الوحدة 3

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

السابق

- وجدت حل المعادلات التربيعية والأسية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الدوال الجذرية بيانيًا وتحويلها.
  - تبسيط التعابير الجذرية وجمعها وطرحها وضربها.
  - حل المعادلات الجذرية.
  - استخدام نظرية فيثاغورس.

لماذا؟ ▲

- **محيطات** تتولد تسونامي، أو الأمواج الكبرى، من الزلازل الواقعة تحت البحر. ويمكن استخدام المعادلة الجذرية لإيجاد سرعة تسونامي بالأمتار في الثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

Chapter sourced from Radical Functions, Rational Functions, and Geometry, from Integrated Math I Chapter 8, Lessons 1, 4-7 © 2012 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

جد كل جذر تربيعي. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

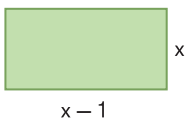
1. $\sqrt{82}$
2. $\sqrt{26}$
3. $\sqrt{15}$
4. $\sqrt{99}$
5. **صندوق الرمل** يصنع عيسى صندوق مكعبا مساحة قاعدته $100\ m^2$. فكم طول الضلع في الصندوق؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $(21x + 15y) - (9x - 4y)$
7. $13x - 5y + 2y$
8. $(10a - 5b) + (6a + 5b)$
9. $6m + 5n + 4 - 3m - 2n + 6$
10. $x + y - 3x - 4y + 2x - 8y$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

11. $2x^2 - 4x = 0$
12. $6x^2 - 5x - 4 = 0$
13. $x^2 - 7x + 10 = 0$
14. $2x^2 + 7x - 5 = -1$
15. **الهندسة** مساحة المستطيل المجاور تساوي $90\ m^2$. جد x.



تدريب سريع

مثال 1

جد الجذر التربيعي لـ $\sqrt{50}$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم الآلة الحاسبة. $\sqrt{50} = 7.071067812....$

إلى أقرب جزء من المائة، $\sqrt{50} = 7.07$.

مثال 2

بسّط $3x + 7y - 4x - 8y$.

$3x + 7y - 4x - 8y$

$= (3x - 4x) + (7y - 8y)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= -x - y$ بسّط.

مثال 3

حُـلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 3)(x - 2) = 0$ حلل إلى العوامل.

$x - 3 = 0$ أو $x - 2 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 3$ $x = 2$ حل كل معادلة.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

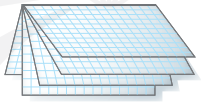
البدء في الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

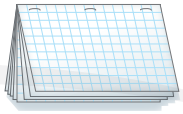
مطويات منظّم الدراسة

الدوال الجذرية والهندسة اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن هذه الوحدة المتعلقة بالدوال الجذرية والهندسة. ابدأ باستخدام أربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

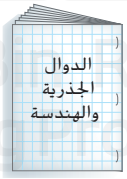
1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالعرض.



2 **دبّس** بطول الطية.



3 **اقلب** الطية إلى اليمين واكتب عنوان الوحدة في الأمام. في كل صفحة يمنى من المطوية، اكتب عنوان درس من دروس الوحدة.



المفردات الجديدة

دالة الجذر التربيعي square root function
مجذور radicand
دالة جذرية radical function
تعبير جذري radical expression
مرافق conjugate
إنطاق المقام rationalize the denominator
مغلقة closed
معادلات جذرية radical equations
حلول دخيلة extraneous solutions
تغير عكسي inverse variation
قاعدة ناتج الضرب product rule
دالة نسبية rational function
قيم مستبعدة excluded values
خط تقارب asympote
معادلة نسبية rational equation
مسألة عمل work problem
مسألة معدل rate problem

مراجعة المفردات

طريقة فويل لضرب زوج من ثنائيات الحدود، جد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين، والحدين الطرفيين، والحدين الوسطيين، والحدين الأخيرين

المربع الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

التناسب هو معادلة لها الصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0$ d ≠ 0 توضح أن النسبتين متكافئتان

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-1 دوال الجذر التربيعي

السابق
- مثّلت الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانيًا وحللتها.

الحالي
1. تمثيل تمددات الدوال الجذرية بيانيا وتحليلها.
2. تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية بيانيا وتحليلها.

لماذا؟
- يستخدم العلماء أصوات الحيتان لتتبع تحركاتها. ويمكن إيجاد المسافة إلى الحوت عن طريق الربط بين الزمن وسرعة الصوت في الماء.

يمكن وصف سرعة الصوت في الماء بدالة الجذر التربيعي $c = \sqrt{\frac{E}{d}}$، حيث E تمثل مجموعة معامل المرونة للماء و d تمثل كثافة الماء.

المفردات الجديدة
- **دالة الجذر التربيعي** square root function
- **دالة جذرية** radical function
- **مجذور** radicand

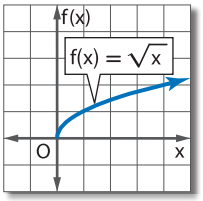
ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 تمدد الدوال الجذرية

تشتمل **دالة الجذر التربيعي** على الجذر التربيعي لمتغير. وتعد دوال الجذر التربيعي نوعًا من أنواع **الدالة الجذرية**. ويُطلق على التعبير تحت اشارة الجذر: **المجذور**. لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. القيم التي تجعل المجذور سالبًا لا يتم تضمينها في المجال.

المفهوم الأساسي دالة الجذر التربيعي

الدالة الأصلية:	$f(x) = \sqrt{x}$
نوع التمثيل البياني:	منحنى
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{y \mid y \geq 0\}$



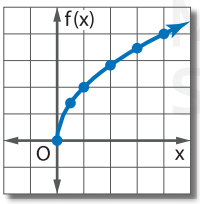
مثال 1 تمدد دالة الجذر التربيعي

مثّل $f(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً.

x	0	0.5	1	2	3	4
f(x)	0	≈1.4	2	≈2.8	≈3.5	4

الخطوة 2 عيّن النقاط. ارسم منحنى منتظمًا.



المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$. لاحظ أن التمثيل البياني يتزايد على المجال بالكامل، والقيمة الصغرى هي 0، ولا يوجد تماثل.

تمرين موجّه

1A. $g(x) = 4\sqrt{x}$

1B. $h(x) = 6\sqrt{x}$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

2 الانعكاس والإزاحة للدوال الجذرية

تذكر أنه عندما تكون القيمة a سالبة في الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$، يكون التمثيل البياني للدالة الأصلية منعكسًا للأسفل على المحور x.

المفهوم الأساسي التمثيل البياني لـ $y = a\sqrt{x+h} + k$

الخطوة 1 ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = a\sqrt{x}$. يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1, a)$. إذا كان $a > 0$، فالتمثيل البياني يكون في الربع الأول.
إذا كان $a < 0$، فالتمثيل البياني يكون منعكسًا للاسفل على المحور x ويكون في الربع الرابع.

الخطوة 2 أزح التمثيل البياني k وحدات لأعلى إذا كان $k > 0$ و $|k|$ وحدات لأسفل إذا كان $k < 0$.

الخطوة 3 أزح التمثيل البياني h وحدات يسارًا إذا كان $h > 0$ و $|h|$ وحدات يمينًا إذا كان $h < 0$.

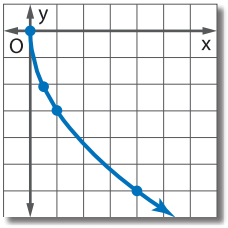
نصيحة دراسية

التمثيل البياني للدوال الجذرية اختر المربعات الكاملة لقيم x التي سوف تنتج عنها إحداثيات سهلة التعيين.

مثال 2 انعكاس دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولًا للقيم. ثم عيّن النقاط على النظام الإحداثي وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.



x	0	0.5	1	4
y	0	≈−2.1	−3	−6

لاحظ أن التمثيل البياني يكون في الربع الرابع. ويتم الحصول عليه عن طريق تمدد التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ رأسيًا ثم انعكاسه على المحور x. المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \leq 0\}$.

تمرين موجّه

2A. $y = -2\sqrt{x}$

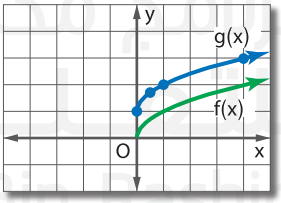
2B. $y = -4\sqrt{x}$

مثال 3 إزاحة دالة الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} + 1$

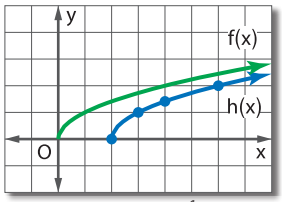
x	0	0.5	1	4	9
y	0	≈1.7	2	3	4



لاحظ أن قيم $g(x)$ أكبر بواحد من قيم $f(x) = \sqrt{x}$.
هذه إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة لأعلى من الدالة الأصلية.
المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.

b. $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2	3	4	6
y	0	1	≈1.4	2



هذه إزاحة أفقية بمقدار وحدتين يمينًا من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

نصيحة دراسية

إزاحة الدوال الجذرية إذا كان $h > 0$، فإن الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x-h}$ تمثل إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يمينًا.
$f(x) = \sqrt{x+h}$ هي إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يسارًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

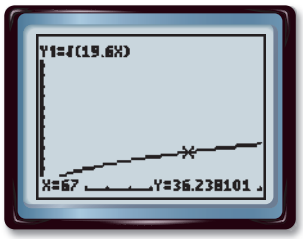
3A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

3B. $h(x) = \sqrt{x} + 3$

يمكن تمثيل ظاهرة فيزيائية مثل الحركة عن طريق الدوال الجذرية. غالبًا ما تكون هذه الدوال تحويلات من دالة الجذر التربيعي الأصلية.

مثال 4 من الحياة اليومية تحليل الدالة الجذرية

الجسور يمتد جسر جولدن جيت لمسافة 67 مترًا تقريبًا فوق سطح الماء. السرعة المتجهة v لجسم ما في سقوط حر من h أمتار تُحددها المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث g هو ثابت التسارع $9.8\ m/s^2$. مثل الدالة بيانيًا. إذا سقط جسم ما من الجسر، فماذا ستكون سرعته المتجهة عندما يصطدم بالماء؟



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

لإيجاد السرعة المتجهة للجسم، عوّض بـ 67 m عن h.

$v = \sqrt{2gh}$ — الدالة الأصلية

$= \sqrt{2(9.8)(67)}$ — $g = 9.8$ و $h = 67$

$= \sqrt{1313.2}$ — بسّط.

$\approx 36.2\ m/s$ — استخدم الآلة الحاسبة.

السرعة المتجهة للجسم تقدر بحوالي 36.2 m/s بعد السقوط من ارتفاع 67 m.

الربط بالحياة اليومية

تعبر 39 مليون سيارة تقريبًا جسر جولدن جيت في سان فرانسيسكو كل عام.

المصدر: مركز سان فرانسيسكو للمؤتمرات والزوار

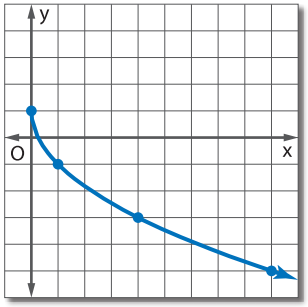
تمرين موجّه

4. استخدم التمثيل البياني أعلاه لتقدير الارتفاع الأولي لجسم ما إذا كان يتحرك بمعدل 20 m/s عند اصطدامه بالماء.

ويمكن الجمع بين تحويلات مثل الانعكاسات والإزاحات والتمددات في معادلة واحدة.

مثال 5 تحويلات دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -2\sqrt{x} + 1$ بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.



x	0	1	4	9
y	1	−1	−3	−5

هذا التمثيل البياني نتيجة تمدد رأسي للتمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ يتبعه انعكاس على المحور x، ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة. المجال هو $\{x | x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y | y \leq 1\}$.

تمرين موجّه

5A. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$

5B. $y = -2\sqrt{x - 1}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 3\sqrt{x}$

2. $y = -5\sqrt{x}$

3. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

4. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

5. $y = \sqrt{x} + 3$

6. $y = \sqrt{x} - 2$

7. $y = \sqrt{x + 2}$

8. $y = \sqrt{x - 3}$

مثال 4 **9. السقوط الحر** الزمن t، بالثواني، الذي يستغرقه جسم ما للسقوط على مسافة d، بالأمتار، يُعطى بالدالة $t = \frac{5}{11}\sqrt{d}$ (مع افتراض صفرية مقاومة الهواء). مثّل الدالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى.

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

10. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 2$

11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x} - 1$

12. $y = -2\sqrt{x + 1}$

13. $y = 3\sqrt{x - 2}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 5\sqrt{x}$

15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

16. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$

17. $y = 7\sqrt{x}$

18. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$

19. $y = -\sqrt{x}$

20. $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x}$

21. $y = -7\sqrt{x}$

22. $y = \sqrt{x} + 2$

23. $y = \sqrt{x} + 4$

24. $y = \sqrt{x} - 1$

25. $y = \sqrt{x} - 3$

26. $y = \sqrt{x} + 1.5$

27. $y = \sqrt{x} - 2.5$

28. $y = \sqrt{x + 4}$

29. $y = \sqrt{x - 4}$

30. $y = \sqrt{x + 1}$

31. $y = \sqrt{x - 0.5}$

32. $y = \sqrt{x + 5}$

33. $y = \sqrt{x - 1.5}$

مثال 4 **34. الهندسة** محيط المربع يُعطى بالدالة $P = 4\sqrt{A}$ ، حيث A هي مساحة المربع.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. حدد محيط مربع له مساحة $225\ m^2$.

c. متى سيصبح المحيط والمساحة بقيمة واحدة؟

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

35. $y = -2\sqrt{x} + 2$

36. $y = -3\sqrt{x} - 3$

37. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$

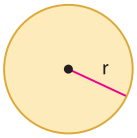
38. $y = -\sqrt{x - 1}$

39. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x - 1} + 2$

40. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2} + 1$

41. الطاقة يكون لجسم ما طاقة حركية عندما يتحرك. السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية لجسم ما كتلته m kg بطاقة E جول، تُعطى بالدالة $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة التي تعبر عن السرعة المتجهة لكرة سلة كتلتها 0.6 kg، بيانيًا.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف



42. الهندسة نصف قطر الدائرة يُعطى بالمعادلة $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$، حيث A هي مساحة الدائرة.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحديد نصف قطر دائرة لها المساحة $27\ cm^2$.

43 سرعة الصوت تُحدد سرعة الصوت في الهواء بدرجة حرارة الهواء. السرعة v بالأمتار لكل ثانية تُعطى بالمعادلة $c = 331.5\sqrt{1 + \frac{t}{273.15}}$ حيث t هي درجة حرارة الهواء بالدرجات المئوية.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

b. ما مدى سرعة انتقال الصوت عندما تكون درجة الحرارة 55°C؟

c. كيف ستتأثر سرعة الصوت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى 65°C؟

44. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والقطوع المكافئة.

a. بيانيًا مثّل $y = x^2$ بيانيًا على نظام إحداثي.

b. جبريًا اكتب دالة متعددة التعريف لوصف التمثيل البياني لـ $y^2 = x$ في كل ربع.

c. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$ بيانيًا.

d. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = x$ بيانيًا. عيّن النقاط (2, 4)، و (4, 2)، و (1, 1).

e. تحليليًا قارن بين التمثيل البياني للقطع المكافئ بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التحدي حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. أعطِ مثالًا أو مثالا مضادًا لدعم إجابتك.

45. الأعداد في مجال الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

46. الأعداد في مدى الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

47. الكتابة في الرياضيات لماذا توجد حدود لمجال دوال الجذر التربيعي ومداها؟

48. الأدوات اكتب دالة جذرية يكون مجالها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أكبر من أو تساوي 2 ويكون مداها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أقل من أو تساوي 5.

49. أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟ جد المعادلة التي لا تتوافق مع المجموعة. اشرح.

$y = \frac{\sqrt{x}}{6}$	$y = \sqrt{x} + 3$	$y = 0.7\sqrt{x}$	$y = 3\sqrt{x}$

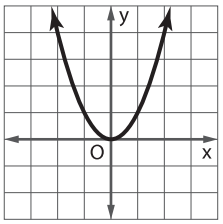
50. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة تكون نتيجة انعكاس وإزاحة وتمدد للتمثيل البياني الأصلي لـ $y = \sqrt{x}$.

51. التبرير إذا كان مدى الدالة $y = a\sqrt{x}$ هو $\{y \mid y \leq 0\}$، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن قيمة a؟ اشرح استنتاجك.

52. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

53. 

أي دالة تمثل بشكل *أفضل* التمثيل البياني؟

A $y = x^2$
B $y = 2^x$
C $y = \sqrt{x}$
D $y = x$

54. العبارة "$x < 10$ و $3x - 2 \geq 7$" تكون صحيحة عندما x يساوي ماذا؟

F 0
G 2
H 8
J 12

55. أي مما يلي هي معادلة مستقيم موازٍ لـ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-2, -1)$؟

A $y = \frac{1}{2}x$
B $y = 2x + 3$
C $y = -\frac{1}{2}x + 2$
D $y = -\frac{1}{2}x - 2$

56. الإجابة القصيرة إذا كان منسق حدائق يحتاج إلى فرش نشارة خشبية على 6 أحواض زهور مستطيلة وقياسها 8 m في 4 m، و 4 أحواض زهور مستديرة نصف قطر كل منها يبلغ 3 m. وتغطي عبوة النشارة الخشبية الواحدة $25\ m^2$. فكم عدد عبوات النشارة الخشبية المطلوبة لتغطية الأحواض الزهرية؟

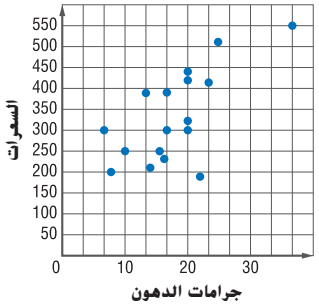
مراجعة شاملة

57. الصحة تتمرن خولة كل يوم بالمشي والجري لمسافة لا تقل عن 3 km. وتمشي خولة بمعدل 4 km/h، وتجري بمعدل 8 كيلومترات في الساعة. افترض أنه متاح لديها نصف ساعة فقط للتمرن اليوم.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح المدد الزمنية الممكنة التي يمكن أن تقضيها في المشي والجري اليوم.

b. أعطِ ثلاثة حلول ممكنة.

خيارات وجبات الوجبات السريعة



58. التغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم *لا* يعبر عن أي ارتباط. وإذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فاشرح دلالته في هذه الحالة.

مراجعة المهارات

حلل كل أحادي الحد إلى عوامله بالكامل.

59. $28n^3$
60. $-33a^2b$
61. $150rt$
62. $-378nq^2r^2$
63. $225a^3b^2c$
64. $-160x^2y^4$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي

لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. عند تمثيل الدالة الجذرية بيانيًا، حدد متى سيكون المجذور سالبًا واستبعد هذه القيم من المجال.

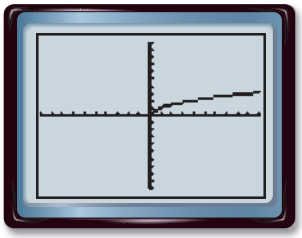
ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd [√] X,T,θ,n) ZOOM 6


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

1A. تفحّص التمثيل البياني. ما مجال الدالة؟

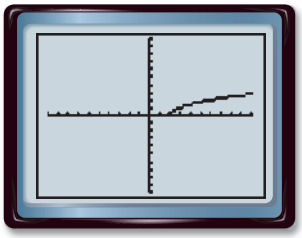
1B. ما مدى الدالة؟

النشاط 2 إزاحة الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x - 2}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd [√] X,T,θ,n − 2) ZOOM 6


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

2A. ما مجال الدالة ومداها؟

2B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x - 2}$ والتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$؟

تمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا، وارسم التمثيل البياني على الورقة. واذكر المجال والمدى. واشرح وجه الاختلاف بين التمثيل البياني عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$.

1. $y = \sqrt{x - 1}$
2. $y = \sqrt{x + 3}$
3. $y = \sqrt{x} - 2$
4. $y = \sqrt{-x}$
5. $y = -\sqrt{x}$
6. $y = \sqrt{2x}$
7. $y = \sqrt{2 - x}$
8. $y = \sqrt{x - 3} + 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد y. هل تمثل المعادلة دالة؟ اشرح استنتاجك.

9. $x = y^2$
10. $x^2 + y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 = 2$

أكتب دالة بتمثيل بياني يزيح $y = \sqrt{x}$ في كل اتجاه مما يلي.

12. إزاحة 4 وحدات يسارًا
13. إزاحة 7 وحدات لأعلى
14. إزاحة 6 وحدات لأسفل
15. إزاحة 5 وحدات يمينًا و 3 وحدات لأعلى

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-2 المعادلات الجذرية

السابق
- أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.

الحالي
1. حل المعادلات الجذرية.
2. حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.

لماذا؟
- طول خط الماء للقارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنعه حافة المياه عندما يكون القارب ممتلئًا. وسرعة جسم القارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها.

يمكنك تقدير سرعة جسم القارب h باستخدام الصيغة $h = 1.34\sqrt{\ell}$، حيث ℓ هو طول خط المياه للقارب الشراعي.

المفردات الجديدة
- **معادلات جذرية** (radical equations)
- **حلول دخيلة** (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

1 معادلات جذرية

المعادلات التي تشتمل على متغيرات في صورة مجذور، مثل $h = 1.34\sqrt{\ell}$. تُسمى **معادلات جذرية**. ولإيجاد حلها، يجب أولاً عزل المتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة. ثم يتم تربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح	إذا قمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضًا.
الرموز	إذا كان $a = b$، فإذًا $a^2 = b^2$.
أمثلة	إذا كان $\sqrt{x} = 4$ ، فإذًا $(\sqrt{x})^2 = 4^2$.

مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار **يبحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدا أن سرعة جسم القارب تبلغ 9 km/h بعد قياسها. فأوجِد طول خط الماء للقارب الشراعي. قرّب إلى أقرب متر.**

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك القارب وأنها ترتبط بالطول.

التخطيط يقطع القارب 9 km/h. صيغة سرعة جسم القارب هي $h = 1.34\sqrt{\ell}$.

الحل

صيغة سرعة جسم القارب	$h = 1.34\sqrt{\ell}$
عوّض بـ 9 عن h.	$9 = 1.34\sqrt{\ell}$
اقسم كل طرف على 1.34.	$\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$
بسّط.	$6.72 \approx \sqrt{\ell}$
قم بتربيع طرفي المعادلة.	$(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$
بسّط.	$45.16 \approx \ell$

طول خط الماء للقارب الشراعي يبلغ حوالي 45 m.

التحقق تحقق عن طريق التعويض بالتقدير في الصيغة الأصلية.

صيغة سرعة جسم القارب	$h = 1.34\sqrt{\ell}$
$\ell = 45$ و $h = 9$	$9 \stackrel{?}{=} 1.34\sqrt{45}$
اضرب.	$9 \approx 8.98899327$ ✓

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين موجّه

1. القيادة المعادلة $v = \sqrt{21.4r}$ تمثل السرعة المتجهة القصوى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون حاجز إذا كانت v هي السرعة المتجهة القصوى بالكيلومترات و r هو نصف قطر الانعطاف بالأمتار. إذا صُمم الطريق لسرعة أقصاها 505 km/h، فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، اعزل الجذر أولاً. ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

مثال 2 التعبير في صورة مجذور

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{a+5} + 7 = 12$.

$\sqrt{a+5} + 7 = 12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5} = 5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2 = 5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a + 5 = 25$	بسّط.
$a = 20$	اطرح 5 من كل طرف.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

2A. $\sqrt{c-3} - 2 = 4$

2B. $4 + \sqrt{h+1} = 14$

انتبه!

تربيع كل طرف

تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرف المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

2 الحلول الدخيلة

في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلٌ لا يُعتد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

مثال 3 المتغير عند كل طرف

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{k+1} = k - 1$. **تحقق من صحة الحل.**

$\sqrt{k+1} = k - 1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2 = (k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k + 1 = k^2 - 2k + 1$	بسّط.
$0 = k^2 - 3k$	اطرح k و 1 من كل طرف.
$0 = k(k-3)$	حلل إلى العوامل.
$k = 0$ or $k - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k = 3$	الحل.

التحقق

$\sqrt{k+1} = k - 1$	المعادلة الأصلية	
$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0 - 1$	$k = 0$	
$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	بسّط	
$1 \neq -1$ ✗	خطأ	
$\sqrt{k+1} = k - 1$	المعادلة الأصلية	
$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3 - 1$	$k = 3$	
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	بسّط	
$2 = 2$ ✓	صواب	

بما أن 0 لا تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

نصيحة دراسية

الحلول الدخيلة

عند التحقق من الحلول بحثًا عن الحلول الدخيلة، فنحن لا نهتم سوى بالجذور الأساسية.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

3A. $\sqrt{t+5} = t + 3 - 1$

3B. $x - 3 = \sqrt{x-1}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

1. الهندسة مساحة سطح كرة سلة هي x سنتيمترات مربعة. فما نصف قطر كرة السلة إذا كانت صيغة مساحة سطح الكرة هي $SA = 4\pi r^2$؟

المثالان 2–3

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

2. $\sqrt{10h} + 1 = 21$ **3.** $\sqrt{7r + 2} + 3 = 7$ **4.** $5 + \sqrt{g - 3} = 6$

5. $\sqrt{3x - 5} = x - 5$ **6.** $\sqrt{2n + 3} = n$ **7.** $\sqrt{a - 2} + 4 = a$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

8. التمارين الرياضية افترض أن الدالة $S = \pi\sqrt{\frac{9.8\ell}{1.6}}$، حيث S تمثل السرعة بالأمتار في الثانية و ℓ هو طول ساق الشخص بالأمتار. يمكنها إيجاد السرعة القصوى التقريبية التي يستطيع الشخص ركضها.

a. ما سرعة الركض القصوى لشخص طول ساقه 1.1 m مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

b. ما طول ساق شخص سرعة ركضه 6.7 m/s مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

c. كلما ازداد طول الساق، تزداد السرعة القصوى أم تقل؟ اشرح.

الأمثلة 2–3

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

9. $\sqrt{a} + 11 = 21$ **10.** $\sqrt{t} - 4 = 7$ **11.** $\sqrt{n - 3} = 6$

12. $\sqrt{c + 10} = 4$ **13.** $\sqrt{h - 5} = 2\sqrt{3}$ **14.** $\sqrt{k + 7} = 3\sqrt{2}$

15. $y = \sqrt{12 - y}$ **16.** $\sqrt{u + 6} = u$ **17.** $\sqrt{r + 3} = r - 3$

18. $\sqrt{1 - 2t} = 1 + t$ **19.** $5\sqrt{a - 3} + 4 = 14$ **20.** $2\sqrt{x - 11} - 8 = 4$

21. المسافات المقطوعة المدة الزمنية t، بالثواني، التي يستغرقها بندول بسيط لإكمال تأرجح كامل يُطلق عليها الفترة. وهي تُعطى بالمعادلة $t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ هو طول البندول، بالأمتار.

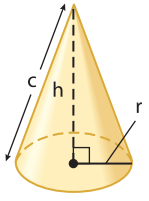
a. يكمل بندول الأرجوحة العملاقة الفترة في حوالي 8 ثوانٍ. فكم يبلغ طول ذراع البندول تقريبًا؟ قرّب إلى أقرب متر.

b. هل ازدياد طول البندول يسبب تزايد الفترة أم تناقصها؟ اشرح.

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

22. $\sqrt{6a - 6} = a + 1$ **23.** $\sqrt{x^2 + 9x + 15} = x + 5$ **24.** $6\sqrt{\frac{5k}{4}} - 3 = 0$

25. $\sqrt{\frac{5y}{6}} - 10 = 4$ **26.** $\sqrt{2a^2 - 121} = a$ **27.** $\sqrt{5x^2 - 9} = 2x$



28. التبرير قانون الارتفاع المائل c للمخروط هو $c = \sqrt{h^2 + r^2}$، حيث h هو ارتفاع المخروط و r هو نصف قطر قاعدته.
جد ارتفاع المخروط إذا كان الارتفاع المائل يساوي 4 وحدات ونصف القطر يساوي وحدتين. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

29 **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$.

a. بيانيًا امسح القائمة Y=. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالآتي $Y_1 = \sqrt{2x-7}$. وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $Y_2 = x-7$.
اضغط على GRAPH .

b. بيانيًا ارسم ما هو مبين على الشاشة.

c. تحليليًا استخدم ميزة التقاطع مع المحور على قائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع.

d. تحليليًا حُـلّ المعادلة الجذرية جبريًا. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟

30. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة، حجمها $162\ cm^3$. يمكن إيجاد نصف قطر r الحاوية عن طريق استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث V هو حجم الحاوية و h هو الارتفاع.

a. إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 cm، فجد ارتفاعها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

b. إذا كان ارتفاع الحاوية 10 cm، فجد نصف قطرها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

أسماء

$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$

$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$

$6-b = b+10$

$-2b = 4$

$b = -2$

التحقق

$\sqrt{6-(-2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-2)+10}$

$\sqrt{8} = \sqrt{8}$ ✓

إيمان

$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$

$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$

$6-b = b+10$

$2b = 4$

$b = 2$

التحقق

$\sqrt{6-(2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(2)+10}$

$\sqrt{4} \neq \sqrt{12}$ ✗

لا يوجد حل

32. **التبرير** أي معادلة مما يلي حلها هو $\sqrt{4} = \sqrt{x+2}$؟ اشرح.

A. $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$ **B.** $4 = x+2$ **C.** $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$

33. **التبرير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل $\sqrt{x} + 1 = 5$ وحل $\sqrt{x+1} = 5$.

34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.

35. **التبرير** هل المعادلة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*؟ اشرح.

$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$

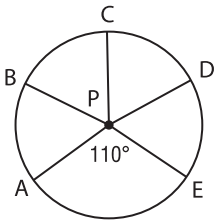
36. **التحدي** حُـلّ المعادلة $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$.

37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقوب عند A، و B و C و D و E على الدائرة P.



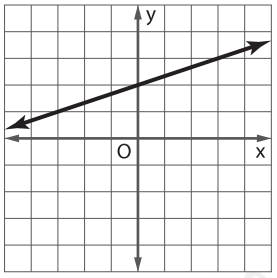
إذا حفر حسن الثقوب بحيث تكون $m\angle APE = 110°$، وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس $m\angle CPD$؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون $w = 3$؟

A $\frac{w-3}{w+1}$ **C** $\frac{w+1}{w^2-3w}$

B $\frac{w^2-3w}{3w}$ **D** $\frac{3w}{3w^2}$

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3 **H** $\frac{1}{3}$

G $-\frac{1}{3}$ **J** 3

41. ما حلول $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$؟

A $1, 6$ **C** 1

B $-1, -6$ **D** 6

مراجعة شاملة

42. الكهرباء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية يُعطى بالمعادلة $V = \sqrt{PR}$، حيث P هو القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأوم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

43. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$ **44.** $\sqrt{3} \quad \sqrt{6}$ **45.** $7\sqrt{3} \quad 2\sqrt{6}$

46. $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$ **47.** $\sqrt{\frac{5c^5}{4d^5}}$ **48.** $\frac{\sqrt{9x^3 y}}{\sqrt{16x^2 y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل أحادية حد. أكتب نعم أو لا: اشرح.

49. 12 **50.** $4x^3$ **51.** $a - 2b$ **52.** $4n + 5p$ **53.** $\frac{x}{y^2}$ **54.** $\frac{1}{5}$

مراجعة المهارات

بسّط.

55. 9^2 **56.** 10^6 **57.** 4^5

58. $(8v)^2$ **59.** $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$ **60.** $(10y^2)^3$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 3-1 إلى 3-2

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى. (الدرس 3-1)

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = -4\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
4. $y = \sqrt{x} - 3$
5. $y = \sqrt{x - 1}$
6. $y = 2\sqrt{x - 2}$

7. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة $121\ cm^2$؟ (الدرس 3-1)

A cm 121 C cm 44
B cm 11 D cm 10

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 3-2)

8. $2\sqrt{25}$
9. $\sqrt{12}\ \sqrt{8}$
10. $\sqrt{72xy^5z^6}$
11. $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. **الأقمار الصناعية** أُطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 كيلومتر. وتُعطى السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصيغة $v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$ هي v السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و G هو ثابت مُعطى، و m_E هي كتلة الأرض، و r هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدرس 3-2)

a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 m. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟

b. كتلة الأرض هي 5.97×10^{24} kg، والثابت G هو $6.67 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{kg^2}$ N حيث N يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.

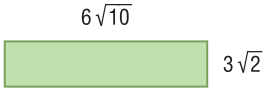
14. **اختيار من متعدد** أي من التعابير التالية يكافئ التعبير $\sqrt{\frac{16}{32}}$ (الدرس 3-2)

F $\frac{1}{2}$
G $\frac{\sqrt{2}}{2}$
H 2
J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 3-3)

15. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
16. $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$
17. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$
18. $\sqrt{27} - \sqrt{48}$
19. $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$
20. $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$
21. $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

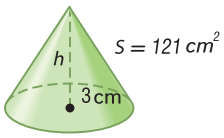
22. **هندسة** جد مساحة المستطيل. (الدرس 3-3)



حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل. (الدرس 3-2)

23. $\sqrt{5x} - 1 = 4$
24. $\sqrt{a - 2} = 6$
25. $\sqrt{15 - x} = 4$
26. $\sqrt{3x^2 - 32} = x$
27. $\sqrt{2x - 1} = 2x - 7$
28. $\sqrt{x + 1} + 2 = 4$

29. **الهندسة** المساحة الجانبية S للمخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع المخروط. جد ارتفاع المخروط. (الدرس 3-2)



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

3-3 التغير العكسي

السابق:
- قمت بحل مسائل مشتملة على التغير الطردي.

الحالي:
1. تحديد واستخدام التغيرات العكسية.
2. تمثيل التغيرات العكسية بيانيًا.

لماذا؟
- الوقت الذي يستغرقه العداء لإنهاء السباق يتناسب عكسيًا مع متوسط وتيرة تقدمه. ويتناقص الوقت الذي يستغرقه العداء كلما ازدادت وتيرة تقدمه. إذًا، تتناسب هاتان *الكميتان* عكسيًا.

المفردات الجديدة
- **تغير عكسي** inverse variation
- **قاعدة ناتج الضرب** product rule

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تحديد التغير العكسي واستخدامه

يمكن تمثيل **التغير العكسي** بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

y يتغير عكسيًا مع x إذا وُجد ثابت ما غير صفري k بحيث يكون $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$، حيث $x, y \neq 0$.

في التغير العكسي، يبقى ناتج ضرب القيمتين ثابتًا. تذكر أن العلاقة التي تأتي بالصيغة $y = kx$ عبارة عن تغير *طردي*. الثابت k يُطلق عليه *ثابت التغير* أو *ثابت التناسب*.

مثال 1 تحديد التغير العكسي والتغير الطردي

حدد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.

a.

x	y
1	16
2	8
4	4

في أي تغير عكسي، xy يساوي الثابت k. جد xy لكل زوج مرتب في الجدول المبين.

$1 \times 16 = 16$ $2 \times 8 = 16$ $4 \times 4 = 16$

ناتج الضرب ثابت، إذًا الجدول يمثل تغيرًا عكسيًا.

b.

x	y
1	3
2	6
3	9

لاحظ أن xy ليس ثابتًا. إذًا، الجدول لا يمثل تغيرًا عكسي.

$3 = k(1)$ $6 = k(2)$ $9 = k(3)$

$3 = k$ $3 = k$ $3 = k$

جدول القيم يمثل التغير الطردي $y = 3x$.

c. $x = 2y$

يمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة $y = \frac{1}{2}x$. لذا، فإنها تمثل تغيرًا طرديًا.

d. $2xy = 10$

اكتب المعادلة. $2xy = 10$

اقسم كل طرف على 2. $xy = 5$

تمثل المعادلة تغيرًا عكسيًا.

تمرين موجّه

1A.

x	1	2	5
y	10	5	2

1B. $-2x = y$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام $xy = k$ لكتابة معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

قراءة في الرياضيات

معادلات التغير بالنسبة لمعادلات التغير الطردي، نقول إن y يتغير *طرديًا* مع x. وبالنسبة لمعادلات التغير العكسي، نقول إن y يتغير *عكسيًا* مع x.

مثال 2 كتابة التغير العكسي

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 18$ عندما يكون $x = 2$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

$xy = k$	معادلة تغير عكسي
$2(18) = k$	$y = 18$ و $x = 2$
$36 = k$	بسّط.

ثابت التغير هو 36. إذًا، المعادلة التي تربط بين x و y هي $xy = 36$ أو $y = \frac{36}{x}$.

تمرين موجّه

2. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = -4$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن $x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$	
$x_1y_1 = x_2y_2$	عوّض بـ x_2y_2 عن k.

المعادلة $x_1y_1 = x_2y_2$ تُسمى **قاعدة ناتج الضرب** للتغيرات العكسية.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي

الشرح إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن، ناتجا ضرب x_1y_1 و x_2y_2 متساويين.

الرموز $x_1y_1 = x_2y_2$ أو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

مثال 3 الحل لإيجاد x أو y

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 12$، فجد x عندما يكون $y = 4$.

$x_1y_1 = x_2y_2$	قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي
$12 \times 3 = x_2 \times 4$	$x_1 = 12, y_1 = 3, y_2 = 4$
$36 = x_2 \times 4$	بسّط.
$\frac{36}{4} = x_2$	اقسم كل طرف على 4.
$9 = x_2$	بسّط.

إذًا، عندما يكون $y = 4$، يكون $x = 9$.

تمرين موجّه

3. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 4$ عندما يكون $x = -8$، فجد y عندما يكون $x = -4$.

يمكن استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي لكتابة معادلة بغرض حل مسائل من الحياة اليومية.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الربط بالحياة اليومية

قرص الهوكي القياسي يكون سُمكه 2.5 سنتيمتر وقطره 7.6 سنتيمتر. وتتراوح كتلته بين 156 و 170 جرامًا تقريبًا.

المصدر: *كتاب دوري الهوكي الوطني للقواعد*

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التغير العكسي

الفيزياء التسارع a لقرص الهوكي يتناسب عكسيًا مع كتلته m. افترض أن قرص هوكي كتلته 164 g تم ضربه بحيث يتسارع بمعدل $122\ m/s^2$. جد تسارع قرص كتلته 158 g إذا ضُرب بنفس القدر من القوة.

أنشئ جدولاً لتنظيم المعلومات.

القرص	الكتلة	التسارع
1	164 g	$122\ m/s^2$
2	158 g	a_2

ليكن $m_1 = 164$، $a_1 = 122$، و $m_2 = 164$.

حل لإيجاد a_2.

استخدم قاعدة ناتج الضرب لكتابة معادلة. $m_1a_1 = m_2a_2$

$m_1 = 164$، $a_1 = 122$، و $m_2 = 158$ $164 \times 122 = 158a_2$

بسّط. $20{,}008 = 158a_2$

قسم كل طرف على 158 وبسّط. $126.6 \approx a_2$

قرص هوكي كتلته 158 g يكون له تسارع بمعدل $126.6\ m/s^2$.

تمرين موجّه

4. السباق إذا كان عبد العزيز يركض بمتوسط 8 km/h، وأنهى السباق في 0.39 ساعة. وأنهى مازن السباق في 0.35 ساعة. فما متوسط وتيرة تقدم مازن؟

2 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

لا يكون التمثيل البياني للتغير العكسي خطًا مستقيمًا مثل التمثيل البياني للتغير الطردي.

مثال 5 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 8$ عندما يكون $x = 3$.

الخطوة 1 اكتب معادلة تغير عكسي.

معادلة تغير عكسي $xy = k$

$x = 3$, $y = 8$ $3(8) = k$

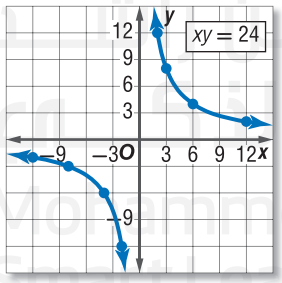
بسّط. $24 = k$

معادلة التغير العكسي هي $xy = 24$ أو $y = \frac{24}{x}$.

الخطوة 2 اختر قيمة لكل من x و y بحيث يكون ناتج ضربهما 24.

الخطوة 3 عيّن كل نقطة وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.

x	y
−12	−2
−8	−3
−4	−6
−2	−12
0	غير معرف
2	12
3	8
6	4
12	2



لاحظ أنه بما أن y غير معرف عندما يكون $x = 0$، فإنه لن توجد نقطة على التمثيل البياني عندما يكون $x = 0$. ويُسمى تمثيلها البياني قطعًا زائدًا.

تمرين موجّه

5. مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 16$ عندما يكون $x = 4$.

نصيحة في حل المسائل

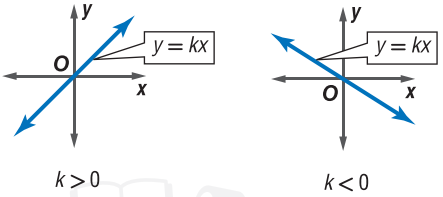
الاستنتاج المنطقي

أحيانًا يلزم تقسيم المسألة إلى أجزاء، وحل كل جزء على حده، ثم دمج حلول الأجزاء لإيجاد حل المسألة.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

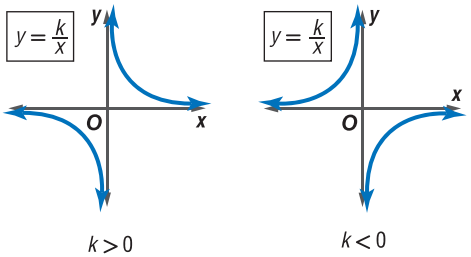
ملخص المفهوم التغير الطردي و التغير العكسي

التغير الطردي



- $y = kx$
- y يتغير طرديًا مع x.
- النسبة $\frac{y}{x}$ عبارة عن ثابت.

التغير العكسي



- $y = \frac{k}{x}$
- y يتغير عكسيًا مع x.
- ناتج ضرب xy عبارة عن ثابت.

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

1.

x	1	4	8	12
y	2	8	16	24

2.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

3. $xy = 4$

4. $y = \frac{x}{10}$

المثالان 2 و 5

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثِّل المعادلة بيانيًا.

5. $y = 8$ عندما يكون $x = 6$
6. $x = 5$ عندما يكون $y = 2$
7. $y = 3$ عندما يكون $x = -10$
8. $x = -12$ عندما يكون $y = -1$

مثال 3

جد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

9. إذا كان $y = 8$ عندما يكون $x = 4$، فجد x عندما يكون $y = 2$.
10. إذا كان $y = 7$ عندما يكون $x = 6$، فجد y عندما يكون $x = -21$.
11. إذا كان $y = -5$ عندما يكون $x = 9$، فجد y عندما يكون $x = 6$.

مثال 4

12. **السباق** الوقت المستغرق لإكمال مسار سباق العربات الصغيرة يتناسب عكسيًا مع متوسط سرعة العربة الصغيرة. فإذا كان أحد المتسابقين متوسط سرعته 22.3 m/s وأكمل المسار في 30 s. وأكمل متسابق آخر المسار في 25 s. فما متوسط سرعة المتسابق الثاني؟

13. **البصريات** عندما لا تكون الرؤية واضحة لدى الشخص، فإن طبيب العيون يمكنه أن يصف له عدسات لتصحيح الحالة. قوة العدسة P، بوحدات تُسمى ديوبتر، تساوي 1 مقسومًا على البعد البؤري f، بالأمتار، للعدسة.
   a. مثّل التغير العكسي $P = \frac{1}{f}$ بيانيًا.
   b. جد قوى عدسات بعدها البؤري $+0.2$ m إلى -0.4 m.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.**

14.

x	y
1	30
2	15
5	6
6	5

15.

x	y
2	−6
3	−9
4	−12
5	−15

16.

x	y
−4	−2
−2	−1
2	1
4	2

17.

x	y
−5	8
−2	20
4	−10
8	−5

18. $5x - y = 0$ **19.** $xy = \frac{1}{4}$ **20.** $x = 14y$ **21.** $\frac{y}{x} = 9$

المثالان 5 و 2 **افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين *x* و *y*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

22. $y = 2$ عندما يكون $x = 20$ **23.** $y = 18$ عندما يكون $x = 4$ **24.** $y = -6$ عندما يكون $x = -3$

25. $y = -4$ عندما يكون $x = -3$ **26.** $y = -4$ عندما يكون $x = 16$ **27.** $y = 12$ عندما يكون $x = -9$

مثال 3 **جد الحل. افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*.**

28. إذا كان $y = 12$ عندما يكون $x = 3$، فجد x عندما يكون $y = 6$.

29. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 6$، فجد x عندما يكون $y = 2$.

30. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 14$، فجد x عندما يكون $y = -5$.

31. إذا كان $y = 9$ عندما يكون $x = 9$، فجد y عندما يكون $x = -27$.

32. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = -2$، فجد y عندما يكون $x = 3$.

33. إذا كان $y = -8$ عندما يكون $x = -12$، فجد y عندما يكون $x = 10$.

مثال 4

34. علوم الأرض يتغير مستوى الماء في النهر عكسيًا مع درجة حرارة الجو. عندما تكون درجة حرارة الجو 32° مئوية، يكون مستوى الماء 3.35 m. فإذا كانت درجة حرارة الجو 43°، فما مستوى الماء في النهر؟

35. الموسيقى يتغير تردد الوتر المهتز في البيانو عكسيًا مع طول الوتر عند تطبيق ضغط متساوٍ. فإذا كان يوجد وتر طوله 420 mm يهتز بتردد 523 دورة في الثانية، فبأي تردد سيهتز وتر طوله 707 mm؟

حدد إذا ما كانت كل حالة هي مثال *للتغير العكسي* أو *التغير الطردي*. برر استنتاجك.

36. يمكن أن يشتري نادي المسرح 10 قِطع بسعر AED 2 لكل قِطعة أو 5 قِطع بسعر AED 4 لكل قِطعة.

37. اشترت عائلة ربيع عصائر ليمون بسعر AED 1.50 للعصير الواحد.

38. تجني آمال AED 14 نظير مجالسة الأطفال لمدة ساعتين، و AED 21 نظير مجالسة الأطفال لمدة 3 ساعات.

39. قِطع معدنية للعبة فيديو تم تقسيمها بالتساوي على مجموعة من الأصدقاء.

حدد إذا كان كل جدول أو تمثيل بياني يعبر عن تغير عكسي أم تغير طردي. اشرح.

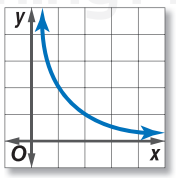
40.

x	y
5	1
8	1.6
11	2.2

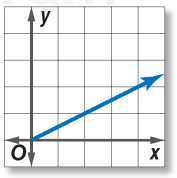
41.

x	y
−3	−7
−2	−10.5
4	5.25

42.



43.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

44. العلوم الفيزيائية عندما يتوازن شخصان على أرجوحة، تكون المسافتان من مركز الأرجوحة متناسبتين عكسيًا مع وزن الشخصين. فإذا كان شخص وزنه 53.5 kg يجلس على بعد 1.8 m من مركز الأرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 56.7 kg أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

جد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

45 إذا كان $y = 9.2$ عندما يكون $x = 6$، فجد x عندما يكون $y = 3$.

46. إذا كان $y = 3.8$ عندما يكون $x = 1.5$، فجد x عندما يكون $y = 0.3$.

47. إذا كان $y = \frac{1}{5}$ عندما يكون $x = -20$، فجد y عندما يكون $x = -\frac{8}{5}$.

48. إذا كان $y = -6.3$ عندما يكون $x = \frac{2}{3}$ ، فجد y عندما يكون $x = 8$.

49. السباحة اشترى كلٌ من بدر وخميس عضوية انتفاع بحمام سباحة. وبالنسبة لكليهما، يتناسب متوسط التكلفة في اليوم عكسيًا مع عدد الأيام التي يذهبان فيها إلى حمام السباحة. فإذا ذهب بدر إلى حمام السباحة 25 يومًا بمتوسط تكلفة AED 5.60 في اليوم. وذهب خميس إلى حمام السباحة 35 يومًا. فما متوسط التكلفة في اليوم بالنسبة لخميس؟

50. العلوم الفيزيائية مقدار القوة المطلوبة للقيام بقدر معين من العمل لتحريك جسم ما يتناسب عكسيًا مع المسافة التي يتم تحريك الجسم فيها. افترض أن 90 N من القوة مطلوبة لتحريك جسم ما 10 m. فجد القوة المطلوبة لتحريك جسم آخر 15 m إذا كان ينطوي على نفس القدر من العمل.

51. القيادة يجب أن تتمرن بثينة على القيادة 40 ساعة مع أحد والديها أو أولياء أمورها قبل السماح لها بإجراء اختبار للحصول على رخصة القيادة الخاصة بها. وهي تنوي التمرن بنفس عدد الساعات من كل أسبوع.

a. ليكن h ممثلاً لعدد الساعات في الأسبوع التي ستتمرن فيها بثينة. أنشئ جدولاً يبين عدد الأسابيع w التي سوف تحتاجها للتمرن بالنسبة للقيم التالية لـ h: 1, 2, 4, 5, 8, 10.

b. اشرح كيف يتغير عدد الأسابيع كلما ازداد عدد الساعات في الأسبوع.

c. اكتب معادلة توضح العلاقة بين h و w ومثلها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. التفكير النقدي وجد أحمد وأيمن معادلة يتغير فيها x و y عكسيًا، ويكون $y = 10$ عندما يكون $x = 5$. فهل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح.

أيمن

$k = \frac{y}{x}$

$= \frac{10}{2}$ ≤

$y = 5x$ أو

أحمد

$k = xy$

$= (5)(10)$ or 50

$y = \frac{50}{x}$ أو

53. التحدي افترض أن f يتغير عكسيًا مع g، و g يتغير عكسيًا مع h. ما العلاقة بين f و h؟

54. التبرير هل $xy = -k$ تمثل تغيرًا عكسيًا عندما يكون $k \neq 0$؟ اشرح.

55. مسألة غير محددة الإجابة اذكر حالة أو ظاهرة من الحياة اليومية يمكن تمثيلها بمعادلة تغير عكسي. استخدم المصطلحات الصحيحة لشرح مثالك وتفسير لماذا تعد هذه الحالة تغيرًا عكسيًا.

56. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين التغير الطردي والتغير العكسي. قم بتضمين وصف للعلاقة بين الميل والتمثيلين البيانيين للتغير الطردي والعكسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

57. باعتبار وجود قوة ثابتة وأن تسارع جسم ما يتغير عكسيًا مع كتلته. افترض أن هذه القوة الثابتة تُطبق على جسم ما كتلته 6 kg ونتج عنها تسارع معدله $10\ m/s^2$. فإذا طُبقت نفس القوة على جسم آخر كتلته 12 kg. فماذا سيكون معدل التسارع الناتج؟

A $4\ m/s^2$
B $5\ m/s^2$
C $6\ m/s^2$
D $7\ m/s^2$

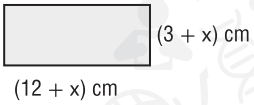
58. إذا حصلت حياة على متوسط 56% في أول سبعة اختبارات لها. فعلام ينبغي أن تحصل في اختبارها الثامن ليكون المتوسط 60% بالنسبة للاختبارات الثمانية؟

F 82%
G 88%
H 98%
J 100%

59. التقط حارب صورة ثعبان طوله متر واحد بجانب جدار من الطوب. عندما قام بتحميض الصور، بلغ طول الثعبان ذي المتر طولاً، 2 cm وارتفاع الجدار 4.5 cm. فماذا كان الارتفاع الفعلي للجدار الطوبي؟

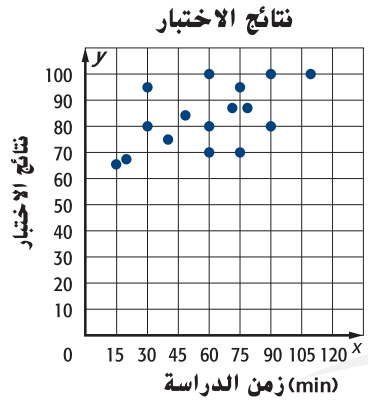
A 2.25 cm
B 22.5 cm
C 225 cm
D 2250 cm

60. الإجابة القصيرة جد مساحة المستطيل.



مراجعة شاملة

61. اختبارات حدد إذا ما كان التمثيل البياني على اليسار يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا وُجد ارتباط، فوضح مدلوله.



افترض أن y يتغير طرديًا مع x.

62. إذا كان $y = 2.5$ عندما يكون $x = 0.5$، فجد y عندما يكون $x = 20$.

63. إذا كان $y = -6.6$ عندما يكون $x = 9.9$، فجد y عندما يكون $x = 6.6$.

64. إذا كان $y = 2.6$ عندما يكون $x = 0.25$، فجد y عندما يكون $x = 1.125$.

65. إذا كان $y = 6$ عندما يكون $x = 0.6$، فجد x عندما يكون $y = 12$.

66. المعرفة المالية بائع يحصل على AED 32,000 في العام زائد 5% من قيمة المبيعات التي يحققها. فما قيمة المبيعات المطلوبة لكي يحصل على دخل سنوي أكبر من AED 45,000؟

مراجعة المهارات

بسّط. افترض أنّ جميع المقامات لا تساوي الصفر.

67. $\frac{7^8}{7^6}$

68. $\frac{x^8y^{12}}{x^2y^7}$

69. $\frac{5pq^7}{10p^6q^3}$

70. $\left(\frac{2c^3d}{7z^2}\right)^3$

71. $\left(\frac{4a^2b}{2c^3}\right)^2$

72. $y^0(y^5)(y^{-9})$

73. $\frac{(4m^{-3}n^5)^0}{mn}$

74. $\frac{(3x^2y^5)^0}{(21x^5y^2)^0}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

3-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعة الدوال النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحليل كيف يؤثر تغيير المعاملين a و b في $y=\frac{a}{x-b}+c$ على التمثيلات البيانية لمجموعة الدوال النسبية.

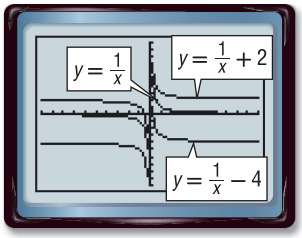
النشاط تغيير المعاملات

مثّل كل مجموعة من المعادلات بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صف أي أوجه تشابه واختلاف بين التمثيلات البيانية.

a. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2, y=\frac{1}{x}-4$

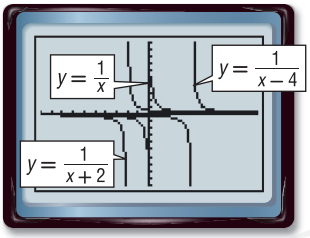
أدخل المعادلات في القائمة $Y=$ ومثّلها بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه. كل تمثيل بياني يقترب من المحور y على كلا الجانبين. ولكن يختلف التمثيلان البيانيان في الموضع الرأسي.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

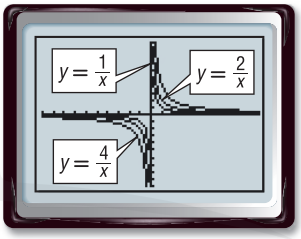
b. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+2}, y=\frac{1}{x-4}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه، وتقترب جميعًا من المحور x من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الموضع الأفقي.

c. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=\frac{4}{x}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الشكل.

النموذج والتحليل

1. كيف يؤثر a و b و c على التمثيل البياني لـ $y=\frac{a}{x-b}+c$ ؟ اذكر أمثلة.

تفحص كل زوج من المعادلات وتوقع أوجه التشابه والاختلاف من حيث التمثيل البياني لكل منهما. استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من توقعاتك. أكتب جملة واحدة أو جملتين تقارن بهما التمثيلين البيانيين.

2. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2$

3. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+5}$

4. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

3-4 الدوال النسبية

السابق
- كتبت معادلات التغير العكسي.

الحالي
1 تحديد القيم المستبعدة من مجال دالة.
2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

لماذا؟
- حليمة تقرأ كتابًا من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرؤها كل يوم y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$، حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.

المفردات الجديدة
- دالة نسبية rational function
- قيمة مستبعدة excluded value
- خط تقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عمّلية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد القيم المستبعدة

الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال **للدالة النسبية**. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح
هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة معادلة لها الصيغة $y = \frac{p}{q}$، حيث p و q كثيرات الحدود و $q \neq 0$.

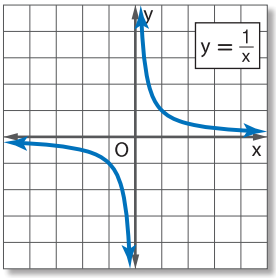
الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{1}{x}$

نوع التمثيل البياني: قطع زائد

المجال: $\{x | x \neq 0\}$

المدى: $\{y | y \neq 0\}$

التمثيل البياني



بما أن القسمة على صفر غير معرّفة، فأي قيمة للمتغير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية، يتم استبعادها من مجال الدالة. وتُسمى هذه القيم **بالقيم المستبعدة** للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = -\frac{2}{x}$

لا يمكن أن يساوي المقام 0. إذًا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x + 1}$

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$.

c. $y = \frac{5}{4x - 8}$

$4x - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$.

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$ **1B.** $y = \frac{x}{x - 7}$ **1C.** $y = \frac{4}{3x + 9}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

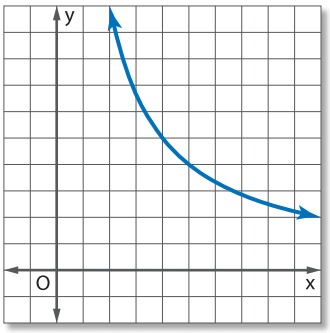
بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا، من مجال الدالة النسبية، قد ينبغي استبعاد قيم إضافية من المجال أيضًا، وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

المناطيد إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمتار المربعة y لكل شخص. مثل هذه الدالة بيانيًا.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفرًا أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.

عدد الأشخاص x	2	4	5	10
أمتار مُربعة لكل شخص y	10	5	4	2



لاحظ أنه كلما ازدادت x، اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت المساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. الهندسة مستطيل تبلغ مساحته $18\ cm^2$. وتوضح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثّل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز. ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه.

المصدر: مركز غودارد لرحلات الفضاء

2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها

في المثال 2، القيمة المستبعدة هي $x = 0$. لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المستقيم الرأسي $x = 0$، ولكن لا يمسه أبدًا.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يمسه أبدًا. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما *خطين تقاربين*. **خط التقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

نصيحة دراسية

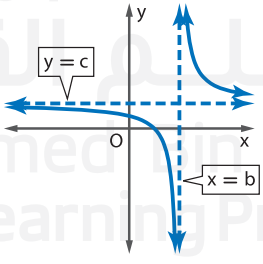
استخدام خطوط التقارب تكون خطوط التقارب مفيدة في تمثيل الدوال النسبية بيانيًا. ومع ذلك، فهي لا تعد جزءًا من التمثيل البياني.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب

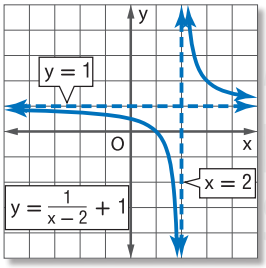
الشرح

الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x - b} + c,\ a \neq 0$، يكون لها خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفرًا، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

استخدام النماذج



مثال



مجال $y = \frac{a}{x - b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. المدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع القلم الرصاص عن الورقة، لذا اختر قيم x على كلا جانبي خط التقارب الرأسي لتمثيل جزأي الدالة.

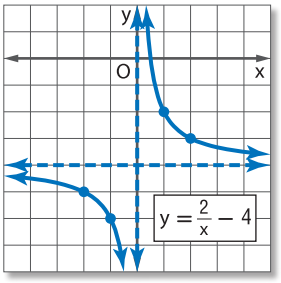
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

a. $y = \frac{2}{x} - 4$



الخطوة 1 حدد خطوط التقارب ومثّلها بيانيًا باستخدام الخطوط المتقطعة.

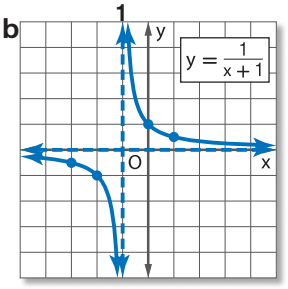
خط تقارب رأسي: $x = 0$

خط تقارب أفقي: $y = -4$

الخطوة 2 أنشئ جدولاً للقيم وعيّن النقاط. ثم صل بينهما.

x	−2	−1	1	2
y	−5	−6	−2	−3

b.



الخطوة 1 لإيجاد خط التقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستبعدة.

اجعل المقام يساوي 0. $x + 1 = 0$

اطرح 1 من كل طرف. $x = -1$

خط تقارب رأسي: $x = -1$

خط تقارب أفقي: $y = 0$

الخطوة 2

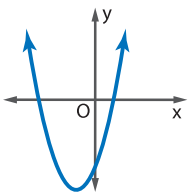
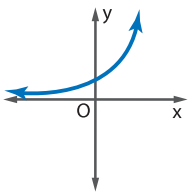
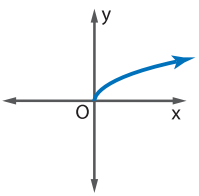
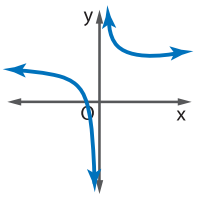
x	−3	−2	0	1
y	−0.5	−1	1	0.5

تمرين موجّه

3A. $y = -\frac{6}{x}$ **3B.** $y = \frac{1}{x-3}$ **3C.** $y = \frac{2}{x+2} + 1$

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

التربيعية	الأسيّة	الجذرية	النسبية
الدالة الأصلية: $y = x^2$ الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$	الدالة الأصلية: تختلف الصيغة العامة: $y = ab^x$	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$ الصيغة العامة: $y = \sqrt{x - b} + c$	الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$ الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x - b} + c$
			

الربط بتاريخ الرياضيات

إيفلين بويد غرانفيل (1924–) تخصصت غرانفيل في الرياضيات والفيزياء بكلية سميث في عام 1945، حيث تخرجت بامتياز مع مرتبة الشرف. كما حازت على شهادة الماجستير في الرياضيات والفيزياء ودرجة الدكتوراه في الرياضيات من جامعة ييل. وتركز مشروع الدكتوراه الخاص بها حول التحليل الوظيفي.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

1. $y = \frac{5}{x}$
2. $y = \frac{1}{x + 3}$
3. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$
4. $y = \frac{x}{2x - 8}$

مثال 2

5. **التخطيط للحفل** تبلغ تكلفة الزينة من أجل حفل عشاء AED 32. وسيُقسم هذا المبلغ بين مجموعة من الأصدقاء. المبلغ الذي سيدفعه كل شخص y ممثل في $y = \frac{32}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

6. $y = \frac{2}{x}$
7. $y = \frac{3}{x} - 1$
8. $y = \frac{1}{x - 2}$
9. $y = \frac{-4}{x + 2}$
10. $y = \frac{3}{x - 1} + 2$
11. $y = \frac{1}{x + 2} + 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

12. $y = \frac{-1}{x}$
13. $y = \frac{8}{x - 8}$
14. $y = \frac{x}{x + 2}$
15. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$
16. $y = \frac{2x + 5}{x + 5}$
17. $y = \frac{7}{5x - 10}$

مثال 2

18. **الظباء** تستطيع الظباء من ذوات القرون أن تجري 40 كيلومترًا دون توقف. ويتمثل متوسط السرعة في المعادلة $y = \frac{40}{x}$، حيث x هو الزمن المستغرق لجري هذه المسافة.
   a. مثّل $y = \frac{40}{x}$ بيانيًا.
   b. اذكر خطوط التقارب.

19. **قيادة الدراجات** قائد دراجة يقطع 10 km كل صباح. متوسط سرعته y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{10}{x}$، حيث x هو الزمن الذي يستغرقه لقطع مسافة 10 km بالدراجة. مثّل الدالة بيانيًا.

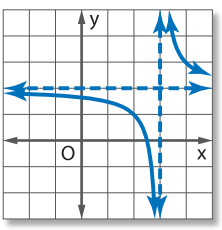
مثال 3

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

20. $y = \frac{5}{x}$
21. $y = \frac{-3}{x}$
22. $y = \frac{2}{x} + 3$
23. $y = \frac{1}{x} - 2$
24. $y = \frac{1}{x + 3}$
25. $y = \frac{1}{x - 2}$
26. $y = \frac{-2}{x + 1}$
27. $y = \frac{4}{x - 1}$
28. $y = \frac{1}{x - 2} + 1$
29. $y = \frac{3}{x - 1} - 2$
30. $y = \frac{2}{x + 1} - 4$
31. $y = \frac{-1}{x + 4} + 3$

32. **القراءة** راجع التطبيق في بداية الدرس.
   a. مثّل الدالة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.
   b. اختر نقطة على التمثيل البياني، واذكر مدلولها في سياق الحالة.

33. **البنية** يوضح التمثيل البياني إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$.



   a. اذكر خطوط التقارب.
   b. أكتب دالة ممكنة للتمثيل البياني.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

34. الطيور الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لمسافة 5000 كيلومتر أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة r بواسطة المعادلة $r = \frac{5000}{t}$، حيث t هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 ساعة في الطيران.

35. رحلة صَفّية سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيسهم كل شخص أيضًا بمبلغ مالي متساوٍ لتسمية أحد النجوم.

a. أكتب وصفًا لفظيًا لتكلفة الشخص الواحد.

b. أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.

c. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.

d. قدّر عدد الأشخاص المطلوبين ليساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي AED 15.

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد خطوط التقارب.

36. $y = \frac{4x + 3}{2x - 4}$ **37.** $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ **38.** $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

41. الهندسة المعادلة $h = \frac{2(64)}{b_1 + 8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 وحدة مربعة. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين مقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة؛ ويبلغ طول أحدهما b_1 وحدات والآخر 8 وحدات.

a. اذكر مجالاً ومدى منطقيين للدالة.

b. مثّل الدالة بيانيًا في الربع الأول.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b_1 = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. التحدي مثّل $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ بيانيًا. واذكر مجال الدالة ومداها.

40. التبرير دون عمل التمثيل البياني، اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x + 5} - 2$.

41. مسألة غير محددة الإجابة أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان التقاربيان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

42. الفرضيات هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

43. أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$y = \frac{10}{2x}$	$y = \frac{8}{x} + 1$	$y = \frac{6}{x + 1}$	$y = \frac{4}{x}$

44. الكتابة في الرياضيات كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

45. حوّل $\frac{9b^2c}{16ad^2} \times \frac{2a^2d}{3bc}$ لأبسط صورة.

A $\frac{abd}{c}$

B $\frac{ab}{d}$

C $\frac{6a}{4bd}$

D $\frac{3ab}{8d}$

46. الإجابة القصيرة في أحد الأيام، ركضت سها 100 m في 15 s، و 200 m في 45 s، و 300 متر فوق حواجز منخفضة في دقيقة ونصف. كم عدد الثواني الإضافية التي استغرقتها لركض 300 m فوق الحواجز المنخفضة عن ركضها مسافة 200 m؟

47. بدأ خالد وخلف تجارة طباعة القمصان. وبلغ إجمالي تكاليف بدء العمل AED 450. وتبلغ تكلفة طباعة القميص الواحد AED 5.50. أكتب دالة نسبية $A(x)$ لمتوسط تكلفة إنتاج x قمصان.

F $A(x) = \frac{450 + 5.5x}{x}$

G $A(x) = \frac{450}{x} + 5.5$

H $A(x) = 450x + 5.5$

J $A(x) = 450 + 5.5x$

48. الهندسة أي مما يلي هو عبارة عن شكل رباعي له زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية؟

A متوازي الأضلاع

B المستطيل

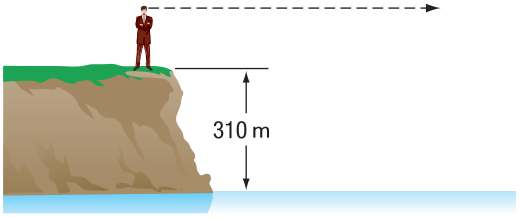
C المربع

D شبه المنحرف

مراجعة شاملة

49. السفر تستطيع أسرة خميس قطع مسافة 352 km إلى الشاطئ بالسيارة في 4 ساعات إذا ساروا بمعدل 88 km في الساعة. وتقول سمية إنه كان يمكن توفير نصف ساعة على الأقل إذا ساروا بمعدل 105 km في الساعة بالسيارة. هل هي على صواب؟ اشرح. (الدرس 3-4)

50. الرؤية الصيغة $d = \sqrt{\frac{3h}{2}}$ تمثل المسافة d km التي يمكن للشخص رؤيتها من ارتفاع h m . تقف شيماء على منحدر يرتفع 310 m فوق مستوى البحر. ما المسافة التي يمكن أن تراها شيماء م ن المنحدر؟ أكتب تعبيرًا جذريًا مبسطًا وتقريبًا عشريًا. (الدرس 2-3)



مراجعة المهارات

حلّل كل ثلاثية حدود إلى العوامل.

51. $x^2 + 11x + 24$

52. $w^2 + 13w - 48$

53. $p^2 - 2p - 35$

54. $72 + 27a + a^2$

55. $c^2 + 12c + 35$

56. $d^2 - 7d + 10$

57. $g^2 - 19g + 60$

58. $n^2 + 3n - 54$

59. $5x^2 + 27x + 10$

60. $24b^2 - 14b - 3$

61. $12a^2 - 13a - 35$

62. $6x^2 - 14x - 12$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3-5 المعادلات النسبية

السابق
- وجدت حل التناسبات.

الحالي
1. حل المعادلات النسبية.
2. استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

لماذا؟
- أنواع الدلافين التي تعيش في المحيطات تستطيع السباحة بمعدل 8 كيلومترات في الساعة أسرع من الدلافين التي تعيش في السواحل. يستطيع الدلفين المحيطي السباحة لمسافة 4.8 km في الوقت نفسه الذي يستغرقه الدلفين الساحلي للسباحة لمسافة 3.2 km.

الدلافين			
النوع	المسافة	المعدل	الزمن
الساحلي		x km/h	t ساعات
المحيطي		$x + 8$ km/h	t ساعات

بما أن الزمن $=$ $\frac{\text{المسافة}}{\text{المعدل}}$، فإن المعادلة التالية تمثل هذه الحالة.

الزمن الذي يسبح فيه الدلفين الساحلي 3.2 km يساوي الزمن الذي يسبح فيه الدلفين المحيطي 4.8 km

$$\frac{3.2}{x} = \frac{4.8}{x+8}$$

(3.2 ← المسافة، x ← المعدل) (4.8 ← المسافة، $x+8$ ← المعدل)

1 حل المعادلات النسبية

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. عندما تكون المعادلة النسبية عبارة عن تناسب، يمكنك استخدام الضرب التبادلي لحلها.

المفردات الجديدة
- معادلة نسبية (rational equation)
- حل دخيل (extraneous solution)
- مسألة عمل (work problem)
- مسألة معدل (rate problem)

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
استخدام نماذج الرياضيات.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الضرب التبادلي لحل المعادلات

الدلافين راجع المعلومات المذكورة أعلاه. حل $\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ لإيجاد سرعة الدلفين الساحلي. تحقق من الحل.

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$4.8x = 3.2x + 25.6$ — جد ناتج الضرب التبادلي.

$16x = 25.6$ — خاصية التوزيع

$x = 16$ — اطرح $2x$ من كل طرف.

إذًا، يستطيع الدلفين الساحلي السباحة بمعدل 16 km/h.

التحقق

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$\frac{4.8}{16+8} = \frac{3.2}{16}$ — عوّض عن x بـ 16.

$\frac{4.8}{24} = \frac{3.2}{16}$ — بسّط.

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ✓ — بسّط.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

1A. $\frac{7}{y-3} = \frac{3}{y+1}$

1B. $\frac{13}{10} = \frac{2f + 0.2}{7}$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام طريقة أخرى لحل أي معادلة نسبية وهي بإيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور في المعادلة. ثم بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور.

مثال 2 استخدام المقام المشترك الأصغر لحل المعادلات النسبية

حُل المعادلة: $\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$. تحقق من الحل.

الخطوة 1 جد المقام المشترك الأصغر.

المقام المشترك الأصغر لـ $\frac{4}{y}$ و $\frac{5y}{y+1}$ هو $y(y+1)$.

الخطوة 2 اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر.

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$y(y+1)\left(\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1}\right) = y(y+1)(5)$$ اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر، $y(y+1)$.

$$\left(\frac{y(y+1)}{1} \cdot \frac{4}{y}\right) + \left(\frac{y(y+1)}{1} \cdot \frac{5y}{y+1}\right) = y(y+1)(5)$$ خاصية التوزيع

$$(y+1)4 + y(5y) = y(y+1)(5)$$ بسّط.

$$4y + 4 + 5y^2 = 5y^2 + 5y$$ اضرب.

$$4y + 4 + 5y^2 - 5y^2 = 5y^2 - 5y^2 + 5y$$ اطرح $5y^2$ من كل طرف.

$$4y + 4 = 5y$$ بسّط.

$$4y - 4y + 4 = 5y - 4y$$ اطرح $4y$ من كل طرف.

$$4 = y$$ بسّط.

التحقق

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{4}{4} + \frac{5(4)}{4+1} \stackrel{?}{=} 5$$ عوّض عن y بـ 4.

$$1 + 4 \stackrel{?}{=} 5$$ بسّط.

$5 = 5$ ✓ بسّط.

نصيحة دراسية

الحلول من الضروري التحقق من حلول المعادلات النسبية للتأكد من أنك حققت المعادلة الأصلية.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

2A. $\frac{2b-5}{b-2} - 2 = \frac{3}{b+2}$

2B. $1 + \frac{1}{c+2} = \frac{28}{c^2+2c}$

2C. $\frac{y+2}{y-2} - \frac{2}{y+2} = -\frac{7}{3}$

2D. $\frac{n}{3n+6} - \frac{n}{5n+10} = \frac{2}{5}$

تذكر أن أي قيمة للمتغير تجعل مقام التعبير النسبي صفرًا يجب استبعادها من المجال.

وبنفس الطريقة، عندما ينتج عن حل المعادلة النسبية صفر في المقام، فإنه ينبغي استبعاد هذا الحل. وتُسمى مثل هذه الحلول **بالحلول الدخيلة**.

$\frac{4+x}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ 5، و 0، و −1 لا يمكن أن تكون حلولاً.

الربط بالمفردات

دخيل الاستخدام اليومي
غير ذي صلة أو غير مهم

حل دخيل الاستخدام الرياضي ناتج لا يعتبر حلاً للمعادلة الأصلية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 الحلول الدخيلة

حُـلّ $\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ واذكر أي حلولٍ دخيلة.

$\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ — المعادلة الأصلية

$(n-5)\left(\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}\right)=(n-5)5$ — اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $n-5$.

$\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{2n}{\cancel{n-5}_{1}}\right)+\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{4n-30}{\cancel{n-5}_{1}}\right)=(n-5)5$ — خاصية التوزيع

$2n+4n-30=5n-25$ — بسّط.

$6n-30=5n-25$ — اجمع الحدود المتشابهة.

$6n-5n-30=5n-5n-25$ — اطرح $5n$ من كل طرف.

$n-30=-25$ — بسّط.

$n-30+30=-25+30$ — اجمع 30 إلى كل طرف.

$n=5$ — بسّط.

بما أن $n=5$ ينتج عنه صفر في مقام المعادلة الأصلية، فهو حل دخيل. إذًا، المعادلة ليس لها حل.

تمرين موجّه

3. حُل المعادلة: $\frac{n^2-3n}{n^2-4}-\frac{10}{n^2-4}=2$. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

نصيحة دراسية

الحلول من الممكن أن تحصل على كلٍ من حل صالح وحل دخيل عند حل معادلة نسبية.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

يمكنك استخدام المعادلات النسبية لحل **مسائل العمل**، أو مسائل تشتمل على معدلات العمل.

مثال 4 من الحياة اليومية مسألة عمل

وظائف في هذه الوظيفة ذات الدوام الجزئي في حديقة الحيوان، يستطيع رشيد تنظيف ساحة الطيور في ساعتين. ويستطيع حسام تنظيف الساحة نفسها في ساعة و 15 دقيقة. كم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

الفهم يستغرق رشيد ساعتين لإكمال العمل ويستغرق حسام $1\frac{1}{4}$ ساعة.

أنت تحتاج إلى إيجاد معدل عمل كل شخص والزمن الإجمالي t المستغرق منهما لإكمال العمل معًا.

التخطيط جد الكسر الذي يعبر عن العمل الذي يقوم به كل شخص في ساعة.

معدل رشيد ← $\frac{1 \text{ عمل}}{2 \text{ ساعة}}=\frac{1}{2}$ عمل لكل ساعة

معدل حُسام ← $\frac{1 \text{ عمل}}{1\frac{1}{4} \text{ ساعة}}$ أو $\frac{1 \text{ عمل}}{\frac{5}{4} \text{ ساعة}}=\frac{4}{5}$ عمل لكل ساعة

بما أن المعدل × الزمن = الكسر المعبر عن العمل المنجز، فاضرب كل معدل في الزمن t لتمثيل كمية العمل المنجز لكل شخص.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل

عملاً واحدًا	يساوي	الكسر المعبر عن عمل حُسام المنجز	زائد	الكسر المعبر عن عمل رشيد المنجز
1	$=$	$\frac{4}{5}t$	$+$	$\frac{1}{2}t$

اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، 10.
$$10\left(\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t\right) = 10(1)$$

خاصية التوزيع
$$10\left(\frac{1}{2}t\right) + 10\left(\frac{4}{5}t\right) = 10$$

بسّط.
$$5t + 8t = 10$$

اجمع الحدود المتشابهة واقسم كل طرف على 13.
$$t = \frac{10}{13}$$

إذًا، سيستغرقان $\frac{10}{13}$ ساعة أو حوالي 46 دقيقة لإنجاز العمل إذا عملا معًا.

التحقق في $\frac{10}{13}$ ساعة، سوف ينجز رشيد $\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{5}{13}$ من العمل وسوف ينجز حُسام $\frac{4}{5} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{8}{13}$ من العمل. معًا، سينجزان $\frac{5}{13} + \frac{8}{13}$ أو عملاً واحدًا كاملاً. إذًا، الإجابة صحيحة. ✓

نصيحة دراسية

الاستنتاج عند حل مسائل العمل، تذكر أن المصطلح الذي يمثل جزءًا من العمل المنجز، يجب أن يكون بوحدة زمنية واحدة.

تمرين موجّه

4. كنس ورق الشجر تستطيع علياء كنس ورق الشجر في ساعتين. ويستغرق ذلك من أخيها زياد 3 ساعات. كم من الوقت سيستغرقان في كنس ورق الشجر إذا عملا معًا؟

يمكن استخدام المعادلات النسبية أيضًا لحل **مسائل المعدل**.

مثال 5 من الحياة اليومية مسألة المعدل

الطائرات **أقلعت طائرة وكانت تطير بمتوسط 772 km/h. بعد 15 دقيقة، غادرت طائرة أخرى واتجهت نحو المدينة نفسها بسرعة 900 km/h. كم من الوقت ستستغرق الطائرة الثانية لاجتياز الطائرة الأولى؟**

دوّن المعلومات التي تعرفها في جدول.

الطائرة	المسافة	السرعة	الزمن
1	d km	772 km	t ساعات
2	d km	900 km	$t - \frac{1}{4}$ ساعة

أقلعت الطائرة 2 بعد 15 دقيقة، أو $\frac{1}{4}$ ساعة بعد الطائرة 1

بما أن كلتا الطائرتين ستكون سافرتا المسافة نفسها عندما تجتاز الطائرة 2 الطائرة 1، فإنه يمكنك كتابة المعادلة التالية.

مسافة الطائرة 1 = مسافة الطائرة 2

المسافة = السرعة × الزمن
$$772 \times t = 900 \times \left(t - \frac{1}{4}\right)$$

خاصية التوزيع
$$772t = (900 \times t) - \left(900 \times \frac{1}{4}\right)$$

بسّط.
$$772t = 900t - 225$$

اطرح $560t$ من كل طرف.
$$-80t = -225$$

اقسم كل طرف على -80.
$$t = 1.75$$

إذًا، ستجتاز الطائرة الثانية الطائرة الأولى بعد 1.75 ساعة.

الربط بالحياة اليومية

تبلغ أطول رحلة جوية تجارية دون توقف 21,600 كيلومتر من مطار هونج كونج في الصين إلى مطار لندن – هيثرو في المملكة المتحدة. واستغرقت الرحلة 22 ساعة و42 دقيقة.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

تمرين موجّه

5. غادرت هدى المنزل وسارت بمعدل 3 km/h. بعد 10 دقائق، غادرت أمها المنزل وسارت بالدراجة بمعدل 10 km/h. فبعد كم دقيقة ستلحق الأم بابنتها؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 1–3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

1. $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x}$
2. $\frac{t+3}{5} = \frac{2t+3}{9}$
3. $\frac{a+3}{a} - \frac{6}{5a} = \frac{1}{a}$
4. $4 - \frac{p}{p-1} = \frac{2}{p-1}$
5. $\frac{2t}{t+1} + \frac{4}{t-1} = 2$
6. $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$

مثال 4

7. **إزالة الأعشاب الضارة** يستطيع سلطان إزالة الأعشاب الضارة بالحديقة في 45 دقيقة. وتستطيع أخته عبير القيام بذلك في 50 دقيقة. فكم سيستغرقان من الوقت لإزالة الأعشاب الضارة بالحديقة إذا عملا معًا؟

مثال 5

8. **تنسيق الحدائق** يملأ أمير دلوًا سعته 13.2 L لري النباتات من صنبور يتدفق منه الماء بمعدل 6.6 L/min. إذا كان سيضيف خرطومًا يتدفق منه الماء بمعدل 5.4 L/min، فكم عدد الدقائق التي سيستغرقها لملء الدلو؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

9. $\frac{8}{n} = \frac{3}{n-5}$
10. $\frac{6}{t+2} = \frac{4}{t}$
11. $\frac{3g+2}{12} = \frac{g}{2}$
12. $\frac{5h}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3h}{8}$
13. $\frac{2}{3w} = \frac{2}{15} + \frac{12}{5w}$
14. $\frac{c-4}{c+1} = \frac{c}{c-1}$
15. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = -1$
16. $\frac{y+4}{y-2} + \frac{6}{y-2} = \frac{1}{y+3}$
17. $\frac{a}{a+3} + \frac{a^2}{a+3} = 2$
18. $\frac{12}{a+3} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{8}{a+3}$
19. $\frac{3n}{n-1} + \frac{6n-9}{n-1} = 6$
20. $\frac{n^2-n-6}{n^2-n} - \frac{n-5}{n-1} = \frac{n-3}{n^2-n}$

مثال 4

21. **الطلاء** إذا كان سعيد يستغرق 3 ساعات لطلاء جانب واحد من السياج. ويستغرق ذلك من طارق 5 ساعات. فكم من الوقت سيستغرق ذلك منهما إذا عملا معًا؟

22. **غسل الصحون** إذا كان عبيد يعمل غاسلاً للصحون ويستطيع غسل 500 صحن في ساعتين و 15 دقيقة. ويستطيع عبد الرحمن إنهاء 500 صحن في 3 ساعات. فكم سيستغرقان من الوقت لإنهاء كل الصحون إذا عملا معًا؟

مثال 5

23. **الثلج** إذا كان الفندق به جهازان لصنع الثلج في المطبخ. فكم عدد الساعات التي سيستغرقها الجهازان لصنع 60 kg من الثلج؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

24. **قيادة الدراجات** إذا اتجه قائدا دراجتين كلٌّ في اتجاه معاكس للآخر في مسار دائري طوله 5.6 km. وبدئا في الوقت نفسه. وأكمل قائد الدراجة الأول المسار في 22 دقيقة وقائد الدراجة الثاني في 28 دقيقة. ففي أي وقت تجاوز كلٌّ منهما الآخر؟

حاسبة التمثيل البياني **بالنسبة لكل دالة، a) صِف شكل التمثيل البياني، b) استخدم التحليل إلى العوامل لتحويل الدالة لأبسط صورة، c) جد أصفار الدالة.**

25. $f(x) = \frac{x^2-x-30}{x-6}$
26. $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x+2}$
27. $f(x) = \frac{x^3+6x^2+12x}{x}$

28. **التبرير** إذا كان عبد الكريم يستطيع طلاء منزل مساحته قياسية في حوالي 5 أيام. واستأجر مساعدين اثنين لمهمته الأخيرة. فبأي معدل يجب على هذين المساعدين العمل لصالح عبد الكريم للوفاء بالموعد النهائي البالغ يومين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. الطائرات إذا كانت الرياح المعاكسة تهب في اتجاه الطائرة وتقلل من سرعتها الإجمالية، في حين تدفع الرياح الخلفية الطائرة وتزيد من سرعتها الإجمالية. ليكن w يساوي سرعة الرياح، و r يساوي السرعة التي حددها الطيار، و s يساوي السرعة الإجمالية.

a. أكتب معادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح المعاكسة ومعادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح الخلفية.

b. استخدم قاعدة المعدل لكتابة معادلة للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح المعاكسة ومعادلة أخرى للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح الخلفية. ثم حل كل معادلة لإيجاد الزمن بدلاً من المسافة.

30. كوكتيل العصائر إذا كان بائع عصائر الفاكهة لديه 3 لترات من عصير الأناناس ولتران من عصير البرتقال. وتريد فتحية إضافة المزيد من عصير البرتقال بحيث يكون 60% من كوكتيل عصير الفاكهة من عصير البرتقال. ليكن x يساوي لترات عصير البرتقال التي تريد إضافتها.

a. انسخ الجدول التالي وأكمله.

العصير	لترات عصير البرتقال	إجمالي لترات العصير	النسبة المئوية لعصير البرتقال
الكوكتيل الأصلي		5	
الكوكتيل النهائي	$x + 2$		0.6

b. أكتب معادلة وحلها لإيجاد لترات عصير البرتقال المطلوب إضافتها.

31. السكن الجماعي إذا كان عدد الساعات h المستغرقة في تنظيف السكن الجماعي يتغير عكسيًا مع عدد الأشخاص الذين ينظفونه c ويتغير طرديًا مع عدد الأشخاص الذين يعيشون هناك p.

a. فأكتب معادلة توضح الارتباط بين h، و c، و p. (إرشاد: قم بتضمين الثابت k.)

b. إذا كان تنظيف السكن الجماعي يستغرق 8 ساعات من 5 أشخاص عندما يوجد 100 شخص ساكن. فكم سيستغرق تنظيف السكن إذا كان يوجد 10 أشخاص ينظفون ولا زال عدد الأشخاص الذين يعيشون في السكن كما هو؟

حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

32. $\frac{4b + 2}{b^2 - 3b} + \frac{b + 2}{b} = \frac{b - 1}{b}$ 1

33. $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = 3$

34. $\frac{y^2 + 5y - 6}{y^3 - 2y^2} = \frac{5}{y} - \frac{6}{y^3 - 2y^2}$

35. $\frac{x - \frac{6}{5}}{x} - \frac{x - 10\frac{1}{2}}{x - 5} = \frac{x + 21}{x^2 - 5x}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. التحدي حُل المعادلة: $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{(x + 1)(x - 2)}$.

37. التبرير ما وجه الارتباط بين القيمة المستبعدة من التعبير النسبي والحل الدخيل للمعادلة النسبية المناظرة؟ اشرح.

38. الكتابة في الرياضيات لماذا يجب عليك التحقق من حلولك للمعادلات النسبية؟

39. الفرضيات جد مثالاً مضاداً للعبارة التالية.

حل المعادلة النسبية لا يمكن أبدًا أن يكون صفرًا.

40. الكتابة في الرياضيات اشرح خطوات حل معادلة نسبية لا تكون عبارة عن تناسب.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

41. يستغرق علي 4 ساعات في بناء سياج. وإذا استأجر عمر ليساعده، فسوف يمكنهما إنجاز العمل في 3 ساعات. فإذا بنى عمر السياج نفسه بمفرده، فكم من الوقت سيستغرق منه ذلك؟

A $1\frac{5}{7}$ ساعة **C** 8 ساعات

B $3\frac{2}{3}$ ساعات **D** 12 ساعة

42. في سباق 1000 متر، أكمل عدنان 35 مترًا قبل منصور و 53 مترًا قبل أيوب. فما المسافة التي سبق منصور بها عدنان؟

F 18 m **G** 35 m **H** 53 m **J** 88 m

43. تم صب عشرين لترًا من عصير الليمون في وعائين لهما حجم مختلف. عبّر عن كمية عصير الليمون التي تم صبها في الوعاء الأصغر بدلالة g، وهي الكمية التي تم صبها في الوعاء الأكبر.

A $g + 20$ **C** $g - 20$

B $20 + g$ **D** $20 - g$

44. الإجابة الشبكية صالة ألعاب رياضية بها أقراص ذات وزن 2 kg و 5 kg. ويوجد أربعون قرصًا بشكل إجمالي. فإذا كان الوزن الإجمالي لأقراص الكيلوجرامين هو نفسه الوزن الإجمالي لأقراص 5 kg. فكم عدد أقراص الـ 2 kg الموجودة؟

مراجعة شاملة

45. التعداد السكاني يشهد التعداد السكاني في دولة ما تناقصًا سنويًا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

46. الطماطم يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطماطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبذور تنتج عبوات بذور لـ 200 صنف من الطماطم. فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بذورًا لها؟

47. القيادة يجب أن يبقى ضغط الإطارات في حدود رطلين للبوصة المربعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مدى قيم الضغط المقبولة؟

عبّر عن كل عدد بالصيغة العلمية.

48. 12,300 **49.** 0.0000375 **50.** 1,255,000

51. المعرفة المالية إذا كان مع محمد 13 AED لطلب بيتزا. وتبلغ تكلفة البيتزا 7.50 AED زائد 1.25 AED لكل إضافة. وهو يعتزم دفع 15% من التكلفة الإجمالية بقشيشًا. أكتب متباينة وحلها لإيجاد عدد الإضافات التي يمكن أن يطلبها.

حُـلّ كل متباينة. تحقق من صحة الحل.

52. $\frac{b}{10} \leq 5$ **53.** $-7 > -\frac{r}{7}$ **54.** $\frac{5}{8}y \geq -15$

مراجعة المهارات

حدد احتمال وقوع كل حدث إذا قمت باختيار كرة من حقيبة تحتوي على 9 كرات حمراء، و 6 كرات زرقاء، و 5 كرات صفراء.

55. P(زرقاء) **56.** P(حمراء) **57.** P(ليست صفراء)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية عن طريق التمثيل البياني، واستخدام الجداول وأحد النظم الجبرية الحاسوبية (CAS).

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

للحل بالتمثيل البياني، مثّل بيانيًا كلا طرفي المعادلة وحدد موقع نقطة (نقاط) التقاطع.

النشاط 1 حل المعادلة النسبية بالتمثيل البياني

حُـلّ المعادلة: $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$ بالتمثيل البياني.

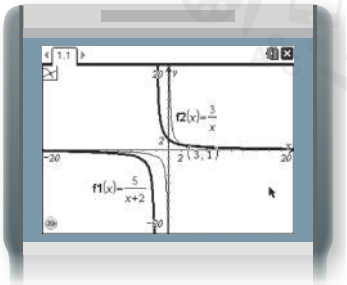
الخطوة 1 أضف صفحة **Graphs** جديدة.

الخطوة 2 استخدام خيار **Window Settings** من قائمة **Window/Zoom** لضبط النافذة إلى 20− إلى 20 بالنسبة لكل من x و y. اضبط المقياسين إلى 2.

الخطوة 3 أدخل $\frac{5}{x+2}$ إلى $f_1(x)$ و $\frac{3}{x}$ إلى $f_2(x)$.

الخطوة 4 غير سُمك التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ عن طريق تحديد التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ وخيار **ctrl menu** **Attributes**.

الخطوة 5 استخدم أداة **Intersection Point(s)** من قائمة **Points & Lines** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. حدد التمثيل البياني لـ **f1(x)** enter ثم التمثيل البياني لـ **f2(x)** enter.



[−20, 20] scl: 2 بمعدل [−20, 20] scl: 2

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند النقطة (3, 1). وهذا يعني أن $\frac{5}{x+2}$ و $\frac{3}{x}$ كليهما يساويان 1 عندما يكون $x = 3$. إذًا، حل $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ هو $x = 3$.

تمارين

استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل كل معادلة.

1. $\frac{5}{x} + \frac{4}{x} = 10$
2. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$
3. $\frac{6}{x} + \frac{3}{2x} = 12$
4. $\frac{4}{x} + \frac{3}{4x} = \frac{1}{8}$
5. $\frac{4}{x} + \frac{x-2}{2x} = x$
6. $\frac{3}{3x-2} + \frac{5}{x} = 0$
7. $\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{2}{x}$
8. $\frac{x}{x+2} + x = \frac{5x+8}{x+2}$
9. $\frac{1}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{4x-3}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} = 6$

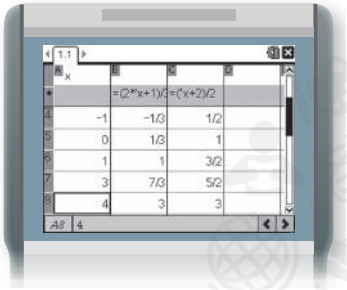
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية *تابع*

النشاط 2 حل المعادلة النسبية باستخدام جدول

حُـلّ المعادلة: $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ باستخدام جدول.



الخطوة 1 أضف صفحة **Lists & Spreadsheet** جديدة.

الخطوة 2 قم بتسمية العمود A بـ x. أدخل القيم من -4 إلى 4 في الخلايا A1 إلى A9.

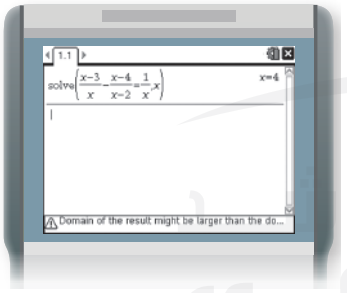
الخطوة 3 في العمود B في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيسر من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. في العمود C في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيمن من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. حدد **Variable Reference** عندما يُطلب منك.

مرّر حتى ترى أين تتساوى القيم في العمودين B و C. يحدث هذا عند $x = 4$.
لذا، حل $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ هو 4.

يمكنك استخدام نظام جبري حاسوبي (CAS) أيضًا لحل المعادلات النسبية.

النشاط 3 حل المعادلة النسبية باستخدام نظام جبري حاسوبي

حُـلّ المعادلة: $\frac{x-3}{x} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{x}$ باستخدام نظام جبري حاسوبي (CAS).



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** جديدة.

الخطوة 2 لحل المعادلة، حدد أداة **Solve** من القائمة **Algebra**. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة مع وضع ثنائيات الحدود بين الأقواس.
أدخل = والطرف الأيمن من المعادلة.
ثم أكتب فاصلة وأتبعها بـ x، ثم اضغط **enter**.

سيظهر الحل، 4.

تمارين

حُـلّ كل معادلة مما يلي باستخدام جدول أو نظام جبري حاسوبي.

11. $\frac{2}{x} + \frac{2+x}{2} = \frac{x+3}{2}$

12. $\frac{4}{x-2} = -\frac{1}{x+3}$

13. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 0$

14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 0$

15. $\frac{2}{x+4} + \frac{4}{x-1} = 0$

16. $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{4} = 2x$

17. $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{2} = x$

18. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x}$

19. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = x$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

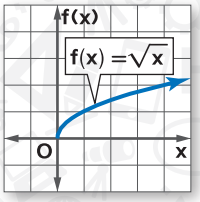
دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

دوال الجذر التربيعي (الدرس 3-1)

- تشتمل دالة الجذر التربيعي على الجذر التربيعي لمتغير.
- الدالة الأصلية لمجموعة دوال الجذر التربيعي تكون $f(x) = \sqrt{x}$.



المعادلات الجذرية (الدرس 3-2)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما
- لا يوجد مجذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
- لا يوجد أي مجذور مشتمل على كسور.
- لا يظهر أي مجذور في مقام كسر.

التغير العكسي (الدرس3-3)

- يمكنك استخدام $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لحل المسائل المشتملة على تغير عكسي.

الدوال النسبية (الدرس 3-4)

- القيم المستبعدة هي قيم متغير ينتج عنها مقام صفري.
- إذا حدثت خطوط مقاربة رأسية، فسوف تقع عند قيم مستبعدة.

المعادلات النسبية (الدرس 3-5)

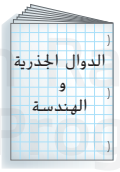
- استخدم الضرب التبادلي لحل المعادلات النسبية ذات كسر واحد على كل طرف من طرفي علامة يساوي.

المفردات الأساسية

خط تقارب asymptote	دالة جذرية radical function
مغلقة closed	مجذور radicand
مرافق conjugate	مسألة معدل rate problem
قيمة مستبعدة excluded value	إنطاق المقام rationalize the denominator
حل دخيل extraneous solution	دالة نسبية rational function
تغير عكسي inverse variation	معادلة نسبية rational equation
قاعدة ناتج الضرب product rule	دالة الجذر التربيعي square root function
معادلات جذرية radical equations	مسألة عمل work problem
تعبير جذري radical expression	

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة *صحيحة* أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة أو التعبير أو العدد الذي تحته خط لصياغة جملة صحيحة.

1. التعبيران $12\sqrt{4}$ و $\sqrt{288}$ متكافئان.
2. التعبيران $\sqrt{5} - 2$ و $2 + \sqrt{5}$ مترافقان.
3. في التعبير $-5\sqrt{2}$ ، يكون المجذور هو 2.
4. إذا كان ناتج ضرب متغيرين عبارة عن ثابت غير صفري، فإن العلاقة بينهما تكون تغيرًا عكسيًا.
5. إذا كان المستقيم $x = a$ خطًا تقاربيًا رأسيًا لدالة نسبية، فإذًا تكون a قيمة مستبعدة.
6. القيم المستبعدة من التعبير $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ هي -3 و -2.
7. المعادلة $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$ لها حل دخيل، 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

3-1 دوال الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

8. $y = \sqrt{x} - 3$
9. $y = \sqrt{x} + 2$
10. $y = -5\sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x} - 6$
12. $y = \sqrt{x - 1}$
13. $y = \sqrt{x} + 5$

14. **الهندسة** يمكن استخدام الدالة $s = \sqrt{A}$ لإيجاد طول ضلع المربع المُعطى مساحته. استخدم هذه الدالة لاكتشاف طول ضلع مربع مساحته 90 سنتيمترًا مربعًا. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

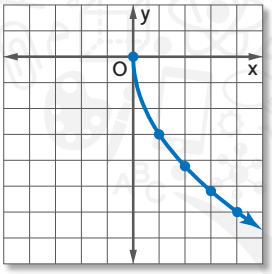
مثال 1

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولاً. اختر قيمًا غير سالبة لـ x.

x	0	1	2	3	4
y	0	−3	≈−4.2	≈−5.2	−6

عيّن النقاط وارسم منحنى منتظمًا.



التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ تمدد رأسيًا وانعكس على المحور x.

المجال هو $\{x | x \geq 0\}$.

المدى هو $\{y | y \leq 0\}$.

3-2 المعادلات الجذرية

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

34. $10 + 2\sqrt{x} = 0$
35. $\sqrt{5 - 4x} - 6 = 7$
36. $\sqrt{a + 4} = 6$
37. $\sqrt{3x} = 2$
38. $\sqrt{x + 4} = x - 8$
39. $\sqrt{3x - 14} + x = 6$

40. **السقوط الحر** بافتراض عدم وجود مقاومة للهواء، يمكن إيجاد الزمن t بالثواني الذي يستغرقه جسم ما للسقوط من h أمتار، باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{4}}$. إذا قفز لاعب قفز حر من طائرة وكان في سقوط حر لمدة 10 ثوانٍ قبل فتح المظلة، فكم عدد أمتار السقوط الحر؟

مثال 2

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$.

$\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7x + 4} = 23$	اجمع 18 إلى كل طرف.
$(\sqrt{7x + 4})^2 = 23^2$	قم بتربيع كل طرف.
$7x + 4 = 529$	بسّط.
$7x = 525$	اطرح 4 من كل طرف.
$x = 75$	اقسم كل طرف على 7.

المعادلة الأصلية

$\sqrt{7(75) + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	$x = 75$
$\sqrt{525 + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اضرب.
$\sqrt{529} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اجمع.
$23 - 18 \stackrel{?}{=} 5$	بسّط.
$5 = 5$ ✓	صحيح.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درس بدرس

3-3 التغير العكسي

جد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

41. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 1$، فجد x عندما يكون $y = 12$

42. إذا كان $y = -1$ عندما يكون $x = -3$، فجد y عندما يكون $x = -9$

43. إذا كان $y = 1.5$ عندما يكون $x = 6$، فجد y عندما يكون $x = -16$

44. الفيزياء إذا كان شخص وزنه 61 كيلوجرامًا يجلس على بعد 1.5 m من مركز أرجوحة. فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 49 كيلوجرامًا أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

مثال 3

إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 28$ عندما يكون $x = 42$، فجد y عندما يكون $x = 56$.

ليكن $x_1 = 42$، و $x_2 = 56$، و $y_1 = 28$. حل لإيجاد y_2.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ تناسب للتغير العكسي

$\frac{42}{56} = \frac{y_2}{28}$ التعويض

$1176 = 56y_2$ الضرب التبادلي.

$21 = y_2$

لذا، $y = 21$ عندما يكون $x = 56$.

3-4 الدوال النسبية

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

45. $y = \frac{1}{x - 3}$

46. $y = \frac{2}{2x - 5}$

47. $y = \frac{3}{3x - 6}$

48. $y = \frac{-1}{2x + 8}$

49. حفل البيتزا طلبت هيام بيتزا ومياهًا غازية للمجموعة الدراسية لديها مقابل 38 AED. التكلفة لكل شخص y تُعطى بالمعادلة $y = \frac{38}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص في المجموعة الدراسية. مثّل الدالة بيانيًا واذكر الخطوط المقاربة.

مثال 4

اذكر القيمة المستبعدة من الدالة $y = \frac{1}{4x + 16}$.

اجعل المقام يساوي الصفر.

$4x + 16 = 0$

$4x + 16 - 16 = 0 - 16$ اطرح 16 من كل طرف.

$4x = -16$ بسّط.

$x = -4$ اقسم كل طرف على 4.

3-5 المعادلات النسبية

حُلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

50. $\frac{5n}{6} + \frac{1}{n - 2} = \frac{n + 1}{3(n - 2)}$

51. $\frac{4x}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7x}{12} - 14$

52. $\frac{11}{2x} + \frac{2}{4x} = \frac{1}{4}$

53. $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$

54. $\frac{1}{n - 2} = \frac{n}{8}$

55. الطلاء إذا كانت وفاء تستطيع طلاء غرفة في 6 ساعات. وتستطيع هنا طلاء الغرفة في 4 ساعات. فكم ستستغرقان من الوقت لطلاء الغرفة إذا عملتا معًا؟

مثال 5

حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$x(x + 3)\left(\frac{3}{x(x + 3)}\right) + x(x + 3)\left(\frac{x + 2}{x + 3}\right) = x(x + 3)\left(\frac{1}{x}\right)$

$3 + x(x + 2) = 1(x + 3)$

$3 + x^2 + 2x = x + 3$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ أو $x = -1$

الحل هو -1، ويوجد حل دخيل يساوي 0.

Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الوحدة 3 تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

1. $y = -\sqrt{x}$
2. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$
3. $y = \sqrt{x} + 5$
4. $y = \sqrt{x + 4}$

5. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما محيط دائرة مساحتها $64\ cm^2$؟

A $64\ cm$

B $8\ cm$

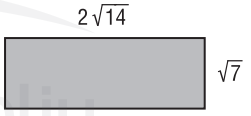
C $32\ cm$

D $16\ cm$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $5\sqrt{36}$
7. $\frac{3}{1 - \sqrt{2}}$
8. $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$
9. $3\sqrt{6}(5\sqrt{2})$

10. **اختيار من متعدد** جد مساحة المستطيل.



F $7\sqrt{2}$

G 14

H $14\sqrt{2}$

J $98\sqrt{2}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

11. $\sqrt{10x} = 20$

12. $\sqrt{4x - 3} = 6 - x$

13. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة يبلغ حجمها حوالي $2564.7\ m^3$. يمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. إذا كان الارتفاع $21\ cm$ ، فجد نصف قطر الحاوية.

14. **حدد ما إذا كان كل جدول يعبر عن تغير عكسي. اشرح.**

x	y
2	10
4	12
8	14

جد الحل. افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*.

15. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 9$، فجد x عندما يكون $y = 1$

16. إذا كان $y = 2$ عندما يكون $x = 0.5$، فجد y عندما يكون $x = 3$.

افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*. أكتب معادلة تغير عكسي تربط بين *x* و *y*.

17. $y = 2$ عندما يكون $n\ x = 8$

18. $y = -3$ عندما يكون $x = 1$

19. **اختيار من متعدد** إذا كان حميد يستطيع إزالة الثلج من الممر في 3 ساعات، ويستطيع حميد القيام بذلك في ساعتين. فكم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

F 6 ساعات

G 5 ساعات

H $\frac{3}{2}$ ساعة

J $\frac{6}{5}$ ساعة

20. **الطلاء** إذا كان مازن يستطيع طلاء جدار قياسه $60\ ft^2$ مربعًا في 40 دقيقة. وإذا عمل مع صديقه جمال، فإنهما يستطيعان طلاء الجدار في 25 دقيقة. فكم سيستغرق جمال من الوقت لإكمال العمل بمفرده؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية

رسم صورة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل تصور كيفية حل المسألة إذا رسمت صورة أولاً. يمكنك رسم الصورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار الخاصة بك (إذا كان مسموحًا بذلك). ولكن انتبه ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما الكمية المجهولة التي يتعيّن عليّ الحلّ لإيجادها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ميّز الصورة بالأسماء بعناية. احرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك في تمثيل حالة المسألة بمعادلة. ثم حل المعادلة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

سلم طوله 5.5 m يستند على بناء. من أجل الثبات، يجب أن تكون قاعدة السلم بعيدة 100 cm عن الجدار. فما الارتفاع الذي يصل السلم إليه على الجدار؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

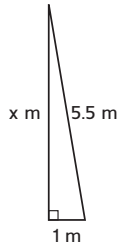
اقرأ نص المسألة بعناية. أنت تعرف ارتفاع السلم المستند على المبنى وتعرف أن قاعدة السلم يجب أن تكون بعيدة 100 cm عن الجدار. وأنت تحتاج إلى إيجاد الارتفاع الذي يصل إليه السلم على الجدار.

مثال على إجابة من نقطتين:

حوّل جميع القياسات إلى الأقدام أولاً.

$1\text{ m} = 100\text{ cm}$

استخدم مثلثًا قائم الزاوية لإيجاد مدى الارتفاع الذي يبلغه السلم.
ارسم مثلثًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.



أنت تعرف قياسي إحدى الساقين والوتر، وتحتاج إلى معرفة طول الساق الأخرى.
إذًا، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس.

$$5.5^2 = 1^2 + b^2$$
$$30.25 = 1 + b^2$$
$$29.25 = b^2$$
$$\pm 5.4 = b$$
$$5.4 \approx b$$

$1\text{ m} = 100\text{ cm}$

يصل السلم إلى حوالي 5.4 m.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	الدرجة
الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	0

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

1. بناء يسقط ظلاً طوله 4.6 m، بينما لوحة إعلانات تسقط ظلاً طوله 1.4 m. فإذا كانت لوحة الإعلانات ارتفاعها 7.9 m، فما ارتفاع البناء؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

2. مركبة فضائية تم توجيهها نحو القمر ولكنها انحرفت بمعدل 1.2° عن مسارها المقصود. وتبعد المسافة من الأرض إلى القمر حوالي 386,200 km. فإذا لم يعد القائد بالمركبة الفضائية إلى مسارها، فما المسافة التي ستبعدها في انحرافها عن مكان هبوطها المقصود؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Learning Program
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي، الوحدات من 1 إلى 3

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم أكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. في كل عام يتولى نادٍ محلي رعاية دورة التنس. ويبدأ اللعب بـ 256 مشاركًا. وخلال كل جولة، يتم إزالة نصف اللاعبين. فكم عدد اللاعبين الذين سيتبقون بعد 6 جولات؟

A 128

B 64

C 16

D 4

2. جد قيمة $\frac{5^5 - 5^6}{4}$.

F 5^6

G 5^5

H $\frac{5}{4}$

J $\frac{25}{4}$

3. أي من الأعداد التالية أصغر من الصفر؟

A 1.03×10^{-21}

B 7.5×10^{2}

C 8.21543×10^{10}

D لا شيء مما سبق

4. أكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع بميل $\frac{9}{10}$ والمقطع مع المحور y عند 3.

F $y = 3x + \frac{9}{10}$

G $y = \frac{9}{10}x + 3$

H $y = \frac{9}{10}x - 3$

J $y = 3x - \frac{9}{10}$

5. إذا كان بلال يلعب الألعاب في مركز ترفيهي للعائلات. وربح 38 بطاقة جائزة حتى الآن. فكم عدد البطاقات الإضافية التي يحتاج إلى الفوز بها ليضع نفسه في فئة الجائزة الذهبية؟

عدد البطاقات	فئة الجائزة
1-20	برونزية
21-40	فضية
41-60	ذهبية
61-80	بلاتينية

F $2 \le t \le 22$

G $3 \le t \le 22$

H $1 \le t \le 20$

J $3 \le t \le 20$

6. أي مما يلي هي معادلة المستقيم العمودي على $4x - 2y = 6$ والمار بالنقطة $(4, -4)$؟

F $y = -\frac{3}{4}x + 3$

G $y = -\frac{3}{4}x - 1$

H $y = -\frac{1}{2}x - 4$

J $y = -\frac{1}{2}x - 2$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

أكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. الإجابة الشبكية اشترى أ. عبد الله إجمالي 9 تذاكر إلى حديقة الحيوان. واشترى تذاكر أطفال بسعر AED 6.50 وتذاكر بالغين بسعر AED 9.25 لكل فرد. فإذا أنفق AED 69.50 إجمالاً، فكم عدد تذاكر البالغين التي اشتراها أ. عبد الله؟

8. ما مجال العلاقة التالية؟
$\{(2, -1), (4, 3), (7, 6)\}$

9. أضاف رشيد 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص به، ليصبح إجمالي الأناشيد أكثر من 84 نشيدًا. ارسم خط أعداد يمثل العدد الأصلي للأناشيد التي كانت على مشغل الوسائط الرقمي الخاص برشيد.

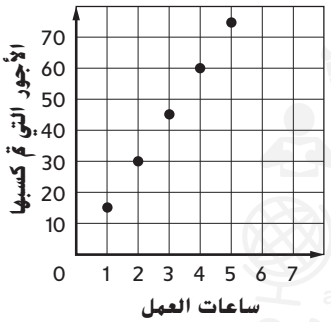
10. اشترى خليفة لوحة نادرة في عام 1995 مقابل AED 14,200. وبحلول 2003، أصبحت قيمة اللوحة AED 17,120. بافتراض وجود علاقة خطية، أكتب دالة في صيغة الميل والمقطع تمثل قيمة اللوحة V بعد t أعوام.

11. أنفق أحمد AED 24.50 على شراء الفول السوداني والجوز من أجل حفل عشاء. واشترى 1.5 kg من الفول السوداني زيادة عن الجوز. فكم عدد كيلوجرامات الفول السوداني والجوز التي اشتراها؟

ناتج الضرب	السعر لكل kg
فول سوداني p	AED 3.80
كاجو c	AED 6.90
جوز w	AED 5.60

12. الإجابة الشبكية اشترت موزة سيارة منذ عدة أعوام مضت بسعر AED 21,459. وتعرضت السيارة للإهلاك بمعدل 15% سنويًا. فكم بلغت قيمة السيارة بعد 5 أعوام؟ قرّب إجابتك إلى أقرب درهم.

13. الإجابة الشبكية المبلغ الذي يجنيه ناصر يتغير طرديًا مع عدد الساعات التي يعمل فيها كما هو مبين في التمثيل البياني. فكم المبلغ الذي سيحققه مقابل عمل 40 ساعة الأسبوع المقبل؟ أكتب الإجابة بالدولارات.



الإجابة الموسعة

أكتب إجاباتك على ورقة. أكتب الحل هنا.

14. الأجرة الثابتة لركوب السيارة الأجرة هي AED 3 زائد AED 0.35 لكل km. دفعت ميسون AED 10 مقابل توصيلها لمسافة m km.

الجزء A أكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد m. أكتب الحل هنا.

الجزء B استخدم المعادلة المستمدة من الجزء A لاكتشاف عدد الكيلومترات التي ركبت من أجلها ميسون. أكتب الحل هنا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education