

الوحدة (4) الهندسة الإحداثية



البرهان الإحداثي

- أوظف الهندسة الإحداثية لبرهنة نظريات هندسية.



البعد بين نقطة ومستقيم

- أجد البعد بين نقطة ومستقيم.
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين.



المسافة في المستوى الإحداثي

- أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- أجد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

المسافة في المستوى الإحداثي

1

- النتائج: • أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
• أجد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

نشاط 1 المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

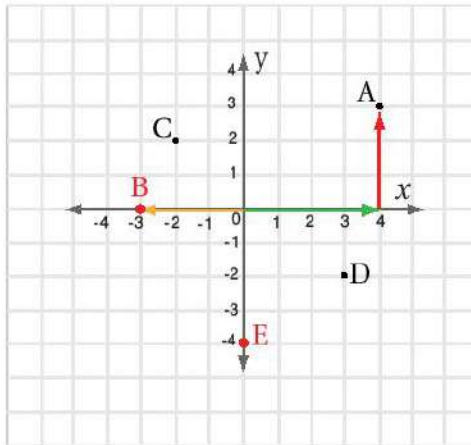


أولاً: تمثيل النقاط على المستوى الإحداثي

أتذكرُ
كل نقطة في المستوى الإحداثي يتمّ تحديدها
بزوج مرتب.

(x, y)

الإحداثي x الإحداثي y



1) أمثل الأزواج المرتبة على المستوى الإحداثي المجاور

• A (4,3)

أبدأ من نقطة الأصل، وأتجه إلى العدد 4 على محور x الموجب، ثم أتجه ثلاث وحدات 3 إلى الأعلى لأصل إلى النقطة A

• B (-3, 0)

أبدأ من نقطة الأصل، وأتجه إلى العدد 3 على محور x السالب، ولا أرفع إلى الأعلى أو أنزل إلى الأسفل، لأن الإحداثي y يساوي 0

• F (-1, -2):

2) أجد إحداثيات كل من النقاط الآتية الممثلة على المستوى الإحداثي المجاور :

1 النقطة C : تقابل العدد -2 على المحور x وتقابل العدد 2 على المحور y ، إذن

الزوج المرتب الذي يحدد موقع النقطة هو (-2, 2)

2 النقطة D: هي (3,.....)

3 النقطة E: هي (.....,.....)

ثانياً: المسافة بين نقطتين على خط الأعداد

- يستعمل الرمز $\overline{AB}$ ليدل على القطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها A ونهايتها B، ويرمز إلى طولها بالرمز AB
- القيمة المطلقة للعدد هي المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد، ويرمز إليها بالرمز $| \quad |$

1 $DE = |2| = 2$

تمثل المسافة بين 2 و 0 القيمة المطلقة للعدد 2

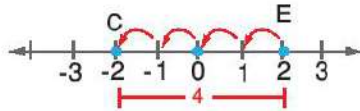
2 $BD = |-5| = 5$

تمثل المسافة بين -5 و 0 القيمة المطلقة للعدد -5

3 $AD = |.....| =$

تمثل المسافة بين -8 و 0 القيمة المطلقة للعدد -8

4 CE



تمثل المسافة بين -2 و 2 عدد الفترات من C إلى E

$= |2 - (-2)| = 4$

وأيضاً تمثل القيمة المطلقة للفرق بين 2 و -2

5 $CB = |-2 - (-5)| = 3$

تمثل المسافة بين -2 و -5 على خط الأعداد

6 $EA:$

تمثل المسافة بين 2 و -8 على خط الأعداد

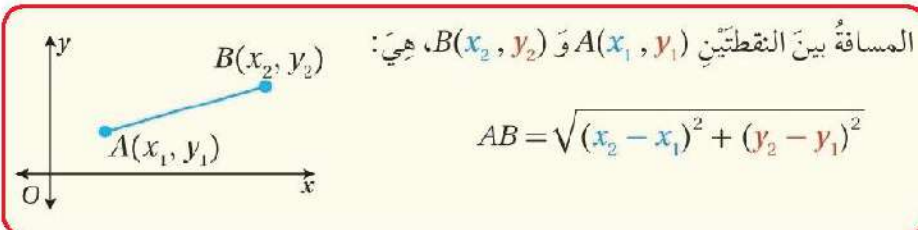
ألاحظ

لإيجاد المسافة بين نقطتين على خط الأعداد، أجد القيمة المطلقة للفرق بين موقع كلٍّ منهما.



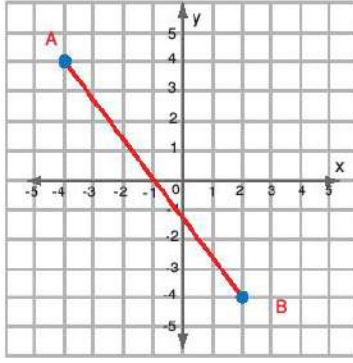
$$AB = |x_2 - x_1| \quad \text{or} \quad AB = |x_1 - x_2|$$

ثالثاً: المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي



المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



(1) أجدُ AB في الشكل المجاور

أجدُ إحداثيات كلٍّ من A و B

$$A = (-4, 4), B = (2, -4)$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-4 - 4)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

أكتبُ صيغة المسافة بين نقطتين

عرضُ إحداثيات النقاط

$$A: (x_1, y_1) = (-4, 4)$$

$$B: (x_2, y_2) = (2, -4)$$

أجدُ مربع كلٍّ عددٍ، ثم أجمعُ

أبسطُ

(2) أجدُ CD ، حيثُ $C(0, -2)$ و $D(-1, -1)$

أكتبُ صيغة المسافة بين نقطتين

أعرضُ إحداثيات النقاط حيثُ

$$D: (x_2, y_2) = (\dots, \dots) \quad C: (x_1, y_1) = (\dots, \dots)$$

أجدُ مربع كلٍّ عددٍ، ثم أجمعُ

أبسطُ

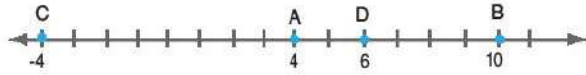
$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2} \\ &= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} \\ &= \sqrt{\quad} \end{aligned}$$

(3) أجدُ EF ، حيثُ $E(-1, -2)$ و $F(2, 2)$



نشاط 2 نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي

أولاً: إيجاد منتصف نقطتين على خط الأعداد



أستعمل خط الأعداد المجاور لأجد كلاً مما يأتي:

1 الوسط الحسابي للنقطتين C, B

صيغة الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{-4 + 10}{2}$$

$$= 3$$

أعوض $B: x_2 = 10, C: x_1 = -4$

أبسط

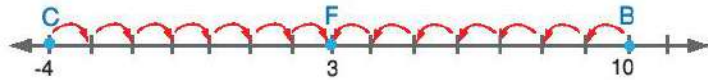
ألاحظ أن F هي منتصف CB

وتساوي الوسط الحسابي للنقطتين C, B

أتذكر

الوسط الحسابي

مجموع القيم
عديدها

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عديدها}}$$


2 إحداثي منتصف D, B

منتصف المسافة، وليكن النقطة E

$$E = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{\dots + \dots}{2}$$

$$= \dots\dots\dots$$

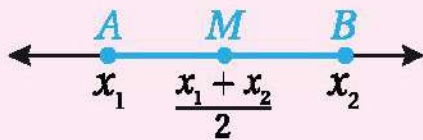
أعوض $D: x_1 = \dots, B: x_2 = \dots$

أبسط

ألاحظ أن E هي منتصف DB وتساوي $\dots\dots\dots$

3 إحداثي منتصف A, B = $\dots\dots\dots$

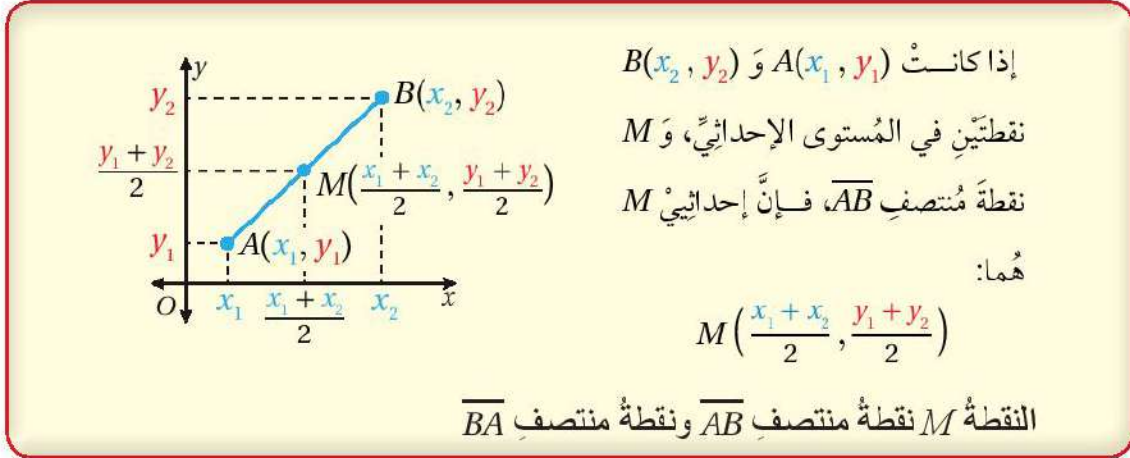
أتعلم



إذا كان موقع النقطة A على خط الأعداد هو x_1 وموقع النقطة B هو x_2 ، وكانت M نقطة منتصف AB ، فإن موقع M هو:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

ثانياً: إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي



(1) أجد إحداثي النقطة M ، التي تمثل منتصف $\overline{AB}$ ، حيث $A(-4, 4)$ ، $B(2, -4)$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$$M\left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{4 + (-4)}{2}\right)$$

$$M(-1, 0)$$

أعرض $B(2, -4)$ ، $A(-4, 4)$

(2) أجد إحداثي النقطة F ، التي تمثل منتصف $\overline{DE}$ ، حيث $D(2, 6)$ ، $E(-2, 3)$

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$$F\left(\frac{... + (-2)}{2}, \frac{6 + ...}{2}\right)$$

أعرض $E(..., 3)$ ، $D(2, ...)$

(3) إذا كانت النقطة N منتصف $\overline{DL}$ ، وكانت $N(0, -2)$ ، $L(-4, 6)$ ، فأجد إحداثي النقطة D

أقيم ذاتي: أرسّم الوجه الذي يُعبّر عن درجة رضائي عن أدائي وتفاعلي في أثناء الأنشطة داخل () .

😊 أستطيع حلّ الأنشطة من دون مساعدة. أتوجه إلى كتابي وأكمل حلّ "أدرب" وأحلّ المسائل.	😐 أستطيع حلّ الأنشطة مع بعض المساعدة. أسأل زميلًا أتقن المهارة.	😞 لم أتمكن من حلّ الأنشطة. أستعين بزميل أتقن المهارة أو معلمي، ويمكن أن أبحث عن مصدر آخر للمعرفة.
• أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي () .	• أجد منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي () .	

البعد بين نقطة ومستقيم

2

- النتائج: • أجد البعد بين نقطة ومستقيم .
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين .



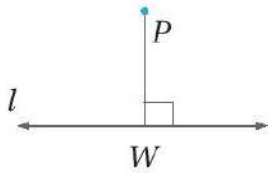
نشاط 1 البعد بين نقطة ومستقيم والبعد بين مستقيمين متوازيين

أولاً : البعد بين نقطة ومستقيم

البعد بين المستقيم l ، الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$ ، والنقطة $P(x_1, y_1)$ تُعطى بالصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بشرط ألا تكون قيمتا A و B معاً صفرًا.



(1) أجد البعد بين النقطة $P(2, -4)$ و المستقيم L الذي معادلته $3y = 4x + 2$

$$Ax + By + c = 0$$

$$3y = 4x + 2$$

$$4x - 3y + 2 = 0$$

$$A = 4, B = -3, C = 2$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|4(2) - 3(-4) + 2|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}}$$

$$\frac{22}{5} = 4.4$$

الخطوة (1) أكتب المعادلة على الصورة

معادلة المستقيم المعطى

كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By + c = 0$

إيجاد قيم A, B, C

الخطوة (2) أجد البعد بين النقطة والمستقيم

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

أعرض $A = 4, B = -3, C = 2$

$$(x_1, y_1) = (2, -4)$$

إنّ، البعد يساوي 4.4 وحدة طول.

(2) أجد البعد بين النقطة $L(1, -4)$ والمستقيم L الذي معادلته $y = 2$

الخطوة (1) أكتب المعادلة على الصورة $Ax + By + c = 0$

معادلة المستقيم المعطى

كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By + c = 0$

أجد قيم A, B, C

الخطوة (2) أجد البعد بين النقطة والمستقيم

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$y = 2$$

.....

$$A = \dots, B = \dots, C = \dots$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|\dots + \dots + \dots|}{\sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2}}$$

$$= \frac{|\dots|}{\sqrt{\dots}} = \dots$$

$$A = \dots, B = \dots, C = \dots \text{ أعرض}$$

$$(x_1, y_1) = (1, -4)$$

إن، البعد يساوي وحدة طول

(3) أجد البعد بين النقطة $P(0, 2)$ والمستقيم L الذي معادلته $8y = 6x - 3$

ثانياً: البعد بين مستقيمين متوازيين

(1) أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين L و W ، حيث:

$$W: 4x + 3y + 8 = 0, L: 4x + 3y + 3 = 0$$

الخطوة (1) أجد إحداثي نقطة تقع على أحد المستقيمين

ولتكن النقطة P تقع على المستقيم L

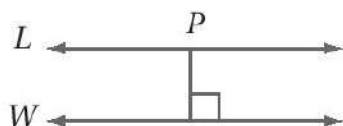
أفرض أي قيمة للمتغير x

أعرض $x = 0$ بمعادلة L

أطرح 3 من طرفي المعادلة

أقسم 3 على طرفي المعادلة

إن، تقع النقطة $P(0, -1)$ على المستقيم L



$$4x + 3y + 3 = 0$$

$$x = 0$$

$$0 + 3y + 3 = 0$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

الخطوة (2) أجد البعد بين النقطة p والمستقيم W الذي يمثل البعد بين L و W

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

أستخدم صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$d = \frac{|4(0) + 3(-1) + 8|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}}$$

أعوض $A = 4, B = 3, C = 8$

$$(x_2, y_2) = (0, -1)$$

$$d = 1$$

أبسط

إنّ، البعد بين المستقيمين المتوازيين يساوي وحدة طول واحدة.

(2) أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين M و N ، حيث:

$$M: 3x + 4y - 8 = 0, N: 6x + 8y + 8 = 0$$

الخطوة (1) أجد إحداثيي نقطة تقع على أحد المستقيمين

ولتكن النقطة F تقع على المستقيم M

أفرض أي قيمة للمتغير x

إذن تقع النقطة $F(0, \dots)$ على المستقيم M

الخطوة (2) أجد البعد بين النقطة F والمستقيم N التي تمثل المسافة بين M و N

أستخدم صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

أعوض $A = \dots, B = \dots, C = \dots$

$$(x_2, y_2) = (0, 1)$$

(3) أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين H و J ، حيث:

$$H: 9x + 12y = 12, J: 3x + 4y = -11$$

أجد نقطة على أحد المستقيمين وأكتب الآخر بالصيغة العامة

أقيم ذاتي: أرسّم الوجه الذي يُعبّر عن درجة رضائي عن أدائي وتفاعلي في أثناء الأنشطة داخل ().

 أستطيع حلّ الأنشطة من دون مساعدة. أتوجه إلى كتابي وأكمل حلّ "أدرب" وأحلّ المسائل.	 أستطيع حلّ الأنشطة مع بعض المساعدة. أسأل زميلًا أنقذ المهارة.	 لم أتمكن من حلّ الأنشطة. أستعين بزميل أنقذ المهارة أو معلمي، ويمكن أن أبحث عن مصدر آخر للمعرفة.
• أجد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي ().	• أجد البعد بين مستقيمين متوازيين ().	

البرهانُ الإحداثيُّ

3

النتائج: • أوظف الهندسة الإحداثية لبرهنة نظريات هندسية.

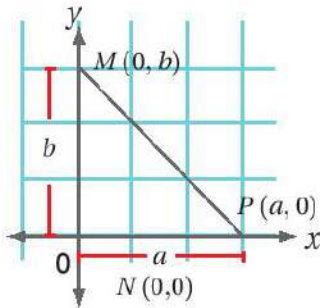


نشاط 1 الهندسة الإحداثية لبرهنة نظريات هندسية

أولاً: تمثيل المضلع في المستوى الإحداثي

أتعلم

لتمثيل مضلع في المستوى الإحداثي، أستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.
الخطوة (1) أجعل نقطة الأصل رأساً للمضلع.
الخطوة (2) أرسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين، ثم أرسم المضلع في الربع الأول إن أمكن.



(1) أرسم المثلث MNP القائم الزاوية في N ، حيث:

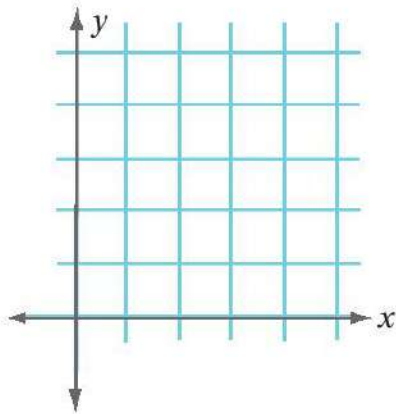
$$MN=b \text{ و } PN=a$$

الخطوة (1) أجعل نقطة الأصل رأساً للمثلث ولتكن النقطة N

الخطوة (2) أرسم المثلث في الربع الأول، حيث

P : على محور x ، وبما أن $PN=a$ فإن $P(a,0)$

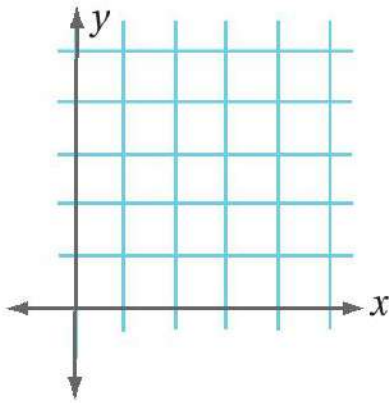
M : على محور y ، بما أن $MN=b$ فإن $M(0,b)$



(2) أرسم متوازي الأضلاع $ABCD$

الخطوة (1) أجعل نقطة الأصل أحد رؤوس متوازي الأضلاع، ولتكن النقطة A .

الخطوة (2) أرسم متوازي الأضلاع في الربع الأول، حيث أرسم $\overline{AB}$ على محور x الموجب.



- B:** على محور x ، وبما أن $AB=a$ فإن $B(a,0)$
- D:** افرض أي قيمة للإحداثي x والإحداثي y $D(e,b)$
- C:** تقاطع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، الإحداثي x هو مجموع الإحداثي x للنقطتين B و D ، والإحداثي y هو نفسه الإحداثي y للنقطة D ، وعليه، فإن $C(a+e,b)$

متوازي الأضلاع

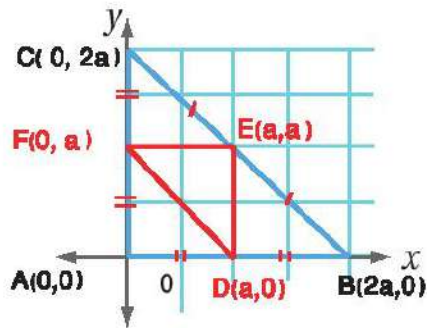
شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويان ومتوازيان.

المستطيل

فيه كل ضلعين متقابلين متساويان وأربع زوايا قائمة.

(3) أرسم المربع $KLMN$ ، الذي طول ضلعه a

ثانيًا: البرهان الإحداثي



(1) أكتب برهاناً إحصائياً لاثبت أن القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكل مثلثاً متطابق الضلعين أيضاً.

الخطوة (1) أرسم المثلث ABC في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات كل رؤوسه باستعمال مضاعفات العدد، وذلك لتسهيل الحسابات عند تطبيق صيغة نقطة المنتصف التي تتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2.

الخطوة (2) أحدد المعطيات والمطلوب

المعطيات $AB = AC$ ، D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$ ، E منتصف $\overline{BC}$

المطلوب: أثبت أن المثلث FDE متطابق الضلعين (أي إن $FE = ED$)

الخطوة (3) البرهان

باستعمال صيغة نقطة المنتصف، فإن إحداثي كل من D, E, F :



$$F \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2a}{2} \right) = (0, a)$$

إحداثي النقطة F

$$D \left(\frac{0+2a}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (a, 0)$$

إحداثي النقطة D

$$E \left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2a+0}{2} \right) = (a, a)$$

إحداثي النقطة E

أستعمل صيغة المسافة بين نقطتين فأجد ED, FD, FE

$$FE = \sqrt{(0-a)^2 + (a-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

طول FE

$$ED = \sqrt{(a-a)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

طول ED

ألاحظ في المثلث أن $FE = ED$ ، متطابق الضلعين.

(2) أكتب برهاناً إحداثياً لأثبت أنه: إذا كان الشكل الرباعي

مستطيلاً فإن قطريه متطابقان.

الخطوة (1) أرسم المستطيل $ABCD$ في المستوى الإحداثي

وأحدد إحداثيات كل رؤوسه، (انظر الشكل).

الخطوة (2) أحدد المعطيات والمطلوب

المعطيات: $AB = CD, AD = CB$

المطلوب: $AC = BD$

الخطوة (3) البرهان

$$AC = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2} =$$

$$DB = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2} =$$

ألاحظ:

أقيم ذاتي: أرسم الوجه الذي يُعبّر عن درجة رضائي عن أدائي وتفاعلي في أثناء الأنشطة داخل ().

😊 أستطيع حل الأنشطة من دون مساعدة. أتوجه إلى كتلي وأكمل حل "أندرب" وأحل المسائل.	😐 أستطيع حل الأنشطة مع بعض المساعدة. أسأل زميلاً أتقن المهارة.	😞 لم أتمكن من حل الأنشطة. أستعين بزميل أتقن المهارة أو معلمي، ويمكن أن أبحث عن مصدر آخر للمعرفة.
• أكتب برهاناً إحداثياً لبرهنة نظريات هندسية ().	• أرسم مضلعاً في المستوى الإحداثي ().	

