3 كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود

السابق

- لقد مثلت دوالاً تربيعيةً بيانيًا وحللت معادلاتٍ تربيعية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها وقسمتها وتحليلها إلى العوامل.
  - تحليل الدوال كثيرة الحدود وتمثيلها بيانيًا.
  - إيجاد قيم الدوال كثيرة الحدود وحلّ المعادلات كثيرة الحدود.
  - إيجاد عوامل وأصفار الدوال كثيرة الحدود.

لماذا؟

- **النقل** يمكن استخدام الدوال كثيرة الحدود لتحديد جداول مواعيد الحافلات وسعة الطرقات السريعة والأنماط المرورية ومتوسط تكاليف الوقود وأسعار السيارات الجديدة والمستعملة.

chapter sourced from Polynomials and Polynomial Functions, from Algebra 2 Chapter 5 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد | **لديك خياران للتحقق من المهارات الأساسية.**

1 خيار الكتاب المدرسي

قم بالتمرين السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تمرين سريع

أعِد كتابة كل فرقٍ على هيئة مجموع.

1. $-5 - 13$
2. $5 - 3y$
3. $5mr - 7mp$
4. $3x^2y - 14xy^2$

5. **الحفلات** حضر عشرون شخصًا حفل وداع زايد. وغادر الضيوف في مجموعاتٍ من 2. وبحلول الساعة 9:00. كانت x مجموعةً قد غادرت. أعد كتابة عدد الضيوف المتبقين عند الساعة 9:00 في صورة مجموع.

استخدم خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل تعبير بدون أقواس.

6. $-4(a + 5)$
7. $-1(3b\ 2 + 2b - 1)$
8. $-\frac{1}{2}(2m - 5)$
9. $-\frac{3}{4}(3z + 5)$

10. **المال** يشتري سعيد البيتزا والمياه الغازية لأعضاء النادي العلمي. تكلف شريحة البيتزا الواحدة AED 2.25، وعلبة الصودا AED 1.25. اكتب تعبيرًا لتمثيل المبلغ الذي سينفقه سعيد على 15 طالبًا. وجد قيمة التعبير باستخدام خاصية التوزيع.

حُلّ كل معادلة مما يلي.

11. $x^2 + 2x - 8 = 0$
12. $2x^2 + 7x + 3 = 0$
13. $6x^2 + 5x - 4 = 0$
14. $4x^2 - 2x - 1 = 0$

15. **الفيزياء** إذا أُسقط جسم من ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، فيُمكننا إيجاد ارتفاعه بعد t s بالعلاقة $h = -16t^2 + 50$. استخدم المعادلة $0 = -16t^2 + 50$ لإيجاد الزمن الذي سيُستغرق حتى وصول الكرة إلى الأرض.

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة $2xy - 3 - z$ على هيئة مجموع.

التعبير الأصلي: $2xy - 3 - z$

أعد الكتابة باستخدام الجمع: $= 2xy + (-3) + (-z)$

مثال 2

استخدم الخاصية التوزيعية لإعادة كتابة $-3(a + b - c)$.

التعبير الأصلي: $-3(a + b - c)$

خاصية التوزيع: $= -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$

بسّط: $= -3a - 3b + 3c$

مثال 3

حُلّ $2x^2 + 8x + 1 = 0$.

الصيغة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 2, b = 8, c = 1$: $= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

بسّط: $= \frac{-8 \pm \sqrt{56}}{4}$

$\sqrt{56} = \sqrt{4 \cdot 14}$ or $2\sqrt{14}$: $= -2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$

الحلّان الدقيقان هما $-2 + \frac{\sqrt{14}}{2}$ و $-2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$.

الحلّان التقريبيان هما -0.13 و -3.87.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

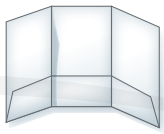
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك لهذه الوحدة. لكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظّم الدراسة

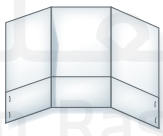
كثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بكثيرات الحدود والدوال كثيرة الحدود. ابدأ بورقة أبعادها 21.6 cm في "35.6 cm".

1 **شكّل** طيةً بعرض سنتيمترين بطول الجزء السفلي من الورقة بالاتجاه الطولي.

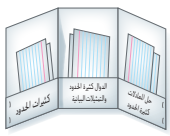
2 **اطوِ** الورقة عرضيًا إلى ثلاثة أثلاث.



3 **دبّس** الحافتين الخارجيتين للشريط.



4 **ضع** على تبويبات الطيات الثلاثة التسميات: كثيرات الحدود، و الدوال والرسوم البيانية لكثيرات الحدود، وحلّ المعادلات كثيرة الحدود.



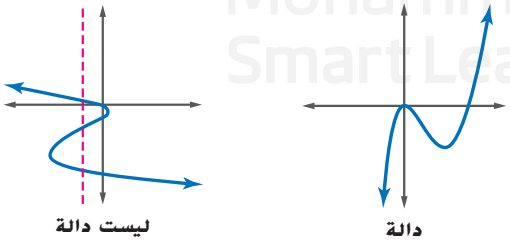
المفردات الجديدة

simplify	بسّط
degree of a polynomial	درجة كثيرة الحدود
synthetic division	قسمة تركيبية
polynomial in one variable	كثيرة حدود في متغير واحد
leading coefficient	معامل رئيس
polynomial function	دالة كثيرة الحدود
power function	دالة قوة
end behavior	السلوك الطرفي
relative maximum	القيمة العظمى النسبية
relative minimum	القيمة الصغرى النسبية
extrema	قيم قصوى
turning points	نقاط الدوران
prime polynomials	كثيرات حدود أولية
quadratic form	القانون العام
synthetic substitution	تعويض تركيبي
depressed polynomial	كثيرة حدود منخفضة

مراجعة المفردات

التحليل إلى العوامل التعبير عن كثيرة حدود على هيئة جداء أحاديات وكثيرات حدود

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى



كثيرة الحدود أحادية حدّ أو مجموع أحاديات حدود

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الوحدة 1

3-1 العمليات على كثيرات الحدود

السابق:
- لقد أوجدت قيمة الأسس.

الحالي:
1. ضرب وقسمة وتبسيط أحاديات الحد والتعابير التي تحتوي على قوى.
2. جمع وطرح وضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟
- يستغرق نور الشمس تقريبًا 8 دقائق للوصول إلى الأرض. ولذلك إن كنت تتشمس تحت أشعة الشمس في الخارج الآن، تكون الأشعة التي تصلك قد أطلقتها الشمس قبل 8 دقائق.

ينتقل الضوء بسرعةٍ كبيرةٍ تساوي تقريبًا 3×10^8 مترًا في الثانية. فكم يستغرق ضوء منبعث عن مجرة أندروميرا في الوصول إلى هنا، علمًا أن المجرة تبعد تقريبًا مسافة 2.367×10^{21} مترًا؟

المفردات الجديدة

بسّط (simplify)

درجة كثيرة الحدود (degree of a polynomial)

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 ضرب أحاديات الحد وقسمتها

يقصد **بتبسيط** تعبيرٍ يضم قوى، إعادة كتابة التعبير بدون أقواس أو أسسٍ سالبة. والأسس السالبة طريقةٌ للتعبير عن المعكوس الضربي لعدد. ويلخص الجدول التالي خواص الأسس.

ملخص المفهوم خواص الأسس

لأي عددين حقيقيين x و y، والعددين الصحيحين a و b:

الخاصية	التعريف	الأمثلة
ناتج ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	3^6 أو $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$ p^{11} أو $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9}$
ناتج قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, x \neq 0$	9^3 أو $\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2}$ b^2 أو $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4}$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ و $\frac{1}{x^{-a}} = x^a, x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوى	$(x^a)^b = x^{ab}$	3^6 أو $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2}$ d^8 أو $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4}$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$16k^4$ أو $(2k)^4 = 2^4 k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0$، و $\frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$ أو $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة صفر	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

تذكر أن *أحادية الحد* هي عدد أو متغير أو تعبير يمثل ناتج ضرب واحد أو أكثر من المتغيرات ذات الأسس الصحيحة غير السالبة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند تبسيط أحادية حد، تحقق للتأكد من تبسيطها تمامًا.

المفهوم الأساسي تبسيط أحاديات الحد

يكون التعبير أحادي الحد في أبسط صورة عندما:

- لا يوجد قوى للأسس
- يظهر كل أساس مرة واحدة فقط
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة
- لا توجد أسس سالبة.

مثال 1 تبسيط التعابير

بسّط كل تعبير. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي 0.

a. $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

$(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$ التعبير الأصلي

$= 2\left(\frac{1}{a^2}\right)(3a^3b^2)\left(\frac{1}{c^2}\right)$ تعريف الأسس السالبة

$= \left(\frac{2}{a \cdot a}\right)(3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b)\left(\frac{1}{c \cdot c}\right)$ تعريف الأسس

$= \left(\frac{2}{a \cdot a}\right)(3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b)\left(\frac{1}{c \cdot c}\right)$ اقسم العوامل المشتركة

$= \frac{6ab^2}{c^2}$ بسّط

b. $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

$\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$ ناتج قسمة القوى

$= q^{-5}r$ اطرح القوى

$= \frac{r}{q^5}$ بسّط

c. $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

$\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$ القوة لناتج القسمة

$= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$ القوة لناتج الضرب

$= \frac{-8a^{12}}{b^6}$ القوة للأس

نصيحة في حل المسائل

التحقق يمكنك دائمًا التحقق من الإجابة باستخدام تعريف الأسس.

$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$

$= \frac{1}{q^5}$

تمرين موجّه

1A. $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

1B. $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

1C. $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

1D. $(-2x^3y^2)^5$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 العمليات على كثيرات الحدود

درجة كثيرة الحدود هي درجة أحادية الحد ذات الدرجة الأكبر.

نصيحة دراسية

القوة الأسية للعدد 1 تذكر أن المتغير بدون أس يمكن كتابته في صورة القوة الأسية 1.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدّد ما إن كان كل تعبير مما يلي كثيرة حدود. فإن كان كذلك، فاذكر درجة كثيرة الحدود.

a. $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

هذا التعبير كثيرة حدود لأن كل حدّ هو حدّ أحادي. ودرجة الحدّ الأول هي 4 + 3 أو 7، ودرجة الحد الثاني هي 5. ودرجة كثيرة الحدود هي 7.

b. $\sqrt{x} + x + 4$

لا يمثل هذا التعبير كثيرة حدود لأن $\sqrt{x}$ ليست أحادية حد.

c. $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

لا يمثل هذا التعبير كثيرة حدود لأن x^{-3} و x^{-2} ليسا من أحاديات الحد:

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ و $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. لا يمكن أن تضم أحاديات الحدّ متغيراتٍ في المقام.

تمرين موجّه

2A. $\frac{x}{y} + 3x^2$ **2B.** $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$

يمكنك تبسيط كثيرات الحلول بالطريقة التي تبسط بها أحاديات الحد. حسب العمليات المشار إليها، ودمج الحدود المتشابهة.

مثال 3 تبسيط التعابير كثيرة الحدود

نصيحة دراسية

الأساليب البديلة لاحظ أن المثال 3a يستخدم الطريقة الأفقية، والمثال 3b يستخدم الطريقة الرأسية للتبسيط. وكلا الطريقتين تعطي حلاً صحيحًا.

حوّل كل تعبير مما يلي لأبسط صورة.

a. $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

قم بإزالة الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة معًا.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$ وزّع 1−.

$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= 2x^2 - 8x + 7$ ادمج الحدود المتشابهة.

b. $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

قم بمحاذاة الحدود المتشابهة رأسيًا واجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

تمرين موجّه

3A. $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$ **3B.** $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

ينتج عن جمع الأعداد الصحيحة أو طرحها عددًا صحيحًا، ولذلك فإن الجمع والطرح محصوران ضمن مجموعة الأعداد الصحيحة. وبصورةٍ مشابهة، ونظرًا إلى أن جمع كثيرات حدودٍ أو طرحها يعطي كثيرة حدود، فإن الجمع والطرح محصوران ضمن مجموعة كثيرات الحدود.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

يمكنك استخدام خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 التحويل لأبسط صورة باستخدام خاصية التوزيع

جد $3x(2x^2 - 4x + 6)$.

$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$ خاصية التوزيع

$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$ اضرب أحاديات الحد.

تمرين موجّه

جد كل ناتج ضرب مما يلي.

4A. $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

4B. $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

مثال من الحياة اليومية 5 كتابة تعبير كثيرة حدود

القيادة تحدّد دائرة المرور الزمن الذي يستطيع خلاله سائقو الشاحنات العمل بين فترات الراحة بعشر ساعات. يقود محمود شاحنته خلال الفترة الأولى من نوبة عمله بسرعة 60 كيلومترًا في الساعة، ويقود خلال الفترة الثانية من النوبة بسرعة 70 كيلومترًا في الساعة. اكتب كثيرة حدود لتمثيل المسافة التي يقطعها.

الشرح: 60 kmph في بعض الوقت و 70 kmph في الباقي

المتغير: افترض أن x = عدد ساعات القيادة بسرعة 60 كيلومترًا في الساعة.

التعبير: $60x + 70(10 - x)$

$60x + 70(10 - x)$ التعبير الأصلي

$= 60x + 700 - 70x$ خاصية التوزيع

$= 700 - 10x$ ادمج الحدود المتشابهة.

كثيرة الحدود هي $700 - 10x$.

تمرين موجّه

5. بحوزة طارق مبلغ AED 900 يود استثمارها في حسابٍ للتوفير بنسبة مرابحة تساوي 1.8%. وفي حسابٍ لسوق المال يدفع له نسبة 4.2% في العام. اكتب كثيرة حدود للمرابحة التي سيجنيها في عام واحد إذا استثمر x درهمًا في حساب التوفير.

مهنة من الحياة اليومية

سائق الشاحنة يعدّ سائقو الشاحنات تقنيين محترفين لأنه يطلب منهم تحصيل تعليم وترخيص مهني. وعلى الرغم من أن دوائر المركبات الآلية تخضع السائقين لبرنامج ترخيص تجاري، بيد أن القانون يفرض متطلباتٍ للحصول على هذا الترخيص.

كما هو الحال مع الجمع والطرح، فإن الضرب محصورٌ ضمن كثيرة الحدود.

مثال 6 ضرب كثيرات الحدود

جد $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$.

$(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$

$= n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$ خاصية التوزيع

$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$ خاصية التوزيع

$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$ اضرب أحاديات الحد.

$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$ ادمج الحدود المتشابهة.

تمرين موجّه

جد كل ناتج ضرب مما يلي.

6A. $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

6B. $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف محفوظة © لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **حوّل لأبسط صورة. افترض عدم وجود أي متغير يساوي صفرًا.**

1. $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$
2. $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$
3. $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$
4. $(6g^5h^{-4})^3$

مثال 2 **حدّد ما إن كان كل تعبير كثيرة حدود. فإن كان كذلك، فاذكر درجة كثيرة الحدود.**

5. $3x + 4y$
6. $\frac{1}{2}x^2 - 7y$
7. $x^2 + \sqrt{x}$
8. $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$

الأمثلة 3–4، و 6 **حوّل لأبسط صورة.**

9. $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$
10. $(3a + 4b) + (6a - 6b)$
11. $2a(4b + 5)$
12. $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$
13. $(n - 9)(n + 7)$
14. $(a + 4)(a - 6)$

مثال 5

15. **تمرين** تتمرّن فوزية لمدة 75 دقيقةً في اليوم. وهي تمارس تمارين الأيروبيك، والذي يحرق في المتوسط 10 سعراتٍ في الدقيقة، وتمرين الأثقال، والذي يحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. اكتب كثيرة حدود لتمثيل كمية السعرات الحرارية التي تحرقها فوزية في يوم واحد إذا كانت تقضي x دقيقةً في تمرين الأثقال.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي 0.**

16. $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$
17. $(-2b^3c)(4b^2c^2)$
18. $\frac{a^3n^7}{an^4}$
19. $\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$
20. $\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$
21. $\frac{9a^7b^5c^5}{18a^5b^9c^3}$
22. $(n^5)^4$
23. $(z^3)^6$

مثال 2 **حدّد ما إن كان كل تعبير كثيرة حدود. فإن كان كذلك، فاذكر درجة كثيرة الحدود.**

24. $2x^2 - 3x + 5$
25. $a^3 - 11$
26. $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$
27. $\sqrt{m - 7}$

الأمثلة 3–4، و 6 **حوّل لأبسط صورة.**

28. $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$
29. $(7b^2 + 6b - 7) - (4b^2 - 2)$
30. $3p(np - z)$
31. $4x(2x^2 + y)$
32. $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$
33. $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$
34. $4(a^2 + 5a - 6) - 3(2a^3 + 4a - 5)$
35. $5c(2c^2 - 3c + 4) + 2c(7c - 8)$
36. $5xy(2x - y) + 6y^2(x^2 + 6)$
37. $3ab(4a - 5b) + 4b^2(2a^2 + 1)$
38. $(x - y)(x + y)(2x + y)$
39. $(a + b)(2a + 3b)(2x - y)$

مثال 5

40. **الطلاء** استأجر حميد عاملين لطلاء منزله. يتقاضى عامل الطلاء الأول 12 AED في الساعة ويتقاضى عامل الطلاء الثاني 11 AED في الساعة. ويستغرق طلاء المنزل 15 ساعة.

a. اكتب كثيرة حدود تمثل التكلفة الإجمالية للمهمة إذا عمل عامل الطلاء الأول لمدة x ساعة.

b. اكتب كثيرة حدود تمثل التكلفة الإجمالية للمهمة إذا عمل عامل الطلاء الثاني لمدة y ساعة.

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي 0.

41. $\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$

42. $\left(\frac{12a^3b^5}{4a^6b^3}\right)^3$

43. $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$

44. $\left(\frac{5a^{-7}b^2}{ab^{-6}}\right)^{-3}$

45. $(a^2b^3)(ab)^{-2}$

46. $(-3x^3y)^2(4xy^2)$

47. $\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$

48. $\frac{-10g^6h^9(g^2h^3)}{30g^3h^3}$

49. $\frac{5x^4y^2(2x^5y^6)}{20x^3y^5}$

50. $\frac{-12n^7p^5(n^2p^4)}{36n^6p^7}$

51. **علم الفلك** راجع بداية الدرس.

a. كم يستغرق وصول الضوء من مجرة أندروميدا إلى الأرض؟

b. تساوي المسافة المتوسطة من الشمس إلى المريخ تقريبًا 2.28×10^{11} m. فكم يستغرق وصول الضوء من الشمس إلى المريخ؟

حوّل لأبسط صورة.

52. $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

53. $\frac{1}{3}n^3(6n - 9p + 18np^4)$

54. $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$

55. $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

56. $(g^3 - h)(g^3 + h)$

57. $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$

58. $(2x - 2y)^3$

59. $(4n - 5)^3$

60. $(3z - 2)^3$

61. **التمثيل** كثيرتا الحدود $0.108x^2 - 0.876x + 474.1$ و $0.047x^2 + 9.694x + 361.7$ يقربان عدد شهادات البكالوريوس بالألف والتي حصل عليها الذكور والإناث تباعًا، حيث يمثل x عدد الأعوام بعد 1971.

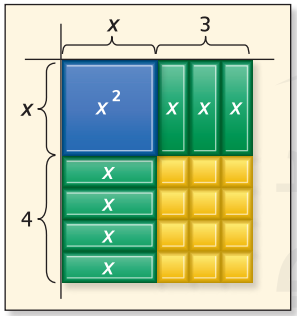
a. جد كثيرة الحدود التي تمثل إجمالي عدد شهادات البكالوريوس (بالألف) التي حصل عليها الذكور والإناث.

b. جد كثيرة الحدود التي تمثل الفرق بين عدد شهادات البكالوريوس التي حصل عليها الذكور والإناث.

62. إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟

63. ما قيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟

64. **التمثيلات المتعددة** استخدم النموذج الموضح الذي يمثل ناتج ضرب $x + 3$ و $x + 4$.



a. هندسيًا مساحة كل مستطيلٍ هي ناتج ضرب طوله بعرضه. استخدم النموذج لإيجاد ناتج ضرب $x + 3$ و $x + 4$.

b. جبريًا استخدم طريقة فويل لإيجاد ناتج ضرب $x + 3$ و $x + 4$.

c. لفظيًا اشرح كيفية تمثيل كل حد بناتج القسمة في النموذج.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **الإثبات** وضح كيف يمكن إثبات خاصية الأسس السالبة باستخدام ناتج قسمة خاصية لوغاريتم القوة وخاصية القوة الأسية الصفرية.

66. **تحدٍّ** ماذا سيحدث للكمية x^{-y} عندما تزداد y حيث أن $y > 0$ و $x > 1$؟

67. **التبرير** اشرح لماذا يُعد التعبير 0^{-2} غير محدد.

68. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاثة تعبيرات مختلفة تكافئ x^{12}.

69. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن خواصّ الأسس مفيدة في علم الفلك. واشتمل على شرحٍ عن كيفية إيجاد الزمن الذي يستغرقه وصول الضوء من مصدرٍ ما إلى كوكبٍ ما.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

تدريب على الاختبار المعياري

70. إجابة قصيرة حوّل لأبسط صورة $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$

71. إحصاءات أيًا كانت الأعداد a و b و c، فإن المتوسط (المتوسط الحسابي) يساوي ضعف الوسيط. إذا كان $a = 0$ و $a < b < c$، فما قيمة $\frac{c}{b}$؟

A 2
B 3
C 4
D 5

72. أي مما يلي ليس أحد عوامل $x^3 - x^2 - 2x$؟

F x
G $x + 1$
H $x - 1$
J $x - 2$

SAT/ACT 73. أي من التعابير التالية يكافئ التعبير $(-6 + i)^2$؟

A 35
B $-12i$
C $-12 + i$
D $35 - 12i$
E $37 - 12i$

مراجعة شاملة

جد قيمة كل محدد.

74. $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

75. $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}$

76. $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

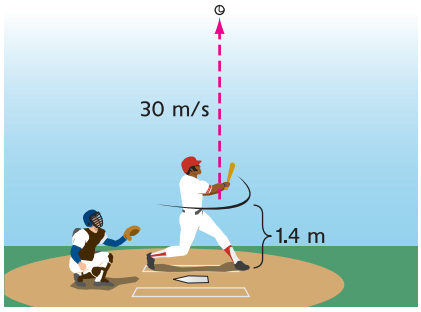
اذكر إن كانت كل دالة دالة خطية. واكتب نعم أو لا. واشرح.

77. $y = 4x^2 - 3x$

78. $y = -2x - 4$

79. $y = 4$

80. البيسبول ضرب لاعب بيسبول الكرة لأعلى بسرعة ابتدائية بلغت 30 m/s. وعلى ارتفاع 1.4 m فوق سطح الأرض. يمثل ارتفاع الكرة بالمتر والزمن t بالثواني بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.4$. ما مقدار الوقت لدى اللاعب المنافس للوصول أسفل الكرة إذا التقطها على ارتفاع 1.7 m فوق سطح الأرض؟ هل تبدو إجابتك منطقية؟ اشرح.



جد قيمة كل محدد.

81. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

82. $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & -5 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

83. $\begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

أعوام	1	2	3
المعدل	3.4%	5.0%	6.0%

84. المعرفة المالية يخطط زوجان لاستثمار AED 15,000 في شهادات الإيداع. ولأغراض ضريبية، فإنهما يرغبان بأن يكون إجمالي المرابحة في العام الأول AED 800. ويودّان أن يضحّا مبلغًا يزيد AED 1000 في شهادة إيداع لمدة عامين عن شهاد الإيداع لمدة عام واحد، ثم يريدان استثمار الباقي في شهادة إيداعٍ مدتها 3 أعوام. فكم يتعيّن عليهما أن يستثمرا في كل نوعٍ من شهادات الإيداع؟

جد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

85. $(6, -2)$ و $(-2, -9)$

86. $(-4, -1)$ و $(3, 8)$

87. $(3, 0)$ و $(-7, -5)$

88. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ و $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

89. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{12}\right)$

90. $(-4.5, 2.5)$ و $(-3, -1)$

مراجعة المهارات

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

91. $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$

92. $x^2 + 2x + 6 + 3x$

93. $12y^2 + 9y + 8y + 6$

94. $2my + 7x + 7m + 2xy$

95. $8ax - 6x - 12a + 9$

96. $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الجبر
التحليل البعدي

تشتمل مسائل الحياة اليومية في أغلب الأحيان على وحدات قياس. ويدعى إجراء العمليات على الوحدات **بالتحليل البُعدي** أو **تحليل الوحدات**. ويمكنك استعمال التحليل البُعدي لتحويل الوحدات أو إجراء الحسابات.

مثال

تسير سيارة بسرعة 65 ميلاً في الساعة. فكم تبلغ سرعة السيارة بالأمتار في الثانية؟

أنت تحتاج إلى إيجاد السرعة بالأمتار في الثانية، ولذلك عليك تغيير وحدة المسافة من الأميال إلى الأمتار وتغيير وحدة الزمن من الساعات إلى الثواني. لإنجاز التحويل، استخدم كسورًا يمكنك ضربها.

الخطوة 1 غيّر وحدات الطول من الأميال إلى الأمتار.
واستعمل علاقات التحويل من الأميال إلى الأقدام ومن الأقدام إلى الأمتار.

$$\frac{65 \text{ ميلاً}}{1 \text{ ساعة}} \cdot \frac{5280 \text{ قدمًا}}{3.3 \text{ أقدام}} \cdot \frac{1 \text{ متر}}{3.3 \text{ أقدام}}$$

الخطوة 2 غيّر الوحدات الزمنية من الساعات إلى الثواني.
اكتب كسرًا يربط الساعات بالدقائق والدقائق بالثواني.

$$\frac{65 \text{ ميلاً}}{1 \text{ ساعة}} \cdot \frac{5280 \text{ قدمًا}}{1 \text{ ميل}} \cdot \frac{1 \text{ متر}}{3.3 \text{ أقدام}} \cdot \frac{1 \text{ ساعة}}{60 \text{ دقيقة}} \cdot \frac{1 \text{ دقيقة}}{60 \text{ ثانية}}$$

الخطوة 3 بسّط وتحقق عبر إلغاء الوحدات.

$$\frac{\cancel{65 \text{ ميلاً}}}{\cancel{1 \text{ ساعة}}} \cdot \frac{\cancel{5280 \text{ قدمًا}}}{\cancel{1 \text{ ميل}}} \cdot \frac{1 \text{ متر}}{\cancel{3.3 \text{ أقدام}}} \cdot \frac{\cancel{1 \text{ ساعة}}}{\cancel{60 \text{ دقيقة}}} \cdot \frac{\cancel{1 \text{ دقيقة}}}{60 \text{ ثانية}}$$

$= \frac{65 \cdot 5280}{3.3 \cdot 60 \cdot 60}$ m/s بسّط.

≈ 28.9 m/s استخدم الآلة الحاسبة.

إذًا، تقابل الـ 65 ميلاً في الساعة 28.9 مترًا في الثانية تقريبًا. وهذه الإجابة معقولة لأن الوحدات النهائية هي m/s. وليست m/hr أو ft/s أو mi/hr.

التمارين

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل البعدي. وتضمّن الوحدات المناسبة في إجابتك.

1. يستطيع حصان الركض 40 كيلومترًا في الساعة. فما المسافة التي يقطعها في 3 دقائق؟
2. قطع راكب دراجة 43.2 km بسرعة متوسطة تساوي 12 km/h فكم المدة التي قضاها الراكب في قيادة الدراجة؟
3. إذا كنت تقود سيارتك بسرعة 50 km/h، فكم مترًا تقطع في الثانية الواحدة؟
4. تمثل المعادلة $d = \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(3.5 \text{ s})^2$ المسافة d التي تسقطها كرة بعد سقوطها من البرج بـ 3.5 s. جد المسافة.
5. **الكتابة** في الرياضيات اشرح كيف يمكن أن يكون التحليل البعدي مفيدًا في التحقق من مدى صحة إجابتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-2 قسمة كثيرات الحدود

السابق:
- لقت قمت بقسمة أحاديات الحد.

الحالي:
1. قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
2. قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.

لماذا؟
- احتاجت أماني إلى $140x^2 + 60x$ سنتيمترًا مربعًا من الورق لإعداد غلاف كتابٍ طوله $10x$ سنتيمترات. وقد تركت طيتين من الأمام والخلف للحصول على مساحة كافية. فإذا كان عرض ظهر الكتاب $2x$ سنتيمتر وكان عرض الوجهين الأمامي والخلفي $6x$ سنتيمترات، فما عرض الطيتين الأماميّة والخلفية؟ يمكن استخدام ناتج قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك في العثور على الإجابة.

عرض الوجه = f

المفردات الجديدة

قسمة تركيبية (synthetic division)

ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

1 القسمة المطولة

تعلّمتَ في الدرس 1-5 كيفية قسمة أحاديات الحد. ويمكنك قسمة كثيرة حدودٍ على أحادية حد باستخدام تلك المهارات نفسها.

مثال 1 قسمة كثيرة الحدود على أحادية الحد

حوّل لأبسط صورة $\dfrac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$ مجموع نواتج القسمة

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$ اقسم.

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$ $y^{1-1} = y^0$ أو 1

تمرين موجّه **حوّل لأبسط صورة.**

1A. $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

1B. $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

يمكنك استخدام عملية مشابهة للقسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود على كثيرة حدود بأكثر من حد. وتعرف العملية *بخوارزمية القسمة*.

مثال 2 خوارزمية القسمة

استخدم القسمة المطولة لإيجاد $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في x حيث $\frac{x^2}{x} = x$.

اطرح. أنزل الحدّ التالي.

اضرب المقسوم عليه في 8 حيث $\frac{8x}{x} = 8$.

اطرح.

ناتج القسمة هو $x + 8$. والباقي هو 0.

تمرين موجّه **استخدم القسمة المطولة لإيجاد كل ناتج قسمة.**

2A. $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

2B. $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

كما في قسمة الأعداد الكلية، يمكن أن تعطي قسمة كثيرتي حدود ناتج قسمةٍ مع باقٍ. تذكر أن $11 \div 3 = 3 + R2$ 11، ويكتب في أغلب الأحيان بالصورة $3\frac{2}{3}$. ويمكن أن تكتب نتيجة قسمة كثيرات الحدود مع الباقي بطريقة مشابهة.

مثال 3 على الاختبار المعياري قسمة كثيرات الحدود

أي تعبير يساوي $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3 - a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3 - a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3 - a}$

نصيحة عند حل الاختبار

الاختيار من متعدد قد تتمكن من استبعاد بعض خيارات الإجابة عبر التعويض بالقيمة ذاتها عن a في التعبير الأصلي وخيارات الإجابة، ثم إيجاد القيمة.

قراءة فقرة الاختبار

لأن العامل الثاني به الأس -1، فهذه مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حَل فقرة الاختبار

لتسهيل القسمة، أعد كتابة $3 - a$ as $-a + 3$.

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \overline{)\, a^2 + 7a - 11} \\ (-)\ a^2 - 3a \\ \hline 10a - 11 \\ (-)\ 10a - 30 \\ \hline 19 \end{array}$$

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$
$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$
$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي هو 19.

لذلك، $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3 - a}$. الإجابة هي **C**.

تمرين موجّه

3. أي تعبير يساوي $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$ ؟

F $-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

G $r + 6$

H $r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

J $r + 6 - \frac{13}{1 - r}$

2 القسمة التركيبية

القسمة التركيبية عملية أبسط لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد. افترض أنك تريد قسمة $2x^3 - 13x^2 + 26x - 24$ على $x - 4$ باستخدام القسمة المطولة. قارن المعاملات في هذه القسمة مع المعاملات في المثال 4.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ x - 4 \overline{)\, 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24} \\ (-)\ 2x^3 - 8x^2 \\ \hline -5x^2 + 26x \\ (-)\ -5x^2 + 20x \\ \hline 6x - 24 \\ (-)\ 6x - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

حين تكون كثيرة الحدود في موضع المقسوم ناقصةً حدًا ما، فيجب استخدام صفر لتمثيل الحدّ الناقص. إذًا، حين يساوي باقي القسمة $2x^3 - 4x^2 + 6$، فسوف يستخدم الـ 0 بمثابة عنصرٍ نائبٍ للحدّ x.

$$\overline{)\, 2x^3 - 4x^2 + 0x + 6}$$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

المفهوم الأساسي القسمة التركيبية

الخطوة 1 اكتب معاملات المقسوم بحيث تكون درجات الحدود بترتيب تنازلي. اكتب الثابت r الخاص بالمقسوم عليه $x - r$ في الصندوق. أنزل المعامل الأول.

الخطوة 2 اضرب المعامل الأول في r، واكتب ناتج الضرب أسفل المعامل الثاني.

الخطوة 3 اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني.

الخطوة 4 كرر الخطوتين 2 و 3 إلى أن تصل إلى مجموع في العمود الأخير. الأعداد على طول الصف السفلي هي معاملات ناتج القسمة. والقوة للحدّ الأول أقل بواحد من درجة المقسوم. والعدد النهائي هو الباقي.

مثال 4 القسمة التركيبية

استخدم القسمة التركيبية لإيجاد $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1 اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق. وفي هذه الحالة، $r = 4$. أنزل المعامل الأول، 2، إلى الأسفل.

4	2	−13	26	−24
	↓			
	2			

الخطوة 2 اضرب المعامل الأول في r: $2 \cdot 4 = 8$. واكتب ناتج الضرب تحت المعامل الثاني.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2 ↗			

الخطوة 3 اجمع ناتج الضرب والمعامل الثاني: $-13 + 8 = -5$.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2	−5		

الخطوة 4 اضرب المجموع -5، في r: $-5 \times 4 = -20$. واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي، واجمع: $26 + (-20) = 6$. اضرب المجموع، 6 في r: $6 \cdot 4 = 24$. اكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي واجمع: $-24 + 24 = 0$.

4	2	−13	26	−24
		8	−20	24
	2	−5 ↗	6 ↗	0

التحقق اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه. وينبغي أن تساوي الإجابة المقسوم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ (\times) \quad x - 4 \\ \hline -8x^2 + 20x - 24 \\ 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

يساوي ناتج القسمة $2x^2 - 5x + 6$. والباقي هو 0.

انتبه!
القسمة التركيبية تذكر جمع الحدود عند إجراء القسمة التركيبية.

تمرين موجّه

استخدم القسمة التركيبية لإيجاد ناتج القسمة لكل مما يلي.

4A. $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

4B. $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

4C. $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

4D. $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

لاستخدام القسمة التركيبية، يجب أن يكون المقسوم عليه بالصيغة $x - r$. وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1، فيمكنك إعادة كتابة تعبير القسمة بحيث يمكنك استخدام القسمة التركيبية.

مثال 5 المقسوم عليه بمعامل أول بخلاف العدد 1

استخدم القسمة التركيبية لإيجاد $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

انتبه!
الدقة تذكر قسمة جميع حدود البسط والمقام.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

أعد كتابة المقسوم عليه بحيث يساوي معامل القوى الأعلى 1. ثم اقسم البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بسّط البسط والمقام.

نظرًا لأن البسط لا يحتوي على حد ثابت، فاستخدم المعامل 0 للحد الثابت.

$x - r = x + \frac{1}{3}$، إذًا $r = -\frac{1}{3}$. $\rightarrow$

$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. والآن بسّط الكسر.

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$$ أعد الكتابة كتعبير قسمة.

$$= \frac{2}{3} \div \frac{3x + 1}{3}$$ $x + \frac{1}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3x + 1}{3}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3x + 1}$$ اضرب في المعكوس.

$$= \frac{2}{3x + 1}$$ بسّط.

الحل هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$.

التحقق اقسم باستخدام القسمة المطولة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{)\,3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ \underline{(-)\ 3x^4 + x^3} \\ -6x^3 + x^2 \\ \underline{(-)\ -6x^3 - 2x^2} \\ 3x^2 + 7x \\ \underline{(-)\ 3x^2 + x} \\ 6x + 0 \\ \underline{(-)\ 6x + 2} \\ -2 \end{array}$$

الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$. ✓

تمرين موجّه

استخدم القسمة التركيبية لإيجاد ناتج القسمة لكل مما يلي.

5A. $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

5B. $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

5C. $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$

5D. $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

الأمثلة 1 و 2 و 4

حوّل لأبسط صورة.

1. $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$
2. $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$
3. $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$
4. $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$
5. $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$
6. $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

مثال 3

7. **الاختيار من متعدد** أي تعبير يساوي $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$؟

A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ B $-x - 7$ C $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ D $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

مثال 5

حوّل لأبسط صورة.

8. $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$
9. $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$
10. $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$
11. $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

حوّل لأبسط صورة.

12. $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$
13. $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$
14. $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$
15. $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$
16. $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$
17. $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$

18. **الطاقة** تقلل المصابيح الضوئية الوهاجة المدمجة (CFL) من الهدر في الطاقة. حيث يمكن تقدير الانخفاض في كمية الطاقة المهدورة كل يوم في منطقة ما بالعلاقة $-b^2 + 8b$. وفيها b عدد المصابيح. اقسم على b لإيجاد كمية الطاقة المدّخرة لكل مصباح.

19. **الخَبز** يمكن تقدير عدد أقراص البسكويت التي ينتجها مطعم كل يوم بالعلاقة $-w^2 + 16w + 1000$. حيث w عدد العاملين. اقسم على w لإيجاد عدد أقرص البسكويت التي ينتجها العامل الواحد.

الأمثلة 2 و 4 و 5

حوّل لأبسط صورة.

20. $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$
21. $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$
22. $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$
23. $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$
24. $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$
25. $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$
26. $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$
27. $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$
28. $\frac{4g^4 - 6g^3 + 3g^2 - g + 12}{4g - 4}$
29. $(2b^3 - 6b^2 + 8b) \div (2b + 2)$
30. $(6z^6 + 3z^4 - 9z^2)(3z - 6)^{-1}$
31. $(10y^6 + 5y^5 + 10y^3 - 20y - 15)(5y + 5)^{-1}$

32. **الاستنتاج** تم تصميم الصندوق لمنتجٍ جديدٍ بطريقةٍ تربط وفقها علاقةٌ محددةٌ بين الأبعاد الثلاثة وهي محدّدة بالمتغير x. يمكن كتابة حجم الصندوق بالصيغة $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$. حيث الارتفاع دائمًا يساوي $x + 2$. ما عرض الصندوق وطوله؟

33. **الفيزياء** يتناسب الجهد الكهربي V مع التيار I والطاقة P حسب المعادلة $V = \frac{P}{I}$.
يمكن تمثيل قدرة محرك بالعلاقة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$. فإذا كانت شدة تيار المحرك تساوي $I = t + 4$، فاكتب تعبيرًا يمثل الجهد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

34. الترفيه يعطي ساحر هذه التعليمات لمتطوع.

- اختر عددًا واضربه في 4.
- ثم اوجد ناتج جمع العدد و 15 مع ناتج الضرب الذي توصلت إليه.
- الآن اقسم على مجموع العدد و 3.

a. ما العدد الذي سيحصل عليه المتطوع دائمًا كل الأحوال؟

b. اشرح العملية المستخدمة للتوصل للإجابة.

35 الأعمال التجارية يمكن تقدير عدد الاشتراكات المبيعة من مجلة بواسطة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$، حيث يمثل a المبلغ الذي دفعته الشركة على الدعاية بالمائة درهم ويمثل n عدد الاشتراكات المبيعة.

a. أجرِ القسمة المحدّدة بـ $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$.

b. كم عدد الاشتراكات المبيعة تقريبًا إذا أُنفق AED 1500 على الدعاية؟

بسّط.

36. $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

37. $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

38. $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

39. $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

40. $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

41. $\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

42. التمثيلات المتعددة فكّر في مستطيل مساحته $2x^2 + 7x + 3$ والطول $2x + 1$.

a. العملي استخدم القطع الجبرية لتمثيل هذه الحالة. واستخدم النموذج لإيجاد العرض.

b. الرموز اكتب تعبيرًا لتمثيل النموذج.

c. الأعداد حُلّ هذه المعادلة جبريًا باستخدام القسمة التركيبية والمطولة. هل يتوافق النموذج العملي مع النموذج الجبري؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. تحليل الخطأ يقسم بلال وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$. يقول بلال إن الباقي يساوي 26. ويدّعي جمال أن الباقي يساوي 100−. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

44. تحدٍّ إذا تمت قسمة كثيرة حدود على ذات حدين والباقي هو 0، فعلام يخبرك هذا عن العلاقة بين ذات الحدين وكثيرة الحدود؟

45. الاستنتاج راجع أيًا من مسائل القسمة الواردة في هذا الدرس. ما العلاقة بين درجات المقسوم والمقسوم عليه وناتج القسمة؟

46. مسألة غير محددة الإجابة اكتب ناتج قسمة كثيرتي حدود إذا علمتَ أن الباقي هو 3.

47. الفرضيات حدّد التعبير الذي لا ينتمي إلى المعادلات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$3xy + 6x^2$	$\frac{5}{x^2}$	$x + 5$	$5b + 11c - 9ad^2$

48. الكتابة في الرياضيات استخدم المعلومات في بداية الدرس لكتابة إرشادات التجميع باستخدام قسمة كثيرات الحدود لعمل غلاف ورقي من أجل الكتاب المدرسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

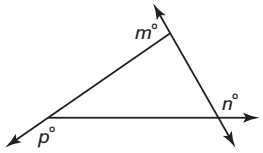
49. يوظّف مكتبٌ x امرأةً و 3 رجال. فما نسبة العدد الكلي من الموظفين إلى عدد النساء؟

A $\frac{x+3}{x}$
B $\frac{x}{x+3}$
C $\frac{3}{x}$
D $\frac{x}{3}$

50. SAT/ACT ما كثيرة الحدود التي درجتها 3؟

F $x^3 + x^2 - 2x^4$
G $-2x^2 - 3x + 4$
H $3x - 3$
J $x^2 + x + 12^3$
K $1 + x + x^3$

51. إجابة شبكية في الشكل أدناه، $m + n + p =$ ؟



52. $(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1) =$

A $2x^2$
B $-10x^2$
C $-10x^2 + 17x$
D $2x^2 + 17x$

مراجعة شاملة

حوّل لأبسط صورة.

53. $(5x^3 + 2x^2 - 3x + 4) - (2x^3 - 4x)$

54. $(2y^3 - 3y + 8) + (3y^2 - 6y)$

55. $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$

56. $(c + d)(c - d)(2c - 3d)$

57. $(xy)^2(2xy^2z)^3$

58. $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات يُعدّ معكوسًا للآخر.

59. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{26} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

حُـــــلّ كل نظام من المعادلات.

62. $4x - 7y = -9$
$5x + 2y = -22$

63. $8y - 2x = 38$
$5x - 3y = -27$

64. $3x + 8y = 24$
$-16y - 6x = 48$

حُـــــلّ كل متباينة مما يلي.

65. $3x - 6 \leq -14$

66. $6 - 4x \leq 2$

67. $-6x + 3 \geq 3x - 16$

68. الأعمال يستطيع منسّق حدائقٍ جزّ مرجٍ خلال 30 دقيقةٍ وإجراء بعض الأعمال التنسيقية لحديقة خلال 90 دقيقة. وهو يعمل بالحدّ الأقصى لمدة 10 ساعاتٍ في اليوم خلال 5 أيام في الأسبوع. ويتقاضى مبلغ AED 35 للمرج و AED 125 للأعمال التنسيقية. ولكنه لا يستطيع أداء أكثر من 3 أعمال تنسيقية في اليوم. جد عدد مرات جزّ العشب وعدد الحدائق التي قام بتنسيقها في الأسبوع والتي من شأنها تحسين دخله. ثم جد الحد الأقصى للدخل.

مراجعة المهارات

جد كل قيمة إذا كان $f(x) = 4x + 3$، $g(x) = -x^2$، و $h(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

69. $f(-6)$

70. $g(-8)$

71. $h(3)$

72. $f(c)$

73. $g(3d)$

74. $h(2b + 1)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

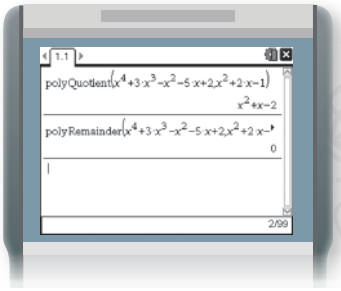
التوسع 3-2

مختبر تقنية التمثيل البياني
قسمة كثيرات الحدود

القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية هما طريقتان تؤديان إلى النتيجة نفسها عند قسمة كثيرات الحدود على مقسوم عليه خطي.
ويمكنك استعمال حاسبة تمثيل بياني مزودةٍ بنظامٍ جبريٍ حاسوبيٍ (CAS) لقسمة كثيرات حدود على أي مقسوم عليه خطي.

النشاط 1 قسمة كثيرات الحدود بدون باقي

استخدم نظام CAS لإيجاد $(x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2) \div (x^2 + 2x - 1)$.



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator (حاسبة)** جديدة.

الخطوة 2 من القائمة، حدد **Algebra (الجبر)**، ثم **Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود)**، و **Quotient of Polynomial (ناتج قسمة كثيرة الحدود)**.

الخطوة 3 اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

يشير نظام CAS إلى أن $(x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2) \div (x^2 + 2x - 1)$ هو $x^2 + x - 2$.

الخطوة 4 للتحقق من عدم وجود باقٍ، حدد **Remainder of a Polynomial (باقي كثيرة الحدود)** من قائمة **Algebra (الجبر)**، **Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود)** ثم اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

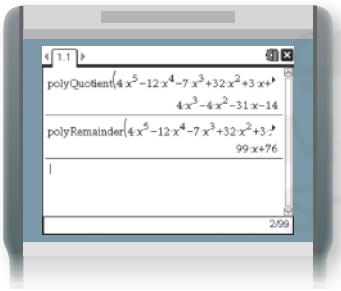
في النشاط 1، لم يكن هناك باقٍ. ولكن في الكثير من الحالات سيكون هناك باقٍ.

النشاط 2 قسمة كثيرات الحدود مع باقي

استخدم نظام CAS لإيجاد $(4x^5 - 12x^4 - 7x^3 + 32x^2 + 3x + 20) \div (x^2 - 2x + 4)$.

الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator (حاسبة)** جديدة.

الخطوة 2 من القائمة، حدد **Algebra (الجبر)**، ثم **Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود)**، و **Quotient of Polynomial (ناتج قسمة كثيرة الحدود)**.



الخطوة 3 اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

يشير نظام CAS إلى أن $(4x^5 - 12x^4 - 7x^3 + 32x^2 + 3x + 20) \div (x^2 - 2x + 4)$ هو $4x^3 - 4x^2 - 31x + 14$.

علينا تحديد هل يوجد باقٍ أم لا.

الخطوة 4 استخدم الخيار **Remainder of Polynomial (الباقي من كثيرة الحدود)** من **Algebra (الجبر)** في القائمة **Polynomial Tools (أدوات كثيرة الحدود)** لتحديد الباقي. ثم اكتب المقسوم وفاصلة والمقسوم عليه.

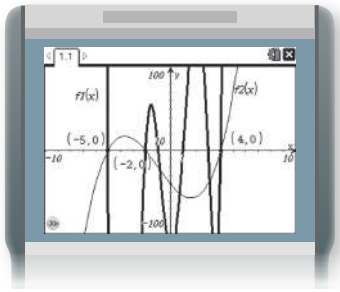
الباقي هو $99x + 76$.
إذًا، $(4x^5 - 12x^4 - 7x^3 + 32x^2 + 3x + 20) \div (x^2 - 2x + 4)$ هو $4x^3 - 4x^2 - 31x - 14 + \frac{99x + 76}{x^2 - 2x + 4}$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

يمكنك كذلك استخدام الحاسبة البيانية لتحديد جذور كثيرة الحدود بحيث يمكنك القسمة باستخدام القسمة التركيبية.

النشاط 3 استخدام القسمة التركيبية

استخدم القسمة التركيبية لإيجاد $(x^6 - 28x^4 + 14x^3 + 147x^2 - 14x - 120) \div (x^3 + 3x^2 - 18x - 40)$.

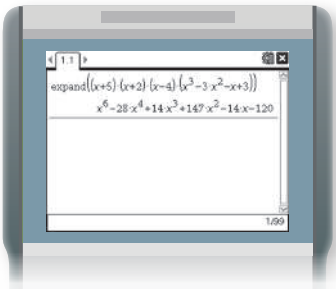


[−10, 10] scl: 1 by [−100, 100] scl: 10

الخطوة 1 مثّل بيانيًا المقسوم على أنه $f1(x)$ والمقسوم عليه على أنه $f2(x)$ على صفحة الحاسبة نفسها. واستخدم أداة **Points & Lines** (**نقاط التقاطع**) من قائمة **Points & Lines** (**النقاط والمستقيمات**) لإيجاد المواضع التي يكون للتمثيلين البيانيين فيها نقاط التقاطع نفسها مع المحور الأفقي x.

الخطوة 2 استخدم الجذور من الخطوة 1 كمقسوم عليه في القسمة التركيبية.

−5	1	0	−28	14	147	−14	−120
		−5	25	15	−145	−10	120
	1	−5	−3	29	2	−24	0
−2	1	−5	−3	29	2	−24	
		−2	14	−22	−14	24	
	1	−7	11	7	−12	0	
4	1	−7	11	7	−12		
		4	−12	−4	12		
	1	−3	−1	3	0		



الخطوة 3 استخدم ميزة (**التوسع**) للتحقق من أن $x^3 - 3x^2 - x + 3$ هو ناتج القسمة عندما تكون $5-$ و $2-$ و 4 هي الجذور.

وهكذا فإن
$(x^6 - 28x^4 + 14x^3 + 147x^2 - 14x - 120) \div (x^3 + 3x^2 - 18x - 40)$
تساوي $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

التمارين

جد ناتج قسمة كل مما يلي.

1. $(2x^4 + x^3 - 8x^2 + 17x - 12) \div (x^2 + 2x - 3)$
2. $(x^4 + 7x^3 + 8x^2 + x - 12) \div (x^2 + 3x - 4)$
3. $(9x^5 - 9x^3 - 5x^2 + 5) \div (9x^3 - 5)$
4. $(x^5 - 8x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 61x - 30) \div (x^2 - 5x + 3)$
5. $(2x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 18x^3 - 16x^2 + 8x + 16) \div (2x^3 + 2x^2 - 4x - 2)$
6. $(6x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 10x^3 - 4x^2 - 28x - 5) \div (3x^3 - x^2 - 7x - 1)$
7. استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة $(x^6 - 7x^5 - 21x^4 + 175x^3 + 56x^2 - 924x + 720) \div (x^3 - 5x^2 - 12x + 36)$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-3 الدوال كثيرة الحدود

السابق:
- لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

الحالي:
1. إيجاد قيمة الدوال كثيرة الحدود.
2. تحديد الأشكال العامة للتمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود.

لماذا؟
- يمكن تمثيل حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 5 ثوانٍ بواسطة $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$. حيث يمثل v الحجم باللتر ويمثل t الوقت بالثانية. وهذا التمثيل مثال للدالة كثيرة الحدود.

1 الدوال كثيرة الحدود

كثيرة حدود ذات متغير واحد هي تعبير للصيغة $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب.

تكتب كثيرة الحدود بصيغة قياسية عندما تكون قيم الأسس بترتيب تنازلي. ودرجة كثيرة الحدود هي قيمة الأس الأكبر. ويسمى معامل الحد الأول من كثيرة الحدود في الصيغة القياسية بـ **المعامل الرئيسي**.

تعبير كثيرة	الحدود	الدرجة	المعامل الرئيسي
ثابتة	12	0	12
خطية	$4x - 9$	1	4
تربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
تكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
عامة	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 الدرجات والمعاملات الرئيسة

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.

a. $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود ذات متغير واحد. وأكبر أس هو 5 ولذلك فالدرجة 5 والمعامل الرئيس هو 8.

b. $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود ذات متغير واحد لوجود متغيرين فيها، x و y.

c. $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود ذات متغير واحد. وأكبر أس هو 5 ولذلك فالدرجة 8 والمعامل الرئيس هو -4.

تمرين موجّه

1A. $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B.** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C.** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

المفردات الجديدة

كثيرة حدود ذات متغير واحد	polynomial in one variable
المعامل الرئيس	leading coefficient
دالة كثيرة الحدود	polynomial function
دالة قوة	power function
دالة من الدرجة الرابعة	quartic function
دالة من الدرجة الخامسة	quintic function
السلوك الطرفي	end behavior

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدالة **كثيرة الحدود** هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود ذات متغير واحد. على سبيل المثال، $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ هي دالة تكعيبية كثيرة الحدود. وتسمى أبسط الدوال كثيرة الحدود من الصيغة $f(x) = ax^b$ حيث a و b أعداد حقيقية غير صفرية **بدوال القوة**.

إذا علمت أحد عناصر المجال في أي دالة كثيرة الحدود، فيمكنك إيجاد القيمة المناظرة في المدى.

مثال من الحياة اليومية 2 إيجاد قيمة دالة كثيرة الحدود

التنفس **عُد إلى بداية الدرس. وجد حجم الهواء في الرئتين خلال ثانيتين في دورة التنفس.**

من خلال التعويض بالعدد 2 في الدالة، يمكننا إيجاد $v(2)$، حجم الهواء في الرئتين بعد ثانيتين من بدء دورة التنفس.

$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$ الدالة الأصلية

$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$ عوّض عن t بالعدد 2.

$= -0.296 + 0.608 + 0.346$ بسّط.

$= 0.658$ L اجمع.

تمرين موجّه

2. جد حجم الهواء في الرئتين بعد 4 ثوانٍ من بدء دورة التنفس.

ويمكنك كذلك إيجاد قيمة الدوال للمتغيرات والتعبيرات الجبرية.

مثال 3 قيم متغيرات الدالة

جد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$ if $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$، عوّض عن x في $f(x)$ بـ $3c - 4$.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ الدالة الأصلية

$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$ عوّض عن x بـ $3c - 4$.

$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$ اضرب.

$= 9c^2 - 18c + 5$ بسّط.

لإيجاد قيمة $5f(c)$، عوّض عن x بـ c في $f(x)$، ثم اضرب في 5.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ الدالة الأصلية

$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$ عوّض عن x بـ c.

$= 5c^2 + 10c - 15$ خاصية التوزيع

الآن جد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$

$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$ وزّع.

$= 4c^2 - 28c + 20$ بسّط.

تمرين موجّه

3A. جد $g(5a - 2) + 3g(2a)$ إذا كان $g(x) = x^2 - 5x + 8$.

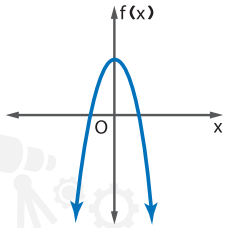
3B. جد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$ إذا كان $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

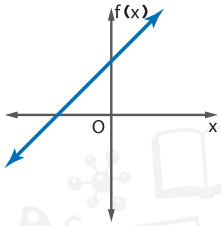
2 التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

توضح الأشكال العامة للتمثيلات البيانية للعديد من الدوال كثيرة الحدود العدد *الأقصى* لتقاطع تمثيل كل دالة بيانيًا مع المحور الأفقي x. هذا العدد هو نفسه درجة كثيرة الحدود.

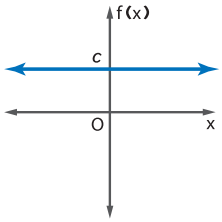
دالة تربيعية من الدرجة الثانية



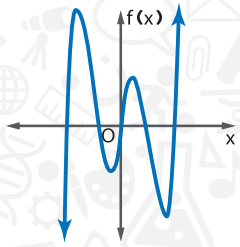
دالة خطية من الدرجة 1



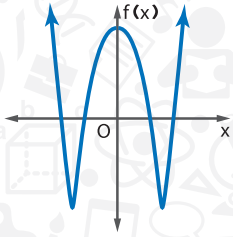
دالة ثابتة من الدرجة 0



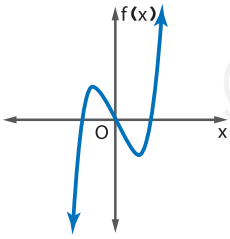
دالة خماسية من الدرجة 5



دالة رباعية من الدرجة 4



دالة تكعيبية من الدرجة الثالثة



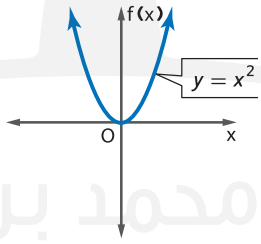
مجال أي دالة كثيرة الحدود هو جميع الأعداد الحقيقية. و**السلوك الطرفي** هو سلوك التمثيل البياني $f(x)$ كلما اقتربت x من النهاية الموجبة ($x \to +\infty$) أو النهاية السالبة ($x \to -\infty$). وتحدد درجة الدالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيسي لها السلوك الطرفي للتمثيل البياني ومدى الدالة.

المفهوم الأساسي السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

الدرجة: زوجية
المعامل الرئيسي: موجب
السلوك الطرفي:

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

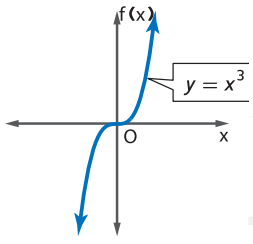


المجال: جميع الأعداد الحقيقية
المدى: جميع الأعداد الحقيقية ≤ الحد الأدنى

الدرجة: فردية
المعامل الرئيسي: موجب
السلوك الطرفي:

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

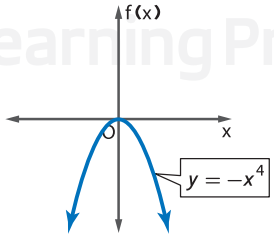


المجال: جميع الأعداد الحقيقية
المدى: جميع الأعداد الحقيقية

الدرجة: زوجية
المعامل الرئيسي: سالب
السلوك الطرفي:

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

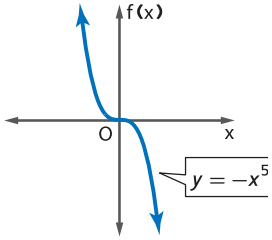


المجال: جميع الأعداد الحقيقية
المدى: جميع الأعداد الحقيقية ≥ الحد الأقصى

الدرجة: فردية
المعامل الرئيسي: سالب
السلوك الطرفي:

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$



المجال: جميع الأعداد الحقيقية
المدى: جميع الأعداد الحقيقية

نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي المعامل الرئيسي والدرجة هما العاملان المحددان الوحيدان للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود. ومع الأعداد الكبيرة أو الصغيرة، لا يشكّل باقي كثيرة الحدود فرقًا ملحوظًا في مظهر التمثيل البياني.

مراجعة المفردات

لانهاية أبدي أو لا محدود

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المفردات

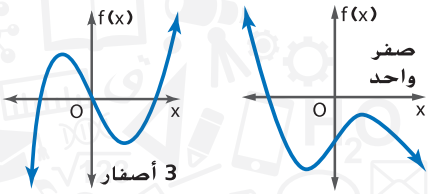
الصفر الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x.

يمكن تحديد عدد الأصفار الحقيقية للدالة كثيرة الحدود من خلال تمثيلها البياني. تذكر أن الأصفار الحقيقية تحدث عند تقاطعات x. لذا فعدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع المحور x يساوي عدد الأصفار الحقيقية.

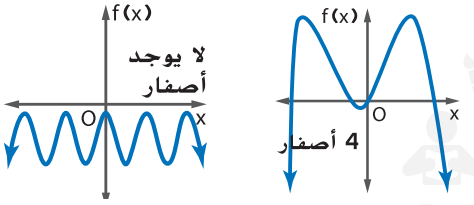
المفهوم الأساسي أصفار الدوال زوجية وفردية الدرجة

الدوال فردية الدرجة سيكون لها دائمًا عدد فردي من الأصفار الحقيقية. والدوال زوجية الدرجة سيكون لها دائمًا عدد زوجي من الأصفار الحقيقية أو لن يكون لها أصفار حقيقية من الأساس.

كثيرة الحدود فردية الدرجة



كثيرة الحدود زوجية الدرجة



نصيحة دراسية

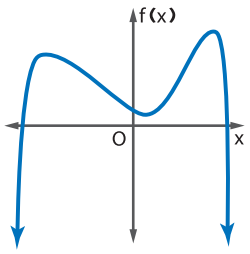
الجذور المضاعفة عندما يكون التمثيل البياني مماسًا للمحور الأفقي x، يكون هناك جذر مضاعف، والذي يمثل اثنين من الجذر ذاته.

مثال 4 التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

في كل تمثيل بياني،

- **صِف السلوك الطرفي.**
- **حدّد ما إذا كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية أم زوجية الدرجة**
- **اذكر عدد الأصفار الحقيقية.**

a.

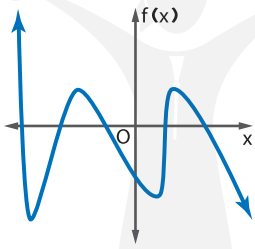


$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$.

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$.

نظرًا لأن السلوك الطرفي له نفس الاتجاه، فإن هذه الدالة ذات درجة زوجية. ويتقاطع التمثيل البياني مع المحور × في نقطتين، لذلك هناك صفرين حقيقيين.

b.



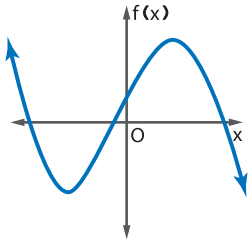
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$.

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$.

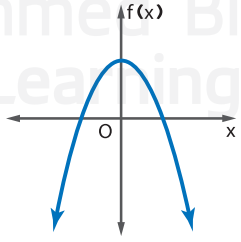
نظرًا لأن السلوك الطرفي له الاتجاه المعاكس، فإن هذه الدالة ذات درجة فردية. ويتقاطع التمثيل البياني مع المحور x في خمس نقاط، لذلك هناك خمسة أصفار حقيقية.

تمرين موجّه

4A.



4B.



Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.**

1. $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$
2. $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$
3. $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$
4. $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

مثال 2 **جد $w(5)$ و $w(-4)$ لكل دالة.**

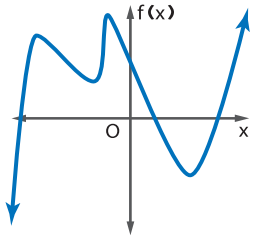
5. $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$
6. $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

مثال 3 **إذا كان $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$ و $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فجد كل قيمة.**

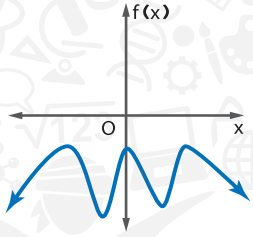
7. $c(y^3)$
8. $-4[d(3z)]$
9. $6c(4a) + 2d(3a - 5)$
10. $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

مثال 4 **لكل تمثيل بياني،**
a. صِف السلوك الطرفي،
b. حدّد إذا ما كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية أو زوجية الدرجة
c. اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

11.



12.



التمرين وحل المسائل

مثال 1 **المثابرة** **اذكر الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.**

13. $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$
14. $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$
15. $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$
16. $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$
17. $15x - 4x^3 + 3x^2 - 5x^4$
18. $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$
19. $(d + 5)(3d - 4)$
20. $(5 - 2y)(4 + 3y)$
21. $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$
22. $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال 2 **جد $p(-6)$ و $p(3)$ لكل دالة.**

23. $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
24. $p(x) = -3x^3 - 2x^2 + 4x - 6$
25. $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 10x$
26. $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$
27. $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$
28. $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 **إذا كان $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$ و $d(x) = -x^3 + x + 1$، فجد كل قيمة.**

29. $c(3a)$
30. $5d(2a)$
31. $c(b^2)$
32. $d(4a^2)$
33. $d(4y - 3)$
34. $c(y^2 - 1)$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

مثال 4

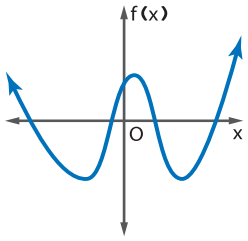
لكل تمثيل بياني،

a. صِف السلوك الطرفي

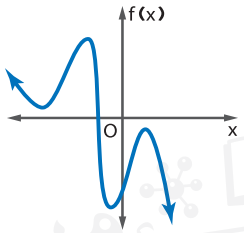
b. حدّد إذا ما كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية أو زوجية الدرجة

c. اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

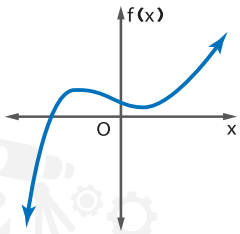
35.



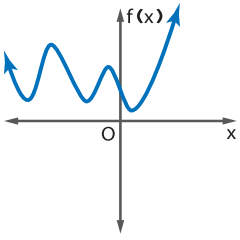
36.



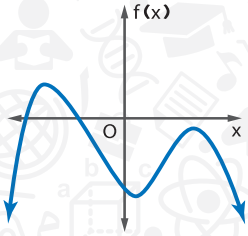
37.



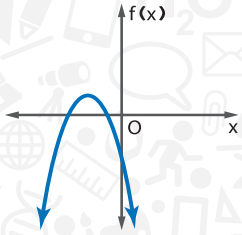
38.



39.



40.



41 **الفيزياء** هناك جسم متحرك له كتلة m بالكيلو جرامات، وطاقة حركية KE بوحدة الجول يمثل بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$. حيث v يمثل سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. جد الطاقة الحركية لمركبة مجهزة للطرق الوعرة كتلتها 171 kg تتحرك بسرعة 11 مترًا/الثانية. 10.345.5 جول

42. التمثيل قررت إحدى شركات تصنيع الميكروويف أن دالة أرباحها هي $P(x) = -0.0014x^3 + 0.3x^2 + 6x - 355$. حيث يمثل x عدد أجهزة الميكروويف المبيعة سنويًا.

a. مثّل دالة الأرباح بيانيًا باستخدام آلة حاسبة.

b. حدد نافذة عرض مقبولة للدالة.

c. قم بتقريب جميع أصفار الدالة باستخدام قائمة **CALC**.

d. ما المدى اللازم لأجهزة الميكروويف المبيعة حتى تحقق الشركة الأرباح؟

جد قيمة $p(-2)$ و $p(8)$ لكل دالة.

43. $p(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

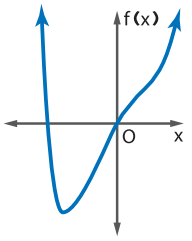
44. $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

45. $p(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

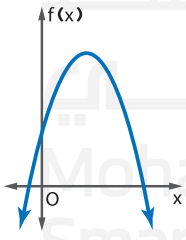
46. $p(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

استخدم الدرجة والسلوك الطرفي لمطابقة كل كثيرة حدود مع تمثيلها البياني.

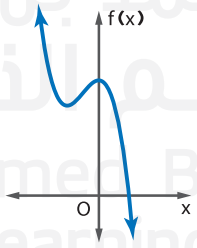
A



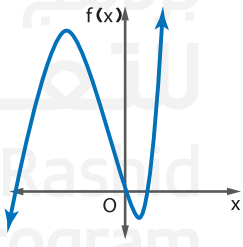
B



C



D



47. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

48. $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

49. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

50. $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كان $c(x) = x^3 - 2x$ و $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$، فجد كل قيمة.

51. $3c(a - 4) + 3d(a + 5)$

52. $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

53. $5c(a^2) - 8d(6 - 3a)$

54. $-7d(a^3) + 6c(a^4 + 1)$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

55. الأعمال التجارية يمكن تمثيل أرباح إحدى شركات تصنيع الملابس بواسطة $p(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث يمثل x عدد القطع المبيعة بالألف ويمثل $p(x)$ ربح الشركة بالألف درهم.

a. استخدم جدول قيم لرسم الدالة.

b. حدد أصفار الدالة.

c. بين أي قيمتين يجب على الشركة أن تبيعهما لتحقيق الأرباح؟

d. اشرح لماذا يتم اعتبار صفرين فقط في الجزء **c**.

56. التمثيلات المتعددة ضع في الاعتبار $g(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 4)$.

a. تحليليًا حدد التقاطعات مع المحور الأفقي x والرأسي y والجذور والدرجة والسلوك الطرفي لـ $g(x)$.

b. جبريًّا اكتب الدالة بالصيغة القياسية

c. جدوليّ أعد جدولاً بقيم الدالة.

d. بيانيًا قم بعمل تمثيل بياني للدالة من خلال تمثيل النقاط وتوصيلها بواسطة منحنى بياني متجانس.

صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة.

57 $f(x) = -5x^4 + 3x^2$

58. $g(x) = 2x^5 + 6x^4$

59. $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

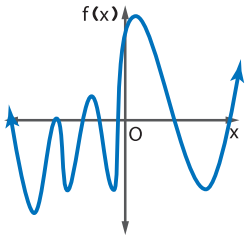
60. $f(x) = 6x - 7x^2$

61. $g(x) = 8x^4 + 5x^5$

62. $h(x) = 9x^6 - 5x^7 + 3x^2$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. التفكير النقدي تحدد عبير وأماني عدد أصفار التمثيل البياني على اليمين. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



عبير

توجد 7 أصفار لأن التمثيل البياني يتقاطع مع المحور الأفقي x 7 مرات.

أماني

توجد 8 أصفار لأن التمثيل البياني يتقاطع مع المحور الأفقي x 7 مرات وهناك جذر مضاعف.

64. تحدٍ في $f(x)$ و $g(x)$، أي دالة لها جذور حقيقية محتملة أكثر؟ وما درجة هذه الدالة؟

x	−24	−18	−12	−6	0	6	12	18	24
$f(x)$	−8	−1	3	−2	4	7	−1	−8	5

$g(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 4$

65. تحدٍ إذا كانت $f(x)$ درجتها 5 ومعاملها الرئيسي موجبًا و $g(x)$ درجتها 3 ومعاملها الرئيسي موجب، فحدد السلوك الطرفي لـ $\frac{f(x)}{g(x)}$. اشرح استنتاجك.

66. مسألة غير محددة الإجابة قم بعمل تمثيل بياني لكثيرة حدود زوجية الدرجة ولها 8 جذور حقيقية أحدها جذر مضاعف.

67. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا* أم غير صحيحة *مطلقًا*. اشرح استنتاجك.

الدالة كثيرة الحدود التي لها 4 جذور حقيقية هي دالة من الدرجة الرابعة.

68. الكتابة في الرياضيات صِف السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود وكيفية تحديده.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

69. إجابة قصيرة قام أربعة طلاب بحل المسألة الرياضية نفسها. وعمل كل طالب موضح أدناه. فأي طالب منهم على صواب؟

الطالب A

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= \frac{1}{x^3}, x \neq 0$$

الطالب B

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^{-7}, x \neq 0$$

الطالب C

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^{-5}}$$
$$= x^7, x \neq 0$$

الطالب D

$$x^2x^{-5} = \frac{x^2}{x^5}$$
$$= x^3, x \neq 0$$

70. SAT/ACT ما الباقي عند قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟

A -11
B -1
C 1
D 11
E 35

71. إجابة موسعة تصنع إحدى الشركات طاولات وكراسي. وتكلفة كل طاولة AED 40 وكل كرسي AED 25. ويتوفر مبلغ AED 1440 لإنفاقه على التصنيع كل أسبوع. بفرض أن t = عدد الطاولات التي تم إنتاجها و c = عدد الكراسي التي تم إنتاجها.

a. معادلة التصنيع هي $40t + 25c = 1500$. ارسم تمثيلا بيانيًّا لهذه المعادلة.

b. تعمل الشركة دائمًا على إنتاج كرسيين مع كل طاولة. فاكتب معادلة لتمثيل هذا الموقف ومثلها بيانيًّا على التمثيل البياني نفسه الموجود في الجزء **a**.

c. حدد عدد الطاولات والكراسي التي تصنعها الشركة كل أسبوع.

d. اشرح كيفية تحديد هذه الإجابة باستخدام التمثيل البياني.

72. إذا كان $i = \sqrt{-1}$، فإن $5i(7i) =$

F 70
G 35
H -35
J -70

مراجعة شاملة

حوّل لأبسط صورة..

73. $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$

74. $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$

75. $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

حدّد ما إن كان كل تعبير كثيرة حدود. فإن كان كذلك، فاذكر درجة كثيرة الحدود.

76. $8x^2 + 5xy^3 - 6x + 4$

77. $9x^4 + 12x^6 - 16$

78. $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

79. التصنيع تصنع لجنة الخدمات المجتمعية حقائب صغيرة من قماش القنب ومن الجلد لحفل جمع تبرعات. وسوف تقوم بوضع بطانة من قماش القنب ومقابض جلدية لنوعي الحقائب. بالنسبة لحقائب قماش القنب، هي بحاجة إلى 4 m من القنب ومتر واحد من الجلد. وبالنسبة للحقائب الجلدية، فهي بحاجة إلى 3 أمتار من الجلد ومترين من القنب. فاشترى قائد اللجنة 56 m من الجلد و 104 m من القنب.

a. بفرض أن c تمثل عدد الحقائب المصنوعة من القنب، وبفرض أن ℓ تمثل عدد الحقائب المصنوعة من الجلد. اكتب نظام المتباينات لعدد الحقائب التي يمكن صنعها.

b. قم بعمل تمثيل بياني يوضح منطقة الحل.

c. أعد قائمة بإحداثيات رؤوس منطقة الحل.

d. إذا كان النادي يخطط لبيع الحقائب بربح AED 20 لكل حقيبة من قماش القنّب و AED 35 لكل حقيبة جلدية، فاكتب دالة للربح الإجمالي من الحقائب.

e. كيف يستطيع النادي تحقيق أقصى ربح؟

f. ما أقصى ربح؟

حُـــــلّ كل متباينة مما يلي.

80. $|2x + 4| \leq 8$

81. $|-3x + 2| \geq 4$

82. $|2x - 8| - 4 \leq -6$

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل دالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وجد تلك القيمة.

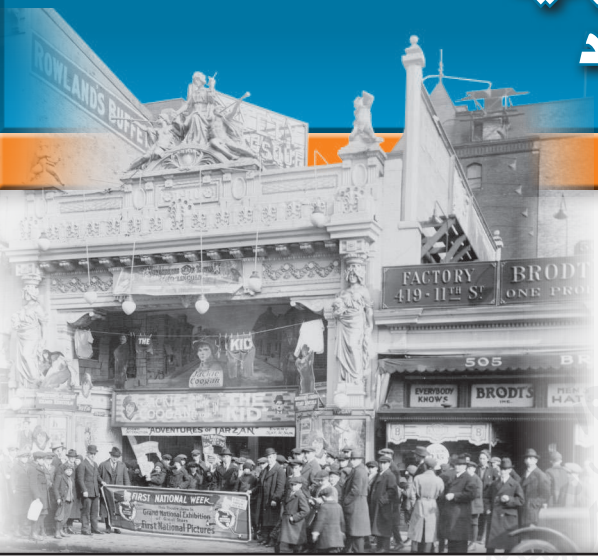
83. $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$

84. $f(x) = -4x^2 + 2x - 10$

85. $f(x) = -0.25x^2 + 4x - 5$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة حقوق الطبع

3-4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود



السابق
- استخدمت القيم العظمى والصغرى والتمثيلات البيانية لكثيرات الحدود.

الحالي
1. تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وتحديد أماكن الأصفار بها..
2. إيجاد القيم العظمى والصغرى النسبية للدوال كثيرة الحدود.

لماذا؟
- كان الحضور السنوي في السينما يتقلب منذ تأسيس أول صالة سينما، ويُطلق عليها النيكلوديون، التي افتتحت في بيتسبرغ عام 1906. وبلغ الحضور الإجمالي ذروته في العشرينيات من القرن الماضي، وكان في أدنى مستوياته خلال السبعينيات منه. يمكن تمثيل التمثيل البياني للحضور السنوي للسينما بدالة كثيرة الحدود.

المفردات الجديدة

مبدأ تحديد الموقع Location Principle
القيمة العظمى النسبية relative maximum
القيمة الصغرى النسبية relative minimum
قيم قصوى extrema
نقاط الدوران turning points

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

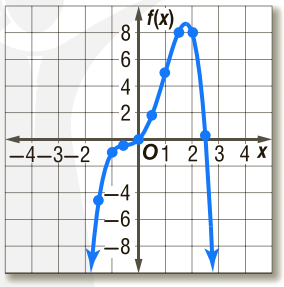
1 التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

لتمثيل دالة كثيرة الحدود بيانيًا، أعد جدولاً للقيم لإيجاد عدة نقاط ومن ثم ربطها بالمنحنى المتصل المنتظم. وسوف تساعدك معرفة السلوك الطرفي للتمثيل البياني على استكمال التمثيل البياني.

مثال 1 التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود

مثّل الدالة $f(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x$ بيانيًّا بإعداد جدول للقيم.

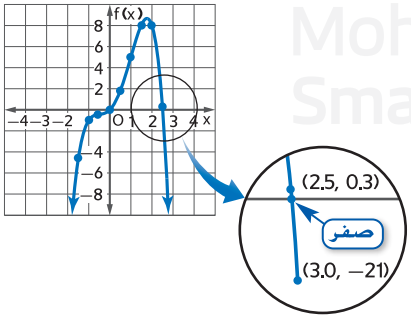
x	$f(x)$	x	$f(x)$
−2.5	≈ −41	0.5	≈ 1.8
−2.0	−16	1.0	5.0
−1.5	≈ −4.7	1.5	≈ 8.1
−1.0	−1.0	2.0	8.0
−0.5	≈ −0.4	2.5	≈ 0.3
0.0	0.0	3.0	−21



هذه كثيرة حدود زوجية الدرجة لها معامل رئيسي سالب. إذًا $f(x) \to -\infty$ عند $x \to -\infty$ و $x \to +\infty$ عند $f(x) \to -\infty$. لاحظ أن التمثيل البياني يتقاطع مع محور x عند نقطتين، بما يشير إلى وجود صفرين لهذه الدالة.

تمرين موجّه

1. مثّل الدالة $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ بيانيًّا عن طريق إعداد جدول بالقيم.



في المثال 1، وقع أحد الأصفار عند $x = 0$.
ووقع صفر آخر بين $x = 2.5$ و $x = 3.0$ نظرًا لأن $f(x)$ موجبة عند $x = 2.5$ و سالبة عند $x = 3.0$ وجميع الدوال كثيرة الحدود متصلة، فنحن نعرف أن هناك صفرًا بين هاتين القيمتين.

وبالتالي، إذا كانت قيمة $f(x)$ تغيّر *إشارتها* من قيمة ما لـ x إلى القيمة التالية، فيوجد صفرٌ بين قيمتي x. وهذه الفكرة تسمى **مبدأ الموقع**.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

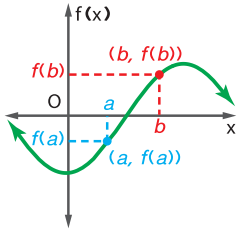
نصيحة دراسية

الدرجة تذكّر أن درجة الدالة هي أقصى عدد من الأصفار يمكن أن تضمها الدالة أيضًا.

المفهوم الأساسي مبدأ الموقع

الشرح بفرض أن $y = f(x)$ تمثل دالة كثيرة الحدود وأن a و b عددان حقيقيان بحيث $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. إذًا الدالة لها صفر حقيقي واحد على الأقل بين a و b.

النموذج

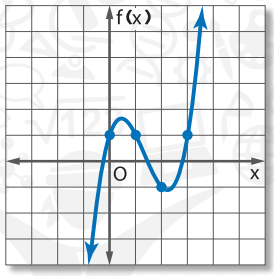


مثال 2 تحديد مواقع أصفار دالة

حدّد القيم المتعاقبة للعدد الصحيح x التي يقع فيها كل صفر حقيقي لـ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$. ثم ارسم التمثيل البياني.

أعد جدولاً للقيم. بما أن $f(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة، فإما أن يكون لها 3 أصفار حقيقية أو صفر حقيقي واحد. انظر إلى قيم $f(x)$ لتحديد مواقع الأصفار. ثم استخدم النقاط لرسم تمثيل بياني للدالة.

x	$f(x)$	
−2	−29	
−1	−7	تغيّر في الإشارة
0	1	تغيّر في الإشارة
1	1	تغيّر في الإشارة
2	−1	
3	1	
4	13	



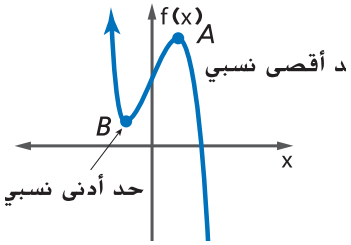
تشير التغيرات في الإشارة إلى أنه توجد أصفارٌ بين $x = -1$ و $x = 0$. وبين $x = 1$ و $x = 2$. وبين $x = 2$ و $x = 3$.

تمرين موجّه

2. حدّد القيم المتعاقبة للعدد الصحيح x التي يقع فيها كل صفر حقيقي للدالة $f(x) = x\,4 - 3x\,3 - 2x2 + x + 1$. ثم ارسم التمثيل البياني.

2 نقاط القيم العظمى والقيم الصغرى

يعرض الرسم البياني المبين أدناه الشكل العام للدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة.



النقطة A على التمثيل البياني هي **قيمة عظمى نسبية** للدالة بما أنه لا يوجد أي نقاط أخرى قريبة لها إحداثي y أكبر. يزيد التمثيل البياني كلما اقترب من النقطة A ويقل كلما ابتعد عن النقطة A.

وبالمثل، النقطة B هي **قيمة صغرى نسبية** بما أنه لا يوجد أي نقاط أخرى قريبة لها إحداثي y أقل. يقل التمثيل البياني كلما اقترب من النقطة B ويزيد كلما ابتعد عن النقطة B. وتسمى القيم العظمى والقيم الصغرى باسم **القيم القصوى**.

كثيرًا ما يشار إلى هذه النقاط بمصطلح **نقاط الدوران**. والتمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود من الدرجة n له في الغالب n-1 نقطة دوران واحدة.

نصيحة دراسية

الدوال الفردية بعض الدوال الفردية مثل $f(x) = x^3$. ليس لها نقاط دوران.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 نقطتا القيمة العظمى والقيمة الصغرى

مثّل $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ بيانيًّا. قدّر إحداثيات x التي تحدث عندها القيم العظمى والقيم الصغرى.

أعد جدولاً للقيم ومثل الدالة بيانيًا.

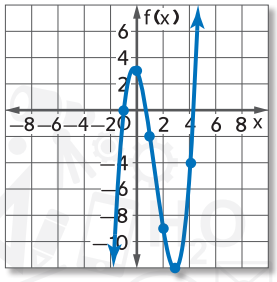
x	$f(x)$
−2	−17
−1	0
0	3
1	−2
2	−9
3	−12
4	−4
5	18

صفر

يشير إلى قيمة نسبية عظمى

يشير إلى قيمة نسبية صغرى

الصفر بين 4 و 5



انظر إلى جدول القيم والتمثيل البياني.

تغير قيمة $f(x)$ إشارتها بين $x = 4$ و $x = 5$ مشيرةً إلى وجود صفر للدالة.

قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 0$ أكبر منها عند النقاط المحيطة، وبالتالي لا بد من وجود قيمة عظمى نسبية *بالقرب من* $x = 0$.

قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 0$ أصغر من قيمتها عند النقاط المحيطة، وبالتالي لا بد من وجود قيمة صغرى نسبية *بالقرب من* $x = 3$.

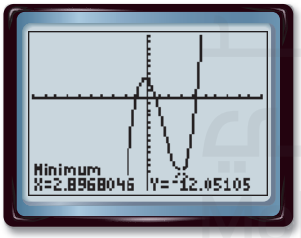
التحقق يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد القيمة العظمى والصغرى النسبية لدالة والتحقق من تقديراتك.

أدخل $y = x^3 - 4x^2 = 2x + 3$ في القائمة **Y=** ومثّل الدالة بيانيًّا.

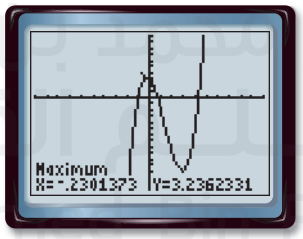
استخدم قائمة **CALC** لإيجاد كل قيمة عظمى وصغرى.

عند اختيار الحد الأيسر، انقل المحرك إلى جهة اليسار من القيم العظمى أو الصغرى. وعند اختيار الحد الأيمن، انقل المحرك إلى جهة اليمين من القيم العظمى أو الصغرى.

اضغط ENTER مرّتين.



[−10, 10] scl: 1 by [−15, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−15, 10] scl: 1

هناك دقة في تقديرات وجود قيمة نسبية عظمى بالقرب من $x = 0$ وقيمة نسبية صغرى بالقرب من $x = 3$.

تمرين موجّه

3. مثّل $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$ بيانيًّا. وقدّر إحداثيات x والتي تحدث عندها القيم العظمى والقيم الصغرى.

نصيحة دراسية

القيمة العظمى والقيمة الصغرى

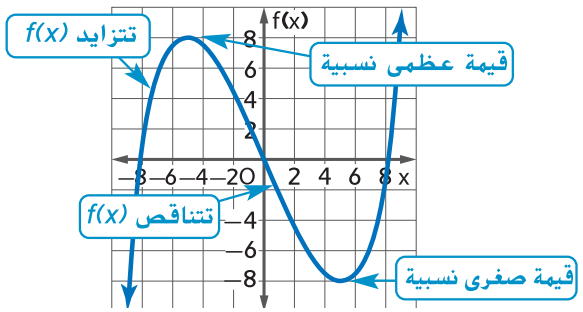
يمكن أن يكون لكثير الحدود ذي الدرجة الأكبر من 3 أكثر من قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية واحدة

نصيحة دراسية

القيم المنطقية لن تتشكل نقاط دوران دائمًا عند القيم الكاملة لـ x.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قد يوضح التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود الاتجاهات في بيانات من الحياة اليومية. ومن المفيد دائمًا ملاحظة متى يزيد التمثيل البياني ومتى يتناقص.



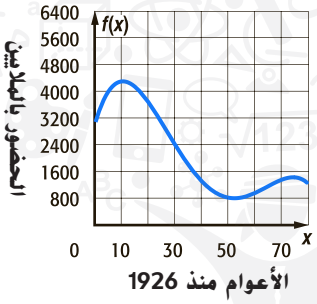
مثال من الحياة اليومية 4 التمثيل البياني لنموذج كثير الحدود

السينما **عد إلى بداية الدرس يمكن تمثيل عدد مرات الحضور السنوي في قاعة السينما في الولايات المتحدة الأمريكية من خلال الدالة $f(x) = -0.0017x^4 + 0.31x^3 - 17.66x^2 + 277x + 3005$، وفيها x هو عدد السنوات منذ عام 1926 و $f(x)$ تمثل عدد مرات الحضور السنوي بالملايين.**

a. مثّل الدالة بيانيًا.

أعد جدولاً للقيم للأعوام 2006 – 1926. عيّن النقاط واربطها بمنحنى سلس أو أملس. فإيجاد وتعيين النقاط لكل عشرة أعوام يعطيك تقريبًا للتمثيل البياني.

x	$f(x)$
0	3005
10	4302
20	3689
30	2414
40	1317
50	830
60	977
70	1374
80	1229



b. صِف نقاط دوران التمثيل البياني وسلوكه الطرفي.

توجد قيمة عظمى نسبية بالقرب من 1936 و 2000 وقيمة صغرى نسبية بين 1976 و 1981. $f(x) \to -\infty$ عند $x \to -\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$.

c. ما الاتجاهات التي يوضحها التمثيل البياني لحضور السينما؟

بلغ حضور السينما ذروته عام 1936 تقريبًا ثم تراجع عام 1978 تقريبًا. وزاد بعدها حتى عام 2000 ثم بدأ في التراجع من جديد.

d. هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى لا نهاية؟

قد يستمر هذا الاتجاه لبعض السنوات، وبعدها سيصبح التمثيل البياني غير منطقيٍ لأنه يتنبأ بعدد سالبٍ من الحضور في المستقبل.

تمرين موجّه

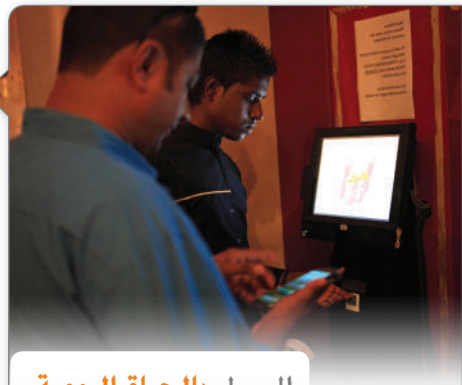
4. آلات الفاكس تمثّل المبيعات السنوية لآلات الفاكس المخصصة للاستعمال المنزلي بالدالة $f(x) = -0.17x^4 + 6.29x^3 - 77.65x^2 + 251x + 1100$، وفيها x هو عدد السنوات بعد عام 1990 و $f(x)$ هي المبيعات السنوية مقدرةً بملايين الدراهم.

A. مثّل الدالة بيانيًا.

B. صِف نقاط دوران التمثيل البياني وسلوكه الطرفي.

C. ما الاتجاهات التي يوضحها التمثيل البياني لمبيعات آلات الفاكس؟

D. هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى ما لا نهاية؟



الربط بالحياة اليومية

بيعت أكثر من 1.4 مليون بطاقة لحضور السينما في الولايات المتحدة عام 2006.

المصدر: CNN

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل كل معادلة كثيرة حدود بيانيًّا عن طريق إعداد جدول للقيم.**

1. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x + 4$
2. $f(x) = -2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 3$
3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x - 4$
4. $f(x) = -4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

مثال 2 **حدد القيم المتعاقبة للعدد الصحيح x التي يقع بينها كل صفر حقيقي لكل دالة. ثم ارسم التمثيل البياني.**

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
6. $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$
7. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x - 8$
8. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 4$

مثال 3 **مثل كل دالة كثيرة الحدود بيانيًا. وقدّر إحداثيات المحور x التي تتشكل عندها القيمتان النسبيتان العظمى والصغرى. حدد المجال والمدى لكل دالة.**

9. $f(x) = x^3 + x^2 - 6x - 3$
10. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 2x + 2$
11. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 1$
12. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

مثال 4 13. **الاستنتاج المنطقي** يمكن تمثيل المبيعات السنوية للأقراص المدمجة بواسطة الدالة من الدرجة الرابعة $f(x) = 0.48x^4 - 9.6x^3 + 53x^2 - 49x + 599$. وفيها يمثل x عدد السنوات بعد عام 1995 وتمثل الدالة $f(x)$ المبيعات السنوية بالملايين.

a. مثل الدالة بيانيًّا عند $0 \le x \le 10$.

b. صِف نقاط دوران التمثيل البياني، وسلوكه الطرفي والفترات التي يتزايد أو يتناقص عندها.

c. استمر في التمثيل البياني لـ $x = 11$ و $x = 12$. ما الاتجاهات التي يقترحها التمثيل البياني لمبيعات الأقراص المدمجة؟

d. هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى لا نهاية؟ اشرح.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **أكمل كلاً مما يلي.**

a. مثّل كل دالة بيانيًا عن طريق إعداد جدول للقيم.

b. حدّد القيم المتعاقبة للعدد الصحيح x التي يقع بينها كل صفر حقيقي.

c. قدّر إحداثيات x التي تحدث عندها القيمتان النسبيتان العظمى والصغرى.

14. $f(x) = x^3 + 3x^2$
15. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 4$
16. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$
17. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$
18. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 8x$
19. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 4$
20. $f(x) = x^4 + 2x - 1$
21. $f(x) = x^4 + 8x^2 - 12$

مثال 4 22. **المعرفة المالية** يمكن تمثيل السعر السنوي المتوسط للبنزين عبر الدالة التكعيبية $f(x) = 0.0007x^3 - 0.014x^2 + 0.08x + 0.96$. حيث x هو عدد السنوات بعد عام 1987 و $f(x)$ هو السعر بالدرهم الإماراتي.

a. مثل الدالة بيانيًّا عند $0 \le x \le 30$.

b. صِف نقاط دوران التمثيل البياني وسلوكه الطرفي.

c. ما الاتجاهات التي يقترحها التمثيل البياني أسعار البنزين؟

d. هل من المنطقي أن يستمر الاتجاه إلى لا نهاية؟ اشرح.

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتقدير الإحداثيات x التي تتشكل عندها القيم العظمى والصغرى للدالة. وقرب لأقرب جزء من المئة.

23. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 6$
24. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$
25. $f(x) = -2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 7$
26. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 8x - 6$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

ارسم التمثيل البياني لدوال كثيرة الحدود لها المواصفات التالية.

27. دالة فردية لها أصفار عند -5 و -3 و 0 و 2 و 4

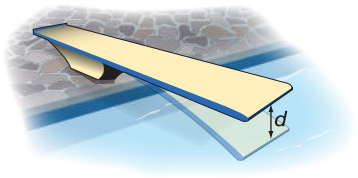
28. دالة زوجية لها أصفار عند -2c و 1 و 3 و 5

29. دالة من الدرجة الرابعة لها أصفار عند -3، ولها قيمة عظمى عند $x = 2$، ولها قيمة صغرى عند $x = -1$

30. دالة من الدرجة الخامسة لها أصفار عند -4 و -1 و 3، ولها نقطة عظمى عند $x = -2$

31. دالة فردية لها صفرين عند -1 و 2 ولها معامل رئيس سالب

32. دالة زوجية لها قيمة صغرى عند $x = 3$ ولها معامل رئيس موجب



33. الغطس يمكن حساب الانحناء d لخشبة غطس طولها 10 أقدام باستخدام الدالة $d(x) = 0.015x^2 - 0.0005x^3$، وفيها x هي المسافة بين الغطاس وبين الطرف الثابت من الخشبة بقدم.

a. أعد جدولاً لقيم الدالة لـ $0 \le x \le 10$.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. ما الذي يقترحه السلوك الطرفي للتمثيل البياني مع زيادة x ؟

d. هل يستمر هذا الاتجاه إلى لا نهاية؟ اشرح استنتاجك.

أكمل كلاً مما يلي.

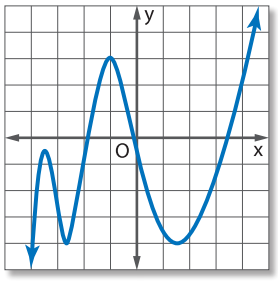
a. قدّر الإحداثي x لكل نقطة دوران وحدّد ما إذا كانت تلك الإحداثيات تمثل قيمًا عظمى أم صغرى نسبية.

b. قدّر الإحداثي x لكل صفر.

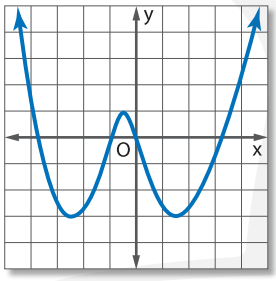
c. حدّد أصغر درجة ممكنة للدالة.

d. حدد مجال الدالة ومداها.

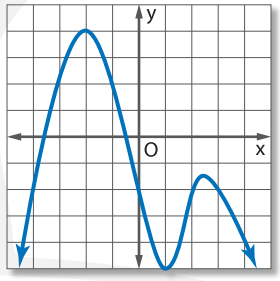
34.



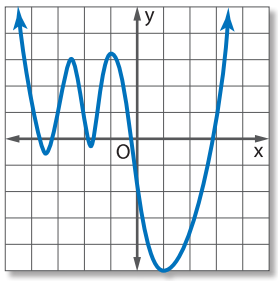
35.



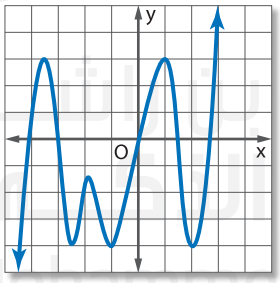
36.



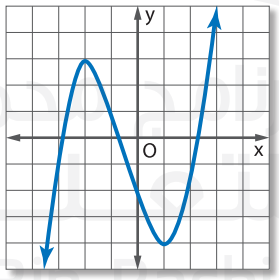
37.



38.



39.



40. الاستنتاج يمكن تمثيل عدد المشتركين الذين يستخدمون أجهزة النداء الآلي في الولايات المتحدة باستخدام الدالة $f(x) = 0.015x^4 - 0.44x^3 + 3.46x^2 - 2.7x + 9.68$، وفيها x عدد السنوات بعد عام 1990 و $f(x)$ عدد المشتركين بالملايين.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

c. ما الذي يقترحه السلوك الطرفي عن عدد المشتركين في أجهزة النداء الآلي؟

d. هل يستمر هذا الاتجاه يستمر نهاية؟ اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. التسعير تبيع آلة البيع الخاصة بخالد في الوقت الحالي 3500 مشروب في الأسبوع مقابل AED 0.75 للزجاجة. وهو يفكر في رفع السعر. ويمكن تمثيل أرباحه الأسبوعية بالدالة $f(x) = -5x^2 + 100x + 2625$، حيث x هو عدد زيادات AED 0.05. مثّل الدالة بيانيًا وحدد السعر الذي يحقق الربح الأكبر لخالد.

لكل دالة،

a. حدّد الأصفار ونقاط التقاطع مع المحورين x و y ونقاط الدوران،

b. حدّد محور التناظر،

c. حدّد الفترات التي تتناقص فيها الدالة أو تتزايد أو تبقى ثابتة.

42. $y = x^4 - 8x^2 + 16$

43 $y = x^5 - 3x^3 + 2x - 4$

44. $y = -2x^4 + 4x^3 - 5x$

45. $y = \begin{cases} x^2, & x \le -4 \\ 5, & -4 < x \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$

46. التمثيلات المتعددة فكّر في الدالة التالية.

$$f(x) = x^4 - 8.65x^3 + 27.34x^2 - 37.2285x + 18.27$$

a. تحليليًا ما الدرجة والمعامل الرئيس والسلوك الطرفي؟

b. جدوليّ أعد جدولاً بقيم الأعداد الصحيحة $f(x)$ إذا كان $-4 \le x \le 4$. ما عدد الأصفار التي يبدو وجودها في الدالة من خلال الجدول؟

c. بيانيًّا مثّل الدالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

d. بيانيًّا غير نافذة العرض إلى [0، 4] scl: 1 عن طريق [−0.4, 0.4] scl: 0.2. ما الاستنتاجات التي يمكنك استخراجها من هذا العرض الجديد للتمثيل البياني؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

47. الاستنتاج اشرح السبب في كون المعامل الرئيسي والدرجة هما العاملين المحددين الوحيدين للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

48. التبرير يبين الجدول أدناه قيم $g(x)$، دالة تكعيبية. فهل يمكن أن يوجد صفر بين $x = 3$ و $x = 2$؟ اشرح استنتاجك.

x	−2	−1	0	1	2	3
g(x)	4	−2	−1	1	−2	−2

49. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة فردية كثيرة الحدود ذات 6 نقاط دوران وجذرين مضاعفين.

50. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم *غير صحيحة* مطلقًا. اشرح استنتاجك.

لأي دالة متصلة كثيرة الحدود، يعدّ الإحداثي y لنقطة دوران قيمةً نسبيةً عظمى أو صغرى.

51. التبرير يقال إن الدالة زوجية إذا كان لكل x في المجال f، $f(x) = f(-x)$. هل كل دالة كثيرة حدود زوجية الدرجة هي دالة زوجية أيضًا؟ اشرح.

52. التبرير يقال إن الدالة فردية إذا كان لكل x في المجال، $-f(x) = f(-x)$. فهل كل دالة كثيرة الحدود فردية الدرجة هي دالة فردية أيضًا؟ اشرح.

53. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك استخدام خواص دالة كثيرة الحدود من أجل رسم تمثيلها البياني؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

54. أي مما يلي يُعتبر تحليلاً إلى العوامل بالنسبة إلى $x^2 + 15 - 2x$؟

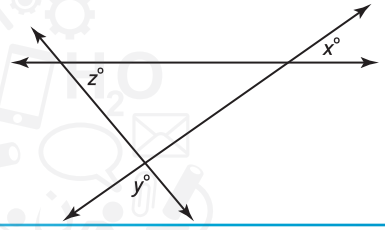
A $(x - 3)(x - 5)$

B $(x - 3)(x + 5)$

C $(x + 3)(x - 5)$

D $(x + 3)(x + 5)$

55. إجابة قصيرة في الشكل المبين أدناه، إذا كان $x = 35$ و $z = 50$، فما قيمة y؟



56. أي كثيرة حدود تمثّل $(2x - 7)(4x^2 + 5x - 3)$؟

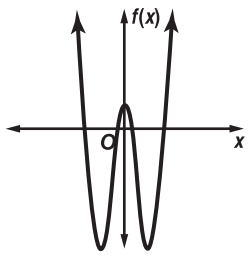
F $8x^3 - 18x^2 - 41x - 21$

G $8x^3 + 18x^2 + 29x - 21$

H $8x^3 - 18x^2 - 41x + 21$

J $8x^3 + 18x^2 - 29x + 21$

57. SAT/ACT يوضح الشكل الموضح على اليمين التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي مما يلي يمكن أن يكون درجة $f(x)$؟



A 2

B 3

C 4

D 5

E 6

مراجعة شاملة

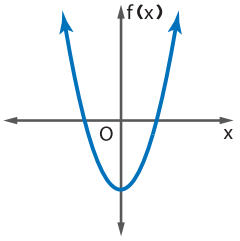
في كل تمثيل بياني،

a. صِف السلوك الطرفي.

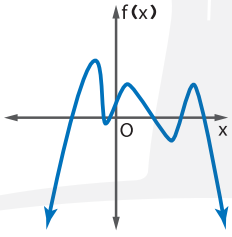
b. حدّد ما إن كان التمثيل البياني يمثل دالة فردية الدرجة أو دالة زوجية الدرجة،

c. اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

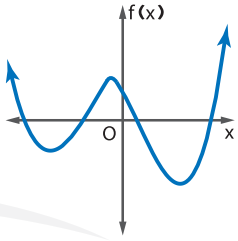
58.



59.



60.



حوّل لأبسط صورة.

61. $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \div (x + 1)$

62. $(4y^3 + 18y^2 + 5y - 12) \div (y + 4)$

63. $(2a^3 - a^2 - 4a) \div (a - 1)$

64. الكيمياء تحتاج خولة 200 mL من تركيز 48% من محلول الأسيد. ولديها تركيز 60% و 40% من المحلول في معملها. فكم مليلترًا من 40% من محلول الأسيد يجب خلطه مع 60% من محلول الأسيد من أجل تكوين الكمية المطلوبة من 48% من محلول الأسيد؟

80 mL من 60% من المحلول و 120 mL من 40% من المحلول

مراجعة المهارات

حلل إلى العوامل.

65. $x^2 + 6x + 3x + 18$

66. $y^2 - 5y - 8y + 40$

67. $a^2 + 6a - 16$

68. $b^2 - 4b - 21$

69. $6x^2 - 5x - 4$

70. $4x^2 - 7x - 15$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل نقاط البيانات حين يمثل المنحنى الأفضل ملائمةً دالةً كثيرة الحدود.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

مثال

يوضح الجدول تمثيل الموجات الزلزالية البعيدة عن طريق زلزال ينتقل من نصف القطر. ارسم مخطط انتشار ومنحنى أكثر ملاءمة لبيان مدى ارتباط المسافة بالزمن. ثم حدد بعد الموجة الزلزالية عن نصف القطر تقريبا بحيث يجعلها ملموسة 8.5 دقائق بعد حدوث الزلزال.

زمن الانتقال (min)	13	12	10	7	5	2	1
المسافة (km)	10,000	8400	6250	3900	2500	800	400

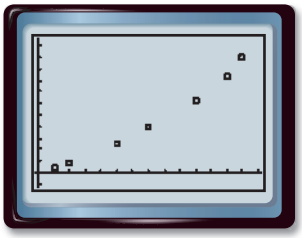
المصدر: جامعة أريزونا

الخطوة 1 أدخل الزمن في **L1** والمسافة في **L2**.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT 13 ENTER 12 ENTER 10 ENTER 7 ENTER 5 ENTER 2 ENTER 1 1 ENTER ▶ ENTER
400 ENTER 800 ENTER 2500 ENTER 3900 ENTER 6250 ENTER 8400 ENTER 10000 ENTER

الخطوة 2 مثل مخطط الانتشار بيانيًّا.

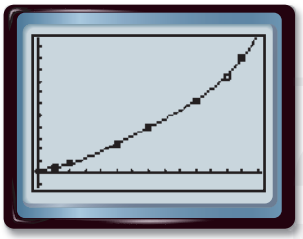
خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [STAT PLOT] 1 ENTER ▼ ENTER ZOOM 9



[−0.2, 14.2] scl: 1
by [−1232, 11632] scl: 1000

الخطوة 3 حدد المعادلة ومثلها بيانيًّا لمنحنى أكثر ملاءمة. استخدم انحدارًا من الدرجة الرابعة للبيانات.

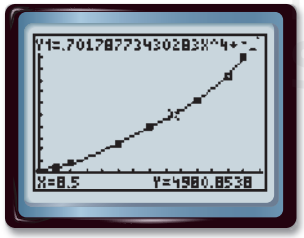
خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 7 ENTER Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 GRAPH



المعادلة موضحة على الشاشة Y=. إذا ما قُرّبت معادلة الانحدار المبينة على الآلة الحاسبة، فيمكن كتابتها على هيئة المعادلة الجبرية $y = 0.7x^4 - 17x^3 + 161x^2 - 21x + 293$.

الخطوة 4 استخدم سمة [CALC] لإيجاد قيمة الدالة حيث $x = 8.5$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 1 8.5 ENTER



بعد 8.5 دقائق، يمكن التوقّع أنه سيُشعَرُ بالموجة الزلزالية على بعد 4980 كيلومترًا تقريبًا عن مركز الزلزال.

التحقق الذهني

يوضح الجدول المسافة لمدة 7 دقائق بقيمة 3900 والمسافة لمدة 10 دقائق بقيمة 6250. بما أن 8.5 في منتصف الطريق بين 7 و 10 فإن التقدير المعقول للمسافة يقع بين 3900 و 6250. ✓

(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين

سيعرض الجدول كم دقيقةً من أصل كل ثماني ساعات عمل في اليوم تستخدم لسداد الضرائب عن يومٍ واحد.

العام	الدقائق
1930	56
1940	86
1950	119
1960	134
1970	144
1980	147
1990	148
2000	163
2005	151

المصدر: مؤسسة الضرائب

1. ارسم مخطط انتشار للبيانات. ثم مثِّل عدة منحنيات أكثر ملاءمة تربط بين عدد الدقائق وعدد السنوات. جرب LinReg، QuadReg، CubicReg.
2. اكتب المعادلة الخاصة بالمنحنى الذي يلائم البيانات بالصورة الأمثل.
3. بناء على هذه المعادلة، ما عدد الدقائق التي تتوقع فيها العمل كل يوم خلال عام 2020 لكي تدفع ضرائب يوم واحد؟ استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من مدى منطقية تقديرك.

يعرض الجدول العدد المقدّر من مَرْكَبَات الوقود البديل قيد الاستخدام في الولايات المتحدة الأمريكية في العام الواحد خلال الفترة الواقعة بين عامي 1998 و 2007.

العام	عدد المركبات	العام	عدد المركبات
1998	295030	2003	533999
1999	322302	2004	565492
2000	394664	2005	592122
2001	425457	2006	634559
2002	471098	2007	695763

المصدر: وزارة الطاقة بالولايات المتحدة

4. ارسم مخطط انتشار للبيانات. ثم مثل عدة منحنيات أكثر ملاءمة بيانيًّا بحيث تربط بين المسافة والشهر.
5. أي منحنى يناسب البيانات على النحو الأمثل؟ هل هذا المنحنى هو الأمثل للتنبؤ بالقيم المستقبلية؟
6. استخدم المعادلة الأكثر ملاءمة التي تعتقد أنها ستعطي التنبؤ الأدق لعدد مركبات الوقود البديل التي ستستخدم عام 2018. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من مدى منطقية تقديرك.

يعرض الجدول المسافة المتوسطة من الشمس إلى الأرض خلال كل شهر من أشهر العام.

الشهر	المسافة (وحدة فلكية)
يناير	0.9840
فبراير	0.9888
مارس	0.9962
أبريل	1.0050
مايو	1.0122
يونيو	1.0163
يوليو	1.0161
أغسطس	1.0116
سبتمبر	1.0039
أكتوبر	0.9954
نوفمبر	0.9878
ديسمبر	0.9837

المصدر: مقهى علم الفلك

7. ارسم مخطط انتشار للبيانات. ثم مثل عدة منحنيات أكثر ملاءمة بيانيًّا بحيث تربط بين المسافة والشهر.
8. اكتب المعادلة الخاصة بالمنحنى الذي يلائم البيانات بالصورة الأمثل.
9. بناءً على معادلة الانحدار، ما المسافة من الشمس إلى الأرض في منتصف شهر سبتمبر؟
10. هل ستستخدم هذا النموذج لإيجاد المسافة من الشمس إلى الأرض خلال السنوات اللاحقة؟ اشرح استنتاجك.

التوسع

11. اكتب سؤالاً يمكن الإجابة عليه عن طريق فحص البيانات. على سبيل المثال، يمكن أن تقدّر عدد الأشخاص الذين يعيشون في بلدتك بعد 5 سنوات من الآن أو أن تتنبّأ بالتكلفة المستقبلية لسيارة.
12. اجمع البيانات التي تحتاج إليها للإجابة عن السؤال الذي كتبته ورتبها. قد تحتاج إلى إعادة البحث في موضوعك على الإنترنت أو تجري استقصاء لجمع البيانات التي تحتاج إليها.
13. كوّن مخطط انتشار وجد معادلة الانحدار لبياناتك. ثم استخدم معادلة الانحدار للإجابة عن السؤال.

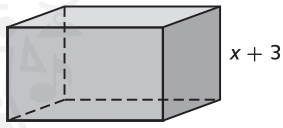
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 3-1 إلى 3-4

بسّط ما يلي. وافترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي 0. (الدرس 3-1)

1. $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$
2. $4t(3rt - r)$
3. $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3}$
4. $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$
5. $(4m^2 - 6m + 5) - (6m^2 + 3m - 1)$
6. $(x + y)(x^2 + 2xy - y^2)$

7. **الاختيار من متعدد** حجم المنشور المستطيل يساوي $6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$. فأي تعبير كثيرة الحدود يمثل مساحة القاعدة؟ (الدرس 3-1)



A $6x^4 + 37x^3 + 59x^2 + 3x - 9$

B $6x^2 + x + 1$

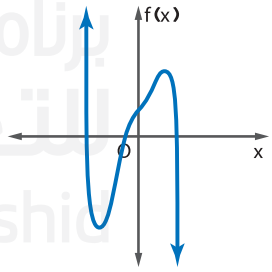
C $6x^2 + x - 1$

D $6x + 1$

بسّط. (الدرس 3-2)

8. $(4r^3 - 8r^2 - 13r + 20) \div (2r - 5)$
9. $\frac{3x^3 - 16x^2 + 9x - 24}{x - 5}$

10. صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني. ثم حدد ما إذا كان يمثل دالة كثيرة الحدود فردية الدرجة أم زوجية الدرجة واذكر عدد الأصفار الحقيقية. (الدرس 3-3)



11. **الاختيار من متعدد** . (الدرس 3-3)

اذا كان $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x$ فجد $p(-3)$

F 0

G 11

H 30

J 36

12. **البندول** يمكن استخدام الصيغة $L(t) = \frac{8t^2}{\pi^2}$ لإيجاد طول البندول بالأمتار عند تأرجحه للأمام والخلف في زمن t بالثواني. جد طول البندول الذي يقطع لفة كاملة خلال 4 ثوانٍ. (الدرس 3-3)

13. **الاختيار من متعدد** جد $3f(a - 4) - 2h(a)$ إذا كان $f(x) = x^2 + 3x$ و $h(x) = 2x^2 - 3x + 5$. (الدرس 3-3)

A $-a^2 + 15a - 74$

B $-a^2 - 2a - 1$

C $a^2 + 9a - 2$

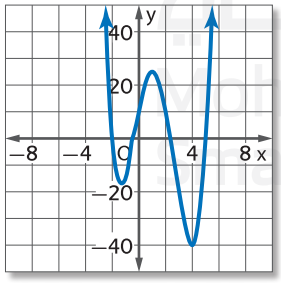
D $-a^2 - 9a + 2$

14. **الطاقة** القدرة التي تولدها طاحونة الهواء هي دالة لسرعة الرياح. والقدرة التقريبية معطاة من خلال الدالة $P(s) = \frac{s^3}{1000}$، والتي فيها s تمثّل سرعة الرياح بالكيلومتر في الساعة. جد وحدات القدرة $P(s)$ المتولدة بفعل طاحونة الهواء عندما تكون سرعة الرياح 18 كيلومترًا في الساعة. (الدرس 3-3)

استخدم الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ من أجل التمارين 15–17. (الدرس 3-4)

15. مثّل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.
16. قدّر إحداثيات x التي تحدث عندها القيمة النسبية العظمى والقيمة النسبية الصغرى.
17. حدّد مجال الدالة ومداها.
18. حدّد القيمتين الصحيحتين المتعاقبتين لـ x واللتان يتوضع فيما بينهما كل صفر حقيقي من أجل $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$. (الدرس 3-4)

راجع التمثيل البياني. (الدرس 3-4)



19. قدّر الإحداثي x لكل نقطة دوران وحدّد ما إذا كانت تلك الإحداثيات تمثل قيمًا نسبيةً عظمى أم صغرى.
20. قدّر الإحداثي x لكل صفر.
21. ما أصغر درجة ممكنة للدالة؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

3-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات كثيرة الحدود عن طريق التمثيل البياني

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لحل المعادلات كثيرة الحدود.

النشاط

حُـــلّ المعادلة $x^4 + 2x^3 = 7$.

الطريقة 1

الخطوة 1 مثّل كل طرفٍ للمعادلة بصورةٍ منفصلة في شاشة عرض معيارية.

بفرض أن $\mathbf{Y1} = x^4 + 2x^3$ و $\mathbf{Y2} = 7$.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= X,T,θ,n ^ 4 + 2

X,T,θ,n ^ 3 ENTER 7 ZOOM 6

الخطوة 2 جد نقاط التقاطع

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

استخدم ◀ أو ▶ لوضع المؤشر على **Y1** بجوار نقطة التقاطع.

اضغط ENTER ENTER ENTER.

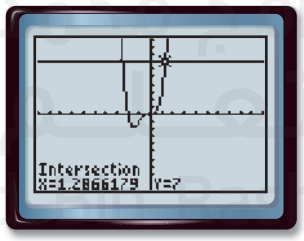
ثم استخدم ▶ لوضع المؤشر بجوار نقطة التقاطع الثانية.

اضغط ENTER ENTER ENTER.

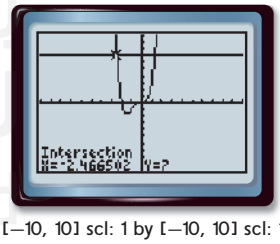
الخطوة 3 تفحّص التمثيلات البيانية.

حدّد الموضع الذي يقطع فيه الرسم البياني للدالة $y = x^4 + 2x^3$ التمثيل البياني لـ $y = 7$.

نقطتا تقاطع التمثيلين البيانيين لـ **Y1** و **Y2** هما -2.47 و 1.29 تقريبًا، وبالتالي فإن الحل هو -2.47 و 1.29 على وجه التقريب.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الطريقة 2

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة المقترنة بحيث تساوي 0.

$$x^4 + 2x^3 = 7$$
$$x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

بفرض أن $\mathbf{Y1} = x^4 + 2x^3 - 7$ و $\mathbf{Y2} = 0$.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= X,T,θ,n ^ 4 + 2

X,T,θ,n ^ 3 − 7 ENTER 0 ZOOM 6

الخطوة 2 نظرًا إلى أن $\mathbf{Y2} = 0$، فلإيجاد نقاط تقاطع **Y1** و **Y2** جد أين يقطع الرسم البياني **Y1** المحور الأفقي x.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] 5

استخدم ◀ أو ▶ لوضع المؤشر على **Y1** بجوار نقطة التقاطع.

اضغط ENTER ENTER ENTER.

ثم استخدم ▶ لوضع المؤشر بجوار نقطة التقاطع الثانية.

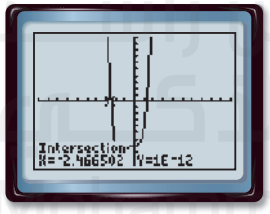
اضغط ENTER ENTER ENTER.

الخطوة 3 تفحّص التمثيلات البيانية.

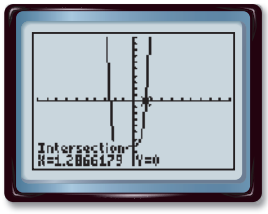
حدّد أين يقطع التمثيل البياني لـ $y = x^4 + 2x^3 - 7$ المحور الأفقي x.

إن نقطتي تقاطع التمثيلين البيانيين لـ **Y1** و **Y2** هما -2.47 و 1.29 تقريبًا، وبالتالي فإن الحل هو -2.47 و 1.29 على وجه التقريب.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمارين

حُـــلّ كل معادلة. وقرّب لأقرب جزء من مئة.

1. $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x = -9$
2. $x^3 - 9x^2 + 27x = 20$
3. $x^3 + 1 = 4x^2$
4. $x^6 - 15 = 5x^4 - x^2$
5. $\frac{1}{2}x^5 = \frac{1}{5}x^2 - 2$
6. $x^8 = -x^7 + 3$
7. $x^4 - 15x^2 = -24$
8. $x^3 - 6x^2 + 4x = -6$
9. $x^4 - 15x^2 + x + 65 = 0$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

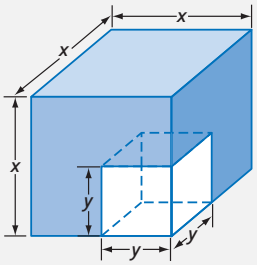
3-5 حل المعادلات كثيرة الحدود

السابق:
- لقد كنت تحلّ الدوال من الدرجة الثانية (التربيعية) عبر التحليل إلى العوامل.

الحالي:
1. تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل.
2. حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل إلى العوامل.

لماذا؟
- قُطع مكعب صغير من مكعب كبير. وتم تحديد حجم الشكل المتبقي والمطلوب تحديد أبعاد كل مكعب.

يمكن إنجاز ذلك عبر تحليل كثيرة الحدود المكعبة $x^3 - y^3$.



المفردات الجديدة

كثيرات حدود أولية (prime polynomials)

صيغة تربيعية (quadratic form)

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل

في الدرس 3-4، تعلمت أن كثيرات الحدود التربيعية يمكن تحليلها إلى عواملها مثل الأعداد الكلية تمامًا. غير أن عواملها كثيرات حدود أخرى. وكما هو الحال مع كثيرات الحدود التربيعية، فإن بعض كثيرات الحدود التكعيبية يمكن تحليلها إلى العوامل وفقًا لقواعد خاصة.

المفهوم الأساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

تقنية التحليل إلى العوامل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
فرق مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

يطلق على كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى العوامل اسم **كثيرات الحدود الأولية**.

مثال 1 مجموع المكعبين والفرق بينهما

حلّل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، اكتب أولية.

a. $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ — حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$8x^3$ و $27y^3$ كلاهما مكعبان كاملان، وبالتالي نستطيع أن نحلل مجموع مكعبين إلى العوامل.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ — $(2x)^3 = 8x^3$; $(3y)^3 = 27y^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ — مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — بسّط.

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ — استبدل العامل المشترك الأكبر.

b. $9y^3 + 5x^3$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس مكعبًا كاملاً. إذًا؛ لا يمكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام نمط مجموع المكعبين. ولا يمكن أيضًا تحليل عوامل كثيرة الحدود باستخدام الطرق التربيعية أو العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تمرين موجّه

1A. $5y^4 - 320yz^3$

1B. $-54w^4 - 250wz^3$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

يلخص الجدول الموضح أدناه أساليب التحليل العوامل الأكثر شيوعًا والمستخدمة مع كثيرات الحدود. متى حللت أي كثيرة حدود إلى العوامل، انظر دائمًا إلى العامل المشترك أولاً. ثم حدد ما إذا كانت عوامل كثيرات الحدود الناتجة يمكن تحليلها مرة أخرى باستخدام طريقة أو أكثر من الطرق الموضحة أدناه.

ملخص المفهوم تقنيات التحليل إلى العوامل

عدد الحدود	تقنية التحليل إلى العوامل	الحالة العامة
أي عدد	العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
اثنان	فرق مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	فرق مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة	ثلاثيات الحدود الكاملة من الدرجة الثانية	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	الصيغة العامة لثلاثيات الحدود	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة أو أكثر	التجميع	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

الربط بتاريخ الرياضيات

صوفي جيرمين

(1831–1776)

تعلمت صوفي جيرمين الرياضيات بنفسها من كتب من مكتبة والدها إبان الثورة الفرنسية حين كانت حبيسة حفاظًا على سلامتها. فاكتشفت جيرمين المحايد $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$، الذي سمي باسمها.

مثال 2 التحليل إلى العوامل بالتجميع

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

a. $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$ — التعبير الأصلي

$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$ — جمّع لإيجاد عامل مشترك أكبر.

$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$ — حلّل باخراج العامل المشترك الأكبر.

$= (4x + 3y)(2a + b + c)$ — خاصية التوزيع

b. $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

$20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$ — التعبير الأصلي

$= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$ — جمّع لإيجاد عاملٍ مشتركٍ أكبر.

$= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$ — حلل باخراج العامل المشترك الأكبر.

$= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$ — خاصية التوزيع

نصيحة دراسية

التحقق من الإجابة

اضرب العوامل للتحقق من إجاباتك.

تمرين موجّه

2A. $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

2B. $13ax + 18bz - 15by - 14az - 32bx + 9ay$

التحليل إلى العوامل بطريقة التجميع هي الطريقة الوحيدة التي يمكن استخدامها لتحليل كثيرات الحدود إلى العوامل ذات الحدود الأربعة أو أكثر. أما كثيرات الحدود ذات الحدين أو ثلاثة، فقد يكون من الممكن تحليل عواملها إلى أحد الأنماط الموضحة أعلاه.

عند التحليل إلى العوامل لحدين يضمان أسين يساويان 6 أو أكثر، فحاول تحليل المربعات الكاملة قبل تحليل المكعبات الكاملة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 دمج المكعبات والمربعات

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

a. $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه هي الفرق بين مربعين أو الفرق بين مكعبين. يجب دائمًا حل الفرق بين المربعين قبل الفرق بين مكعبين من أجل تسهيل التحليل إلى العوامل.

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) && \text{الفرق بين مربعين} \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) && \text{اجمع واطرح المكعبين} \end{aligned}$$

b. $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بوجود ستة حدود، حلل إلى العوامل عبر التجميع أولاً.

$$\begin{aligned} &a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3 \\ &= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3) && \text{جمّع لإيجاد عاملٍ مشتركٍ أكبر.} \\ &= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9) && \text{حلل باخراج العامل المشترك الأكبر.} \\ &= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9) && \text{خاصية التوزيع} \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9) && \text{الفرق بين المكعبات} \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2 && \text{المربعات الكاملة} \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

تجميع 6 حدودٍ أو أكثر جمّع الحدود التي لديها ***أكثر*** قيمٍ مشتركة.

تمرين موجّه

3A. $a^6 + b^6$

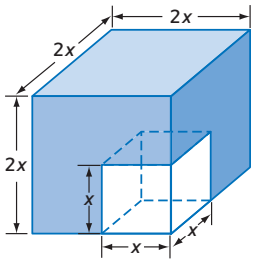
3B. $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

2 حل المعادلات كثيرة الحدود

في الوحدة 4، تعلمت حل المعادلات التربيعية عن طريق التحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية ناتج الضرب الصفري؛ يمكنك توسيع تلك الأساليب لحل معادلات كثيرة الحدود من درجة أعلى.

مثال من الحياة اليومية 4 إيجاد حلّ الدوال كثيرة الحدود عبر التحليل إلى العوامل

الهندسة **عُد إلى بداية الدرس. إذا كان طول ضلع المكعب الأصغر يساوي نصف طول ضلع المكعب الأكبر وكانت مساحة الشكل 7000 cm^3 مكعب، فكم ينبغي أن تساوي أبعاد المكعبين؟**



بما أن طول المكعب الأصغر يساوي نصف طول المكعب الأكبر، إذًا يمكن تمثيل الأطوال عن طريق x و $2x$، على الترتيب. حجم الجسم يساوي حجم المكعب الأكبر ناقص حجم المكعب الأصغر.

$$\begin{aligned} (2x)^3 - x^3 &= 7000 && \text{حجم الجسم} \\ 8x^3 - x^3 &= 7000 && (2x)^3 = 8x^3 \\ 7x^3 &= 7000 && \text{اطرح.} \\ x^3 &= 1000 && \text{اقسم.} \\ x^3 - 1000 &= 0 && \text{اطرح 1000 من كل جانب} \\ (x - 10)(x^2 + 10x + 100) &= 0 && \text{جد الفرقين المكعبين} \end{aligned}$$

$$x - 10 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 10x + 100 = 0 \qquad \text{خاصية ناتج الضرب الصفري}$$

$$x = 10 \qquad x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$$

بما أن 10 هي الحل الحقيقي الوحيد، فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10 cm و 20 cm.

تمرين موجّه

4. حدّد أبعاد المكعبين إذا كان طول ضلع المكعب الأصغر يساوي ثلث طول ضلع المكعب الأكبر، وحجم الجسم هو 3250 cm.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في بعض الحالات، يمكنك إعادة كتابة كثيرة الحدود بصيغة $au^2 + bu + c$ بصيغة x. على سبيل المثال، بفرض أن $u = x^2$؛ فإن التعبير $x^4 + 12x^2 + 32$ يمكن كتابته بصيغة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$. هذا التعبير الجديد والمكافئ يقال إنه **بصيغة تربيعية**.

المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية

الشرح يمكن كتابة التعبير بالصيغة التربيعية على طريقة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد a، و b، و c، عند $a \neq 0$، حيث u هو تعبير ما في x. ويسمى التعبير $au^2 + bu + c$ بالصيغة التربيعية للتعبير الأصلي.

مثال $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 2(4x^3)^2 + 1$

نصيحة دراسية

الصيغة التربيعية عند كتابة كثيرة حدود بصيغة تربيعية، اختر التعبير المساوي لـ u بفحص الحدود ذات المتغيرات. انتبه جيدًا للأسس الموجودة في هذه الحدود. فليس كل كثيرة حدود يمكن كتابتها بصيغة تربيعية.

مثال 5 الصيغة التربيعية

اكتب كل تعبيرٍ مما يلي بالصيغة التربيعية إذا أمكن.

a. $150n^8 + 40n^4 - 15$

$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$ $(5n^4)^2 = 25n^8$

b. $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابة هذا التعبير بالصيغة التربيعية بما أن $y^8 \neq (y^3)^2$.

تمرين موجّه

5A. $x^4 + 5x + 6$ **5B.** $8x^4 + 12x^2 + 18$

يمكنك استخدام الصيغة التربيعية لحل المعادلات ذات الدرجات الأعلى.

مثال 6 إيجاد حل المعادلات التالية بالصيغة التربيعية

حُـــلّ المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$		المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$		$2(3x^2)^2 = 18x^4$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$		بفرض أن $u = 3x^2$.
$(2u - 1)(u - 3) = 0$		حلل إلى العوامل.
$u = \frac{1}{2}$	or $u = 3$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$3x^2 = \frac{1}{2}$	$3x^2 = 3$	عوّض عن u بـ $3x^2$.
$x^2 = \frac{1}{6}$	$x^2 = 1$	اقسم على 3.
$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$	$x = \pm 1$	احسب الجذر التربيعي.

حلول المعادلة هي 1 و -1 و $\frac{\sqrt{6}}{6}$ و $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

تمرين موجّه

6A. $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ **6B.** $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

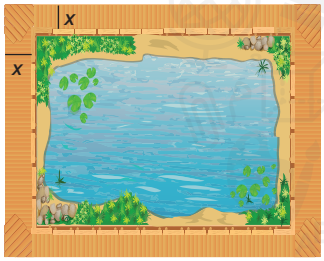
التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.**

1. $3ax + 2ay - az + 3bx + 2by - bz$
2. $2kx + 4mx - 2nx - 3ky - 6my + 3ny$
3. $2x^3 + 5y^3$
4. $16g^3 + 2h^3$
5. $12qw^3 - 12q^4$
6. $3w^2 + 5x^2 - 6y^2 + 2z^2 + 7a^2 - 9b^2$
7. $a^6x^2 - b^6x^2$
8. $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$
9. $8c^3 - 125d^3$
10. $6bx + 12cx + 18dx - by - 2cy - 3dy$

مثال 4 **حُـــلّ كل من المعادلات التالية.**

11. $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$
12. $x^3 - 64 = 0$
13. $x^3 + 27 = 0$
14. $x^4 - 33x^2 + 200 = 0$



15. **المثابرة** ممر اتساعه x متر حول بركة مستطيلة الشكل. ويبلغ عرض البركة 30 m بينما يبلغ طولها 40 m. وتساوي مساحة الممر والبركة مجتمعين 2000 m^2. فما عرض الممر؟ m

مثال 5 **اكتب كل تعبيرٍ مما يلي بالصيغة التربيعية إذا أمكن.**

16. $4x^6 - 2x^3 + 8$
17. $25y^6 - 5y^2 + 20$

مثال 6 **حُـــلّ كل من المعادلات التالية.**

18. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
19. $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **حلّل كثيرات الحدود التالية إلى عواملها الأولية. وإذا لم تكن قابلةً للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.**

20. $8c^3 - 27d^3$
21. $64x^4 + xy^3$
22. $a^8 - a^2b^6$
23. $x^6y^3 + y^9$
24. $18x^6 + 5y^6$
25. $w^3 - 2y^3$
26. $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$
27. $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$
28. $a^3x^2 - 16a^3x + 64a^3 - b^3x^2 + 16b^3x - 64b^3$
29. $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$

مثال 4 **حُـــلّ كل معادلة.**

30. $x^4 + x^2 - 90 = 0$
31. $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$
32. $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$
33. $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$
34. $x^3 + 216 = 0$
35. $64x^3 + 1 = 0$

مثال 5 **اكتب كل تعبير بصيغة تربيعية، إذا أمكن.**

36. $x^4 + 12x^2 - 8$
37. $-15x^4 + 18x^2 - 4$
38. $8x^6 + 6x^3 + 7$
39. $5x^6 - 2x^2 + 8$
40. $9x^8 - 21x^4 + 12$
41. $16x^{10} + 2x^5 + 6$

مثال 6 **حُـــلّ كل معادلة.**

42. $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$
43. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$
44. $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$
45. $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$
46. $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$
47. $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

48. علم الحيوان وضعت إحدى فصائل الحيوانات في جزيرة صغيرة. افترض أن عدد الفصائل يمثل بالمعادلة $P(t) = -t^4 + 9t^2 + 400$، حيث t هي الزمن بالسنوات. حدد متى يصبح العدد صفرًا.

حلِّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلًا كاملًا. إذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*:

49. $x^4 - 625$ **50.** $x^6 - 64$ **51.** $x^5 - 16x$ **52.** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

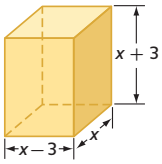
53. $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

54. $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

55. $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

56. $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

57. الهندسة يبلغ حجم الشكل الموجود على اليسار يساوي $440\ CM^3$. جد قيمة x والطول والارتفاع والعرض.



حُـــلّ كل معادلة.

58. $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$

59. $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

60. $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$

61. $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

62. $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$

63. $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

64. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

65 $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

66. $8x^6 + 999x^3 = 125$

67. $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$

68. $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$

69. $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

70. الاستنتاج المنطقي A منشور مستطيل الشكل أبعاده $x - 2$، $x - 4$، و $x - 6$ وحجمه يساوي $40x$ وحدة مكعبة.

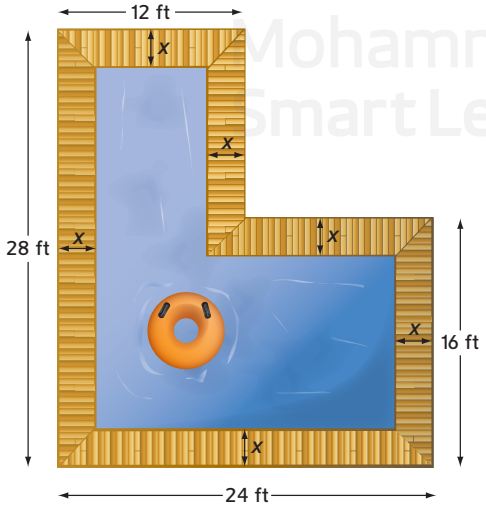
a. اكتب معادلةً كثيرة الحدود باستخدام الصيغة الخاصة بالحجم.

b. استخدم طريقة التحليل إلى العوامل لـــ x.

c. هل هناك أي قيم غير منطقية لـــ x؟ اشرح.

d. ما أبعاد المنشور

71. تصميم حمام السباحة تريد أسماء بناء حمام سباحة باتباع الرسم التخطيطي على اليمين. وسوف يحاط حمام السباحة بممر جانبي بعرض ثابت.



a. إذا قرّر أن تكون المساحة الكلية $336\ ft^2$، فما قيمة x؟

b. إذا تضاعفت قيمة x، فكم تكون مساحة الحمام الجديدة؟

c. إذا نقصت قيمة x إلى النصف، فكم تكون مساحة الحمام الجديدة؟

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

72. علم الأحياء خلال إحدى التجارب، يمكن تمثيل عدد خلايا فيروسٍ من خلال العلاقة $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t هو الزمن بالساعات و P هو عدد الخلايا. ويريد جمال أن يحدد الأوقات التي يصل فيها عدد الخلايا إلى 8000.

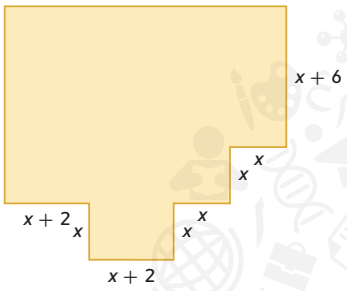
a. جد حل عن طريق التحليل إلى العوامل.

b. ما الطريقة التي استخدمتها للتحليل؟

c. ما قيم t المنطقية وما قيمها غير المنطقية؟ اشرح.

d. مثّل الدالة $0 \le t \le 20$ بيانيًا باستعمال آلتك الحاسبة.

73. منزل يريد والدا آمنة أن يصمما المسرح المنزلي في الطابق الأرضي تبعًا للرسم التخطيطي المبين على الجهة اليمنى.



a. اكتب دالة بدلالة x لمساحة المسرح.

b. إذا قررا أن تكون مساحة الطابق الأرضي 1366 مترًا مربعًا، فما قيمة x؟

74. علم الأحياء يمكن تمثيل تعداد الطفيليات في تجربة ما عن طريق العلاقة $f(t) = t^3 + 5t^2 - 4t - 20$، حيث t هو الزمن بالأيام.

a. استخدم التحليل إلى العوامل عبر التجميع لتحديد قيم t التي يتحقق فيها $f(t) = 0$.

b. في أي وقت يصل التعداد إلى الصفر؟

c. هل أيّ من قيم t ليست منطقية؟ اشرح.

حلِّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلًا كاملًا. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

75. $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$

76. $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$

77. $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

78. الاستنتاج المنطقي يبلغ بعدا مزرعة حارب في الوقت الحالي 32 m في 40 m. ويريد توسيع المساحة إلى 4.5 ضعفًا للمساحة الحالية عن طريق زيادة الطول والعرض بالكمية نفسها.

a. صمم رسمًا تخطيطيًّا يمثل هذه الحالة.

b. اكتب معادلة كثيرة الحدود لمساحة المزرعة الجديدة. ثم جد حل المعادلة بطريقة التحليل إلى العوامل.

c. مثّل الدالة بيانيًا.

d. ما الحل المستبعد؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. تحدٍ حلل $36x^{2n} + 12x^n + 1$.

80. تحدٍ جد حل $6x - 11\sqrt{3x} + 12 = 0$.

81. الاستنتاج جد مثالًا معاكسًا للعبارة $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

82. مسألة غير محددة الإجابة الصيغة التكعيبية لمعادلة ما هي $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. اكتب معادلة من الدرجة 6 يمكن كتابتها بصيغة تكعيبية.

83. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكن أن يساعدك الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود في تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل.

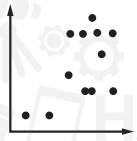
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

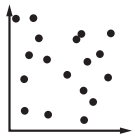
84. إجابة قصيرة بلاطات مرقمة من 1 إلى 6 موضوعة في حقيبة ومرسومة لتحديد أي من المهام الست ستوكل إلى الأشخاص الستة فما مدى احتمالية أن تكون البلاطتان المرقمتان 5 و 6 هما المرسومتين أخيرًا؟

85. إحصاءات أي مما يلي يمثل ارتباطًا سالبًا؟

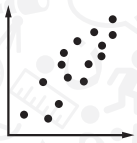
A



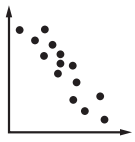
C



B



D



85. أي من الإجابات التالية تصف بدقةٍ إزاحة التمثيل البياني لـ $y = (x + 4)^2 - 3$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$؟

F إلى الأسفل بمقدار 1 وإلى اليمين بمقدار 3

G إلى الأسفل بمقدار 6 وإلى اليسار بمقدار 5

H إلى الأعلى بمقدار 1 وإلى اليسار بمقدار 3

J إلى الأعلى بمقدار 6 وإلى اليمين بمقدار 5

87. SAT/ACT الفرق الموجب بين k و $\frac{1}{12}$ هو نفسه الفرق الموجب بين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$. أي مما يلي هو قيمة k؟

A $\frac{1}{60}$

B $\frac{1}{20}$

C $\frac{1}{15}$

D $\frac{13}{60}$

E $\frac{37}{60}$

مراجعة شاملة

مثل بيانيًا كل دالة كثيرة الحدود. وقدّر إحداثيات المحور x التي تتشكل عندها القيمتان النسبيتان العظمى والصغرى. حدد المجال والمدى لكل دالة. (الدرس 4-3)

88. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 8$

89. $f(x) = -3x^3 + 6x^2 + 2x - 1$

90. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 6$

اذكر درجة كل كثيرة حدود ومعاملها الرئيسي بمتغير واحد. وإن لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاشرح السبب. (الدرس 3-3)

91. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$

92. $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$

93. $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

94. الوظائف بدوام جزئي يربح أيمن AED 10 في الساعة من عمله في متجر للخضراوات ويربح AED 12 في الساعة من الإجازات. ولا يمكنه العمل لأكثر من 15 ساعة في الأسبوع. مثل المتباينتين اللتين يمكن لأيمن استخدامهما لتحديد عدد الساعات التي يحتاج إلى العمل خلالها في كل وظيفة بيانيًّا إذا أراد أن يربح AED 120 على الأقل في الأسبوع. (الدرس 3-2)

95. التزلج خرج أعضاء نادي التزلج الـ 28 جميعهم لجولة. فدفع النادي إجمالي AED 478 للمعدات. فما عدد معدات التزلج وألواح التزحلق على الجليد التي أجروها؟ (الدرس 3-2)

96. الهندسة أضلاع زاوية ما هي جزء من مستقيمين معادلتهما $3y - 2x = 9$ و $2y + 3x = -7$. ورأس الزاوية هي نقطة التقاء الضلعين. جد إحداثيات رأس الزاوية (الدرس 3-1)

مراجعة المهارات

اقسم.

97. $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$

98. $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$

99. $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

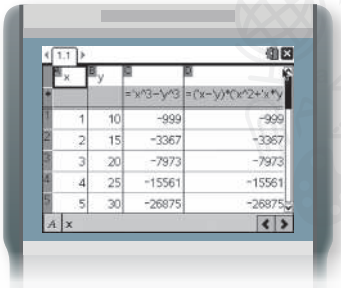
مختبر تقنية التمثيل البياني
المتطابقات كثيرة الحدود

تعريف **المتطابقة** هي معادلة تتحقق بأي أعداد تحل محل المتغيرات. وبالتالي، **متطابقة كثيرة الحدود** هو معادلة كثيرة الحدود تنطبق على أي قيمة تستبدل بالمتغيرات.

يمكنك استخدام جدولٍ أو ورقة جدولةٍ على آلة التمثيل البياني الخاصة بك لتحديد ما إذا كانت المعادلة كثيرة الحدود ربّما تكون متطابقة.

النشاط 1 استخدام الجدول

حدد ما إذا كان من الممكن $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ أن يكون متطابقة.



الخطوة 1 أضف **قوائم جديدة و ورقة بيانات** اكتب على العمود A اسم x والعمود B اسم y. انسخ أي قيم في العمودين A و B.

الخطوة 2 انقل المحرك إلى صف الصيغة في العمود C واكتب $= x^3 - y^3$. في العمود D، اكتب $= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

أيًا كانت القيم المدخلة عن x و y في العمودين A و B، القيم في العمودين C و D هي نفسها. وبالتالي، قد تكون المعادلة متطابقة.

وإذا أردت إثبات أن معادلةً ما متطابقة، فيتعين عليك أن تبيّن صحّتها من أجل جميع قيم المتغيرات.

المفهوم الأساسي التحقّق من المتطابقة عبر تحويل طرفٍ واحد

الخطوة 1 بسّط طرفًا واحدًا من المعادلة إلى أن يصبح طرفاها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

الخطوة 2 حوّل ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأبسط.

النشاط 2 تحويل طرف واحد

أثبت أن $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ متطابقة.

$(x + y)^2 \stackrel{?}{=} x^2 + 2xy + y^2$	المعادلة الأصلية
$(x + y)(x + y) \stackrel{?}{=} x^2 + 2xy + y^2$	اكتب $(x + y)^2$ كعاملين.
$x^2 + xy + xy + y^2 \stackrel{?}{=} x^2 + 2xy + y^2$	طريقة ورق الألومنيوم
$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ✓	بسّط.

وبالتالي، تم إثبات المتطابقة $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

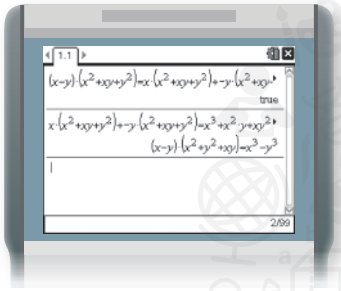
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا استخدام الآلة الحاسبة TI-Nspire المزودة بنظام (CAS) الحاسوبي لإثبات المتطابقة.

النشاط 3 استخدام نظام CAS

أثبت أن $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ متطابقة.



الخطوة 1 أضف **آلة حاسبة جديدة** في صفحة TI-Nspire CAS. بسّط الجانب الأيمن من المعادلة كل خطوة على حدة.

الخطوة 2 أدخل الطرف الأيمن من المعادلة ثمّ قم بالتوزيع.

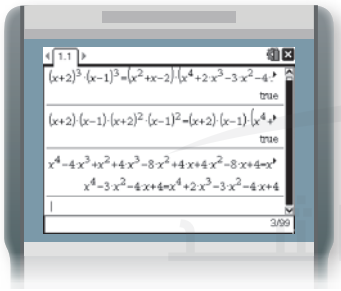
الخطوة 3 ثم اضرب بعد ذلك. سيقوم نظام CAS بتنفيذ الخطوة الأخيرة للتبسيط إلى أبسط صورة.

الخطوة النهائية الموضحة على شاشة CAS هي النتائج في $x^3 - y^3$. وبالتالي، تم إثبات المتطابقة.

يمكنك أيضًا إثبات المتطابقات من خلال تحويل كلٍّ من طرفي المعادلة.

نشاط 4 استخدم نظام CAS لتحويل كل طرف

أثبت أن $(x + 2)^3(x - 1)^3 = (x^2 + x - 2)(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$ متطابقة.



أضف صفحة **Calculator (حاسبة)** جديدة. بسّط الطرف الأيسر والأيمن لكل معادلةٍ مِمَّا.

سيشير نظام CAS إن كانت التغييرات صحيحة، وإلا فسوف يؤدي عملية التبسيط بالنيابة عنك.

نظام CAS سوف يقوم بعملية التبسيط الأخيرة. تم إثبات المتطابقة $(x + 2)^3 (x - 1)^3 = (x^2 + x - 2)(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$.

التحليل

1. حدد ما إذا كان $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ متطابقة.

التمارين

استخدم نظام CAS لإثبات كل متطابقة.

2. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
3. $p^4 - q^4 = (p - q)(p + q)(p^2 + q^2)$
4. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
5. $g^6 + h^6 = (g^2 + h^2)(g^4 - g^2h^2 + h^4)$
6. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
7. $u^6 - w^6 = (u + w)(u - w)(u^2 + vw + w^2)(u^2 - vw + w^2)$
8. $(x + 1)^2(x - 4)^3 = (x^2 - 3x - 4)(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 3-6 نظريتا الباقي والعامل

السابق:
- استخدمت خاصية التوزيع والتحليل إلى العوامل لتبسيط التعابير الجبرية.

الحالي:
1. إيجاد قيم الدوال باستخدام التعويض التركيبي.
2. تحديد ما إذا كانت ثنائية حد عاملا لكثيرة حدود أم لا باستخدام التعويض التركيبي.

لماذا؟
- يمكن تمثيل عدد طلاب الكليات الأمريكيين الذين يدرسون في الخارج بواسطة الدالة $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x هي عدد السنوات منذ عام 1993 و $S(x)$ هي عدد الطلاب بالآلاف.

يمكنك استخدام هذه الدالة لتقدير عدد طلاب الكليات الأمريكيين الذين سيدرسون في الخارج عام 2018 من خلال إيجاد قيمة الدالة عندما $x = 25$. يمكنك استخدام طريقة أخرى وهي *التعويض التركيبي*.

المفردات الجديدة

تعويض تركيبي (synthetic substitution)

كثيرة حدود منخفضة (depressed polynomial)

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 التعويض التركيبي

يمكن استخدام القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة ما. تأمل الدالة كثيرة الحدود $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$. اقسم كثيرة الحدود على $x - 3$.

الطريقة 1 القسمة المطوّلة

$$x - 3 \overline{)-3x^2 + 5x + 4}$$

$-3x - 4$

$-3x^2 + 9x$

$-4x + 4$

$-4x + 12$

-8

قارن الباقي -8 بـ $f(3)$.

الطريقة 2 القسمة التركيبية

3	−3	5	4
		−9	−12
	−3	−4	−8

عوّض عن x بـ 3. $f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$

اضرب. $= -27 + 15 + 4$

بسّط. $= -8$

لاحظ أن قيمة $f(3)$ هي نفسها الباقي عند قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضح **نظرية الباقي**.

المفهوم الأساسي نظرية الباقي

الشرح إذا تمت قسمة كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فالباقي ثابت $P(r)$، و

المقسوم	يساوي	حاصل القسمة	مضروبًا في	المقسوم عليه	زائد	الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$,

حيث أن $Q(x)$ كثيرة حدود بدرجة أقل بواحد من $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

تطبيق نظرية الباقي باستخدام قسمة التركيبي لإيجاد قيمة دالة ما يسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة مريحة لإيجاد قيمة دالة ما، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 تعويض تركيبي

إذا كانت $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فجد $f(4)$.

الطريقة 1 التعويض التركيبي

بموجب نظرية الباقي، ينبغي أن تكون $f(4)$ هي الباقي عند تقسيم كثيرة الحدود على $x - 4$.

ونظرًا إلى عدم وجود الحدّ x^2، فيوضع صفرٌ في هذا الموضع كرمز مكاني.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

الباقي يساوي 662. لذا، باستخدام التعويض التركيبي، $f(4) = 662$.

الطريقة 2 التعويض المباشر

عوّض عن x بـ 4.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ الدالة الأصلية

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ عوّض عن x بـ 4.

$= 768 - 128 + 20 + 2$ or 662 بسّط.

باستخدام التعويض المباشر، $f(4) = 662$. كلتا الطريقتين تعطيان النتيجة نفسها.

تمرين موجّه

1A. إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فجد $f(3)$.

1B. إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فجد $f(-1)$.

يمكن استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي ينطوي فيها التعويض المباشر على حساباتٍ معقدة.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد قيم الدوال

تحدٍ عد إلى بداية الدرس. ما عدد طلاب الجامعة الأمريكان الذين سيدرسون بالخارج عام 2018؟

استخدم التعويض التركيبي لقسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 25$

$x - 25$	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.5	−0.5	88.25	2208.5
	0.02	−0.02	3.53	88.34	2286.04

سيكون هناك عام 2018 قرابة 2286040 طالب كلية يدرسون في الخارج.

تمرين موجّه

2. تحدٍ يمكن استخدام الدالة $C(x) = 2.46x^3 - 22.37x^2 + 53.81x + 548.24$ لتقريب عدد، بالآلاف، طلاب الجامعة الدوليين الذين يدرسون في الولايات المتحدة x سنوات منذ عام 2000. ما عدد طلاب الجامعة الدوليين الذين يمكن توقع دراستهم في الولايات المتحدة عام 2015؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 عوامل كثيرات الحدود

القسمة التركيبية أدناه توضح أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ و $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على أحد عواملها ذات الحدين، فإن ناتج القسمة يسمى كثيرة حدود منخفضة. ويوجد **كثيرة الحدود المنخفضة** هذه درجة أقل بمقدار واحد من كثيرة الحدود الأصلية. من خلال نواتج القسمة، وباستخدام نظرية الباقي، يمكننا استنتاج العبارة التالية.

المقسوم	يساوي	ناتج قسمة	مضروبًا في	المقسوم عليه	زائد	الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

بما أن الباقي يساوي 0، فإن $f(-3) = 0$. هذا يعني أن $x + 3$ عامل بالنسبة إلى $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضح **نظرية العامل**. التي هي حالة خاصة من نظرية الباقي.

المفهوم الأساسي نظرية العامل

ثنائي الحدود $x - r$ هي من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكن استخدام نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت ذات الحدين عاملاً لكثيرة الحدود. ويمكن استخدامها أيضًا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

مثال 3 استخدام نظرية العامل

حدد ما إذا كان $x - 5$ عاملاً لـ $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$. ثم جد العوامل المتبقية لكثيرة الحدود.

ذات الحدّين $x - 5$ هي عاملٌ لكثيرة الحدود إذا كان العدد 5 صفرًا للدالة كثيرة الحدود المقترنة. استخدم نظرية العامل والقسمة التركيبية.

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

نظرًا لأن الباقي يساوي 0، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود. يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ إلى العوامل على طريقة $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. كثيرة الحدود $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة حدود منخفضة. تحقق حتى تعرف ما إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل.

حلل ثلاثية الحدود إلى العوامل. $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

إذًا، $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$.

يمكنك التحقق من إجابتك عبر ضرب العوامل ومعرفة إن كانت تنتج لديك كثيرة الحدود الأولية.

تمرين موجّه

3. أظهر أن $x - 2$ عامل لـ $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$. ثم جد العوامل المتبقية لكثيرة الحدود. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

انتبه!

التعويض التركيبي تذكر أن التعويض التركيبي يستخدم في قسمة كثيرة الحدود على $(x - a)$. إذا كانت ذات الحدين $(x - a)$، فاستخدم a. إذا كانت ذات الحدين $(x + a)$، فاستخدم $-a$.

نصيحة دراسية

التحليل إلى العوامل لا يجب أن تكون عوامل كثيرة الحدود ذات حدين. على سبيل المثال، عاملا $x^3 + x^2 - x + 15$ هي $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

برنامج محمد بن راشد Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(4)$ و $f(-2)$ لكل دالة.**

1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$

2. $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$

مثال 2 **3. الطبيعة** يمكن تمثيل العدد التقريبي لأزواج النسور الصلعاء التي تعشش في الولايات المتحدة الأمريكية بالدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$، وفيها x عدد السنوات منذ عام 1970. ما عدد الأزواج المعششة من النسور الصلعاء التي يمكن توقعها عام 2018؟

مثال 3 **باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي العوامل.**

4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

5. $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$

6. $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$

7. $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-5)$ و $f(2)$ لكلّ دالة.**

8. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

9. $f(x) = x^2 - 8x + 6$

10. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$

11. $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$

12. $f(x) = x^3 - 5x + 2$

13. $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$

14. $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$

15. $f(x) = x^4 - 6x - 8$

مثال 2 **16. المعرفة المالية** يمكن تقريب توفير وقود سيارة معينة مسافة كيلومترات لكل لتر بالعلاقة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث تمثل x سرعة السيارة بالكيلومترات في الساعة. حدد توفير الوقود عندما تقطع السيارة مسافة 40 km و 50 km و 60 km في الساعة. 29.5 km لكل لتر؛ 29.87 km لكل لتر؛ 28.19 km لكل لتر.

مثال 3 **بوجود كثيرة حدود وأحد عواملها، جد العوامل المتبقية من كثيرة الحدود.**

17. $x^3 - 3x + 2; x + 2$

18. $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19. $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$

20. $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$

21. $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22. $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$

23. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24. $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$

25. $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26. $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$

27. ركوب الزورق يتحرك زورق بمحرك ضد الأمواج بتسارع من موضع السكون. افترض أن سرعة الزورق بالمتر في الثانية تعطى من خلال الدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، وفيها t تمثل الزمن بالثواني.

a. جد سرعة الزورق عند 1، 2، و 3 ثوانٍ. **0.26** ، **5.76**، **19.86**

b. يستغرق الزورق 6 ثوانٍ للتحرك من العوامتين اثناء التعجيل. استخدم التعويض لإيجاد $f(6)$ واشرح معنى ذلك.

28. الاستنتاج يمكن تمثيل مبيعات إحدى الشركات مقدرةً بملايين الدراهم من الإلكترونيات الاستهلاكية بواسطة الدالة $S(x) = -1.2x^3 + 18x^2 + 26.4x + 678$، وفيها x هي عدد السنوات منذ عام 2005.

a. استخدم التعويض التركيبي لتقدير المبيعات لعامي 2017 و 2020.

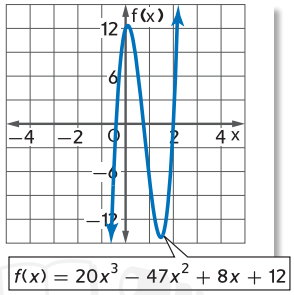
b. هل تعتقد أن هذا النموذج مفيدٌ في تقدير المبيعات المستقبلية؟ اشرح. انظر الهامش.

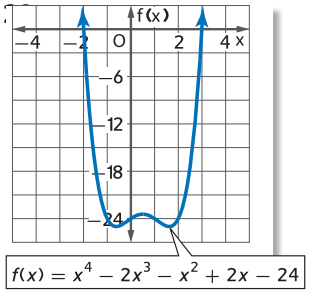
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استخدم التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة الحدود.

30.





31. **التمثيلات المتعددة** ستتناول في هذه المسألة الدالة $f(x) = -9x^5 + 104x^4 - 249x^3 - 456x^2 + 828x + 432$.

a. **جبريًا** إذا كان $x - 6$ عاملاً للدالة، فجد كثيرة الحدود المنخفضة.

b. **جدولي** شكّل جدولاً لقيم $-5 \le x \le 6$ الخاصة بكثيرة الحدود المنخفضة.

c. **تحليليًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها حول مواضع الأصفار الأخرى بناءً على الجدول؟ اشرح استنتاجك.

d. **بيانيًّا** مثّل الدالة الأصلية بيانيًا للتحقق من استنتاجاتك.

المثابرة جد قيم k بحيث يساوي كل باقٍ 3.

32. $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

33. $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

34. $(x^2 + 5x + 7) \div (x + k)$

35. $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالةً كثيرة الحدود تضم جذرًا مضاعفًا للعدد 1 وجذرين مضاعفين للعدد -5. مثل الدالة بيانيًّا.

تحدّي جد حلول كل دالة كثيرة الحدود.

37. $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

38. $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$

39. **الاستنتاج** تمت قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ تقسم على c-x. ماذا تستنتج إذا:

a. كان الباقي يساوي 0؟

b. كان الباقي يساوي 1؟

c. كان ناتج القسمة يساوي 1، والباقي يساوي 0؟

40. **تحدٍ** راجع تعريف نظرية العامل. وقدم برهانًا على النظرية.

41. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة تكعيبية لها باقٍ 8 لـ $f(2)$ وباقٍ -5 لـ $f(3)$.

42. **تحدّ** بيّن أنه سيكون للدالة $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ على الدوام صفرٌ منطقيٌّ عند اختيار الأعداد 1 و -2 و 3 و 4 و -6 عشوائيًا لتعويضها مكان الرموز من a حتى e وعند استخدام الأعداد جميعها..

43. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن تحديد مواضع أصفار دالةٍ عبر استخدام نظرية الباقي وإعداد جدول بمختلف قيم الدخل ومن ثم مقارنة البواقي.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

44. $27x^3 + y^3 =$

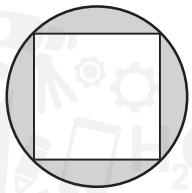
A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

45. إجابة شبكية يبيّن الشكل مربعًا طول ضلعه $2\sqrt{2}$ بداخل دائرة. ومساحة الدائرة تساوي $k\pi$. فما القيمة المضبوطة لـ k؟



46. ما ناتج ضرب العددين المركبين $(4 + i)(4 - i)$؟

F 15 **H** 17

G $16 - i$ **J** $17 - 8i$

47. SAT/ACT قياس الزاوية الأكبر في المثلث يساوي أقل من ضعفي قياس الزاوية الأصغر بمقدار 14 درجة. وقياس الزاوية الثالثة يزيد عن قياس الزاوية الأصغر بمقدار 2 درجة. فما قياس الزاوية الأصغر؟

A 46 **D** 52

B 48 **E** 82

C 50

مراجعة شاملة

حُـــــلّ المعادلات الآتية. (الدرس 3-5)

48. $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$

49. $x^4 - 6x^2 = 27$

50. $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$

أكمل كلاً مما يلي. (الدرس 3-4)

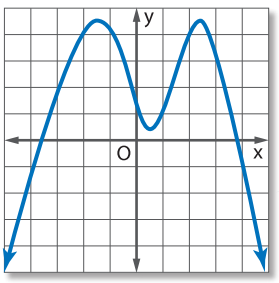
a. قدّر الإحداثي x لكل نقطة دوران وحدّد ما إذا كانت تلك الإحداثيات تمثل قيمًا نسبيةً عظمى أم صغرى.

b. قدّر الإحداثي x لكل صفر.

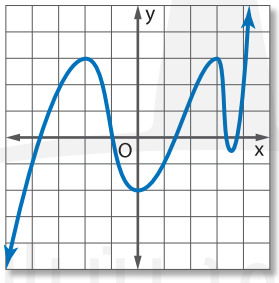
c. حدّد أصغر درجة ممكنة للدالة.

d. اذكر خطوط التقارب للدالة الممثلة بيانيًا ومجالها ومداها.

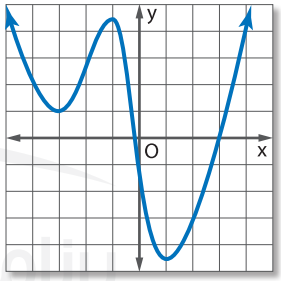
51.



52.



53.



54. السلامة على الطرق السريعة يستطيع المهندسون استخدام الصيغة $d = 0.05v^2 + 1.1v$ لتقدير مسافة التوقف الصغرى d بالأمتار لسيارةٍ تسير بسرعة v km/h. فإذا كان بإمكان سيارةٍ التوقف بعد 125 m. فما السرعة القصوى التي قد تكون تسير عندها عندما ضغط السائق على المكابح أول مرة؟ km/h (الدرس 3-6)

جد الحل بالتمثيل البياني. (الدرس 3-3)

55. $y = 3x - 1$
$y = -2x + 4$

56. $3x + 2y = 8$
$-4x + 6y = 11$

57. $5x - 2y = 6$
$3x - 2y = 2$

مراجعة المهارات

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$ و $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$، فجد قيمة ما يلي.

58. $c(a + 2) - d(a - 4)$

59. $c(a - 3) + d(a + 1)$

60. $c(-3a) + d(a + 4)$

61. $3d(3a) - 2c(-a)$

62. $c(a) + 5d(2a)$

63. $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

3-7 الجذور والأصفار

السابق:
- استخدمت الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.

الحالي:
1. تحديد نوع وعدد جذور المعادلة كثيرة الحدود.
2. إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.

لماذا؟
- يمكن استخدام الدالة $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$ لتمثيل متوسط سعر لتر البنزين في إحدى السنوات إذا كان x يمثل عدد السنوات منذ عام 1990. لإيجاد متوسط سعر البنزين في عام محدد، يمكنك استخدام جذور المعادلة كثيرة الحدود ذات الصلة.

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 أنواع الجذور التركيبية

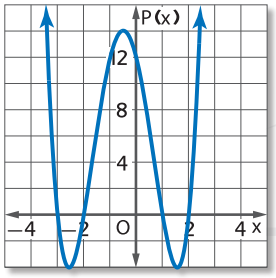
في السابق، تعلمت أن صفر الدالة $f(x)$ هو أي قيمة c بحيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًا، تكون الأصفار الحقيقية للدالة هي تقاطعات x من التمثيل البياني.

ملخص المفهوم الأصفار والعوامل والجذور ونقاط التقاطع

الشرح بفرض أن $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة الحدود. إذًا فالعبارات التالية متساوية.

- c هو صفرٌ لـ $P(x)$.
- c هو حلٌ أو جذرٌ لـ $P(x) = 0$.
- $x - c$ هو عاملٌ لـ $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًا، إذًا (c، 0) هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني الخاص بالدالة $P(x)$.

مثال حسب الدالة كثيرة الحدود $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



أصفار الدالة $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي -3 و -2 و 1 و 2.

جذور الدالة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي -3 و -2 و 1 و 2.

عوامل الدالة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي $(x + 3)$ و $(x + 2)$ و $(x - 1)$ و $(x - 2)$.

نقاط تقاطع x للتمثيل البياني الخاص بالدالة $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي $(-3, 0)$ و $(-2, 0)$ و $(1, 0)$ و $(2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة الحدود بدرجة أكبر من الصفر، فهناك جذر حقيقي واحد أو أكثر أو لا يوجد جذور حقيقية (الجذور أعداد تخيلية). بما أن الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية تنتمي لمجموعة الأعداد المركبة، فجميع المعادلات كثيرة الحدود بدرجة أكبر من الصفر سيكون لها جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة. وهذا ما يطلق عليه **نظرية الجبر الأساسية**

المفهوم الأساسي نظرية الجبر الأساسية

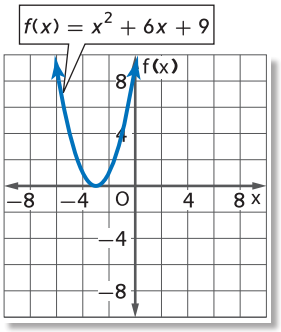
أي معادلة كثيرة الحدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 1 تحديد عدد الجذور ونوعها

حُلّ كل معادلة. اذكر عدد الجذور ونوعها.

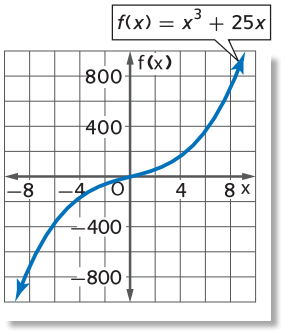


a. $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	حلل إلى العوامل.
$x + 3 = 0$	احسب الجذر لكل طرف.
$x = -3$	الحل لقيمة x.

نظرًا لأن $(x + 3)$ هي ضعف عامل $x^2 + 6x + 9$ فإن -3 جذر مضاعف. إذًا، للمعادلة جذر واحد مكرر، -3.

التحقق يلامس التمثيل البياني للمعادلة المحور $x-$ عند $x = -3$. بما أن -3 هو جذر مضاعف، فإن التمثيل البياني لا يقطع المحور. ✓



b. $x^3 + 25x = 0$

$x^3 + 25x = 0$	المعادلة الأصلية
$x(x^2 + 25) = 0$	حلل إلى العوامل.
$x = 0 \quad x^2 + 25 = 0$	
$x^2 = -25$	
$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$	

هذه المعادلة لها جذر حقيقي واحد، وجذران تخيليان، $5i$ و $-5i$.

التحقق يقطع التمثيل البياني لهذه المعادلة المحور $x-$ عند موضع واحد فقط، $x = 0$. ✓

قراءة في الرياضيات

الجذور المكررة قد يكون للمعادلات كثيرة الحدود جذور مضاعفة أو جذور ثلاثية أو جذور تربيعية وهكذا. وهذا يشار إليه بشكل عام باسم *الجذور المتعددة*.

تمرين موجّه

1A. $x^3 + 2x = 0$

1B. $x^4 - 16 = 0$

1C. $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

1D. $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

افحص حلول كل معادلة في المثال 1. ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة هو نفسه درجة كل كثيرة حدود. النتيجة التالية لنظرية الجبر الأساسية تصف تلك العلاقة بين درجة الجذور وعددها في معادلة كثيرة الحدود.

المفهوم الأساسي نتيجة نظرية الجبر الأساسية

الشرح أي معادلة كثيرة حدود من الدرجة n لها بالضبط عدد n من الجذور في مجموعة الأعداد المركبة، بما فيها الجذور المكرّرة.

مثال

$-2x^5 - 3x^2 + 8$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$x^3 + 2x^2 + 6$
5 جذور	4 جذور	3 جذور

وبصورة مشابهة، أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها بالضبط n صفراً.

إضافةً إلى ذلك، اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي رينيه ديكارت علاقةً بين إشارات معاملات الدالة كثيرة الحدود وبين عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

نصيحة دراسية

الصفر عند نقطة الأصل إذا كان أحد أصفار دالةٍ يقع عند نقطة الأصل، فإن مجموع أعداد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية يختزل بعدد مرات كون العدد صفر صفرًا للدالة.

المفهوم الأساسي قاعدة ديكارت للإشارات

بفرض أن $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ دالة كثير حدود لها معامل حقيقي. إذًا

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ هو نفسه عدد التغيرات في إشارة معاملات الحدود، أو أقل من هذا العدد بعددٍ زوجي
- وإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة $P(x)$ هو نفسه عدد التغيرات في إشارة معاملات الحدود الخاصة بالدالة $P(-x)$، أو أقل من هذا العدد بعددٍ زوجي.

مثال 2 إيجاد أعداد الأصفار الموجبة والسالبة

اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لـ $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

نظرًا لأن $f(x)$ من الدرجة 6، فلديها ستة أصفار، إما حقيقة وإما تخيلية. استخدم قاعدة "ديكارت" للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية المحتمل ونوعها.

أحصِ عدد التغيرات في إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

لا (+إلى+) — نعم (+إلى−) — لا (−إلى−) — نعم (+إلى−) — نعم (−إلى+) — نعم (+إلى−)

هناك 4 تغيّرات في الإشارة، وبالتالي هناك 4 أصفار حقيقية أو صفران حقيقيان أو لا توجد أي أصفار حقيقية.

أحصِ عدد التغيرات في إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$
$$= x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

نعم (+إلى−) — لا (−إلى−) — نعم (−إلى+) — لا (+إلى+) — لا (+إلى+) — لا (+إلى+)

هناك تغيّران في الإشارة، وبالتالي هناك صفران حقيقيان أو لا توجد أي أصفار حقيقية.
ارسم مخططًا بالتشكيلات المحتملة للأصفار الحقيقية والتخيلية.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية	العدد الكلي للأصفار
4	2	0	4 + 2 + 0 = 6
4	0	2	4 + 0 + 2 = 6
2	2	2	2 + 2 + 2 = 6
2	0	4	2 + 0 + 4 = 6
0	2	4	0 + 2 + 4 = 6
0	0	6	0 + 0 + 6 = 6

تمرين موجّه

2. اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لـ $h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$

2 إيجاد الأصفار

يمكنك استخدام عدة استراتيجياتٍ ونظرياتٍ قد تعلّمتها من أجل إيجاد جميع أصفار دالة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 استخدم التعويض التركيبي لإيجاد الأصفار

جد جميع أصفار $f(x) = x^4 - 18x^2 + 12x + 80$.

الخطوة 1 العدد الكليّ للأصفار.

بما أن الدالة $f(x)$ من الدرجة 4، فلهذه الدالة 4 أصفار.

الخطوة 2 حدد نوع الأصفار.

تفحّص عدد التغيرات في الإشارات للدالة $f(x)$ والدالة $f(-x)$.

$f(-x) = x^4 - 18x^2 - 12x + 80$ (نعم، لا، نعم)

$f(x) = x^4 - 18x^2 + 12x + 80$ (نعم، نعم، لا)

نظرًا لوجود تغيرين في الإشارة لمعاملات $f(x)$، فإن الدالة لها صفران حقيقيان موجبان أو ليس لها أصفار على الإطلاق. ونظرًا لوجود تغيرين في الإشارة لمعاملات $f(-x)$، فإن $f(x)$ لها صفران حقيقيان سالبان أو ليس لها أصفار على الإطلاق. إذًا $f(x)$ لها 4 أصفار حقيقية وصفران تخيليان، أو 4 أصفار تخيلية.

الخطوة 3 حدّد الأصفار الحقيقية.

أدرج بعض القيم المحتملة، ثم استخدم التعويض التركيبي لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ لإيجاد القيم الحقيقية لـ x.

x	1	0	−18	12	80
−3	1	−3	−9	39	−37
−2	1	**−2**	**−14**	**40**	**0**
−1	1	−1	−17	29	51
0	1	0	−18	12	80
1	1	1	−17	−5	75
2	1	2	−14	−2	76

يعرض كل صفٍّ معاملات كثيرة الحدود المنخفضة والباقي.

من الجدول، يمكننا أن نرى صفرًا واحدًا عند $x = -2$. بما أن هناك صفرين حقيقيين سالبين، فاستخدم التعويض التركيبي مع الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 40$ لإيجاد صفر سالب آخر.

x	1	−2	−14	40
−4	1	**−6**	10	**0**
−5	1	−7	21	−65
−6	1	−8	34	−164

يوجد صفر سالب آخر عند $x = -4$ بما أن كثيرة الحدود المنخفضة $x^2 - 6x + 10$ تربيعية، فاستخدم الصيغة التربيعية لإيجاد الأصفار المتبقية لـ $f(x) = x^2 - 6x + 10$

الصيغة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عوّض عن a بـ 1، b بـ −6، وعن c بـ 10.

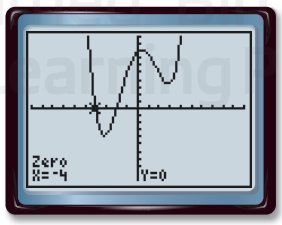
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

بسّط.

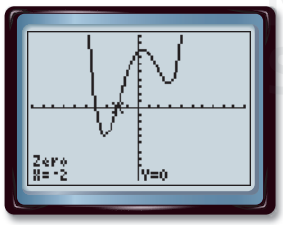
$$= 3 \pm i$$

التحقق للدالة أصفار عند -4 و $-2, 3 + i$ و $3 - i$.

مثل الدالة بيانيًّا على حاسبة التمثيل البياني. يقطع التمثيل البياني المحور x− مرتين، لذا فهناك صفران حقيقيان. استخدم الدالة الصفرية في قائمة CALC لتحديد موقع كل صفر. الصفران الحقيقيان هما −4 و −2.



[−10, 10] scl: 1 by [−100, 100] scl: 10



[−10, 10] scl: 1 by [−100, 100] scl: 10

تمرين موجّه

3. جد جميع أصفار $h(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$.

نصيحة دراسية

اختبار الأصفار إذا لم تكن قيمةٌ ما صفرًا لكثيرة الحدود، فإنها لن تكون صفرًا لكثيرة الحدود المنخفضة أيضًا، وبالتالي لا حاجة للتحقق منها من جديد.

نصيحة دراسية

تحديد مواضع الأصفار عد إلى الدرس 2-4 لمعرفة كيفية استخدام قائمة CALC لتحديد موضع صفرٍ على آلتك الحاسبة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة المفردات

المترافقان المركبان هما عددان مركبان بالصيغتين $a + bi$ و $a - bi$

في الوحدة 4، عرفت أن ناتج ضرب المترافقين المركبين هو دائمًا عدد حقيقي وأن الجذور المركبة تأتي دائمًا في أزواج مترافقة. على سبيل المثال، إذا كان أحد جذري $x^2 - 8x + 52 = 0$ يساوي $4 + 6i$، فإن الجذر الثاني يساوي $4 - 6i$.

وهذا ينطبق على أصفار الدوال كثيرة الحدود أيضًا. بالنسبة لأي دالة كثيرة الحدود لها معاملات حقيقية، إذا كان أي عدد تخيلي يساوي صفرًا من هذه الدالة، فإن مرافقه يساوي صفرًا أيضًا. وهذا ما يسمى بـ **نظرية المترافقات المركبة**.

المفهوم الأساسي نظرية المترافقات المركبة

الشرح بفرض أن a و b أعداد حقيقية، و $b \neq 0$. إذا كان $a + bi$ يساوي صفرًا من دالة كثيرة الحدود ذات معامل حقيقي، فإن $a - bi$ يساوي صفرًا أيضًا من الدالة.

مثال إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما يكون لديك جميع أصفار دالةٍ كثيرة الحدود ويطلب منك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل ومن ثمّ اضرب جميع العوامل بعضها ببعض. والناتج يكون دالة كثيرة الحدود.

مثال 4 استخدم الأصفار لكتابة دالة كثيرة الحدود

اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ تكاملية وبأصغر درجة ممكنة، بحيث تتضمن أصفارها -1 و $5 - i$.

الفهم إذا كان $5 - i$ صفرًا للدالة، فإن $5 + i$ صفر للدالة أيضًا وفقًا لنظرية المرافقين المركبين. إذًا، $x + 1$ و $x - (5 - i)$ و $x - (5 + i)$ عوامل لكثيرة الحدود.

التخطيط اكتب الدالة كثيرة الحدود على هيئة حاصل ضربٍ لعواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

الحلّ اضرب العوامل لإيجاد الدالة كثيرة الحدود.

$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$	اكتب المعادلة.
$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$	أعد تجميع الحدود.
$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$	الفرق بين مربعين
$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$	الحدود المربعة.
$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$	بسّط.
$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$	اضرب.
$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$	اجمع الحدود المتشابهة.

التحقق نظرًا لوجود 3 أصفار، فإن درجة الدالة كثيرة الحدود يجب أن تكون 3. إذًا $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة الحدود من أصغر درجة ولها معاملات صحيحة وأصفار من -1 و $5 - i$، و $5 + i$.

تمرين موجّه

4. اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة لها معاملات صحيحة بأصفار تتضمن -1 و $1 + 2i$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **حُـــــلّ كل معادلة. اذكر عدد الجذور ونوعها.**

1. $x^2 - 3x - 10 = 0$

2. $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$

3. $16x^4 - 81 = 0$

4. $0 = x^3 - 8$

مثال 2 **اذكر عدد الأصفار الحقيقية الموجبة المحتملة وعدد الأصفار الحقيقية السالبة وعدد الأصفار التخيلية في كل دالة.**

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

6. $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$

7. $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$

8. $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$

مثال 3 **جد جميع أصفار كل دالة.**

9. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 6x - 16$

10. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + 28$

11. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 32x - 384$

12. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10$

مثال 4 **اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ تكاملية وبأصغر درجة ممكنة، بحيث تكون لها الأصفار المعطاة.**

13. $4, -1, 6$

14. $3, -1, 1, 2$

15. $-2, 5, -3i$

16. $-4, 4 + i$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حُـــــلّ كل معادلة. واذكر عدد الجذور ونوعها.**

17. $2x^2 + x - 6 = 0$

18. $4x^2 + 1 = 0$

19. $x^3 + 1 = 0$

20. $2x^2 - 5x + 14 = 0$

21. $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

22. $8x^3 - 27 = 0$

23. $16x^4 - 625 = 0$

24. $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

25. $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

26. $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 **اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل دالّة.**

27. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

28. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

29. $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

30. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

31. $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

32. $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

مثال 3 **جد جميع أصفار كل دالة.**

33. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$

34. $f(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$

35. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 75x - 700$

36. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 73x^2 + 384x + 576$

37. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 32x + 64$

38. $f(x) = x^5 - 8x^3 - 9x$

مثال 4 **اكتب دالة كثيرة حدود من أصغر درجة ولها معاملات بأصفار صحيحة محددة.**

39. $5, -2, -1$

40. $-4, -3, 5$

41. $-1, -1, 2i$

42. $-3, 1, -3i$

43. $0, -5, 3 + i$

44. $-2, -3, 4 - 3i$

45 **استنتاج** تحدد شركةٌ لتصنيع الحواسيب الربح الذي يترتب عن إنتاج x حاسوبٍ في اليوم بواسطة العلاقة $P(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$.

a. كم عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية الموجودة؟

b. ما هو معنى الأصفار في هذه الحالة؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ارسم التمثيل البياني لكل دالة باستخدام أصفارها.

46. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

47 $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$

48. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$

49. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

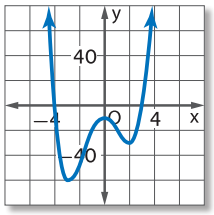
طابق بين التمثيلات البيانية التالية بالأصفار المعطاة.

a. $-3, 4, i, -i$

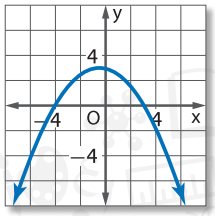
b. $-4, 3$

c. $-4, 3, i, -i$

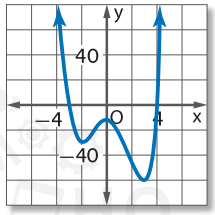
50.



51.



52.



53. الحفلات يمكن تمثيل مبلغ المال الذي كسبته دار سينما بين عامي 2003 و 2010 من خلال الدالة $M(x) = -2.03x^3 + 50.1x^2 - 214x + 4020$، وفيها x عدد السنوات منذ 2003.

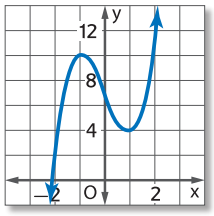
a. كم عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية الموجودة؟

b. مثّل الدالة بيانيًا باستخدام آلتك الحاسبة.

c. قرب جميع الأصفار الحقيقية إلى أقرب جزء من عشرة. ما دلالة كل صف في سياق هذه الحالة؟

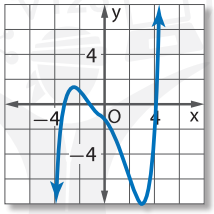
حدّد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل دالّة. اشرح استنتاجك.

54.



الدرجة: **3**

55.



الدرجة: **5**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود تضم:

a. 3 أصفار حقيقية وصفرين تخيليين **b.** 4 أصفارًا حقيقية **c.** صفرين تخيليين

57. تحدٍّ اكتب معادلةً بالصيغة المحللة إلى العوامل لدالة كثيرة الحدد من الدرجة 5 وتضم صفرين تخيليين، وصفرًا غير صحيح واحد، وصفرين حقيقيين. اشرح.

58. الفرضيات حدّد المعادلة المختلفة عن باقي المعادلات. اشرح.

$r^3 - 8 = 0$	$r^2 - 1 = 0$	$r^3 + 1 = 0$	$r^4 + 1 = 0$

59. الاستنتاج أعط مثالاً مضادًا لكل عبارة مما يلي.

a. جميع الدوال كثيرة الحدود من درجة أكبر من 2 لها جذر حقيقي سالب واحد على الأقل.

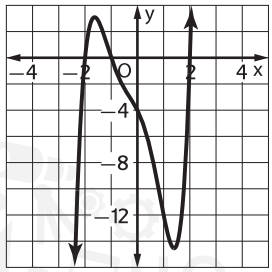
b. جميع الدوال كثيرة الحدود من درجة أكبر من 2 لها جذر حقيقي موجب واحد على الأقل.

60. الكتابة في الرياضيات اشرح لأحد أصدقائك كيف ستستخدم قاعدة ديكارت للإشارات من أجل تحديد عدد الجذور الحقيقية الموجبة المحتملة وعدد الجذور السالبة المحتملة للدالة كثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

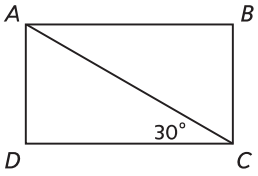
61. استخدم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود الموضحة أدناه. أي مما يلي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ ؟



A $x - 2$
B $x + 2$
C $x - 1$
D $x + 1$

62. إجابة قصيرة هناك نافذة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. طول كل ضلع 2.5 متر. والنافذة مقسومة نصفين بدعامة من رأس إلى نقطة منتصف ضلع المثلث المقابل للرأس. فما طول الدعامة تقريبًا؟

63. الهندسة في المستطيل $ABCD$، يبلغ طول $\overline{AD}$ 8 وحدات. فما طول $\overline{AB}$؟



F 4 وحدات
G 8 وحدات
H $8\sqrt{3}$ وحدات
J 16 وحدة

64. SAT/ACT المساحة الإجمالية لمستطيل تساوي $25a^4 - 16b^2$ وحدات مربعة. أي العوامل يمكن أن تمثل الطول والعرض؟

A $(5a^2 + 4b)$ وحدة و $(5a^2 + 4b)$ وحدة
B $(5a^2 + 4b)$ وحدة و $(5a^2 - 4b)$ وحدة
C $(5a^2 - 4b)$ وحدة و $(5a^2 - 4b)$ وحدة
D $(5a - 4b)$ وحدة و $(5a - 4b)$ وحدة
E $(5a + 4b)$ وحدة و $(5a - 4b)$ وحدة

مراجعة شاملة

استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-8)$ و $f(4)$ لكلّ دالة. (الدرس 3-6)

65. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

66. $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$

67. $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلِّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلًا كاملًا وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*. (الدرس 4-5)

68. $x^6 - y^6$

69. $a^6 + b^6$

70. $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$

71. $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

جد معدل التغير لكل مجموعة من البيانات. (الدرس 3-2)

72.

a.

الزمن (بالأيام)	3	6	9	12	15
الارتفاع (mm)	12	24	36	48	60

b.

الزمن (بالساعة)	2	4	6	8
المسافة (km)	35	40	105	140

c.

الزمن (s)	12	16	20	24	28
الحجم (cm^3)	45	60	75	90	105

d.

القوة (N)	32	40	48	56	64
العمل (J)	48	60	72	84	96

73. الترفيه يقدر أحمد أنه سيحتاج إلى 50 كرة تنس لكل لاعب يسجل اسمه في نادي التنس و 150 كرة أخرى على الأقل احتياطية. اكتب متباينة للتعبير عن هذا الموقف (الدرس 1-5)

مراجعة المهارات

جد جميع القيم المحتملة لـ $\pm\frac{b}{a}$ لكل مجموعة تعويض.

74. $a = \{1, 2, 4\}; b = \{1, 2, 3, 6\}$

75. $a = \{1, 5\}; b = \{1, 2, 4, 8\}$

76. $a = \{1, 2, 3, 6\}; b = \{1, 7\}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

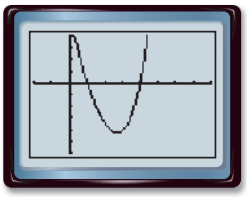
3-7 مختبر تقنية التمثيل البياني
تحليل الدوال كثيرة الحدود

يمكنك استخدام تقنية التمثيل البياني لمساعدتك في تحديد الأصفار الحقيقية، والنقاط العظمى والصغرى، وعدد الأصفار ونوعها، والتقاطعات مع المحور الرأسي y، وتماثل الدوال كثيرة الحدود.

النشاط تحديد خصائص كثيرة الحدود

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا. حدد الأصفار الحقيقية، والنقاط العظمى والصغرى، وعدد الأصفار ونوعها، والتقاطعات مع المحور الرأسي y، والتماثل.

a. $g(x) = 3x^4 - 15x^3 + 87x^2 - 375x + 300$



[−2, 8] scl: 1 by [−300, 200] scl: 50

الخطوة 1 مثّل المعادلة بيانيًا.

الخطوة 2 استخدم **صفر** [CALC] 2nd لإيجاد الأصفار الحقيقية عند $x = 1$ و $x = 4$.

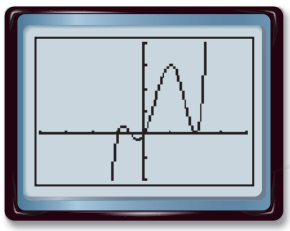
الخطوة 3 استخدم **النقطة الصغرى في** [CALC] 2nd لإيجاد القيمة الصغرى النسبية عند $(2.68, -214.11)$. لا توجد نقطة عظمى نسبية.

الخطوة 4 $g(x)$ درجتها 4 ويمكن أن يكون لها 4 أصفار على الأكثر. تم إيجاد صفرين حقيقيين من خلال التمثيل البياني. الصفران الآخران إما أنهما من الأصفار المضاعفة أو الأصفار التخيلية.

الخطوة 5 استخدم **القيمة الصفرية لـ** [CALC] 2nd لإيجاد التقاطع مع المحور الرأسي y، 300.

الخطوة 6 يمر التماثل المحوري عبر الرأس. ومعادلته هي $x = 2.68$.

b. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 4x$



[−4, 4] scl: 1 by [−4, 8] scl: 2

الخطوة 1 مثّل المعادلة بيانيًا.

الخطوة 2 حدد الأصفار الحقيقية عند $x = -1$ و $x = -\frac{1}{2}$ و $x = 0$ و $x = 2$.

الخطوة 3 جد القيمة العظمى النسبية عند $(-0.81, 0.75)$ و $(04, 6.02.1)$ والقيمة الصغرى النسبية عند $(-0.24, -0.48)$ و $(2, 0)$.

الخطوة 4 $f(x)$ درجتها 5 ويمكن أن يكون لها 5 أصفار على الأكثر. تم إيجاد 4 أصفار حقيقية من خلال التمثيل البياني. الصفر الآخر إما صفر مضاعفة أو صفر تخيلي. في هذه الحالة، يوجد صفر مزدوج عند $x = 2$.

الخطوة 5 التقاطع مع المحور الرأسي y هو 0 لأن التمثيل البياني يمر عبر نقطة الأصل.

الخطوة 6 لا يوجد تماثل.

التمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا. حدد الأصفار الحقيقية، والنقاط العظمى والصغرى، وعدد الأصفار ونوعها، ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y والتناظر.

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$
2. $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
3. $k(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$
4. $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$
5. $g(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$
6. $k(x) = x^4 - 8x^2 + 15$
7. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$
8. $g(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^2$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

الدرس 8-3

نظرية الصفر النسبي

السابق:
- لقد توصلت إلى أصفار الدوال التربيعية ذوات الصيغة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

الحالي:
1. تحديد الأصفار النسبية الممكنة لدالة كثيرة الحدود.
2. إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة الحدود.

لماذا:
- يمكن تقدير مبيعات التسجيلات الموسيقية في دولة ما بصورة تقريبية عبر الدالة $d(t) = 30x^3 - 478x^2 + 1758x + 10{,}092$. حيث $d(t)$ هو إجمالي المبيعات بملايين الدراهم و t هو عدد السنوات منذ عام 2005. يمكنك استخدام هذه الدالة عند تقديرك للزمن الذي ستبلغ فيه مبيعات التسجيلات الموسيقية 9 مليارات درهم.

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحديد الأصفار النسبية

من غير العملي في العادة اختبار كل الأصفار الممكنة للدالة كثيرة الحدود باستعمال التعويض التركيبي. ولكن **نظرية الصفر النسبي** يمكن أن تساعدك في اختيار بعض الأصفار لاختبارها. إذا كان المعامل الرئيسي يساوي 1، فإن هذه النتيجة تنطبق.

المفهوم الأساسي نظرية الصفر النسبي

الشرح

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات صحيحة، فإن كل صفر نسبي للدالة $P(x) = 0$ سيأخذ الصورة $\frac{p}{q}$، عددًا نسبيًا في أبسط صورة، حيث p معامل للحد الثابت و q معامل الحد الرئيس.

مثال

بفرض أن $f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 80x - 40$. إذا كان $\frac{4}{3}$ هو صفر $f(x)$، فإن 4 هو عامل -40، و 3 هو عامل 6.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات صحيحة، ومعاملها الرئيس يساوي 1، وفيها حدّ ثابت غير صفري، فإن أيّ أصفار نسبية للدالة $P(x)$ يجب أن تكون عوامل الحد الثابت.

مثال 1 تحديد الأصفار الممكنة

أدرج جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة.

a. $f(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 16$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرًا نسبيًا، فإن p هو عامل 16 و q هو عامل 4.

p: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ $\quad$ q: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

اكتب القيم الممكنة لـ $\frac{p}{q}$ بأبسط صيغة.

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

b. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 12$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرا نسبيًا، فإن p هو عامل 12 و q هو عامل 1.

p: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ $\quad$ q: ± 1

إذًا، $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

تمرين موجّه

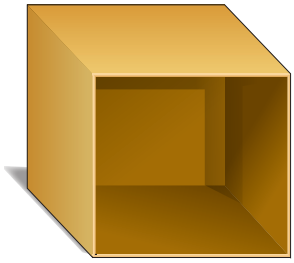
1A. $g(x) = 3x^3 - 4x + 10$ $\quad$ **1B.** $h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 إيجاد الأصفار النسبية

حالما تكتب الأصفار النسبية الممكنة، يمكنك اختبار كل عدد باستخدام التعويض التركيبي واستعمال الأدوات الأخرى التي تعلمتها لتحديد أصفار الدّالة.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد الأصفار النسبية



النجارة **يصنع أحمد طاولة حاسوب تضم مقصورة مستقلة خاصة بجهاز الحاسوب. وتأخذ مقصورة جهاز الحاسوب شكل منشور مستطيل وسيبلغ حجمها 8019 سنتيمترًا مكعبًا. سيزيد طول المقصورة عن عرضها بمقدار 24 سنتيمترًا وسيزيد ارتفاعها بمقدار 18 سنتيمترًا عن عرضها. جد أبعاد مقصورة الحاسوب.**

بفرض أن x = العرض، و $x + 24$ = الطول و $x + 18$ = الارتفاع.

اكتب معادلة تعبر عن الحجم.

$\ell wh = V$ قانون الحجم

$(x + 24)(x)(x + 18) = 8019$ عوّض.

$x^3 + 42x^2 + 432x = 8019$ اضرب.

$x^3 + 42x^2 + 432x - 8019 = 0$ اطرح 8019 من الطرفين.

المعامل الرئيسي يساوي 1، وبالتالي فإن الأصفار النسبية الممكنة هي عوامل للعدد 8019.

$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 11, \pm 27, \pm 33, \pm 81, \pm 99, \pm 243, \pm 297, \pm 729, \pm 891, \pm 2673, \pm 8019$

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون إلا موجبا، فإننا بحاجة إلى التحقق من القيم الموجبة فقط.

لا يوجد تغير في إشارة المعاملات، وبالتالي ووفقا لقاعدة "ديكارت" للإشارات، يوجد فقط صفر حقيقي موجب واحد. أنشئ جدولا للقسمة التركيبية واختبر القيم الممكنة.

p	1	42	432	−8019
1	1	43	475	−7544
2	1	45	567	−6318
9	1	51	891	0

أحد الأصفار يساوي 9. بما أنه لا يوجد سوى صفر حقيقي موجب واحد، فلا حاجة بنا إلى اختبار الأعداد الأخرى. البعدان الآخران هما $9 + 24$ أو 33 cm، و $9 + 18$ أو 27 cm.

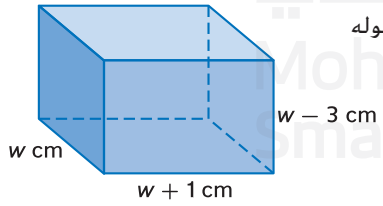
تحقق اضرب الأبعاد لتعرف إن كانت تساوي الحجم $8019\ cm^3$. ✓ $9 \times 33 \times 27 = 8019$

نصيحة دراسية

البنية تفحّص إشارات معاملات المعادلة. في هذه الحالة، يوجد تغيير واحد في الإشارة، وبالتالي يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تمرين موجّه

2. هندسة إذا كان حجم منشور يساوي $1056\ cm^3$. ويزيد طوله بمقدار سنتيمتر واحد عن عرضه ويزيد ارتفاعه بمقدار 3 سنتيمترات عن عرضه، فجد أبعاد المنشور.



لا تحتاج في العادة إلى اختبار جميع الأصفار الممكنة. فحالما تجد أحد الأصفار، يمكنك أن تحلل كثيرة الحدود المنخفضة إلى عوامل لإيجاد أي أصفار أخرى.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 إيجاد جميع الأصفار

جد جميع أصفار الدالة $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 41x^2 - 72x - 36$.

من خلال نظرية الجبر الأساسية، فتوجد 4 أصفار مركبة بالضبط. تبعا لقاعدة "ديكارت" للإشارات، يوجد صفر حقيقي موجب واحد أو 3 أصفار حقيقية موجبة وصفر حقيقي سالب واحد بالضبط.

الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm\frac{18}{5}, \pm\frac{36}{5}$.

أنشئ جدولاً واختبر بعض الأصفار النسبية الممكنة.

$\frac{p}{q}$	5	−8	41	−72	−36
−1	5	−13	54	−126	90
1	5	−3	38	−34	−70
2	5	2	45	18	0

نظرًا لأن $f(2) = 0$، فإنه يوجد صفر عند $x = 2$. حلّل كثيرة الحدود المنخفضة الآتية إلى عوامل $5x^3 + 2x^2 + 45x + 18$.

$5x^3 + 2x^2 + 45x + 18 = 0$ — اكتب كثيرة الحدود المنخفضة.

$(5x^3 + 2x^2) + (45x + 18) = 0$ — جمّع الحدود.

$x^2(5x + 2) + 9(5x + 2) = 0$ — حلل إلى العوامل.

$(x^2 + 9)(5x + 2) = 0$ — خاصية التوزيع

$x^2 + 9 = 0$ أو $5x + 2 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$x^2 = -9$ $\quad 5x = -2$

$x = \pm 3i$ $\quad x = -\frac{2}{5}$

يوجد صفر حقيقي آخر عند $x = -\frac{2}{5}$ وصفران تخيليان عند $x = 3i$ و $x = -3i$.

أصفار الدالة هي $-\frac{2}{5}$ و 2 و $3i$ و $-3i$.

تمرين موجّه

جد جميع أصفار كل دالة.

3A. $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$

3B. $k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$

التحقق من فهمك

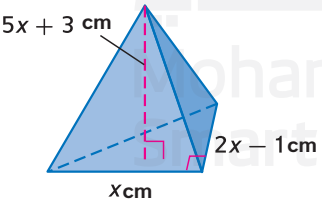
مثال 1 **أذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة.**

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

2. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15$

مثال 2

3. الاستنتاج إذا كان حجم الهرم الثلاثي يساوي 210 سنتيمترات مكعبة. فجد أبعاد هذا المجسم.



جد جميع الأصفار النسبية لكل دالة.

4. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$

5 $f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12$

مثال 3 **جد جميع أصفار كل دالة.**

6. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$

7. $f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3$

8. $f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$

9. $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

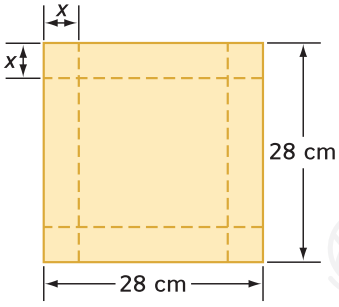
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة.**

10. $f(x) = x^4 + 8x - 32$
11. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 56$
12. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10$
13. $f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35$
14. $f(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 18$
15. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 42$
16. $f(x) = 15x^3 + 6x^2 + x + 90$
17. $f(x) = 16x^4 - 5x^2 + 128$

مثال 2

18. **التصنيع** سيتم تشكيل صندوق عن طريق قطع مربعات متساوية من أركان القطعة المربعة من الورق المقوى وطيّ الجوانب للأعلى.



a. اكتب دالة $V(x)$ تعبر عن حجم الصندوق.

b. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق يساوي $1152\ cm^3$؟

c. ماذا سيكون حجم الصندوق إذا كان $x = 6\ cm$؟

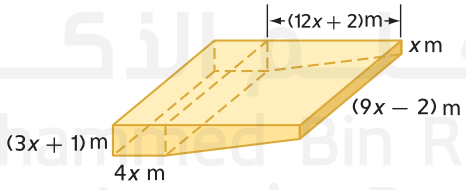
جد جميع الأصفار النسبية لكل دالة.

19. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$
20. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 56x + 192$
21. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75$
22. $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10$
23. $f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$
24. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 4x + 48$
25. $f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4$
26. $f(x) = 81x^4 - 256$

مثال 3 **جد جميع أصفار كل دالة.**

27. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$
28. $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2$
29. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
30. $f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$
31. $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$
32. $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$
33. $f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 38x - 40$
34. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$
35. $f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12$
36. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10$
37. $f(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$
38. $f(x) = 5x^4 - 29x^3 + 55x^2 - 28x$

39. **برك السباحة** فيما يلي رسم تخطيطي لبركة سباحة. يمكن للبركة استيعاب $9175\ m^3$ من الماء.



a. اكتب معادلة كثيرة الحدود تمثل حجم بركة السباحة.

b. ما القيم الممكنة لـ x؟ أي من هذه القيم تعد منطقية؟

40. **تمثيل النماذج** يمكن تمثيل جزء من مسار الأفعوانية عبر الدالة $f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$ حيث t يمثل الزمن بالثواني و $f(t)$ يمثل ارتفاع الأفعوانية. استخدم نظرية الصفر النسبي لتحديد الأزمنة الأربعة التي تكون عندها الأفعوانية عند مستوى الأرض.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

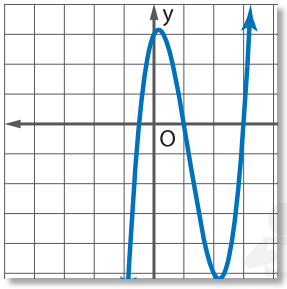
41 **الطعام** يطلب أحد المطاعم صلصة المعكرونة في عبوات معدنية إسطوانية. ويبلغ حجم كل عبوة حوالي $160\pi \text{ cm}^3$، ويزيد ارتفاع العبوة بمقدار 6 cm على نصف قطرها.

a. اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم العبوة. استخدم قانون حجم الإسطوانة، $V = \pi r^2 h$.

b. ما القيم الممكنة لـ r؟ أي من القيم تعد منطقية لهذه الحالة؟

c. جد أبعاد العبوة.

42. ارجع إلى الشكل على اليسار.



a. جد جميع أصفار $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.

b. حدد أيًا من الدالتين، f أو g، هي الموضحة على التمثيل البياني المبين على اليسار.

43. مبيعات التسجيلات الموسيقية عد إلى بداية الدرس.

a. اكتب معادلة كثيرة حدود يمكن استخدامها لتحديد العام الذي سوف تبلغ فيه قيمة مبيعات التسجيلات الموسيقية قرابة AED 9,000,000,000.

b. أدرج حلول الأعداد الكلية الممكنة لمعادلتك في القسم a.

c. حدّد العام التقريبي الذي ستبلغ فيه مبيعات التسجيلات الموسيقية 9,000,000,000.

d. هل يمثل النموذج تقديرًا منطقيًا لجميع المبيعات المستقبلية للتسجيلات الموسيقية؟ اشرح استنتاجك.

جد جميع الأصفار لكل دالة.

44. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$

45. $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. النقد يدرج حسن وأيوب جميع الأصفار النسبية الممكنة لـ $f(x) = 4x^4 + 8x^5 + 10x^2 + 3x + 16$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حسن	أيوب
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

47. تحدٍ اكتب دالة كثيرة حدود لها أصفار عند $\sqrt{3} + 1$ و $5 + 2i$.

48. الاستنتاج حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *غير صحيحة* على الإطلاق. برّر استنتاجك.

إذا كانت جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود أعدادًا صحيحة، فإن المعامل الرئيسي للدالة هو 1 أو −1.

49. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة لها الأصفار الممكنة $\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

50. تحدٍ جذرا $x^2 + bx + c = 0$ هما M و N. إذا كان $|M - N| = 1$، فعبّر عن c بدلالة b.

51. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

52. الجبر أي مما يلي هو صفر للدالة $f(x) = 12x^5 - 5x^3 + 2x - 9$؟

A -6 **C** $\frac{3}{8}$

B $-\frac{2}{3}$ **D** 1

53. SAT/ACT كم عدد الأصفار الحقيقية السالبة في الدالة $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$؟

F 5 **J** 1

G 3 **K** 0

H 2

54. الجبر مع افتراض أن كل الأعداد غير السالبة هي n.

بفرض أن $\boxed{n}$ يُمكن إيجاده باستخدام $\boxed{n} = \frac{\sqrt{n}}{2}$. إذا كان $\boxed{n} = 4$.

فما قيمة n؟

A 2 **C** 16

B 4 **D** 64

55. إجابة شبكية ما نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y لمستقيم يضم النقطة $(-1, 4)$ وله نقطة التقاطع نفسها مع المحور الأفقي x حيث $x + 2y = -3$؟

مراجعة شاملة

اكتب دالة كثيرة حدود ذات معاملات تكاملية وبأصغر درجة ممكنة، بحيث تكون لها الأصفار المعطاة. (الدرس 3-7)

56. $6, -3, \sqrt{2}$ **57.** $5, -1, 4i$ **58.** $-4, -2, i\sqrt{2}$

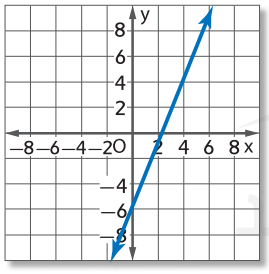
باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي العوامل. (الدرس 3-6)

59. $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6; x + 3$ **60.** $a^4 - 2a^3 - 17a^2 + 18a + 72; a - 3$ **61.** $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12; x + i$

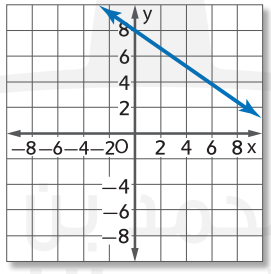
اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل تمثيل بياني. (الدرس 2-4)

62.

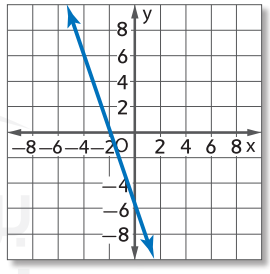
a.



b.



c.



63. لعبة كرة التفادي لعبت ستة فرق في مسابقة لكرة التفادي. بكم طريقة يمكن للفرق الثلاثة الأولى اختتام المسابقة؟ (الدرس 4-0)

مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة.

64. $(x - 4)(x + 3)$ **65.** $3x(x^2 + 4)$ **66.** $x^2(x - 2)(x + 1)$

جد كل قيمة إذا كان $f(x) = 6x + 2$ و $g(x) = -4x^2$.

67. $f(5)$ **68.** $g(-3)$ **69.** $f(3c)$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

العمليات على كثيرات الحدود (الدرسان 3-1 و 3-2)

- للجمع أو الطرح: اجمع الحدود المتشابهة.
- للضرب: استخدم خاصية التوزيع.
- للقسمة: استخدم القسمة المطولة أو القسمة التركيبية.

الدوال كثيرة الحدود والتمثيلات البيانية (الدرسان 3-3 و 3-4)

- يُطلق على نقاط دوران الدالة *القيم العظمى النسبية والقيم الصغرى النسبية*.

حل المعادلات كثيرة الحدود (الدرس 3-5)

- يمكن تحليل كثيرات الحدود إلى العوامل باستخدام العامل المشترك الأكبر أو التجميع أو الأساليب التربيعية.

نظريتا الباقي والعامل (الدرس 3-6)

- نظرية العامل: تكون ذات الحدين $x - a$ عاملاً لكثيرة الحدود $f(x)$ فقط في حالة إذا كان $f(a) = 0$.

نظرية الصفر النسبي والجذور والأصفار (الدرسان 3-7 و 3-8)

- نظرية المرافقات المركبة: إذا كان $a + bi$ أحد أصفار دالة ما، فإن $a - bi$ صفر كذلك.
- نظرية الصفر الصحيح: إذا كانت معاملات دالة كثيرة الحدود أعدادًا صحيحة مثل $a_0 \neq 1$ و $a_n = 1$، فيجب أن تكون أي أصفار نسبية للدالة من عوامل a_0.
- نظرية الصفر النسبي: إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات صحيحة، فيكون كل صفر نسبي للدالة $P(x) = 0$ بالصورة $\frac{p}{q}$، a عدد نسبي في أبسط صورة، حيث p عامل الحد الثابت و q عامل المعامل الرئيسي.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

درجة كثيرة الحدود
degree of a polynomial

كثيرة حدود منخفضة
depressed polynomial

السلوك الطرفي end behavior

قيم قصوى extrema

معامل رئيس leading coefficient

مبدأ الموقع Location principle

دالة كثيرة الحدود
polynomial function

كثيرة حدود ذات متغير واحد
polynomial in one variable

دالة أسيّة power function

كثيرات حدود أولية
prime polynomials

القانون العام
quadratic form

القيمة العظمى النسبية
relative maximum

القيمة الصغرى النسبية
relative minimum

بسّط simplify

قسمة تركيبية
synthetic division

تعويض تركيبي
synthetic substitution

نقاط الدوران
turning points

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صواب* أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. معامل الحد الأول لكثيرة حدود الذي يأتي بالصيغة القياسية يُطلق عليه المعامل الرئيسي.
2. كثيرات الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى عوامل يُطلق عليها كثيرات حدود ذات متغير واحد.
3. كثيرة الحدود الأولية لها درجة أقل بواحد من كثيرة الحدود الأصلية.
4. نقطة بالتمثيل البياني للدالة حيث لا توجد نقطة قريبة ذات قيمة أكبر للإحداثي y يُطلق عليها القيمة العظمى النسبية.
5. الدالة كثيرة الحدود دالة متصلة يمكن تمثيلها بمعادلة كثيرة الحدود ذات متغير واحد.
6. تبسيط تعبير ما يحتوي على قوى أسية يعني إعادة صياغته من دون الأقواس أو الأسس السالبة.
7. القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ذات حدين.
8. كثيرًا ما يُشار إلى القيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية بمصطلح السلوك الطرفي.
9. عند قسمة كثيرة حدود على ذات حدين من عواملها، يُطلق على ناتج القسمة كثيرة حدود منخفضة.
10. $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ عبارة عن دالة أسيّة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

3-1 العمليات على كثيرات الحدود

مثال 1

حوّل لأبسط صورة. كل تعبير.

a. $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

$(-4a^3b^5)(5ab^3) = (-4)(5)(a^3 \cdot a)(b^5 \cdot b^3)$ ناتج ضرب القوى الأسية

$= -20a^4b^8$ بسّط.

b. $(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7)$

$(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7)$

$= (2x^2 + 3x^2) + (3x - 5x) + [-8 + (-7)]$

$= 5x^2 - 2x - 15$

حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيرٌ يساوي 0.

11. $\frac{14x^4y}{2x^3y^5}$

12. $3t(tn - 5)$

13. $(4r^2 + 3r - 1) - (3r^2 - 5r + 4)$

14. $(x^4)^3$

15. $(m + p)(m^2 - 2mp + p^2)$

16. $3b(2b - 1) + 2b(b + 3)$

3-2 قسمة كثيرات الحدود

مثال 2

حوّل لأبسط صورة. $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x - 1 \overline{)\,6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ \underline{(-)\,6x^3 - 3x^2} \\ -28x^2 - 34x \\ \underline{(-)\,-28x^2 + 14x} \\ -48x + 22 \\ \underline{(-)\,-48x + 24} \\ -2 \end{array}$$

الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \frac{2}{2x - 1}$.

حوّل لأبسط صورة.

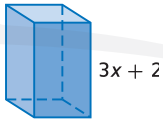
17. $\frac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$

18. $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$

19. $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$

20. $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

21. هندسة منشور مستطيل يبلغ حجمه $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ وحدة مكعبة. ما مساحة القاعدة؟



3-3 الدوال كثيرة الحدود

مثال 3

ما الدرجة والمعامل الرئيسي لـ $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$؟

أكبر أس هو 7. لذلك فالدرجة تساوي 7. والمعامل الرئيسي هو -7.

مثال 4

جد $p(a - 2)$ **إذا كان** $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$.

$p(a - 2) = 3(a - 2) + 2(a - 2)^2 - (a - 2)^3$

$= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8)$

$= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10$

اذكر الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود ذات متغير واحد. وإذا لم تكن كثيرة حدود ذات متغير واحد، فاشرح السبب.

22. $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$

23. $6xy^2 - xy + y^2$

24. $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

جد $p(-2)$ **و** $p(x + h)$ **لكل دالة.**

25. $p(x) = x^2 + 2x - 3$

26. $p(x) = 3x^2 - x$

27. $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

3-4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود

أكمل كلاً مما يلي.

a. مثّل كل دالة بيانيًا عن طريق إنشاء جدول للقيم.

b. حدد القيم الصحيحة المتتالية لـ x التي يقع بينها كل صفر حقيقي.

c. قدّر إحداثيات x التي توجد عندها القيمتان النسبيتان العظمى والصغرى.

28. $h(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

29. $g(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$

30. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

31. $h(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

32. $p(x) = x^5 - x^4 + 1$

33. **الأعمال التجارية** تتبع منصور الأرباح الشهرية لمتجر الأدوات الرياضية الخاص به خلال الأشهر الستة الأولى من العام. ويمكن تمثيلها باستخدام النقاط الست التالية: (1, 675) و (2, 950) و (3, 550) و (4, 250) و (5, 600) و (6, 400). كم عدد نقاط الدوران بالتمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود عبر هذه النقاط؟ اذكرها.

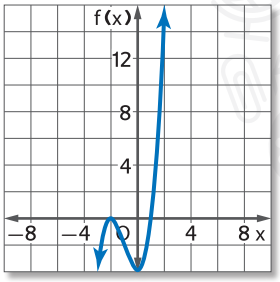
مثال 5

مثّل $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ بيانيًا عن طريق إنشاء جدول للقيم.

ضع جدول قيم للعديد من قيم x.

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−4	0	−2	−4	0	16

مثّل النقاط وصِلها بواسطة منحنى منتظم.



3-5 حل المعادلات كثيرة الحدود

حلّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلاً كاملاً. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

34. $a^4 - 16$

35. $x^3 + 6y^3$

36. $54x^3y - 16y^4$

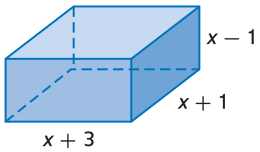
37. $6ay + 4by - 2cy + 3az + 2bz - cz$

حُـــــلّ كل معادلة مما يلي.

38. $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$

39. $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

40. **الهندسة** يبلغ حجم المنشور $315\ cm^3$. جد قيمة x والطول والارتفاع والعرض.



مثال 6

حلّل إلى العوامل $r^7 + 64r$.

$r^7 + 64r = r(r^6 + 64)$ — حلل إلى العوامل باستخدام العامل المشترك الأكبر.

$= r[(r^2)^3 + 4^3]$ — اكتب في صورة مكعبات.

$= r(r^2 + 4)(r^4 - 4r^2 + 16)$

مثال 7

حُـــــلّ المعادلة $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ or $4x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 4$ $\qquad$ $x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm 2$ $\qquad$ $x = \pm\frac{3}{2}$

الحلول هي -2 و 2 و $-\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-6 نظريتا الباقي والعامل

استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$ و $f(4)$ لكل دالة.

41. $f(x) = x^2 - 3$
42. $f(x) = x^2 - 5x + 4$
43. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$
44. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي العوامل.

45. $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10;\ x + 5$
46. $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5;\ 2x + 5$
47. $x^3 + 2x^2 - 23x - 60;\ x - 5$

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ أحد عوامل $x^3 - 2x^2 - 21x - 18$.

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل لأن $r = 0$.

$x^3 - 2x^2 - 21x - 18 = (x - 6)(x^2 + 4x + 3)$

3-7 الجذور والأصفار

اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل معادلة.

48. $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$
49. $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$
50. $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$
51. $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$
52. $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لـ $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

$f(x)$ بها تغير واحد في الإشارات، إذًا يوجد صفر حقيقي موجب.

$f(-x)$ بها 3 تغيرات في الإشارات، إذًا يوجد 3 أصفار أو صفر واحد حقيقي سالب.

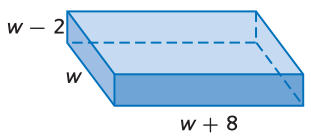
يوجد صفران تخيليان أو لا يوجد أصفار.

3-8 نظرية الصفر النسبي

جد جميع أصفار كل دالة.

53. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$
54. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$
55. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

56. **التخزين** تعمل خولة على صنع صندوق تخزين على شكل منشور مستطيل. ويبلغ حجمه $96\ m^3$. بالاستعانة بالرسم التخطيطي أدناه، جد أبعاد الصندوق.



مثال 10

جد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

توجد 3 أصفار على وجه التحديد.

يوجد صفر حقيقي موجب وصفران حقيقيان سالبان. الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$.

3	1	4	−11	−30
		3	21	30
	1	7	10	0

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$
$= (x - 3)(x + 2)(x + 5)$

إذن، الأصفار هي $3, -2, -5$.

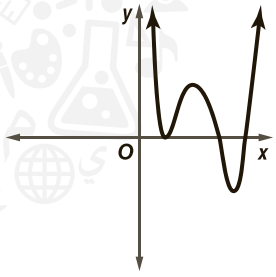
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار

حوّل لأبسط صورة.

1. $(3a)^2(7b)^4$
2. $(7x - 2)(2x + 5)$
3. $(2x^2 + 3x - 4) - (4x^2 - 7x + 1)$
4. $(4x^3 - x^2 + 5x - 4) + (5x - 10)$
5. $(x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 8x + 3) \div (x + 3)$
6. $(3x^3 - 5x^2 - 23x + 24) \div (x - 3)$

7. **الاختيار من متعدد** كم عدد الأصفار الحقيقية الفريدة بالتمثيل البياني؟



A 0 C 3

B 2 D 5

8. إذا كان $c(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4$. فما قيمة $c(3b)4$؟

أكمل كلاً مما يلي.

a. مثّل كل دالة بيانيًا عن طريق إنشاء جدول للقيم.

b. حدّد القيم الصحيحة المتتالية لـ x التي يقع بينها كل صفر حقيقي.

c. قدّر إحداثيات x التي تحدث عندها القيمتان العظمى والصغرى.

9. $g(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$
10. $h(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 6x + 2$

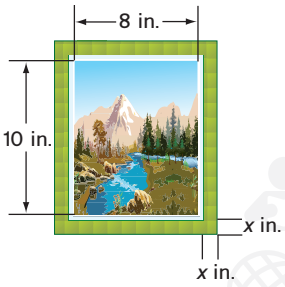
حلّل الدوال التالية إلى العوامل تحليلًا كاملًا. وإذا كانت كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

11. $8y^4 + x^3y$
12. $2x^2 + 2x + 1$
13. $a^2x + 3ax + 2x - a^2y - 3ay - 2y$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

14. $8x^3 + 1 = 0$
15. $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$

16. **وضع الإطار** مساحة الصورة والإطار الموضحين أدناه $168\ in^2$. ما عرض الإطار؟



17. **الاختيار من متعدد** بفرض أن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 3$. استخدم التعويض التركيبي لإيجاد $f(-2)$.

F 37 H −21

G 27 J −33

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي العوامل.

18. $2x^3 + 15x^2 + 22x - 15;\ x + 5$
19. $x^3 - 4x^2 + 10x - 12;\ x - 2$

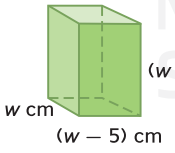
اذكر العدد المحتمل للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية لكل معادلة.

20. $p(x) = x^3 - x^2 - x - 3$
21. $p(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

جد جميع أصفار كل دالة.

22. $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
23. $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

24. **الهندسة** حجم المنشور المستطيل الموضح هو $612\ cm^3$. جد أبعاد المنشور.



25. اذكر كل الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 12x + 8$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية

رسم صورة

رسم الصور يمكن أن يكون طريقة مفيدة للغاية لتصور كيفية حل مسألة. ارسم صورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار (إذا كان مسموحًا بذلك).
ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما القيم غير المعلومة التي يتعين تمثيلها وحلها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ضع البيانات على الصورة بعناية. واحرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك على تمثيل حالة المسألة من خلال معادلة. ثم جد حل المعادلة.
- تحقق من أن الإجابة منطقية.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

لدى السيد بدر بركة سباحة مستطيلة الشكل أبعادها 25 m و 14 m. ويريد تركيب ممشى من الإسمنت حول البركة. وسيكون مجموع مساحة البركة والممشى $672\ m^3$. فماذا سيكون عرض الممشى؟

A 2.75 m

B 3 m

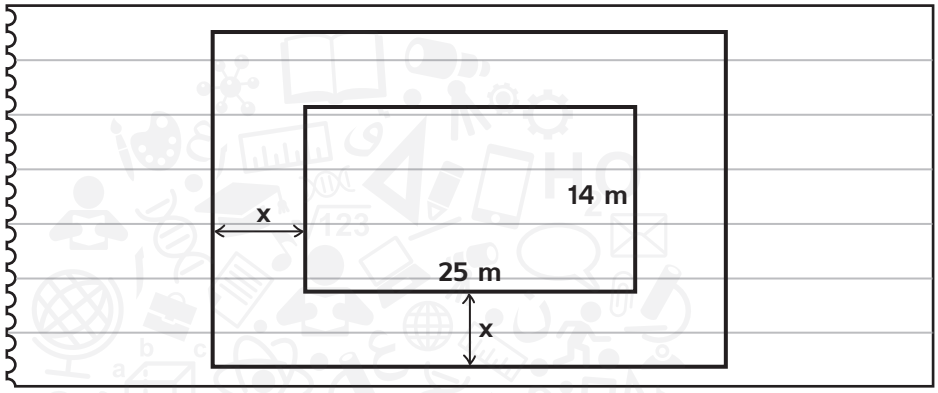
C 3.25 m

D 3.5 m

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

ارسم صورة لتساعدك على تصور حالة المسألة. افترض أن x يمثل العرض المجهول للممشى الأسمنتي.



عرض بركة السباحة والممشى هو $14 + 2x$. والطول هو $25 + 2x$. اضرب هذه التعابير كثيرة الحدود، وافترض أن الناتج يساوي مجموع المساحة ويبلغ $672\ m^2$. ثم حل لإيجاد x.

$$(14 + 2x)(25 + 2x) = 672$$
$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$
$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$
$$x = -23 \text{ أو } 3.5$$

نظرًا لأن العرض لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن عرض الممشى 3.5 m. الإجابة الصحيحة هي D.

التمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. لدى مزارع سور بطول 240 m يريد استخدامه للإحاطة بمساحة مستطيلة للدجاج. ويخطط لإقامة المساحة المغلقة باستخدام جدار الحظيرة كأحد الجدران. فما أقصى مساحة يمكنه إحاطتها؟

A 7200 M

B 4960 M

C 3600 M

D 3280 M

2. يمكن صناعة الحلقات المعدنية من خلال إحداث ثقب في قطعة معدنية دائرية. افترض أنه قد تم تصنيع الحلقة من خلال تفريغ مركز قطعة معدنية قطرها 1.8 cm. فما نصف قطر الثقب إذا كانت مساحة الحلقة $0.65\pi\ cm^2$؟

F 0.35 CM.

G 0.38 CM.

H 0.40 CM.

J 0.42 CM.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف