضًا كيف أستعمل خاصية ضرب القوى، وقوة القوة، وقوة ناتج الضرب إذا كان الأساس عددًا حقيقيًا. والآن سأتعلم كيف أستعمل خصائص ضرب الأسس هذه لتبسيط مقادير أسية تحوي متغيرات.

خصائص ضرب الأسس

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين أو مقدارين جبريين، وكان m و n عددين صحيحين، فإن:

الخاصية

مثال

$$1) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{ضرب القوى} \quad x^3 \times x^7 = x^{3+7} = x^{10}$$

$$2) (a^m)^n = a^{mn} \quad \text{قوة القوة} \quad (y^4)^5 = y^{4 \times 5} = y^{20}$$

$$3) (ab)^m = a^m b^m \quad \text{قوة ناتج الضرب} \quad (6g)^3 = 6^3 g^3 = 216 g^3$$

يكون المقدار الأسّي في أبسط صورة إذا توافرت فيه شروطٌ معينة.

أبسط صورة للمقدار الأسّي

مفهوم أساسي

يكون المقدار الأسّي في أبسط صورة إذا توافرت فيه الشروط الآتية:

- أن يظهر الأساس مرّة واحدة فقط، وأن تكون الأسس جميعها موجبة.
- ألا يتضمن المقدار قوة القوة.
- أن تكون الكسور جميعها في أبسط صورة.

أتعلّم

كتابة المقدار الأسّي في أبسط صورة تتطلب كتابة مقدار مكافئ للمقدار الأسّي، تتوافر فيه الشروط الواردة في الصندوق المجاور.

مثال 1

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

$$1) (3r y^5)(6r^2 y^3)$$

$$(3r y^5)(6r^2 y^3) = (3 \times 6)(r \times r^2)(y^5 \times y^3) \quad \text{بإعادة تجميع الثوابت والمتغيّرات}$$

$$= (3 \times 6)(r^{1+2})(y^{5+3}) \quad \text{ضرب القوى}$$

$$= 18r^3 y^8 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتعلّم

إذا لم يظهر أسّ فوق المتغيّر، فإنّ أسّه يكون 1؛ أي إنّ:

$$r = r^1$$

2 $((x^2)^5)^8$

$$\begin{aligned} ((x^2)^5)^8 &= (x^{2 \times 5})^8 && \text{قوة القوة} \\ &= (x^{10})^8 && \text{بالتبسيط} \\ &= x^{10 \times 8} && \text{قوة القوة} \\ &= x^{80} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

3 $(-2a^2 b)^3$

$$\begin{aligned} (-2a^2 b)^3 &= (-2)^3 (a^2)^3 b^3 && \text{قوة ناتج الضرب} \\ &= -8a^6 b^3 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

4 $(4x^5 y^3)(-3xy^5)^2$

$$\begin{aligned} (4x^5 y^3)(-3xy^5)^2 &= (4x^5 y^3)((-3)^2 (x)^2 (y^5)^2) && \text{قوة القوة} \\ &= (4x^5 y^3)(9x^2 y^{10}) && \text{بالتبسيط} \\ &= (4 \times 9)(x^5 \times x^2)(y^3 \times y^{10}) && \text{إعادة تجميع الثوابت والمتغيرات} \\ &= 36x^7 y^{13} && \text{ضرب القوى} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي 

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $(2m^5 n^{11})(m^2 n^4)$

b) $((v^2)^6)^9$

c) $(5x^3 y^7)^4$

d) $(5a^3 b^4)(ab^2)^7$

تبسيط المقادير الأسية باستعمال خصائص قسمة الأسس

تعلمت سابقاً كيف أستعمل خاصية قسمة القوى، وخاصية قوة ناتج القسمة إذا كان الأساس عدداً حقيقياً. والآن سأتعلم كيف أستعمل هاتين الخاصيتين اللتين هما من خصائص قسمة الأسس لتبسيط مقادير أسية تحوي متغيرات.

خصائص قسمة الأسس

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين أو مقدارين جبريين، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، وكان m و n عددين صحيحين، فإن:

الخاصية

$$1) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

قسمة القوى

$$\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

قوة ناتج القسمة

$$\left(\frac{6}{g}\right)^3 = \frac{6^3}{g^3} = \frac{216}{g^3}$$

مثال

مثال 2

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$1) \frac{u^2 v^6}{uv^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{u^2 v^6}{uv^2} &= \left(\frac{u^2}{u}\right)\left(\frac{v^6}{v^2}\right) \\ &= (u^{2-1})(v^{6-2}) \\ &= uv^4 \end{aligned}$$

بإعادة تجميع المتغيرات

قسمة القوى

بالتبسيط

$$2) \left(\frac{-2x^3}{x^2 y^5}\right)^4$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2x^3}{x^2 y^5}\right)^4 &= \left(\frac{-2x^{3-2}}{y^5}\right)^4 \\ &= \left(\frac{-2x}{y^5}\right)^4 \\ &= \frac{(-2)^4 x^4}{(y^5)^4} \\ &= \frac{16x^4}{y^{20}} \end{aligned}$$

قسمة القوى

بالتبسيط

قوة ناتج القسمة

قوة القوة

أفكر

هل يمكن حلّ الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى؟
أبرر إجابتي.

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$a) \frac{m^4 n^5}{m^2 n^3}$$

$$b) \left(\frac{a^8 b^6}{a^4}\right)^5$$

تبسيط المقادير الأسية باستعمال خصائص الأسّ الصفرية والأسّ السالبة

تعلمت سابقاً أنّ أيّ عدد حقيقي غير الصفر مرفوعاً إلى الأسّ صفر يساوي 1، وأنّ القوة ذات الأساس غير الصفرية والأسّ السالبة هي مقلوب القوة ذات الأساس غير الصفرية والأسّ الموجب، والعكس صحيح. والآن سأتعلم كيف أستعمل هاتين الخاصيتين لتبسيط مقادير أسية تحوي متغيرات.

الأسّ الصفرية والأسّ السالبة

مفهوم أساسي

إذا كان a عدداً حقيقياً أو مقداراً جبرياً، حيث $a \neq 0$ ، وكان n عدداً صحيحاً، فإن:

الخاصية

$$1) a^0 = 1$$

الأسّ الصفرية

$$(2x^2)^0 = 1, x \neq 0$$

$$2) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

الأسّ السالب

$$h^{-4} = \frac{1}{h^4}, h \neq 0$$

مثال

مثال 3

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة، علماً بأنّ أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$1 \quad \frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2}$$

$$\frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2} = \left(\frac{4}{2}\right) \left(\frac{x^5}{x^3}\right) \left(\frac{y^{-4}}{y^2}\right)$$

إعادة تجميع المتغيرات ذات الأساس المتشابه

$$= \left(\frac{4}{2}\right) (x^{5-3}) (y^{-4-2})$$

قسمة القوى

$$= 2(x^2)(y^{-6})$$

بالتبسيط

$$= 2(x^2) \left(\frac{1}{y^6}\right)$$

تعريف الأسّ السالب

$$= \frac{2x^2}{y^6}$$

بالضرب

2 $\frac{3x^4 y^{-1} z^{-2}}{x^2 y^0}$

$$\frac{3x^4 y^{-1} z^{-2}}{x^2 y^0} = \frac{3x^4 y^{-1} z^{-2}}{x^2} \quad y^0 = 1$$

$$= 3 \left(\frac{x^4}{x^2} \right) (y^{-1}) (z^{-2})$$

بإعادة تجميع المتغيرات ذات الأساس المتشابه

$$= 3(x^{4-2})(y^{-1})(z^{-2})$$

قسمة القوى

$$= 3(x^2) \left(\frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{z^2} \right)$$

تعريف الأس السالب

$$= \frac{3x^2}{yz^2}$$

بالضرب

أتحقق من فهمي

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

a) $\frac{2h^3 j^{-3} k^4}{3jk}$

b) $\left(\frac{x^{-2} y^4}{x^0 y^5} \right)^{-3}$

أذكر

إذا كان a و b عددين حقيقيين أو مقدارين جبريين، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، وكان m عدداً صحيحاً، فإنه يمكن كتابة $\left(\frac{a}{b} \right)^{-m}$ بالصورة الآتية: $\left(\frac{b}{a} \right)^m$



أدرب وأحل المسائل



أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1 $(3a^3 b^2)(4a^2 b)$

2 $(7a^4 b^5)(4ab^3)$

3 $(5x^2 b^4)(2ab^{-3})$

4 $(x^5 y^3)^3 (xy^5)^2$

5 $(x^4)^5 (x^3 y^2)^5$

6 $(5a^3 b^5)^4$

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

7 $(6a^2 b^3)(5a^{-4} b^{-5})$

8 $((-3x^2)^4)^{-7}$

9 $(m^{-3} n^4)^{-5}$

10 $\frac{12a^2 b^3}{6ab}$

11 $\frac{12a^{-3} b^4}{3a^2 b^{-3}}$

12 $\frac{(2a^2 bc^2)(6abc^3)}{4ab^0 c}$

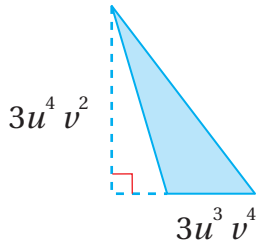
13 $\left(\frac{v}{w^{-2}} \right)^3$

14 $\left(\frac{6x^2 y^4}{3x^4 y^3} \right)^{-2}$

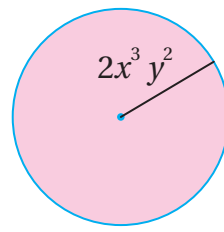
15 $\frac{30a^{-2} b^{-6}}{60a^{-6} b^{-8}}$

أجد مساحة كل شكل مما يأتي في أبسط صورة:

16



17



18 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.



مهارات التفكير العليا



19 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه.

$$\begin{aligned}\frac{2a^2b}{(-2ab^3)^{-2}} &= \frac{2a^2b}{(-2)^{-2}a(b^3)^{-2}} \\ &= \frac{2a^2b}{4ab^{-6}} \\ &= \frac{2a^2bb^6}{4a} \\ &= \frac{ab^7}{2}\end{aligned}$$

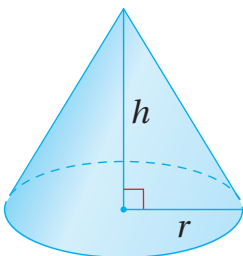
X

20 مسألة مفتوحة: أجد مقدارين أسيين ناتج ضربيهما هو $18x^3y^4$ (أحل المسألة بطريقتين مختلفتين).

تحذّر: إذا كان $x^n = y$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

21 أثبت أن $x^{2n+1} = xy^2$.

22 أجد مقداراً بدلالة x و y يكافئ المقدار x^{2n-1} .



23 تبرير: يُعبّر المقدار $27\pi x^8$ عن حجم المخروط المجاور بالوحدات المكعبة.

أكتب مقداراً جبرياً أسياً بدلالة x يُعبّر عن كل من r و h ، مُبرراً إجابتي.

الدرس 2

العمليات على المقادير الجذرية Operations with Radical Expressions

فكرة الدرس

تبسيط المقادير الجذرية .

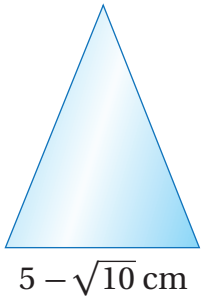
إجراء العمليات على المقادير الجذرية.

المصطلحات

المقادير الجذرية، إنطاق المقام، المُرافق.

مسألة اليوم

يُبين الشكل المُجاور مثلثًا مساحته 20 cm^2 . أجد ارتفاع المثلث في أبسط صورة.



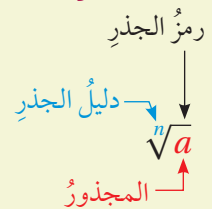
تبسيط المقادير الجذرية باستعمال خاصية ضرب

يُطلَق على المقادير العددية أو المقادير الجبرية التي تحوي جذورًا اسم **المقادير الجذرية** (radical expressions)، التي يكون كلٌّ منها في أبسط صورة إذا توافرت فيه الشروط الآتية:

- ألا يتضمن أيَّ مجذور عوامل (ما عدا العدد 1) يُمكن كتابتها في صورة قوى دليل الجذر.
- ألا يتضمن أيَّ مجذور كسورًا.
- ألا يتضمن أيَّ كسر مقامًا يحوي جذورًا.

تعلمت في الصف الثامن خاصية ضرب الجذور التربيعية. والآن سأتعلم كيف أستعمل هذه الخاصية لتبسيط المقادير الجذرية، علمًا بأنه يُمكن بطريقة مُشابهة ضرب أيّ جذرين لهما الدليل نفسه.

أتذكّر



خاصية ضرب الجذور

مفهوم أساسي

لأيّ عددين حقيقيين a و b ، ولأيّ عدد صحيح n ، حيث $n > 1$:

(1) إذا كان n عددًا زوجيًا، وكان $a \geq 0, b \geq 0$ ، فإن: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

(2) إذا كان n عددًا فرديًا، فإن: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

مثالان: $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{27 \times 4} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$

إذا أُريدَ تبسيط جذر زوجي لمقدار جبري أُشهُ زوجي، وكان أُس المقدار الجبري الناتج من التبسيط فرديًا، فإنه يتعين أخذ القيمة المطلقة للناتج، وبذلك لا يكون الجواب عددًا سالبًا؛ لأنّ الجذور الزوجية لا تكون سالبة، مثل:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{x^4} = x^2, \quad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3|, \quad \sqrt[6]{(x-5)^6} = |x-5|$$

أتعلّم

- إذا كان n عددًا فرديًا، فإن: $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- إذا كان n عددًا زوجيًا، فإن: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

مثال 1

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

1 $\sqrt{40x^4 y^3}, y > 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{40x^4 y^3} &= \sqrt{2^2 \times 2 \times 5 \times x^4 \times y^2 \times y} && \text{بتحليل ما يُمكن تحليله إلى عوامل مُربّعة} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{x^4} \times \sqrt{y^2} \times \sqrt{y} && \text{خاصية ضرب الجذور} \\ &= 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times x^2 \times |y| \times \sqrt{y} && \text{بالتبسيط} \\ &= 2x^2 y \sqrt{10y} && y > 0 \end{aligned}$$

2 $\sqrt[4]{81(x+1)^{12}}$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81(x+1)^{12}} &= \sqrt[4]{3^4 \times ((x+1)^3)^4} && \text{بتحليل ما يُمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة إلى الأس 4} \\ &= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{((x+1)^3)^4} && \text{خاصية ضرب الجذور} \\ &= 3|(x+1)^3| && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

3 $\sqrt[5]{m^{10} n^7}$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{m^{10} n^7} &= \sqrt[5]{(m^2)^5 \times n^5 \times n^2} && \text{بتحليل ما يُمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة إلى الأس 5} \\ &= \sqrt[5]{(m^2)^5} \times \sqrt[5]{n^5} \times \sqrt[5]{n^2} && \text{خاصية ضرب الجذور} \\ &= m^2 n \sqrt[5]{n^2} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتعلّم

إنّ تحليل ما يُمكن تحليله في المقدار الجبري إلى عوامل مُربّعة يُسهّل عملية تبسيط المقدار الجذري التربيعي.

أتعلّم

ورد في السؤال أنّ $y > 0$ ؛ لذا لا توجد ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة.

أتعلّم

لا أستعمل القيمة المطلقة في هذه المسألة؛ لأنّ دليل الجذر فردي.

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\sqrt{12x^3y^2}, x > 0$

b) $\sqrt[6]{64(x^2 - 3)^6}$

c) $\sqrt[7]{98r^8q^9}$

تبسيط المقادير الجذرية باستعمال خاصية القسمة

تعلمت في الصف الثامن خاصية قسمة الجذور التربيعية. والآن سأتعلم كيف أستعمل هذه الخاصية لتبسيط المقادير الجذرية، علماً بأنه يمكن بطريقة مشابهة قسمة أي جذرين لهما الدليل نفسه.

خاصية قسمة الجذور التربيعية

مفهوم أساسي

لأي عددين حقيقيين a و b ، حيث $b \neq 0$ ، ولأي عدد صحيح n ، حيث $n > 1$ ، فإن:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ إذا كانت جميع الجذور معروفة.}$$

مثالان: $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$ ، $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

أتذكر

المجذور هو المقدار العددي أو المقدار الجبري الذي يوجد أسفل رمز الجذر.

تعلمت سابقاً أن المقدار الجذري يكون في أبسط صورة إذا لم يحتو أي مقام فيه على جذور. والآن سأتعلم كيف يمكن التخلص من الجذر الذي في المقام عن طريق عملية تسمى **إنطاق المقام** (rationalizing the denominator)، وتتضمن ضرب البسط والمقام في مقدار جذري، بحيث لا يحوي ناتج الضرب جذوراً في المقام كما في الجدول الآتي:

المقام	ضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\frac{7}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$
$\sqrt[n]{a^x}$	$\sqrt[n]{a^{n-x}}$	$\frac{7}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{7\sqrt[3]{5^2}}{5}$

مثال 2

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

1 $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}}$

$$\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{2 \times 2^2}}$$

بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مُربَّعة

$$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

بإنطاق المقام

$$= \frac{\sqrt{14x}}{4}$$

خاصية ضرب الجذور

2 $\sqrt{\frac{x}{y^5}}$

$$\sqrt{\frac{x}{y^5}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^5}}$$

خاصية قسمة الجذور

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2 \times y}}$$

بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مُربَّعة

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2 \times y}}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

بإنطاق المقام

$$= \frac{\sqrt{xy}}{y^3}$$

$\sqrt{y} \times \sqrt{y} = y$

أندكّر

إذا كان a عدداً حقيقياً،

حيث $a \geq 0$ ، فإن:

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ، وهذا

من خصائص الجذور

التريعية.

3 $\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}}$

$$\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}} = \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}}$$

خاصية قسمة الجذور

$$= \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}} \times \frac{\sqrt[3]{3m^2}}{\sqrt[3]{3m^2}}$$

بإنتاج المقام

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{\sqrt[3]{27m^3}}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m}$$

$$\sqrt[3]{27m^3} = 3m$$

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

a) $\frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{18}}$

b) $\sqrt{\frac{12x^4}{y^3}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{7}{16x^3}}$

العمليات على المقادير الجذرية

يطلق على الجذور التي لها الدليل نفسه والمجذور نفسه اسم الجذور المتشابهة، ويمكن جمع المقادير الجذرية وطرحها بطريقة مشابهة لطريقة جمع المقادير الجبرية وطرحها.

$$5\sqrt[3]{2c} , -4\sqrt[3]{2c}$$

جذران متشابهان.

$$\sqrt[3]{2c} , \sqrt{2c}$$

جذران غير متشابهين.

مثال 3

أبسط كل مقدار جذري ممّا يأتي، علماً بأن جميع المتغيرات حقيقية موجبة:

1 $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2}$

$$\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} + \sqrt[4]{2}$$

بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة إلى الأس 4

$$= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$$

خاصية ضرب الجذور

أتذكر

يمكن استعمال طريقة الشجرة لتحليل الأعداد إلى عواملها الأولية.

$$= 3\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$$

بالتبسيط

$$= 4\sqrt[4]{2}$$

بجمع الجذور المُشابهة

$$2 \quad \sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x}$$

$$\sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x} = \sqrt[3]{2^3 \times 3x} - \sqrt[3]{3^3 \times 3x}$$

بتحليل ما يُمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة إلى الأس 3

$$= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3x}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 2\sqrt[3]{3x} - 3\sqrt[3]{3x}$$

بالتبسيط

$$= -\sqrt[3]{3x}$$

بجمع الجذور المُشابهة

 **أتحقق من فهمي**

أبسّط كل مقدار جذريّ ممّا يأتي، علماً بأنّ جميع المتغيّرات حقيقية موجبة:

a) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375}$

b) $\sqrt{160xy} + \sqrt{40xy}$

يُمكن ضرب المقادير الجذرية وقسمتها بطريقة مُشابهة لطريقة ضرب المقادير الجبرية وقسمتها.

مثال 4

أبسّط كلّاً من المقادير الجذرية الآتية، علماً بأنّ جميع المتغيّرات حقيقية موجبة:

$$1 \quad \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24}$$

$$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{9 \times 24}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt[3]{3^2 \times 2^3 \times 3}$$

بالتحليل إلى العوامل الأولية

$$= \sqrt[3]{3^3 \times 2^3}$$

بتجميع العوامل في صورة أسس تكعيبة

$$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2^3}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 3 \times 2 = 6$$

بالتبسيط

أفكّر

هل يُمكن حلّ الفرع 1 من المثال بطريقة أخرى؟
أبرّر إجابتي.

2 $\sqrt{40} \div \sqrt{5}$

$$\sqrt{40} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{40}{5}}$$

خاصية قسمة الجذور

$$= \sqrt{8}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{2^2 \times 2}$$

بتحليل ما يُمكن تحليله إلى عوامل مُربَّعة

$$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 2\sqrt{2}$$

بالتبسيط

أفكر

هل يُمكن حلُّ الفرع 2
من المثال بطريقة أخرى؟
أبرر إجابتي.

3 $(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2 + 4\sqrt{3})$

باستعمال خاصية التوزيع

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2 + 4\sqrt{3}) = 3\sqrt{5} \times 2 + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5 \times 3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3^2}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{15} - 2\sqrt{3} - 12$$

بالتبسيط

4 $2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y}$

$$2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y} = 2 \times 5 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 4x^5y}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 10 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 2^2 \times x^5y}$$

بتحليل الثوابت

$$= 10 \times \sqrt[3]{2^3 \times x^6 \times x \times y^3}$$

بتجميع العوامل في

صورة أسس تكعيبة

$$= 10 \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{x^6} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y^3}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= 10 \times 2 \times x^2 \times \sqrt[3]{x} \times y$$

بالتبسيط

$$= 20x^2y\sqrt[3]{x}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أبسط كلاً من المقدارين الجذريين الآتية، علماً بأن جميع المتغيرات حقيقية موجبة:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$

b) $\sqrt{50} \div \sqrt{8}$

c) $(5\sqrt{3} - 6)(5\sqrt{3} + 6)$

d) $4\sqrt[3]{50x^2y^5} \times 2\sqrt[3]{15x^3y^2}$

أتعلّم

يُسمّى المقدار $a^2 - b^2$ فرقاً بين مُربَّعين.

يُسمّى كلٌّ من $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ مُرافقاً (conjugate) للآخر؛ لأنّ ناتج ضربيهما لا يحوي جذوراً. فمثلاً، كلٌّ من $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ هو مُرافق للآخر؛ لأنّ:

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) &= (3)^2 - (\sqrt{2})^2 & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ &= 9 - 2 & (3)^2 &= 9, (\sqrt{2})^2 = 2 \\ &= 7 & & \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

يُستعمل المُرافق لأنطاق بعض المقامات في المقادير الجذرية، وذلك بضرب البسط والمقام في مُرافق المقام، ثم تبسيط الناتج.

مثال 5

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة، علماً بأنّ جميع المتغيّرات أعداد حقيقية موجبة:

1 $\frac{2}{6 + \sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{6 + \sqrt{3}} &= \frac{2}{6 + \sqrt{3}} \times \frac{6 - \sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}} & \text{بضرب البسط والمقام في مُرافق المقام} \\ &= \frac{2(6 - \sqrt{3})}{6^2 - (\sqrt{3})^2} & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ &= \frac{2(6 - \sqrt{3})}{36 - 3} & 6^2 &= 36, (\sqrt{3})^2 = 3 \\ &= \frac{12 - 2\sqrt{3}}{33} & \text{باستعمال خاصية التوزيع، والتبسيط} \end{aligned}$$

أتذكّر

إذا كان المقدار الجذريّ في أبسط صورة، فإنّه لا يتضمّن مقاماً يحوي جذوراً.

2 $\frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - \sqrt{x}} &= \frac{x}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} & \text{بضرب البسط والمقام في مُرافق المقام} \\ &= \frac{x(1 + \sqrt{x})}{1^2 - (\sqrt{x})^2} & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ &= \frac{x(1 + \sqrt{x})}{1 - x} & 1^2 &= 1, (\sqrt{x})^2 = x \\ &= \frac{x + x\sqrt{x}}{1 - x} & \text{باستعمال خاصية التوزيع، والتبسيط} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

a) $\frac{7}{4 - \sqrt{5}}$

b) $\frac{8}{3 + \sqrt{x}}$

أدرب وأحل المسائل

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\sqrt{4x^6}$

2 $\sqrt[3]{a^3 b^6}$

3 $\sqrt{144x^3 y^4 z^5}$, $x > 0$, $z > 0$

4 $\sqrt[3]{-24x^{13} y^6}$

5 $\sqrt[4]{625u^5 v^8}$, $u > 0$

6 $\sqrt[6]{25r^6 q^8}$

7 $\sqrt[5]{160x^8 z^4}$

8 $\sqrt{121(z-2)^{14}}$

9 $\sqrt[3]{37(2x-5)^{15}}$

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

10 $\frac{\sqrt[3]{192 x^8}}{\sqrt[3]{3x}}$

11 $\frac{5}{\sqrt[3]{9a^2}}$

12 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9z}}$

13 $\sqrt{\frac{5x^4}{2x^2 y^3}}$

14 $\sqrt[4]{\frac{16t^4}{y^4}}$

15 $\sqrt[5]{\frac{3}{y}}$

أبسط كلاً من المقادير الجذرية الآتية، علماً بأن جميع المتغيرات حقيقية موجبة:

16 $\sqrt{8} + \sqrt{20} - \sqrt{12}$

17 $5\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

18 $\sqrt[3]{54xy^3} - y\sqrt[3]{128x}$

19 $\sqrt[4]{5w^{10}} - 6\sqrt[4]{405w^6}$

20 $5\sqrt{2xy^6} \times 2\sqrt{2x^3 y}$

21 $(3 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{6})$

22 $\sqrt[5]{8xy^7} \times \sqrt[5]{6x^6}$

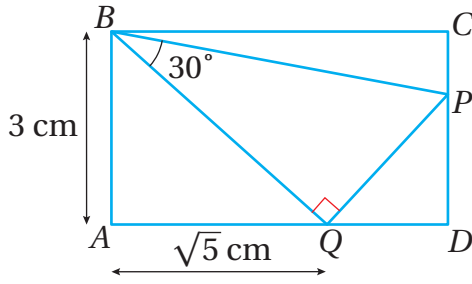
23 $\frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x^3}}{\sqrt{9x^{10}}}$

24 $\frac{\sqrt[3]{y^6}}{\sqrt[3]{27y} \times \sqrt[3]{y^{11}}}$

25 $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

26 $\frac{4}{3 - \sqrt{3}}$

27 $\frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$



28 يظهر المستطيل $ABCD$ في الشكل المُجاوِر. أَسْتَعْمَلُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ طولِ PQ في أبسط صورة.

29 أحلّ المسألة الواردة بدايةً الدرس.

مهارات التفكير العليا

30 أكتشف المختلف: أيّ المقادير الجذرية الآتية مختلف، مُبرِّراً إجابتي؟

$$\frac{\sqrt{xy}}{y^3}$$

$$\sqrt[5]{7yx^8}$$

$$\sqrt[4]{xy^3}$$

$$\sqrt{5yx}$$

31 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحلّ الآتي، ثمّ أصحّحه.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{64h^{12}g^6} &= \sqrt[6]{2^6 \times (h^2)^6 \times g^6} \\ &= \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{(h^2)^6} \times \sqrt[6]{g^6} \\ &= 2h^2g\end{aligned}$$

X

32 مسألة مفتوحة: أكتب مقداراً جذرياً مُكافئاً للمقدار $8|x|y^2$

33 تحدّد: أجد قيمة: $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} - \frac{3}{2\sqrt{7}-1}$ في أبسط صورة.

حلّ المعادلات الجذرية Solving Radical Equations

• حلّ معادلات تحوي مقادير جذرية.

المعادلات الجذرية، الحلول الدخيلة.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



تعطى سرعة الصوت بالمتّر لكل ثانية قرب سطح الأرض بالمعادلة الآتية: $V = 20\sqrt{t + 273}$ ، حيث t درجة الحرارة بالسلسيوس. إذا كانت سرعة الصوت هي 340 m/s ، فما درجة الحرارة عندئذٍ؟

المعادلات الجذرية

يُطلق على المعادلات التي تحوي مُغيّراً تحت الجذر اسمُ **المعادلات الجذرية** (radical equations)، ومن أمثلتها:

$$5\sqrt{x+1} = 3, \quad 2x+3 = \sqrt{1-7x}, \quad \sqrt[3]{x+4} = -8$$

توجد أربع خطوات يتعيّن اتّباعها لحلّ المعادلات الجذرية.

خطوات حلّ المعادلات الجذرية

مفهوم أساسي

أتعلّم

يُمكن حلّ المعادلات الجذرية باتّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: جعل الجذر وحده أحد طرفي المعادلة إن كان ذلك ضرورياً.

الخطوة 2: رفع طرفي المعادلة إلى أسّ مساوٍ لدليل الجذر؛ تخلصاً من الجذر.

الخطوة 3: حلّ المعادلة الناتجة.

الخطوة 4: التحقق من صحّة الحلّ.

تتبع معادلة أخرى (خطية، أو تربيعية مثلاً) من رفع طرفي المعادلة إلى أسّ مساوٍ لدليل الجذر، ويُمكن حلّ هذه المعادلة باستعمال طرائق حلّ المعادلات التي تعلّمناها سابقاً.

مثال 1

أحلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

1 $\sqrt{x} + 4 = 12$

$$\sqrt{x} + 4 = 12$$

المعادلة الأصلية

$$\sqrt{x} = 8$$

بطرح 4 من طرفي المعادلة

$$x = 64$$

بتربيع طرفي المعادلة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوّض قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$\sqrt{x} + 4 = 12$$

المعادلة الأصلية

$$\sqrt{64} + 4 \stackrel{?}{=} 12$$

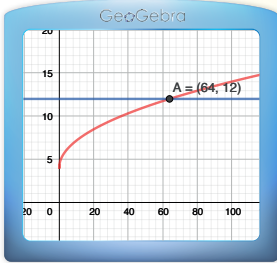
بتعويض $x = 64$

$$12 = 12 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

إذن، حل المعادلة هو: $x = 64$.

الدعم البياني



أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = \sqrt{x} + 4$ ، والمعادلة: $y = 12$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 64$.

2 $2\sqrt{3x + 4} = 8$

$$2\sqrt{3x + 4} = 8$$

المعادلة الأصلية

$$\sqrt{3x + 4} = 4$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$3x + 4 = 16$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$3x = 12$$

بطرح 4 من طرفي المعادلة

$$x = 4$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

أَتَحَقَّقُ: للتحقق من صحة الحل، أَعُوِّضُ قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$2\sqrt{3x+4} = 8$$

المعادلة الأصلية

$$2\sqrt{3(4)+4} \stackrel{?}{=} 8$$

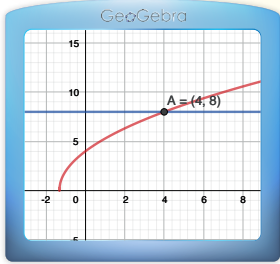
بتعويض $x = 4$

$$8 = 8 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

إذن، حل المعادلة هو: $x = 4$.

الدعم البياني:



أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = 2\sqrt{3x+4}$ ، والمعادلة: $y = 8$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 4$.

3 $\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$

$$\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$$

المعادلة الأصلية

$$\sqrt[3]{2x-9} = 3$$

بجمع 6 إلى طرفي المعادلة

$$2x - 9 = 27$$

بتكعيب طرفي المعادلة

$$2x = 36$$

بجمع 9 إلى طرفي المعادلة

$$x = 18$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

أَتَحَقَّقُ: للتحقق من صحة الحل، أَعُوِّضُ قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$\sqrt[3]{2x-9} - 6 = -3$$

المعادلة الأصلية

$$\sqrt[3]{2(18)-9} - 6 \stackrel{?}{=} -3$$

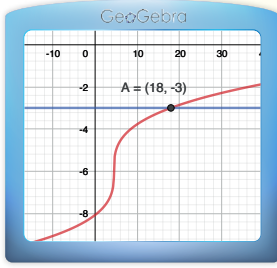
بتعويض $x = 18$

$$-3 = -3 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

إذن، حل المعادلة هو: $x = 18$.

الدعم البياني:



أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = \sqrt[3]{2x-9} - 6$ ، والمعادلة: $y = -3$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 18$.

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $2 + \sqrt{x} = 8$ b) $4\sqrt{7x+1} - 2 = 14$ c) $2\sqrt[4]{x-3} = 4$

الحل الدخيل

ينتج أحياناً من رفع طرفي المعادلة إلى أس ما حل لا يحقق المعادلة الأصلية، ويُسمى **الحل الدخيل** (extraneous solution)؛ لذا يجب التحقق دائماً من تحقيق أي حل ناتج للمعادلة الجذرية الأصلية.

يظهر الحل الدخيل غالباً عند حل معادلات تحوي مُتغيّراً في طرفي كل منها.

مثال 2

أحلُّ المعادلة: $x - 4 = \sqrt{3x - 2}$

$$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$$

المعادلة الأصلية

$$(x - 4)^2 = 3x - 2$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$x^2 - 8x + 16 = 3x - 2$$

مربع الفرق بين حدّين

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

بطرح $3x$ من طرفي المعادلة، وجمع 2 إلى طرفيها

$$(x - 9)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

أتذكّر

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x - 9 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 9$$

$$x = 2$$

بحل كل معادلة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوّض قيمتي x الناتجتين في المعادلة الأصلية.

عندما $x = 2$:

$$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$$

$$(2) - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(2) - 2}$$

$$-2 \neq 2 \quad \times$$

عندما $x = 9$:

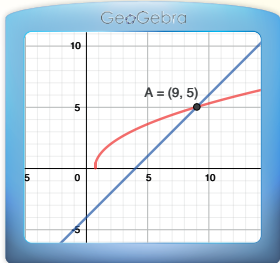
$$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$$

$$(9) - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(9) - 2}$$

$$5 = 5 \quad \checkmark$$

إذن، حل المعادلة هو: $x = 9$.

الدعم البياني:



أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = x - 4$ ، والمعادلة: $y = \sqrt{3x - 2}$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط عندما $x = 9$.

أتحقق من فهمي

أحل المعادلة: $x = \sqrt{x + 6}$.

أتعلم

من أسباب وجود حل دخيل في أثناء حل المعادلة الجذرية رفع الطرفين إلى أس زوجي؛ لأن القيم السالبة تلغى إشارتها عندئذ، ما يؤثر في الحل الأصلي.

تعلمت في المثال السابق أن الحل الدخيل يظهر غالباً عند حل معادلات تحوي متغيراً في طرفي كل منها. والآن سأتعلم أن الحل الدخيل يمكن أن يظهر أيضاً عند حل معادلة تحوي جذراً في كلا طرفيها.

مثال 3

أحلّ المعادلة: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$.

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$$

المعادلة الأصلية

$$3x + 1 = 5x - 2\sqrt{5x} + 1$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$2\sqrt{5x} = 2x$$

بالتبسيط

$$\sqrt{5x} = x$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$5x = x^2$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$x^2 - 5x = 0$$

بطرح $5x$ من طرفي المعادلة

$$x(x - 5) = 0$$

بإخراج العامل المشترك

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 5$$

بحلّ المعادلة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوّض قيمتي x الناتجتين في المعادلة الأصلية.

عندما $x = 0$:

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$$

عندما $x = 5$:

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$$

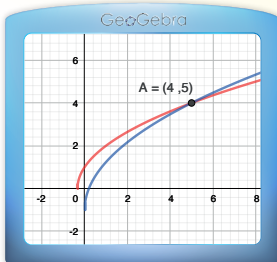
$$\sqrt{3(0)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(0)} - 1 \quad \sqrt{3(5)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(5)} - 1$$

$$1 \neq -1 \quad \times$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

إذن، حلّ المعادلة هو: $x = 5$.

الدعم البياني:

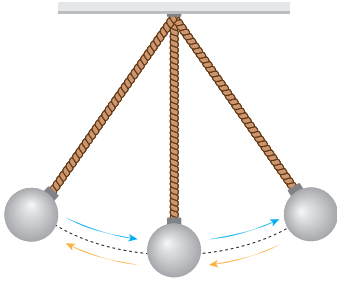


أستعمل برمجية جيوجبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = \sqrt{3x+1}$ ، والمعادلة: $y = \sqrt{5x}-1$ بيانيًا، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط عندما $x = 5$.

أتحقق من فهمي

أحل المعادلة: $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$.

مثال 4: من الحياة



فيزياء: تُمثل المعادلة: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ الزمن (بالثواني) الذي يستغرقه بندول طوله L قدمًا حتى يتحرك حركة تذبذبية مرة واحدة ذهابًا وإيابًا. أجد طول البندول إذا تحرك حركة تذبذبية مرة واحدة ذهابًا وإيابًا في 4 ثوانٍ، مُقربًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

المعادلة الأصلية

$$4 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

بتعويض $T = 4$

$$\frac{4}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2π

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{L}{32}}$$

بالتبسيط

$$\frac{4}{\pi^2} = \frac{L}{32}$$

بتريع طرفي المعادلة

$$\frac{128}{\pi^2} = L$$

بضرب طرفي المعادلة في 32

$$L \approx 13$$

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوض قيمة L الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

المعادلة الأصلية

$$4 \stackrel{?}{\approx} 2\pi\sqrt{\frac{13}{32}}$$

بتعويض $T = 4, L \approx 13$

$$4 \approx 4 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

مُعْتَمِدًا الْمَعَادِلَةَ فِي الْمَثَالِ 4، أَجِدُ طَوَلَ الْبَنْدُولِ إِذَا تَحَرَّكَ حَرَكَةً تَذْبُذِبِيَّةً مَرَّةً وَاحِدَةً ذَهَابًا وَإِيَابًا فِي 8 ثَوَانٍ، مُقَرَّبًا إيجابيًا إِلَى أَقْرَبِ مَنْزِلَةٍ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمَعَادِلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $\sqrt{3x} - 5 = 7$

2 $\sqrt[3]{1 - 2x} = -3$

3 $\sqrt[4]{4x + 1} = 2$

4 $6 - \sqrt{y - 5} = 3$

5 $\sqrt{2 - x} + 3 = x + 7$

6 $\sqrt{5x + 4} = 3\sqrt{x}$

7 $\sqrt{2p + 3} = \sqrt{5p - 3}$

8 $\sqrt{4x - 1} - 4\sqrt{2 - 5x} = 0$

9 $\sqrt[3]{1 - 3x} + 5 = 3$

10 $12 + \sqrt{2v - 1} = 4$

11 $\sqrt{45 - 6n} = n - 3$

12 $\sqrt{4k - 4} = k - 1$

13 $\sqrt{x + 1} = 2 - \sqrt{x}$

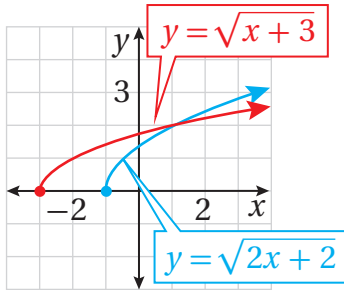
14 $r + 4 = \sqrt{-4r - 19}$

15 $\sqrt[3]{7y - 2} = \sqrt[3]{y + 4}$

16 $\sqrt{5m - 16} = m - 2$

17 $\sqrt{9x^2 + 4x - 4} = 3x$

18 $\sqrt{x^2 + 5x} = \sqrt{6}$

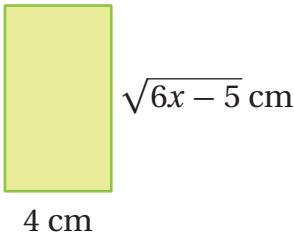


يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْمُجَاوِرُ التَّمَثِيلَ الْبَيَانِيَّ لِمَنْحَنِ كُلِّ مِنَ الْمَعَادِلَةِ: $y = \sqrt{x + 3}$ ،
وَالْمَعَادِلَةِ: $y = \sqrt{2x + 2}$.

19 أَكْتُبْ مَعَادِلَةً حُلُّهَا هُوَ الْإِحْدَاثِيُّ x لِنَقْطَةِ تَقَاطُعِ مَنْحِنَيْ الْمَعَادِلَتَيْنِ.

20 أَحْلُ الْمَعَادِلَةَ الَّتِي كَتَبْتُهَا فِي الْفَرْعِ السَّابِقِ جَبْرِيًّا.

21 إِذَا كَانَ مُحِيطُ الْمُسْتَطِيلِ الْمُجَاوِرِ هُوَ 22 cm، فَأَجِدْ قِيَمَةَ x .





22 تعطى سرعة الجسم الساقط سقوطاً حرّاً من ارتفاع قدره d قدماً عند وصوله سطح الأرض بالمعادلة الآتية: $v = \sqrt{64d}$ ، حيث v سرعة الجسم بالقدم لكل ثانية. أجد الارتفاع الذي سقط منه الجسم إذا كانت سرعته عند وصوله سطح الأرض هي 150 ft/s .

23 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.



مهارات التفكير العليا



24 أكتشف المختلف: أي المعادلات الآتية مختلفة، مُبرِّراً إجابتي؟

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2$$

$$\sqrt{x+1} + 7 = 10$$

$$\sqrt{x-1} + 3 = 5$$

$$\sqrt{x-1} + 8 = 10$$

25 أكتشف الخطأ: حلّت بيان المعادلة: $x = \sqrt{12 - 4x}$ على النحو الآتي، قائلة إنَّ للمعادلة حلين اثنين، هما: $x = 2$ و $x = -6$:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{12 - 4x} \\ x^2 &= 12 - 4x \\ x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ (x - 2)(x + 6) &= 0 \\ x &= 2 \quad \text{or} \quad x = -6 \end{aligned}$$

أكتشف الخطأ في قول بيان، ثمَّ أصحِّحهُ.

26 مسألة مفتوحة: أكتب معادلة جذرية حلها هو $x = 6$.

اختبار نهاية الوحدة

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

6 $\frac{p^{-3}}{p^{-2}q^{-9}}$

7 $(2x^{-2}y^3)^4$

8 $\left(\frac{4s^5t^{-7}}{-2s^{-2}t^4}\right)^3$

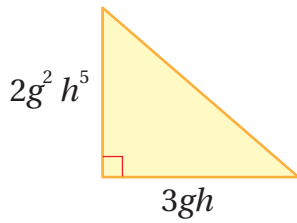
9 $(-2r^3s^2)^4(3rs^5)^{-2}$

10 $\frac{x^4y^{-8}z^{-2}}{x^{-1}y^6z^{-10}}$

11 $\left(\frac{x^{-3}y}{xz^{-4}}\right)^{-2}$

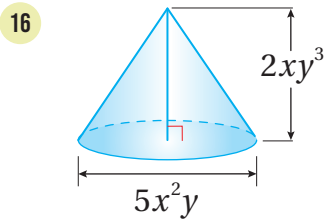
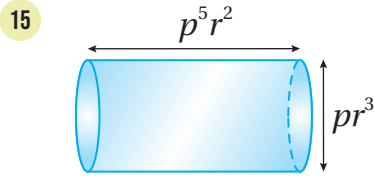
12 $\left(\frac{m^4n^{-1}}{n^{-2}}\right)^0$

13 $\left(\frac{2a^3b^{-2}}{c^3}\right)^5$



14 أجد مساحة المثلث المجاور في أبسط صورة.

أجد حجم كل شكل مما يأتي في أبسط صورة:



أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أبسط صورة للمقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ هي:

a) $\frac{2x^2}{3}$

b) $\frac{2x}{3}$

c) $\frac{1}{2x^2}$

d) $\frac{x}{2}$

2 أبسط قيمة للمقدار $\sqrt[3]{-24a^5}$ هي:

a) $2a\sqrt[3]{3a^2}$

b) $2a^2\sqrt[3]{3a}$

c) $-2a\sqrt[3]{3a^2}$

d) $-2a^2\sqrt[3]{3a}$

3 أبسط قيمة للمقدار $\sqrt[4]{\frac{16t^4}{y^8}}$ هي:

a) $\frac{2t}{y}$

b) $\frac{2|t|}{y}$

c) $\frac{2t}{y^2}$

d) $\frac{2|t|}{y^2}$

4 أبسط قيمة للمقدار $\sqrt{20x^3} + \sqrt{45x^3}$ هي:

a) $5x\sqrt{5x^3}$

b) $5|x|\sqrt{5x}$

c) $5\sqrt{5x^3}$

d) $5\sqrt{5x}$

5 حل المعادلة: $\sqrt{3x-11} + 2 = 9$ هو:

a) 44

b) 6

c) 20

d) 22

اختبار نهاية الوحدة

أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

36 $\sqrt{b-5} = 2$

37 $17 = 7 + \sqrt{5x}$

38 $\sqrt{3n+25} = \sqrt{-7-n}$

39 $\sqrt{21} - \sqrt{5x-4} = 0$

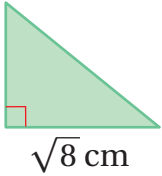
40 $4\sqrt[3]{2x+11} - 2 = 10$

41 $\sqrt[4]{3-x} = 3$

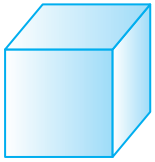
42 $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-2} = 1$

43 $\sqrt{2x-7} = \sqrt{3x-12}$

تدريب على الاختبارات الدولية



44 إذا كانت مساحة المثلث المجاور هي $(4 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$ ، فأجد ارتفاعه في أبسط صورة.



45 إذا كانت المساحة الكلية لسطح المكعب المجاور هي $6a^2$ ، فأجد حجمه.



46 يُطلق على الزمن الذي يظل فيه الجسم في الهواء بعد القفز اسم زمن التحليق، وهو يعطى بالمعادلة الآتية:

$t = 0.5\sqrt{h}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و h ارتفاع القفزة بالأقدام. إذا قفز لاعب كرة يد، وكان زمن تحليقه هو 0.72 من الثانية تقريباً، فأجد ارتفاع قفزة اللاعب.

أكتب كُلًّا مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

17 $\sqrt[3]{64y^6}$

18 $\sqrt[5]{4a^8 b^{14} c^5}$

19 $\frac{x}{\sqrt[3]{y^8}}$

20 $\sqrt[3]{\frac{3a}{4b^4c}}$

21 $\sqrt[4]{1024x^9 y^{12}}$

22 $\sqrt{45x^2 y^5 z^8}$

23 $\sqrt[4]{16(y+x)^4}$

24 $3\sqrt[4]{x^4 y^8}$

25 $\sqrt[3]{125r^4 s^9 t^7}$

26 $\sqrt[3]{\frac{250f^7 g^3}{2f^2 g}}$

27 $\frac{\sqrt[5]{64x^6}}{\sqrt[5]{2x}}$

28 $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{4}$

29 $\sqrt{x^5 y^5} \times 3\sqrt{2x^7 y^6}$

30 $4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{24}$

31 $(3\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + 5\sqrt{5})$

32 $\sqrt[4]{3x^3 y^2} \times \sqrt[4]{27xy^2}$

33 $\frac{4 - \sqrt{8}}{\sqrt{8} + \sqrt{2}}$

34 $\frac{4 - \sqrt{x^3}}{2 + 2\sqrt{x}}$

35 أجد محيط المستطيل الآتي في أبسط صورة.

$(3 + 6\sqrt{2}) \text{ cm}$

$\sqrt{8} \text{ cm}$

ما أهمية هذه الوحدة؟

إنّ تبسيط المقادير الجبرية النسبية، وتطبيق بعض العمليات الحسابية عليها، يساعد على حلّ معادلات أكثر تعقيداً من تلك التي تعلّمناها سابقاً، علماً بأنّ لهذه المقادير استعمالات حياتية وعلمية في كثير من المناحي، لا سيّما الحسابات التي تحوي نسباً وتناسبات، مثل: مزج الألوان، والصناعات الكيميائية الدقيقة.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ تبسيط المقادير الجبرية النسبية.
- ◀ ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها.
- ◀ جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها.
- ◀ حلّ المعادلات النسبية.

تعلّمت سابقاً:

- ✓ تمييز الحدود والمقادير الجبرية.
- ✓ تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل.
- ✓ تبسيط المقادير الجبرية النسبية.
- ✓ حلّ التناسبات.

توظيف المقادير الجبرية النسبية في تصميم مدينة رياضية.

فكرة المشروع



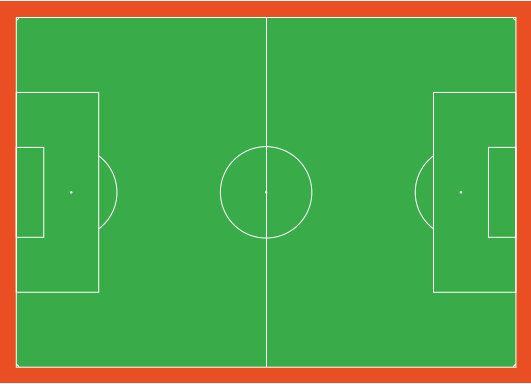
قطعة كبيرة من الكرتون، أدوات هندسية، ألوان، مقص.

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

المهمة 1:



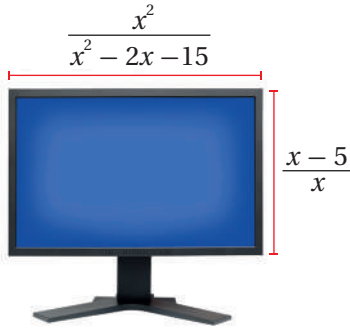
- 1 أصمّم على قطعة الكرتون نموذجًا للملعب يحيط به مضمار كما في الشكل المجاور.
- 2 أعبّر عن طول الملعب مع المضمار بمقدار جبري نسبي يحوي متغيرًا واحدًا فقط، ثم أعبّر عن عرض الملعب والمضمار بمقدار جبري نسبي آخر يحوي المتغير نفسه.
- 3 أجد مساحة الملعب مع المضمار بدلالة المتغيرات التي تحويها المقادير الجبرية النسبية، ثم أكتب الناتج في أبسط صورة.
- 4 أجد مساحة الملعب بدلالة المتغيرات، ثم أكتب الناتج في أبسط صورة.
- 5 أجد مساحة المضمار بدلالة المتغيرات، ثم أكتب الناتج في أبسط صورة.
- 6 أجد محيط الملعب مع المضمار بدلالة المتغيرات، ثم أكتب الناتج في أبسط صورة.
- 7 أجد محيط الملعب بدلالة المتغيرات، ثم أكتب الناتج في أبسط صورة.
- 8 أجد الفرق بين محيط الملعب مع المضمار ومحيط الملعب.
- 9 أفترض مساحةً للملعب الذي أنشأته، ثم أجد قيمة المتغير بحل المعادلة النسبية الناتجة.
- 10 أعد مطوية أدرج فيها الأبعاد الأولمبية لملاعب كرة القدم، وتاريخ اللعبة، وأهميتها في تقارب ثقافات الشعوب.

عرض النتائج:

- أعدّ عرضًا تقديميًا يتضمن صورًا توضح خطوات العمل في المشروع، وعلاقته بما تعلّمته في الوحدة.
- أعرّض المطوية أمام طلبة الصف، موضحًا العمليات الحسابية التي اعتمدتها في تصميم ملعب كرة القدم.

الدرس 1

ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها Multiplying and Dividing Rational Algebraic Expressions



تبسيط المقادير الجبرية النسبية.

ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها.

المقدار الجبري النسبي، الكسر الجبري المركب.

يُبين الشكل المجاور شاشة حاسوب، طولها $\frac{x^2}{x^2 - 2x - 15}$ وحدة، وعرضها $\frac{x - 5}{x}$ وحدة.

أجد مساحة الشاشة بدلالة x في أبسط صورة.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تبسيط المقادير الجبرية النسبية

المقدار الجبري النسبي (rational algebraic expression) هو مقدار جبري يمكن كتابته

في صورة كسر بسيط أو مقامه مقداران جبريان، ومن أمثلته:

$$\frac{6}{x}, \quad \frac{2y + 1}{y^2 - 3y + 2}, \quad \frac{r^3 + 1}{r - 4}$$

يكون المقدار الجبري النسبي في أبسط صورة إذا كان العدد 1 هو العامل المشترك الأكبر لكل من بسطه ومقامه. بوجه عام، يبدأ تبسيط المقدار الجبري بتحليل كل من البسط والمقام، ثم قسمة كل منهما على العوامل المشتركة بينهما.

$$\frac{2x + 6}{x^2 - 9} = \frac{2(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{2}{x - 3}$$

بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام وهو $(x + 3)$.

رموز رياضية

يُرمز إلى العامل المشترك الأكبر بالرمز (ع.م.أ)، أو الرمز (GCF)، وهو اختصاراً لجملة (greatest common factor).

أتعلم

ربما أن القسمة على صفر غير معرفة، فإننا سنفترض في هذه الوحدة أن جميع القيم التي تجعل المقامات صفراً مُستثناة.

مثال 1

اكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{2x - 10}{2x^2 - 11x + 5}$

$$\frac{2x - 10}{2x^2 - 11x + 5} = \frac{2(x - 5)}{(2x - 1)(x - 5)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{2\cancel{(x - 5)}}{(2x - 1)\cancel{(x - 5)}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $(x - 5)$

$$= \frac{2}{2x - 1}$$

بالتبسيط

2 $\frac{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{6x^3 - 24x^2 + 24x}$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 9x - 18}{6x^3 - 24x^2 + 24x} = \frac{(x^3 - 2x^2) + (9x - 18)}{6x(x^2 - 4x + 4)}$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة في البسط، وإخراج العامل المشترك في المقام

$$= \frac{x^2(x - 2) + 9(x - 2)}{6x(x^2 - 4x + 4)}$$

بإخراج العامل المشترك من كل تجميع في البسط

$$= \frac{(x^2 + 9)(x - 2)}{6x(x - 2)(x - 2)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{(x^2 + 9)\cancel{(x - 2)}}{6x(x - 2)\cancel{(x - 2)}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $(x - 2)$

$$= \frac{x^2 + 9}{6x(x - 2)}$$

بالتبسيط

3 $\frac{1 - u^2}{u^2 + 4u - 5}$

$$\frac{1 - u^2}{u^2 + 4u - 5} = \frac{(1 - u)(1 + u)}{(u - 1)(u + 5)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{-(u - 1)(1 + u)}{(u - 1)(u + 5)}$$

$$1 - u = -(u - 1)$$

$$= \frac{\cancel{-(u - 1)}(1 + u)}{\cancel{(u - 1)}(u + 5)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $(u - 1)$

$$= \frac{-(u + 1)}{u + 5}$$

بالتبسيط

أتذكر

يمكن تحليل بعض المقادير الجبرية التي تحوي أربعة حدود أو أكثر باستعمال طريقة التجميع.

أتذكر

يمكن إخراج (-1) عاملاً مشتركاً من البسط أو المقام لتسهيل اختصار المقادير الجبرية النسبية.

أتحقق من فهمي

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{6x - 18}{x^4 - 81}$

b) $\frac{x^3 + 8}{x^2 + 6x + 8}$

c) $\frac{3x - 3x^2}{x^2 + 4x - 5}$

ضرب المقادير الجبرية النسبية

يُمكن ضرب المقادير الجبرية النسبية بطريقةً مشابهةً لطريقة ضرب الكسور، وذلك بضرب البسط في البسط وضرب المقام في المقام، ثم كتابة المقدار الجبري النسبي الناتج في أبسط صورة.

ضرب المقادير الجبرية النسبية

مفهوم أساسي

بالكلمات: لضرب مقدارين جبريين نسبين، يُضرب البسط في البسط، ثم يُضرب المقام في المقام.

بالرموز: إذا كانت a, b, c, d مقادير جبرية، حيث: $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

مثال: $\frac{3x}{y} \times \frac{2x}{(y+2)} = \frac{6x^2}{y^2 + 2y}$

مثال 2

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{12ac}{15b} \times \frac{5ab^2}{6c^2}$

$$\begin{aligned} \frac{12ac}{15b} \times \frac{5ab^2}{6c^2} &= \frac{2 \times 6 \times a \times c}{3 \times 5 \times b} \times \frac{5 \times a \times b \times b}{6 \times c \times c} \\ &= \frac{2 \times \cancel{6} \times a \times \cancel{c}}{3 \times \cancel{5} \times \cancel{b}} \times \frac{\cancel{5} \times a \times \cancel{b} \times b}{\cancel{6} \times \cancel{c} \times c} \\ &= \frac{2a^2b}{3c} \end{aligned}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة

بالتبسيط

أتعلم

أتحقق من اختصار جميع العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام قبل إجراء عملية الضرب؛ تسهلاً للحسابات.

2 $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 9} \times \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 8}$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 9} \times \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+3)} \times \frac{x+3}{(x-2)(x-4)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة

$$= \frac{\cancel{(x+3)}(\cancel{x-2})}{\cancel{(x+3)}(x+3)} \times \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

بالتبسيط

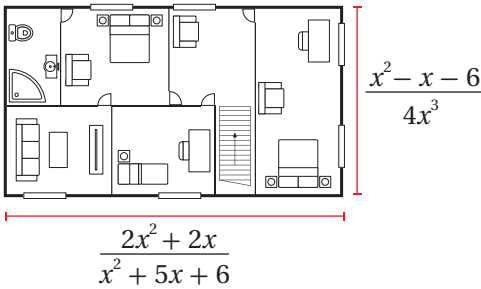
$$= \frac{1}{x-4}$$

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{8x}{5y^2} \times \frac{20xy}{6b}$

b) $\frac{d^2 - 36}{d^2 + 5d - 6} \times \frac{d - 1}{d^2 - 7d + 6}$



مثال 3: من الحياة

هندسة معمارية: يُبين الشكل المجاور مخططاً لأحد المنازل. أجد مساحة المنزل بدلالة x في أبسط صورة.

$A = l \times w$

صيغة مساحة المستطيل الذي طوله l وعرضه w

$$= \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \times \frac{x^2 - x - 6}{4x^3}$$

بتعويض $l = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6}$, $w = \frac{x^2 - x - 6}{4x^3}$

$$= \frac{2x(x+1)}{(x+2)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+2)}{2x \times 2x^2}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

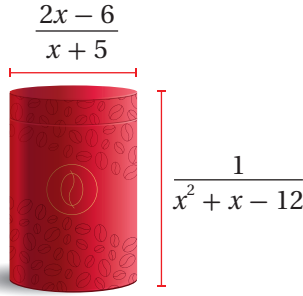
$$= \frac{\cancel{2x}(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} \times \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{2x} \times 2x^2}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{2x^2(x+3)}$$

بالتبسيط

إذن، مساحة المنزل هي $\frac{(x+1)(x-3)}{2x^2(x+3)}$ وحدة مربعة.



أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

قهوة: نضع إحدى الشركات مُنتَجَها من القهوة في علب، أبعادها تعطى بدلالة x كما في الشكل المُجاور. أجد حجم علب القهوة بدلالة x في أبسط صورة.

قسمة المقادير الجبرية النسبية

يُمكن قسمة المقادير الجبرية النسبية بطريقة مُشابهة لطريقة قسمة الكسور، وذلك بضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه، ثم كتابة المقدار الجبري النسبي الناتج في أبسط صورة.

أَتَذَكَّرُ

إذا كان ناتج ضرب عددين هو 1، فإن كلا منهما يُسمّى نظيراً ضربياً للآخر، أو مقلوباً للآخر.

قسمة المقادير الجبرية النسبية

مفهوم أساسي

بالكلمات: لقسمة مقدار جبري نسبي على آخر، يُضرب في النظير الضربي للمقسوم عليه.

بالرموز: إذا كانت a, b, c, d مقادير جبرية، حيث: $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{4x}{y} \div \frac{5}{y+1} = \frac{4x}{y} \times \frac{y+1}{5} = \frac{4x(y+1)}{5y}$$

مثال:

أَفَكِّرُ

لماذا لا يُشترط أن يكون $a \neq 0$ ؟

مثال 4

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2}$

$$\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2} = \frac{24x^2y}{5c^2d} \times \frac{10c^2d^2}{16xy^3}$$

$$= \frac{3 \times 8 \times x \times x \times y}{5 \times c^2 \times d} \times \frac{5 \times 2 \times c^2 \times d \times d}{2 \times 8 \times x \times y \times y^2}$$

بضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{3 \times 8 \times x \times x \times y}{5 \times e^2 \times d} \times \frac{5 \times 2 \times e^2 \times d \times d}{2 \times 8 \times x \times y \times y^2}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على
العوامل المشتركة

$$= \frac{3xd}{y^2}$$

بالتبسيط

2

$$\frac{x^2 - 36}{y^2 + 3y - 4} \div \frac{x^2 - 9x + 18}{8y + 32}$$

$$\frac{x^2 - 36}{y^2 + 3y - 4} \div \frac{x^2 - 9x + 18}{8y + 32} = \frac{x^2 - 36}{y^2 + 3y - 4} \times \frac{8y + 32}{x^2 - 9x + 18}$$

بضرب المقسوم في النظير
الضربي للمقسوم عليه

$$= \frac{(x-6)(x+6)}{(y+4)(y-1)} \times \frac{8(y+4)}{(x-3)(x-6)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل

$$= \frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{(y+4)}(y-1)} \times \frac{8\cancel{(y+4)}}{(x-3)\cancel{(x-6)}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة

$$= \frac{8(x+6)}{(y-1)(x-3)}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{24b^3}{14x^2y^2} \div \frac{16bc^2}{21x^4y^3}$

b) $\frac{x^2 - 9x + 20}{y^2 + 10y + 21} \div \frac{2x^2 - 9x + 4}{4y + 28}$

الكسر الجبري المركب

الكسر الجبري المركب (complex algebraic fraction) هو كسر يحتوي بسطه أو مقامه

أو كلاهما على مقدار جبري نسبي، ومن أمثله:

$$\frac{\frac{x}{4}}{y}, \quad \frac{a-6}{\frac{4}{a}}, \quad \frac{\frac{y+1}{y-8}}{\frac{y-7}{5}}, \quad \frac{\frac{2}{d} + 8}{\frac{10}{d} + 8}$$

توجد أربع خطواتٍ يتعيَّن اتِّباعُها لتبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ.

خطوات تبسيط الكسور الجبرية المركَّبة

مفهوم أساسي

يُمكن تبسيطُ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتية:

الخطوة 1: كتابة كلِّ من البسط والمقام في صورة كسرٍ واحدٍ إن كان ذلك ضروريًا.

الخطوة 2: كتابة الكسر الجبري المُركَّب الناتج من الخطوة 1 في صورة قسمة مقدارين جبريين نسبيين.

الخطوة 3: ضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

الخطوة 4: قسمة كلِّ من البسط والمقام على العوامل المشتركة، والتبسيط.

مثال 5

أكتب $\frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 25}}{\frac{b - a}{a + 5}}$ في أبسط صورة.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 25}}{\frac{b - a}{a + 5}} &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 25} \div \frac{b - a}{a + 5} && \text{بكتابة الكسر الجبري المُركَّب في صورة قسمة مقدارين نسبيين} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 25} \times \frac{a + 5}{b - a} && \text{بضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه} \\ &= \frac{-(b - a)(a + b)}{(a - 5)(a + 5)} \times \frac{a + 5}{b - a} && \text{بقسمة كلِّ من البسط والمقام على العوامل المشتركة} \\ &= -\frac{(a + b)}{(a - 5)} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتحقّق من فهمي

أكتب $\frac{\frac{x^2 - y^2}{y^2 - 36}}{\frac{x - y}{2y + 12}}$ في أبسط صورة.



أَكْتُبُ كُلَّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسَطِ صُورَةٍ:

1 $\frac{6x(x+3)}{9x^2}$

2 $\frac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$

3 $\frac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$

4 $\frac{x^3-8}{x^2-4}$

5 $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

6 $\frac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$

أَكْتُبُ كُلَّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسَطِ صُورَةٍ:

7 $\frac{3x^2y}{14c^2d} \times \frac{28cd}{12x^3y^2}$

8 $\frac{2d+2}{d^2+8d+16} \times \frac{d^2+d-12}{d+1}$

9 $\frac{x^2-16}{3x^3} \times \frac{x^2}{x^2+x-12}$

10 $\frac{x^2-3x}{x-2} \times \frac{x^2+x-6}{x}$

11 $\frac{x^2-4x}{x-1} \times \frac{x^2+3x-4}{2x}$

12 $\frac{b^2+12b+11}{b^2-9} \times \frac{b^3+27}{b^2+20b+99}$

أَكْتُبُ كُلَّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسَطِ صُورَةٍ:

13 $\frac{21x^3y^2}{12ab^2} \div \frac{3x^2y^2}{24a^3}$

14 $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$

15 $\frac{p}{p-4} \div \frac{p^2}{p^2-5p+4}$

16 $\frac{g^2-4g-21}{4g^2+12g} \div (g-7)$

17 $\frac{x^2-25}{2x-2} \div \frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$

18 $\frac{x+2}{3x+12} \div \frac{x+2}{x^2-16}$

أَكْتُبُ كُلَّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسَطِ صُورَةٍ:

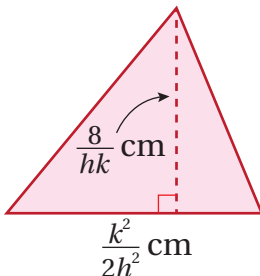
19 $\frac{\frac{x^3y^3}{cd^4}}{\frac{x^2y}{c^2d}}$

20 $\frac{\frac{4a-8}{a^4-9}}{\frac{a^2-a-2}{a^2+7a+12}}$

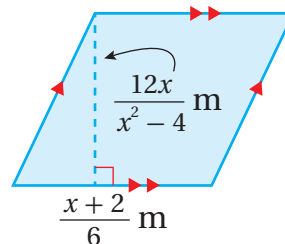
21 $\frac{\frac{8x^2-10x-3}{10x^2+35x-20}}{\frac{2x^2+x-6}{4x^2+18x+8}}$

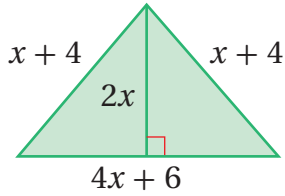
أَجِدْ مَسَاحَةَ كُلِّ مِنَ الشَّكْلَيْنِ الْآتَيْنِ بِدَلَالَةِ x فِي أَبْسَطِ صُورَةٍ:

22

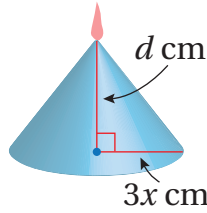
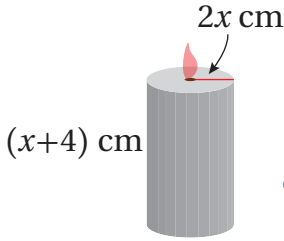


23





24 أكتب النسبة بين محيط الشكل المُجاوِر ومساحته في صورة مقدار جبريٍّ نسبيٍّ في أبسط صورة.



25 **شموع:** في الشكل المُجاوِر شمعتان لهما الحجم نفسه، وإحدهما أسطوانية، والأخرى مخروطية. أكتب مقداراً نسبياً يُمثِّل ارتفاع الشمعة المخروطية بدلالة x في أبسط صورة.

26 أحل المسألة الواردة بدايةً الدرس.

مهارات التفكير العليا

27 **مسألة مفتوحة:** أكتب مقداراً نسبياً أبسط صورة له هي: $\frac{1}{2x+1}$.

28 **اكتشف المختلف:** أيُّ المقادير النسبية الآتية مختلف، مُبرِّراً إجابتي؟

$$\frac{x-2}{x^2}$$

$$\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x}$$

$$\frac{x+8}{4x^2}$$

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+4x}$$

29 **اكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثمَّ أصحِّحْهُ.

$$\begin{aligned} &= \frac{x+2}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x^2+x-2} \\ &= \frac{x+2}{x-2} \times \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2}{-1} \end{aligned}$$

X

30 **تحدّ:** هل يُعَدُّ المقدار $x-2y$ مُكافئاً للمقدار $\frac{1}{\frac{x^2-4y^2}{x+2y}}$ ؟ أبرِّرْ إجابتي

جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها Adding and Subtracting Rational Algebraic Expressions

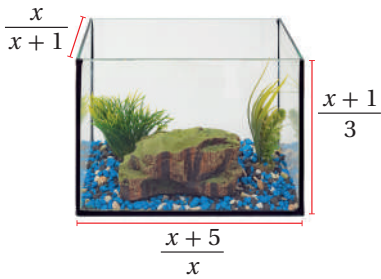
فكرة الدرس



مسألة اليوم



- إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية.
 - جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها.
- يُبين الشكل المجاور حوض أسماك مفتوحاً من الأعلى على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده مُبيّنة كما في الشكل. أجد مساحة سطح زجاج الحوض بدلالة x في أبسط صورة.



المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية

تعلّمت سابقاً إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين. والآن سأتعلّم بطريقة مُشابهة كيف أجد المضاعف المشترك الأصغر لحددين وذلك بتحليل كلٍّ منهما تحليلًا كاملاً، ثم كتابة العوامل المُتكرّرة بالصورة الأسّيّة، عندئذ يكون المضاعف المشترك الأصغر (LCM) هو ناتج ضرب جميع قوى العوامل التي لها الأس الأكبر.

يُمكن أيضاً إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين، وذلك بتحليل كلٍّ منهما إلى العوامل، عندئذ يكون المضاعف المشترك الأصغر (LCM) هو ناتج ضرب جميع قوى العوامل التي لها الأس الأكبر.

رموز رياضية

يُرمز إلى المضاعف المشترك الأصغر بالرمز (م. م. أ)، أو بالرمز (LCM)؛ وهو اختصار لجملة (least common multiple).

مثال 1

أجد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير أو الحدود الجبرية المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

1 $6ab, 8a^3, 12ab^5$

الخطوة 1: تحليل الحدود الجبرية تحليلًا كاملاً، ثم كتابة العوامل المُتكرّرة بالصورة الأسّيّة.

$$6ab = 2 \times 3 \times a \times b$$

$$8a^3 = 2^3 \times a^3$$

$$12ab^5 = 2^2 \times 3 \times a \times b^5$$

بتحليل الحدود الجبرية تحليلًا كاملاً، ثم كتابة العوامل المُتكرّرة بالصورة الأسّيّة.

أتذكّر

تحليل الحد الجبري تحليلًا كاملاً يعني كتابته في صورة حاصل ضرب أعداد أوليّة ومُتغيّرات، كلٍّ منها مرفوع إلى الأس 1.

الخطوة 2: إيجاد المضاعف المشترك الأصغر.

$$\text{LCM} = 2^3 \times 3 \times a^3 \times b^5$$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

$$= 24a^3 b^5$$

بالتبسيط

2 $x^4 - 7x^3 + 12x^2, x^2 - 2x - 3$

الخطوة 1: تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها.

$$x^4 - 7x^3 + 12x^2 = x^2 (x-3)(x-4)$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

بتحليل المقادير الجبرية
إلى عواملها

الخطوة 2: إيجاد المضاعف المشترك الأصغر.

$$\text{LCM} = x^2 (x-3)(x-4)(x+1)$$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

أتحقق من فهمي

أجد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير أو الحدود الجبرية المعطاة في كل مما يأتي:

a) $6b^2, 12ab, 18ab^4$

b) $3b^2 - 15b - 18, b^3 - 7b^2 + 6b$

أتعلم

تحليل المقدار الجبري
يعني كتابته في صورة
حاصل ضرب عوامله.

جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

يمكن جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها بطريقة مشابهة تمامًا لطريقة جمع الكسور وطرحها. فعند الجمع أو الطرح لمقادير جبريين نسبيين متساويين في المقام، يُجمع البسطان أو يُطرح حان، ويبقى المقام المشترك، ثم يُبسّط الناتج إن كان ذلك ضروريًا.

جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

مفهوم أساسي

بالكلمات: لجمع مقادير جبريين نسبيين لهما المقام نفسه أو طرحهما، يُجمع البسطان أو يُطرح حان.

بالرموز: إذا كانت a, b, c مقادير جبرية، حيث: $c \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{3x}{y+2} + \frac{x}{y+2} = \frac{3x+x}{y+2} = \frac{4x}{y+2}$$

مثال:

يُمْكِنُ أَيْضًا الْجَمْعُ أَوْ الطَّرْحُ لمقدارين جبريين نسبين غير متساويين في المقام، وذلك بتوحيد المقامين أولًا عن طريق إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامين، ثم ضرب البسط والمقام لكل مقدار جبري نسبي في العوامل اللازمة لجعل المقام مساويًا للمضاعف المشترك الأصغر، ثم تبسيط الناتج إن كان ذلك ضروريًا.

مثال 2

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{y}{x(y-1)} - \frac{1}{x(y-1)}$$

$$\frac{y}{x(y-1)} - \frac{1}{x(y-1)} = \frac{y-1}{x(y-1)}$$

بجمع البسطين

$$= \frac{\cancel{y-1}}{x(\cancel{y-1})} = \frac{1}{x}$$

بالتبسيط

$$2 \quad \frac{2x}{3y^3} + \frac{5b}{6x^2y}$$

$$\frac{2x}{3y^3} + \frac{5b}{6x^2y} = \frac{2x}{3y^3} \times \frac{2x^2}{2x^2} + \frac{5b}{6x^2y} \times \frac{y^2}{y^2}$$

بتوحيد المقامين باستعمال المضاعف المشترك الأصغر لهما، وهو: $6x^2y^3$

$$= \frac{4x^3}{6x^2y^3} + \frac{5by^2}{6x^2y^3}$$

بالضرب

$$= \frac{4x^3 + 5by^2}{6x^2y^3}$$

بجمع البسطين

$$3 \quad \frac{3x-2}{x^2+4x-12} - \frac{5}{2x+12}$$

$$\frac{3x-2}{x^2+4x-12} - \frac{5}{2x+12} = \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} - \frac{5}{2(x+6)}$$

بتحليل المقامين إلى عواملهما

$$= \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} \times \frac{2}{2} - \frac{5}{2(x+6)} \times \frac{x-2}{x-2}$$

بتوحيد المقامات باستعمال المضاعف المشترك الأصغر لهما، وهو: $2(x+6)(x-2)$

$$= \frac{6x-4-5x+10}{2(x+6)(x-2)}$$

بطرح البسطين

$$= \frac{x+6}{2(x+6)(x-2)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{x+6}{2(x+6)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{2(x-2)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $(x+6)$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{2x}{x^2(2x+5)} + \frac{5}{x^2(5+2x)}$

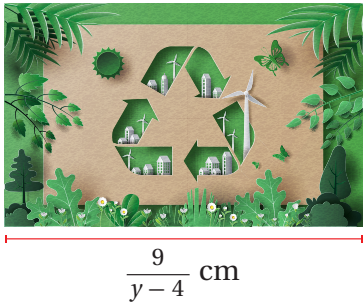
b) $\frac{5y}{6b^2a} + \frac{3b^2}{8a^2}$

c) $\frac{5}{8x+8} + \frac{x-4}{12x^2+4x-8}$

أذكر

لكتابة مقدار جبري نسبي
في أبسط صورة، أقيم
البسط والمقام على
العوامل المشتركة.

مثال 3 : من الحياة



$$\frac{y}{y+5} \text{ cm}$$

$$\frac{9}{y-4} \text{ cm}$$

بيئة: صممت ميساء مُلصقاً على شكل
مستطيل للتوعية بأهمية إعادة التدوير،
وكانت أبعاده كما في الشكل المُجاور.
ترغب ميساء في إحاطة المُلصق بإطار.
أجد طول الإطار اللازم لذلك بدلالة y في
أبسط صورة.

لأيجاد طول الإطار، أجد محيط المُلصق:

صيغة محيط المستطيل

$$l = \frac{9}{y-4}, w = \frac{y}{y+5} \text{ بتعويض}$$

بالتبسيط

$$P = 2l + 2w$$

$$= 2 \left(\frac{9}{y-4} \right) + 2 \left(\frac{y}{y+5} \right)$$

$$= \frac{18}{y-4} + \frac{2y}{y+5}$$

$$= \frac{18}{y-4} \times \frac{y+5}{y+5} + \frac{2y}{y+5} \times \frac{y-4}{y-4} \quad \text{بتوحيد المقامات باستعمال المضاعف المشترك الأصغر لها، وهو: } (y+5)(y-4)$$

$$= \frac{2y^2 - 8y + 18y + 90}{(y+5)(y-4)}$$

$$= \frac{2y^2 + 10y + 90}{(y+5)(y-4)}$$

بجمع البسطين

بالتبسيط

$$\therefore \text{ إذن، طول الإطار اللازم لإحاطة المُلصق به هو: } \frac{2y^2 + 10y + 90}{(y+5)(y-4)} \text{ cm}$$

أفكر

هل يمكنني تحليل:
 $2y^2 + 10y + 90$

أنتحق من فهمي

معلومة

تحتفل منظمّة الصّحة العالمية في 31 أيار من كلّ عام باليوم العالميّ للامتناع عن التدخين، وتحرص في هذا اليوم على إبراز المخاطر الصحيّة المرتبطة بالتدخين، داعيةً إلى سنّ تشريعات فاعلة للحدّ من استهلاكه.



$$\frac{9}{x-3} \text{ cm}$$

$$\frac{2x}{x+1} \text{ cm}$$

صحة: صمّم خالد ملصقاً على شكل مستطيل للتوعية بأضرار التدخين في اليوم العالميّ للامتناع عن التدخين، وكانت أبعاده كما في الشكل المجاور. يرغب خالد في إحاطة الملصق بإطار. أجد طول الإطار اللازم لذلك بدلالة x في أبسط صورة.

تبسيط الكسر المركّب

تعلّمت في الدرس السابق تبسيط الكسر المركّب الذي يحتوي بسطه أو مقامه أو كلاهما على مقدار جبري نسبي. والآن سأتعلّم كيف أبسط الكسر المركّب الذي يحتوي بسطه أو مقامه أو كلاهما على عملية جمع أو عملية طرح، وذلك بطريقتين؛ إحداهما: كتابة كلّ من البسط والمقام أو كليهما في صورة كسر واحد (إن لزم). والأخرى: إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات التي في البسط والمقام جميعها، ثم ضرب كلّ من بسط المقادير الجبري النسبي ومقامه في المضاعف المشترك الأصغر، والتبسيط.

مثال 4

$$\text{أبسط المقدار الآتي: } \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{1}{x} + 2}$$

الطريقة 1: أبسط المقدار بكتابة كلّ من البسط والمقام في صورة كسر واحد.

$$\frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x-y}{y}}{\frac{1+2x}{x}}$$

$$= \frac{x-y}{y} \div \frac{1+2x}{x}$$

المضاعف المشترك الأصغر لمقامي البسط هو y

المضاعف المشترك الأصغر لمقامي المقام هو x

بتبسيط كلّ من البسط والمقام

بكتابة الكسر المركّب في صورة قسمة مقدارين نسبيين

$$= \frac{x-y}{y} \times \frac{x}{1+2x}$$

بالضرب في النظير الضربي للمقسوم عليه

$$= \frac{x^2 - xy}{y + 2xy}$$

بالتبسيط

الطريقة 2: أبسط المقدار بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمقامات البسط والمقام.

$$\frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{1}{x} + 2} \times \frac{xy}{xy}$$

بضرب البسط والمقام في المضاعف المشترك الأصغر لجميع المقامات التي في البسط والمقام، وهو: xy

$$= \frac{x^2 - xy}{y + 2xy}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

$$\text{أبسط المقدار الآتي: } \frac{2 + \frac{1}{y}}{\frac{4}{x} - \frac{3}{y}}$$



أَتَدَرَّبُ وَأُحَلِّقُ الْمَسَائِلَ



أجد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير أو الحدود الجبرية المعطاة في كل مما يأتي:

1 $4mt^2, 8m^3t, 12m^4t$

2 $x^2 + 2x - 15, x^2 + 6x + 5$

3 $c^3 + 5c^2 + 4c, c(c+1)^2$

4 $9x^2 - 16, 3x^2 + x - 4$

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

5 $\frac{6y}{3x^3} + \frac{2}{7y^2x}$

6 $\frac{b}{b+3} + \frac{5}{b-2}$

7 $\frac{m}{2m-14} + \frac{m^2}{m^2-49}$

8 $\frac{1}{4x^2-12x+9} - \frac{x}{2x^2-x-3}$

9 $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+2}{x-1}$

10 $3s^2 - \frac{s+1}{s^2-1}$

11 $\frac{2}{6z-9} - \frac{z+1}{2z^2-3z}$

12 $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-x}$

13 $\frac{3w-1}{2w^2+w-3} - \frac{2-w}{w-1}$

14 $\frac{x+2}{x^2+3x-10} + \frac{3}{2-x}$

15 $\frac{2p+3}{p^2-7p+12} - \frac{2}{p-3}$

16 $\frac{3c+1}{c-1} + \frac{c+1}{c^2-4c+3} \div \frac{c-1}{c-3}$

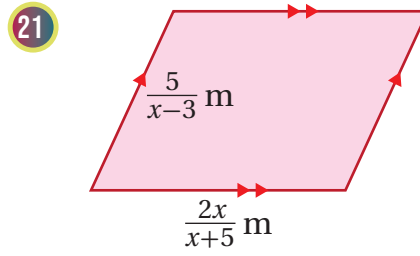
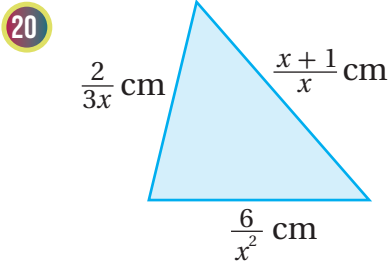
أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

17 $\frac{6 + \frac{a}{b}}{2 - \frac{6}{b}}$

18 $\frac{\frac{6}{x-4} - \frac{x}{2x+3}}{\frac{2}{2x+3} + \frac{2x}{x-4}}$

19 $\frac{\frac{x}{x-2} + 1}{\frac{3}{x^2-4} - 1}$

أجد محيط كل من الشكلين الآتين:



22 **رحلة:** قرّر مهندس الذهاب في رحلة بحافلة تسير بسرعة (x) km/h، وتقطع مسافة 60 km، ثم إكمال الرحلة بسيارة تسير بسرعة $(x + 20)$ km/h، وتقطع مسافة 140 km. أكتب الزمن الذي سيستغرقه مهندس في الحافلة والسيارة في صورة مقدار جبري نسبي في أبسط صورة.

23 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه.

$$\frac{y}{y+1} + \frac{7}{y-3} = \frac{y+7}{(y+1)(y-3)}$$



25 **مسألة مفتوحة:** أجد مقدارين جبريين ناتج طرحهما هو $\frac{x-1}{x+3}$.

26 **تبرير:** مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه هو $\frac{7}{6(x-3)} - \frac{1}{x-3}$. تمدد المثلث محافظاً على شكله، فأصبح طول ضلعه هو $\frac{x^2}{x-3} - \frac{5}{6(x-3)}$. أجد معامل التكبير بدلالة x في أبسط صورة، مبرراً إجابتي.

27 تحدّد أبسط المقدار الآتي: $\frac{x}{1 - (1 + \frac{1}{x})^{-1}}$

الدرس 3

حلُّ المعادلات النسبية Solving Rational Equations

• حلُّ معادلاتٍ نسبية.

المعادلة النسبية.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



يُنتِجُ مصنعُ سبائكٍ من النحاسِ والفضّة، نسبةُ الفضةِ فيها هي 5 : 2. كم غراماً من الفضةِ يجبُ إضافتها إلى خليطٍ من النحاسِ والفضّة، كتلته 800 g، ومقدارُ الفضةِ فيه 200 g؛ لكي تكون النسبةُ اللازمةُ لصنع السبيكة هي 5 : 2؟

حلُّ المعادلاتِ النسبيةِ بالضربِ التبادليِّ

يُطلَقُ على المعادلةِ التي تحوي مقداراً جبريّاً نسبياً أو أكثر اسمُ **المعادلةِ النسبيةِ** (rational equation)، ومن أمثلتها:

$$\frac{x+3}{x-2} = 6, \quad \frac{1}{x+4} = \frac{5}{2x-3}, \quad \frac{x}{x+6} = \frac{72}{x^2-36} + 5$$

يُمكنُ استعمالُ الضربِ التبادليِّ لحلِّ المعادلاتِ النسبيةِ إذا كانت كلُّ منها في صورةٍ تناسبٍ فقط.

أندكّر

في أيِّ تناسبٍ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ،
حيثُ: $b \neq 0, d \neq 0$
فإنَّ حاصلَ ضربِ طرفيِ
التناسبِ يكونُ مُساوياً
لحاصلِ ضربِ وسطيِّ
التناسبِ: $a \times d = b \times c$ ،
وتُسمّى هذه الخاصيةُ
الضربِ التبادليِّ.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$$

مثال 1

أحلُّ كلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:

$$1 \quad \frac{4}{x+1} = \frac{6}{x-1}$$

$$\frac{4}{x+1} = \frac{6}{x-1}$$

المعادلةُ الأصليةُ

$$6(x+1) = 4(x-1)$$

بالضربِ التبادليِّ

$$6x + 6 = 4x - 4$$

باستعمالِ خاصيةِ التوزيع

$$2x = -10$$

بالتبسيط

$$x = -5$$

بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوض قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$\frac{4}{x+1} = \frac{6}{x-1}$$

$$\frac{4}{-5+1} \stackrel{?}{=} \frac{6}{-5-1}$$

$$-1 = -1 \quad \checkmark$$

المعادلة الأصلية

بتعويض $x = -5$

بالتبسيط

إذن، حل المعادلة هو: $x = -5$.

2 $\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$

$$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$$

$$x(x-2) = 35$$

$$x^2 - 2x = 35$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$(x-7)(x+5) = 0$$

$$x-7 = 0 \quad \text{or} \quad x+5 = 0$$

$$x = 7$$

$$x = -5$$

المعادلة الأصلية

بالضرب التبادلي

باستعمال خاصية التوزيع

بطرح 35 من طرفي المعادلة

بالتحليل إلى العوامل

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوض قيمتي x الناتجتين في المعادلة الأصلية.

عندما $x = -5$:

$$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$$

$$\frac{7}{-5} \stackrel{?}{=} \frac{-5-2}{5}$$

$$-\frac{7}{5} = -\frac{7}{5} \quad \checkmark$$

عندما $x = 7$:

$$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$$

$$\frac{7}{7} \stackrel{?}{=} \frac{7-2}{5}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

إذن، حل المعادلة هو: $x = -5$ و $x = 7$.

أتحقق من فهمي

أحل كل معادلة مما يأتي:

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-2}$

b) $\frac{4}{x+4} = \frac{x}{x+1}$

الدعم البياني:

أستعمل برمجية جيوجبرا

للتحقق من صحة الحل،

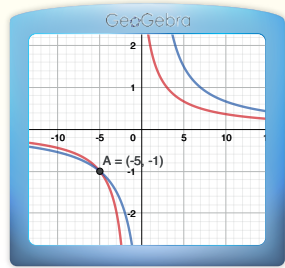
وذلك بتمثيل كل من المعادلة:

$$y = \frac{4}{x+1}$$

$$y = \frac{6}{x-1}$$

أن منحنىي المعادلتين

يتقاطعان عندما $x = -5$.



الدعم البياني:

أستعمل برمجية جيوجبرا

للتحقق من صحة الحل،

وذلك بتمثيل كل من

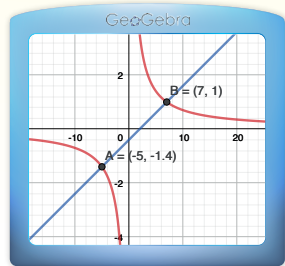
$$y = \frac{7}{x}$$

$$y = \frac{x-2}{5}$$

أن منحنىي المعادلتين

يتقاطعان عندما $x = -5$ ،

و $x = 7$.



إضافةً إلى حلّ المعادلات النسبية، يُمكن استعمال مفهوم النسبة في كثير من التطبيقات الحياتية.

أندكّر

النسبة هي طريقة لمقارنة عددٍ بآخر، أو مقارنة كميةٍ بأخرى.
تُكتب النسبة بثلاث طرائق مختلفة، هي:
 $a : b$ ، $\frac{a}{b}$ ، إلى b .

مثال 2: من الحياة



طلاء: تُخلط الألوان بنسب مُحددة وصولاً إلى الدرجة المطلوبة من لونٍ مُعين. أعدّ سعيدٌ خليطاً من الألوان بمزج مكيالين من اللون الأزرق بمكيالين من اللون الأخضر. إذا كانت درجة اللون التي يرغب سعيدٌ في الحصول عليها مشروطة بأن تكون نسبة اللون الأزرق إلى الخليط هي 3 : 4، فأجد عدد مكيالين اللون الأزرق التي يتعين على سعيدٍ إضافتها إلى الخليط لكي يحصل على الدرجة المطلوبة من اللون.

أفترض أن x هو عدد مكيالين اللون الأزرق التي يجب إضافتها إلى الخليط لإيجاد النسبة المطلوبة.
ومن ثم، فإن:

عدد مكيالين اللون الأزرق

$$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$$

نسبة اللون الأزرق في الخليط

عدد المكيالين الكلي

لإيجاد عدد مكيالين اللون الأزرق التي يجب إضافتها إلى الخليط، يجب حلّ المعادلة النسبية أعلاه:

$$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$$

المعادلة الأصلية

$$3(x+4) = 4(x+2)$$

بالضرب التبادلي

$$3x + 12 = 4x + 8$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$x = 4$$

بالتبسيط

أتحقق: للتحقق من صحة الحلّ، أعوّض قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$$

المعادلة الأصلية

$$\frac{4+2}{4+4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

بتعويض $x = 4$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

بالتبسيط

إذن، يتعين على سعيدٍ إضافة 4 مكيالين من اللون الأزرق إلى الخليط لكي يحصل على الدرجة المطلوبة من اللون.

معلومة

يُطلق على اللون الناتج من خلط اللون الأزرق واللون الأخضر اسم اللون الفيروزي، ويُمكن خلط نسبٍ مختلفة من هذين اللونين للحصول على بعض درجات (ظلال) اللون الفيروزي.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

طلاب: وُضِعَ في خِلاطٍ متَجَرٍّ للطلاءِ مكيالٌ من اللونِ الأحمرِ و4 مكيالٍ من اللونِ الأصفرِ لإنتاجِ لونٍ مُعَيَّن. إذا كانتْ درجةُ هذا اللونِ مشروطةً بأنْ تكونَ نسبةُ اللونِ الأحمرِ إلى الخليطِ هي 3 : 1، فأجِدْ عددَ مكيالِ اللونِ الأحمرِ التي يتعيَّنُ إضافتها إلى الخليطِ للحصولِ على الدرجة المطلوبة من اللونِ.



حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

تعلَّمتُ في المثالِ السابقِ حَلَّ المعادلةِ النسبيةِ التي تكونُ في صورةٍ تناسبٍ باستعمالِ الضربِ التبادليِّ. والآنَ سأتعلمُ كيفَ أُحَلُّ المعادلةَ النسبيةَ التي لا تكونُ في صورةٍ تناسبٍ، وذلكَ بضربِ طرفي هذه المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ؛ تخلصاً من هذه المقاماتِ.

في بعضِ الأحيان، تظهرُ حلولٌ دخيلةٌ عندَ ضربِ طرفي المعادلةِ النسبيةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ؛ لذا يجبُ التحققُ دائماً من تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الأصليةِ.

أَتَعَلَّمُ

الحلُّ الدخيلُ هو حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ. ومن المُلَاحَظَةِ في المعادلاتِ النسبيةِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يجعلُ أحدَ مقاماتِ المعادلةِ صفراً.

مثال 3

أُحَلُّ كُلَّ معادلةٍ ممَّا يأتي:

$$1 \quad \frac{2}{x-1} + \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

المعادلةُ الأصليةُ

$$20(x-1) \times \frac{2}{x-1} + 20(x-1) \times \frac{3}{4} = 20(x-1) \times \frac{7}{20}$$

بضربِ طرفي المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهو: $20(x-1)$

$$40 + 15x - 15 = 7x - 7$$

بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ

$$25 + 15x = 7x - 7$$

بالتبسيطِ

$$8x = -32$$

بالتبسيطِ

$$x = -4$$

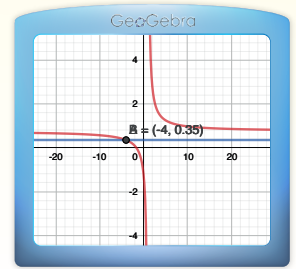
بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 8

أُفَكِّرُ

هل يُمكنُ حَلُّ الفرعِ 1 من المثالِ 3 بطريقةٍ أخرى؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

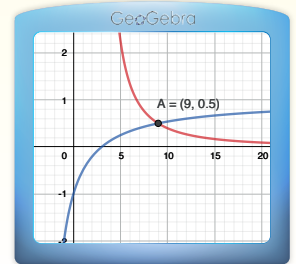
الدعم البياني:

أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{4}$ ، والمعادلة: $y = \frac{7}{20}$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = -4$.



الدعم البياني:

أستعمل برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة الحل، وذلك بتمثيل كل من المعادلة: $y = \frac{36}{x^2-9}$ ، والمعادلة: $y = \frac{2x}{x+3}$ بيانياً، وملاحظة أن منحنىي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 9$.



أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوض قيمة x الناتجة في المعادلة الأصلية.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

المعادلة الأصلية

$$\frac{2}{-4-1} + \frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{7}{20}$$

بتعويض $x = -4$

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{20} \quad \checkmark$$

بالتبسيط

إذن، حل المعادلة هو: $x = -4$.

$$2 \quad \frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$$

$$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$$

المعادلة الأصلية

$$(x-3)(x+3) \times \frac{36}{x^2-9} = (x-3)(x+3) \times \frac{2x}{x+3} - (x-3)(x+3) \times 1$$

بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات، وهو: $(x-3)(x+3)$

$$36 = 2x(x-3) - (x+3)(x-3)$$

بالقسمة على العوامل المشتركة

$$36 = x^2 - 6x + 9$$

بالتبسيط

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

بالتبسيط

$$(x-9)(x+3) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x-9 = 0 \quad \text{or} \quad x+3 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 9$$

$$x = -3$$

بحل كل معادلة

أتحقق: للتحقق من صحة الحل، أعوض قيمتي x الناتجتين في المعادلة الأصلية.

عندما $x = -3$:

$$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$$

$$\frac{36}{(-3)^2-9} \stackrel{?}{=} \frac{2(-3)}{(-3)+3} - 1$$

$$\frac{36}{0} \neq \frac{-6}{0} - 1 \quad \times$$

عندما $x = 9$:

$$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$$

$$\frac{36}{(9)^2-9} \stackrel{?}{=} \frac{2(9)}{(9)+3} - 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

إذن، حل المعادلة هو: $x = 9$.

أتحقق من فهمي

أحل كل معادلة مما يأتي:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{3x-1} = \frac{x}{3x^2 - 7x + 2}$

تتطلب تطبيقات حياتية عدّة تحديد الزمن اللازم لإنجاز عملٍ مُعيّن؛ ما يُحتّم تحديد مُعدّل إنجاز العمل، ثم استعمال مُعدّل الوحدة لكتابة معادلة نسبية ثم حلّها.

أذكّر

المُعدّل هو نسبة يُقارَن فيها بين كمّيتين مختلفتين في الوحدة. أمّا مُعدّل الوحدة فهو تبسيط المُعدّل ليُصبح مقامه وحدة واحدة.

مثال 4: من الحياة



أعمال منزلية: يستغرق تنظيف المنزل من رغد وزوجها أحمد 4 ساعات من العمل. إذا كانت سرعة رغد هي مثلي سرعة أحمد في التنظيف، فأجد الوقت الذي تستغرقه رغد في تنظيف المنزل وحدها.

الخطوة 1: أجد مُعدّل إنجاز العمل لكل من رغد وأحمد.

- أفترض أن x هو عدد الساعات التي يستغرقها أحمد في تنظيف المنزل وحده. وبما أن أحمد يُنظف المنزل في x ساعة، فإنه يُنظف $\frac{1}{x}$ من المنزل في الساعة الواحدة.
- بما أن سرعة رغد هي مثلاً سرعة أحمد، فإنها تُنظف $\frac{2}{x}$ من المنزل في الساعة الواحدة.
- بما أن رغد وأحمد يُنظفان المنزل في 4 ساعات إذا عملا معاً، فإنهما يُنظفان $\frac{1}{4}$ المنزل في الساعة الواحدة.

الخطوة 2: أكتب معادلة تمثّل مُعدّل إنجازهما العمل معاً، ثم أحلّها.

بما أن رغد وأحمد يُنظفان معاً $\frac{1}{4}$ المنزل في الساعة الواحدة، فإنه يُمكنني كتابة المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

بحلّ المعادلة، يُمكن إيجاد عدد الساعات التي يستغرقها أحمد في تنظيف المنزل وحده:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

المعادلة الأصلية

$$4x \times \frac{3}{x} = 4x \times \frac{1}{4}$$

بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات، وهو: $4x$

$$x = 12$$

بالقسمة على العوامل المشتركة

معلومة

كان النبي صلى الله عليه وسلم المثل والقُدوة مع أهله في بيته؛ فقد سُئِلَت السيدة عائشة رضي الله عنها: ما كان يصنع النبي في بيته؟ فقالت: كان يكون في مهنة أهله (تعني خدمة أهله)، فإذا حضرت الصلاة خرج إلى الصلاة. رواه البخاري.

وبذلك، فإنَّ أحمدَ بحاجةٍ إلى 12 ساعةً من العملِ لتنظيفِ المنزلِ.
بما أنَّ سرعةَ رغدَ في التنظيفِ هيَ مثلاً سرعةَ أحمدَ، فإنَّها بحاجةٍ إلى 6 ساعاتٍ من العملِ
لتنظيفِ المنزلِ وحدها.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

جدارٌ: يتعيَّنُ على يوسفَ وإبراهيمَ العملَ 6 ساعاتٍ لطلاءِ جدارٍ في حديقةٍ منزليةٍ. إذا كانتْ
سرعةُ يوسفَ هيَ ثلاثة أمثالِ سرعةِ إبراهيمَ في إنجازِ العملِ، فأجدُ الوقتَ الذي يستغرقُهُ
يوسفُ في طلاءِ الجدارِ وحدهُ.

أَتَدَرَّبُ وَأُحَلِّ المسائلَ

أحلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتية:

$$1 \quad \frac{3y}{y+1} = \frac{y}{3-y}$$

$$2 \quad \frac{2}{x+5} = \frac{10}{3x+7}$$

$$3 \quad \frac{6}{y-1} = \frac{y}{7}$$

$$4 \quad \frac{9}{y-1} = \frac{3y}{2}$$

$$5 \quad \frac{w}{w+1} = \frac{2w}{w+6}$$

$$6 \quad \frac{x^2+4}{x-1} = \frac{5}{x-1}$$



7 أشجارٌ: تحتوي مزرعةٌ للحمضيات على 120 شجرةً، منها 30 شجرةً ليمونٍ.
أجدُ عددَ أشجارِ الليمونِ التي يلزُمُ زراعتها لتُصيَحَ نسبةُ أشجارِ الليمونِ في
المزرعةِ 3 : 1.

أحلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتية:

$$8 \quad \frac{4}{y} + \frac{3}{8} = \frac{6}{y}$$

$$9 \quad \frac{4}{y-2} - 1 = \frac{9}{y}$$

$$10 \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{z-4} = \frac{z-3}{z-4}$$

$$11 \quad \frac{3}{x-2} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2-4}$$

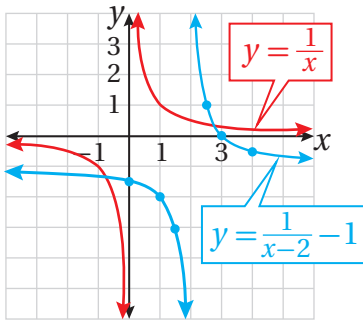
$$12 \quad \frac{x^2-3x-4}{x^3-x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$$

$$13 \quad 10 + \frac{14}{1-x} = \frac{12}{1-x^2}$$

$$14 \quad \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x^2+5x} = \frac{4}{x^2+5x}$$

$$15 \quad 1 = \frac{n-2}{n-1} + \frac{3}{n^2+3n-4}$$

$$16 \quad \frac{16}{x-5} = 2 - \frac{6}{x}$$



يُبين الشكل المُجاوِر التمثيل البياني لمنحنى كلٍّ من المعادلة: $y = \frac{1}{x}$ ،
والمعادلة: $y = \frac{1}{x-2} - 1$.

17 أكتب معادلة حلّها هو الإحداثي x لنقطة تقاطع منحنَي المعادلتين.

18 أحلّ المعادلة التي كتبتها في الفرع السابق جبرياً.



19 **مسبح:** يستغرق ملء مسبح بالماء 45 دقيقة باستعمال

خرطوم المياه الأزرق، في حين يستغرق ملئه بالماء 20

دقيقة باستعمال هذا الخرطوم وخرطوم المياه ذي اللون

الأسود معاً. أجد عدد الدقائق التي يستغرقها الخرطوم

الأسود في ملء المسبح بالماء.

20 أحلّ المسألة الواردة بداية الدرس.



مهارات التفكير العليا



21 **مسألة مفتوحة:** أكتب معادلةً نسبيةً يمكن حلّها بضرب طرفي المعادلة في $3(x-1)$.

22 **أكتشف الخطأ:** يمثّل التالي الخطوة الأولى من حلّ ديمة لمعادلة نسبية. أكتشف الخطأ في هذه الخطوة، ثمّ أصحّحه.

$$\frac{2x-1}{x} + 6 = \frac{3x+4}{5x-2}$$

$$x(5x-2) \times \frac{2x-1}{x} + 6 = x(5x-2) \times \frac{3x+4}{5x-2}$$



23 **تبرير:** هل يمكن حلّ المعادلة: $\frac{6x}{x+4} + 4 = \frac{2x+2}{x-1}$ باستعمال الضرب التبادلي؟ أبرر إجابتي.

24 **تحدّ:** أحلّ المعادلة الآتية: $0 = \frac{\frac{x+3}{x-2} \times \frac{x^2+x-2}{x+5}}{x-1} + 2$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المقدار الجبري النسبي الذي في أبسط صورة هو:

- a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ b) $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 2x - 3}$
c) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}$ d) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}$

2 مكعب طول ضلعه $2x$ وحدة. النسبة بين مساحة سطحه الكلية وحجمه في أبسط صورة هي:

- a) $\frac{6}{x^2}$ b) $\frac{3}{2x}$
c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{3}{x}$

3 أبسط صورة للمقدار $\frac{2w+8}{3} \times \frac{6}{w^2+6w+8}$ هي:

- a) $\frac{4}{w+2}$ b) $\frac{2}{3(w+2)}$
c) $\frac{4(w+4)}{w+2}$ d) $\frac{2}{w+2}$

4 أبسط صورة للمقدار $\frac{x-3}{6x^2} \div \frac{x-3}{2x}$ هي:

- a) $\frac{1}{6x}$ b) $3x$
c) $\frac{1}{3x}$ d) $\frac{1}{3x^2}$

5 أبسط صورة للمقدار $\frac{5}{6cd} + \frac{c}{8d^2}$ هي:

- a) $\frac{5+c}{6cd+8d^2}$ b) $\frac{20d+c^2}{24cd^2}$
c) $\frac{5d+3c^2}{24cd^2}$ d) $\frac{20d+3c^2}{24cd^2}$

6 حل المعادلة: $\frac{x}{x+2} = \frac{4}{x+6}$ هو:

- a) $x = -4, 2$ b) $x = -4, 0$
c) $x = 4, -2$ d) $x = -2, -6$

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

7 $\frac{2x^2 - 10x + 8}{3x^2 - 7x + 4}$ 8 $\frac{7x^3 - 32x^2 + 16x}{4x - 16}$

9 $\frac{8y^3 + 1}{2y^2 + 21y + 10}$

10 $\frac{x^2 + 3x + 2}{4x - 12} \times \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

11 $\frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 20} \times \frac{x^2 - 8x + 16}{3x + 9}$

12 $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x + 2} \div \frac{6x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$

13 $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5} \times \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 + x - 6} \div \frac{8x + 20}{6x + 15}$

14 $\frac{2x + 7}{x^2 - 2x - 3} + \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 5}$

15 $\frac{x + 1}{x - 4} - \frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12}$

16 $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + 5x + 4}$

17 $\frac{2r}{r^2 - s^2} + \frac{1}{r + s} - \frac{1}{r - s}$

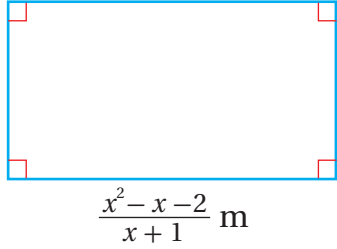
18 $\frac{n - 7}{n^2 - 2n - 35} \div \frac{9n + 54}{10n + 50}$

19 $\frac{10x^2 - 20x}{40x^3 - 80x^2} \times \frac{16x^3 + 80x^2}{6x + 30}$

20 $\frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x}}$ 21 $\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{3} + \frac{4}{x-1}}$

تدريب على الاختبارات الدولية

- 26 يُمثل الشكل التالي ملعباً لكرة القدم مساحته: $x^2 - 4$.
المقدار الجبري الذي يمثل عرض الملعب هو:



- a) $x - 2$ b) $(x + 2)(x - 2)^2$
c) $x + 2$ d) $(x + 2)(x - 2)$

- 27 أبسط صورة للمقدار $\frac{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}}{1 + \frac{4}{b}}$ هي:

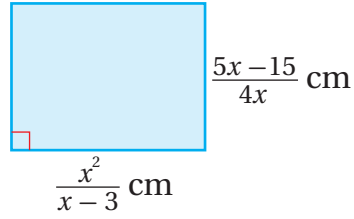
- a) $\frac{b + 2a}{ab + 4}$ b) $\frac{b + 2a}{a(b + 4)}$
c) $\frac{ab + 2a}{a(b + 4)}$ d) $\frac{ab + 2}{a(b + 4)}$

- 28 عدد حلول المعادلة: $\frac{5}{x - 2} = \frac{x}{3}$ هو:

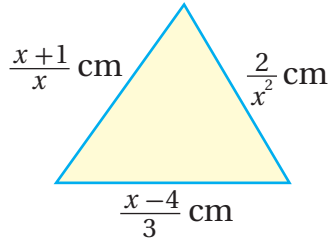
- (a) حل واحد. (b) حلان.
(c) ثلاثة حلول. (d) لا توجد حلول للمعادلة.

- 29 يستغرق العامل الماهر 26 ساعة في بناء سقف أحد المنازل، في حين يستغرق العامل المبتدئ 39 ساعة في بناء السقف نفسه. إلى كم ساعة يحتاج العاملان لبناء سقف المنزل معاً؟

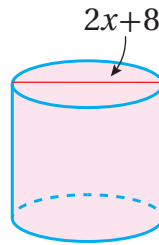
- 22 أجد مساحة المستطيل التالي بدلالة x في أبسط صورة.



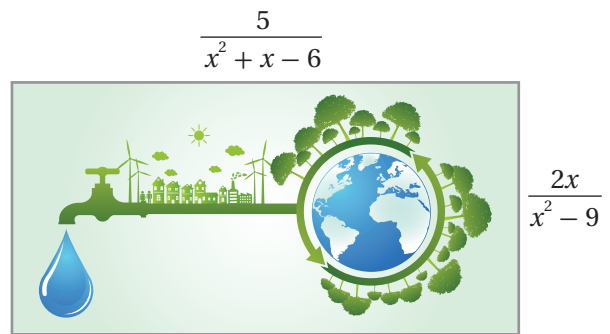
- 23 أجد محيط المثلث المجاور بدلالة x في أبسط صورة.



- 24 إذا كان حجم الأسطوانة المجاورة هو $(x+4)(x^2 + 2x - 8)\pi \text{ cm}^3$ ، فأجد ارتفاع الأسطوانة بدلالة x في أبسط صورة.



- 25 صممت أحلام مُلصقاً على شكل مستطيل للتوعية بأهمية ترشيد استهلاك المياه، وكانت أبعاده كما في الشكل التالي. ترغب أحلام في إحاطة المُلصق بإطار. أجد طول الإطار اللازم لذلك بدلالة x في أبسط صورة.



ما أهمية هذه الوحدة؟

تُقدِّم هذه الوحدة مجموعةً من موضوعات الإحصاء والاحتمالات التي يُعدُّ اكتسابها ضروريًا لكلِّ إنسانٍ في هذا العصر، مثل: تنظيم البيانات، وتحليلها، واستعمال قوانين الاحتمالات لوضع استنتاجات دقيقة عنها؛ ما يساعد على اتخاذ قرارات صحيحة في كثير من مجالات الحياة اليومية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد مقاييس التشتُّت لبيانات مفردة، وأخرى مُنظَّمة في جداول تكرارية.
- تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات.
- تقدير مقاييس النزعة المركزية للجداول التكرارية ذات الفئات.
- إيجاد الاحتمال باستعمال أشكال فن، وإيجاد احتمالات هندسية.

تعلَّمت سابقًا:

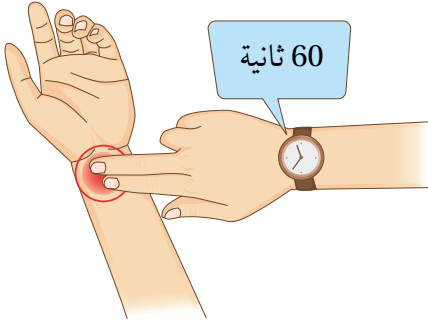
- ✓ إيجاد مقاييس النزعة المركزية لبيانات مفردة.
- ✓ تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات معطاة، ثمَّ تمثيلها في مخططات تكرارية.
- ✓ تمثيل البيانات بأشكال فن.
- ✓ إيجاد احتمالات وقوع الحوادث.

جمع بيانات عن عدد من الأشخاص، وتنظيمها، وتحليلها.

فكرة المشروع



خطوات تنفيذ المشروع:



1 أطلب إلى 40 شخصاً (نصفهم من الذكور، ونصفهم الآخر من الإناث) قياس عدد دقات قلوبهم في الدقيقة الواحدة، وتحديد اليد التي يكتبون بها، وبيان إذا كانوا يرتدون نظارات أم لا.

2 أجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لعدد دقات القلب لكل من الذكور والإناث.

3 أجد الانحراف المعياري والتباين لعدد دقات القلب لكل من الذكور والإناث.

4 أنظم بيانات عدد دقات القلب لكل من الذكور والإناث في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

5 أقدّر الوسط الحسابي والمنوال لعدد دقات القلب لكل من الذكور والإناث باستعمال الجدولين اللذين أنشأتهما في الخطوة السابقة، ثم أقارن ذلك بالإجابة الدقيقة لكل منهما.

6 أمثل كل من الجدولين التكراريين اللذين أنشأتهما في الخطوة السابقة بمدرج تكراري، ثم أكتب وصفاً للبيانات.

7 أمثل بيانات اليد المستعملة للكتابة، وبيانات ارتداء النظارة في شكل فن.

8 أكتب مجموعة من المسائل الاحتمالية عن حادث اختيار شخص عشوائياً من بين مجموعة من الأشخاص، ثم أطلب إلى بعض زملائي / زميلاتي إجابة هذه المسائل.

عرض النتائج:

- أصمم مطوية أكتب فيها النتائج التي توصلت إليها في هذا المشروع.
- أعرض المطوية أمام طلبة الصف، ثم أقارن نتائجي بنتائجهم.



مقاييس التشتت Measures of Variation

- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة، وأخرى مُنظمة في جداول تكرارية.
- تحديد أثر تحويل البيانات في كل من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



في ما يأتي عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة كل يوم مدة 10 أيام:

3, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 6

(1) أجد تباين عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة.

(2) أجد الانحراف المعياري لعدد أكواب الماء التي شربتها أميرة

في الأيام العشرة

التباين، والانحراف المعياري

أذكر

المدى هو الفرق بين أكبر قيم البيانات وأصغرها. أما المدى الربيعي فهو الفرق بين الربيع الأعلى والربيع الأدنى.

تعلمت سابقاً أن مقاييس التشتت تُستعمل لوصف مقدار تشتت البيانات وتباعدتها. ومن هذه المقاييس: المدى، والمدى الربيعي. ولكن، كل من هذين المقياسين يعتمد على قيم محدّدة من البيانات، لا على القيم جميعها؛ لذا توجد مقاييس أخرى أكثر دقة للتشتت تأخذ جميع قيم البيانات بالاعتبار.

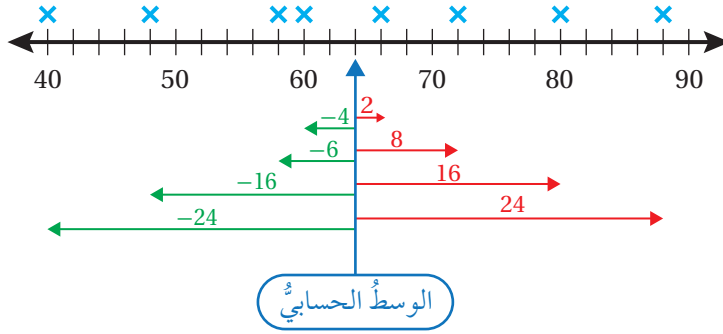
في ما يأتي مجموعة من البيانات، وسطها الحسابي هو: $\bar{x} = 64$.

58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

تُستعمل الصيغة $x - \bar{x}$ لإيجاد انحراف (بُعد) كل مشاهدة من قيم البيانات عن وسطها الحسابي. وبذلك، فإن انحراف قيم البيانات أعلاه عن وسطها الحسابي باستعمال هذه الصيغة هو كما يأتي:

لغة الرياضيات

يُطلق على كل قيمة من القيم في مجموعة البيانات اسم المشاهدة.



عند جمع الانحرافات المُمَيَّنَة في الشكل أعلاه، فإن الناتج يكون كما يأتي:

$$-24 + -16 + -6 + -4 + 2 + 8 + 16 + 24 = 0$$

ألاحظ أن مجموع الانحرافات عن وسطها الحسابي يساوي صفراً، وهذا لا يقتصر على هذه البيانات فقط، وإنما يتحقق في أي مجموعة بيانات عددية؛ لذا، فإن حساب مجموع الانحرافات عن وسطها الحسابي لا يُقدِّم شيئاً عن تشتت البيانات، ولا يُميِّز أي مجموعة بيانات عن أخرى. إلا أن إيجاد مربعات هذه الانحرافات يجعلها موجبة. ولهذا، فإن مجموع الانحرافات عن وسطها الحسابي لا يساوي صفراً.

عند حساب الوسط الحسابي لمربعات الانحرافات، بقسمة مجموعها على عددها، ينتج مقياس مهم من مقياس التشتت يُسمى **التباين** (variance)، ويرمز إليه بالرمز σ^2 . فمثلاً، يمكن حساب تباين مجموعة البيانات أعلاه على النحو الآتي:

$$\sigma^2 = \frac{(-24)^2 + (-16)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 + 24^2}{8} = 223$$

وبأخذ الجذر التربيعي للتباين، ينتج مقياس آخر لتشتت البيانات يُسمى **الانحراف المعياري** (standard deviation).

في هذا الدرس، سَنُنْظِرُ إلى جميع البيانات بوصفها تُمثَل مجتمعةً إحصائياً، يُرمز إلى وسطها الحسابي بالرمز μ ، ويُقرأ: ميُو.

التباين، والانحراف المعياري

مفهوم أساسي

يُعرف تباين مجموعة من البيانات، عددها n ، ووسطها الحسابي μ ، بالصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$$

ويكون الانحراف المعياري لمجموعة البيانات هو الجذر التربيعي للتباين.

أتعلَّم

ألاحظ أن انحراف المشاهدة عن وسطها الحسابي يكون موجباً إذا كانت أكبر من الوسط الحسابي، ويكون سالباً إذا كانت أصغر من الوسط الحسابي.

رموز رياضية

الحرف اليوناني σ يُقرأ: سيجما، وهو يُستعمل للدلالة على الانحراف المعياري. أما الرمز σ^2 فيُقرأ: سيجما تربيع، وهو يُستعمل للدلالة على التباين.

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\sum$ للدلالة على المجموع. وفي قانون التباين، فإنه يُستعمل للدلالة على مجموع مربعات انحرافات البيانات عن وسطها الحسابي بصورة مختصرة، ويُقرأ: سيجما.

مثال 1: من الحياة



تجارة: في ما يأتي عددُ الأجهزة الكهربائية التي بيعت في متجرٍ خلال خمسة أشهرٍ:

18, 22, 21, 25, 24

أجدُ التباينَ لعددِ الأجهزة المباعة في هذه الأشهر.

الخطوة 1: أجدُ الوسط الحسابي للأجهزة المباعة.

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

صيغة الوسط الحسابي

$$= \frac{18 + 22 + 21 + 25 + 24}{5} = 22$$

بالتعويض، والتبسيط

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
18	-4	16
22	0	0
21	-1	1
25	3	9
24	2	4
المجموع		30

الخطوة 2: أنشئُ جدولاً أحسبُ فيه انحراف كل

قيمة عن الوسط الحسابي، إضافةً إلى حسابِ مربعات الفروق.

الخطوة 3: أعوضُ القيم التي توصلتُ إليها بصيغة التباين.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n}$$

صيغة التباين

$$= \frac{30}{5} = 6$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، التباينُ لعددِ الأجهزة المباعة في هذه الأشهر هو 6.

أجدُ الانحراف المعياري لعددِ الأجهزة المباعة في هذه الأشهر.

بما أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، فإن:

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$$

أتعلم

إذا كانت البيانات: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تُمثل عينة عشوائية من مجتمع إحصائي ما، فإن التباين يُرمز إليه بالرمز s^2 ، ويُعرف بأنه:

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

في هذا الدرس، ستُعامل جميع البيانات على أساس أنها تُمثل مجتمعاً إحصائياً. ومن ثم، فإن التباين سيُعرف بالصيغة الواردة في صندوق المفهوم الأساسي السابق.

أتحقق من فهمي



إنترنت: في ما يأتي عدد زائري موقع إلكتروني تعليمي خلال أيام أحد الأسابيع:

103, 115, 124, 125, 171, 165, 170

(a) أجد التباين لعدد زائري الموقع في ذلك الأسبوع.

(b) أجد الانحراف المعياري لعدد زائري الموقع في ذلك الأسبوع.

أتعلم

تُستعمل هذه الصيغة لتسهيل الحسابات في حال كانت قيمة الوسط الحسابي عدداً غير صحيح.

مثال 2

أجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الآتية: 15, 14, 18, 6, 12, 4, 7, 8, 8

لإيجاد التباين، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي.

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{15 + 14 + 18 + 6 + 12 + 4 + 7 + 8 + 8}{9} = \frac{92}{9}$$

صيغة الوسط الحسابي بالتعويض، والتبسيط

أتعلم

ألاحظ أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح؛ لذا يُفضل إيجاد التباين باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

الخطوة 2: أنشئ جدولاً أحسب فيه مُربّع كل مشاهدة.

الخطوة 3: أعوّض القيم التي توصلت إليها بصيغة التباين.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

$$= \frac{1118}{9} - \left(\frac{92}{9}\right)^2$$

$$\approx 19.73$$

الصيغة الثانية للتباين بتعويض $\Sigma x^2 = 1118, \mu = \frac{92}{9}$ باستعمال الآلة الحاسبة

x	x ²
15	225
14	196
18	324
6	36
12	144
4	16
7	49
8	64
8	64
المجموع	1118

بما أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، فإن:

$$\sigma \approx 4.44$$

أتحقق من فهمي

أجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الآتية: 1, 4, 5, 7, 6, 14, 11

التباين والانحراف المعياري لبيانات مُنظمة في جداول تكرارية

تعلمت سابقاً تنظيم بياناتٍ عديدةٍ باستعمال جداول تكرارية. والآن سأتعلم كيف أجد التباين والانحراف المعياري لبياناتٍ مُنظمةٍ في جداول تكرارية.

التباين والانحراف المعياري لبياناتٍ مُنظمةٍ في جداول تكرارية

مفهوم أساسي

يُمكن إيجاد تباين مجموعة من البيانات، عددها n ، ووسطها الحسابي μ ، إذا كانت مُنظمة في جداول تكرارية، حيث f عدد مَرَّات تكرار المشاهدة، باستعمال إحدى الصيغتين الآتيتين:

$$\sigma^2 = \frac{\sum ((x - \mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكون الانحراف المعياري لمجموعة البيانات هو الجذر التربيعي للتباين.

أتذكر

يُمكن إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المُنظمة في جداول تكرارية باستعمال الصيغة الآتية:

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f}$$

حيث f عدد مَرَّات تكرار المشاهدة.

مثال 3: من الحياة



قمصان: يُبين الجدول التالي عدد القمصان الرياضية لمجموعة من طلبة الصف التاسع في إحدى المدارس. أجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

عدد القمصان (x)	1	2	3	4	5	6
التكرار (f)	2	12	45	114	41	16

لإيجاد التباين، أنشئ جدولاً جديداً يحوي الأعمدة المُطلَّلة عناوينها.

x	f	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
1	2	2	1	2
2	12	24	4	48
3	45	135	9	405
4	114	456	16	1824
5	41	205	25	1025
6	16	96	36	576
المجموع	230	918	91	3880

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} = \frac{918}{230}$$

بالتعويض في صيغة الوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

الصيغة الثانية للتباين

$$= \frac{3880}{230} - \left(\frac{918}{230}\right)^2$$

بالتعويض

$$= 0.93905$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، فإن:

$$\sigma \approx 0.969$$

أتحقق من فهمي

عائلة: يُبين الجدول التالي عدد الأخوة والأخوات لمجموعة من طالبات الصف التاسع في مدرسة عائشة. أجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

عدد الأخوة والأخوات	1	2	3	4	5
التكرار (f)	2	4	8	5	1

أتعلم

ألاحظ أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح؛ لذا يُفضل إيجاد التباين باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

تحويل البيانات

تحويل البيانات (data transformation) هو تطبيق عملية حسابية (أو أكثر) على جميع القيم في مجموعة بيانات للحصول على مجموعة أخرى مختلفة. ساستكشف في النشاط المفاهيمي الآتي أثر تحويل البيانات في كل من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للبيانات.

تحويل البيانات

نشاط مفاهيمي

الإجراءات:

في ما يأتي علامات 5 طلبة في اختبار رياضيات، نهايته العظمى هي 20:

12, 17, 11, 9, 16

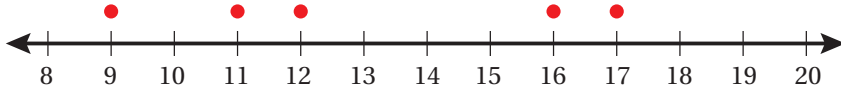
- (1) أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الطلبة.
- (2) إذا أراد المعلم إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الطلبة بعد التحويل.
- (3) إذا أراد المعلم تحويل نهاية الاختبار العظمى إلى 40، بضرب كل علامة في العدد 2، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الطلبة بعد التحويل.

أحل النتائج:

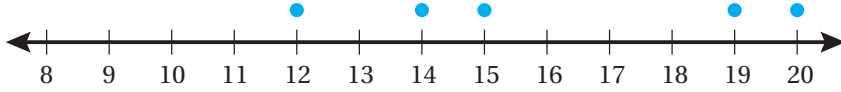
- (1) أقرن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري قبل تحويل العلامات وبعد تحويلها بإضافة 3 علامات. ماذا أستنتج؟
- (2) أقرن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري قبل تحويل العلامات وبعد تحويلها بضربها في العدد 2. ماذا أستنتج؟

أستنتج من هذا النشاط أن إضافة العدد 3 إلى علامة كل طالب أثرت في الوسط الحسابي، ولم تؤثر في الانحراف المعياري؛ لأن هذه الإضافة أدت إلى انسحاب البيانات جميعها بالمقدار نفسه (3 وحدات إلى اليمين) كما يظهر في التمثيل النقطي التالي، لكن ذلك لم يؤثر في تشتت البيانات.

أستنتج أيضًا أن الوسط الحسابي الجديد ناتج من إضافة العدد 3 إلى الوسط الحسابي القديم.



علامات الطلبة قبل التحويل.



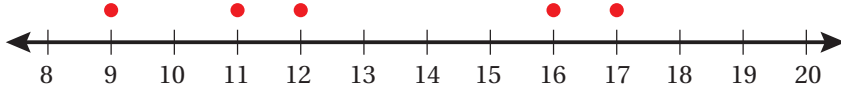
علامات الطلبة بعد إضافة العدد 3 إليها.

أتعلم

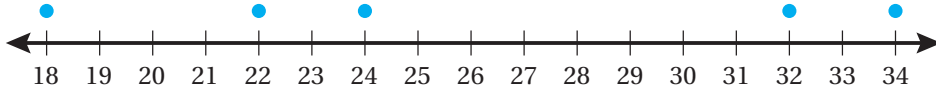
ألاحظ أن إضافة 3 علامات أدت إلى إزاحة البيانات 3 وحدات إلى اليمين، وأن تشتت البيانات بقي على حاله من دون تغيير.

أما تحويل البيانات بضربها في العدد 2 فقد أثر في كل من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري؛ لأن عملية الضرب تؤثر في تشتت البيانات كما يظهر في التمثيل النقطي التالي.

كذلك أستنتج أن الوسط الحسابي الجديد ناتج من ضرب الوسط الحسابي القديم في العدد 2، وكذا الحال بالنسبة إلى الانحراف المعياري.



علامات الطلبة قبل التحويل.



علامات الطلبة بعد ضربها في العدد 2.

تحويل البيانات

مفهوم أساسي

عند تحويل مجموعة من البيانات باستعمال العلاقة: $y = ax + b$ ، حيث a و b عددين حقيقيين، و x المشاهد قبل التحويل، و y المشاهد بعد التحويل، فإنه:

- يمكن إيجاد الوسط الحسابي للبيانات بعد التحويل μ_y باستعمال العلاقة: $\mu_y = a\mu_x + b$ ، حيث μ_x الوسط الحسابي للبيانات قبل التحويل.
- يمكن إيجاد الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل σ_y باستعمال العلاقة: $\sigma_y = |a|\sigma_x$ ، حيث σ_x الانحراف المعياري للبيانات قبل التحويل.

يُستعمل تحويل البيانات أحياناً لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهلاً لإجراء الحسابات.

مثال 4 : من الحياة



علوم: قاس عالم درجة حرارة مفاعل نووي (بالسلسيوس) في 5 مواقع مختلفة، وكانت النتائج التي توصل إليها كما يأتي:

332.5, 335.3, 336.2, 337.5, 340.3

استعمل هذا العالم العلاقة: $y = 10x - 3300$ لتحويل درجات الحرارة، حيث x درجة الحرارة قبل التحويل، و y درجة الحرارة بعد التحويل:

أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل. **الخطوة 1:** أجد درجات الحرارة بعد التحويل.

أستعمل العلاقة: $y = 10x - 3300$ لتحويل درجات الحرارة، بحيث تصبح كالآتي:

25, 53, 62, 75, 103

الخطوة 2: أجد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة بعد التحويل.

$$\mu = \frac{\sum y}{n}$$

صيغة الوسط الحسابي

$$= \frac{25 + 53 + 62 + 75 + 103}{5} = 63.6$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الحرارة بعد التحويل هو: 63.6

الخطوة 3: أجد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل.

أنشئ جدولاً أحسب فيه مربع كل مشاهدة، ثم أعوض في صيغة الانحراف المعياري:

y	y^2
25	625
53	2809
62	3844
75	5625
103	10609
المجموع	23512

معلومة

تنتج من التفاعلات النووية طاقة حرارية كبيرة تُستعمل لتوليد الطاقة الكهربائية.

أفكر

كيف توصل العالم إلى المعادلة:

$$y = 10x - 3300$$

هل هذا التحويل هو الوحيد الممكن؟ أبرر إجابتي.

أتذكّر

الانحراف المعياري هو
الجزء التربيعي للتباين.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$$

الصيغة الثانية للانحراف المعياري

$$= \sqrt{\frac{23512}{5} - (63.6)^2}$$

بتعويض $\sum y^2 = 23512$, $\mu_y = 63.6$, $n = 5$

$$\approx 25.64$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، الانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل هو 25.64

2

أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الحرارة قبل التحويل بناءً على النتائج في الفرع السابق.

• الوسط الحسابي قبل التحويل:

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

صيغة تحويل الوسط الحسابي

$$63.6 = 10\mu_x - 3300$$

بتعويض $\mu_y = 63.6$, $a = 10$, $b = -3300$

$$3363.6 = 10\mu_x$$

بجمع 3300 إلى طرفي المعادلة

$$336.36 = \mu_x$$

بقسمة طرفي المعادلة على 10

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الحرارة قبل التحويل هو 336.36

• الانحراف المعياري قبل التحويل:

$$\sigma_y = |a|\sigma_x$$

صيغة تحويل الانحراف المعياري

$$25.64 \approx |10|\sigma_x$$

بتعويض $\sigma_y = 25.64$, $a = 10$

$$2.564 \approx \sigma_x$$

بقسمة طرفي المعادلة على 10

إذن، الانحراف المعياري لدرجات الحرارة قبل التحويل هو 2.564

أتحقق من فهمي

درجات حرارة: رُصدت درجات الحرارة (بالسلسيوس) في 7 مناطق مختلفة من العاصمة عمان في أحد الأيام، وكانت على النحو الآتي:

32.1, 31.7, 31.2, 31.5, 31.9, 32.2, 32.7

استُعملت العلاقة: $y = 10x - 300$ لتحويل درجات الحرارة، حيث x درجة الحرارة قبل التحويل، و y درجة الحرارة بعد التحويل:

(a) أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل.

(b) أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الحرارة قبل التحويل بناءً على النتائج في الفرع السابق.

يُمكن أحياناً إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات بعد تحويلها من دون معرفة البيانات الأصلية، أو البيانات بعد التحويل؛ إذ يكفي بمعرفة العلاقة التي استُعملت لإجراء التحويل، وبعض المعلومات عن البيانات بعد التحويل.

مثال 5: من الحياة



سرعة: رُصدت سرعة 25 دراجة هوائية مشاركة في سباق للدراجات عند مرورها من أحد الشوارع بوحدة km/h، ثم حُوّلت سرعة هذه الدراجات باستعمال العلاقة: $y = x - 10$ ، حيث y السرعة بعد التحويل، و x السرعة قبل التحويل. إذا كان:

$$\sum y = -5, \sum y^2 = 2803$$

الوسط الحسابي لسرعة الدراجات قبل التحويل.

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي لسرعة الدراجات بعد التحويل.

$$\mu = \frac{\sum y}{n}$$

صيغة الوسط الحسابي

$$= \frac{-5}{25} = -0.2$$

بتعويض $\sum y = -5, n = 25$

الخطوة 2: أجد الوسط الحسابي لسرعة الدراجات قبل التحويل.

$$\mu_y = a\mu_x + b \quad \text{صيغة تحويل الوسط الحسابي}$$

$$-0.2 = \mu_x - 10 \quad \text{بتعويض } \mu_y = -0.2, a = 1, b = -10$$

$$\mu_x = 9.8 \quad \text{بجمع 10 إلى طرفي المعادلة}$$

إذن، الوسط الحسابي لسرعة الدراجات قبل التحويل هو 9.8

2 الانحراف المعياري لسرعة الدراجات قبل التحويل.

الخطوة 1: أجد الانحراف المعياري لسرعة الدراجات بعد التحويل.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2} \quad \text{الصيغة الثانية للانحراف المعياري}$$

$$= \sqrt{\frac{2803}{25} - (-0.2)^2} \quad \text{بتعويض } \sum y^2 = 2803, \mu_y = -0.2$$

$$\approx 10.6 \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

الخطوة 2: أجد الانحراف المعياري لسرعة الدراجات قبل التحويل.

الانحراف المعياري للبيانات قبل التحويل هو 10.6 تقريباً؛ لأن التحويل تمثّل في إضافة (-10)، وهذا لا يؤثر في الانحراف المعياري.

أتحقق من فهمي

زراعة: قيس كتل 40 كيساً من السماد بوحدة kg، ثم حوّلت هذه الكتل باستعمال العلاقة: $y = x - 60$ ، حيث y الكتلة بعد التحويل، و x الكتلة قبل التحويل. إذا كان: $\sum y = -814$, $\sum y^2 = 22125$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) الوسط الحسابي لكتل أكياس السماد قبل التحويل

(b) الانحراف المعياري لكتل أكياس السماد قبل التحويل.

أتذكّر

إضافة قيمة إلى البيانات لا تؤثر في تشتتها.

معلومة

يُعدّ الأردنّ إحدى الدول الرائدة في إنتاج الأسمدة عالية الجودة على مستوى العالم؛ نظراً إلى وفرة خامات الفوسفات التي تُستعمل لصناعة الأسمدة.



أمطار: في ما يأتي عددُ الأيامِ الماطرةِ من شهرِ شباطِ في إحدى المدنِ على مدارِ سبعةِ أعوامٍ متتاليةٍ:

18, 20, 11, 13, 5, 12, 14

1 أجدُ تباينَ عددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ.

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ.



كرة قدم: شاركَ فريقُ كرة قدمٍ في دوريٍّ للمُحترفينَ 5 مواسمٍ متتاليةٍ، وكانَ عددُ الأهدافِ التي سجَّلَها الفريقُ في هذهِ المواسمِ كما يأتي:

61, 54, 44, 57, 38

3 أجدُ تباينَ عددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ.

4 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ.

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممَّا يأتي:

5 27, 43, 29, 34, 53, 37, 19, 58

6 12, 15, 18, 16, 7, 9, 14

أطفال: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي عددَ الأطفالِ في 35 عائلةً:

عددُ الأطفالِ	0	1	2	3	4	5
عددُ العائلاتِ	6	12	9	4	3	1

7 أجدُ تباينَ عددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ.

8 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ.

كتل: يُبين الجدول الآتي كتل عدد من الصناديق في شاحنة:

الكتلة (kg)	50	55	60	65	70	75
عدد الصناديق	3	10	18	22	17	10

9 أجد تباين كتل هذه الصناديق.

10 أجد الانحراف المعياري لكتل هذه الصناديق.

نباتات: قاست مهندسة زراعية أطوال 6 نبات من النوع نفسه (بالستيمتر)، وكانت النتائج التي توصلت إليها كما يأتي:

53.6, 52.7, 55.4, 55.4, 57.2, 59.9, 62.6

ثم استعملت العلاقة: $y = 10x - 500$ لتحويل أطوال النباتات، حيث x طول النبتة قبل التحويل، و y طولها بعد التحويل:

11 أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال النباتات بعد التحويل.

12 أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال النباتات قبل التحويل بناءً على النتائج في الفرع السابق.

حقائب: قيس كتل 97 حقيبة يد (بـ kg) على متن إحدى الرحلات الجوية، ثم حوّل كتل هذه الحقائب باستعمال العلاقة: $y = x - 5$ ، حيث y الكتلة بعد التحويل، و x الكتلة قبل التحويل. إذا كان: $\sum y = 314$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

13 الوسط الحسابي لكتل الحقائب قبل التحويل.

14 التباين والانحراف المعياري لكتل الحقائب قبل التحويل.

15 في مجموعة بيانات إحصائية، إذا كان: $n = 40$ ، وكان: $\sum x = 6400$ ، وكان: $\sum x^2 = 1400000$ ، فأجد الانحراف المعياري لهذه البيانات.





قيست أطوال 8 حبات برتقال بوحدة cm، وكانت انحرافات أطوال الأقطار عن وسطها الحسابي كما يأتي: $4, -2, 3, 3, -1, k, -5, 2$

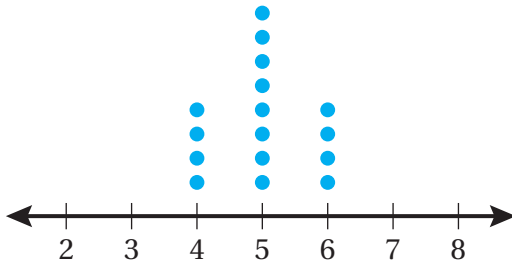
16 أجد قيمة الثابت k .

17 أجد التباين والانحراف المعياري لأطوال أقطار حبات البرتقال.

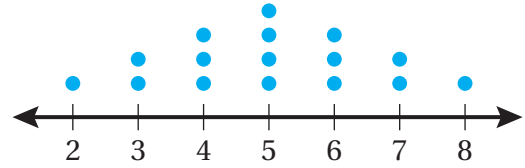
18 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

19 **تبرير:** أي التمثيلين النقطيين قيمة انحرافه المعياري أصغر: a أم b ؟ أبرر إجابتني من دون إيجاد الانحراف المعياري لكل تمثيل.



(a)



(b)

20 **تحذ:** في مجموعة بيانات إحصائية، إذا كان: $n = 10$, $\sum (3x - 1) = 53$, فأجد $\sum x$.

21 **تبرير:** هل يمكن أن يكون الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات صفراً؟ أبرر إجابتني.

22 **تحذ:** تمكن يوسف في لعبة إلكترونية من إحراز النقاط الآتية في المراحل الست الأولى من اللعبة:

42, 39, 37, 24, 54, 34. أجد عدد النقاط التي يتعين على يوسف إحرازها في المرحلة السابعة من اللعبة ليكون

الانحراف المعياري لنتائجها في المراحل السبع هو: $10\sqrt{2}$.

الجدول التكراري ذات الفئات Frequency Tables with Class Intervals

فكرة الدرس



مسألة اليوم



- تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول
 - تقدير مقاييس النزعة المركزية للجدول التكرارية ذات الفئات.
- في ما يأتي الزمن (مقرباً إلى أقرب دقيقة) الذي استغرقته مجموعة من الأطفال لإنهاء لعبة قطع التركيب:



83	114	84	90	103
77	92	108	124	185
89	74	176	61	162
49	63	79	91	65

- أنظم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.
- أستعمل الجدول التكراري لوصف توزيع البيانات.

إنشاء جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول لتمثيل بيانات متصلة

تعلمت سابقاً أن الفئات تُستعمل لتجميع البيانات العددية المتصلة وعرضها عرضاً مبسطاً، وأن الجداول التكرارية ذات الفئات تُستعمل لعرض البيانات العددية المتصلة والمجمعة في فئات، بحيث تُقابل كل فئة عدد البيانات التي تحويها (التكرار). والآن سأتعلم كيف أنشئ جدولاً تكرارياً ذا فئات متساوية الطول لتمثيل بيانات متصلة.

أذكر

البيانات المتصلة هي بيانات قيمها الممكنة غير قابلة للعد، لكنها قابلة للقياس، ويمكن تقريبها لتعطي درجة من الدقة. ومن أمثلتها: الطول، والكتلة، ودرجة الحرارة.

مثال 1: من الحياة



رياضة: في ما يأتي الزمن (مقرباً إلى أقرب دقيقة) المستغرق في لعب 24 مباراة كرة تنس:



102	126	216	104	66	93	129	186
54	73	194	138	98	77	145	90
238	55	87	165	181	94	110	176

- أنظم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

الخطوة 1: أحدد أصغر قيمة في البيانات، وأكبر قيمة فيها.

أصغر قيمة في البيانات هي 54، وأكبر قيمة فيها هي 238.

الخطوة 2: أختار فئات مناسبة تشمل جميع البيانات المُستهدفة.

أختار فئات تتساوى في الطول، وتشمل جميع البيانات، مثل اختيار 5 فئات متساوية في الطول. وبما أن البيانات متصلة، فإنني أستعمل البيانات للتعبير عن الفئات كما في الجدول الآتي:

الزمن المُستغرق لمباريات التنس (t)		
الزمن (min)	الإشارات	التكرار
$40 \leq t < 80$		
$80 \leq t < 120$		
$120 \leq t < 160$		
$160 \leq t < 200$		
$200 \leq t < 240$		

الخطوة 3: أضع إشارات عدّ مُقابل كل فئة بحيثُ تمثّل عدد البيانات التي تحويها، ثم أكتب عدد الإشارات في عمود التكرار.

الزمن المُستغرق لمباريات التنس (t)		
الزمن (min)	الإشارات	التكرار
$40 \leq t < 80$		5
$80 \leq t < 120$		8
$120 \leq t < 160$		4
$160 \leq t < 200$		5
$200 \leq t < 240$		2

2 أستعمل الجدول التكراريّ لوصف توزيع البيانات.

ألاحظ من الجدول التكراريّ أن معظم المباريات تستغرق زمنًا يتراوح بين 80 دقيقة و200 دقيقة، وأن عددًا قليلًا منها يستمر أقل من ذلك أو أكثر.

أتحقق من فهمي

صحة: في ما يأتي كتل 27 مشتركًا في نادٍ رياضيّ، مُقرّبةً إلى أقرب كيلوغرام:

53	67	72	55	40	86	75	50	57
64	68	73	82	79	48	53	60	65
67	61	56	45	63	70	69	75	70

(a) أنظّم البيانات في جدول تكراريّ ذي فئات متساوية الطول.

(b) أستعمل الجدول التكراريّ لوصف توزيع البيانات.

أتعلّم

يُفضّل ألا يقلّ عدد الفئات المختارة عن 4 فئات، وألا يزيد عددها على 8 فئات، ولا يُشترط أن يكون الحد الأدنى للفئة الأولى هو أصغر قيمة في البيانات، وإنما يجب أن تحتوي الفئة الأولى على أصغر قيمة في البيانات، وكذا الحال بالنسبة إلى الفئة الأخيرة والقيمة الكبرى في البيانات.

أندكرّ

يقع العدد 40 ضمن الفئة: $40 \leq t < 80$ في حين لا يقع العدد 80 ضمن هذه الفئة.

إنشاء جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول لتمثيل بيانات منفصلة

تعلّمت سابقاً أنّ الفئات تُستعمل أيضاً لتجميع البيانات العددية المنفصلة وعرضها عرضاً مبسطاً، وأنّ الجداول التكرارية ذات الفئات تُستعمل لعرض البيانات العددية المنفصلة والمُجمّعة في فئات، بحيث تُقابل كل فئة عدد البيانات التي تحويها (التكرار). والآن سأتعلّم كيف أنشئ جدولاً تكرارياً ذا فئات متساوية الطول لتمثيل بيانات منفصلة.

أتذكّر

البيانات المنفصلة هي بيانات تأخذ قيمًا محدّدة قابلة للعدّ، مثل: عدد الأخوة، وعدد الكتب، وعدد الأشجار.

مثال 2: من الحياة



حافلة: في ما يأتي أعمار 22 راكباً في إحدى الحافلات:

41 24 13 14 15 16 30 17 56 18 19
24 22 12 20 27 17 34 10 18 72 16

1 أنظّم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

الخطوة 1: أحدّد أصغر قيمة في البيانات، وأكبر قيمة فيها.

أصغر قيمة في البيانات هي 10، وأكبر قيمة فيها هي 72.

الخطوة 2: أختار فئات مناسبة تشمل جميع البيانات المُستهدفة.

أختار فئات تتساوى في الطول، وتشمل جميع البيانات، مثل اختيار 4 فئات متساوية في الطول. وبما أنّ البيانات منفصلة، فإنّني أستعمل البيانات للتعبير عن الفئات كما في الجدول الآتي:

أعمار رُكّاب الحافلة		
التكرار	الإشارات	العمر (بالسنة)
		0 – 19
		20 – 39
		40 – 59
		60 – 79

أتذكّر

عند تمثيل البيانات المنفصلة بالفئات، أجعل فجوات بين الفئات. فمثلاً تنتهي الفئة الأولى عند العدد 19، وتبدأ الفئة الثانية عند العدد 20

الخطوة 3: أضع إشارات عدّ مُقابل كل فئة بحيثُ تُمثّل عددَ البيانات التي تحويها، ثمّ أكتب عددَ الإشارات في عمودِ التكرار.

أعمارُ رُكّابِ الحافلة		
التكرارُ	الإشاراتُ	العمرُ (بالسنة)
12		0 – 19
7		20 – 39
2		40 – 59
1		60 – 79

2 أستمعُ الجدولَ التكراريّ لوصفِ توزيع البيانات. ألاحظُ من الجدولِ التكراريّ أنّ نصفَ رُكّابِ الحافلة تقريباً هم ممّن تقلُّ أعمارُهُم عن 20 عاماً، وأنّ الذين تزيد أعمارُهُم على 40 عاماً هم عددٌ قليلٌ منهم.

أتحقّق من فهمي

معلومة

تتنوّع العملياتُ التي يقومُ بها الدماغُ في أثناءِ قراءةِ النصوصِ بينَ التأملِ، والتحليلِ، والتخيّل؛ ما يؤدّي إلى تنمية القدراتِ التأمليةِ والتعبيرية (الشفوية، والكتابية) للقارئ، ويزيدُ من مستوى تركيزه.

مكتبات: في ما يأتي عددُ الكتبِ المُعاراة من إحدى المكتباتِ العامة في 18 يوماً:

23	45	31	37	63	54	36	60	49
50	32	45	40	38	37	41	53	57

(a) أنظّم البيانات في جدولٍ تكراريّ ذي فئاتٍ متساوية الطول.

(b) أستمعُ الجدولَ التكراريّ لوصفِ توزيع البيانات.

تقديرُ مقاييسِ النزعة المركزية لبياناتٍ مُنظّمة في جداولٍ تكرارية ذات فئاتٍ

تعلمتُ سابقاً إيجادَ مقاييسِ النزعة المركزية، وهي: الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات المفردة. وبالرغم من أنّ الجداولَ التكرارية ذات الفئات لا تظهرُ فيها القيمُ الحقيقية للبيانات، فإنّه يُمكنُ استعمالها لتقديرِ كلّ من الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال؛ إذ يُمكنُ النظرُ إلى جميعِ القيمِ في فئةٍ مُعيّنة (سواء كانت البيانات متصلة أو منفصلة) على أساسٍ أنّ كلّاً منها تساوي منتصفَ الفئة (مركزُ الفئة).

تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات

مفهوم أساسي

- لتقدير الوسط الحسابي لبيانات مُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستخدم الصيغة الآتية:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيث:

x : مركز الفئة.

f : التكرار المقابل لكل فئة.

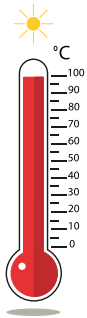
- لتقدير المتوسط لبيانات مُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أجد مركز الفئة الأكثر تكرارًا.

- لتقدير وسيط بيانات مُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أجد مركز الفئة التي تكرارها التراكمي هو أول تكرار تراكمي أكبر من أو يساوي: $\frac{n+1}{2}$ ، حيث n مجموع التكرارات.

أتعلم

في هذا الدرس، أنظر إلى جميع البيانات بوصفها تمثيل مجتمعا إحصائيا، يُرمز إلى وسطه الحسابي بالرمز μ .

درجات الحرارة (T)	
التكرار	درجات الحرارة (°C)
3	$10 \leq T < 12$
7	$12 \leq T < 14$
12	$14 \leq T < 16$
5	$16 \leq T < 18$
3	$18 \leq T < 20$



مثال 3: من الحياة

طقس: يُبين الجدول المجاور توزيعًا لأيام شهر آذار بحسب درجات الحرارة (إلى أقرب درجة سلسية) في محافظة عجلون:

1 أفدّر الوسط الحسابي لدرجات الحرارة.

أنشئ جدولًا بإضافة عمودين إلى الجدول المعطى، أنظم فيهما مراكز الفئات ونواتج ضرب التكرارات في مراكز الفئات على النحو الآتي:

درجات الحرارة (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \leq T < 12$	3	11	33
$12 \leq T < 14$	7	13	91
$14 \leq T < 16$	12	15	180
$16 \leq T < 18$	5	17	85
$18 \leq T < 20$	3	19	57
المجموع	30		446

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

$$= \frac{446}{30}$$

$$\approx 14.9$$

صيغة الوسط الحسابي

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الحرارة هو 14.9°C تقريبًا.

2 أقدّر منوال درجات الحرارة.

لتقدير المنوال، أبحث عن مركز الفئة الأكثر تكرارًا. وبالرجوع إلى البيانات في الجدول أعلاه، ألاحظ أن الفئة: $14 \leq t < 16$ تُقابل أعلى تكرار، وهو 12. وبذلك، فإن المنوال هو مركز هذه الفئة تقريبًا.

إذن، منوال درجات الحرارة هو 15 تقريبًا.

3 أقدّر وسيط درجات الحرارة.

درجات الحرارة ($^{\circ}\text{C}$)	التكرار التراكمي
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \leq T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \leq T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \leq T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الخطوة 1: أنشئ جدول التكرار

التراكمي بإضافة عمود

التكرار التراكمي كما في

الجدول المجاور.

الخطوة 2: أحدد رتبة الوسيط.

$$\text{رتبة الوسيط هي: } \frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$$

الخطوة 3: أحدد الفترة التي يقع فيها وسيط البيانات.

بما أن رتبة الوسيط هي 15.5، فإن وسيط درجات الحرارة يقع في الفترة: $14 \leq t < 16$ ؛ لأن

التكرار التراكمي لهذه الفترة هو أول تكرار تراكمي أكبر من أو يساوي 15.5

وبذلك، فإن الوسيط هو مركز هذه الفئة تقريبًا.

إذن، وسيط درجات الحرارة هو 15 تقريبًا.

أتعلم

عند ترتيب المشاهدات تصاعديًا بحسب قيمها، فإن رتبة المشاهدة هي ترتيب موقعها في مجموعة البيانات. وبما أن القيم الدقيقة للبيانات في هذا المثال غير معلومة، فإنه يمكن تحديد الفترة التي تقع فيها المشاهدة عن طريق ترتيبها وإنشاء جدول تكرار تراكمي.

أتحقق من فهمي

الكتل (g)	الترار
$300 \leq m < 400$	4
$400 \leq m < 500$	7
$500 \leq m < 600$	6
$600 \leq m < 700$	3

حلويات: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لكتل

كعكات في أحد المخازن، مُقَرَّبَةً إلى أقرب غرام:

(a) أقدّر الوسط الحسابي للكتل.

(b) أقدّر منوال الكتل.

(c) أقدّر وسيط الكتل.



أندرب وأحل المسائل



أوراق: في ما يأتي أطوال مجموعة من أوراق الشجر بالسنتيمتر:

11.4 6.3 9.8 13.2 8.5 16.3 5.4 7.9 10.2 11.5 8.6 7.0
8.7 12.1 9.9 8.7 10.7 8.5 11.2 14.8 17.2 12.6 10.4 8.7

1 أنظّم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

2 أستمّل الجدول التكراري لوصف توزيع البيانات.



مقالات: في ما يأتي عدد الكلمات في مقالات كتبها الطلبة المتقدمون

لمسابقة المقالة القصيرة:

495 511 483 502 500 496 532 498 496
499 503 521 487 518 526 508 514 503

3 أنظّم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

4 أستمّل الجدول التكراري لوصف توزيع البيانات.

عيادات طبية: في ما يأتي أعمارُ المُراجعينَ لعيادةٍ في إحدى المستشفيات خلالَ أحدِ الأيام:

44	64	41	53	58	45	55	54	62	51
50	47	58	37	49	52	43	47	52	49
52	58	53	50	47	44	56	62	51	58

5 أنظّم البيانات في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساوية الطول.

6 استعمل الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البيانات.

7 أعيدُ تنظيمَ البيانات في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساوية الطول، بحيثُ اختارُ فئاتٍ ذات أطوالٍ تختلفُ عن أطوالِ الفئات في الفرع 5، ثمَّ أحددُ الجدولَ الذي تُعرَضُ فيه البياناتُ بصورةٍ أفضل.

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطول (cm)	التكرارُ
$10 \leq t < 14$	21
$14 \leq t < 18$	57
$18 \leq t < 22$	65
$22 \leq t < 26$	52
$26 \leq t < 30$	12



أزهار: يُبينُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ من أزهارِ النرجس، مُقَرَّبَةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

8 أقدّر الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهار.

9 أقدّر منوالَ أطوالِ الأزهار.

10 أقدّر وسيطَ أطوالِ الأزهار.

عددُ الكتبِ المبَّيعَةِ	
عددُ الكتبِ	التكرارُ
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

كتب: يُبينُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا من مكتبةٍ زيادٍ في أحدِ الأيام:

11 أقدّر الوسطَ الحسابيَّ للبيانات.

12 أقدّر منوالَ البيانات.

13 أقدّر وسيطَ البيانات.

14 أحلّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرس.



العمر الافتراضي للمصابيح (h)	التكرار
$150 \leq h < 175$	24
$175 \leq h < 200$	45
$200 \leq h < 225$	18
$225 \leq h < 250$	10
$250 \leq h \leq 275$	3

تبرير: اختبر قسم الجودة في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية 100 مصباح لتعرف إذا كان متوسط العمر الافتراضي للمصابيح أكثر من 200 ساعة، ثم نظم النتائج التي توصل إليها في الجدول المجاور:

15 أقدّر منوال أعمار المصابيح.

16 أجد الوسط الحسابي لأعمار المصابيح.

17 أجد النسبة المئوية للمصابيح التي عمرها الافتراضي أكثر من أو يساوي 200 ساعة، مبرراً إجابتي.

18 هل يمكن استنتاج أن متوسط العمر الافتراضي للمصابيح هو أكثر من 200 ساعة؟ أبرر إجابتي.

19 **اكتشف الخطأ:** في ما يأتي عدد الدقائق (مقربة إلى أقرب دقيقة) التي استغرقها بعض المتسابقين لإنهاء سباق للجري:

54	57	55	59	52	53	58	59	61	60	55
57	59	60	57	58	54	58	57	58	61	54

نظم كل من رامي وفيصل البيانات كما هو مبين تالياً. أيهما نظم البيانات بصورة صحيحة؟ أبرر إجابتي.

فيصل

$52 \leq t < 54$
$54 \leq t < 56$
$56 \leq t < 58$
$58 \leq t < 60$
$60 \leq t < 62$

رامي

52 – 54
55 – 57
58 – 60
61 – 63

المسافة (km)	التكرار
$0 \leq d < 5$	3
$5 \leq d < 10$	8
$10 \leq d < 15$	13
$15 \leq d < 20$	5
$20 \leq d \leq 25$	2

20 **تبرير:** يتدرب لاعب يومياً على سباق طويل المسافة (الماراثون) طوله 21 km. يُبين الجدول المجاور توزيعاً للمسافة (إلى أقرب كيلومتر) التي يقطعها اللاعب كل يوم خلال شهر كامل. إذا وجد اللاعب أنه من الأفضل أن يقطع مسافة كل يوم تعادل في متوسطها ثلث مسافة السباق، فهل يعني ذلك أنه تدرب بصورة كافية في هذا الشهر؟ أبرر إجابتي.

المُدْرَجَات التكرارية Histograms

• تمثيل البيانات المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية بمُدْرَجَات تكرارية.

المُدْرَجَات التكرارية، الكثافة التكرارية.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

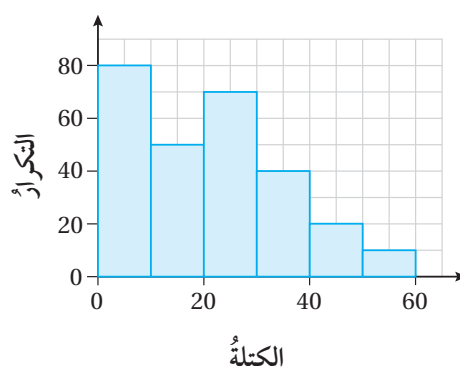
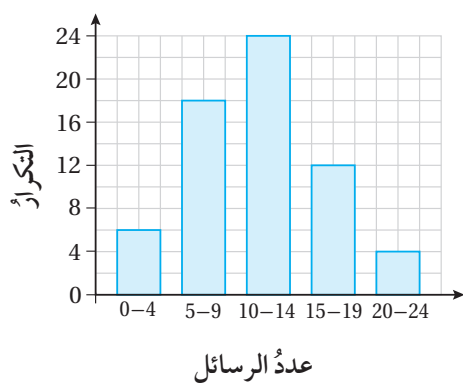


المساحة (m ²)	التكرار
$70 \leq t < 100$	15
$100 \leq t < 150$	18
$150 \leq t < 250$	12
$250 \leq t < 300$	6

يُبين الجدول المجاور توزيعاً لمجموعة من الشقق السكنية في إحدى المناطق تبعاً لمساحة كل منها. أمثل بيانات الجدول باستعمال مخطط تكراري.

المُخطَّطات التكرارية

تعلمت سابقاً أنَّ المُخطَّطات التكرارية هي أكثر الطرائق شيوعاً لتمثيل البيانات المتصلة والمُمثلة في جداول تكرارية.



أستعمل تدرجاً منفصلاً للبيانات المنفصلة.

أستعمل تدرجاً متصلاً للبيانات المتصلة.

أتعلم

تُستعمل المُدْرَجَات التكرارية لتمثيل البيانات المتصلة أصلاً، حتى لو كانت قيمها مُقَرَّبَةً إلى أعداد صحيحة.

يُطلَق على المُخطَّطات التكرارية المُستعملة لعرض البيانات العددية المتصلة والمُمثلة في جداول تكرارية اسم **المُدْرَجَات التكرارية** (histograms). سأتعلم في هذا الدرس تمثيل نوعين منها، هما: المُدْرَجَات التكرارية ذات الفئات مُتساوية الطول، والمُدْرَجَات التكرارية ذات الفئات غير مُتساوية الطول.

المُدْرَجَات التكرارية ذات الفئات متساوية الطول

عند تمثيل البيانات العددية المتصلة والمُجمَّعة في فئات بمُدْرَجَات تكرارية عن طريق استعمال مُدرَج تكراري ذي فئات متساوية الطول، يجب استعمال تدرّيج متصل بالمحور الأفقي، وهذا يعني عدم وجود فراغات بين أعمدة المُدرَج.

مثال 1: من الحياة

أطوال: في ما يأتي أطوال 50 طالبًا، مُقَرَّبَةً إلى أقرب سنتيمتر:

145	157	160	148	160	177	156	155	166	166
170	162	160	142	152	155	159	172	152	162
180	152	175	155	170	163	144	173	150	154
136	162	154	164	155	182	147	168	155	170
160	175	163	175	144	160	160	142	158	180

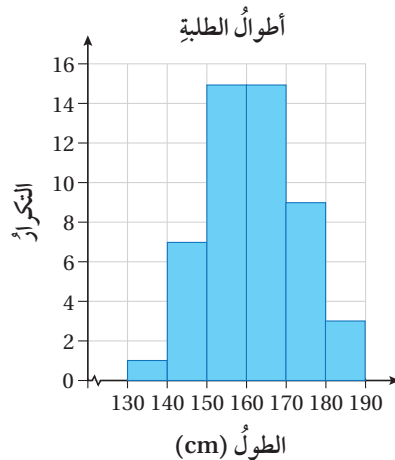
1 أمثل البيانات باستعمال مُدرَج تكراري ذي فئات متساوية الطول.

أطوال الطلبة (h)	
الطول (cm)	التكرار
$130 \leq h < 140$	1
$140 \leq h < 150$	7
$150 \leq h < 160$	15
$160 \leq h < 170$	15
$170 \leq h < 180$	9
$180 \leq h < 190$	3

الخطوة 1: أنظّم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.

أحدّد أصغر قيمة في البيانات، وأكبر قيمة فيها. بعد ذلك أختار فئات مناسبة تشمل جميع البيانات المُستهدفة.

الخطوة 2: أرسم محورًا أفقيًا وآخر عموديًا، ثم أكتب الفئات أسفل المحور الأفقي، ثم أضع تدرّيجًا مناسبًا للمحور الرأسي.



الخطوة 3: أسمّي كلّاً من المحورين، ثم أكتب عنوانًا مناسبًا للمُدْرَج التكراري.

الخطوة 4: أرسم عمودًا يُمثّل ارتفاعه تكرار كلّ فئة.

أتذكّر

إذا بدأت البيانات بعدد أكبر من الصفر، فإنني أبدأ التدرّيج على المحور بعدد أكبر من الصفر، مشيرًا إلى ذلك بخطّ متعرج.

2 أكتب وصفاً للبيانات.

تقع أطوال أكثر من نصف الطلبة بين 150 cm و 170 cm، في حين يكون طول عدد قليل منهم أكثر من 180 cm، أو أقل من 140 cm.

أتحقق من فهمي

وقت: في ما يأتي الزمن (مقرباً إلى أقرب دقيقة) الذي تستغرقه 30 طالبة للوصول إلى المدرسة:

6	18	29	55	7	34	28	56	33	4
2	41	33	23	7	43	26	53	4	41
32	46	16	17	3	26	17	47	22	17

(a) أمثل البيانات باستعمال مُدرّج تكراري ذي فئات متساوية الطول.

(b) أكتب وصفاً للبيانات.

أتعلم

ألاحظ أن النسبة بين مساحات الأعمدة في المثال 1 هي:
10:70:150:150:90:30
وأن النسبة بين التكرارات هي:
1:7:15:15:9:3
وهذا يعني أن النسبة بين مساحات الأعمدة متناسبة مع النسبة بين التكرارات، وسألاحظ أهمية ذلك في المثال التالي.

المُدرّجات التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول

في بعض الأحيان، تُجمّع البيانات المتصلة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية في الطول. وفي هذه الحالة، يتعين تمثيل هذه البيانات بمُدرّج تكراري ذي فئات غير متساوية الطول. ولكن، إذا مُثلّت البيانات باستعمال تكراراتها، فإن التمثيل الناتج يكون مُضللاً؛ لأن النسبة بين مساحات الأعمدة لا تكون متناسبة مع النسبة بين التكرارات. وهنا تظهر الحاجة إلى إيجاد **الكثافة التكرارية** (frequency density) لكل فئة، وذلك بقسمة تكرار الفئة على طولها كما يأتي:

$$(الكثافة التكرارية) = \frac{(تكرار الفئة)}{(طول الفئة)}$$

عند تمثيل الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية في الطول بمُدرّجات تكرارية، فإن المحور لا يُسمى الكثافة التكرارية، وإن ارتفاع كل عمود يُمثل الكثافة التكرارية لفئته.

مثال 2: من الحياة

الطول (cm)	التكرار
$15 \leq t < 20$	6
$20 \leq t < 30$	14
$30 \leq t < 40$	26
$40 \leq t < 60$	2

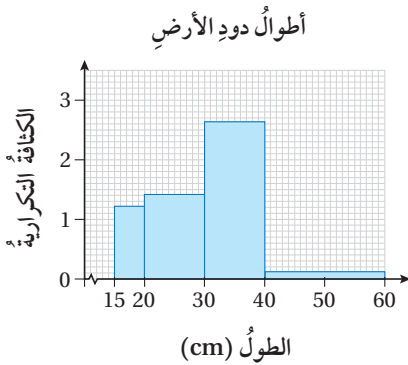
أحياء: قاست عالمة أحياء أطوال 48 دودة أرض، ثم نظمت البيانات التي توصلت إليها في الجدول التكراري المجاور. أمثل بيانات الجدول باستعمال المدرج التكراري.

الخطوة 1: أنشئ جدولاً بإضافة عمودين إلى الجدول المعطى، أنظم فيهما أطوال الفئات والكثافة التكرارية على النحو الآتي:

الطول (cm)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$15 \leq t < 20$	6	5	1.2
$20 \leq t < 30$	14	10	1.4
$30 \leq t < 40$	26	10	2.6
$40 \leq t < 60$	2	20	0.1

أتعلم

طول الفئة الأولى هو: $20 - 15 = 5$ وبالطريقة نفسها يمكن إيجاد أطوال بقية الفئات.



الخطوة 2: أرسم محوراً أفقياً وآخر عمودياً، ثم أكتب الفئات أسفل المحور الأفقي، ثم أضع تدريجاً مناسباً للمحور الرأسي.

الخطوة 3: أسمي كلا من المحورين، ثم أكتب عنواناً مناسباً للمدرج التكراري.

الخطوة 4: أرسم عموداً يمثل ارتفاعه الكثافة التكرارية لكل فئة.

أتحقق من فهمي

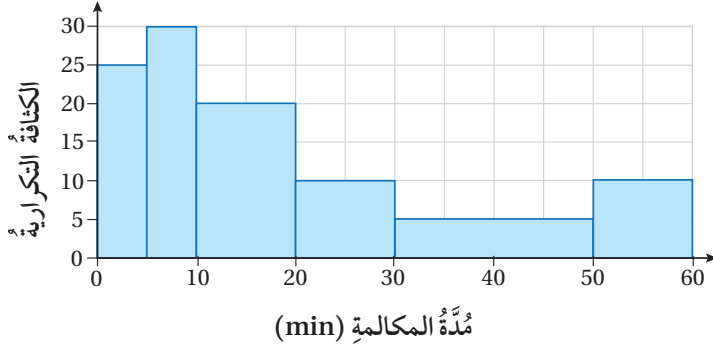
الزمن (h)	التكرار
$0 \leq h < 0.5$	5
$0.5 \leq h < 1$	35
$1 \leq h < 2$	56
$2 \leq h < 3$	4

تلفاز: يبين الجدول التكراري المجاور الزمن (بالساعات) الذي يستغرقه 100 شخص يومياً في مشاهدة التلفاز. أمثل بيانات الجدول باستعمال المدرج التكراري.

يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُ الْمُدَرَّجَاتِ التَّكْرَارِيَةِ ذَاتِ الْفَتَاتِ غَيْرِ مُتَسَاوِيَةِ الطَّوْلِ لِتَفْسِيرِ الْبَيَانَاتِ الَّتِي يُمَثِّلُهَا الْمُدَرَّجُ التَّكْرَارِيُّ.

مثال 3 : من الحياة

مكالمات: أُجْرِيَ مَسْحٌ عَلَى مَجْمُوعَةٍ مِنَ الْأَشْخَاصِ لِتَحْدِيدِ مُدَدِ مَكَالِمَتِهِمُ الْهَاتِفِيَّةِ الْآخِرَةِ، ثُمَّ مُثِّلَتِ الْبَيَانَاتُ الَّتِي خُلِّصَ إِلَيْهَا الْمَسْحُ بِالْمُدَرَّجِ التَّكْرَارِيِّ الْآتِي:



1 كم شخصًا شارك في عملية المسح؟

بما أن ارتفاعات الأعمدة لا تمثل التكرارات، وإنما تمثل الكثافة التكرارية للفترة، فإنه يتعين إيجاد تكرار كل فئة، وذلك بإيجاد مساحة كل عمود، علمًا بأن مجموع هذه المساحات يمثل عدد الأشخاص الذين شاركوا في عملية المسح:

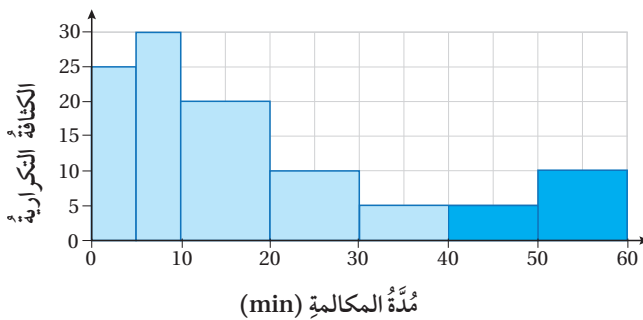
$$A = (25 \times 5) + (30 \times 5) + (20 \times 10) + (10 \times 10) + (20 \times 5) + (10 \times 10) = 775$$

مجموع مساحات الأعمدة

بالتبسيط

إذن، شارك في عملية المسح 775 شخصًا.

2 أجد عدد الأشخاص الذين تزيد مدد مكالماتهم الهاتفية على 40 دقيقة.



لإيجاد عدد الأشخاص الذين تزيد مدد مكالماتهم الهاتفية على 40 دقيقة، أجد مساحة العمودين المظللين باللون الأزرق الغامق في الشكل المجاور:

أتعلم

بما أن الكثافة التكرارية تمثل ناتج قسمة تكرار الفئة على طولها، فإنه يمكن إيجاد تكرار الفئة بضرب الكثافة التكرارية للفئة في طول الفئة، وهذا يمثل مساحة العمود الممثل للفئة.

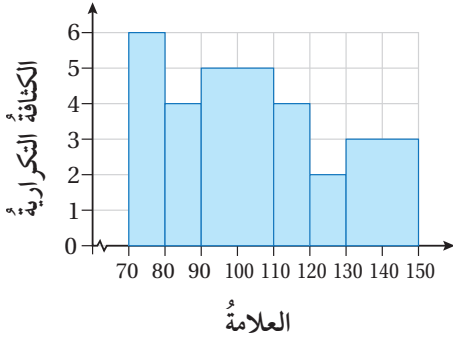
$$A = (10 \times 5) + (10 \times 10) \\ = 150$$

مجموع مساحتي العمودين

بالتبسيط

إذن، عدد الأشخاص الذين تزيد مكالمتهم الهاتفية على 40 دقيقة هو 150 شخصًا.

أتحقق من فهمي



علامات: يُبين المدرج التكراري المجاور علامات مجموعة من الطلبة في اختبار نهايته العظمى هي 150:

(a) كم طالبًا تقدّم للاختبار؟
(b) أجد عدد الطلبة الذين تزيد علاماتهم على 124.

(c) أجد عدد الطلبة الذين تقع علاماتهم بين 100 و130.



أندرب وأحل المسائل



سباقات: في ما يأتي الزمن (بالثواني) الذي تستغرقه مجموعة من الطلبة لإنهاء سباق للجري:

52 63 81 66 75 59 77 66 80 64 72 78 58 61 68 72 76 66
74 79 65 82 87 91 68 77 75 86 81 70 93 68 74 80 68 84

1 أمثل البيانات باستعمال مدرج تكراري ذي فئات متساوية الطول.

2 أكتب وصفًا للبيانات.

3 أطوال: يُبين الجدول التكراري المجاور أطوال مجموعة من الطالبات بالستيمتر. أمثل بيانات الجدول باستعمال المدرج التكراري.

الطول (h)	التكرار
$120 \leq h < 130$	8
$130 \leq h < 140$	12
$140 \leq h < 150$	10
$150 \leq h < 160$	7

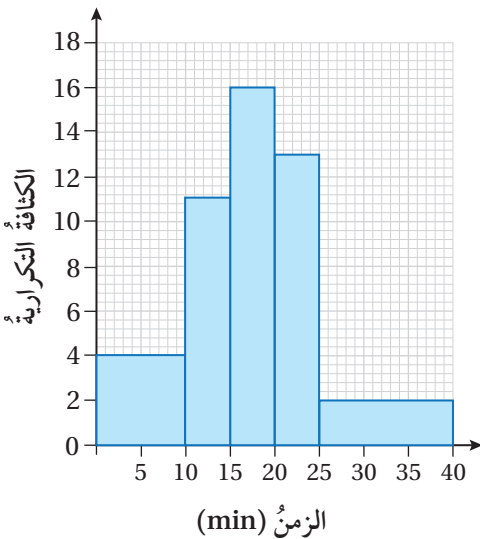
التركرأ	درجة الحرارة (t)
6	$8 \leq t < 10$
13	$10 \leq t < 12$
18	$12 \leq t < 15$
4	$15 \leq t < 17$
3	$17 \leq t < 20$
6	$20 \leq t < 24$

4 درجات حرارة: يُبين الجدول التكراري المجاور توزيع درجات الحرارة (بالسلسيوس) خلال 50 يومًا في إحدى المناطق. أمثل بيانات الجدول باستعمال المدرج التكراري.

أمثل البيانات في كل من الجدولين التكرارين الآتين باستعمال المدرج التكراري.

الزمن	$0 \leq t < 8$	$8 \leq t < 12$	$12 \leq t < 16$	$16 \leq t < 20$
التركرأ	72	84	54	36

العمر (بالعام)	$11 \leq a < 14$	$14 \leq a < 16$	$16 \leq a < 17$	$17 \leq a < 20$
التركرأ	51	36	12	20



شركات: يُبين المدرج التكراري المجاور الزمن (بالدقائق) الذي يستغرقه موظفو إحدى الشركات للوصول إلى مكان العمل:

7 أجد عدد موظفي الشركة.

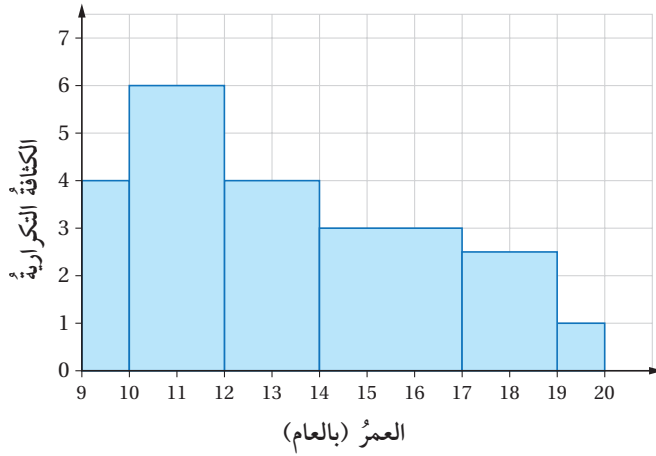
8 أجد عدد الموظفين الذين يصلون إلى مكان العمل بأقل من 15 دقيقة.

9 أجد عدد الموظفين الذين يستغرق وصولهم إلى مكان العمل زمنًا يتراوح بين 20 دقيقة و 30 دقيقة.

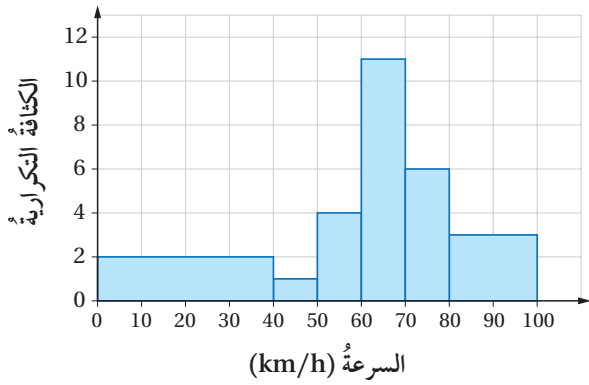
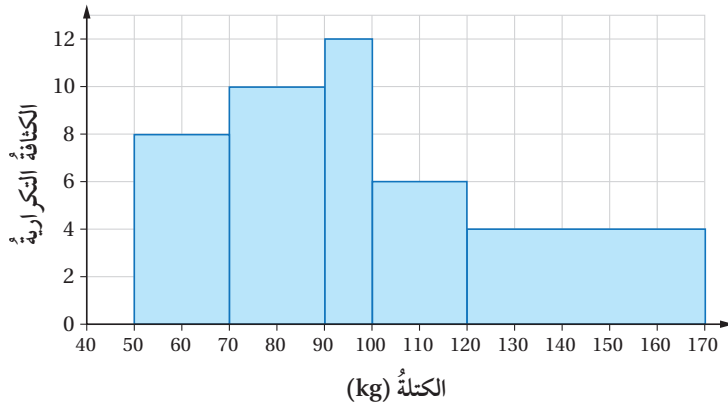
10 أجد عدد الموظفين الذين يصلون إلى مكان العمل بزمان أكثر من 30 دقيقة.

أنشئ جدولاً تكرارياً لكل من المُدرجات التكرارية الآتية:

11



12



سرعة: أجري مسح لتعرف سرعة السيارات التي تمر من نقطة معينة على إحدى الطرق السريعة، ثم مثلت البيانات التي خلص إليها المسح بالمدرج التكراري المجاور.

13 أكمل الفراغ في الجدول الآتي بناءً على التمثيل بالمدرج التكراري أعلاه.

السرعة	$0 \leq y < 40$	$40 \leq y < 50$	$50 \leq y < 60$	$60 \leq y < 70$	$70 \leq y < 80$	$80 \leq y < 100$
التكرار		10	40	110		

14 أجد عدد السيارات التي أجري عليها المسح.

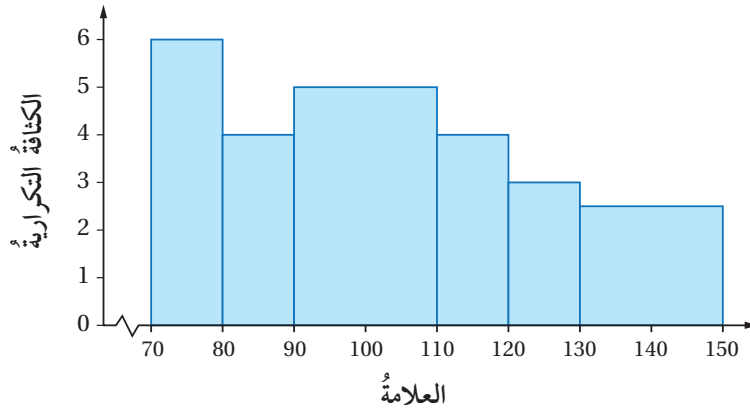
15 أحلّ المسألة الواردة بدايةً الدرس.



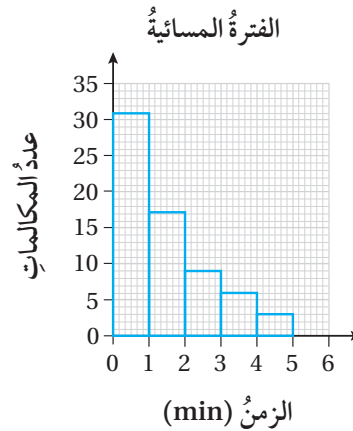
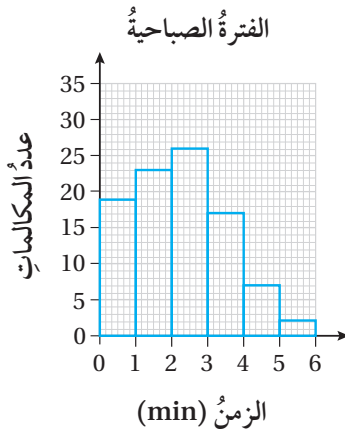
مهارات التفكير العليا



16 **تبرير:** يُبين المدرّج التكراري المجاور علامات مجموعة من الطلبة في أحد الاختبارات. إذا كانت علامة النجاح في الاختبار هي 90، فأجد نسبة الطلبة الذين أخفقوا في الاختبار، مُبرراً إجابتي.



تحد: يُسجل برنامج حاسوب في إحدى المؤسسات الزمن (بالدقائق) الذي ينتظره المتصلون قبل الردّ على مكالماتهم في الفترة الصباحية والفترة المسائية. وقد مُثِّلَت البيانات التي سجلها البرنامج في أحد الأيام بالمدرّجين التكراريين الآتيين:



17 أجد عدد المكالمات التي انتظر فيها المتصلون أكثر من 4 دقائق قبل الردّ عليهم في الفترة الصباحية من ذلك اليوم.

18 أجد نسبة المكالمات التي رُدّ فيها على المتصلين خلال ما لا يزيد على دقيقتين في ذلك اليوم.

الاحتمالات وأشكال فن Probabilities and Venn diagrams



• إيجاد الاحتمال باستعمال أشكال فن.

الحوادث المتنافية، الحوادث الشاملة.

فكرة الدرس

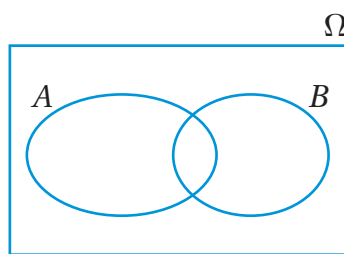
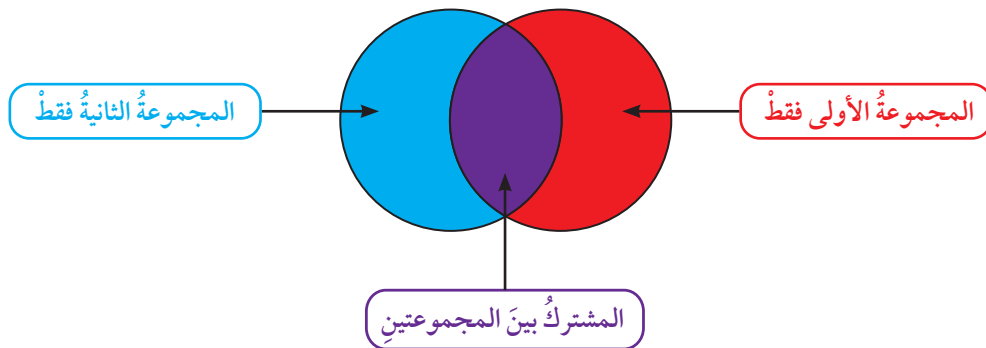
المصطلحات

مسألة اليوم

يدرس 120 طالباً في معهد لغات، منهم 75 طالباً يدرسون اللغة الكورية، و35 طالباً يدرسون اللغة الإسبانية، و10 طلبة يدرسون اللغتين معاً. إذا اختير طالب من المعهد عشوائياً، فما احتمال أن يكون ممن يدرسون اللغة الكورية فقط؟

التعبير بالرموز عن حوادث مُمثلة بأشكال فن

تعلمت سابقاً أشكال فن، واستعملتها لتمثيل البيانات؛ وذلك بتنظيمها في مجموعتين أو أكثر باستعمال منحنيات مُغلقة مُتداخلة (متقاطعة)؛ إذ يُشكل كل منحنٍ مجموعة مستقلة من البيانات، ويُمثل الجزء المُتداخل بين المنحنيين البيانات المشتركة بين المجموعتين.

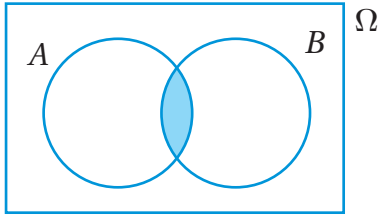


Ω

يمكن استعمال أشكال فن للتعبير عن حوادث تجربة عشوائية بيانياً، وذلك لتسهيل إيجاد احتمالات هذه الحوادث. فمثلاً، إذا كان A و B حادثين في تجربة عشوائية، فإنه يمكن تمثيلهما باستعمال أشكال فن، وذلك برسم مستطيل يمثل الفضاء العيني للتجربة، ثم رسم منحنى مُغلق يمثل الحادث A ، ومنحنى آخر مُغلق يمثل الحادث B .

رموز رياضية

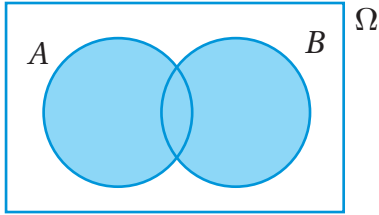
يُستعمل الحرف اليوناني Ω للدلالة على الفضاء العيني لتجربة عشوائية، وهو مجموعة النواتج التي يتوقع حدوثها عند إجراء تجربة عشوائية ما، ويُقرأ: أوميغا.



تُمثِّل المنطقة المظلَّلة في شكلٍ فِرن المجاورِ تقاطعَ الحادثِ A والحادثِ B ، ويُمكنُ التعبيرُ عنها بالرمزِ $A \cap B$.

أَتَعَلَّمُ

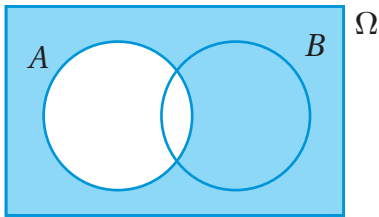
تقاطعُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعُهُما معًا.



أَمَّا المنطقة المظلَّلة في شكلٍ فِرن المجاورِ فتُمثِّل اتحادَ الحادثِ A والحادثِ B ، ويُمكنُ التعبيرُ عنها بالرمزِ $A \cup B$.

أَتَعَلَّمُ

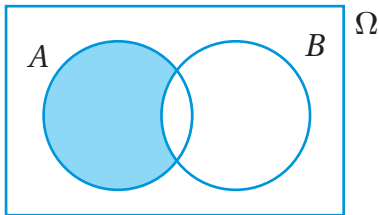
اتحادُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَ الحادثِ A ، أو وقوعَ الحادثِ B ، أو وقوعَ الحادَينِ معًا.



تُمثِّل المنطقة المظلَّلة في الشكلِ المجاورِ **الحادثِ المُتَمَمِّ** (complement event) للحادثِ A ، ويُمكنُ التعبيرُ عنه بالرمزِ $\bar{A}$.

أَتَعَلَّمُ

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ $\bar{A}$ يعني عدمَ وقوعِ الحادثِ A .



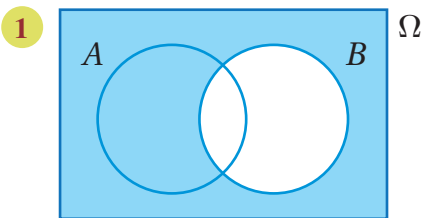
الحادثُ الذي تُمثِّله المنطقة المظلَّلة في الشكلِ المجاورِ هو وقوعُ الحادثِ A فقط، وعدمُ وقوعِ الحادثِ B ، ويُمكنُ التعبيرُ عن هذا الحادثِ بالرمزِ $A - B$.

أَتَعَلَّمُ

يُمكنُ أيضًا التعبيرُ عن الحادثِ $A - B$ بالرمزِ $A \cap \bar{B}$.

مثال 1

أُعبرُ بالرموزِ عن الحادثِ الذي تُمثِّله المنطقة المظلَّلة في كلِّ من أشكالِ فِرن الآتية:

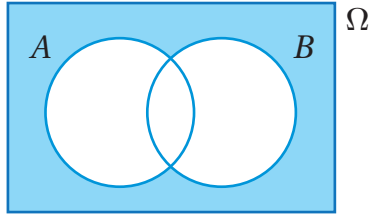


أُلاحِظُ أنَّ المنطقة المظلَّلة تُعبَّرُ عن مُتَمَمِّةِ الحادثِ B ؛ لذا يُمكنُ التعبيرُ عن هذا الحادثِ بالرمزِ $\bar{B}$.

أفكر

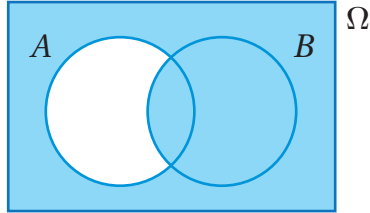
هل يمكن التعبير عن
الحادث الذي تُمثِّله
المنطقة المظللة بالرموز
بطريقة أخرى؟ أبرر
إجابتي.

2



ألاحظ أن المنطقة المظللة تُعبّر عن عدم
وقوع اتحاد الحادث A والحادث B ؛ لذا
يمكن التعبير عن هذا الحادث بالرمز $\overline{A \cup B}$.

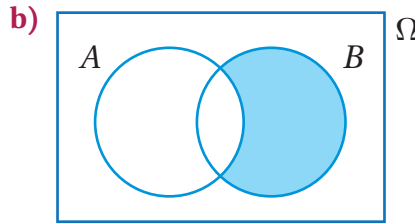
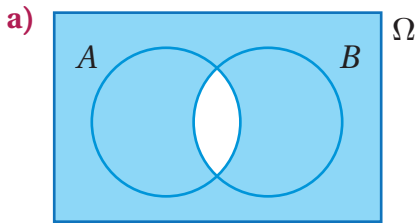
3



ألاحظ أن المنطقة المظللة تُعبّر عن اتحاد
متممة الحادث A والحادث B ؛ لذا يمكن
التعبير عن هذا الحادث بالرمز $\overline{A \cup B}$.

أتحقق من فهمي

أعبر بالرموز عن الحادث الذي تُمثِّله المنطقة المظللة في كل من شكلي في الآتين:



إيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال في

تعلّمت سابقاً أنه إذا كانت التجربة العشوائية متساوية الاحتمال، فإن احتمال وقوع أي حادث
فيها يساوي نسبة عدد عناصر الحادث إلى عدد عناصر الفضاء العيني.

$$P(A) = \frac{(\text{عدد عناصر الحادث } A)}{(\text{عدد عناصر الفضاء العيني})}$$

بما أن الفضاء العيني Ω هو مجموعة تحوي جميع النواتج التي يُتوقَّع حدوثها عند إجراء
تجربة عشوائية ما، فإن احتمال الفضاء العيني هو 1؛ أي إن $P(\Omega) = 1$. ولهذا، فإن احتمال
الحادث المُتمم لأي حادث في الفضاء العيني، مثل A ، هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A .

رموز رياضية

يشير الرمز $P(A)$ إلى
احتمال وقوع الحادث
 A ، علماً بأن الحرف P
هو اختصاراً لكلمة
Probability التي تعني
الاحتمال.

احتمالُ الحادثِ المُتممِ

مفهومٌ أساسيٌّ

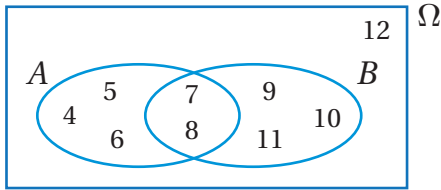
بالكلمات: احتمالُ وقوعِ مُتَمِّمَةِ الحادثِ A هو 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ .

بالرموز: لأيِّ حادثٍ (A) في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

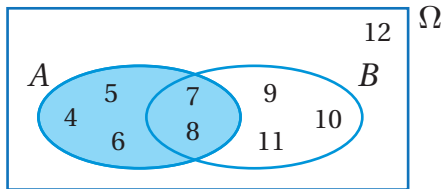
يُمكنُ استعمالُ المفاهيمِ السابقةِ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثٍ مُمَثَّلَةٍ بِأَشْكَالٍ فِئ.

مثال 2



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ من 4 إلى 12 على مجموعةٍ من البطاقاتِ المُتطابقةِ، ثمَّ اختيرت بطاقةٌ عشوائياً، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين A و B في شكلٍ فِئ المجاورِ. أجدُ كُلَّ من الاحتمالاتِ الآتية:

1 $P(A)$



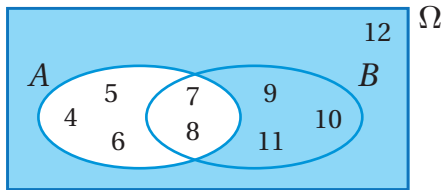
بما أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ هو 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هو 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظَلَّلَةِ من الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

أفكِّرْ

أَصِفْ الحادثَ A بالكلماتِ.

2 $P(\bar{A})$



صيغةُ احتمالِ المُتَمِّمَةِ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

بالتعويضِ

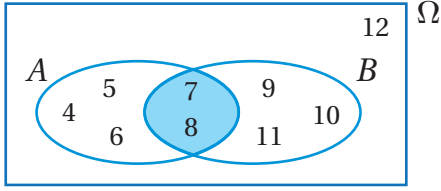
$$= \frac{4}{9}$$

بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

يظهرُ في الشكلِ المجاورِ أنَّ مُتَمِّمَةَ A تحوي 4 عناصرٍ، هي: $\{9, 10, 11, 12\}$ ؛ لذا، فإنَّ احتمالُها هو $\frac{4}{9}$.

3 $P(A \cap B)$



بما أن $A \cap B$ يعني وقوع الحادث A والحادث B معاً، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 2 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور.

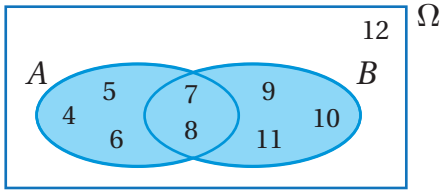
إذن:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

أفكر

أصِف الحادث B بالكلمات.

4 $P(A \cup B)$

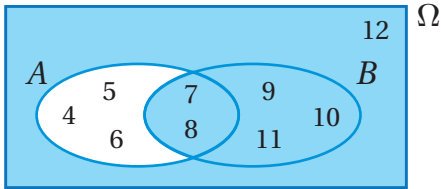


بما أن $A \cup B$ يعني وقوع الحادث A ، أو وقوع الحادث B ، أو وقوع الحادثين معاً، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 8 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور.

إذن:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{9}$$

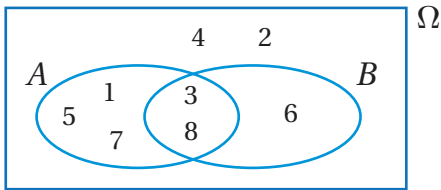
5 $P(\bar{A} \cup B)$



بما أن عدد عناصر هذا الحادث هو 6 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور، فإن:

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{6}{9}$$

أتحقق من فهمي



كُتِبَت الأعداد الصحيحة من 1 إلى 8 على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائياً، ومثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين A و B في شكل فين المجاور. أجد كل من الاحتمالات الآتية:

a) $P(B)$

b) $P(\bar{B})$

c) $P(A \cap B)$

d) $P(A - B)$

استعمال أشكال فن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية

يُمكن استعمال أشكال فن لتسهيل إيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تُمثل مواقف حياتية.

مثال 3 : من الحياة



اختبارات: تقدّم 200 طالب من طلبة الصف التاسع في إحدى المدارس لامتحان وطني يقيس قدراتهم في مادتي اللغة العربية والرياضيات. نجح من هؤلاء الطلبة 162 طالباً في مادة اللغة العربية، و137 طالباً في مادة الرياضيات. أمّا عدد الطلبة الناجحين في المادتين معاً فبلغ 121 طالباً:

1 أمثل البيانات بشكل فن.

الخطوة 1: أحدد الحوادث المذكورة في التجربة العشوائية.

أفترض أن A هو حادث اختيار طالب ناجح في مادة اللغة العربية، وأن M هو حادث اختيار طالب ناجح في مادة الرياضيات.

الخطوة 2: أمثل الفضاء العيني والحوادث بشكل فن.

• أحدد عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط، وذلك بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معاً من عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية (A):

$$162 - 121 = 41$$

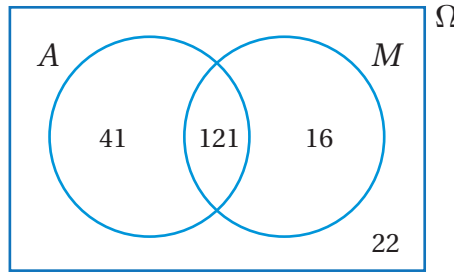
• أحدد عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات فقط، وذلك بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معاً من عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات (M):

$$137 - 121 = 16$$

• أحدد عدد الطلبة الذين لم ينجحوا في أي من المادتين، وذلك بطرح عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط، وعدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات فقط، وعدد الطلبة الناجحين في المادتين معاً، من العدد الكلي للطلبة:

$$200 - (41 + 16 + 121) = 200 - 178 = 22$$

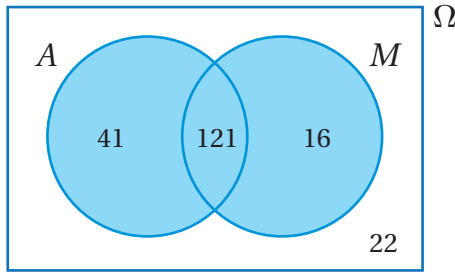
• أمثل هذه البيانات بشكل فن كالآتي:



أتعلم

ألاحظ أن عناصر الفضاء العيني التي لا ينتمي أي منها إلى الحادثين تقع خارج الدائرتين.

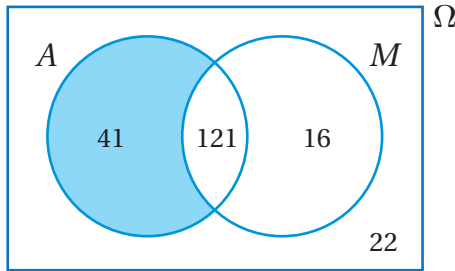
2 إذا اختير أحد الطلبة المتقدمين عشوائيًا، فأجد احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحًا في إحدى المادتين على الأقل.



إن كلمتي (على الأقل) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو اتحاد الحادث A والحادث M كما في الشكل المجاور. إذن:

$$P(A \cup M) = \frac{178}{200}$$

3 إذا اختير أحد الطلبة المتقدمين عشوائيًا، فأجد احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحًا في مادة اللغة العربية فقط.



إن احتمال أن يكون الطالب ناجحًا في مادة اللغة العربية فقط يعني إيجاد احتمال المنطقة المظللة في شكل فن المجاور. إذن:

$$P(A - M) = \frac{41}{200}$$

أتذكر

إن حادث نجاح الطالب في مادة اللغة العربية فقط يعني عدم نجاحه في مادة الرياضيات، وهو ما يُعبّر عنه بالرمز $A - M$ أو الرمز $A \cap \bar{M}$.

أنتحقق من فهمي

صفات وراثية: يوجد في أحد الصفوف 30 طالبة، منهن 16 طالبة من ذوات الشعر الأسود، و11 طالبة لون أعينهن بُنيّ، و7 طالبات لون أعينهن بُنيّ، وشعرهن أسود:

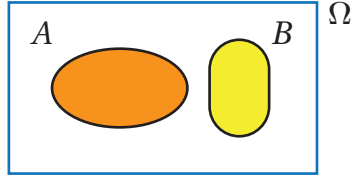
(a) أمثل البيانات بشكل فن.

(b) إذا اختيرت طالبة عشوائيًا، فأجد احتمال أن يكون شعرها أسود، أو لون عينيها بُنيًا.

(c) إذا اختيرت طالبة عشوائيًا، فأجد احتمال أن يكون لون عينيها بُنيًا، وشعرها ليس أسود.

(d) إذا اختيرت طالبة عشوائيًا، فأجد احتمال ألا يكون لون عينيها بُنيًا، وشعرها ليس أسود.

الحوادث المتنافية

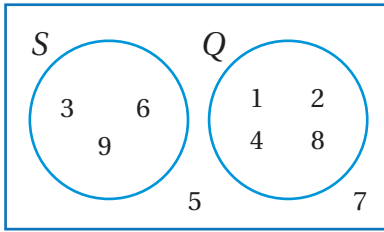


الحدثان A و B متنافيان

(mutually exclusive events) **الحوادث المتنافية**

هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها معاً؛ ما يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينها. فمثلاً، عند رمي حجر نرد مرة واحدة، فإن حادث ظهور العدد 5 لا يمكن أن يقع مع حادث ظهور العدد 6 في الوقت نفسه، وهذا يعني أن تقاطعهما هو $\emptyset$ ، وأن احتمال تقاطعهما هو صفر.

مثال 4



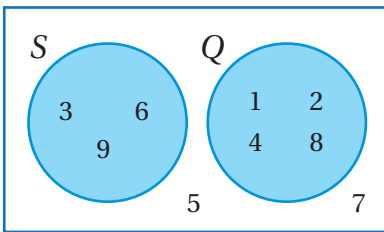
كُتِبَت الأعداد الصحيحة من 1 إلى 9 على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائياً، ومثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين S و Q في شكل فن المجاور. أجد كل من الاحتمالات الآتية:

1 $P(S \cap Q)$

ألاحظ من شكل فن أن الحادث S والحادث Q متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما. إذن:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

2 $P(S \cup Q)$

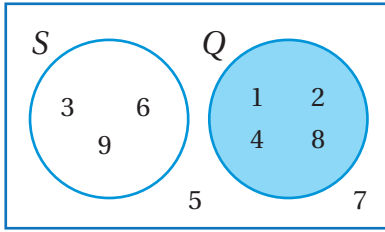


بما أن الحادث S والحادث Q متنافيان، فإن $S \cup Q$ يعني وقوع الحادث S فقط، أو وقوع الحادث Q فقط؛ لأنهما لا يقعان معاً. ومن ثم، فإن عدد عناصر هذا الحادث هو 7 كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور.

إذن، احتمال الحادث $S \cup Q$ هو:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

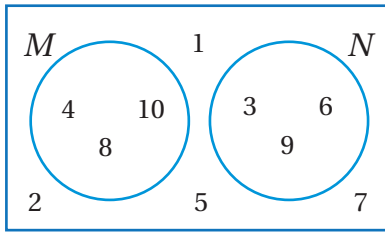
3 $P(Q - S)$



بما أن الحادث S والحادث Q متنافيان، فإن $Q - S$ يعني وقوع الحادث Q فقط؛ لأنهما لا يقعان معاً كما يظهر في المنطقة المظللة من الشكل المجاور. إذن:

$$P(Q - S) = \frac{4}{9}$$

أتحقق من فهمي



كُتِبَتِ الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائياً، ومثل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين M و N في شكل في المجاور. أجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

a) $P(M \cap N)$

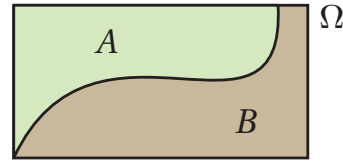
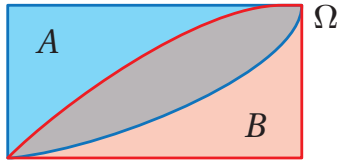
b) $P(M \cup N)$

c) $P(M - N)$

الحوادث المتنافية الشاملة

الحوادث الشاملة (exhaustive events) هي الحوادث التي يُشكّل اتحاد نواتجها المُحتَمَلة الفضاء العيني كاملاً. فمثلاً، عند إلقاء حجر نرد، فإن حادث ظهور عدد أكبر من 3 وحادث ظهور عدد أقل من 5 يُمثّلان حادثين شاملين. قد تكون بعض الحوادث متنافية وشاملة. فمثلاً، عند رمي حجر نرد، فإن حادث ظهور عدد فردي وحادث ظهور عدد زوجي يُمثّلان حادثين متنافيين؛ لأنه لا يمكن أن يقعا معاً. وهما أيضاً حادثان شاملان؛ لأن نواتجهما المُحتَمَلة تُشكّل الفضاء العيني كاملاً. يُظهر شكلان الآتيان كلاً من الحوادث المتنافية، والحوادث الشاملة، والحوادث المتنافية والشاملة:

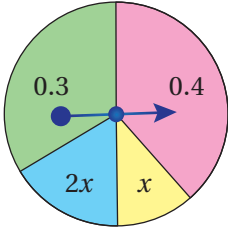
الحادث A والحادث B شاملان، لكنهما ليسا متنافيين



الحادث A والحادث B متنافيان وشاملان.

إذا كانت الحوادث متنافية وشاملة، فإن مجموع احتمالاتها هو 1.

مثال 5



قرص دائري مُقسَّم إلى 4 قطاعاتٍ غير مُتطابقة، ومُلَوَّنة بالأخضر والزهرى والأزرق والأصفر كما في الشكل المجاور. إذا كان الجدول الآتي يبين احتمال توقُّف المؤشِّر عند كلِّ لونٍ من هذه الألوان، فأجد قيمة x .

اللون	الأخضر	الزهرى	الأصفر	الأزرق
الاحتمال	0.3	0.4	x	$2x$

بما أنَّ حوادث توقُّف مؤشِّر القرص على الألوان الأربعة هي حوادث متنافية وشاملة، فإنَّ مجموع احتمالاتها هو 1:

$$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$$

مجموع الحوادث الشاملة

$$0.7 + 3x = 1$$

بجمع الثوابت، وجمع المتغيرات

$$3x = 0.3$$

بطرح 0.7 من الطرفين

$$x = 0.1$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

أتحقق من فهمي

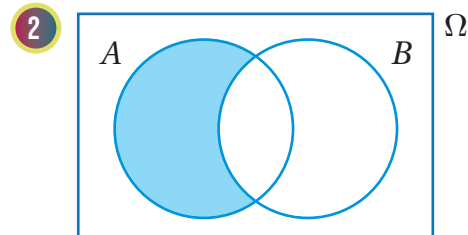
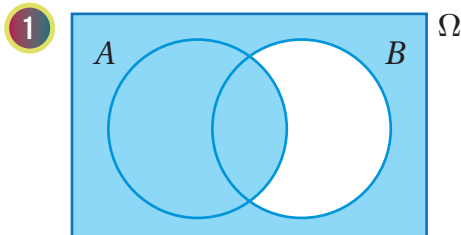
قرص دائري مُقسَّم إلى 3 قطاعاتٍ غير مُتطابقة، ومُلَوَّنة بالأحمر والأصفر والأزرق. إذا كان الجدول المجاور يبين احتمال توقُّف المؤشِّر عند كلِّ لونٍ من هذه الألوان، فأجد قيمة x .

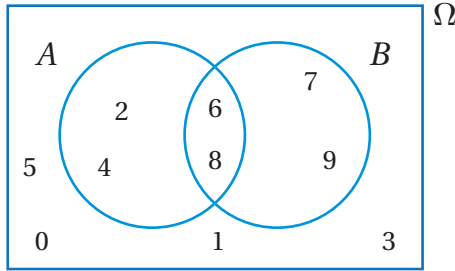
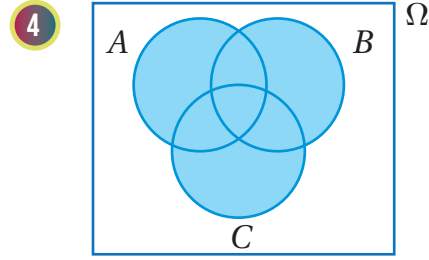
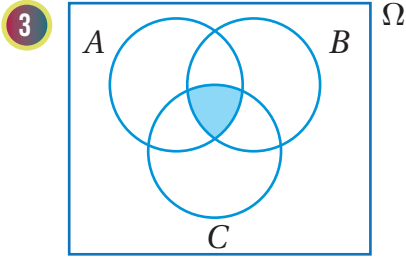
اللون	الأزرق	الأحمر	الأصفر
الاحتمال	0.3	0.4	x

أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ الْمَسَائِلَ



أُعَبِّرُ بِالرَّمُوزِ عَنِ الْحَادِثِ الَّذِي تُمَثِّلُهُ الْمُنْطَقَةُ الْمُظَلَّلَةُ فِي كُلِّ مِنْ أَشْكَالِ الْآتِيَةِ:





كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ من 0 إلى 9 على مجموعةٍ من البطاقاتِ المُتطابقةِ، ثمَّ اختيرتْ بطاقةٌ عشوائياً، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادِثين A و B في شكلٍ في المجاورِ. أجدُ كلاً من الاحتمالات الآتية:

5 $P(A)$

6 $P(B)$

7 $P(A \cap B)$

8 $P(A \cup B)$

9 $P(\bar{A})$

10 $P(\bar{B})$

11 $P(\overline{A \cap B})$

12 $P(\overline{A \cup B})$

13 $P(B - A)$

يحتوي صندوقٌ على بطاقاتٍ مُتطابقةٍ، ومُرَقَّمةٍ من 1 إلى 100. إذا سُحِبَت بطاقةٌ عشوائياً، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممَّا يأتي باستعمالِ أشكالٍ في:

14 أن يكونَ العددُ المُدوَّن على البطاقة من مضاعفاتِ العدد 15، ومضاعفاتِ العدد 10.

15 أن يكونَ العددُ المُدوَّن على البطاقة من مضاعفاتِ العدد 15 أو مضاعفاتِ العدد 10.

16 أن يكونَ العددُ المُدوَّن على البطاقة من مضاعفاتِ العدد 10، وليس من مضاعفاتِ العدد 15.

17 ألا يكونَ العددُ المُدوَّن على البطاقة من مضاعفاتِ العدد 10، ومضاعفاتِ العدد 15.

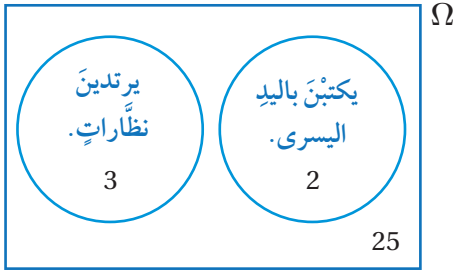


تغذية: في دراسةٍ شملت 320 شخصاً يعانون السمنة، تبين أن 130 شخصاً منهم يراجعون اختصاصي التغذية، وأن 147 شخصاً يمارسون الرياضة، وأن 64 شخصاً يراجعون اختصاصي التغذية، ويمارسون الرياضة معاً. إذا اختير أحد هؤلاء الأشخاص عشوائياً، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممَّا يأتي باستعمالِ أشكالٍ في:

18 أن يكونَ الشخصُ مَمَّن يمارسون الرياضة، ويراجعون اختصاصي التغذية.

19 أن يكونَ الشخصُ مَمَّن يمارسون الرياضة، ولا يراجعون اختصاصي التغذية.

20 أن يكونَ الشخصُ مَمَّن لا يمارسون الرياضة، ولا يراجعون اختصاصي التغذية.



صفات وراثية: سألت المعلمة الطالبات في أحد الصفوف عن ترتدي منهن نظارة، أو تكتب بيدها اليسرى، ثم لخصت البيانات في شكل فن المجاور. إذا اختيرت طالبة منهن عشوائياً، فأجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

21 أن تكون الطالبة ترتدي نظارة، وتكتب بيدها اليسرى.

22 أن تكون الطالبة ترتدي نظارة، أو تكتب بيدها اليسرى.

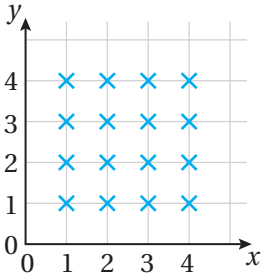
23 أن تكون الطالبة لا ترتدي نظارة.

الرقم	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

24 قرص دائري مُقسَّم إلى 6 قطاعات غير متطابقة، وهي مُرقَّمة بالأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6. إذا كان الجدول المجاور يُبين احتمال توقف المؤشِّر عند كل رقم من هذه الأرقام، فأجد قيمة x .

25 أحل المسألة الواردة بداية الدرس.

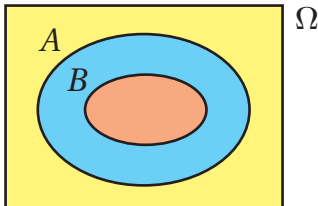
مهارات التفكير العليا



تبرير: يُبين مخطط الاحتمال المجاور الفضاء العيني لتجربة عشوائية. إذا كان الحادث A يُمثل النقاط الواقعة على المستقيم $y = x$ ، وكان الحادث B يُمثل النقاط الواقعة على المستقيم $y = 4 - x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

26 أمثل التجربة بأشكال فن.

27 إذا اختيرت نقطة عشوائياً، فأجد احتمال أن تقع على المستقيم $y = x$ ، والمستقيم $y = 4 - x$ ، مُبرراً إجابتي.



تبرير: أستخدم شكل فن المجاور لكتابة كل من الحوادث الآتية في أبسط صورة، مُبرراً إجابتي:

28 $A \cap B$

29 $A \cup B$

30 $B - A$

31 **مسألة مفتوحة:** أصف 3 حوادث متنافية وشاملة في تجربة عشوائية.

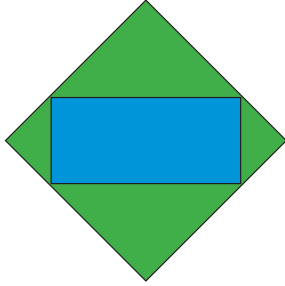
الاحتمال الهندسي Geometric Probability

- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال والمساحات والزوايا.
- الاحتمالات الهندسية.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

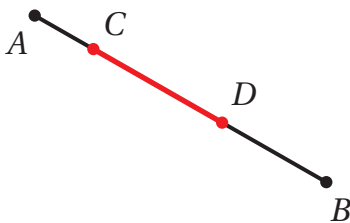


يُبين الشكل المجاور لوحة إعلانات مضيئة على شكل مُربّع أخضر، طول ضلعه 3 m، وفي داخله مستطيل أزرق، طوله 2.83 m، وعرضه 1.41 m. إذا كانت اللوحة تضاء بآلاف من وحدات البكسل الصغيرة، ورُصدت وحدة محروقة من هذه الوحدات، فأجد احتمال أن تكون من وحدات اللوح الأزرق.

الاحتمال الهندسي

تعلّمت سابقاً أنه إذا كانت التجربة العشوائية متساوية الاحتمال، فإن احتمال وقوع أيّ حادثٍ فيها يساوي نسبة عدد عناصر الحادث إلى عدد عناصر الفضاء العيني. والآن سأتعلّم كيف أجد احتمال تجارب عشوائية ترتبط بهذا المفهوم، لكنّها تتضمن مقاييس هندسية، مثل: الأطوال، والمساحات، والزوايا، وتُسمى الاحتمالات الهندسية (geometric probabilities).

الاحتمال الهندسي: الأطوال



يُبين الشكل المجاور القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ التي تحوي القطعة المستقيمة $\overline{CD}$. إذا اختيرت عشوائياً نقطة من النقاط الواقعة على $\overline{AB}$ ، ولتكن K ، فإن احتمال وقوع K على $\overline{CD}$ يساوي نسبة طول $\overline{CD}$ إلى طول $\overline{AB}$ ؛ لأن

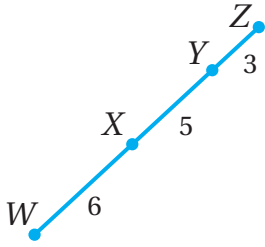
جميع النقاط الواقعة على $\overline{AB}$ تُمثّل عناصر الفضاء العيني للتجربة العشوائية، وجميع النقاط الواقعة على $\overline{CD}$ تُمثّل عناصر الحادث.

$$P(\overline{CD} \text{ على } K \text{ وقوع}) = \frac{CD}{AB}$$

أتعلّم

يتساوى الاحتمال في تجربة اختيار النقطة K ؛ لأن فرصة الوقوع هي نفسها لأي نقطة تقع على $\overline{AB}$.

مثال 1



مُعْتَمِدًا الشَّكْلَ المَجَاوِرَ، إِذَا اخْتِيرَتْ عَشَوَائِيًّا نَقْطَةً تَقَعُ عَلَى $\overline{WZ}$ ، فَأَجِدْ كُلَّ مِمَّا يَأْتِي:

1 احتمال وقوع النقطة على $\overline{YZ}$.

أَفْتَرِضْ أَنَّ حَادِثَ وَقُوعِ النِّقْطَةِ عَلَى $\overline{YZ}$ هُوَ A . وَبِذَلِكَ، فَإِنَّ:

$$P(A) = \frac{YZ}{WZ} \quad \text{صيغة الاحتمال باستعمال الطول}$$

$$= \frac{3}{14} \quad \text{بتعويض } YZ = 3, WZ = 14$$

2 احتمال وقوع النقطة على $\overline{XY}$.

أَفْتَرِضْ أَنَّ حَادِثَ وَقُوعِ النِّقْطَةِ عَلَى $\overline{XY}$ هُوَ B . وَبِذَلِكَ، فَإِنَّ:

$$P(B) = \frac{XY}{WZ} \quad \text{صيغة الاحتمال باستعمال الطول}$$

$$= \frac{5}{14} \quad \text{بتعويض } XY = 5, WZ = 14$$

3 احتمال عدم وقوع النقطة على $\overline{XY}$.

إِنَّ حَادِثَ عَدَمِ وَقُوعِ النِّقْطَةِ عَلَى $\overline{XY}$ هُوَ الْحَادِثُ الْمُتَمَمُّ لِلْحَادِثِ B . وَبِذَلِكَ، فَإِنَّ:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) \quad \text{صيغة احتمال المُتَمَمِّ}$$

$$= 1 - \frac{XY}{WZ} \quad \text{صيغة الاحتمال باستعمال الطول}$$

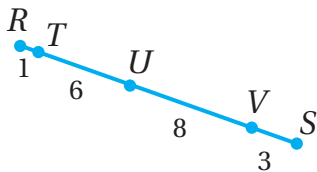
$$= 1 - \frac{5}{14} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{9}{14} \quad \text{بالتبسيط}$$

أفكّر

هل يُمكنُ إيجاد احتمال عدم وقوع النقطة على $\overline{XY}$ بطريقة أخرى؟

أتحقق من فهمي

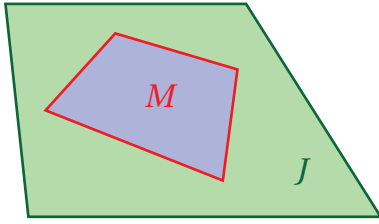


مُعْتَمِدًا الشَّكْلَ المَجَاوِرَ، إِذَا اخْتِيرَتْ عَشَوَائِيًّا نَقْطَةً تَقَعُ عَلَى $\overline{RS}$ ، فَأَجِدْ كُلَّ مَا يَأْتِي:

(a) احتمال وقوع النقطة على $\overline{TU}$. (b) احتمال وقوع النقطة على $\overline{US}$.

(c) احتمال عدم وقوع النقطة على $\overline{US}$.

الاحتمال الهندسي: المساحات



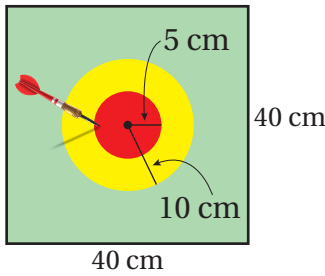
يُبين الشكل المجاور المنطقة J التي تحوي المنطقة M . إذا اختيرت عشوائياً نقطة من النقاط الواقعة في المنطقة J ، ولتكن K ، فإن احتمال وقوع K في المنطقة M يساوي نسبة مساحة المنطقة M إلى مساحة المنطقة J ؛ لأن جميع النقاط في المنطقة J تمثل عناصر الفضاء العيني للتجربة، وجميع النقاط في المنطقة M تمثل عناصر الحادث.

$$P(\text{وقوع } K \text{ في المنطقة } M) = \frac{(\text{مساحة المنطقة } M)}{(\text{مساحة المنطقة } J)}$$

أتعلم

يتساوى الاحتمال في تجربة اختيار النقطة K ؛ لأن فرصة الوقوع هي نفسها لأي نقطة تقع في المنطقة J .

مثال 2: من الحياة



لوحة أسهم: أطلق وليد سهمًا على لوحة الأسهم المجاورة. إذا وقع السهم عشوائيًا داخل اللوحة، فأجد احتمال وقوع السهم في المنطقة الحمراء.

افترض أن حادث وقوع السهم على المنطقة الحمراء هو A . وبذلك، فإن:

$$P(A) = \frac{\text{مساحة المنطقة الحمراء}}{\text{مساحة لوحة السهام}}$$

صيغة الاحتمال باستعمال المساحة

$$= \frac{\pi r^2}{s^2}$$

صيغة مساحة الدائرة، وصيغة مساحة المربع

$$= \frac{\pi(5)^2}{(40)^2}$$

بتعويض $r = 5$, $s = 40$

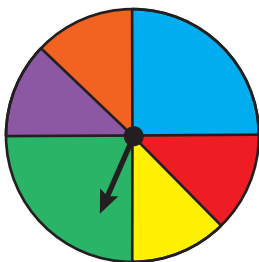
$$\approx 0.05$$

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

مُعتمدًا المعلومات المعطاة في المثال 2، أجد احتمال وقوع السهم في المنطقة الصفراء.

الاحتمال الهندسي: الزوايا



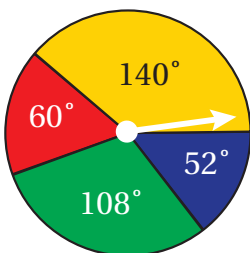
إذا دَوَّرَ المؤشِّرُ في القرصِ المجاورِ عشوائياً، فإنَّ احتمالَ توقُّفِ المؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ يساوي نسبةَ قياسِ زاويةِ القطاعِ الأخضرِ إلى مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرة؛ لأنَّ جميعَ المواقعِ في الدائرة تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربة، وجميعَ المواقعِ في القطاعِ الأخضرِ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{توقَّف المؤشِّر عند القطاع الأخضر}) = \frac{(\text{زاوية القطاع الأخضر})}{(\text{مجموع الزوايا حول مركز الدائرة})}$$

أتعلَّم

يتساوى الاحتمال في تجربة توقُّف المؤشِّر عند أيِّ موقعٍ في الدائرة؛ لأنَّ فرصة الوقوع هي نفسها لأيِّ موقعٍ يتوقَّف عنده المؤشِّر.

مثال 3



مُعتمداً زوايا القطاعات الظاهرة على القرصِ المجاور، أجدُ كُلاً ممَّا يأتي بعدَ تدويرِ مؤشِّرِ القرصِ:

1 احتمالُ توقُّفِ مؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأصفرِ هو A . وبذلك، فإنَّ:

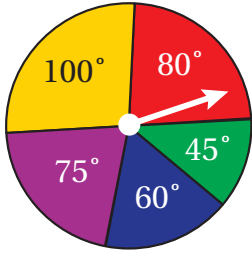
$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{(\text{زاوية القطاع الأصفر})}{(\text{مجموع الزوايا حول مركز الدائرة})} && \text{صيغة الاحتمال باستعمال الزوايا} \\ &= \frac{140^\circ}{360^\circ} && \text{بالتعويض} \\ &= \frac{7}{18} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

2 احتمالُ توقُّفِ مؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أو القطاعِ الأحمرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أو القطاعِ الأحمرِ هو B . وبذلك، فإنَّ:

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{مجموع زاويتي القطاعين الأزرق والأحمر}}{(\text{مجموع الزوايا حول مركز الدائرة})} && \text{صيغة الاحتمال باستعمال الزوايا} \\ &= \frac{60^\circ + 52^\circ}{360^\circ} && \text{بالتعويض} \\ &= \frac{112^\circ}{360^\circ} = \frac{14}{45} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أنتحَقُّ من فهمي



مُعْتَمِدًا زوايا القطاعات الظاهرة على القرص المجاور، أجدُ كُلَّ ممَّا يأتي بعدَ تدويرِ مؤشرِ القرصِ:

(a) احتمالُ توقُّفِ مؤشرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ.

(b) احتمالُ توقُّفِ مؤشرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أو القطاعِ الأحمرِ.

أَتَذَكَّرُ

في الاحتمال، يدلُّ حرفُ العطفِ (أو) على الاتحادِ.



أَتَدَرَّبُ وأُحَلِّ المسائل



مُعْتَمِدًا الشكلَ المجاور، إذا اختيرت عشوائيًا نقطة تقعُ على $\overline{WZ}$ ، فأجدُ كُلَّ ممَّا يأتي:

2 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

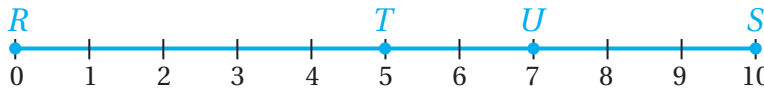
1 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XZ}$.

4 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WY}$.

3 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WX}$ أو $\overline{YZ}$.

5 احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.

مُعْتَمِدًا الشكلَ المجاور، إذا اختيرت عشوائيًا نقطة تقعُ على $\overline{RS}$ ، فأجدُ كُلَّ ممَّا يأتي:



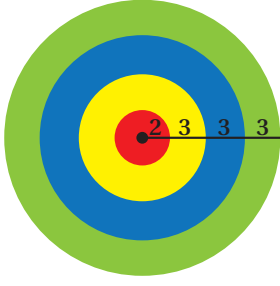
7 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TS}$.

6 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$.

9 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$.

8 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$ أو $\overline{US}$.

10 احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$.



لوحة أسهم: أطلقت دلاً سهماً على لوحة الأسهم المجاورة. إذا وقع السهم عشوائياً

داخل اللوحة، فأجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

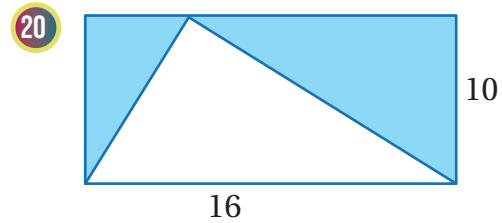
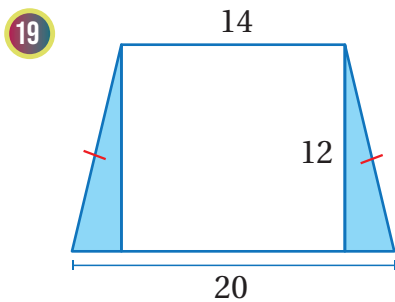
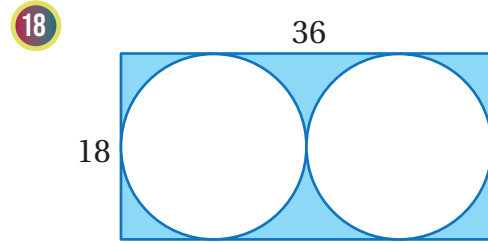
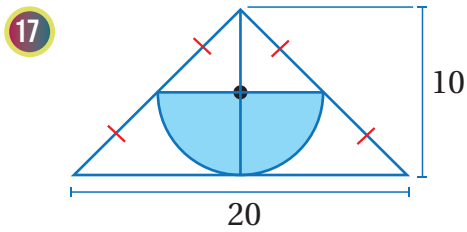
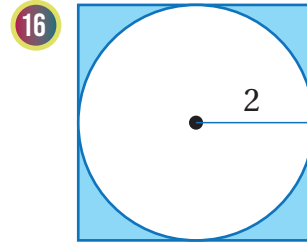
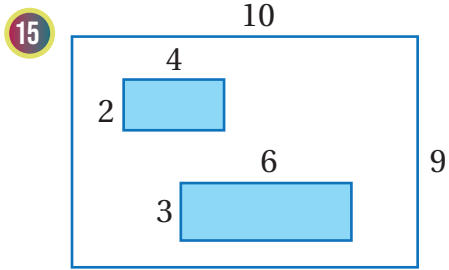
11 وقوع السهم على المنطقة الحمراء.

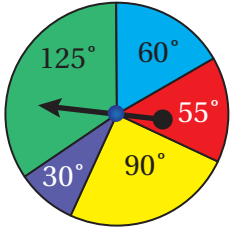
12 وقوع السهم على المنطقة الصفراء.

13 عدم وقوع السهم على المنطقة الزرقاء.

14 وقوع السهم على المنطقة الخضراء أو المنطقة الصفراء.

إذا اختيرت نقطة عشوائياً من كل شكل من الأشكال الآتية، فأجد احتمال وقوعها في المنطقة المظللة بالأزرق:





مُعتمداً زوايا القطاعات الظاهرة على القرص المجاور، أجدُ كُلَّ ممّا يأتي بعد تدوير مؤشر القرص:

21 احتمال توقّف مؤشر القرص عند القطاع البنفسجيّ.

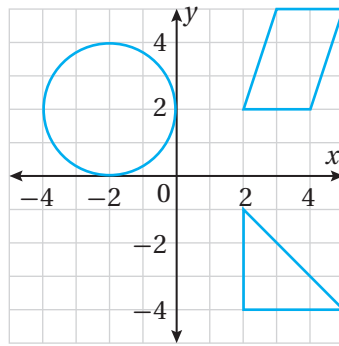
22 احتمال توقّف مؤشر القرص عند القطاع الأصفر أو القطاع الأخضر.

23 احتمال عدم توقّف مؤشر القرص عند القطاع الأحمر.

مهارات التفكير العليا

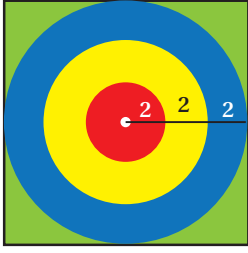
24 **تبرير:** إذا كانت $\overline{BZ}$ تحوي $\overline{MN}$ ، وكان $BZ = 20$ ، واختيرت نقطة عشوائياً على $\overline{BZ}$ ، وكان احتمال وقوعها على $\overline{MN}$ هو 0.3، فأجد طول $\overline{MN}$ ، مُبرراً إجابتي.

25 **تبرير:** في المستوى الإحداثي المجاور، إذا اختير الزوج المرتب (x, y) عشوائياً، حيث: $-5 \leq x \leq 5$ ، و $-5 \leq y \leq 5$ ، فأجد احتمال ألا يقع الزوج المرتب في أيّ من المثلث، والدائرة، ومتوازي الأضلاع، مُبرراً إجابتي.



26 **مسألة مفتوحة:** مُعتمداً $\overline{AE}$ ، أصفُ حادثاً احتمالهُ أكبر من $\frac{1}{2}$ (أكتب ثلاثة حلولٍ ممكنة).

اختبار نهاية الوحدة



4 أطلق سهمٌ على لوحة الأسهم المجاورة. إذا وقع السهم عشوائياً داخل اللوحة، فإن احتمال وقوعه على المنطقة الصفراء هو:

a) $\frac{\pi}{36}$

b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{9}$

d) $\frac{\pi}{4}$

يُبين الجدول الآتي قياسات أحذية لمجموعة من الطلبة:

المقاس	33	34	35	36	37	38	39
الترار	1	3	8	14	6	2	1

5 أجد تباين قياسات الأحذية.

6 أجد الانحراف المعياري لقياسات الأحذية.

حوّلت مجموعة من البيانات، عددها 50، باستعمال العلاقة: $y = x - 70$ ، حيث y المشاهد بعد التحويل، و x المشاهد قبل التحويل. إذا كان:

$\sum y = -135$, $\sum y^2 = 2567$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

7 الوسط الحسابي للملاحظات قبل التحويل.

8 الانحراف المعياري للملاحظات قبل التحويل.

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 تباين مجموعة البيانات الآتية مُقَرَّباً إلى أقرب منزلة عشرية هو:

11, 13, 14, 16, 18

a) 5.8

b) 2.4

c) 14.4

d) 3.8

2 استُعملت العلاقة: $y = 2x - 15$ لتعديل مجموعة من البيانات. إذا كان الانحراف المعياري للبيانات قبل التحويل هو 3، فإن الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل هو:

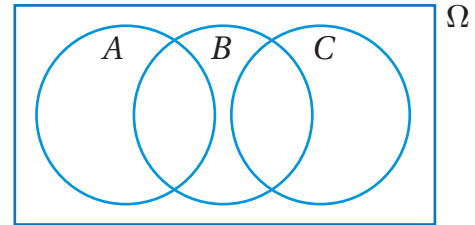
a) -9

b) 21

c) 3

d) 6

3 الحادث A والحادث C في شكل في الآتي هما:



(a) حادثان شاملان.

(b) حادثان متنافيان.

(c) حادثان متنافيان وشاملان.

(d) حادثان متقاطعان.

اختبار نهاية الوحدة

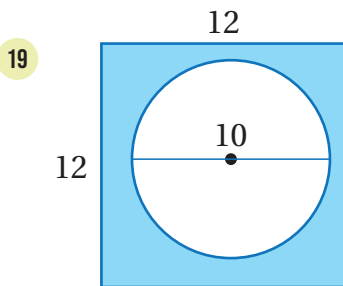
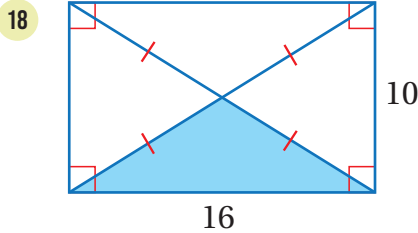
في مجموعة تضم 25 شخصاً من منتسبي أحد النوادي الرياضية، كان 13 شخصاً منهم يمارسون لعبة كرة السلة، و11 شخصاً يمارسون لعبة كرة القدم، و6 أشخاص يمارسون لعبة كرة السلة ولعبة كرة القدم معاً. إذا اختير شخص منهم عشوائياً، فأجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال أشكال فن:

15 أن يكون الشخص ممن يمارسون لعبة كرة السلة أو لعبة كرة القدم.

16 أن يكون الشخص ممن يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

17 أن يكون الشخص ممن لا يمارسون لعبة كرة السلة، ولا يمارسون لعبة كرة القدم.

إذا اختيرت نقطة عشوائياً من كل شكل من الشكلين الآتين، فأجد احتمال وقوعها في المنطقة المظللة باللون الأزرق.



في ما يأتي أسعار مجموعة من السيارات المستعملة بالدينار:

2590	2650	2650	2790	2850	2925
3090	3125	3125	3420	3595	3740
3750	3920	3945	4050	4150	4200

9 أمثل البيانات باستعمال مدرج تكراري ذي فئات متساوية الطول.

10 أكتب وصفاً للبيانات.

عدد الجرائد	التكرار
81 – 85	4
86 – 90	5
91 – 95	4
96 – 100	2
المجموع	15

يُبين الجدول الآتي توزيعاً لعدد الجرائد المباعة في إحدى المكتبات خلال 15 يوماً:

11 أقدّر الوسط الحسابي للبيانات.

12 أقدّر منوال البيانات.

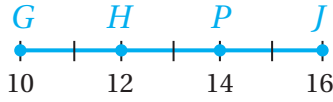
13 أحدد الفترة التي يقع فيها وسيط البيانات.

14 يُبين الجدول التكراري التالي كمية الماء (بالتر) التي استهلكتها مجموعة من الأشخاص في أحد الأيام. أمثل البيانات باستعمال المدرج التكراري.

كمية الماء (L)	التكرار
$75 \leq s < 125$	45
$125 \leq s < 150$	50
$150 \leq s < 175$	70
$175 \leq s < 225$	90
$225 \leq s < 300$	45

اختبار نهاية الوحدة

مُعْتَمِدًا الشَّكْلَ الْآتِيَّ، إِذَا اخْتِيرَتْ عَشَوَائِيًّا نَقْطَةً تَقَعُ عَلَى $\overline{GJ}$ ، فَاجِدْ كُلًّا مِمَّا يَلِي:



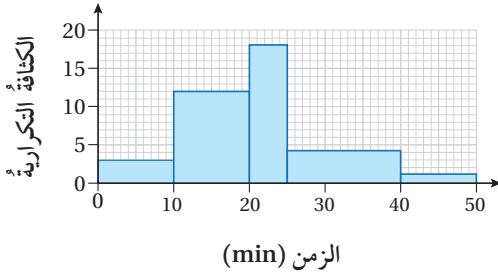
26 احتمال وقوع النقطة على $\overline{HP}$.

27 احتمال وقوع النقطة على $\overline{GP}$.

28 احتمال وقوع النقطة على $\overline{HJ}$.

تدريب على الاختبارات الدولية

يُبَيِّنُ الْمُدْرَجُ التَّكَرُّرِيَّ الْآتِيَّ الزَّمَنَ (بالدقائق) الذي استغرقه مجموعة من المرضى في الانتظار قبل دخولهم عند طبيب الأسنان خلال أسبوع:



29 أجد عدد المرضى الذين انتظروا أكثر من 30 دقيقة قبل الدخول عند الطبيب.

30 أجد عدد المرضى الذين انتظروا من 10 دقائق إلى 40 دقيقة قبل الدخول عند الطبيب.

قيست أطوال 8 أشخاص بوحدة السنتيمتر، وكانت النتائج كالآتي:

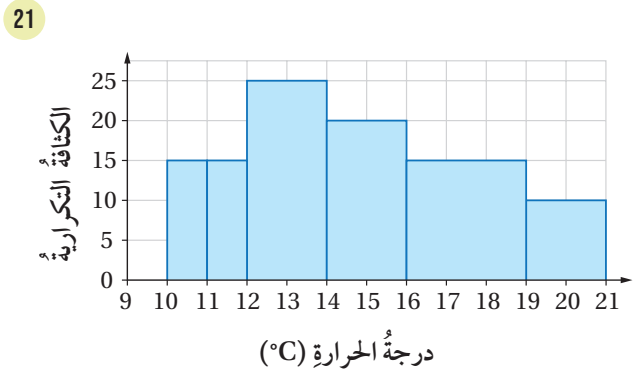
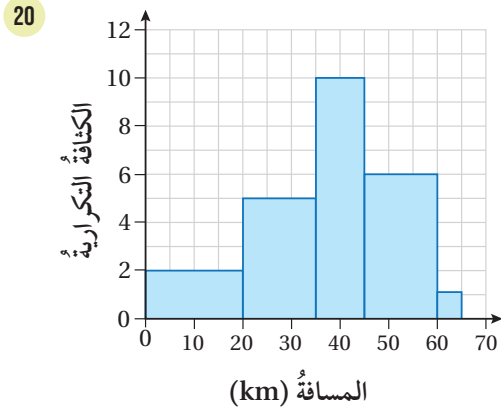
165 170 190 180

175 185 176 184

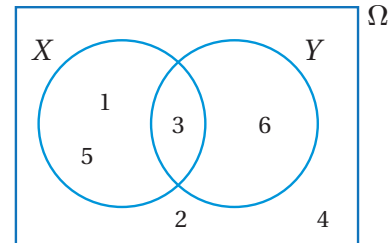
31 أجد تباين أطوال الأشخاص الثمانية.

32 أجد الانحراف المعياري لأطوال الأشخاص الثمانية.

أنشئ جدولاً تكرارياً لكل مُدرَجٍ تكراريٍّ مما يأتي:



كُتِبَتِ الأَعْدَادُ الصَّحِيحَةُ مِنْ 1 إِلَى 6 عَلَى مَجْمُوعَةٍ مِنَ البطاقاتِ الْمُتَطَابِقَةِ، ثُمَّ اخْتِيرَتْ بَطَاقَةٌ عَشَوَائِيًّا، وَمُثِّلَ الْفَضَاءُ الْعَيْنِيُّ لِهَذِهِ التَّجَرِبَةِ الْعَشَوَائِيَّةِ الَّتِي تَحْوِي الْحَادِثِينَ X وَ Y شَكْلٌ فِي الْآتِي. أجد كُلَّ مِنَ الاحتمالات الآتية:



22 $P(X \cap Y)$

23 $P(X \cup Y)$

24 $P(\overline{X \cup Y})$

25 $P(X - Y)$