دليل التقويم - الإجابات

الرياضيّات

المستوى الثاني عشر

المسارين العلمي والتكنولوجي

النسخة التجريبية

2021 – 2022

F01_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN TG.indd 1 09/03/2022 1:23:50 PM

حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني
أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءْ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّياءْ
قَطَرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الأَوْفِياءْ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الأُلَى	وَعَلَى ضِيَاءِ الأَنْبِيَاءْ
قَطَرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ	عِزٌّ وَأَمْجَادُ الإِبَاءْ
قَطَرُ الرِّجَالِ الأَوَّلِين	حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءْ
وَحَمَائِمٌ يَوْمَ السَّلَامْ	جَوَارِحٌ يَوْمَ الفِدَاءْ

www.pearson.com

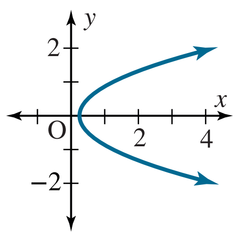
ISBN-13: 978-1-292-4291-13
ISBN-10: 1-292-4291-19

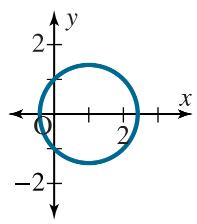
المحتويات

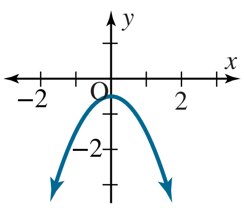
الاسم ______________________________

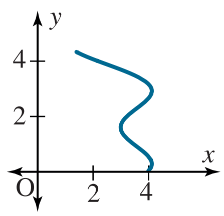
اختبار بداية السنة الدراسية

.1 أيّ من المنحنيات التالية يعدّ تمثيلًا بيانيًّا لدالّة؟

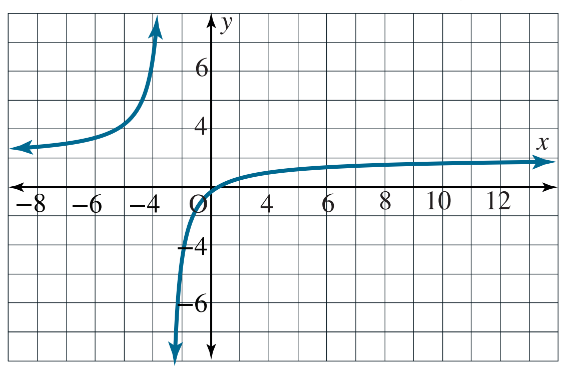
Ⓐ


Ⓒ


●


Ⓓ


.2 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجال ومدى الدالّة $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$؟



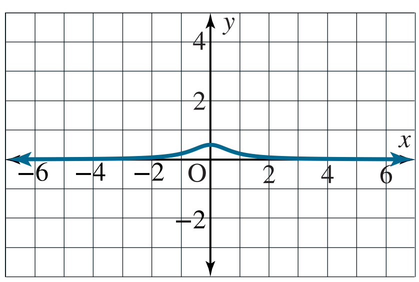
Ⓐ المجال: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$،
المدى: $]-\infty, -3[\cup]-3, \infty[$

● المجال: $]-\infty, -3[\cup]-3, \infty[$،
المدى: $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$

Ⓒ المجال: $]-\infty, -3[\cup \left]-3, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$،
المدى: $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$

Ⓓ المجال: $]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$،
المدى: $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$

.3 الدالّة $y = \frac{1}{3x^2 + 2}$ ممثّلة بيانيًّا أدناه.
حدّد القيم القصوى، ومحور التناظر، وخطوط التقارب إن وجدت.



للدالّة قيمة عظمى محلّية عند النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$، محور التناظر: $x = 0$،
خطّ التقارب: $y = 0$

.4 إذا كُتبت الدالّة $y = (2x - 3)^4 + 1$
في الصورة $y = f(g(x))$، فإنّ الدالّتين f و g هما:

Ⓐ $f(x) = 2x - 3, g(x) = x^4 + 1$

Ⓑ $f(x) = x^4 + 1, g(x) = 2x - 3$

Ⓒ $f(x) = \frac{x+3}{2}, g(x) = x^4 + 1$

Ⓓ $f(x) = x^4 + 1, g(x) = \frac{x+3}{2}$

.5 إذا كانت $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، أيّ من الخيارات التالية يمثّل صيغة $f^{-1}(x)$؟

Ⓐ $f^{-1}(x) = x^2 + 2$

Ⓑ $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

Ⓒ $f^{-1}(x) = x^2 - 2$

Ⓓ $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

.6 أيّ من الدوالّ التالية دالّة كثيرة الحدود؟

Ⓐ $f(x) = -3x + \frac{1}{4}x^3 + 6$

Ⓑ $g(x) = 2x^{-2} + 7$

Ⓒ $p(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2}$

Ⓓ $h(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27x^6}$

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثِّل جمع وضرب كثيرتَي الحدود $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = x^2 - 2x + 1$؟

Ⓐ $f(x) + g(x) = x^2,$
$f(x) \times g(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1$

Ⓑ $f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x,$
$f(x) \times g(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1$

Ⓒ $f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x,$
$f(x) \times g(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 1$

Ⓓ $f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x,$
$f(x) \times g(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

.8 اقسم $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ على $x + 2$ باستعمال القسمة التركيبيّة.

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x + 2} = x^2 - 5x + 12 - \frac{25}{x + 2}$$

.9 اقسم $x^3 + 2x^2 - x - 2$ على $x + 1$ باستعمال القسمة المطوّلة.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1} = x^2 + x - 2$$

10. صِف التحويلات الهندسيّة التي تحوّل التمثيل البيانيّ للدالّة الوحيدة الحدّ $f(x) = x^4$ إلى التمثيل البيانيّ للدالّة الكثيرة الحدود $g(x) = (x-1)^4 + 4$.

Ⓐ إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار أربع وحدات إلى الأعلى.

Ⓑ إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار أربع وحدات إلى الأسفل.

● إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار أربع وحدات إلى الأعلى.

Ⓓ إزاحة أفقيّة بمقدار أربع وحدات إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.

---

11. صِف السلوك الطرفي للدالّة الكثيرة الحدود $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 10$ مستعملاً $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Ⓐ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

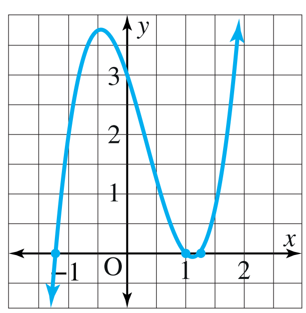
Ⓑ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Ⓒ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

● $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

---

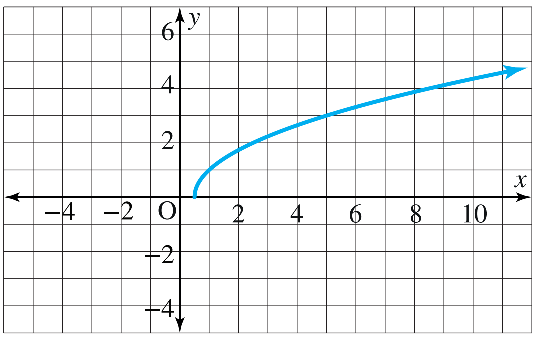
12. أوجد أصفار الدالّة $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$ جبريًّا، ثمّ تحقّق منها من خلال التمثيل البيانيّ للدالّة.



$x = 1, x = \sqrt{\frac{3}{2}}, x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

---

13. مثّل الدالّة $f(x) = \sqrt{2x-1}$ بيانيًّا، ثمّ أوجد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت الدالّة متزايدة أم متناقصة.



المجال: $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$ ، **المدى:** $[0, \infty[$،

الدالّة متزايدة.

---

14. اكتب دالّة القيمة المطلقة $f(x) = |x-2|$ في صورة دالّة متعدّدة التعريف.

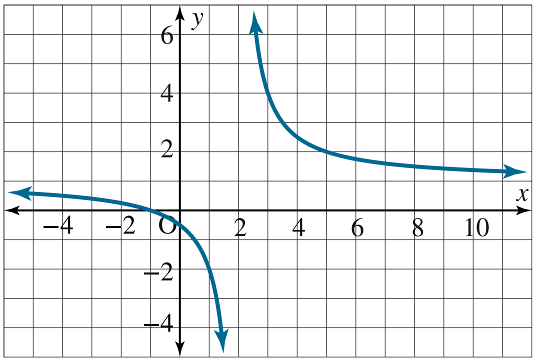
Ⓐ $f(x) = \begin{cases} -x-2 &, x < 2 \\ x-2 &, x \geq 2 \end{cases}$

● $f(x) = \begin{cases} -x+2 &, x < 2 \\ x-2 &, x \geq 2 \end{cases}$

Ⓒ $f(x) = \begin{cases} x-2 &, x < 2 \\ -x+2 &, x \geq 2 \end{cases}$

Ⓓ $f(x) = \begin{cases} x+2 &, x < 2 \\ x+2 &, x \geq 2 \end{cases}$

.15 أيّ من الدوالّ التالية يمثّلها التمثيل البيانيّ أدناه؟



Ⓐ $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Ⓒ $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$

● $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Ⓓ $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$

.16 أوجد خطوط التقارب الرأسيّة والأفقيّة لمنحنى الدالّة $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

Ⓐ خطّ التقارب الرأسيّ هو $x = 3$، وخطّ التقارب الأفقيّ هو $y = 2$.

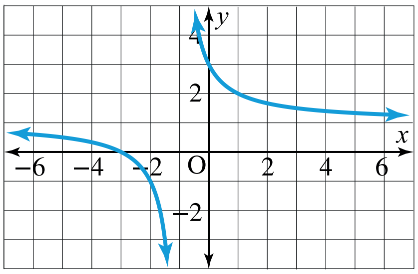
Ⓑ خطّ التقارب الأفقيّ هو $x = 2$، وخطّ التقارب الرأسيّ هو $y = 3$.

Ⓒ خطّ التقارب الرأسيّ هو $x = 2$، ولا يوجد خطّ تقارب أفقيّ.

● خطّ التقارب الرأسيّ هو $x = 2$، وخطّ التقارب الأفقيّ هو $y = 3$.

.17 أوجد مجال الدالّة f. استعمل النهايات لوصف سلوك الدالّة f عند قيمة (قيم) x الواقعة خارج المجال. ثمّ مثّل الدالّة بيانيًّا.

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1} + 3$$

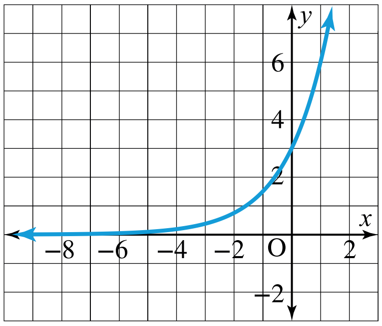


المجال: $]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$ ،

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$،

و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ ،

.18 مثّل الدالّة الأسيّة $f(x) = 3\left(2^x\right)$ بيانيًّا، وحدّد خصائصها الأساسيّة (المجال، والمدى، والمقطعين x و y، وخطوط التقارب، وسلوك الدالّة).



المجال: $]-\infty, \infty[$، المدى: $]0, \infty[$، ليس للدالّة مقطع x، المقطع y هو 3، المحور x هو خطّ تقارب أفقيّ، والدالّة متزايدة.

.19 احسب قيمة الدالّة بعد تعويض قيمة x المعطاة.

$f(x) = 2\left(3^{x}\right),\ x = -\frac{3}{2}$

Ⓐ $6\sqrt{3}$ Ⓒ $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

● $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{6}}{36}$

.20 أيّ ممّا يلي يمثّل الصورة اللوغاريتميّة للمعادلة الأسّيّة $4^3 = 64$؟

Ⓐ $log_3 64 = 4$ Ⓒ $log_4 4 = 4$

● $log_4 64 = 3$ Ⓓ $log_3 64 = 3$

.21 أيّ ممّا يلي يمثّل الصورة الأسّيّة للمعادلة اللوغاريتميّة $log_2 512 = 9$؟

Ⓐ $9^4 = 512$ ● $2^9 = 512$

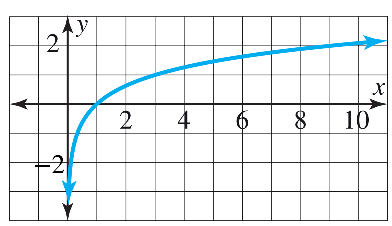
Ⓑ $9^8 = 512$ Ⓓ $2^8 = 512$

.22 أوجد قيمة المقدار اللوغاريتميّ $log_7 7^n$ حيث n عدد طبيعيّ.

Ⓐ 7 Ⓒ $7\ log_7 n$

● n Ⓓ $7n$

.23 مثّل الدالّة $y = log_3 x$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها، وسمِّ المقاطع وخطوط التقارب إن وجدت، ثمّ صِف السلوك الطرفيّ للدالّة.



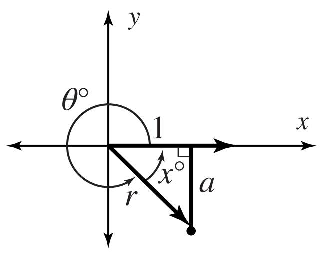
المجال: $]0, \infty[$، المدى: $]-\infty, \infty[$، ليس للدالّة مقطع y، المقطع x هو 1، المحور y هو خطّ تقارب رأسيّ، والدالّة متزايدة.

.24 أيّ ممّا يلي يمثّل حلّ المعادلة $log\ (x-1) + log\ (x+2) = 2\ log\ 2$؟

Ⓐ $x = -3$ Ⓒ $x = -3$ أو $x = 2$

● $x = 2$ Ⓓ ليس للمعادلة حلّ

.25 لتكن x الزاوية المرجعيّة للزاوية θ في الرسم أدناه. أوجد النسب المثلّثيّة (الجيب وجيب التمام والظلّ) للزاوية θ بدلالة a و r.



Ⓐ $\sin\theta = \frac{a}{r},\ \cos\theta = \frac{1}{r},\ \tan\theta = a$

Ⓑ $\sin\theta = \frac{r}{a},\ \cos\theta = r,\ \tan\theta = -\frac{1}{a}$

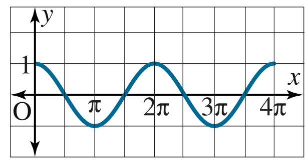
Ⓒ $\sin\theta = -\frac{a}{r},\ \cos\theta = \frac{1}{r},\ \tan\theta = -\frac{1}{a}$

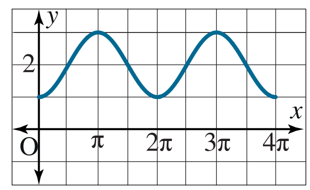
● $\sin\theta = -\frac{a}{r},\ \cos\theta = \frac{1}{r},\ \tan\theta = -a$

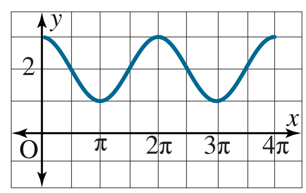
.26 أوجد قيمة $\cos 150°$ من دون استعمال الحاسبة، وذلك باستعمال النسب المثلّثيّة في مثلّث مرجعيّ.

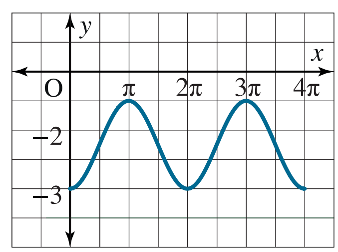
$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

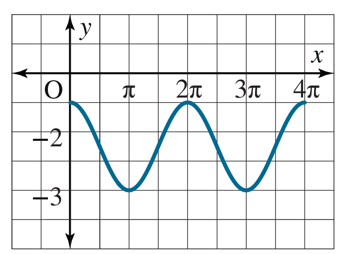
27. إذا كان الرسم أدناه هو التمثيل البيانيّ للدالّة $y = \cos x$، على دورتين، أيّ من المنحنيات التالية هو التمثيل البيانيّ للدالّة $y = 2 - \cos x$؟



Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


28. حدّد الإزاحات التي تعطي التمثيل البيانيّ للدالّة $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ من التمثيل البيانيّ لدالّتها الرئيسة.

Ⓐ إزاحة بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليسار، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدتين إلى الأسفل.

Ⓑ إزاحة بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدتين إلى الأسفل.

Ⓒ إزاحة بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

Ⓓ إزاحة بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليسار، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

29. بسِّط المقدار $\cos^4 x - \sin^4 x$ باستعمال المتطابقات الأساسيّة.

Ⓐ $\cos^2 x - \sin^2 x$

Ⓑ $1 - 2\sin^4 x$

Ⓒ $2\cos^4 x - 1$

Ⓓ 1

30. أيّ من الخيارات التالية يمثّل متطابقة؟

Ⓐ $(\cos x - \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$

Ⓑ $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos^2 x \sin^2 x$

Ⓒ $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$

Ⓓ $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$

31. استعمل متطابقات الفرق والمجموع لتحديد المعادلة الصحيحة ممّا يلي.

Ⓐ $\cos 5x = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$

Ⓑ $\cos 5x = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$

Ⓒ $\cos 5x = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$

Ⓓ $\cos 5x = \sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x$

.32 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المقدار
؟$\cos 13° \cos 17° - \sin 13° \sin 17°$

Ⓐ $\cos 4°$
● $\cos 30°$
Ⓒ $\sin 30°$
Ⓓ $-\cos 30°$

.33 استعمل متطابقة ضعف الزاوية لتحديد المعادلة الصحيحة ممّا يلي.

Ⓐ $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 x$
Ⓑ $\cos 4x = 2\sin 2x \cos 2x$
Ⓒ $\cos 4x = 2\cos^2 x - 1$
● $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

.34 أيّ من الخيارات التالية يمثّل متطابقة؟

Ⓐ $4\sin^2 u \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$
Ⓑ $4\sin^2 u \cos^2 u = \frac{1 + \cos 4u}{2}$
● $4\sin^2 u \cos^2 u = \frac{1 - \cos 4u}{2}$
Ⓓ $4\sin^2 u \cos^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$

.35 أيّ من المواقف التالية يمثّل حالة توافيق؟

Ⓐ لدى سلمى تسعة كتب شعر، وتريد اختيار ثلاثة منها لوضعها بجانب السرير لتصفّحها قبل النوم.
● يختار معلّم 6 طلّاب من صفّ عدد طلّابه 22 طالبًا لمساعدته في تنظيف الملعب.
Ⓒ يضع منظِّم حفلات مخطّطًا لأماكن جلوس الضيوف البالغ عددهم 12 شخصًا في صالة تحتوي على 20 مقعدًا.
Ⓓ حساب عدد الكلمات المؤلّفة من 6 أحرف ويمكن تكوينها باستعمال أحرف كلمة BEIRUT (بغضّ النظر عن وجودها أو عدم وجودها في القاموس).

.36 يريد طلّاب أحد الصفوف، وعددهم 12 طالبًا، تشكيل وفد من طالبين لتمثيلهم لدى إدارة المدرسة. أوجد عدد الطرائق التي يمكن تشكيل الوفد بها.

Ⓐ ${}_{12-2}C_2 = {}_{10}C_2 = 45$
● ${}_{12}C_2 = 66$
Ⓒ ${}_{12-2}P_2 = {}_{10}P_2 = 90$
Ⓓ ${}_{12}P_2 = 132$

الاسم ____________________

1 اختبار بداية الوحدة

1. أوجد $f(x) \times g(x)$ إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = 2x^4 - x^3$.

Ⓐ $2x^6 - 2x^4$

● $2x^6 + 3x^5 - 2x^4$

Ⓑ $2x^6 + 5x^5 - 2x^4$

Ⓓ $2x^6 + 3x^5 + 2x^4$

---

2. أوجد ناتج قسمة $x^3 - 5x - 7$ على $x^2 - 7$ باستعمال القسمة التركيبيّة، واكتب الناتج في الصورة الكسريّة.

Ⓐ $x^3 - 5x - 7 = x(x^2 - 7)$

Ⓑ $\dfrac{x^3 - 5x - 7}{x^2 - 7} = x + (2x - 7)$

Ⓒ $\dfrac{x^3 - 5x - 7}{x^2 - 7} = x - \dfrac{2x - 7}{x^2 - 7}$

● $\dfrac{x^3 - 5x - 7}{x^2 - 7} = x + \dfrac{2x - 7}{x^2 - 7}$

---

3. لتكن $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.
أكمل العبارات التالية:

المقطع y للتمثيل البيانيّ للدالّة f هو **-2**

المقطع x للتمثيل البيانيّ للدالّة f هو **1**

الدالّة f متزايدة في الفترة **$]-\infty, \infty[$**

---

4. إذا كان 2 صفرًا للدالّة الكثيرة الحدود $P(x) = 3x^3 + kx^2 - 2x + 1$، أيّ من العبارات التالية هي الصحيحة؟

Ⓐ $\dfrac{3x^3 + kx^2 - 2x + 1}{x - 2}$ هي دالّة كثيرة الحدود

Ⓑ $P(2) > 0$

● $P(1) \notin \mathbb{Z}$

Ⓓ الدالّة $f(x) = \dfrac{P(x)}{x - 2}$ معرّفة عند $x = 2$

---

5. لتكن $f(x) = 2\sqrt{1 - x} + 5$، أوجد مجال الدالّة f.

Ⓐ $[1, \infty[$

● $]-\infty, 1]$

Ⓒ $]-\infty, \infty[$

Ⓓ $[5, \infty[$

---

6. أوجد سلسلة التحويلات على الدالّة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$ التي تنتج الدالّة $g(x) = \sqrt{x - 1} + 3$.

Ⓐ إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.

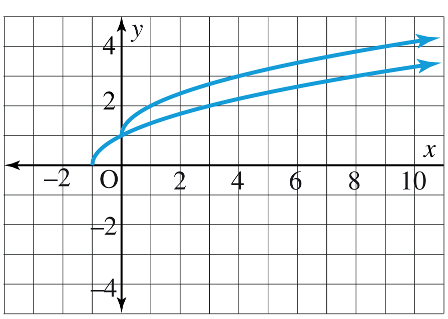
● إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.

Ⓒ إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.

Ⓓ إزاحة أفقيّة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.

---

7. أوجد حلّ المعادلة $\sqrt{x + 1} = \sqrt{x} + 1$.
تحقّق من الحلّ بيانيًّا. **$x = 0$**



8. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة متعدّدة التعريف؟

Ⓐ $f(x) = \sqrt{x+1}$

Ⓑ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \ x \geq 0 \\ x(x+1) & , \ x \leq 0 \end{cases}$

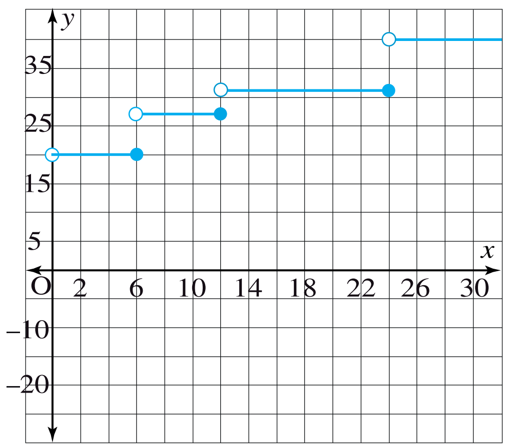
● $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \ x \geq 0 \\ x^2 + x & , \ x < 0 \end{cases}$

Ⓓ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^2} & , \ x \geq 0 \\ |x+1| & , \ x \leq 0 \end{cases}$

---

9. يختلف سعر بطاقة الدخول إلى حديقة الحيوان بحسب العمر. يمثّل الجدول أدناه، سعر البطاقة y بحسب العمر x.
حدّد نوع الدالّة التي يمثّلها هذا الجدول، ومثّلها بيانيًّا.

العمر x	$0 < x \leq 6$	$6 < x \leq 12$	$12 < x \leq 24$	$x > 24$
ثمن البطاقة y	QR 20	QR 27	QR 32	QR 40



الدالة درجية

---

10. أيّ من الجداول التالية يمثّل تناسبًا عكسيًّا؟

Ⓐ

x	1	3	5	7
y	15	5	3	2

●

x	1	2	3	4	6	12
y	24	12	8	6	4	2

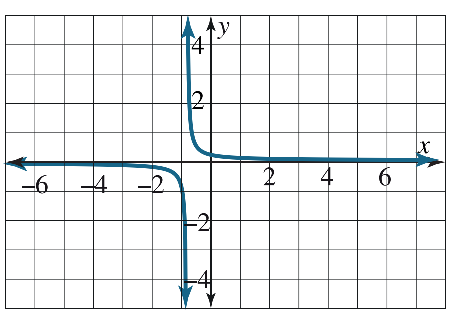
Ⓒ

x	a	a^3	a^5	a^7
y	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^5}$

Ⓓ

x	3	5	7	8	12
y	8	4.8	3.4	3	2

11. بالنظر إلى التمثيل البيانيّ المعطى للدالّة $y = \frac{1}{x+1}$، فإنّ الدالّة:



Ⓐ متزايدة في مجالها

● متناقصة في مجالها

Ⓒ متناقصة في الفترة $]-\infty, -1[$ ومتزايدة في الفترة $]1, \infty[$

Ⓓ متزايدة في الفترة $]-\infty, -1[$ ومتناقصة في الفترة $]1, \infty[$

12. أوجد سلسلة التحويلات على الدالّة الرئيسة $f(x) = \frac{1}{x}$ التي تنتج الدالّة $g(x) = \frac{2x-3}{x-2}$، واستنتج خطوط التقارب للدالّة g.

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$$

إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

خطوط التقارب: $x = 2$ و $y = 2$

---

13. إذا كان لكلّ من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ نفس الإشارة، فإنّ ضلع الانتهاء للزاوية θ يكون

Ⓐ في الربع الأوّل

Ⓑ في الربع الثاني

Ⓒ غير محدّد

Ⓓ في الربع الأوّل، أو في الربع الثالث

---

14. بالنظر إلى التمثيل البيانيّ للدالّتين $g(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$، أيّ من الخيارات التالية مشترك للدالّتين؟

Ⓐ 1 هي قيمة قصوى

Ⓑ $x = \pi$ هو المقطع x

Ⓒ الدالّة متزايدة في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ⓓ المحور y هو محور تناظر

---

15. أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

Ⓐ $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$

Ⓑ $\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$

Ⓒ $\sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Ⓓ $\tan 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

---

16. إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$، فإنّ $\frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta - 2\sin^3\theta}$ يساوي:

Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓒ 3

Ⓑ $\frac{3}{2}$ Ⓓ لا يمكن تحديد قيمتها

---

17. أوجد قيمة a إذا كان $e^{\frac{\ln a}{2}} = 3$

Ⓐ $a = \frac{3}{2}$ Ⓒ $a = 6$

Ⓑ $a = 3$ Ⓓ $a = 9$

---

18. يكون $\frac{2^{x^2}}{4^{x+2}} = 1$

Ⓐ عندما $x = 0$

Ⓑ عندما $x = -1$ أو $x = 2$

Ⓒ عندما $x = 1 + \sqrt{5}$ أو $x = 1 - \sqrt{5}$

Ⓓ المعادلة مستحيلة

---

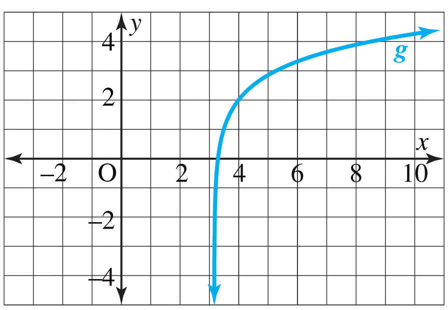
19. أوجد حلّ المعادلة $ln(2x^2 - 5) - ln(x+1) = ln(x-1)$.

$$x = 2$$

---

20. أوجد الدالّة g التي تنتج عن إزاحة أفقيّة بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، ثمّ إزاحة رأسيّة بمقدار وحدتين إلى الأعلى، للدالّة الرئيسة $f(x) = ln\,x$.

مثّل الدالّة g بيانيًّا.



$$g(x) = ln(x-3) + 2$$

الاسم ____

1-1 اختبار الدرس

مفهوم النهاية

1. استعمل القيم الواردة في الجدول أدناه لتقدير $\lim_{x \to 2} f(x)$.

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1

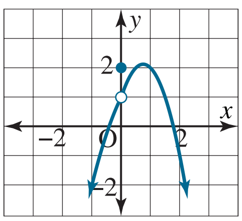
Ⓐ 2   Ⓒ 4

Ⓑ 3   Ⓓ لا توجد نهاية

---

2. لتكن الدالّة $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \\ -2x^2 + 3x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$.

استعمل التمثيل البيانيّ المجاور لتحديد $\lim_{x \to 0} f(x)$.



Ⓐ 1   Ⓒ ∞

Ⓑ 2   Ⓓ لا توجد نهاية

---

3. أكمل الجدول أدناه واستعمل النتائج لتحديد $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.01
$f(x)$	**−0.9090**	**−0.9900**	**−0.9990**	**−0.9999**		**−1.00010**	**−1.001001**	**−1.0101**	**−1.1111**

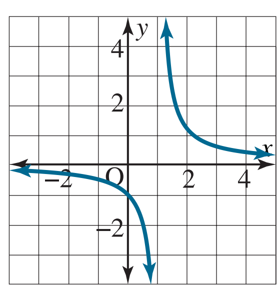
Ⓐ −1   Ⓒ 1

Ⓑ 0   Ⓓ لا توجد نهاية

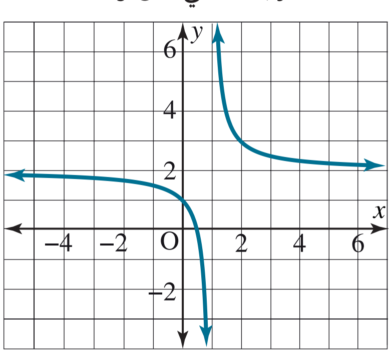
---

4. استعمل التمثيل البيانيّ أدناه لإيجاد $\lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

$-\infty$



5. استعمل التمثيل البيانيّ أدناه لإيجاد $\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x - 1}$، ثمّ اكتب معادلة خطّ التقارب الأفقيّ، إن وجد.



$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2$$

معادلة خطّ التقارب الأفقيّ: $y = 2$

الاسم ________________________________

1-2 اختبار الدرس

حساب النهايات

.1 لتكن P دالّة كثيرة الحدود. صِلْ كلّ نهاية إلى اليسار بالخيار المناسب إلى اليمين.

$\lim_{x \to l}[a\mathrm{P}(x)]$	$\mathrm{P}(l + a)$
$\lim_{x \to l}[\mathrm{P}(ax)]$	$a\,\mathrm{P}(l)$
$\lim_{x \to l}[\mathrm{P}(a + x)]$	$\mathrm{P}(l) + a$
$\lim_{x \to l}[\mathrm{P}(x) + a]$	$\mathrm{P}(al)$

.2 إذا كان $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

أيّ من العبارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to 1} [2f(x)]^3$؟

Ⓐ 4

Ⓑ 8

Ⓒ 12

● 64

.3 أوجد قيمة $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^3 - x + 2} + \frac{x^2 - 4x - 1}{x^4 - 3x}\right)$.

$\frac{5}{2}$

.4 لتكن Q دالّة كثيرة الحدود. أوجد درجة الدالّة $\mathrm{Q}(x)$ وقيمة معاملها الرئيس إذا كان $\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{Q}(x)}{x^3} = 2$.

درجة الدالّة $\mathrm{Q}(x)$ هي 3

المعامل الرئيس هو 2

.5 أيّ من القيم التالية تمثّل قيمة b إذا كان $\lim_{x \to b} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 3} = 0$؟

Ⓐ $b = -6$

Ⓑ $b = 1$ أو $b = 6$

● $b = 6$

Ⓓ لا توجد قيمة ل b تحقّق هذا الشرط

الاسم ______________________________

1-3 اختبار الدرس

نهايات الدوالّ المثلّثيّة

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x - \cos x}{\sin x - \cos 2x}$؟

Ⓐ -1

● 2

Ⓒ 4

Ⓓ ∞

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{4x + \sin x}{2x}$؟

Ⓐ 2

● $\frac{5}{2}$

Ⓒ 3

Ⓓ النهاية غير معرّفة

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{6\sin x - \sin 9x}{3x}$؟

● -1

Ⓑ 0

Ⓒ 2

Ⓓ النهاية غير معرّفة

---

4. أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - 2x}{\sin 9x}$.

$-\frac{1}{9}$

---

5. أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{4x^2}$.

$\frac{9}{8}$

الاسم ______________________________

1-4 اختبار الدرس

الاتّصال

1. إذا كانت الدالّة f معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 2+k & , \quad x = 1 \end{cases}$$

وكانت الدالّة f متّصلة عند $x = 1$، فإنّ قيمة k:

Ⓐ تساوي -4

Ⓑ تساوي -2

Ⓒ تساوي 0

Ⓓ لا يمكن إيجادها

2. لتكن الدالّة $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. أيّ من الخيارات التالية يمثّل إعادة تعريف الدالّة بحيث تصبح متّصلة عند $x = 2$؟

Ⓐ $f(x) = x - 3$

Ⓑ $f(x) = x - 3, \quad x \neq 2$

Ⓒ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , \quad x \neq 2 \\ -3 & , \quad x = 2 \end{cases}$

Ⓓ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , \quad x \neq 2 \\ -1 & , \quad x = 2 \end{cases}$

3. حدّد قيمة x حيث الدالّة $f(x) = \dfrac{x\cos 2x - \frac{\pi}{2}\cos 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$ غير متّصلة، ثمّ حدّد نوع عدم الاتّصال.

الدالة غير متّصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

وهو عدم اتّصال قابل للإزالة.

4. لتكن $f(x) = e^{\sqrt{4x-1}}$. حدّد الفترة التي تكون فيها الدالّة f متّصلة والفترة التي تكون فيها الدالّة f غير متّصلة.

الدالّة متّصلة في الفترة $\left[\frac{1}{4}, \infty\right[$،

وغير متّصلة في الفترة $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$

5. إذا كانت f دالّة متّصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$، برهن أنّ الدالّة $h(x) = \frac{1}{3}f(x)$ متّصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} h(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$$

$$= \frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= h\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن، الدالّة h متّصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$.

M01_MTH01_ANC12_QTR_AR_V1.indb 14 04/03/2022 2:37:38 PM

الاسم ______________________________

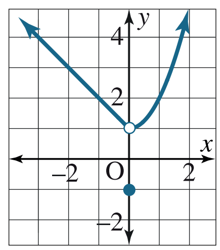
1 تقويم الوحدة، النموذج A

.1 إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , \quad x \le 2 \\ x + 3 & , \quad x > 2 \end{cases}$ ،
فإنّ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ تساوي:

● 0 Ⓒ 5

Ⓑ 1 Ⓓ 8

.2 استعمل التمثيل البيانيّ المعطى لإيجاد قيمة النهاية $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.



Ⓐ -1 Ⓒ ∞

● 1 Ⓓ غير موجودة

.3 إذا كانت $\lim\limits_{x \to b^+} \frac{1}{x-2} = \infty$ ، فإنّ:

Ⓐ $b = -\infty$ ● $b = 2$

Ⓑ $b = -2$ Ⓓ $b = \infty$

.4 قيمة $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x+1}{-2x+3}$ تساوي:

Ⓐ $-\infty$ ● $\frac{1}{2}$

Ⓑ $-\frac{1}{2}$ Ⓓ ∞

.5 لتكن $f(x) = \frac{x}{x+1}$. أوجد قيمة الثابت $a \ne 0$
إذا كانت $\lim\limits_{x \to 1} f(ax) = \lim\limits_{x \to 1} af(x)$.

$a = 1$

.6 أوجد قيمة $b \ne 0$ التي تحقّق $\lim\limits_{x \to b} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$.

$b = 1$

.7 إذا كانت $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$ و $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$، فإنّ:

Ⓐ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{6}$ Ⓒ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2}$

● $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{3}$ Ⓓ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 6$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$؟

Ⓐ 0 Ⓒ ∞

● 3 Ⓓ غير موجودة

.9 لاحظ في التمثيل البيانيّ للدالّة
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ أنّ المحور x هو خطّ تقارب
أفقيّ لمنحنى الدالّة، وهذا يعني
أنّ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}\right)$ تساوي:

Ⓐ 0 Ⓒ ∞

● 1 Ⓓ غير موجودة

.10 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\sin x}$؟

Ⓐ 0 Ⓒ ∞

● 1 Ⓓ غير موجودة

.11 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin 2x - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$؟

● 0 Ⓒ ∞

Ⓑ 1 Ⓓ غير موجودة

.12 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 4x}$؟

● $\frac{1}{8}$ Ⓒ 4

Ⓑ $\frac{1}{4}$ Ⓓ 8

13. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{x \sin 2x + x^2}$.

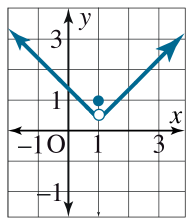
$\dfrac{2}{3}$

14. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{4x^2 + 3x}$.

$\dfrac{5}{3}$

15. حدد سبب عدم اتّصال الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ x - \frac{1}{2} & , \quad x > 1 \end{cases}$ عند $x = 0$.



Ⓐ الدالّة غير معرّفة عند $x = 1$

Ⓑ نهاية الدالة f عند $x = 1$ غير موجودة

● $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

Ⓓ دالّة متعدّدة التعريف تتغير صيغتها عند $x = 1$

16. لتكن الدالّة $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - x - 2}$.
صِل كل عبارة إلى اليمين بما يناسبها إلى اليسار.

الدالّة غير متّصلة عند $x = 2$	عدم الاتّصال لانهائي
الدالّة غير متّصلة عند $x = -1$	غير صحيح
الدالّة غير متّصلة عند $x = -2$	عدم الاتّصال قابل للإزالة

17. إذا كانت الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & , \quad x \geq 1 \\ x + a & , \quad x < 1 \end{cases}$$

ليست متّصلة عند $x = 1$، أي مما يلي استنتاج صحيح حتمًا؟

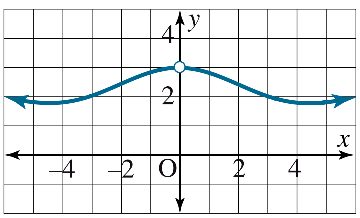
Ⓐ $a < 0$

Ⓑ $a < 1$

Ⓒ $a = 3$

● $a \neq 3$

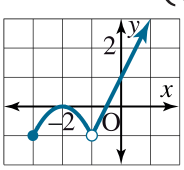
18. استعمل التمثيل البياني المعطى للدالة f، حيث $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x}$ لتحديد نقاط عدم الاتصال للدالة، وحدّد نوع عدم الاتّصال عند كلّ نقطة.



$x = 0$: عدم اتصال قابل للإزالة

19. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى للدالة f، حيث

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4 & , \quad -3 \leq x < -1 \\ a & , \quad x = -1 \\ 2x + 1 & , \quad x > -1 \end{cases}$$



لتحديد قيمة a التي تجعل الدالّة f متّصلة في الفترة $[-3, \infty[$.

$a = -1$

20. إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكلّ الأعداد الحقيقيّة x، و f متّصلة عند $x = 0$، أثبت أنّ $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متّصلة عند $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \sqrt{f(x)} \\ &= \sqrt{\lim_{x\to 0} f(x)} \\ &= \sqrt{f(0)} \\ &= g(0) \end{aligned}$$

الاسم ____________________

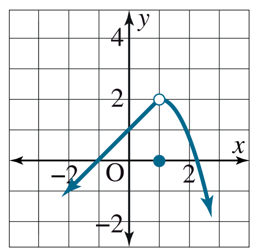
1 تقويم الوحدة، النموذج B

1. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , \quad x \le 1 \\ x - 4 & , \quad x > 1 \end{cases}$،
فإنّ $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ تساوي:

Ⓐ -5 Ⓒ -1

Ⓑ -3 ● 3

2. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى لإيجاد قيمة النهاية $\lim_{x \to 1} f(x)$.



Ⓐ 0 Ⓒ ∞

● 2 Ⓓ غير موجودة

3. إذا كانت $\lim_{x \to b^+} \frac{1}{x+4} = \infty$ ، فإنّ:

Ⓐ $b = -\infty$ Ⓒ $b = 4$

● $b = -4$ Ⓓ $b = \infty$

4. قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{-3x+1}$ تساوي:

Ⓐ $-\infty$ Ⓒ $\frac{1}{3}$

● $-\frac{1}{3}$ Ⓓ ∞

5. لتكن $f(x) = x + 1$. أوجد قيمة الثابت $a \neq 0$
إذا كانت $\lim_{x \to 1} f(x^a) = \lim_{x \to 1} [f(x)]^a$.

$a = 1$

6. أوجد قيمة $b < 0$ التي تحقّق
$\lim_{x \to b} (x^2 + 2x + 1) = 4$.

$b = -3$

7. إذا كانت $\lim_{x \to 1} [f(x) \times g(x)] = 6$
و $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$، فإنّ:

Ⓐ $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{6}$ ● $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

Ⓑ $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{3}$ Ⓓ $\lim_{x \to 1} f(x) = 12$

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$؟

● 2 Ⓒ ∞

Ⓑ 4 Ⓓ غير موجودة

9. لاحظ في التمثيل البيانيّ للدالّة
$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} + 1$ أنّ المستقيم ذا
المعادلة $y = 1$ هو خطّ تقارب أفقيّ لمنحنى الدالّة
عند موجب مالانهاية، وهذا يعني أنّ
$\lim_{x \to \infty} \left(ln \left[\frac{(x^2 + 1)}{(e^x)} + 1 \right] \right)$ تساوي:

● 0 Ⓒ ∞

Ⓑ 1 Ⓓ غير موجودة

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 2 \sin x}{x}$؟

Ⓐ 0 Ⓒ 2

● 1 Ⓓ غير موجودة

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - 3x \sin 2x}{1 - \cos^2 x}$؟

● -5 Ⓒ ∞

Ⓑ 0 Ⓓ غير موجودة

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 6x}$؟

● $\frac{1}{18}$ Ⓒ 6

Ⓑ $\frac{1}{6}$ Ⓓ 18

13. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin^2 x}{x\sin 2x + x^2}$.

1

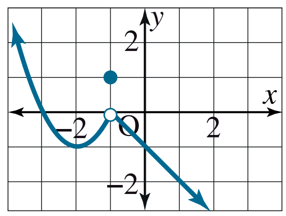
14. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{x^2 + 5x}$.

$\mathbf{\frac{3}{5}}$

15. حدّد سبب عدم اتّصال الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & , \quad x < -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \\ -x - 1 & , \quad x > -1 \end{cases}$$

عند $x = -1$.



Ⓐ الدالّة غير معرّفة عند $x = -1$

Ⓑ نهاية الدالّة عند $x = -1$ غير موجودة

Ⓒ دالّة متعدّدة التعريف تتغيّر صيغتها عند $x = -1$

● $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

16. لتكن الدالّة $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - x - 6}$.

صِل كلّ عبارة إلى اليمين بما يناسبها إلى اليسار.

الدالّة غير متّصلة عند $x = 3$	عدم الاتّصال لانهائي
الدالّة غير متّصلة عند $x = -2$	غير صحيح
الدالّة غير متّصلة عند $x = -3$	عدم الاتّصال قابل للإزالة

17. إذا كانت الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & , \quad x \geq 2 \\ x + a & , \quad x < 2 \end{cases}$$

ليست متّصلة عند $x = 2$، أيّ مما يلي استنتاج صحيح حتمًا؟

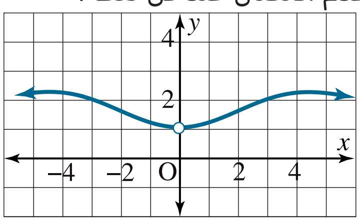
Ⓐ $a < 0$

● $a \neq 0$

Ⓑ $a < 2$

Ⓓ $a = 0$

18. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى للدالّة f، حيث $f(x) = \dfrac{2x - \sin x}{x}$، لتحديد نقاط عدم اتّصال الدالّة، وحدّد نوع عدم الاتّصال عند كلّ نقطة.

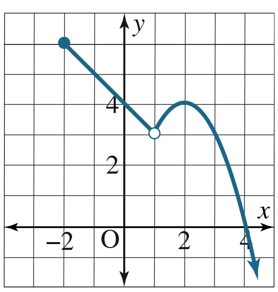


$x = 0$: عدم اتّصال قابل للإزالة

19. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى للدالّة f، حيث

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & , \quad -2 \leq x < 1 \\ a & , \quad x = 1 \\ -x^2 + 4x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

لتحديد قيمة a التي تجعل الدالّة f متّصلة في الفترة $[-2, \infty[$.



$\boldsymbol{a = 3}$

20. إذا كانت الدالّتان f و g متصلتين عند $x = 1$، برهن أنّ الدالّة $h(x) = f(x) + g(x)$ أيضًا متّصلة عند $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$$
$$= f(1) + g(1)$$
$$= h(1)$$

الاسم ______________________

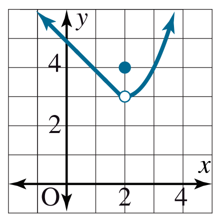
1 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x & , \quad x \leq 3 \\ x + 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$، فإنّ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ تساوي:

A) -6 C) 4

B) -2 D) 24

.2 استعمل التمثيل البيانيّ المعطى لإيجاد قيمة النهاية $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.



A) 3 C) ∞

B) 4 D) غير موجودة

.3 إذا كانت $\lim\limits_{x \to b^+} \frac{1}{x+1} = \infty$، فإنّ:

A) $b = -\infty$ C) $b = 1$

B) $b = -1$ D) $b = \infty$

.4 قيمة $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x + 1}{x + 5}$ تساوي:

A) $-\infty$ C) 2

B) -2 D) ∞

.5 لتكن $f(x) = \frac{x}{x-2}$. أوجد قيمة الثابت $a \neq 0$ إذا كانت $\lim\limits_{x \to 1} f(x + a) = \lim\limits_{x \to 1} [a + f(x)]$.

$a = 3$

.6 أوجد قيمة $b \neq 0$ التي تحقّق $\lim\limits_{x \to b} \sqrt{2x + 5} = 3$.

$b = 2$

.7 إذا كانت $\lim\limits_{x \to 0} [2f(x) + 3g(x)] = 8$ و $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$، فإنّ:

A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ C) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{4}{3}$ D) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 3}$؟

A) 0 C) ∞

B) -3 D) غير موجودة

.9 لاحظ في التمثيل البيانيّ للدالّة

$f(x) = ln(x^2 + 2) - ln(x^2 + 1)$

أنّ المحور x هو خطّ تقارب أفقيّ لمنحنى الدالّة،

وهذا يعني أنّ $\lim\limits_{x \to \infty} \left[ln\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)\right]^3$ تساوي:

A) 0 C) ∞

B) 1 D) غير موجودة

.10 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x - \sin x}{x}$؟

A) 0 C) ∞

B) 3 D) غير موجودة

.11 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x \sin x - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$؟

A) 0 C) 4

B) 3 D) غير موجودة

.12 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 8x}$؟

A) $\frac{1}{32}$ C) 4

B) $\frac{1}{8}$ D) 8

13. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4 \sin^2 x}{x \sin 2x + x^2}$.

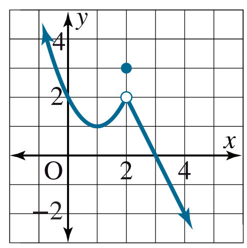
$\frac{4}{3}$

14. أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{2x^2 + x}$.

4

15. حدّد سبب عدم اتّصال الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & , \ x < 2 \\ 3 & , \ x = 2 \\ -2x + 6 & , \ x > 2 \end{cases}$$ عند $x = 2$



● $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Ⓑ الدالّة غير معرّفة عند $x = 2$

Ⓒ نهاية الدالّة f عند $x = 2$ غير موجودة

Ⓓ دالّة متعدّدة التعريف

16. لتكن الدالّة $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x - 2}$.

صِل كلّ عبارة إلى اليمين بما يناسبها إلى اليسار.

الدالّة غير متّصلة عند $x = 1$	عدم الاتّصال لانهائي
الدالّة غير متّصلة عند $x = -2$	غير صحيح
الدالّة غير متّصلة عند $x = 2$	عدم الاتّصال قابل للإزالة

17. إذا كانت الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \ x \geq -1 \\ 2x + a & , \ x < -1 \end{cases}$$

ليست متّصلة عند $x = -1$، أيّ مما يلي استنتاج صحيح حتمًا؟

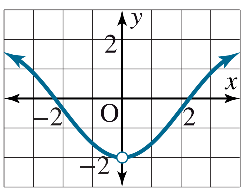
Ⓐ $a < -1$

Ⓑ $a < 2$

Ⓒ $a = 2$

● $a \neq 2$

18. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى للدالّة f، حيث $f(x) = \frac{x - 3 \sin x}{x}$، لتحديد نقاط عدم اتّصال الدالّة، وحدّد نوع عدم الاتّصال عند كلّ نقطة.

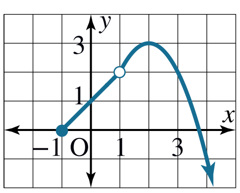


$x = 0$: عدم اتّصال قابل للإزالة

19. استعمل التمثيل البيانيّ المعطى للدالّة f، حيث

$$f(x) = \begin{cases} x + 4x - 4 & , \ -1 \leq x < 1 \\ a & , \ x = 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & , \ x > 1 \end{cases}$$

لتحديد قيمة a التي تجعل الدالّة f متّصلة في الفترة $[-1, \infty[$.



$a = 2$

20. إذا كانت الدالّتان f و g متّصلتين عند $x = 2$، برهن أنّ الدالّة $h(x) = f(x) - g(x)$ أيضًا متّصلة عند $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} g(x)$$
$$= f(2) - g(2)$$
$$= h(2)$$

الاسم ______

1 تقويم الأداء، النموذج A

سوف نتعلّم في الوحدة القادمة أنّ مفهوم المشتقّة هو من تطبيقات مفهوم النهاية، وهذا صحيح، لكنّه يعطي انطباعًا خاطئًا يشير إلى أنّ مفهوم النهاية قد ظهر قبل مفهوم المشتقّة في التاريخ الرياضيّ، وهذا غير صحيح. في الحقيقة، إنّ مفهوم المشتقّة سبق مفهوم النهاية بزمنٍ طويل، وهو أمر يثير الدهشة. فقد أوصل البحث عن مفهوم دقيق للسرعة إلى البحث عن قيمة حدّيّة لمقادير مثل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عندما تقترب قيمة x من قيمة a. هكذا ولد مفهوم النهاية مدمجًا بمفهوم المشتقّة قبل أن يقوم العقل الرياضيّ بفصل أحدهما عن الآخر، نظرًا لأهميّة كلّ منهما على حدة.

لقد نشأت في هذا الإطار دوالّ لها خصائص غريبة، على سبيل المثال: $\frac{P(x)}{x}$، حيث $P(x)$ دالّة كثيرة الحدود، و $P(0)=0$، أو $\frac{\sin x}{x}$ أو $\frac{ln(1+x)}{x}$ أو $\frac{e^x-1}{x}$. الدالّة، في هذه الأمثلة كلّها، غير معرّفة عند $x=0$، لأنها تعطي الصيغة غير المحدّدة $\frac{0}{0}$، لكنّها تسلك سلوكًا غريبًا بالقرب منه، فقيمتها تقترب من عدد محدّد كلّما اقتربت قيمة x من 0

1. من هذه الأمثلة، سوف نتناول الدالّة $f(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$ ، حيث $x\neq 0$، نظرًا لأهميّتها في بعض التطبيقات الماليّة.

a. أكمل الجدول التالي، وحدّد العدد الذي يمكن اقتراحه بناءً على المعطيات الواردة في هذا الجدول بحيث يساوي قيمة $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

x	...	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	...
$f(x)$	...	1.05	1.005	1.0005	1.00005		0.99995	0.9995	0.995	0.95	...

العدد هو 1

b. أوجد $f(0)$ ، بحيث تصبح هذه الدالة متصلة عند $x=0$.

بإضافة $f(0)=1$ تصبح الدالّة متّصلة عند $x=0$

c. كيف يمكنك استنتاج قيمة $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\, ln\left(1+\frac{r}{n}\right)\right]$، وبالتالي قيمة $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$؟

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\, ln\left(1+\frac{r}{n}\right)\right] = r\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}{\frac{r}{n}}$$

$$= r\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = r\times 1 = r$$

بحيث $x=\frac{r}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\, ln\left(1+\frac{r}{n}\right)\right] = r$$

$$\lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = r$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{ln\left(1+\frac{r}{n}\right)^n} = e^r$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

2. في نظام الفائدة المركّبة، يحدّد المصرف قيمة النسبة المئويّة السنويّة r، ويتّفق مع المودع على تواريخ احتسابها.
في الفائدة المركّبة الفصليّة، تُقسَّم السنة إلى k فصول، ليقوم المصرف باحتساب فائدة نسبتها $\frac{r}{k}$ في نهاية كلّ فصل. فإذا كانت قيمة رصيد المودع P، فإنّها تصبح في نهاية الفصل $P + \frac{r}{k}P$.
إذا كانت القيمة الابتدائيّة للرصيد تساوي P_0، فإنّها تصبح P_1 عند نهاية الفصل الأوّل من السنة، و P_2 عند نهاية الفصل الثاني من السنة، وهكذا إلى أن تصبح قيمة الرصيد P_k عند نهاية السنة الأولى من فتح الحساب.

a. أثبت أنّ $P_{i+1} = P_i\left(1+\frac{r}{k}\right)$، حيث $0 \le i \le k-1$. ثمّ استنتج أنّ $P_k = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$

تضاف نسبة $\frac{r}{k}P_i$ إلى الرصيد P_i لأحصل على P_{i+1}. إذن،

$$P_{i+1} = P_i + \frac{r}{k}P_i = P_i\left(1+\frac{r}{k}\right)$$
$$P_1 = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)$$
$$P_2 = P_1 + \frac{r}{k}P_1 = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^2$$
$$P_3 = P_2 + \frac{r}{k}P_2 = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^3$$
$$P_k = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$$

عند نهاية السنة تصبح قيمة الرصيد $P_k = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$

b. أوجد، باستعمال الحاسبة، أعلى رصيد يمكن أن يحقّقه في سنة شخص أودع في المصرف مبلغًا قيمته QR 3 000 بفائدة مركّبة نسبتها 4%

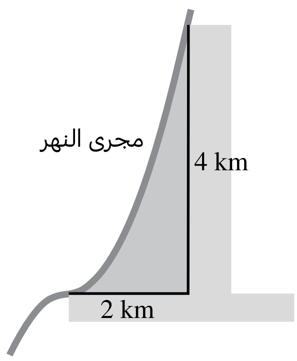
أجد، باستعمال الحاسبة، أنّ المتتالية $\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$ متزايدة.

$$\lim_{k\to\infty} P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^k = P_0\, e^r = 3\,000 \times e^{0.04} = 3\,122.43$$

أعلى رصيد يمكن أن يحقّقه هذا المودع في سنة هو QR 3 122.43.

الاسم ____________________

1 تقويم الأداء، النموذج B

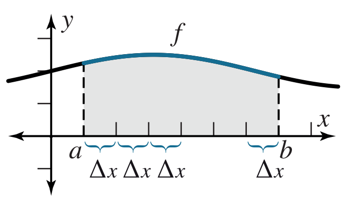


يوضّح الرسم المجاور بستانًا يقع بالقرب من مجرى نهر ومحصورًا بين طريقين متعامدين.

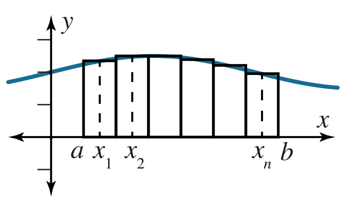
سنقوم فيما يلي بإيجاد المساحة الدقيقة لهذا البستان.

يمكن نمذجة مجرى النهر المحاذي للبستان في المستوى الإحداثي الذي مركزه نقطة التقاء الطريق الأفقي (المحور x) بمجرى النهر بالدالّة $f(x) = x^2$. بالتالي يكون المطلوب إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالّة f والمحور x والمستقيم $x = 2$.

لنفترض، الآن، أنّ f دالّة موجبة ومتّصلة في الفترة $[a, b]$. لإيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة والمحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$، اعتمد عالم الرياضيّات الألماني برنارد ريمان (Reimann, 1826-1866) الطريقة التالية:



- نقوم بتقسيم الفترة $[a, b]$ إلى n فترة متساوية بحيث يكون طول كلّ فترة من هذه الفترات هو $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- ثمّ نقسّم المساحة المطلوبة إلى n من المستطيلات المتلاصقة عرض كلّ منها يساوي Δx.



- أما طول (ارتفاع) كلّ مستطيل فيساوي قيمة الدالّة عند نقطة منتصف كلّ فترة جزئيّة.
- **القيمة التقريبيّة** للمساحة تساوي المجموع $\sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \Delta x \right]$ حيث $x_i = a + \frac{2i-1}{2} \Delta x$.
- **القيمة الدقيقة للمساحة** نحصل عليها عند قسمة المساحة إلى عدد غير محدود من المستطيلات أي أنها تساوي $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \Delta x \right]$.

.1 من شروط استعمال طريقة ريمان لحساب المساحة أن تكون الدالّة متّصلة في الفترة $[a, b]$. قبل أيجاد مساحة البستان المطلوبة، لنتحقق من أهمية هذا الشرط مع دالّة أخرى هي $g(x) = \frac{e^x}{x}$، حيث $x \neq 0$.

.a أكمل الجدول التالي، ثمّ حدّد قيمة كلّ من $\lim_{x \to 0^-} g(x)$ و $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ بناءً على المعطيات الواردة في الجدول.

x	...	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	...
$g(x)$		−99.004	−999.0004	−9999.00005		10001.00005	1001.0005	101.005	

$$\lim_{x \to 0^-} = g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} = g(x) = \infty$$

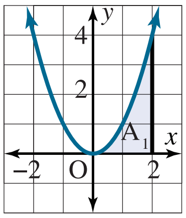
b. هل يمكن إعادة تعريف الدالّة g بحيث تكون متصلة في الفترة $[-1, 1]$؟ برّر إجابتك.

كلّا، هناك عدم اتّصال لانهائي في منحنى الدالّة عند $x = 0$.

c. بما ان الدالّة f موجبة ومتصلة في الفترة $[0, 2]$ لنوجد الآن، بهذه الطريقة نفسها، قيمة A_1، التي تمثّل مساحة البستان.

أوجد قيمة كلّ من Δx و x_i و $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\Delta x\right]$ بدلالة n، علمًا أنّ

$$1 + 9 + 25 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + \frac{2i-1}{2}\Delta x = 0 + \frac{2i-1}{2} \times \frac{2}{n} = \frac{2i-1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\Delta x\right] = \frac{2}{n} \times \left[\frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \frac{25}{n^2} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{n^3} \times \left[1 + 9 + 25 + \dots + (2n-1)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n^3} \times \left[\frac{4n^3 - n}{3}\right] = \frac{8n^2 - 2}{3n^2}$$

d. أوجد القيمة الدقيقة لـ A_1.

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 2}{3n^2} = \frac{8}{3}$$

إذن، المساحة الدقيقة للبستان تساوي 2.667 كيلومتر مربّع.

2. الآن، لتكن الدالّة $h(x) = x$. تحقّق من أنّ بإمكاننا استعمال طريقة ريمان لإيجاد القيمة الدقيقة لمساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالّة h والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$

علمًا أن $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

الدالّة h موجبة ومتّصلة في الفترة $[1, 2]$، إذن يمكن استعمال طريقة ريمان كما يلي:

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = 1 + \frac{2i-1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{2i-1}{2n} + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\Delta x\right] = \frac{1}{2n^2} \times \left[1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + \cdots + (2n-1) + 2n\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2} \times \left[2n^2 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2} \times \left[2n^2 + n^2\right] = \frac{3}{2}$$

القيمة الدقيقة للمساحة هي:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

الاسم ______________________________

2 اختبار بداية الوحدة

.1 أيّ الخيارات التالية يمثّل صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة $(0, 1)$ وميله $-\frac{1}{2}$؟

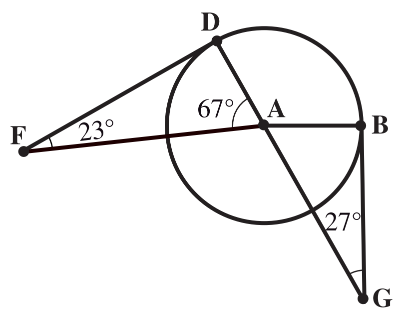
Ⓐ $\frac{-y}{2} = x - \frac{1}{2}$

Ⓑ $y = -\frac{x}{2} + 1$

Ⓒ $y = -\frac{x}{2} - 1$

Ⓓ $y + \frac{x}{2} = 1$

.2 أي من القطع المستقيمة في الرسم أدناه هي مماس للدائرة؟



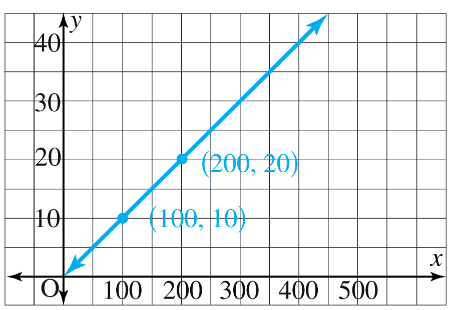
Ⓐ DF

Ⓑ BG

Ⓒ AD

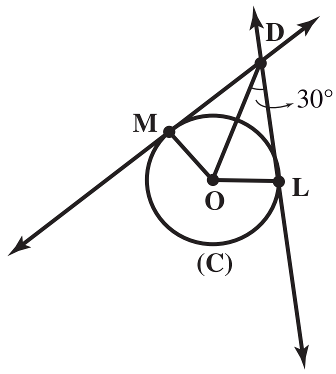
Ⓓ AF

.3 يقدّم متجر لبيع المواد الاستهلاكيّة بطاقة ممغنطة تُستعمل لجمع النقاط عند كلّ عمليّة شراء. تسعى منى للوصول إلى عدد النقاط الذي يخولّها الحصول على هديّة عينيّة. حصلت منى على بطاقة ممغنطة في الأسبوع الماضي، واشترت أشياء ثمنها QR 100، فأصبح رصيدها 10 نقاط. واشترت اليوم أشياء ثمنها QR 200، فازداد رصيدها بمقدار 20 نقطة. إذا كانت العلاقة d التي تربط بين ثمن المشتريات، x، وعدد النقاط، y، علاقة خطيّة، أوجد الصيغة التي تربط بين هذه المعطيات، ثمّ مثّل هذه العلاقة بيانيًّا، وفسّر ماذا يمثّل الميل، ثمّ توقّع عدد النقاط التي ستكسبها منى في المرّة القادمة إذا اشترت أشياء بقيمة QR 50 فقط.



يكوّن الخط الواصل بين النقطتين $(100, 10)$ و $(200, 20)$ المستقيم الذي يربط بين المعطيات. إذن، الصيغة هي $y = \frac{x}{10}$.
الميل يساوي $\frac{1}{10}$، أي أنّ عدد النقاط المكتسبة في كلّ عمليّة شراء يساوي عُشر قيمة المشتريات. بالتالي، وحسب الصيغة، إذا كانت قيمة مشتريات منى QR 50، فسوف تكسب 5 نقاط فقط.

.4 يشكّل المستقيمان $\overleftrightarrow{DL}$ و $\overleftrightarrow{DM}$ في الشكل المعطى مماسّان للدائرة (C). أوجد قياس الزاوية $\angle DOL$ وطول $\overline{DO}$ إذا كان طول قطر الدائرة يساوي 4 وحدات.



$m \angle DOL = 60°$

DO = 4 وحدات

.5 في علاقة تناسب عكسيّ بين المتغيّرين x و y، $y = 2$ عندما $x = 4$. أيّ الخيارات التالية يمثّل صيغة المعادلة التي تربط بين هذين المتغيّرين؟

Ⓐ $y = \frac{x}{2}$

Ⓑ $y = -\frac{x}{2}$

Ⓒ $y = x - 2$

● $y = \frac{8}{x}$

.6 معادلات خطوط التقارب الرأسي والأفقي للدالة $f(x) = \frac{1}{x-4}$ هي:

Ⓐ $x = 0$ و $y = 4$

Ⓑ $x = 0$ و $y = 0$

● $x = 4$ و $y = 0$

Ⓓ $x = 4$ و $y = 4$

.7 لتكن الدالّة $f(x) = \frac{1}{x-4} + 3$. أيّ الخيارات التالية يمثّل خطّي التقارب الأفقي والرأسيّ للتمثيل البيانيّ لهذه الدالّة؟

Ⓐ $x = 4$ هو خطّ تقارب أفقيّ و $y = 3$ هو خطّ تقارب رأسيّ.

Ⓑ $x = 4$ هو خطّ تقارب رأسيّ ولا يوجد خطّ تقارب أفقيّ.

● $x = 4$ هو خطّ تقارب رأسيّ و $y = 3$ هو خطّ تقارب أفقيّ.

Ⓓ لا يوجد خطّ تقارب رأسيّ و $y = 3$ هو خطّ تقارب أفقيّ.

.8 إذا كان $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = 2x^2 + x - 1$، أيّ الخيارات التالية يمثّل $f + g$؟

Ⓐ $2x^3 - x^2 - 2x + 2$

Ⓑ $x^2 - x$

Ⓒ $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

● $2x^3 + x^2 - x$

.9 إذا كان $f(x) = -4x + 3$ و $g(x) = 5x^2 + x$، أيّ الخيارات التالية يمثّل $f(x) \times g(x)$؟

● $-20x^3 + 11x^2 + 3x$

Ⓑ $20x^3 + 11x^2 + 3x$

Ⓒ $-20x^3 + 19x^2 + 3x$

Ⓓ $-20x^3 - 19x^2 + 3x$

.10 إذا كان $f(x) = -5x$ و $g(x) = 5x^2 + \frac{x}{5}$، أيّ الخيارات التالية يمثّل $(f \circ g)(x)$؟

Ⓐ $25x^2 - x$

Ⓑ $-25x^2 + x$

● $-25x^2 - x$

Ⓓ $25x^2 + x$

.11 لتكن الدالّة $f(x) = -x + 2$ والدالّة $g(x) = x^2 - 3x$ والدالّة $h(x) = x^3 + 2x$.
إذا كان $q(x) = g(x) - h(x)$، أيّ الخيارات التالية يمثّل $(f \circ q)(x)$ ؟

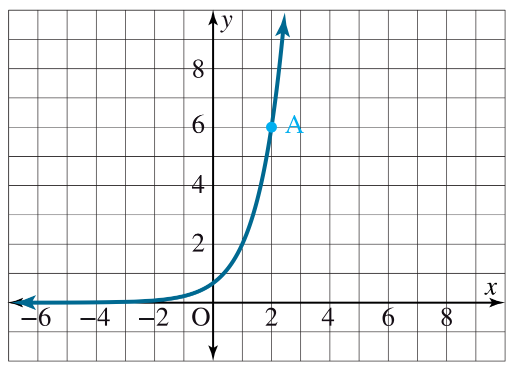
Ⓐ $-x^3 + x^2 - 5x + 2$

Ⓑ $x^3 - x^2 + 5x + 2$

Ⓒ $x^3 - x^2 + 3x - 2$

Ⓓ $x^3 - x^2 - x + 2$

.12 لتكن الدالّة $g(x) = \frac{2}{3}3^x$. أوجد قيمة g عندما $x = 2$، ثم عيّن النقطة الناتجة على التمثيل البياني للدالّة g.



$g(2) = 6$

$A(2, 6)$

.13 لتكن الدالّة $f(x) = e^{\frac{x}{3}} + 2$. أوجد معادلة الدالّة g التي هي معكوس الدالّة f، ثم أوجد قيمة g عندما $x = 6$.

$g(x) = 3\ ln(x - 2)$

$g(6) \approx 4.16$

.14 تنمذج الدالّة $F(t) = 375\ e^{0.021t}$ عدد السناجب في محميّة بيئيّة، حيث t عدد السنوات منذ العام 2018، في أيّ عام سيصبح عدد السناجب في هذه المحميّة 600 سنجاب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب سنة كاملة.

نعوّض القيمة 600 في الدالّة F:

$600 = 375\ e^{0.021t}$

$e^{0.021t} = 1.6$

$t = \frac{ln\ 1.6}{0.021} \approx 22$

إذن، سيصبح عدد السناجب في هذه المحميّة 600 سنجاب في العام 2040

.15 افترض أنّ x عدد موجب، استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة $g(x) = ln\left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{x}\right)$ في صورة مجموع لوغاريتمين أو الفرق بين لوغاريتمين، ثمّ استعمل الصيغة الناتجة لحلّ المعادلة $g(x) = 0$.

$ln\left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{x}\right) =$

$ln(4x^2 - 3x + 1) - ln\ x$

$4x^2 - 3x + 1 > 0$

$g(x) = 0$

$ln(4x^2 - 3x + 1) - ln\ x = 0$

$ln(4x^2 - 3x + 1) = ln\ x$

$4x^2 - 3x + 1 = x$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$(2x - 1)^2 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

16. أيّ الخيارات التالية يمثّل الزاوية المرجعيّة والجيب وجيب التمام والظلّ للزاوية $\theta = 330°$؟

● $30°, \sin\theta = -\frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ⓑ $45°, \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = -1$

Ⓒ $60°, \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\theta = \frac{1}{2}, \tan\theta = -\sqrt{3}$

Ⓓ $330°, \sin\theta = -\frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

17. أيّ الخيارات التالية يمثّل السعة والدورة للدالّة $f(x) = 5\cos 3x$؟

Ⓐ السعة: 3؛ الدورة: $\frac{2\pi}{5}$

● السعة: 5؛ الدورة: $\frac{2\pi}{3}$

Ⓒ السعة: 5؛ الدورة: 2π

Ⓓ السعة: $\frac{2\pi}{3}$؛ الدورة: 5

---

18. أيّ الخيارات التالية يمثّل الصورة المبسّطة للمقدار $\frac{\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x}{\cos x}$؟

Ⓐ $\frac{1+\sin^4 x}{\cos x}$

Ⓑ $\sin^2 x + \sin^4 x$

● $\sin x \tan x$

Ⓓ لا يمكن تبسيط هذا المقدار

---

19. أيّ المقادير التالية يمثّل قيمة $\lim_{x\to 1} e^{-(x^3+x)}$؟

Ⓐ $-e^2$

● e^{-2}

Ⓒ $2e^{-1}$

Ⓓ $\frac{-1}{e^2}$

---

20. أيّ المقادير التالية يمثّل $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-x+2} - \frac{1}{3x}\right)$؟

● $-\frac{1}{6}$

Ⓑ $\frac{1}{6}$

Ⓒ $\frac{5}{6}$

Ⓓ ليس أيًّا ممّا سبق

الاسم ______________________________

2-1 اختبار الدرس

معدّل التغيّر

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل متوسّط معدّل تغيّر الدالّة $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ في الفترة $[1, 2]$؟

Ⓐ $\sqrt{2} - 3$

Ⓑ $\frac{\sqrt{2} - 3}{2}$

Ⓒ $\frac{3 - \sqrt{2}}{2}$

● $3 - \sqrt{2}$

.2 أيّ من الخيارات التالية يمثّل معدّل التغيّر اللحظيّ للدالّة $f(x) = x^2 + 5x$ عند $x = 0$؟

Ⓐ -5

Ⓑ 0

● 5

Ⓓ لا يوجد

.3 أوجد معدّل التغيّر اللحظيّ للدالّة $f(x) = \sqrt{x + 1}$ عند $x = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{1}}{h} \times \frac{\sqrt{h+1} + \sqrt{1}}{\sqrt{h+1} + \sqrt{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

.4 أوجد ميل المماسّ لمنحنى الدالّة $f(x) = x^3 - 2x$ عند النقطة $(1, -1)$.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 2(1+h) + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h^2 + 3h + 1\right) = 1$$

.5 لنفترض أنّ بالإمكان نمذجة أرباح إحدى الشركات بآلاف الريالات، من بيع x قطعة بالدالّة $P(x) = x^2 - 4x - 2$.
أوجد معدّل التغير اللحظيّ للربح عند $x = 5$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(5+h) - P(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 6) = 6$$

إذن، معدّل التغير اللحظيّ للربح عند $x = 5$ يساوي 6

الاسم ________________________________

2-2 اختبار الدرس

تعريف المشتقّة

1. صِل كلّ دالّة إلى اليمين بمشتقّتها إلى اليسار.

مشتقّة الدالّة f عند $x = a$ هي

مشتقّة الدالّة f عند $x = h$ هي

$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{f(h+a) - f(h)}{a}$

$\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - f(a)$

$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{f(h+a) - f(a)}{a}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

---

2. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = x^2 - 7x + 1$ عند $x = 0$.

Ⓐ -7 Ⓒ 7

Ⓑ 0 Ⓓ لا يوجد

---

3. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{x+1}$ في الفترة $]-1, \infty[$.

Ⓐ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{h+1}}$

Ⓑ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Ⓒ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Ⓓ ليست لهذه الدالّة مشتقّة

---

4. لنفترض أنّ الطلب D على سلعة معيّنة عندما يكون سعرها p، بالريالات، معطى بالدالّة $D(p) = -2p^2 + 200$. أوجد معدّل التغيّر اللحظيّ للطلب على هذه السلعة عندما يكون سعرها QR 5، وفسّر معناه.

$$\lim_{h \to 0} \frac{D(5+h) - D(5)}{h}$$

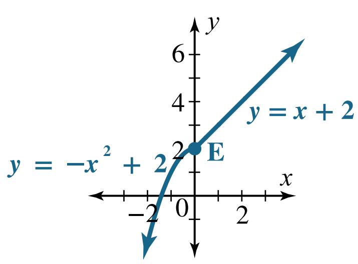
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2(5+h)^2 + 200 - 150}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-20 - 2h) = -20$$

عند السعر QR 5، يتناقص الطلب على السلعة بمعدّل 20 لتزايد في السعر مقداره QR 1.

---

5. قارن بين مشتقّة الدالّة التالية من جهة اليمين ومشتقّتها من جهة اليسار لتثبت أنّ الدالّة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة E.



الدالّة متّصلة عند $x = 0$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 + 2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} -h = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h + 2 - 2}{h} = 1$$

مشتقّة الدالّة من جهة اليسار عند النقطة E لا تساوي مشتقّتها من جهة اليمين عند هذه النقطة، وبالتالي الدالّة غير قابلة للاشتقاق عند E.

الاسم ____________________

2-3 اختبار الدرس

قواعد الاشتقاق

1. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ باستعمال قواعد الاشتقاق.

Ⓐ $1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Ⓑ $1 + \frac{1}{2}x\sqrt{x}$

● $1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Ⓓ لا يمكن إيجادها

2. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = (2x^2 + 1)^2$ باستعمال قواعد الاشتقاق.

● $f'(x) = 16x^3 + 8x$

Ⓑ $f'(x) = 4x^2 + 2$

Ⓒ $f'(x) = 16x^3$

Ⓓ $f'(x) = 8x$

3. أثبت أنّ مشتقّة الدالّة $g(x) = \frac{x+1}{x}$ هي نفس مشتقّة الدالّة الرئيسة $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + f(x)$$

$$g'(x) = 0 + f'(x) = f'(x)$$

4. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt[3]{x}}$.

$$f(x) = x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

5. لتكن الدالّة $h(x) = f(x) - g(x)$. أثبت أنّ المماسّ لمنحنى الدالّة h يكون أفقيًّا عند $x = a$، علماً بأن مماس منحنى الدالّة f موازي لمماسّ منحنى الدالّة g.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

إذا كان $f'(a) = g'(a)$، إذن $h'(a) = 0$.

M02_MTH01_ANC12_QTR_AR_V1.indd 31 04/03/2022 2:27:47 PM

الاسم ________________________

2-4 اختبار الدرس

قاعدتا الضرب والقسمة في الاشتقاق

.1 أوجد مشتقّة الدالّة
$$f(x) = (x^2+1)(x^3+2x^2-1)$$
باستعمال قاعدة الضرب.

Ⓐ $2x^4+4x^3-2x$

Ⓑ $5x^4+8x^3+3x^2-6x$

Ⓒ $-x^4+3x^2-6x$

● $5x^4+8x^3+3x^2+2x$

.2 معادلة المماس لمنحنى الدالّة $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ عند النقطة $(0, -1)$ هي:

Ⓐ $y=-2x-1$

● $y=-x-1$

Ⓒ $y=-x+1$

Ⓓ $y=x-1$

.3 أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

.4 إذا كانت $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ ، و $f(1) = \dfrac{u'(1)}{v'(1)}$.
أوجد $f'(1)$.

$f'(1)= 0$

.5 لتكن $f(x) = [u(x)]^2$ ، حيث u دالّة.
أثبت أنّ $f'(x) = 2u(x)u'(x)$ باستعمال قاعدة الضرب.

$$f(x) = u(x) \times u(x)$$
$$f'(x) = u'(x)u(x) + u(x)u'(x)$$
$$= 2u(x)u'(x)$$

الاسم ______________________________

2-5 اختبار الدرس

قاعدة السلسلة

1. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{0 - 2(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$$

---

2. يمكن إيجاد موقع جسم يتحرّك على خطّ في المستوى الإحداثيّ من خلال الدالّة $s(t) = 0.1(0.2t^3 - 1)^{\frac{3}{2}}$، حيث s سرعة الجسم بالأمتار و t الزمن بالثواني. أوجد السرعة اللحظيّة للجسم عند $t = 4\ sec$.

$$s'(t) = 0.09t^2\sqrt{0.2t^3 - 1}$$

$$s'(4) \approx 4.95\ \text{m}/sec$$

---

3. إذا كانت $f(x) = x^3$ و $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$، فإن $(f \circ g)'(x)$ هي:

Ⓐ $3x^2(9x^6 - 4x^3)$

Ⓑ $3x^2(9x^2 - 4x)$

Ⓒ $(27x^2 - 12x)(3x^3 - 2x^2 + 5)^2$

Ⓓ $3(3x^3 - 2x^2 + 5)^2$

---

4. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = (3x^2 - 1)^7$.

Ⓐ $7(3x^2 - 1)^6$

Ⓑ $42x(3x^2 - 1)^6$

Ⓒ $7[6x(3x^2 - 1)]^6$

Ⓓ $6x(3x^2 - 1)^6$

---

5. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4x + 1}$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$$

الاسم ______________________________

2-6 اختبار الدرس

مشتقّات الدوال الأسيّة واللوغاريتميّة

1. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 3x}}$.

Ⓐ $e^{\sqrt{x^2 - 3x}}$

Ⓑ $(2x - 3)e^{\sqrt{x^2 - 3x}}$

Ⓒ $\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x}} e^{\sqrt{x^2 - 3x}}$

Ⓓ $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} e^{\sqrt{x^2 - 3x}}$

2. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(3x^2 - 2x + 1)$.

Ⓐ $\frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 1}$

Ⓑ $\frac{1}{3x^2 - 2x + 1}$

Ⓒ $\frac{1}{(6x - 2)(3x^2 - 2x + 1)}$

Ⓓ $\frac{3x - 2}{3x^2 - 2x + 1}$

3. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = xe^{x^2 - x}$.

$f'(x) = (2x^2 - x + 1)e^{x^2 - x}$

4. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x}{ln\, x}$.

$f'(x) = \frac{ln\, x - 1}{(ln\, x)^2}$

5. يمرّ المماس لمنحنى الدالّة $y = e^{2x - 1}$ الذي ميله m بنقطة الأصل. أوجد قيمة m.

لتكن $(a, e^{2a - 1})$ نقطة التماس حيث المماس لمنحنى الدالّة يمرّ بنقطة الأصل.

ميل هذا المماس، m، يساوي $\frac{e^{2a-1} - 0}{a - 0} = \frac{e^{2a-1}}{a}$

ويساوي أيضًا مشتقّة الدالّة عند $x = a$

أي $2e^{2a-1}$

بالمساواة بين هذين المقدارين وحلّ المعادلة الناتجة نحصل على:

$$\frac{e^{2a-1}}{a} = 2e^{2a-1}$$

$$2ae^{2a-1} = e^{2a-1}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

إذن، $m = 2$.

الاسم ______________________________

2-7 اختبار الدرس

مشتقّات الدوالّ المثلّثيّة

1. مشتقّة الدالّة $f(x) = \sin(x^3 + 1)$ هي:

Ⓐ $3x^2 \cos(x^3 + 1)$

Ⓑ $\cos(x^3 + 1)$

Ⓒ $-\cos(x^3 + 1)$

Ⓓ $-3x^2 \cos(x^3 + 1)$

---

2. مشتقّة الدالّة $f(x) = \cos(\sqrt{x} + 1)$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 1)$

Ⓑ $-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 1)$

Ⓒ $-\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 1)$

Ⓓ $-\sin(\sqrt{x} + 1)$

---

3. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$.

$$f'(x) = \frac{1 + \cos x - \sin x}{(\cos x + 1)^2}$$

---

4. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالّة $y = x \sin x$ عند $x = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x$$

$$y(4) = 4 \sin 4 \approx -3.027$$

$$y'(4) = \sin 4 + 4 \cos 4 \approx -3.371$$

معادلة المماس:

$$y + 3.027 = -3.371(x - 4)$$

$$y = -3.371x + 10.457$$

5. يتأرجح بندول الساعة وفق الصيغة $\theta(t) = \frac{1}{10} \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$، حيث θ هي الزاوية التي يكوّنها بندول الساعة مع الخطّ الرأسيّ، و t الزمن بالثواني. أوجد الزمن الذي تصل فيه السرعة الزاويّة لبندول الساعة إلى قيمتها القصوى للمرّة الأولى من لحظة بدء تأرجحه.

السرعة الزاويّة لبندول الساعة هي

$$\theta' = \frac{\pi}{10} \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

تصل السرعة الزاويّة لبندول الساعة إلى قيمتها القصوى عندما

$$\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\pi t - \frac{\pi}{2} = 0$$

إذن، $t = \frac{1}{2}$ **sec.**

M02_MTH01_ANC12_QTR_AR_V1.indd 35 04/03/2022 2:27:51 PM

الاسم ______________________________

2-8 اختبار الدرس

الاشتقاق الضمنيّ

1. حدّد قيمة المشتقّة $\frac{dy}{dx}$ عند $(1, 1)$ إذا كان $y^2 - 4xy + 4 = 0$.

Ⓐ -2

Ⓑ 0

Ⓒ $\frac{2}{3}$

Ⓓ 2

2. حدّد قيمة المشتقّة $\frac{dy}{dx}$ عند $(2, \sqrt{3})$ إذا كان $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$.

$\frac{dy}{dx}$ عند $(2, \sqrt{3})$ تساوي $\sqrt{3}$

3. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالّة $x^2 + 2xy - y^2 = 2$ عند النقطة $(3, -1)$.

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{-2x - 2y}{2x - 2y}$$

عند النقطة $(3, -1)$:

$$y'(3) = -\frac{1}{2}$$

معادلة المماس:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

4. إذا رميت حجرين في نقطتين مختلفتين من سطح بركة ماء في الوقت نفسه، فإنّ الموجات الناتجة على سطح الماء تكوّن منحنيات متلاحقة. افترض أنّ أحد هذه المنحنيات معرّف ضمنيًّا بالصيغة $-x^2 + y^2 = 1$.
أوجد النقاط على هذا المنحنى حيث تكون المشتقة $\frac{dy}{dx}$ تساوي الصفر.

$$-2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ , } x = 0$$

إذن، النقاط هي $(0, 1)$ و $(0, -1)$

5. أيّ من النقاط التالية يكون عندها المماسّ للمنحنى المعرّف بالصيغة الضمنيّة $\sin (x + y) - y + 2 = 0$ أفقيًّا؟

Ⓐ $\left(\frac{\pi}{2} + 3, 3\right)$

Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2} - 3, 3\right)$

Ⓒ $\left(\frac{\pi}{2} - 3, -3\right)$

Ⓓ لا توجد نقطة كهذه

الاسم ______________________

2-9 اختبار الدرس

المشتقّات من الرتب العليا

1. أوجد المشتقّة من الدرجة الثانية للدالّة $f(x) = x^2 \ln x$.

Ⓐ $f''(x) = 2 \ln x + 3$

Ⓑ $f''(x) = 2 \ln x + 1$

Ⓒ $f''(x) = 2 \ln x - 1$

Ⓓ $f''(x) = 2 \ln x$

---

2. ليكن $y = \sin ax$. أوجد قيم a إذا كان $y'' + 4y = 0$ و $\sin ax = 0$ لجميع قيم a.

$a = 2, a = -2$

---

3. أوجد المشتقّة من الدرجة الثالثة للدالّة $f(x) = xe^x$.

Ⓐ $3e^x$

Ⓑ $3e^x + xe^x$

Ⓒ $2e^x + xe^x$

Ⓓ $3e^x - xe^x$

4. المشتقّة الثالثة لدالّة كثيرة الحدود هي 0، والمشتقّة الثانية لهذه الدالّة عند نقطة معيّنة هي 2
أوجد درجة هذه الدالّة ومعاملها الرئيس.

الدرجة 2، والمعامل الرئيس 1

---

5. يمكن نمذجة حركة صخرة تتدحرج على منحدر بالمعادلة $s(t) = (5 \sin \alpha)\, t^2 + \frac{1}{3}t$، حيث t الزمن بالثواني و $s(t)$ المسافة، بالأمتار، التي تقطعها الصخرة بعد مرور t ثانية ابتداءً من نقطة معيّنة، و α قياس الزاوية التي يكوّنها المنحدر مع سطح الأرض بالراديان.

تمثّل المشتقّة الثانية $s''(t)$ تسارع الصخرة أثناء تدحرجها، أي التغيّر اللحظيّ لسرعتها. أوجد قياس زاوية المنحدر α إذا كان تسارع الصخرة يساوي 4

$s''(t) = 10 \sin \alpha = 4$

$\sin \alpha = \frac{4}{10} = 0.4$

$\alpha = \sin^{-1}(0.4) = 0.41 \text{ rad}$

الاسم ________________

2 تقويم الوحدة، النموذج A

1. أوجد باستعمال النهاية ميل المماسّ لمنحنى الدالّة $f(x) = x^2 + x$ عند $x = 0$.

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h+1)$$
$$= 1$$

2. أي من النهايات التالية تساوي مشتقة الدالّة $f(x) = (x-1)^3$ عند $x = a$.

Ⓐ $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(a+h-1)^3-(a-1)^3}{h}$

Ⓑ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h-1)^3+(a-1)^3}{h}$

● $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h-1)^3-(a-1)^3}{h}$

Ⓓ $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(a+h-1)^3+(a-1)^3}{h}$

3. علما أنّ $\sqrt{x+h}-\sqrt{x} = \dfrac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$، أيّ من النهايات التالية هي مشتقة الدالّة $f(x) = \sqrt{x}$؟

● $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

Ⓑ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$

Ⓒ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

Ⓓ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-x}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$

4. مشتقّة الدالّة $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2}$ هي:

Ⓐ $\dfrac{x^2-2}{x^2}$ Ⓒ $\dfrac{x^2+1}{x^2}$

Ⓑ $\dfrac{2}{x^2}$ ● $\dfrac{x^2+2}{x^2}$

5. إذا كانت $f'(1) = 5$ و $g'(1) = 3$ وإذا كانت $h(x) = 2f(x) - 3g(x) + 1$، فإن $h'(1)$ تساوي:

Ⓐ -9

● 1

Ⓒ 2

Ⓓ غير موجودة

6. لنفرض أن u و v دالتان بدلالة x وهما قابلتان للاشتقاق عند $x = 3$، وأن $u(3) = 1$ و $u'(3) = -1$ و $v(3) = 4$ و $v'(3) = 2$، إذن مشتقة الدالة $f(x) = uv$ عند $x = 3$ تساوي:

Ⓐ -6 ● -2

Ⓑ -4 Ⓓ 6

7. إذا كانت $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$، حيث $f(-2) = 5$ و $f'(-2) = -4$ و $g(-2) = -1$ و $g'(-2) = 1$. فإن قيمة $h'(-2)$ تساوي:

Ⓐ -9 Ⓒ 1

● -1 Ⓓ 9

8. مشتقّة الدالّة $f(x) = (x^2-5x+1)^4$ هي:

● $(8x-20)(x^2-5x+1)^3$

Ⓑ $(2x-5)(x^2-5x+1)^3$

Ⓒ $4(x^2-5x+1)^3$

Ⓓ $4(2x-5)^3$

9. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Ⓐ $\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$ Ⓒ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}$

● $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ Ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{2x-2}}$

---

10. أوجد مشتقّة الدالّة

$f(x) = (x^2-1)^3\,(5x^3+1)^2$.

$$f'(x) = 6x\,(x^2-1)^2\,(5x^3+1)^2 + 30x^2\,(x^2-1)^3\,(5x^3+1)$$

---

11. مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ هي:

Ⓐ $2xe^{\sqrt{x^2+1}}$

Ⓑ $e^{\sqrt{x^2+1}}$

● $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$

---

12. مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(\sqrt{x}+1)$ هي:

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

Ⓑ $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

● $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

Ⓓ $\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

---

13. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x+1}$.

$$f'(x) = \frac{1 - ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

---

14. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sin(x^2+2x)$.

$$f'(x) = (2x+2)\cos(x^2+2x)$$

---

15. عندما نشدّ قطعة معدنيّة موصولة بطرف نابض على محور أفقيّ، بعد تثبيت طرفه الآخر، تتحرّك القطعة المعدنيّة ذهابًا وإيابًا وفق المعادلة $x(t) = \frac{1}{2}\sin(3t+1)$، حيث $x(t)$ هو إحداثيّ القطعة المعدنيّة على المحور x، و t الزمن. أوجد السرعة اللحظيّة لهذه القطعة المعدنيّة عند $t = 3$.

$$x'(t) = \frac{3}{2}\cos(3t+1)$$

$$x'(3) = 1.477$$

السرعة اللحظية هي 1.477 cm/s تقريبا.

---

16. أوجد قيمة $\dfrac{dy}{dx}$، عند النقطة $(1, 2)$ إذا كان $x^2 + y^2 + 2xy + 4x - y + 1 = 0$.

● $\dfrac{dy}{dx} = -2$ Ⓒ $\dfrac{dy}{dx} = 2$

Ⓑ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{6}$ Ⓓ المشتقّة غير موجودة

---

17. تتحرّك الأقمار الصناعيّة في مسارات على شكل قطع ناقص وفق المعادلة $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$، حيث a و b عددان حقيقيّان موجبان. إذا كان جسم يتحرّك في المستوى الإحداثيّ وفق المعادلة $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$، أوجد معادلة المماسّ لمسار هذا الجسم عند النقطة $\left(-1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{9}y'y = 0$$

ميل المماس:

$$y'(-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

معادلة المماس:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$$

18. المشتقّة الثانية للدالّة $f(x) = x\ ln\ x$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ Ⓒ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

● $\frac{1}{x}$ Ⓓ $\frac{1}{x} + 1$

---

19. أوجد قيمة التسارع الثابتة لجسم يسقط من علٍ وفق المعادلة $s(t) = 5t^2 + 2t + 1$، حيث $s(t)$ هي المسافة التي يقطعها بدءًا من نقطة معيّنة.

$s'' = 10$

---

20. أوجد قاعدةً المشتقّة الثانية لضرب دالّتين.

$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

الاسم ________________

2 تقويم الوحدة، النموذج B

.1 أوجد ميل المماسّ لمنحنى الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ عند $x = 0$ باستعمال النهاية.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (h+2)$$
$$= 2$$

.2 أيّ من النهايات التالية تساوي مشتقة الدالّة $f(x) = (x+2)^3$ عند $x = a$.

Ⓐ $\lim_{h\to 0} \frac{(a+h+2)^3 + (a+2)^3}{h}$

Ⓑ $\lim_{h\to -2} \frac{(a+h+2)^3 + (a+2)^3}{h}$

Ⓒ $\lim_{h\to -2} \frac{(a+h+2)^3 - (a+2)^3}{h}$

● $\lim_{h\to 0} \frac{(a+h+2)^3 - (a+2)^3}{h}$

.3 مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{-x}$ باستعمال تعريف المشتقّة هي النهاية:

Ⓐ $\lim_{h\to 0} \frac{e^{x}(e^{h}-1)}{h}$

Ⓑ $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-x}(e^{h}-1)}{h}$

Ⓒ $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-h}(e^{-x}-1)}{h}$

● $\lim_{h\to 0} \frac{e^{-x}(e^{-h}-1)}{h}$

.4 مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2}$ هي:

● $\frac{x^2 - 2}{x^2}$

Ⓑ $\frac{x^2 + 2}{x^2}$

Ⓒ $\frac{-2}{x^2}$

Ⓓ $\frac{x^2 - 1}{x^2}$

.5 إذا كانت $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 2$ وكانت $h(x) = 4f(x) - 2g(x) + 3$، فإنّ $h'(2)$:

Ⓐ تساوي 2

● تساوي 8

Ⓒ تساوي 11

Ⓓ غير موجودة

.6 إذا كانت u و v دالّتين بدلالة x وقابلتين للاشتقاق عند $x = 1$، وكان $u(1) = 2$ و $u'(1) = -2$ و $v(1) = 3$ و $v'(1) = -2$، فإنّ مشتقة الدالّة $f(x) = uv$ عند $x = 1$ تساوي:

● -10

Ⓑ -2

Ⓒ 2

Ⓓ 4

.7 إذا كانت $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، حيث $f(-1) = 1$ و $f'(-1) = 0$ و $g(-1) = -2$ و $g'(-1) = 4$، فإن قيمة $h'(-1)$ تساوي:

Ⓐ -2

● -1

Ⓒ 0

Ⓓ 1

.8 مشتقّة الدالّة $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^4$ هي:

Ⓐ $(2x-3)(x^2-3x+2)^3$

Ⓑ $4(x^2-3x+2)^3$

Ⓒ $4(2x-3)^3$

● $(8x-12)(x^2-3x+2)^3$

9. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$.

Ⓐ $\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}$ ● $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Ⓑ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$ Ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{2x+2}}$

---

10. أوجد مشتقّة الدالّة

$f(x) = (x^2+1)^3(3x^2+1)^2$.

$$f'(x) = 6x(x^2+1)^2(3x^2+1)^2 + 12x(x^2+1)^3(3x^2+1)$$

---

11. مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{\sqrt{x^2-2}}$ هي:

Ⓐ $2xe^{\sqrt{x^2-2}}$

● $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}e^{\sqrt{x^2-2}}$

Ⓒ $e^{\sqrt{x^2-2}}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}e^{\sqrt{x^2-2}}$

---

12. مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(\sqrt{x}+3)$ هي:

Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

Ⓑ $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$

Ⓒ $\dfrac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}$

● $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$

---

13. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \dfrac{x+3}{ln(x+3)}$.

$$f'(x) = \frac{ln(x+3)-1}{ln^2(x+3)}$$

---

14. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \cos(x^2+2)$.

$$f'(x) = -2x\sin(x^2+2)$$

---

15. تمّت برمجة آلة لتحريك أداة لرسم النقوش على المسطّحات الخشبيّة. يمكن تحديد موقع رأس الأداة على المحور x باستعمال الدالّة $x(t) = 2\cos(3t)$، حيث t الزمن بالثواني، و $x(t)$ المسافة الفاصلة بين رأس الأداة ونقطة الأصل عند الزمن t.
أوجد السرعة اللحظيّة للأداة عند $t = 4$.

$$x'(t) = -6\sin(3t)$$

$$x'(4) = -3.129$$

إذن، السرعة اللحظيّة عند $t = 4$ تساوي 3.219 m/sec تقريبًا.

---

16. أوجد قيمة $\dfrac{dy}{dx}$، عند النقطة $(1, -1)$ إذا كان $x^2 + y^2 + 2xy - x + y + 2 = 0$.

Ⓐ $\dfrac{dy}{dx} = -1$ Ⓒ $\dfrac{dy}{dx} = 3$

● $\dfrac{dy}{dx} = 1$ Ⓓ المشتقّة غير موجودة

---

17. إذا كان جسم يتحرّك في المستوى الإحداثيّ وفق المعادلة $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$، أوجد معادلة المماسّ لمسار هذا الجسم عند النقطة $\left(2, \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)$.

$$\frac{2}{9}x + \frac{1}{8}y'y = 0$$

ميل المماسّ:

$$y'(2) = -\frac{8\sqrt{5}}{15}$$

معادلة المماسّ:

$$y = -\frac{8\sqrt{5}}{15}x + \frac{36\sqrt{5}}{15}$$

18. المشتقّة الثانية للدالّة $f(x) = xe^x$ هي:

A $(x+2)e^x$

Ⓒ e^x

Ⓑ $(x+1)e^x$

Ⓓ $-xe^x$

---

19. تسير سيّارة في طريق مستقيم ويمكن تحديد موقعها بالنسبة لنقطة الأصل، بالأقدام، في أيّ زمن، بالثواني، وفق الدالّة الزمنيّة التالية:

$s(t) = t^3 - 2t^2 - 15t + 1$

أوجد تسارع السيّارة عند $t = 4$.

$$s'(t) = 3t^2 - 4t - 15$$

$$s''(t) = 6t - 4$$

$$s''(4) = 20$$

إذن، تسارع السيّارة عند $t = 4$ يساوي 20 ft/sec^2 تقريبًا.

---

20. لتكن u دالّة مشتقّتها الثانية موجودة ولا تساوي الصفر. أوجد قاعدة المشتقّة الثانية للدالّة: $f(x) = ue^x$.

$$f''(x) = e^x(u'' + 2u' + u)$$

الاسم ______________________

2 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 أوجد ميل المماسّ لمنحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 3x$ عند $x = 0$ باستعمال النهاية.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 3h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (h - 3)$$
$$= -3$$

.2 أيّ من النهايات التالية تساوي مشتقّة الدالّة $f(x) = (x-3)^3$ عند $x = a$؟

Ⓐ $\lim_{h \to 0} \frac{(a+h-3)^3 - (a-3)^3}{h}$

Ⓑ $\lim_{h \to 3} \frac{(a+h-3)^3 - (a-3)^3}{h}$

Ⓒ $\lim_{h \to 3} \frac{(a+h-3)^3 + (a-3)^3}{h}$

Ⓓ $\lim_{h \to 0} \frac{(a+h-3)^3 + (a-3)^3}{h}$

.3 مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(2x)$ باستعمال تعريف المشتقّة هي النهاية:

Ⓐ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{2h}{x}\right)$

Ⓑ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln(x + h)$

Ⓒ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

Ⓓ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{x}{h}\right)$

.4 مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2}$ هي:

Ⓐ $\frac{x^2 - 3}{x^2}$ Ⓒ $\frac{3}{x^2}$

Ⓑ $\frac{x^2 + 3}{x^2}$ Ⓓ $\frac{x^2 + 1}{x^2}$

.5 إذا كانت $f'(0) = 1$ و $g'(0) = 3$
وكانت $h(x) = 3f(x) - 2g(x) - 5$،
فإنّ $h'(0)$ تساوي:

Ⓐ -8 Ⓒ 7

Ⓑ -3 Ⓓ 9

.6 إذا كانت u و v دالّتين بدلالة x وقابلتين للاشتقاق عند $x = 1$، وكان $u(1) = 2$ و $u'(1) = -3$ و $v(1) = 3$ و $v'(1) = -2$، فإنّ مشتقّة الدالّة $f(x) = uv$ عند $x = 1$ تساوي:

Ⓐ -12 Ⓒ -5

Ⓑ 6 Ⓓ -13

.7 إذا كانت $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، حيث $f(0) = -1$ و $f'(0) = 1$ و $g(0) = 2$ و $g'(0) = -5$،
فإنّ قيمة $h'(0)$ تساوي:

Ⓐ $-\frac{3}{2}$ Ⓒ $-\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{-1}{5}$ Ⓓ $\frac{7}{4}$

.8 مشتقّة الدالّة $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^4$ هي:

Ⓐ $(8x - 16)(x^2 - 4x + 3)^3$

Ⓑ $4(x^2 - 4x + 3)^3$

Ⓒ $4(2x - 4)$

Ⓓ $(2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^3$

9. حدّد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$.

Ⓐ $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ Ⓒ $\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}$

Ⓑ $\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{3x^2}}$

---

10. أوجد مشتقّة الدالّة

$f(x) = (x^3+1)^3(2x^2-1)^2$.

$$f'(x) = 9x^2(x^3+1)^2(2x^2-1)^2 + 8x(2x^2-1)(x^3+1)^3$$

---

11. مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$ هي:

Ⓐ $-2xe^{\sqrt{1-x^2}}$

Ⓑ $e^{\sqrt{1-x^2}}$

Ⓒ $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}$

Ⓓ $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}$

---

12. مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(\sqrt{x} + 2)$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{2\sqrt{x}+x}$

Ⓑ $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

Ⓒ $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$

Ⓓ $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$

---

13. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{ln(x-2)}{x-2}$.

$$f'(x) = \frac{1 - ln(x-2)}{(x-2)^2}$$

---

14. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \tan(x^2+3)$.

$$f'(x) = 2x\sec^2(x^2+3)$$

---

15. يمكن نمذجة حركة جسم مثبّت بالطرف السفليّ لنابض رأسيّ يتحرّك إلى الأعلى والأسفل بالدالّة $s(t) = 3\sin 2t$، حيث t الزمن بالثواني.
أوجد السرعة اللحظيّة لهذا الجسم عند $t = 1.5$ sec.

$$s'(t) = 6\cos 2t$$

$$s'(1.5) = -5.939$$

إذن، السرعة اللحظيّة عند $t = 1.5$ تساوي 5.939 m/sec

---

16. أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$، عند النقطة $(1, 1)$ إذا كان $x^2 + y^2 - 2xy - x - y + 2 = 0$.

Ⓐ $\frac{dy}{dx} = -1$ Ⓒ $\frac{dy}{dx} = 3$

Ⓑ $\frac{dy}{dx} = 1$ Ⓓ المشتقّة غير موجودة

---

17. إذا كان جسم يتحرّك في المستوى الإحداثيّ وفق المعادلة $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$، أوجد معادلة المماسّ لمسار هذا الجسم عند النقطة $(-2, 2\sqrt{3})$.

$$2x - \left(\frac{1}{2}\right)y'y = 0$$

ميل المماسّ:

$$y'(-2) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

معادلة المماسّ:

$$y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

.18 المشتقّة الثانية للدالّة $f(x) = ln\ x + \cos x$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{x} - \sin x$ Ⓒ $\frac{1}{x^2} + \cos x$

● $-\frac{1}{x^2} - \cos x$ Ⓓ $-\frac{1}{x^2} - \sin x$

.19 يمكن إيجاد ارتفاع رصاصة، بالأقدام، في أي زمن t، بالثواني، بعد إطلاقها إلى الأعلى رأسيًّا، في غياب الهواء، باستعمال الدالّة الزمنيّة التالية:

$s(t) = 759t - 14t^2$

أوجد القيمة الثابتة لتسارع هذه الرصاصة.

$s'(t) = 759 - 28t$

$s''(t) = -28$

إذن، تسارع الرصاصة الثابت يساوي
$-28\ ft/sec^2$

.20 أوجد قاعدة المشتقّة الثانية لدالّة اللوغاريتم $f(x) = lnu$.

$$f''(x) = \frac{u''u - u'^2}{u^2}$$

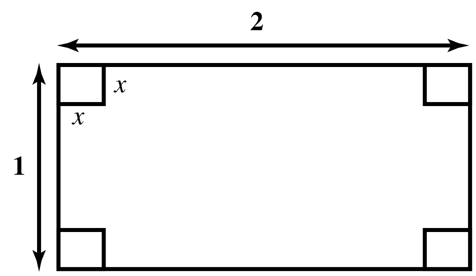
الاسم ________________________________

2 تقويم الأداء، النموذج A

عندما تعرّف المشتقّة بأنّها النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ قد تتخيّل أنّها تنتمي إلى عالم الافتراض الرياضيّ البحت، وأن لا علاقة لها بالحياة اليوميّة، غير أنّ قليلًا من الاطّلاع على الثقافة العلميّة يجعلك تعرف أنّ المشتقّة نشأت من حاجة الإنسان إلى تحديد مفهوم دقيق للسرعة، وذلك من أجل دراسة حركة الأجسام، وهي كلّ ما حولك. إنّ ارتباط المشتقّة - شكلًا ومضمونًا - بمفهوم السرعة أمر طبيعيّ ومتوقّع، لكن ما لم يكن متوقّعًا هو أن تدخل المشتقّة على خطّ حلّ المشكلات التي تعترض الإنسان في حياته واحتياجاته، وأن لا علاقة لها بالسرعة أو بالحركة أصلًا - كما سترى - في تطبيقات المشتقّة في الوحدة الثالثة.

تُصنع العلب المعدنيّة من قطعة معدنيّة مسطّحة مستطيلة الشكل، حيث تُقصّ أطرافها وتُثنى نحو الأعلى، كما هو مبيّن في الشكل المجاور. سنقوم فيما يلي بإيجاد أكبر حجم ممكن لعلبة تكون أبعادها معطاة.

1. يوضّح الشكل أدناه مستطيلًا طوله يساوي 2 وعرضه يساوي 1، والقطع المقصوصة عند الأطراف هي مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها يساوي x.



a. أوجد حجم العلبة $V(x)$ بدلالة x.

$$V(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

b. أوجد المشتقّة $V'(x)$.

$$V'(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

c. حُلّ المعادلة $V'(x) = 0$.

$$12x^2 - 12x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \text{ أو } x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

آخذ القيمة $x \le \frac{1}{2}$ لأنّ مجموع طولَي القطعتين المقصوصتين يجب أن يكون أصغر من طول الضلع، أي إنّ $2x \le 1$، إذن، $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2$.

2. من البدهي، من الناحية الاقتصاديّة، أن يعمد المصنع إلى صناعة علبة بأكبر حجم ممكن بأقلّ تكلفة ممكنة للموادّ الأوليّة، لذلك يجب إيجاد قيمة x التي تجعل قيمة $V(x)$ أكبر قيمة ممكنة.

a. اختر ثلاث قيم مختلفة للمتغيّر x، وأوجد الحجم بالنسبة لكلّ قيمة من هذه القيم.

$$V(0.1) = 0.144$$
$$V(0.3) = 0.168$$
$$V(0.4) = 0.096$$

b. أوجد قيمة $V\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ وقارن أحجام العلب السابقة بحجم العلبة التي قيمة المتغيّر x فيها تساوي $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$، ماذا تلاحظ؟

$$V\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \approx V(0.2) = 0.192$$

ألاحظ أنّ حجم العلبة عندما قيمة المتغيّر x تساوي $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ هي الأكبر بين القيم المأخوذة للمقارنة.

.3 إذا كانت f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على امتداد الفترة $\left[0, \frac{1}{2}\right]$، وتصل إلى أكبر قيمة لها عند $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$،

.a أثبت أنّ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ لكلّ $x < a$.

ماذا يجب أن تكون إشارة $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ في رأيك؟

بما أنّ الدالّة f تصل إلى أكبر قيمة لها عند a، فإنّ $f(x) - f(a) \leq 0$ أيًّا تكن قيمة x في هذه الفترة. كما أنّ $x < a$ تعطي $x - a < 0$، وأعلم أنّ ناتج قسمة عددين سالبين هو عدد موجب، بالتالي فإنّ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$، وإشارة $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجبة.

.b أثبت أنّ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ لكلّ $x \geq a$.

ماذا يجب أن تكون إشارة $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ في رأيك؟

بما أنّ الدالّة f تصل إلى أكبر قيمة لها عند a، فإنّ $f(x) - f(a) \leq 0$ أيًّا تكن قيمة x في هذه الفترة. كما أنّ $x \geq a$ تعطي $x - a \geq 0$، وأعلم أنّ ناتج قسمة عدد سالب على عدد موجب هو عدد سالب، بالتالي فإنّ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$، وإشارة $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ سالبة.

.c استنتج أنّ $f'(a) = 0$.

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

بما إنّ النهايتين متساويتان، إذن، مشتقة الدالّة عند $x = 0$ موجودة و $f'(a) = 0$.

.d أوجد قيمة كلّ من $V(0)$ و $V\left(\frac{1}{2}\right)$، ثم استنتج أنّ أكبر حجم يمكن الحصول عليه هو $V\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$. هل كان يمكنك تخمين هذه النتيجة من دون استعمال المشتقّة؟

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

أعلم أنّ هناك قيمة $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ تكون قيمة $V(a)$ عندها أكبر قيمة ممكنة للدالّة V، وأنّ $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ لأنّ $V(0) = V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. إذن، $V'(a) = 0$. وبما أنّ $V'(x) = 0$ عند $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ فقط، إذن أكبر حجم يمكن الحصول عليه هو $V\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$.

لا، إنّ التوصّل إلى هذه النتيجة ليس من الأمور التي يسهل تخمينها من دون الاستعانة بمفهوم المشتقّة.

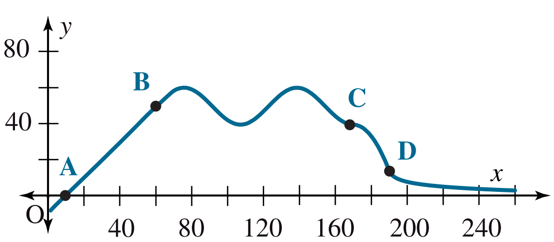
الاسم ________________________________

2 تقويم الأداء، النموذج B

تُعدّ الأفعوانيّة من الألعاب المفضّلة لدى العديد من مرتادي مدن الألعاب، وهي عبارة عن عربة مكشوفة مكوّنة من عدّة مقاعد تسلك مسارًا يتضمّن انعطافات حادّة وانحدارات شديدة. لذلك تتنافس مدن الألعاب في تصميم الأفعوانيّات لجعلها أكثر إثارةً وتشويقًا.

يوضّح الرسم أدناه تصميمًا لمسار أفعوانيّة، وهو عبارة عن مجموعة من الدوالّ المتّصلة التي تراعي الشروط التالية:

- تقع نقطة انطلاق الأفعوانيّة عند 5 m تحت مستوى الأرض في مسار مغطّى، وتصل إلى مستوى الأرض بعد 10 أمتار عند النقطة A، ثمّ تتابع في مسار يبلغ أقصى ارتفاع له ويساوي 60 مترًا فوق سطح الأرض.
- تقع نقطة الوصول على بعد 260 مترًا من نقطة الانطلاق وعلى ارتفاع 4.34 متر فوق سطح الأرض.
- يمكن نمذجة المسار في صورة دالّة متعدّدة التعريف تعطي ارتفاع مقدمة الأفعوانيّة بدلالة المسافة x بالأمتار من نقطة الانطلاق.



1. حدّد مجال ومدى هذه الدالّة.

المجال: $x \in [0, 260]$

المدى: $y \in [-5, 60]$

2. الشرط الأساس في تصميم مسار الأفعوانيّة هو أن يكون "انسيابيًّا".

a. فسّر معنى هذا الشرط رياضيًّا.

الانسيابيّة في المسار تعني أن تكون الدالّة قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة من نقاط المسار.

b. إذا كان المسار معرّفًا بالدالّة المتّصلة f كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0.05x^2 - 5 & , \quad 0 \le x < 10 \\ x - 10 & , \quad 10 \le x < 6 \\ 10\sin\left(\frac{x-60}{10}\right) + 50 & , \quad 60 \le x < 170 \\ -\left(\frac{x-170}{4}\right)^2 + 40 & , \quad 170 \le x < 190 \\ -2.5ln(x-189) + 1 & , \quad 190 \le x \le 260 \end{cases}$$

تحقّق ممّا إذا كانت مشتقّة الدالّة f موجودة عند النقطة A.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h + 0.05h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} (1 + 0.05h) = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{10 + h - 10}{h} = 1$$

قيمة النهاية إلى يسار $x = 10$ تساوي قيمة النهاية إلى يمين $x = 10$، إذن مشتقّة الدالّة f موجودة عند النقطة A وتساوي 1

c. إذا كانت مشتقّة الدالّة f موجودة عند كلّ من النقاط B و C و D، هل تحقّق الدالّة شرط "الانسيابيّة" المطلوب في مسار الأفعوانيّة؟ برّر إجابتك.

نعم، وذلك لأنّ الدالّة قابلة للاشتقاق لجميع قيم x في المجال $[0, 260]$.

3. يهدف مصمّمو مسارات الأفعوانيّات إلى أن يكون المسار شديد الانحدار من دون أن يكون شديد الخطورة، لذلك يُعدّ قياس زاوية الانحدار بين المماسّ عند نقطة على منحنى المسار والمحور x واحدًا من معايير السلامة، إذ يجب ألّا يتجاوز قياس تلك الزاوية $60°$

a. برهن أن المسار المعطى يحقّق معيار السلامة المطلوب عند $x = 160$.

بما أنّ $x = 160$، أوجد مشتقّة الدالّة

$$y = 10\sin\left(\frac{x-60}{10}\right) + 50 \text{ عند } x = 160$$

$$y' = 10\frac{d}{dx}\left(\frac{x-60}{10}\right) \times \cos\left(\frac{x-60}{10}\right) + \frac{d}{dx}\left(50\right)$$

$$= 10\left(\frac{1}{10}\right) \times \cos\left(\frac{x-60}{10}\right) + 0$$

$$= \cos\left(\frac{x-60}{10}\right)$$

$$y'(160) = \cos\left(\frac{160-60}{10}\right) \approx -0.84$$

قياس زاوية الانحدار عند $x = 160$ يساوي:

$$\tan^{-1}|-0.84| = 0.69 \text{ rad}$$

بما أنّ $0.69 \text{ rad} \approx 40° < 60°$،
إذن، المسار المعطى يحقّق معيار السلامة عند $x = 160$.

b. تحقّق ممّا إذا كان المسار المعطى يحقّق معيار السلامة المطلوب عند $x = 195$.

أوجد مشتقّة الدالّة

$$y = -2.5\, ln(x - 189) + 1 \text{ عند } x = 195$$

$$y' = -2.5 \times \frac{d}{dx}(x-189) \times \frac{1}{x-189} + \frac{d}{dx}(1) = \frac{-2.5}{x-189}$$

$$y'(195) = \frac{-2.5}{195-189} \approx 0.42$$

قياس زاوية الانحدار عند $x = 195$ يساوي:

$$\tan^{-1}|0.42| = 0.39 \text{ rad}$$

بما أنّ $0.39 \text{ rad} \approx 22° < 60°$، إذن المسار يحقّق معيار السلامة عند $x = 195$ أيضًا.

4. أحد معايير السلامة المطلوبة أيضًا هو ألّا تتجاوز سرعة عربة الأفعوانيّة 8 m/sec عند وصولها إلى النقطة B وأن يكون تسارعها سالبًا عند هذه النقطة. يمكن تحديد موقع العربة على القسم الممتدّ من النقطة A إلى النقطة B باستعمال المعادلة الزمنيّة التالية: $s(t) = -0.05t^2 + 12t + 10$، حيث t الزمن بالثواني و $s(t)$ المسافة من نقطة الأصل بالأمتار. تحقّق ممّا إذا كان المسار المعطى يحقّق هذا المعيار.

بما أنّ $AB = \sqrt{\left[(60-10)^2 + (50-0)^2\right]}$

إذن، عند النقطة B تكون مقدمة العربة على بعد $50\sqrt{2}$ m من النقطة A.

أحلّ المعادلة $s(t) = 70.71$ لأجد الزمن اللازم للوصول عند النقطة B:

$$-0.05t^2 + 12t + 10 = 70.71$$

$$t = 5.17 \text{ sec}$$

الآن، أوجد السرعة المتجهة عند $t = 5.17$:

$$v(t) = s'(t) = -0.1t + 12$$

$$v(5.17) = 11.463 \text{ m/sec}$$

التسارع عند النقطة B:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = -0.1$$

إذن، عند النقطة B التسارع سالب بينما السرعة أكبر من الحد المسموح،
إذن المسار لا يطابق المعيار المطلوب.

الاسم ______________________________

الاختبار التراكميّ للوحدتين 1 و 2

.1 إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x \le 1 \\ x^3 + 1 & , x > 1 \end{cases}$ ،
فإنّ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ تساوي:

Ⓐ 0 ● 2
Ⓑ 1 Ⓓ 3

.2 إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{x} & , x \ne 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ ،
فإنّ $\lim_{x \to 0} f(x)$ تساوي:

Ⓐ 1 Ⓒ ∞
● 2 Ⓓ غير موجودة

.3 إذا كانت $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - a} = \infty$ ، فإنّ:

Ⓐ $a = -1$ ● $a = 1$
Ⓑ $a = 0$ Ⓓ $a = 2$

.4 إذا كانت $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)] = 3$
و $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$ ، فإنّ:

Ⓐ $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$
● $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$
Ⓒ $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$
Ⓓ $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير محدَّدة

.5 إذا كانت النهاية $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ موجودة وتساوي l ، كيف يمكننا إثبات أنّ $\lim_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6) = 0$ ؟

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6)$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \times \lim_{x \to 2} (x - 2)$$
$$= l \times 0 = 0$$

.6 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 4}$ ؟

Ⓐ 0 Ⓒ ∞
● $\frac{5}{3}$ Ⓓ غير معرّفة

.7 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{-2x^2 + 3x + 2}$ ؟

● $\frac{1}{2}$ Ⓐ $-\infty$
Ⓓ ∞ Ⓑ $-\frac{1}{2}$

.8 إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود من نفس الدرجة حيث $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$ والمعامل الرئيس للصيغة $g(x)$ يساوي 6، إذن، المعامل الرئيس للصيغة $f(x)$ يساوي:

Ⓒ 6 Ⓐ 2
Ⓓ 9 ● 4

.9 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x}$ ؟

● 0 Ⓒ ∞
Ⓑ $\sqrt{2}$ Ⓓ غير معرّفة

.10 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$ ؟

Ⓐ 0 Ⓒ ∞
● 1 Ⓓ غير معرّفة

.11 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x}$ ؟

Ⓐ 0 Ⓒ ∞
● -1 Ⓓ غير معرّفة

.12 أيّ الخيارات التالية يمثّل $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x \tan x - \tan x}$؟

Ⓐ -3
Ⓑ 0
Ⓒ 3
Ⓓ ∞

.13 لتكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &, \ x \neq 0 \\ 1 &, \ x = 0 \end{cases}$.

أثبت أنّ الدالّة f متّصلة عند $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 0} (x + 1)$$
$$= 1 = f(0)$$

.14 إذا كان للدالّة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{bx} &, \ x > 0 \\ \frac{\sin bx}{ax} &, \ x < 0 \end{cases}$

عدم اتّصال قابل للإزالة عند $x = 0$، فإنّ:

Ⓐ $a = b$
Ⓑ $a^2 = b^2$
Ⓒ $a = b = \pm 1$
Ⓓ $a = b = 1$

.15 لتكن $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin 2x}{x} &, \ x \neq 0 \\ a &, \ x = 0 \end{cases}$.

أوجد قيمة a إذا كانت الدالّة f متّصلة في الفترة $[0, 1]$.

$$a = -1$$

.16 أيّ الخيارات التالية يمثّل متوسط معدّل تغيّر الدالّة $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x + 2}$ في الفترة $[1, 3]$؟

Ⓐ $-\frac{11}{5}$
Ⓑ $\frac{11}{5}$
Ⓒ $\frac{22}{5}$
Ⓓ $\frac{44}{5}$

.17 أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = 2x^3 - 3x$ عند $x = 0$ باستعمال تعريف المشتقّة.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 - 3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(2h^2 - 3\right) = -3$$

.18 إذا كانت $g'(3) = 7$ و $f'(3) = -2$ فإن قيمة $h'(3)$ حيث $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$ تساوي:

Ⓐ -20
Ⓑ -8
Ⓒ 9
Ⓓ 25

.19 مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x - 1}$ هي:

Ⓐ $2x + 7$
Ⓑ $2x - 7$
Ⓒ $3x^2 + 7$
Ⓓ $3x^2 - 7$

.20 مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$ هي:

Ⓐ $\frac{-x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$
Ⓑ $\frac{-x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + 1)^2}$
Ⓒ $\frac{3x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$
Ⓓ $\frac{-x + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x + 1)}$

21. لنفترض أن u و v دالتان بدلالة x وهما قابلتان للاشتقاق عند $x = -1$ وأن

$v'(-1) = 1,\ v(-1) = 3,\ u'(-1) = 5,$
$u(-1) = -2$

فإن قيمة المشتقة $\frac{d}{dx}(uv)$ تساوي:

Ⓐ 5 ● 13

Ⓑ 6 Ⓓ 17

---

22. مشتقّة الدالّة $f(x) = (2x^3 - 1)^5$ هي:

Ⓐ $5(2x^3 - 1)^4$

Ⓑ $5[6x^2(2x^3 - 1)]^4$

Ⓒ $30x(2x^3 - 1)^4$

● $30x^2(2x^3 - 1)^4$

---

23. إذا كانت $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \frac{2}{x-1}$، فإن $(f \circ g)'(x)$ هي:

● $\frac{-24}{(x-1)^4}$

Ⓑ $\frac{-6}{x^4}$

Ⓒ $\frac{-6x^2}{(x-1)^2}$

Ⓓ $\frac{24}{(x-1)^3}$

---

24. مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{x^2 + 2x}$ هي:

Ⓐ $e^{x^2 + 2x}$

Ⓑ $e^{2x + 2}$

● $(2x + 2)\, e^{x^2 + 2x}$

Ⓓ $(x + 2)\, e^{x^2 + 2x}$

---

25. إذا كانت قطعة معدنيّة تتحرّك على دائرة الوحدة بسرعة زاويّة ثابتة تساوي 0.12 rad/s، فإنّ ظلّها على المحور x هو نقطة تتحرّك ذهابًا وإيابًا بين العددين 1 و -1 وفق الصيغة $x(t) = \sin(0.12t + 0.1)$، حيث $x(t)$ إحداثيّ ظلّ القطعة المعدنيّة على المحور x بالراديان، و t الزمن بالثواني.
أوجد سرعة النقطة التي تمثّل ظلّ القطعة المعدنيّة عند $t = 3s$ إذا كانت السرعة هي المشتقّة $x'(t)$ عند هذه النقطة.

$$x'(t) = 0.12 \cos(0.12t + 0.1)$$

$$x'(3) = 0.12 \cos(0.12 \times 3 + 0.1)$$

$$\approx 0.11 \text{ rad}/s$$

---

26. أيّ الخيارات التالية يمثّل مَيل المماسّ للقطع المكافئ المعرّف ضمنيًّا بالمعادلة $y^2 = 4x$ عند النقطة $(1, 2)$؟

Ⓐ -1 ● 1

Ⓑ $\frac{1}{2}$ Ⓓ 2

.27 أوجد النقطة الواقعة على القطع الناقص نفسه المعرّف ضمنيًّا بالمعادلة $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ التي يكون المماسّ عندها متعامدًا مع المماسّ للقطع الناقص نفسه عند النقطة $(2, 3)$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

أعوّض إحداثيَّي النقطة المعطاة:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}=-\frac{3}{2}$$

نستعمل ميل المماسّ عند النقطة $(2, 3)$ لإيجاد ميل المماسّ المتعامد معه:

$$-\frac{3}{2}\times m=-1$$

إذن، $m=\frac{2}{3}$.

نعوّض قيمة m عن $\frac{dy}{dx}$ في معادلة المشتقّة:

$$\frac{2}{3}=-\frac{9x}{4y}$$

$$y=-\frac{27}{8}x$$

نعوّض قيمة y في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{\left(-\frac{27}{8}x\right)^2}{18}=1$$

$$\frac{x^2}{8}+\frac{11.4\,x^2}{18}=1$$

نحسب قيمة x فنجد أنّها تساوي $x\approx\pm1.15$، ثم نعوّض القيمة الموجبة في المعادلة لنحصل على النقطة الأولى:

$$y=-\frac{27}{8}x=-\frac{27}{8}(1.15)=-3.88$$

إذن، النقطة الأولى هي $(1.15, -3.88)$.

ثم نعوّض القيمة السالبة في نفس المعادلة لنحصل على النقطة الثانية:

$$y=-\frac{27}{8}(-1.15)=3.88$$

إذن، النقطة الثانية هي $(-1.15, 3.88)$.

.28 أوجد المشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

$$f'(x)=\frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

.29 إذا كان المنحنى (C) معرّفًا ضمنيًّا بالمعادلة $x^2+2y^2-xy-1=0$، أيّ الخيارات التالية يمثّل النقاط التي يكون عندها المماسّ للمنحنى أفقيًّا؟

Ⓐ $\left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Ⓑ $\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Ⓒ $\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Ⓓ $(-1, 0), (1, 0)$

.30 إذا كان جسم يتحرّك على المحور x وفق القاعدة $x=s(t)$، حيث t هو الزمن. وكان تسارع هذا الجسم في كلّ لحظة يساوي $-s(t)$، أيّ الخيارات التالية يمكن أن يمثّل الدالّة s؟

Ⓐ $s(t)=\sin(2t)$

Ⓑ $s(t)=\sin t$

Ⓒ $s(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$

Ⓓ $s(t)=\cos\left(-\frac{1}{2}t\right)$

الاسم ________________________

3 اختبار بداية الوحدة

.1 الدالّة $f(x) = -3x^2$

Ⓐ متزايدة في الفترة $[0, \infty[$ ومتناقصة في الفترة $]-\infty, 0]$ ورأسها $(0, 1)$

● متناقصة في الفترة $[0, \infty[$ ومتزايدة في الفترة $]-\infty, 0]$ ورأسها $(0, 0)$

Ⓒ متناقصة في الفترة $[-3, \infty[$ ومتزايدة في الفترة $]-\infty, -3]$ ورأسها $(-3, 0)$

Ⓓ متناقصة في الفترة $[-3, \infty[$ ومتزايدة في الفترة $]-\infty, -3]$ ورأسها $(0, -3)$

.2 إذا كان محور تناظر الدالّة $f(x) = a(x-h)^2 + k$، حيث $a \neq 0$، هو $x = 2$، وكانت $f(x)$ متزايدة في الفترة $[2, \infty[$، فإنّ:

● $h = 2$ و $a > 0$

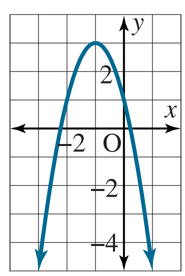
Ⓑ $h = 2$ و $a < 0$

Ⓒ $k = 2$ و $a > 0$

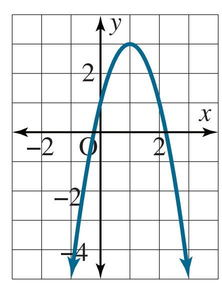
Ⓓ $h = 2$ و $k > 0$

.3 التمثيل البيانيّ للدالّة $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ هو:

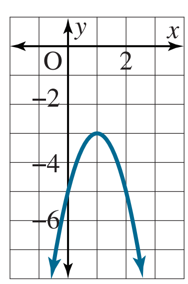
Ⓐ



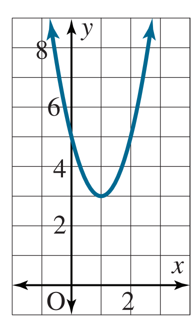
●



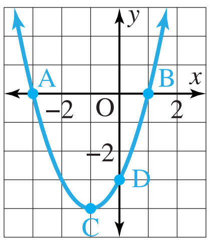
Ⓑ



Ⓓ



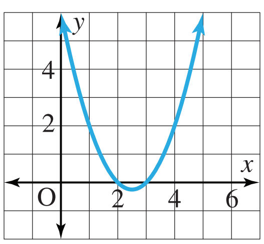
.4 مثِّل الدالّة $f(x) = x^2 + 2x - 3$ بيانيًّا، ثمّ حدّد رأس التمثيل البيانيّ والمقاطع x و y.



يقع رأس التمثيل البيانيّ عند النقطة C؛ وله مقطعا x عند النقطتين A و B ومقطع y واحد عند النقطة D.

.5 أوجد حلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ باستعمال التمثيل البيانيّ.

التمثيل البيانيّ للدالّة $f(x) = x^2 - 5x + 6$ هو:



إذن، للمعادلة حلان:

$x = 2$ أو $x = 3$

6. أوجد الحلول التقريبيّة للمعادلة $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ باستعمال جدول قيم الدالّة.
قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

أنشئ جدولًا لقيم الدالّة
$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-21	-7.75	-2	-0.75	-1	0.25	6	19.25	43

إذن، لهذه المعادلة حلّ واحد هو عندما تتغيّر القيم السالبة للدالّة إلى قيم موجبة، أي $x \approx \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$

7. حلّ المعادلة $2x^2 - 3x + 1 = 0$ هو:

Ⓐ 1 و 2
● 1 و $\frac{1}{2}$
Ⓑ -1 و $-\frac{1}{2}$
Ⓓ -1 و -2

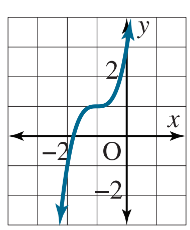
8. حلّ المعادلة $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ هو:

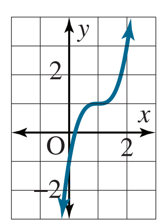
Ⓐ 2
Ⓒ -2 و 4
● 1 و -2
Ⓓ -1 و 2

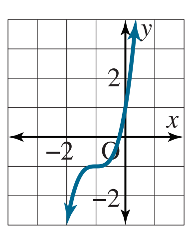
9. مجال الدالّة $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ هو:

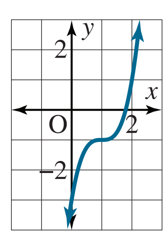
Ⓐ $[-1, \infty[$
Ⓑ $[1, 2[\cup]2, \infty[$
● $[-1, 2[\cup]2, \infty[$
Ⓓ $]-1, 2[\cup]2, \infty[$

10. التمثيل البيانيّ للدالّة الكثيرة الحدود $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$ هو:

Ⓐ


●


Ⓑ


Ⓓ


11. إذا كان $x^2 + y^2 + xy = 0$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

Ⓐ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{x + 2y}$
● $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$
Ⓒ $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{-2x + y}$
Ⓓ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y}$

12. معادلة المماس للمنحنى المعرّف بالعلاقة $y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ عند النقطة $(-2, 5)$ هي:

● $y = -\frac{x}{3} + \frac{13}{3}$
Ⓑ $y = -x - 13$
Ⓒ $y = -\frac{x}{10} - \frac{13}{10}$
Ⓓ $y = -\frac{x}{3} - \frac{11}{2}$

13. أوجد متوسّط معدّل تغيّر الدالّة $f(x) = 3x^2$ بين $x = 1$ و $x = a > 1$، ثمّ أوجد ميل المماسّ لمنحنى الدالّة f عند $x = 1$.

متوسّط معدّل التغيّر:

$$\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{3a^2 - 3}{a - 1} = 3(a + 1)$$

ميل المماسّ:

$$\lim_{a \to 1} \frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \lim_{a \to 1} [3(a + 1)] = 6$$

---

14. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = 2(x^3 + 2x)^2$ بدون استعمال التعريف.

$$f(x) = 2x^6 + 8x^4 + 8x^2$$
$$f'(x) = 12x^5 + 32x^3 + 16x$$

---

15. مشتقّة الدالّة $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$ هي:

- ● $f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2}$
- Ⓑ $f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$
- Ⓒ $f'(x) = \frac{4x-1}{(2x-1)^2}$
- Ⓓ $f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$

---

16. مشتقّة الدالّة $f(x) = (2x^3 - 1)^7$ هي:

- Ⓐ $f'(x) = 6x^2(2x^3 - 1)^6$
- Ⓑ $f'(x) = 7x^2(2x^3 - 1)^6$
- Ⓒ $f'(x) = 21x^2(2x^3 - 1)^6$
- ● $f'(x) = 42x^2(2x^3 - 1)^6$

---

17. أيّ ممّا يلي يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = (ln\, x)e^x$؟

- Ⓐ $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - ln\, x\right)e^x$
- ● $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + ln\, x\right)e^x$
- Ⓒ $f'(x) = \left(ln\, x - \frac{1}{x}\right)e^x$
- Ⓓ $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x$

---

18. أيّ ممّا يلي يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = ln \cos x$؟

- Ⓐ $\tan x$
- ● $-\tan x$
- Ⓒ $\cot x$
- Ⓓ $-\cot x$

---

19. إذا كانت $f(x)$ دالّة كثيرة الحدود وكانت $f''(x) = 2$، فما درجة الدالّة f؟

- Ⓐ 0
- Ⓑ 1
- ● 2
- Ⓓ 3

---

20. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$، أوجد $f''(x)$.

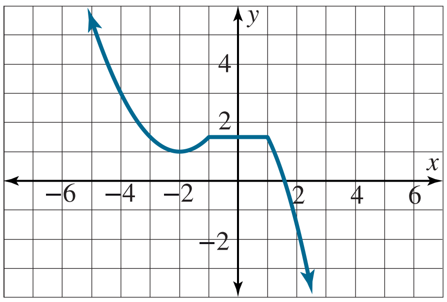
$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

الاسم ____________________

3-1 اختبار الدرس

الدوالّ المتزايدة والمتناقصة

1. حدّد فترات تزايد وتناقص الدالّة الممثّلة بيانيًّا في التمثيل البيانيّ المجاور.



الدالّة متناقصة في الفترة $]-\infty, -2]$

الدالّة متزايدة في الفترة $[-2, -1]$

الدالّة ثابتة في الفترة $[-1, 1]$

الدالّة متناقصة في الفترة $[1, \infty[$

---

2. افترض أنّ f دالّة معرّفة في فترة معيّنة I، وافترض أنّ العددين x_1 و x_2 يقعان في نفس الفترة.
أيّ من العبارات التالية تنطبق على هذه الدالّة؟

Ⓐ تكون الدالّة f متزايدة في الفترة I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في I

Ⓑ تكون الدالّة f متزايدة في الفترة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 > x_2$ في I

Ⓒ تكون الدالّة f متناقصة في الفترة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في I

● تكون الدالّة f متزايدة في الفترة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في I

---

3. أيّ الخيارات التالية يمثّل فترات تزايد وتناقص الدالّة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$؟

● الدالّة f متزايدة في الفترة $]-\infty, -1]$ ومتناقصة في الفترة $[-1, 0]$ ومتزايدة في الفترة $[0, \infty[$

Ⓑ الدالّة f ومتناقصة في الفترة $]-\infty, -1]$ ومتزايدة في الفترة $[-1, 0]$ ومتناقصة في الفترة $[0, \infty[$

Ⓒ الدالّة f متزايدة لكلّ قيم x

Ⓓ الدالّة f متزايدة في الفترة $]-\infty, -1]$ وثابتة في الفترة $[-1, 0]$ ومتزايدة في الفترة $[0, \infty[$

---

4. أوجد القيم الحرجة للدالّة f وفترات تزايدها وتناقصها إذا كانت $f(x) = (5x+1)^{\frac{2}{5}}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(5x+1)^{\frac{3}{5}}}$$

وهي تكون غير موجودة عندما تساوي قيمة المقام فيها الصفر، أي عندما $(5x+1)^{\frac{3}{5}} = 0$

$$5x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

إذن، القيمة الحرجة الوحيدة للدالّة f هي $x = -\frac{1}{5}$ وهي تقسم خطّ الأعداد الحقيقيّة إلى فترتين، هما الفترة $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$ وتكون الدالّة فيها متناقصة، والفترة $\left[-\frac{1}{5}, \infty\right[$ وتكون الدالّة فيها متزايدة.

5. أوجد فترات تزايد وتناقص الدالّة $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$.

ألاحظ، أوّلًا، أنّ الدالّة f غير معرَّفة عند $x = \frac{1}{2}$، وبالتالي هذه القيمة لا تقع ضمن مجالها.

أوجد $f'(x)$ لإيجاد القيم الحرجة:

$f'(x) = \frac{-5}{(2x-1)^2}$، إذن، $f'(x) \neq 0$

بما أنّ -5 هو عدد سالب وأن $(2x-1)^2$ هو عدد موجب لكلّ قيم $x \neq \frac{1}{2}$، فإنّ ناتج قسمة -5 على $(2x-1)^2$ هو عدد سالب دائمًا، أي $f'(x) < 0$ لكلّ $x \neq \frac{1}{2}$.

إذن، الدالّة f متناقصة في كلتا الفترتين $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2}, \infty\right[$.

الاسم ________________________________

3-2 اختبار الدرس

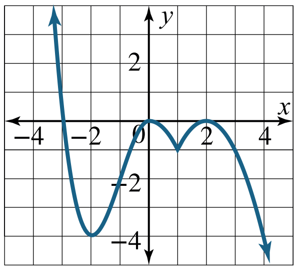
القيم القصوى للدوال

.1 أيّ من الخيارات التالية تمثّل قيمًا قصوى محلّيّة للدالّة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$؟

Ⓐ قيمة صغرى محلّيّة -27، قيمة عظمى محلّيّة 5 Ⓒ قيمة صغرى محلّيّة -3، قيمة عظمى محلّيّة 1

Ⓑ قيمة صغرى محلّيّة -5، قيمة عظمى محلّيّة 54 ● قيمة صغرى محلّيّة -5، قيمة عظمى محلّيّة 27

.2 أيّ من الخيارات التالية تمثّل قيم x حيث للدالّة f الممثّلة بيانيًّا أدناه قيم قصوى محلّيّة؟



Ⓐ $x_1 = 0, x_2 = 2$

Ⓑ $x_1 = -2, x_2 = 1$

Ⓒ $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

● $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$

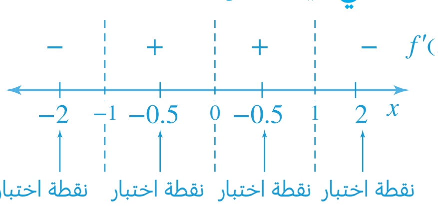
.3 أوجد القيم القصوى المحلّيّة للدالّة $f(x) = 5x^{\frac{3}{5}} - 3x + 1$ وفترات تزايدها وتناقصها.

$$f'(x) = 3x^{\frac{-2}{5}} - 3 = \frac{3}{x^{\frac{2}{5}}} - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 1, x = -1$$

كما أنّ المشتقّة غير معرَّفة عند $x = 0$ بينما الدالّة f معرّفة عند $x = 0$، وهذا يعني أنّ $x = 0$ هي قيمة حرجة للدالّة.



الدالّة متزايدة في الفترة $[-1, 1]$ ومتناقصة في الفترتين $]-\infty, -1]$ و $[1, \infty[$.

للدالّة f قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 1$ تساوي $f(1) = 3$ وقيمة صغرى محلّيّة عند $x = -1$ تساوي $f(-1) = -1$.

.4 أوجد القيم القصوى المحلّيّة للدالّة $f(x) = -2x^2 \cdot e^{2x} + 1$ وفترات تزايدها وتناقصها.

المشتقّة هي: $f'(x) = -4x(x + 1)e^{2x}$، وهي معرّفة لكلّ عدد حقيقيّ.

$$f'(x) = 0$$

$$-4x(x + 1)e^{2x} = 0,\ e^{2x} > 0$$

$x = 0$ أو $x = -1$

الدالّة متناقصة في الفترتين $]-\infty, -1]$ و $[0, \infty[$، ومتزايدة في $[-1, 0]$.

للدالّة f قيمة صغرى محلّيّة عند $x = -1$ تساوي $f(-1) \approx 0.73$ وقيمة عظمى محلّيّة عند $x = 0$ تساوي $f(0) = 1$.

.5 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$، إن وُجدت.

مجال الدالّة هو الفترة المفتوحة $]-\infty, \infty[$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 0$$

$$6x(x + 1) = 0$$

$x = 0$ أو $x = -1$

المشتقّة f' معرّفة لكلّ قيم x. أوجد قيم الدالّة عند القيم الحرجة. للدالّة f قيمة عظمى محلّيّة عند $x = -1$ تساوي $f(-1) = 2$، وقيمة صغرى محلّيّة عند $x = 0$ تساوي $f(0) = 1$. بالنسبة للفترة المفتوحة أحسب نهاية الدالّة عندما تقترب قيمة x عند أطرافها.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

بما أنّ معامل x^3 عدد موجب، فإنّ $f(x) \to \pm\infty$ عندما $x \to \pm\infty$، وبالتالي ليست للدالّة قيمًا قصوى مطلقة.

الاسم ______________________

3-3 اختبار الدرس

التقعّر ونقاط الانعطاف

1. حدّد اتّجاه تقعّر الدالّة $f(x) = -2x^2 + x - 3$ في الفترة $]-2, 0[$.

مقعَّر إلى الأسفل

2. أيّ من العبارات التالية صحيحة بالنسبة للدالّة $f(x) = -x^4$؟

Ⓐ للدالّة f نقطة انعطاف واحدة.

Ⓑ للدالّة f نقطتا انعطاف.

Ⓒ للدالّة f ثلاث نقاط انعطاف.

● ليست للدالّة f نقاط انعطاف.

3. حدّد الفترات، إن وجدت، التي تكون فيها الدالّة $f(x) = 4 - x^{\frac{1}{3}}$ متقعّرة إلى الأسفل أو الأعلى.

● الدالّة مقعَّرة إلى الأسفل في الفترة $]-\infty, 0[$ وإلى الأعلى في الفترة $]0, \infty[$.

Ⓑ الدالّة مقعَّرة إلى الأعلى في الفترة $]-\infty, 0[$ وإلى الأسفل في الفترة $]0, \infty[$.

Ⓒ الدالّة مقعَّرة إلى الأسفل في الفترة $]-\infty, 0[$ فقط.

Ⓓ الدالّة مقعَّرة إلى الأعلى في الفترة $]0, \infty[$ فقط.

4. حدّد ما إذا كان للدالّة $f(x) = 2 - \cos x$ نقاط انعطاف في الفترة $[0, \pi]$.

$f'(x) = \sin x$

$f''(x) = \cos x$

يتغيّر اتّجاه تقعّر الدالّة عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$، إذن هي نقطة انعطاف.

5. أوجد نقاط انعطاف الدالّة $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}$.

$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$f''(x) = x^2 - 1$

يتغيّر تقعّر الدالّة عند $x = 1$ حيث $f(1) = -\frac{1}{2}$، وعند $x = -1$ حيث $f(-1) = -\frac{1}{2}$، والدالّة معرّفة عندهما. إذن، للدالّة نقطتا انعطاف $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ و $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

M03_MTH01_ANC12_QTR_AR_V1.indb 6 07/03/2022 4:54:00 PM

الاسم ______________________________

3-4 اختبار الدرس

رسم منحنيات الدوالّ

1. أكمل العبارات التالية بالنسبة للدالّة $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

$f'(x) > 0$ في الفترتين $]-\infty, -2[$ و $]0, \infty[$، إذن، الدالّة **متزايدة** في هاتين الفترتين.

$f'(0) = 0$، إذن للدالّة **قيمة قصوى عند $x = 0$**

$f''(x) < 0$ في الفترة **$]-\infty, -1[$**، إذن الدالّة مقعّرة إلى الأسفل في هذه الفترة.

$f''(-1) = 0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها من السالب إلى الموجب عند $x = -1$، إذن للدالّة **نقطة انعطاف عند $x = -1$**

2. ارسم منحنًى تقريبيًا للدالّة الكثيرة الحدود $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$، من خلال إيجاد القيم القصوى، وفترات التزايد والتناقص، والتقعّر، ونقاط الانعطاف للدالّة f.

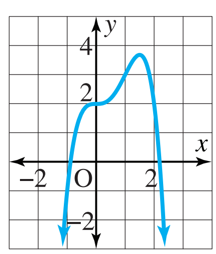
القيم القصوى: قيمة عظمى محلّيّة عند $(1.5, 3.7)$

التزايد: $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$، والتناقص: $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

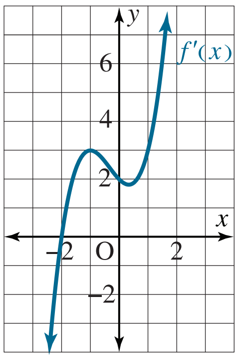
التقعّر إلى الأعلى: $]0, 1[$

التقعّر إلى الأسفل: $]-\infty, 0[$ و $]1, \infty[$

نقاط الانعطاف: $(0, 2)$ و $(1, 3)$



3. يبيّن التمثيل البيانيّ المعطى المشتقّة الأولى للدالّة f. أيّ من العبارات التالية صحيحة بالنسبة لهذه الدالّة؟



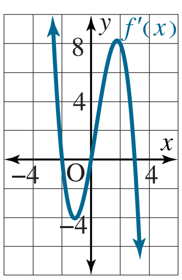
Ⓐ الدالّة f متزايدة في الفترة $]-\infty, -2]$، ومتناقصة في الفترة $[-2, \infty[$

Ⓑ الدالّة f متزايدة لكلّ قيم x.

Ⓒ لا يمكن معرفة فترات تزايد وتناقص الدالّة من التمثيل البيانيّ للمشتقّة $f'(x)$.

● الدالّة f متناقصة في الفترة $]-\infty, -2]$، ومتزايدة في الفترة $[-2, \infty[$

4. إذا كان التمثيل البيانيّ أدناه هو لمشتقّة الدالّة f، فإنّ قيم x حيث للدالّة f قيم قصوى محلّيّة هي:



● $-2, 0, 3$ Ⓒ $-1, 2$

Ⓑ $-2, 3$ Ⓓ 3

.5 لتكن الدالّة $f(x) = -x^5 + \frac{5}{3}x^3$.

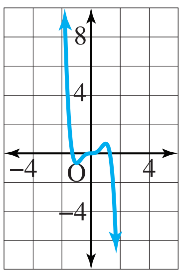
أكمل الجدول التالي، ثمّ حدّد القيم القصوى ونقاط الانعطاف للدالّة f وارسم منحنىً تقريبيًّا لها.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1 ∞
إشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
إشارة $f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
f متزايدة أو متناقصة	متناقصة	متزايدة	متزايدة	متزايدة	متزايدة	متناقصة
تقعّر f	إلى الأسفل	إلى الأسفل	إلى الأعلى	إلى الأسفل	إلى الأعلى	إلى الأعلى

للدالّة قيمة عظمى محليّة عند $x = 1$ تساوي $f(1) = \frac{2}{3}$

وقيمة صغرى محليّة عند $x = -1$ تساوي $f(-1) = -\frac{2}{3}$

للدالّة 3 نقاط انعطاف هي $(0, 0)$ و $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -0.41\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.41\right)$



3-5 اختبار الدرس

تطبيقات القيم القصوى

1. أوجد أكبر قيمة للمقدار x^2y إذا كان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ويحقّق المعادلة $x + 2y = 12$.

$y = 6 - \frac{1}{2}x$

أعوّض قيمة y في الصيغة x^2y:

$x^2y = x^2\left(6 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x^2$

$y \geq 0$، إذن، $6 - \frac{1}{2}x \geq 0$ أي إنّ $x \leq 12$،

إذن، $0 \leq x \leq 12$ وبالتالي مجال الدالّة $x^2 y$ هو $[0, 12]$

$\frac{d\left(x^2y\right)}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}x^3 + 6x^2\right)}{dx}$

$= -\frac{3}{2}x^2 + 12x$

$-\frac{3}{2}x^2 + 12x = 0$

$x = 0$ أو $x = 8$

أكبر قيمة للمقدار x^2y هي 128 وتقع عند $x = 8$ و $y = 2$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل أكبر مساحة ممكنة وطولي ضلعَي القائمة، لمثلّث قائم الزاوية، طول وتره 10 cm؟

● أكبر مساحة ممكنة هي 25 cm^2 وهي عندما يكون طولا ضلعَي القائمة $x = y = \sqrt{50}$ cm

Ⓑ أكبر مساحة ممكنة هي 23.6 cm^2 وهي عندما يكون طولا ضلعَي القائمة $x = y = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

Ⓒ أكبر مساحة ممكنة هي 23.6 cm^2 وهي عندما يكون طولا ضلعَي القائمة $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm و $y = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm

Ⓓ أكبر مساحة ممكنة هي 100 cm^2 وهي عندما يكون طولا ضلعَي القائمة $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm و $y = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته 9 cm^2 وطولَي بُعديه؟

Ⓐ أصغر محيط ممكن هو 9 cm وهو عندما يكون طولا البُعدين $x = y = 3$ cm

Ⓑ أصغر محيط ممكن هو 12 cm وهو عندما يكون طولا البُعدين $x = 3$ cm و $y = 4$ cm

Ⓒ أصغر محيط ممكن هو 9 cm وهو عندما يكون طولا البُعدين $x = 3$ cm و $y = 4$ cm

● أصغر محيط ممكن هو 12 cm وهو عندما يكون طولا البُعدين $x = y = 3$ cm

4. افترض أنّ الدالّة $r(x) = 4\sqrt{x}$ تمثّل عائدات شركة من إنتاج إحدى القطع، وأنّ الدالّة $c(x) = x^2$ تمثّل التكلفة، حيث x عدد القطع المنتجة بالآلاف. هل هناك عدد للقطع المنتجة يحقّق أكبر ربح ممكن؟ إذا كان موجودًا، ما هذا العدد؟

$P(x) = r(x) - c(x)$

$P'(x) = r'(x) - c'(x)$

$P'(x) = 0,\ r'(x) - c'(x) = 0$

$r'(x) = c'(x)$

$\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x$

القيمة الحرجة الموجبة الوحيدة هي $x = 1$

إذن، يتحقّق أكبر ربح ممكن عند إنتاج 1 000 قطعة.

5. يمكن إيجاد ارتفاع جسم يتحرّك رأسيًّا من خلال الصيغة $s = -8t^2 + 48t + 66$، حيث s المسافة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. أوجد سرعة الجسم عند $t = 0$ وارتفاعه الأقصى وزمن بلوغه ذلك الارتفاع.

$s' = -16t + 48$

إذن، سرعة الجسم عند $t = 0$ تساوي 48 ft/sec، ويبلغ ارتفاعه الأقصى عندما

$s' = -16t + 48 = 0$

وذلك عند الزمن $t = 3$ sec

إذن، أقصى ارتفاع يبلغه الجسم هو $s = 138$ ft.

الاسم ______________________

3-6 اختبار الدرس

المعادلات المرتبطة

1. افترض أنّ x و y دالّتان بدلالة t وترتبط بينهما المعادلة $xy + y^2 = \frac{x^2}{2} + 15$ وأنّ $\frac{dx}{dt} = 14$ عند $x = 3$ و $y = 2$.

أيّ من الخيارات التالية يمثّل $\frac{dy}{dt}$ عند هذه اللحظة؟

Ⓐ -2

Ⓑ $-\frac{7}{4}$

● 2

Ⓓ لا يمكن إيجادها

2. عند تسخين قرص معدنيّ دائريّ الشكل في فرن حراريّ، يزداد طول نصف قطره بمعدّل 0.05 cm/s، أيّ من الخيارات التالية يمثّل معدّل تزايد مساحة هذا القرص عندما يصبح طول نصف قطره 1 m؟

Ⓐ 2π cm^2/s

● 10π cm^2/s

Ⓒ π cm^2/s

Ⓓ 200π cm^2/s

3. يتزايد الطول L لمستطيل بمعدّل 4 cm/s عندما يتناقص عرضه w بمعدّل 3 cm/s. عندما يكون L = 10 cm و W = 6 cm، أوجد معدّل تغيّر مساحة المستطيل، وحدّد ما إذا كانت المساحة تتزايد أم تتناقص.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x$$
$$= -3 \times 10 + 4 \times 6$$
$$= -6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

إذن، المساحة تتناقص.

4. تمّ نفخ بالون كرويّ الشكل بالهواء بمعدّل 108π m^3/min، أوجد معدّل تزايد طول نصف قطر البالون r عندما $r = 3$ m.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\ \frac{dV}{dt}$$
$$= \frac{1}{4\pi \times 9} \times 108\pi$$
$$= 3 \text{ m/min}$$

5. أطلق سامر طائرة ورقيّة إلى ارتفاع 180 قدمًا. تدفع الرياح هذه الطائرة بعيدًا وبشكل أفقيّ بمعدّل 30 ft/sec، ما السرعة التي يجب أن يفلت بها سامر خيط الطائرة الورقيّة عندما تكون الطائرة على بعد 360 ft منه؟

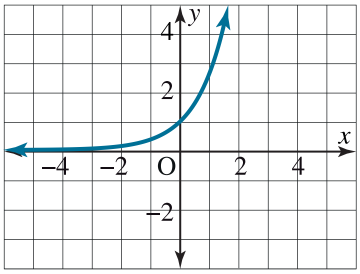
ليكن x المسافة الأفقيّة و z بعد الطائرة عن مكان وقوف سامر.

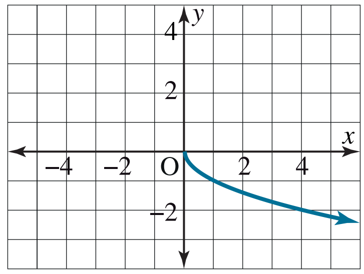
$$z^2 = x^2 + 180^2$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\ \frac{dx}{dt} = \frac{360}{180} \times 30 = 60 \text{ ft/sec}$$

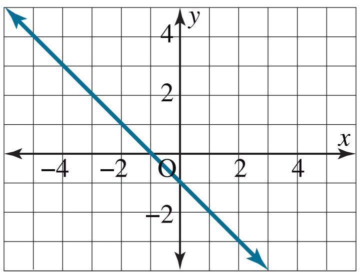
الاسم ______________________________

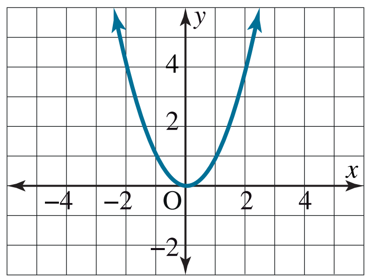
3 تقويم الوحدة، النموذج A

.1 أيّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا أدناه متزايدة؟

●


Ⓒ


Ⓑ


Ⓓ


.2 أوجد فترات تزايد وتناقص الدالّة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

الدالّة f متزايدة في الفترة $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$، ثمّ متناقصة في الفترة $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$، ثمّ متزايدة في الفترة $[1, \infty[$

.3 للدالّة $f(x) = 2x^2(x - 3)$ قيمة صغرى محلّيّة تساوي:

● -8

Ⓑ 0

Ⓒ 2

Ⓓ 16

.4 للدالّة $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

Ⓐ قيمة صغرى محلّيّة عند $x = -1$.

Ⓑ قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 3$.

● قيمة صغرى محلّيّة عند $x = 3$.

Ⓓ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$.

.5 أيّ من الدوالّ التالية لها قيمة صغرى محلّيّة عند $x = -1$؟

Ⓐ $f(x) = -xe^x$

Ⓑ $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

● $f(x) = xe^x$

Ⓓ $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

6. حدِّد اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة $f(x) = xe^x$
في الفترة $]-2, \infty[$ تقعّر إلى الأعلى

---

7. أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = xe^{-x^2}$؟

Ⓐ للدالّة f نقطة انعطاف واحدة.

Ⓑ للدالّة f نقطتا انعطاف.

● للدالّة f ثلاث نقاط انعطاف.

Ⓓ ليست للدالّة f نقاط انعطاف.

---

8. أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = ax^2 + bx + c$؟

● ليست لها نقاط انعطاف أيًّا تكن قيم a و b و c

Ⓑ ليست لها نقاط انعطاف إذا كانت $a = 0$

Ⓒ لها نقطة انعطاف واحدة عند $x = \frac{-b}{2a}$ إذا كانت $a \neq 0$

Ⓓ لها نقطة انعطاف واحدة على الأقلّ أيًّا تكن قيم a و b و c

---

9. أكمل العبارات التالية بالنسبة للدّالّة $f(x)$:

$f'(x) > 0$ في الفترة $[a, b]$، إذن، الدالّة متزايدة في تلك الفترة.

$f'(x) < 0$ في الفترة $[a, b]$، إذن، الدالّة متناقصة في الفترة $[a, b]$.

$f'(c) = 0$، إذن، للدالّة قيمة حرجة عند $x = c$

$f''(x) > 0$ في الفترة $]a, b[$، إذن، منحنى الدالّة مقعّر إلى الأعلى في تلك الفترة.

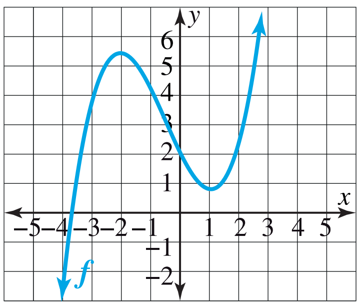
$f''(x) < 0$ في الفترة $]a, b[$، إذن، منحنى الدالّة مقعّر إلى الأسفل في تلك الفترة.

$f''(c) = 0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها من السالب الى الموجب عند $x = c$، إذن، للدالّة نقطة انعطاف عند $x = c$

$f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$، إذن، $f(c)$ قيمة صغرى محلّيّة للدالّة f.

10. استعمل الجدول التالي لرسم التمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

الفترة	$]1, \infty[$	$]-\frac{1}{2}, 1[$	$]-2, -\frac{1}{2}[$	$]-\infty, -2[$
تزايد وتناقص الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة
اتّجاه تقعّر الدالّة f	إلى الأعلى	إلى الأعلى	إلى الأسفل	إلى الأسفل



---

11. أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

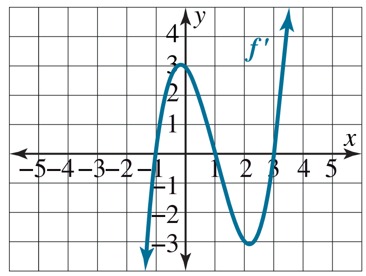
Ⓐ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ قيم $f(x)$ موجبة.

Ⓑ إذا كانت قيم $f(x)$ سالبة، فإنّها متناقصة.

Ⓒ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ $f(x)$ متزايدة أيضًا.

● إذا كانت $f(x)$ متزايدة، فإنّ قيم $f'(x)$ موجبة.

12. إذا كان التمثيل البيانيّ لمشتقّة الدالّة f هو المعطى، فإنّ فترات تزايد الدالّة f هي:



Ⓐ $[-1, 1]$

● $[-1, 1]$ و $[3, \infty[$

Ⓒ $[3, \infty[$

Ⓓ $]-\infty, -0.15]$ و $[2.15, \infty[$

---

13. ما مواصفات المستطيل ذي المساحة الأكبر الذي يمكن تكوينه بواسطة حبل طوله 20 cm؟

المستطيل ذو المساحة الأكبر الذي يمكن تكوينه بواسطة هذا الحبل، هو مربّع طول ضلعه 5 cm

---

14. رمى سالم حجرًا إلى الأعلى بسرعة ابتدائيّة تساوي $30\ m/s$، بدأت سرعة الحجر تتباطأ إلى أن توقّف، ثمّ أخذ يسقط حتّى ارتطم بالأرض.

إذا كانت $s(t) = -5t^2 + 30t + 1$، حيث $s(t)$ ارتفاع الحجر بالأمتار و t الزمن بالثواني.

أوجد الارتفاع الأقصى الذي بلغه الحجر.

بلغ الحجر ارتفاعه الأقصى عندما وصلت سرعته إلى الصفر:

$$s'(t) = -10t + 30 = 0, \ t = 3\text{ s}$$

أعوّض $t = 3$ في المعادلة لإيجاد الارتفاع:

$$s(3) = -5(3)^2 + 30(3) + 1 = 46\text{ m}$$

---

15. صنعت ليلى علبة من قطعة مستطيلة الشكل من الورق المقوّى، وذلك بقصّ أربعة مربّعات من زواياها ثمّ طيّ أطرافها إلى الأعلى. إذا كان حجم العلبة هو $V(x) = -4x^3 - 8x^2 + 3x$، حيث x طول ضلع المربّع، أوجد قيمة x (بالأمتار) التي تعطي العلبة ذات الحجم الأكبر.

$$V'(x) = -12x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{6}\text{ m}$$

---

16. عبوّة مياه غازيّة أسطوانيّة الشكل، مساحتها السطحيّة 120 cm^2، أوجد أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة.

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 120$$

$$h = \frac{60}{\pi r} - r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{60}{\pi r} - r\right)$$

$$= -\pi r^3 + 60r$$

$$V' = -3\pi r^2 + 60 = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{20}{\pi}} \approx 2.5$$

إذن، أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة هو

$$V = -\pi(2.5)^3 + 60(2.5) \approx 101\text{ cm}^3$$

---

17. إذا كانت x و y دالّتين بدلالة t، وكانت تربط بين x و y المعادلة $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$، فإنّ:

Ⓐ $\frac{dy}{dt} = -2\frac{dx}{dt}$

● $\frac{dy}{dt} = -2\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

Ⓒ $\frac{dy}{dt} = 2\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

Ⓓ $\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$

18. يشكّل ضوء مصباح بقعة ضوء دائريّة الشكل على جدار. عند إدارة الجزء الخلفيّ للمصباح يزداد طول نصف قطر هذه الدائرة بمعدّل 3 cm/s، وبالتالي عندما يكون طول نصف قطر الدائرة 2 cm، فإنّ معدّل تزايد مساحتها يساوي:

Ⓐ $12\ cm^2/s$

Ⓑ $4\pi\ cm^2/s$

Ⓒ $6\pi\ cm^2/s$

● $12\pi\ cm^2/s$

---

19. مساحة مستطيلة الشكل يزداد طولها بمعدّل 3 cm/s، وعرضها بمعدّل 2 cm/s، وبالتالي فإنّ معدّل تزايد هذه المساحة عندما يكون طولها 3 cm وعرضها 2 cm يساوي:

Ⓐ $4\ cm^2/s$

Ⓑ $6\ cm^2/s$

● $12\ cm^2/s$

Ⓓ $13\ cm^2/s$

---

20. يصبّ الماء بمعدّل $5\ m^3/hr$ في خزّان مقلوب مخروطيّ الشكل. حجم هذا الخزّان V بدلالة ارتفاع مستوى الماء فيه h، هو $V = \frac{\pi}{75} h^3$.
أوجد معدّل تزايد منسوب المياه في الخزّان عندما يكون ارتفاع مستوى الماء فيه 2.5 m

Ⓐ $\frac{5}{\pi}$ m/hr

Ⓑ $\frac{125}{\pi}$ m/hr

● $\frac{20}{\pi}$ m/hr

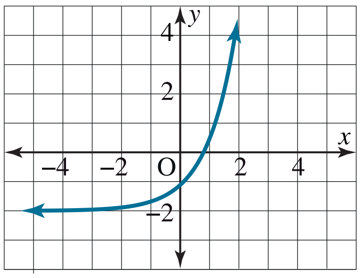
Ⓓ 20 m/hr

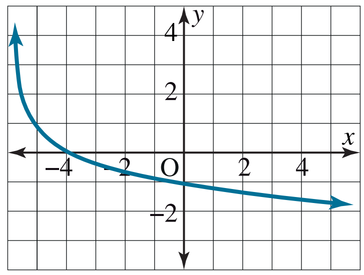
M03_MTH01_ANC12_QTR_AR_V1.indb 14 07/03/2022 4:54:09 PM

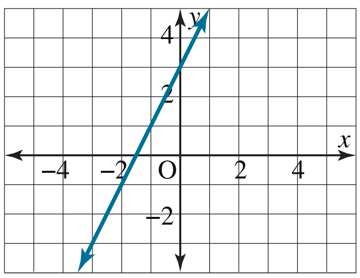
الاسم ______________________________

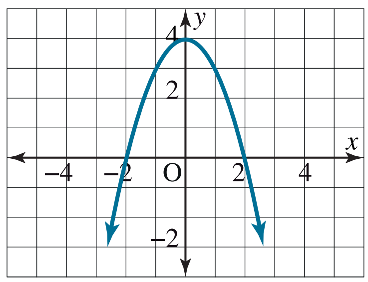
3 تقويم الوحدة، النموذج B

1. أيّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا أدناه متناقصة؟

Ⓐ




Ⓑ


Ⓓ


---

2. أوجد فترات تزايد وتناقص الدالّة
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.

الدالّة f متناقصة في الفترة $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$، ثمّ متزايدة في الفترة $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$، ثمّ متناقصة في الفترة $[1, \infty[$

---

3. للدالّة $f(x) = 2x(x-3)^2$ قيمة صغرى محلّيّة تساوي:

Ⓐ -3

0

Ⓒ 3

Ⓓ 16

---

4. للدالّة $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 1$.

Ⓑ قيمة صغرى محلّيّة عند $x = 1$.

Ⓒ قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 5$.

Ⓓ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$.

---

5. أيّ من الدوالّ التالية لها قيمة عظمى محلّيّة عند $x = -3$؟

Ⓐ $f(x) = (x+2)e^x$

Ⓑ $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$

Ⓒ $f(x) = -\dfrac{e^{(x-2)}}{x-2}$

$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x$

.6 حدِّد اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة $f(x) = (x-1)e^x$ في الفترة $]-\infty, -1[$ **تقعّر إلى الأسفل**

.7 أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = e^{-x^2}$؟

Ⓐ للدالّة f نقطة انعطاف واحدة.

● للدالّة f نقطتا انعطاف.

Ⓒ للدالّة f ثلاث نقاط انعطاف.

Ⓓ ليست للدالّة f نقاط انعطاف.

.8 أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = ln(ax) + bx$ حيث $a > 0$؟

● ليست لها نقاط انعطاف أيًّا تكن قيم a و b

Ⓑ ليست لها نقاط انعطاف إذا كانت $b = 0$

Ⓒ لها نقطة انعطاف واحدة عند $x = -\frac{1}{b}$

Ⓓ لها نقطة انعطاف واحدة على الأقلّ أيًّا تكن قيم a و b

.9 أكمل العبارات التالية بالنسبة للدّالّة $f(x)$:

الدالّة متزايدة في الفترة $[a, b]$،
إذن، $f'(x) > 0$ في تلك الفترة.

الدالّة متناقصة في الفترة $[a, b]$،
إذن، $f'(x) < 0$ في تلك الفترة.

للدالّة f قيمة حرجة عند $x = c$،
إذن، $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

إذا كان اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة في الفترة $]a, b[$
إلى الأعلى، فإنّ $f''(x) > 0$ في تلك الفترة.

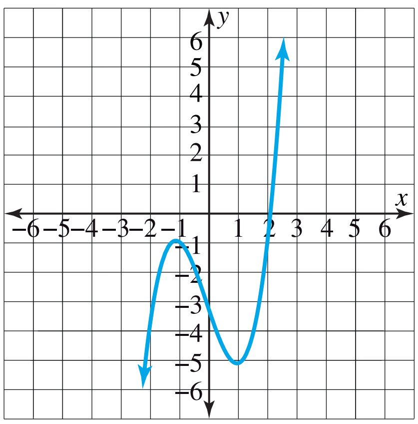
إذا كان اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة في الفترة $]a, b[$
إلى الأسفل، فإنّ $f''(x) < 0$ في تلك الفترة.

$f''(c) = 0$ وإشارة $f''(x)$ تتغيّر من الموجب الى
السالب عند $x = c$،
إذن، للدالّة نقطة انعطاف عند $x = c$.

$f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$،
إذن، $f(c)$ قيمة عظمى محلّيّة للدالّة f.

.10 استعمل الجدول التالي لرسم التمثيل البياني للدالّة $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

الفترة	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
تزايد وتناقص الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة
اتّجاه تقعّر الدالّة f	إلى الأسفل	إلى الأسفل	إلى الأعلى	إلى الأعلى



.11 أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

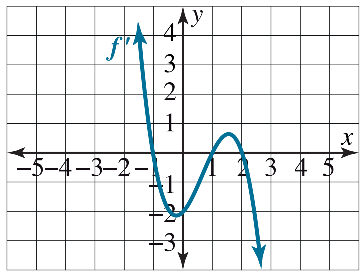
Ⓐ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ قيم $f(x)$ موجبة.

Ⓑ إذا كانت قيم $f(x)$ سالبة، فإنّ $f(x)$ متناقصة.

Ⓒ إذا كانت $f'(x)$ متناقصة، فإنّ $f(x)$ متزايدة أيضًا.

● إذا كانت $f(x)$ متناقصة، فإنّ قيم $f'(x)$ سالبة.

12. إذا كان التمثيل البيانيّ أدناه هو لمشتقّة الدالّة f، فإنّ فترات تزايد الدالّة f هي:



Ⓐ $[-0.25, 1.5]$

Ⓑ $[1, 2]$

● $]-\infty, -1]$ و $[1, 2]$

Ⓓ $]-\infty, -1]$

---

13. أوجد أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته 25m^2، ثمّ أوجد أبعاد هذا المستطيل.

أصغر محيط ممكن لمستطيل بهذه المساحة هو 20 m، وأبعاد هذا المستطيل هي 5 في 5

---

14. يمكن إيجاد ارتفاع جسم يتحرك رأسيًّا باستعمال الصيغة:

$s(t) = -5t^2 + 20t - 7$، حيث $s(t)$ المسافة بالأمتار و t الزمن بالثواني.

أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه هذا الجسم ولحظة بلوغه ذلك الارتفاع.

بلغ الجسم ارتفاعه الأقصى عندما وصلت سرعته إلى الصفر:

$$s'(t) = -10t + 20 = 0, \quad t = 2 \text{ s}$$

أعوّض $t = 2$ في المعادلة لإيجاد الارتفاع:

$$s(2) = -5(2)^2 + 20(2) - 7 = 13 \text{ m}$$

15. صنعت ليلى علبة من قطعة مستطيلة الشكل من الورق المقوّى، وذلك بقصّ أربعة مربّعات من زواياها ثمّ طيّ أطرافها إلى الأعلى. إذا كان حجم العلبة هو $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$، حيث x طول ضلع المربّع، أوجد قيمة x (بالأمتار) التي تعطي العلبة ذات الحجم الأكبر.

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ m}$$

---

16. عبوّة مياه غازيّة أسطوانيّة الشكل، مساحتها السطحيّة 140 cm^2، أوجد أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة.

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 140$$

$$h = \frac{70}{\pi r} - r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{70}{\pi r} - r \right)$$

$$= -\pi r^3 + 70r$$

$$V' = -3\pi r^2 + 70 = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{70}{3\pi}} \approx 2.73$$

إذن، أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة هو

$$V = -\pi(2.73)^3 + 70(2.73) \approx 127 \text{ cm}^3$$

---

17. إذا كانت x و y دالّتين بدلالة t، وكانت تربط بين x و y المعادلة $\frac{x^2 + y^2}{3} = 1$، فإنّ:

Ⓐ $\frac{dy}{dt} = -3\frac{dx}{dt}$

Ⓑ $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

● $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

Ⓓ $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$

18. دائرة يتغيّر طول نصف قطرها بمعدّل $\frac{-3}{\pi}$ cm/sec
إذا كان طول نصف قطر الدائرة 15 cm، فإنّ معدّل تغيّر مساحة هذه الدائرة يساوي:

Ⓐ $-45\pi\ cm^2/s$

Ⓑ $-90\ cm^2/s$

Ⓒ $-10\ cm^2/s$

Ⓓ $-90\pi\ cm^2/s$

---

19. مساحة مستطيلة الشكل يزداد طولها بمعدّل 5 cm/s، وعرضها بمعدّل 3 cm/s، وبالتالي فإنّ معدّل تزايد هذه المساحة عندما يكون طولها 45 cm وعرضها 18 cm يساوي:

Ⓐ $8\ cm^2/s$

Ⓑ $225\ cm^2/s$

Ⓒ $279\ cm^2/s$

Ⓓ $945\ cm^2/s$

---

20. يصبّ الماء بمعدّل $4\ m^3/hr$ في خزّان مقلوب مخروطيّ الشكل. حجم هذا الخزّان V بدلالة ارتفاع مستوى الماء فيه h هو $V = \frac{\pi}{60} h^3$.
أوجد معدّل تزايد منسوب المياه في الخزّان عندما يكون ارتفاع مستوى الماء فيه 3 m

Ⓐ $\frac{80}{9\pi}$ m/hr

Ⓑ $\frac{9}{5\pi}$ m/hr

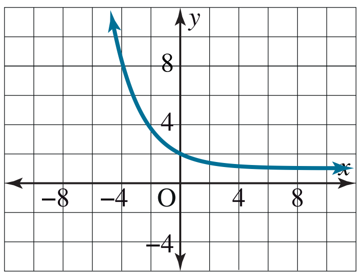
Ⓒ $\frac{20}{\pi}$ m/hr

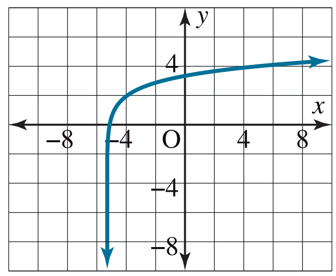
Ⓓ $\frac{80}{9}$ m/hr

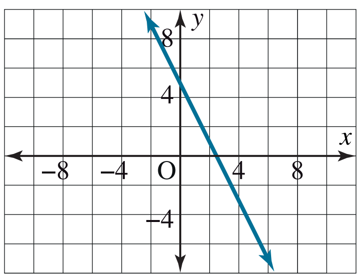
الاسم ______________________________

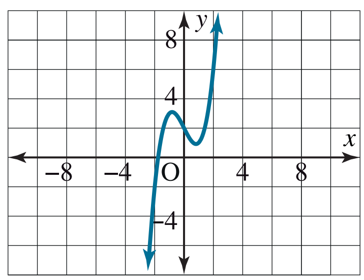
3 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 أيّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًا أدناه متزايدة؟

Ⓐ 

Ⓒ 

Ⓑ 

Ⓓ 

.2 أوجد فترات تزايد وتناقص الدالّة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 1$.

الدالّة f متزايدة في الفترة $]-\infty, -1]$،

ثمَّ متناقصة في الفترة $\left[-1, \frac{7}{3}\right]$،

ثمَّ متزايدة في الفترة $\left[\frac{7}{3}, \infty\right[$

.3 للدالّة $f(x) = x^2(x - 3)$ قيمة صغرى محلّيّة تساوي:

Ⓐ -2

Ⓑ 2

Ⓒ -4

Ⓓ 0

.4 للدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Ⓐ قيمة صغرى محلّيّة عند $x = 0$

Ⓑ قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 0$

Ⓒ قيمة عظمى محلّيّة عند $x = 4$

Ⓓ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$

.5 أيّ من الدوالّ التالية لها قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$؟

Ⓐ $f(x) = (1 - x)e^x$

Ⓑ $f(x) = (2 - x)e^x$

Ⓒ $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$

Ⓓ $f(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$

6. حدِّد اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة $f(x) = x + e^x$ في الفترة $]-\infty, \infty[$ تقعّر إلى الأعلى

7. أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = 1 + x + e^{-x^2}$؟

Ⓐ للدالّة f نقطة انعطاف واحدة.

● للدالّة f نقطتا انعطاف.

Ⓒ للدالّة f ثلاث نقاط انعطاف.

Ⓓ ليست للدالّة f نقاط انعطاف.

8. أيّ ممّا يلي صحيح بالنسبة للدالّة $f(x) = ax^3 + bx + c$ حيث $a > 0$؟

Ⓐ ليست لها نقاط انعطاف أيًّا تكن قيم a و b و c

Ⓑ ليست لها نقاط انعطاف إذا كانت $b > 0$

● لها نقطة انعطاف واحدة عند $x = 0$

Ⓓ لها نقطة انعطاف واحدة على الأقلّ أيًّا تكن قيم a و b و c

9. أكمل العبارات التالية بالنسبة للدّالّة $f(x)$:

الدالّة متزايدة في الفترة $[a, b]$،
إذن، $f'(x) > 0$ في تلك الفترة.

$f'(x) < 0$ في الفترة $[a, b]$،
إذن، الدالّة متناقصة في تلك الفترة.

للدالّة f قيمة حرجة عند $x = c$،
إذن، $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

$f''(x) > 0$ في الفترة $]a, b[$،
إذن، منحنى الدالّة مقعّر إلى الأعلى في تلك الفترة.

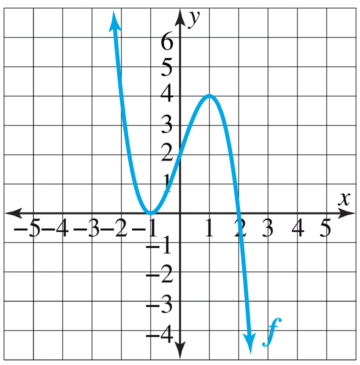
إذا كان تقعّر منحنى الدالّة في الفترة $]a, b[$
إلى الأسفل، فإنّ، $f''(x) < 0$ في تلك الفترة.

$f''(c) = 0$ وإشارة $f''(x)$ تتغيّر من الموجب
إلى السالب عند $x = c$،
إذن، للدالّة نقطة انعطاف عند $x = c$.

$f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$،
إذن، $f(c)$ قيمة عظمى محلّيّة للدالّة f.

10. استعمل الجدول التالي لرسم التمثيل البياني للدالّة $f(x) = -x^3 + 3x + 2$.

الفترة	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
تزايد وتناقص الدالّة f	متناقصة	متزايدة	متزايدة	متناقصة
اتّجاه تقعّر الدالّة f	إلى الأعلى	إلى الأعلى	إلى الأسفل	إلى الأسفل



11. أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

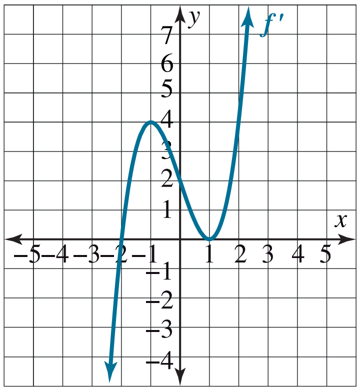
Ⓐ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ قيم $f(x)$ موجبة.

Ⓑ إذا كانت قيم $f(x)$ سالبة، فإنّ $f(x)$ متناقصة.

Ⓒ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ $f(x)$ متزايدة أيضًا.

● إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة إلى الأعلى.

12. إذا كان التمثيل البيانيّ أدناه هو لمشتقّة الدالّة f، فإنّ فترات تزايد الدالّة f هي:



Ⓐ $]-\infty, -1]$ و $[1, \infty[$

Ⓑ $[-2, 1]$

Ⓒ $[1, \infty[$

Ⓓ $[-2, \infty[$

13. ما مواصفات المستطيل ذي المساحة الأكبر الذي يمكن تكوينه بواسطة حبل طوله 30 cm؟

المستطيل ذو المساحة الأكبر الذي يمكن تكوينه بواسطة هذا الحبل هو مربّع طول ضلعه 7.5 cm

14. يمكن إيجاد ارتفاع كرة تمّ رميها إلى الأعلى رأسيًّا باستعمال الصيغة: $s(t) = -3t^2 + 24t - 6$، حيث $s(t)$ المسافة بالأمتار و t الزمن بالثواني. أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة ولحظة بلوغها ذلك الارتفاع.

بلغت الكرة ارتفاعها الأقصى عندما وصلت سرعتها إلى الصفر:

$$s'(t) = -6t + 24 = 0, t = 4 \text{ s}$$

أعوّض $t = 4$ في المعادلة لإيجاد الارتفاع:

$$s(4) = -3(4)^2 + 24(4) - 6 = 42 \text{ m}$$

15. صنعت سعاد علبة من قطعة مستطيلة الشكل من الورق المقوّى، وذلك بقصّ أربعة مربّعات من زواياها ثمّ طيّ أطرافها إلى الأعلى. إذا كان حجم العلبة هو $V(x) = -2x^3 - 44x^2 + 242x$، حيث x طول ضلع المربّع، أوجد قيمة x (بالأمتار) التي تعطي العلبة ذات الحجم الأكبر.

$$V'(x) = -6x^2 - 88x + 242 = 0$$

$$x = 2.37 \text{ m}$$

16. عبوّة مياه غازيّة أسطوانيّة الشكل، مساحتها السطحيّة 130 cm^2، أوجد أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة.

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 130$$

$$h = \frac{65}{\pi r} - r$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{65}{\pi r} - r\right)$$

$$= -\pi r^3 + 65r$$

$$V' = -3\pi r^2 + 65 = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{65}{3\pi}} \approx 2.63$$

إذن، أكبر حجم ممكن لهذه العبوّة هو

$$V = -\pi(2.63)^3 + 65(2.63) \approx 114 \text{ cm}^3$$

17. إذا كانت x و y دالّتين بدلالة t، وكانت تربط بين x و y المعادلة $\frac{x^2}{2} - y^2 = 3$، فإنّ:

Ⓐ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$

Ⓑ $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{2y}\frac{dx}{dt}$

Ⓒ $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$

Ⓓ $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y}\frac{dx}{dt}$

18. تطفو بقعة نفط دائريّة الشكل على سطح مياه بحيرة. يتغيّر طول نصف قطر هذه البقعة بمعدّل 3 m/s، وبالتالي عندما يكون طول نصف قطر البقعة 12 m، فإنّ معدّل تغيّر مساحتها يساوي:

Ⓐ $36\pi\ cm^2/s$

Ⓑ $24\pi\ cm^2/s$

Ⓒ $72\ cm^2/s$

Ⓓ $72\pi\ cm^2/s$

---

19. مساحة مستطيلة الشكل يزداد طولها بمعدّل 4 cm/s، وعرضها بمعدّل 2 cm/s، وبالتالي فإنّ معدّل تزايد هذه المساحة عندما يكون طولها 15 cm وعرضها 9 cm يساوي:

Ⓐ $66\ cm^2/s$

Ⓑ $8\ cm^2/s$

Ⓒ $78\ cm^2/s$

Ⓓ $43\ cm^2/s$

---

20. يصبّ الماء بمعدّل $6\ m^3/hr$ في خزّان مقلوب مخروطيّ الشكل. حجم هذا الخزّان V بدلالة ارتفاع مستوى الماء فيه h هو $V = \frac{\pi}{72} h^3$.
أوجد معدّل تزايد منسوب المياه في الخزّان عندما يكون ارتفاع مستوى الماء فيه 3 m

Ⓐ $\frac{16}{\pi}$ m/hr

Ⓑ $\frac{8}{3\pi}$ m/hr

Ⓒ $\frac{20}{\pi}$ m/hr

Ⓓ 16 m/hr

الاسم ________________________________

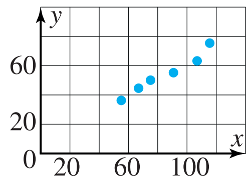
3 تقويم الأداء، النموذج A

تجري شركة لبيع الأجهزة الإلكترونيّة مراجعة دوريّة لخططها واستراتيجيّتها في التسويق والبيع، وذلك لافتتاح فروع جديدة. لذلك طلبت من شركتين (A و B) متخصّصتين في الدراسات الماليّة والاقتصاديّة إعداد دالّة يمكن استعمالها لنمذجة الإيرادات بدلالة عدد الأجهزة المبيعة سنويًّا.

يوضّح الجدول التالي إيرادات الشركة المحققّة وعدد الأجهزة المبيعة خلال 6 سنوات متتالية.

السنة	2016	2017	2018	2019	2020	2021
عدد الأجهزة المبيعة (بالملايين)	55.1	65.6	71.01	90.77	101.65	110.54
الإيرادات (بمليارات الريالات)	38	43.9	45.4	55.9	61.1	78.9

1. أنشىء مخطّط الانتشار للقيم المعطاة في المستوى الإحداثيّ بحيث يمثّل المحور الأفقيّ عدد الأجهزة المبيعة والمحور الرأسيّ الإيرادات المحقّقة.



2. اقترحت الشركة A نمذجة الإيرادات باستعمال الدالّة f المعرّفة لجميع قيم $x \geq 0$ كما يلي:

$$f(x) = 0.00047x^3 - 0.119x^2 + 10.314x - 254$$

a. أوجد نقطة انعطاف منحنى الدالّة f.

المشتقّة الأولى: $f'(x) = 0.00141x^2 - 0.238x + 10.314$

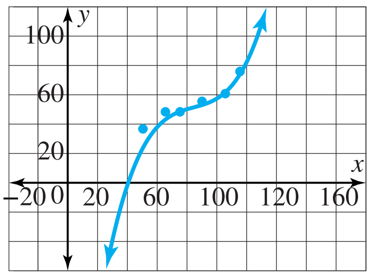
المشتقّة الثانية: $f''(x) = 0.00282x - 0.238$

للمشتقّة الثانية صفر واحد عند $x \approx 84.39$، حيث تتغيّر إشارة $f''(x)$ من السالب إلى الموجب، إذن، نقطة انعطاف منحنى الدالّة f هي $(84.39, 51.39)$

b. أعطِ تفسيرًا اقتصاديًّا لنقطة الانعطاف هذه.

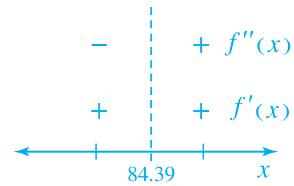
منحنى الدالّة قبل نقطة الانعطاف مقعّر إلى الأسفل، أي أنّ معدّل تزايد الإيرادات سالب، وهذا يعني أنّ الإيرادات تتزايد بوتيرة بطيئة. لكن تقعّر منحنى الدالّة بعد نقطة الانعطاف يصبح إلى الأعلى، أي أنّ معدّل تزايد الايرادات موجب، وهذا يعني أنّ الإيرادات تتزايد بوتيرة أسرع.

c. ارسم منحنى الدالّة f في نفس المستوى الإحداثي الذي أنشأت فيه مخطط الانتشار.



المقطع x: 40.58

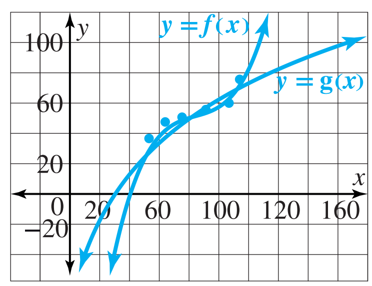
المقطع y: −254



3. اقترحت الشركة B نمذجة الإيرادات باستعمال الدالّة g المعرّفة لجميع قيم x كما يلي:

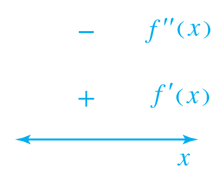
$$g(x) = 67\, ln(x + 14.86) - 255.6$$

ارسم منحنى الدالّة g أيضًا في نفس المستوى الاحداثي.



المقطع x: 30.45

المقطع y: −74.7



4. **a.** أيّ الدالّتين، f أم g، هي الأقرب بيانيًّا إلى نمذجة الإيرادات بدلالة عدد الأجهزة المبيعة؟

الدالّة f ، لأنّ نقاط مخطّط الانتشار أقرب إلى نقاط منحنى الدالّة f مقارنةً بنقاط منحنى الدالّة g.

b. أوجد قيمة تقديرية لإيرادات الشركة في العام 2022 إذا كان عدد الأجهزة المتوقَّع بيعها خلال ذلك العام هو 120 مليون جهاز.

عوّض $x = 120$ في الدالّة f:

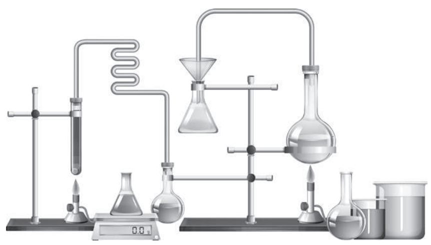
$$f(120) \approx 82.24$$

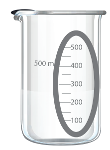
إذن، من المتوقَّع أن تبلغ إيرادات الشركة في العام 2022 حوالي 82 مليار ريال.

الاسم ________________________________

3 تقويم الأداء، النموذج B

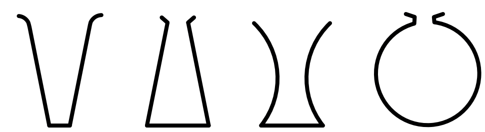
لإجراء التجارب في المختبرات العلميّة، خصوصًا في مجالي علم الكيمياء وعلم الأحياء، تُستعمل مجموعة من الأوعية الزجاجيّة المختلفة الأشكال مخصّصة للسوائل.



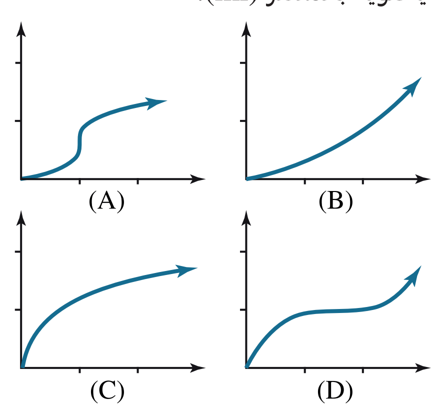


لتسهيل عمليّة استعمال هذه الأوعية، ولأهميّة معرفة المقادير التي تحتويها بشكل دقيق، تكون الأوعية مرقّمة بحيث يظهر بشكل واضح حجم السائل الذي يحتويه الوعاء عند ارتفاعات متعدّدة ومحدّدة.

تمثّل الأشكال الموضّحة أدناه أربعة أنواع من تلك الأوعية مع مسمّياتها.



وتمثّل الرسوم البيانيّة أدناه مجموعة من المنحنيات يمثّل كلّ منها ارتفاع السائل في واحدٍ من تلك الأوعية بدلالة حجم السائل الذي يحتويه بالملّلتر (ml).



سنقوم في ما يلي بالربط بين كلّ وعاء والرسم البياني الذي يمثّله، وللقيام بذلك يجب أن نتذكّر دائمًا أنّ ارتفاع السائل في الوعاء، عندما يكون شكل المقطع العرضيّ متغيّرًا، يتوقّف بشكل أساسي على تغيّر شكل المقطع العرضي للوعاء. فكلّما صغر المقطع العرضيّ للوعاء ازداد ارتفاع السائل بوتيرة أسرع، أي بانحدار أكبر، وكلّما كبر المقطع العرضيّ ازداد ارتفاع السائل بوتيرة أبطأ، أي بانحدار أقل شدة.

1. لتكن f الدالّة المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$$

a. ارسم المنحنى البياني للدالّة عبر دراسة المجال، والقيم الحرجة، والقيم القصوى، وفترات التزايد والتناقص، ونقاط الانعطاف، وفترات التقعّر إلى الأعلى أو الأسفل، والمقاطع، وخطوط التقارب إن وجدت.

المجال: $]-\infty, \infty[$

المقاطع x: 0 و -2.95، المقطع y: 0

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

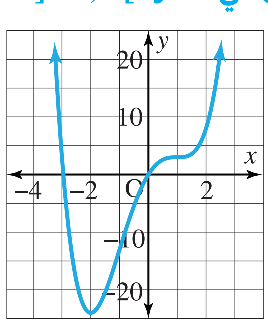
القيم الحرجة: $x = -2$ و $x = 1$

نلاحظ من اختبار المشتقّة الأولى أنّ للدالّة قيمة صغرى محليّة عند $x = -2$ تساوي $f(-2) = -24$.

تتناقص f في الفترة $]-\infty, -2[$ وتتزايد في الفترتين $]-2, 1[$ و $]1, \infty[$.

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

إذن، للدالّة نقطتا انعطاف عند $(-1, -13)$ و $(1, 3)$. منحنى الدالّة مقعّر إلى الأعلى في الفترتين $]-\infty, -1[$ و $]1, \infty[$ وإلى الأسفل في الفترة $]-1, 1[$



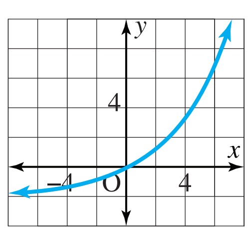
b. تحقّق ممّا إذا كان هذا المنحنى يمكن أن ينمذج ارتفاع السائل في دورق التبخير بدلالة الحجم الذي يحتويه x، حيث $0 \leq x \leq 2$، ثمّ حدّد المنحنى الذي يمثّل النموذج الأقرب إلى منحنى الدالّة f من المنحنيات الأربعة المعطاة.

بما أنّ المنحنى الذي يمثّل المقطع العرضي لدورق التبخير يبدأ بالتزايد، فإنّ ارتفاع السائل في داخله يزداد ببطء إلى أن يصل المقطع العرضي إلى قيمته القصوى عند منتصف الدورق، فيتباطأ ارتفاع السائل إلى حدّه الأقصى. بعد ذلك يعود المقطع العرضي للدورق إلى التناقص، فيبدأ ارتفاع السائل بالتزايد بوتيرة أسرع.
المنحنى (D) هو الأقرب إلى منحنى الدالّة f.

2. لتكن g الدالّة المعرّفة كما يلي: $g(x) = e^{0.25x} - 1$.

a. ارسم المنحنى البياني للدالّة عبر دراسة المجال، والقيم الحرجة، والقيم القصوى، وفترات التزايد والتناقص، ونقاط الانعطاف، وفترات التقعّر إلى الأعلى أو الأسفل، والمقاطع، وخطوط التقارب إن وجِدت.

المجال: $]-\infty, \infty[$
المقطع x: 0، المقطع y: 0
$$f'(x) = 0.25e^{0.25x}$$
ليست للدالّة قيم حرجة.
تتزايد الدالّة لكلّ قيم x في الفترة $]-\infty, \infty[$.
$$f''(x) = 0.0625e^{0.25x}$$
إذن، ليست للدالّة نقاط انعطاف، ومنحناها مقعّر إلى الأعلى دائمًا.
للدالّة خطّ تقارب أفقيّ هو $y = -1$.



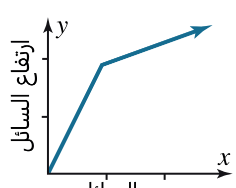
b. تحقّق ممّا إذا كان هذا المنحنى يمكن أن ينمذج ارتفاع السائل في الدورق المخروطيّ بدلالة الحجم الذي يحتويه x، حيث $0 \leq x \leq 2$، ثمّ حدّد المنحنى الذي يمثّل النموذج الأقرب إلى منحنى الدالّة g من المنحنيات الأربعة المعطاة.

بما أنّ المقطع العرضي للدورق المخروطيّ يتناقص باستمرار، فإنّ ارتفاع السائل في داخله يتزايد بوتيرة متسارعة.
إذن، المنحنى (B) ينمذج ارتفاع السائل داخل الدورق المخروطي وهو الأقرب إلى منحنى الدالّة g.

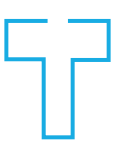
3. حدّد المنحنى الذي ينمذج ارتفاع السائل داخل كلّ من الدلو والقارورة من المنحنيات الأربعة المعطاة. برّر إجابتك.

المنحنى (A) ينمذج ارتفاع السائل داخل القارورة، لأنّ مقطعها العرضي يبدأ بالتناقص شيئا فشيئا وصولا الى المنتصف حيث يعود ليتزايد، أي أنّ ارتفاع السائل يتسارع بانحدار شديد وصولا ألى اقصى قيمة له عند المنتصف ليعود بعدها ويتباطىء الانحدار (ارتفاع السائل) ويصبح أقل شدة شيئا فشيئا.
المنحنى (C) ينمذج ارتفاع السائل داخل الدلو، لأنّ مقطعه العرضيّ يتزايد تدريجيًّا، أي أنّ ارتفاع السائل يتزايد بوتيرة متباطئة.

4. ارسم مقطعًا عرضيًّا من اختيارك لوعاء لحفظ السوائل بحيث يمكن نمذجة تغيّر ارتفاع السائل داخل الوعاء بدلالة حجم السائل، كما هو مبيّن في الرسم المجاور.



قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: انحدار خطّيّ شديد ثمّ انحدار خطّيّ أقل شدة.



الاسم ____________________

4 اختبار بداية الوحدة

1. إذا كان $f(x) = -2e^{-x} + k$ وكان $f(0) = 3$، فإنّ قيمة k تساوي:

Ⓐ -5

Ⓑ -3

Ⓒ 2

● 5

2. أيّ من الدوالّ التالية هي معكوس الدالّة الأسّيّة $f(x) = 7^x$؟

Ⓐ $y = x^7$

Ⓑ $y = 7^x$

● $y = \log_7 x$

Ⓓ $y = \log_x 7$

3. اقسم $2x^3 + x^2 - 5x - 1$ على $x + 2$ باستعمال القسمة التركيبيّة، واكتب ناتج القسمة في صورة كسر.

-2	2	1	-5	-1
		-4	6	-2
	2	-3	1	-3

إذن،

$$2x^2 - 3x + 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 1}{x + 2}$$

4. أيّ من القيم التالية هي أفضل تقريب لقيمة المقدار $\ln 81$؟

Ⓐ 2.07

Ⓑ 2.19

Ⓒ 4.15

● 4.39

5. أيّ من القيم التالية تمثّل قيمة المقدار $\log \frac{1}{1\,000}$؟

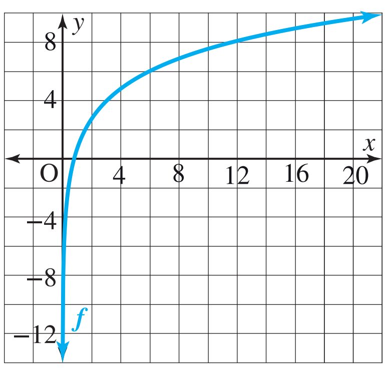
● -3

Ⓑ $-\frac{1}{3}$

Ⓒ 3

Ⓓ $1\,000$

6. استعمل خصائص اللوغاريتمات لكتابة المقدار $\frac{1}{2} \ln 4 + 3 \ln x$ في صورة لوغاريتم واحد، ثمّ مثّله بيانيًّا.



$\ln(2x^3)$

7. أيّ من الدوالّ التالية مشتقّته هي الدالّة $y = 3x^2 + 1$؟

● $x^3 + x$

Ⓑ $6x$

Ⓒ $x^3 + 1$

Ⓓ $6x + 1$

8. أوجد مشتقّة الدالّة $y = 3 + x^2 - \cos x$.

$y' = 2x - (-\sin x) = 2x + \sin x$

9. أوجد مشتقّة الدالّة $y = \frac{x}{1 + \sin x}$.

$$y' = \frac{1 + \sin x - x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

10. بسّط المقدار $\sin x \cot^2 x + \sin x$ باستعمال المتطابقات المثلّثيّة.

$$\sin x \cot^2 x + \sin x$$
$$= \sin x \left(\cot^2 x + 1\right)$$
$$= \sin x \left(\csc^2 x\right)$$
$$= \sin x \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sin x}$$

11. أوجد مشتقة الدالّة $y = \cot(2x + 1)$.

$$y' = -\csc^2(2x + 1) \times (2)$$
$$= -2\csc^2(2x + 1)$$

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$ ؟

Ⓐ $\frac{8x}{\sqrt{4x^2 + 3}}$

Ⓑ $\frac{8x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}}$

Ⓒ $\frac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3}}$

● $\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 3}}$

13. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = x \tan x$ ؟

Ⓐ $\tan x + \sec^2 x$

Ⓑ $1 + \tan x$

● $\tan x + x \sec^2 x$

Ⓓ $\tan x + \csc^2 x$

14. إذا كانت $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = ln\,|x|$، فإنّ $(g \circ f)(x)$ تساوي:

Ⓐ $2\, ln\,|x| - 1$

Ⓑ $ln\,|2x| - 1$

Ⓒ $2\, ln\,|x - 1|$

● $ln\,|2x - 1|$

15. أيّ من المقادير التالية يساوي المقدار $\frac{4x + 2}{x^2 - 1}$؟

Ⓐ $\frac{4x}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}$

● $\frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}$

Ⓒ $\frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x + 1}$

Ⓓ $\frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

16. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = ln\,(2x^2 - 5)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 - 5} \times (4x) = \frac{4x}{2x^2 - 5}$$

.17 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة
؟ $f(x) = (3x^3 + 1)^2$

Ⓐ $f'(x) = 54x^5 + 18x^2$

Ⓑ $f'(x) = 6x^3 + 2$

Ⓒ $f'(x) = 9x^2$

Ⓓ $f'(x) = 27x^5 + 9x^2$

.18 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة
؟ $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Ⓐ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2x - 1}}{2\sqrt{x^2 - x}}$

Ⓒ $\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

Ⓓ $\dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

.19 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة
؟ $f(x) = e^{\sqrt{x^3 - 3x}}$

Ⓐ $e^{\sqrt{x^3 - 3x}}$

Ⓑ $(3x^2 - 3)\, e^{\sqrt{x^3 - 3x}}$

Ⓒ $\dfrac{1}{2\sqrt{x^3 - 3x}}\, e^{\sqrt{x^3 - 3x}}$

Ⓓ $\dfrac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}\, e^{\sqrt{x^3 - 3x}}$

.20 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة
؟ $f(x) = \sin\,(x^2 + 1)$

Ⓐ $2x\cos(x^2 + 1)$

Ⓑ $\cos(x^2 + 1)$

Ⓒ $-\cos(x^2 + 1)$

Ⓓ $-2x\cos(x^2 + 1)$

الاسم ______________________________

4-1 اختبار الدرس

التكامل غير المحدد

1. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = x^5$؟

Ⓐ $F(x) = x^6$

Ⓑ $F(x) = 5x^6$

● $F(x) = \frac{1}{6}x^6$

Ⓓ $F(x) = 6x^6$

2. استعمل قاعدة القوّة لتحديد الخيار الذي يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{-1}{t^3}\, dt$ ممّا يلي.

Ⓐ $\frac{-1}{t^3} + C$

Ⓑ $\frac{-1}{2t^2} + C$

● $\frac{1}{2t^2} + C$

Ⓓ $\frac{1}{t^2} + C$

3. استعمل قواعد التكامل لإيجاد التكامل غير المحدود $\int (4z^3 - z - 2)\, dz$.

$$\int (4z^3 - z - 2)\, dz$$

$$= 4\int z^3\, dz - \int z\, dz - 2\int dz$$

$$= 4\left(\frac{z^4}{4}\right) - \left(\frac{z^2}{2}\right) - 2z + C$$

$$= z^4 - \frac{1}{2}z^2 - 2z + C$$

4. استعمل قواعد التكامل لإيجاد التكامل غير المحدود $\int \frac{x^3 - 3}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

$$\int \frac{x^3 - 3}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{8}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}\right) dx$$

$$= \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} - \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

5. أوجد الدالّة F التي ميل مماسّها في كلّ نقطة إحداثيّها x هو $f(x) = -3x^2 - 1$، ويمرّ منحناها بالنقطة $(1, -1)$

$$f(x) = -3x^2 - 1$$

$$F(x) = \int (-3x^2 - 1)\, dx = -x^3 - x + C$$

منحنى الدالّة F يمرّ بالنقطة $(1, -1)$، إذن،

$$-1 = -(1)^3 - (1) + C$$

$$C = 1$$

إذن،

$$F(x) = -x^3 - x + 1$$

الاسم ______________________________

4-2 اختبار الدرس

قواعد تكامل الدوالّ

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{-4}{e^{4x}}\, dx$؟

Ⓐ $-\frac{e^{-4x}}{4} + C$
● $e^{-4x} + C$
Ⓑ $-e^{-4x} + C$
Ⓓ $\frac{e^{-4x}}{4} + C$

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int 2\left(\frac{1}{x} - e^{2x}\right) dx$؟

Ⓐ $2\, ln\, |x| + e^{2x} + C$
Ⓑ $-2\, ln\, |x| - e^{2x} + C$
● $2\, ln\, |x| - e^{2x} + C$
Ⓓ $-2\, ln\, |x| + e^{2x} + C$

---

3. افترض أنّ الإيرادات الحدّيّة لأحد المصانع من منتج معيّن هي $315\, e^{-0.09q} + 4$، حيث q عدد الوحدات المنتجة من هذا المنتج. أوجد دالّة إيرادات المصنع من هذا المنتج. وضّح إجابتك.

دالّة الإيرادات الحدّيّة هي مشتقّة دالّة إيرادات المصنع من هذا المنتج، أي $R(q)$.
إذن،

$$R'(q) = 315\, e^{-0.09q} + 4$$
$$R(q) = \int \left(315\, e^{-0.09q} + 4\right) dq$$
$$= 315\, \frac{e^{-0.09q}}{-0.09} + 4q + C$$
$$= -3\,500\, e^{-0.09q} + 4q + C$$

إذا كان $q = 0$، فإنّ $R(q) = 0$،
إذن، $C = 3\,500$

إذن، دالّة إيرادات المصنع هي:

$$R(q) = -3\,500\, e^{-0.09q} + 4q + 3\,500$$

4. استعمل قواعد التكامل لإيجاد التكامل غير المحدود $\frac{7}{2}\int \sin \frac{7}{2}x\, dx$

$$\frac{7}{2}\int \sin \frac{7}{2}x\, dx = -\frac{7}{2} \times \frac{\cos \frac{7}{2}x}{\frac{7}{2}} + C$$
$$= -\cos \frac{7x}{2} + C$$

---

5. أوجد التكامل غير المحدود التالي:

$$\int (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\, dx$$

أستعمل متطابقة ضعف الزاوية:

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$
$$\int \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right) dx = \int \cos 4x\, dx$$

أستعمل قواعد تكامل الدوالّ المثلّثيّة:

$$= \frac{\sin 4x}{4} + C$$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 1 04/03/2022 5:50:25 PM

الاسم ______________________________

4-3 اختبار الدرس

التكامل بالتعويض

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int x^3 \sqrt{x^4 - 2}\, dx$؟

Ⓐ $\frac{8}{3}(x^4 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$

Ⓑ $-\frac{8}{3}(x^4 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$

Ⓒ $-\frac{2}{3}(x^4 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$

Ⓓ $\frac{2}{3}(x^4 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{x + 1}{2x^2 + 4x - 1}\, dx$؟

Ⓐ $ln\,|2x^2 + 4x - 1| + C$

Ⓑ $-ln\,|2x^2 + 4x - 1| + C$

Ⓒ $ln\,|x + 1| + C$

Ⓓ $-ln\,|x + 1| + C$

---

3. أوجد التكامل غير المحدود $\int x\, e^{2x^2 + 1}\, dx$.

لتكن $u = 2x^2 + 1$. إذن، $du = 4x\, dx$

أضرب في العدد $1 = 4\left(\frac{1}{4}\right)$، ثمّ أضع 4 داخل التكامل و $\frac{1}{4}$ خارجه لأحصل على

$$\int x\, e^{2x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2 + 1}\,(4x\, dx)$$

$$= \frac{1}{4}\int e^u\, du$$

$$= \frac{1}{4} e^u + C$$

أعوّض $u = 2x^2 + 1$

$$= \frac{1}{4} e^{2x^2 + 1} + C$$

4. أوجد التكامل غير المحدود $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$.

لتكن $u = \sin x$. إذن، $du = \cos x\, dx$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = \int e^{\sin x}\,(\cos x\, dx)$$

$$= \int e^u\, du$$

$$= e^u + C$$

$$= e^{\sin x} + C$$

---

5. أوجد التكامل غير المحدود $\int x\sqrt{2x - 1}\, dx$.

لتكن $u = 2x - 1$.

إذن، $x = \frac{u + 1}{2}$ و $dx = \frac{du}{2}$

$$\int x\sqrt{2x - 1}\, dx = \int \left(\frac{u + 1}{2}\right)\sqrt{u}\;\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u + 1)\sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{10}(2x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 2 04/03/2022 5:50:26 PM

الاسم ________________________________

4-4 اختبار الدرس

التكامل بالأجزاء

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (2x-1)\cos x\, dx$؟

Ⓐ $2x \sin x + \sin x + 2 \cos x + C$

Ⓑ $2x \sin x - \sin x - 2 \cos x + C$

Ⓒ $2x \sin x - \sin x + \cos x + C$

Ⓓ $2x \sin x - \sin x + 2 \cos x + C$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int -3x\, e^{3x}\, dx$؟

Ⓐ $-xe^{3x} + \frac{e^{3x}}{3} + C$

Ⓑ $xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{3} + C$

Ⓒ $-xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{3} + C$

Ⓓ $xe^{3x} + \frac{e^{3x}}{3} + C$

3. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 \sin x\, dx$.

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int -\cos x(2x)\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

4. أوجد التكامل غير المحدود $\int (2\ ln\ x - 3x)\, dx$.

$$\int (2\ ln\ x - 3x)\, dx$$

$$= 2\int ln\ x\, dx - 3\int x\, dx$$

ليكن $u = ln\ x$ و $dv = dx$،

إذن، $v = x$ و $du = \frac{1}{x}\, dx$

$$= 2\left[x\ ln\ x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] - \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$= 2x\ ln\ x - 2x - \frac{3}{2}x^2 + C$$

5. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 e^{4x}\, dx$ باستعمال طريقة الجدول.

لتكن $u = x^2$ فيبقى e^{4x} فأكتبه في القائمة الثانية، إذن،

D		I
x^2	+	e^{4x}
$2x$	−	$\frac{1}{4} e^{4x}$
2	+	$\frac{1}{16} e^{4x}$
0		$\frac{1}{64} e^{4x}$

$$\int x^2\ e^{4x}\, dx = \frac{1}{4}\left[x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right] e^{4x} + C$$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indd 1 04/03/2022 5:50:27 PM

الاسم ____________________

4-5 اختبار الدرس

التكامل بالكسور الجزئيّة

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الدالّة $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-x-2}$ في صيغة جمع لكسور جزئيّة ذات مقام خطّي؟

Ⓐ $\frac{2x}{x^2-x-2} + \frac{5}{x^2-x-2}$ Ⓑ $-\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}$ Ⓒ $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}$ Ⓓ $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$

---

2. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة، ثمّ أوجد التكامل غير المحدود $\int\left(\frac{2x-1}{x^2-2x+1}\right)dx$.

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}$$

إذن، لكلّ قيمة للمتغيّر x،

$2x - 1 = a(x-1) + b$

أختار $x = 2$، فأحصل على $a + b = 3$

أختار $x = 0$، فأحصل على $-a + b = -1$

إذن، $a = 2$ و $b = 1$

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}dx = \int\left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{2dx}{(x-1)} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 2\ ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int\left(\frac{5x+10}{2x^2+7x+3}\right)dx$؟

Ⓐ $\frac{1}{2}\ ln|2x+1| + ln|x+3| + C$

Ⓑ $-\frac{3}{2}\ ln|2x+1| - ln|x+3| + C$

Ⓒ $3\ ln|2x+1| + ln|x+3| + C$

Ⓓ $\frac{3}{2}\ ln|2x+1| + ln|x+3| + C$

---

4. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{2x^4-9x^2+5}{x^2-4}dx$.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 1 \\ \hline x^2-4 & 2x^4 - 9x^2 + 5 \\ & \underline{2x^4 - 8x^2} \\ & -x^2 + 5 \\ & \underline{-x^2 + 4} \\ & 1 \end{array}$$

$$\frac{2x^4-9x^2+5}{x^2-4} = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2-4}$$

$$\int \frac{2x^4-9x^2+5}{x^2-4}dx = \int\left(2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2-4}\right)dx$$

$$= \int (2x^2-1)\ dx + \int\left(\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{1}{4}\ ln|x-2| - \frac{1}{4}\ ln|x+2| + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{1}{4}\ ln\frac{|x-2|}{|x+2|} + C$$

---

5. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx$.

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx$$

$$= \int\left[1 + \frac{4}{x^2-4}\right]dx$$

$$= \int\left[1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right]dx$$

$$= x + ln\ |x-2| - ln\ |x+2| + C$$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 2 04/03/2022 5:50:30 PM

الاسم ______________________

4 تقويم الوحدة، النموذج A

1. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = -3x^2$؟

Ⓐ $F(x) = x^{-3}$
Ⓑ $F(x) = -x^3$
Ⓒ $F(x) = \frac{1}{3}x^2$
Ⓓ $F(x) = -\frac{1}{3}x^2$

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{1}{t^3}\, dt$؟

Ⓐ $\frac{1}{t^2} + C$
Ⓑ $\frac{1}{2t^2} + C$
Ⓒ $-\frac{1}{2t^2} + C$
Ⓓ $-\frac{1}{t^2} + C$

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (8x^3 - 3x^2 + 4)\, dx$؟

Ⓐ $2x^4 - x^3 + 4x + C$
Ⓑ $2x^4 - x^3 + 4 + C$
Ⓒ $4x^4 - x^3 + 4x + C$
Ⓓ $8x^4 - x^3 + 4x + C$

---

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$؟

Ⓐ $x^{\frac{5}{2}} - x + C$
Ⓑ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C$
Ⓒ $\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - x + C$
Ⓓ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C$

---

5. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{3}{e^{3x}}\, dx$؟

Ⓐ $-\frac{e^{-3x}}{3} + C$
Ⓑ $e^{-3x} + C$
Ⓒ $-e^{-3x} + C$
Ⓓ $\frac{e^{-3x}}{3} + C$

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{-1}{3}\left(\frac{-3}{x} - e^{-3x}\right) dx$؟

Ⓐ $ln\,|x| + \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
Ⓑ $ln\,|x| - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
Ⓒ $\frac{-1}{3}ln\,|x| - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$
Ⓓ $-ln\,|x| - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$

---

7. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $2\int -\cos\frac{1}{2}x\, dx$؟

Ⓐ $-2\sin\frac{1}{2}x + C$
Ⓑ $2\sin\frac{1}{2}x + C$
Ⓒ $\sin\frac{1}{2}x + C$
Ⓓ $-4\sin\frac{1}{2}x + C$

---

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$؟

Ⓐ لا يمكن إيجادها
Ⓑ 1
Ⓒ C
Ⓓ $x + C$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indd 1 04/03/2022 5:50:31 PM

9. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{2x^{-1}}\,dx$؟

Ⓐ $5(x^2-1)^{\frac{5}{4}}+C$

Ⓑ $-5(x^2-1)^{\frac{5}{4}}+C$

Ⓒ $-\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{4}}+C$

Ⓓ $\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{4}}+C$

---

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $-6\int \frac{x^2+1}{-2x^3-6x+3}\,dx$؟

Ⓐ $ln\left|-2x^3-6x+3\right|+C$

Ⓑ $-ln\left|-2x^3-6x+3\right|+C$

Ⓒ $ln\left|x^2+1\right|+ln\left|-2x^3-6x+3\right|+C$

Ⓓ $-ln\left|x^2+1\right|-ln\left|-2x^3-6x+3\right|+C$

---

11. أوجد التكامل غير المحدود $\int (3x^2-2)\,ln\,x\,dx$.

لتكن $u = ln\,x$ و $dv = (3x^2-2)\,dx$

$$\int (3x^2-2)\,ln\,x\,dx$$
$$= (x^3-2x)\,lnx - \int (x^3-2x)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= (x^3-2x)\,ln\,x - \int x^2\,dx + 2\int dx$$
$$= (x^3-2x)\,ln\,x - \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

12. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 \sin x\,dx$ باستعمال طريقة الجدول. اشرح الحلّ.

لتكن $u = x^2$ والباقي هو $\sin x$ أكتبه في العمود I، ثمّ أوجد تكامل العمود الأوّل I نزولًا، ومشتقّة العمود الثاني D نزولًا. إذن،

D		I
x^2	+	$\sin x$
$2x$	−	$-\cos x$
2	+	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\int x^2 \sin x\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

---

13. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{-3}{2x^2+5x+2}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة ذات مقام خطّي.

$$\frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$$

---

14. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{6x-5}{(2x-1)^2}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة.

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{(2x-1)^2}$$

---

15. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{ln^2 x}{x}\,dx$؟

Ⓐ $\frac{ln\,x^3}{3}+C$

Ⓑ $ln^3 x + C$

Ⓒ $\frac{ln^3 x}{3}+C$

Ⓓ $\frac{ln^2 x}{3}+C$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{\sin x\, dx}{1 - \cos x}$؟

Ⓐ $ln\ (1 - \cos x) + C$

Ⓑ $ln\ |1 - \cos x| + C$

Ⓒ $ln\ |x| + C$

Ⓓ $ln\ |1 - x| + C$

---

17. يمكن نمذجة معدّل انتشار وباء في إحدى المناطق كما يلي:

$$D(t) = \frac{140t}{t^2 + 7}$$

حيث $D(t)$ عدد المصابين بالعدوى بعد مرور t يوم.

أوجد عدد المصابين بالعدوى بعد 15 يومًا، علمًا أن أنّ عدد المصابين عند $t = 0$ كان 30 شخصًا.

$$D(t) = \int \frac{140t}{t^2 + 7}\, dt = 140 \int \frac{t}{t^2 + 7}\, dt$$

ليكن $u = t^2 + 7$، إذن، $du = 2t\, dt$

$$D(u) = 70 \int \frac{1}{u} du = 70\, ln\, |u| + C$$

$$D(t) = 70\, ln |t^2 + 7| + C$$

بما أنّ $D(0) = 30$، $C \approx -106$

إذن، $D(t) = 70\, ln\, |t^2 + 7| - 106$

عدد المصابين بالعدوى بعد 15 يومًا

$$D(15) = 70\, ln\, |15^2 + 7| - 106 \approx 276$$

---

18. أثبت أنّ $\int \frac{\sin x\, dx}{x^2} - \int \frac{\cos x\, dx}{x} = -\frac{\sin x}{x} + C$

أكتب $\int \frac{\sin x\, dx}{x^2}$ باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء. ليكن $u = \sin x$ و $dv = \frac{dx}{x^2}$، إذن،

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x\, dx}{x}$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x^2} - \int \frac{\cos x\, dx}{x} = -\frac{\sin x}{x} + C$$

19. أوجد التكامل غير المحدود $\int \cot x\, dx$.

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

عوّض $u = \sin x$، إذن، $du = \cos x\, dx$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= ln\ |u| + C = ln\ |\sin x| + C$$

---

20. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{lnx}{(x+1)^2} dx$.

باستعمال طريقة الجدول:

D		I
$ln\ x$	$+$	$\frac{1}{(x+1)^2}$
$\frac{1}{x}$	$-$	$-\frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{ln\ x}{(x+1)^2} dx = -\frac{ln\ x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

أكمل الحل باستعمال الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = ln\ |x| - ln\ |x+1| + C$$

$$\int \frac{ln\ x}{(x+1)^2} dx = -\frac{ln\ x}{x+1} + ln\ |x|$$

$$- ln\ |x+1| + C$$

الاسم ________________

4 تقويم الوحدة، النموذج B

.1 أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = -4x^3$؟

Ⓐ $F(x) = -x^4$

Ⓑ $F(x) = x^{-4}$

Ⓒ $F(x) = \frac{1}{4}x^3$

Ⓓ $F(x) = -\frac{1}{4}x^3$

.2 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{1}{t^4}\, dt$؟

Ⓐ $\frac{1}{t^3} + C$

Ⓑ $\frac{1}{3t^3} + C$

Ⓒ $-\frac{1}{3t^3} + C$

Ⓓ $-\frac{1}{t^3} + C$

.3 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (16x^3 + 6x^2 - 5)\, dx$؟

Ⓐ $2x^4 + 3x^3 - 5 + C$

Ⓑ $4x^4 + 2x^3 - 5 + C$

Ⓒ $4x^4 + 2x^3 - 5x + C$

Ⓓ $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + C$

.4 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$؟

Ⓐ $x^{\frac{5}{2}} - x + C$

Ⓑ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C$

Ⓒ $\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - x + C$

Ⓓ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C$

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{4}{e^{4x}}\, dx$؟

Ⓐ $-\frac{e^{-4x}}{4} + C$

Ⓑ $-e^{-4x} + C$

Ⓒ $e^{-4x} + C$

Ⓓ $\frac{e^{-4x}}{4} + C$

.6 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{-1}{5}\left(\frac{-5}{x} + e^{-5x}\right) dx$؟

Ⓐ $\ln|x| + \frac{1}{25}e^{-5x} + C$

Ⓑ $\ln|x| - \frac{1}{10}e^{-5x} + C$

Ⓒ $\frac{-1}{5}\ln|x| + \frac{1}{25}e^{-5x} + C$

Ⓓ $-\ln|x| + \frac{1}{25}e^{-5x} + C$

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $3\int -\cos\frac{1}{3}x\, dx$؟

Ⓐ $-3\sin\frac{1}{3}x + C$

Ⓑ $3\sin\frac{1}{3}x + C$

Ⓒ $\sin\frac{1}{3}x + C$

Ⓓ $-9\sin\frac{1}{3}x + C$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (2\sin x \cos x)\, dx$؟

Ⓐ $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Ⓑ $\sin 2x$

Ⓒ $-\cos 2x + C$

Ⓓ $\frac{1}{2}\cos 2x + C$

9. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود
$\int \frac{2\sqrt[3]{x^2+1}}{x^{-1}}\,dx$ ؟

Ⓐ $4(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$

Ⓑ $-4(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$

● $\frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$

Ⓓ $-\frac{4}{3}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$

---

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود
$-12\int \frac{x^2-1}{-4x^3+12x+5}\,dx$ ؟

Ⓐ $-ln\left|-4x^3+12x+5\right| + C$

● $ln\left|-4x^3+12x+5\right| + C$

Ⓒ $ln\left|x^2-1\right| + ln\left|-4x^3+12x+5\right| + C$

Ⓓ $-ln\left|x^2-1\right| - ln\left|-4x^3+12x+5\right| + C$

---

11. أوجد التكامل غير المحدود
$\int (2x^2+1)\ ln\,x\,dx$.

لتكن $u = ln\,x$ و $dv = (2x^2+1)\,dx$

$$\int (2x^2+1)\ ln\,x\,dx$$
$$= \left(\frac{2x^3}{3}+x\right) ln\,x - \int \left(\frac{2x^3}{3}+x\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \left(\frac{2x^3}{3}+x\right) ln\,x - \frac{2}{3}\int x^2\,dx - \int dx$$
$$= \left(\frac{2x^3}{3}+x\right) ln\,x - 2\frac{x^3}{9} - x + C$$

12. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 \cos x\,dx$
باستعمال طريقة الجدول. اشرح الحلّ.

لتكن $u = x^2$ والباقي هو $\cos x$ أكتبه في العمود I، ثمّ أوجد تكامل العمود الأوّل I نزولًا، ومشتقّة العمود الثاني D نزولًا. إذن،

D		I
x^2	+	$\cos x$
$2x$	−	$\sin x$
2	+	$-\cos x$
0		$-\sin x$

$$\int x^2 \cos x\,dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$$

---

13. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{3}{2x^2+x-1}$
في صيغة جمع كسور جزئيّة ذات مقام خطّي.

$$\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$$

---

14. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{4x-1}{4x^2+4x+1}$
في صيغة جمع كسور جزئيّة.

$$\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{(2x+1)^2}$$

---

15. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{ln^3 x}{x}\,dx$.

Ⓐ $\frac{ln\,x^4}{4} + C$

Ⓑ $ln^4 x + C$

● $\frac{ln^4 x}{4} + C$

Ⓓ $\frac{ln^3 x}{4} + C$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x}$؟

Ⓐ $ln\,(1 + x) + \mathrm{C}$

Ⓑ $ln\,(1 + \sin x) + \mathrm{C}$

Ⓒ $ln\,|x| + \mathrm{C}$

● $ln\,|1 + \sin x| + \mathrm{C}$

---

17. يمكن نمذجة معدّل انتشار وباء في إحدى المناطق كما يلي:

$$\mathrm{D}'(t) = \frac{136t}{t^2 + 6}$$

حيث $\mathrm{D}(t)$ عدد المصابين بالعدوى بعد مرور t يوم.

أوجد عدد المصابين بالعدوى بعد 20 يومًا، علمًا أنّ عدد المصابين عند $t = 0$ كان 42 شخصًا.

$$\mathrm{D}(t) = \int \frac{136t}{t^2 + 6}\,dt = 136\int \frac{t}{t^2 + 6}\,dt$$

ليكن $u = t^2 + 6$، إذن، $du = 2t\,dt$

$$\mathrm{D}(u) = 68\int \frac{1}{u}\,du = 68\,ln\,|u| + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{D}(t) = 68\,ln\,|t^2 + 6| + \mathrm{C}$$

بما أنّ $\mathrm{D}(0) = 42$، $\mathrm{C} \approx -80$

إذن، $\mathrm{D}(t) = 68\,ln\,|t^2 + 6| - 80$

عدد المصابين بالعدوى بعد 20 يومًا:

$$\mathrm{D}(20) = 68\,ln\,|20^2 + 6| - 80 \approx 328$$

---

18. أثبت أنّ $\int \frac{\sin x\, dx}{x^3} + \int \frac{\cos x\, dx}{2x^2} = -\frac{\sin x}{2x^2} + \mathrm{C}$

أكتب $\int \frac{\sin x\, dx}{x^3}$ باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء. ليكن $u = \sin x$ و $dv = \frac{dx}{x^3}$، إذن،

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x^3} = -\frac{\sin x}{2x^2} - \int \frac{\cos x\, dx}{2x^2}$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x^3} + \int \frac{\cos x\, dx}{2x^2} = -\frac{\sin x}{2x^2} + \mathrm{C}$$

19. أوجد التكامل غير المحدود $\int \tan x\, dx$.

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

أعوّض $u = \cos x$، إذن، $du = -\sin x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -ln\,|u| + \mathrm{C}$$

$$= -ln\,|\cos x| + \mathrm{C}$$

---

20. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{ln\,x}{(x-1)^2}\,dx$.

باستعمال طريقة الجدول:

D		I
$ln\,x$	$+$	$\frac{1}{(x-1)^2}$
$\frac{1}{x}$	$-$	$-\frac{1}{x-1}$

$$\int \frac{ln\,x}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{ln\,x}{x-1} + \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$

أكمل الحل باستعمال الكسور الجزئيّة:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = -ln\,|x| + ln\,|x-1| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{ln\,x}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{ln\,x}{x-1} - ln\,|x|$$

$$+ ln\,|x-1| + \mathrm{C}$$

M04_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 4 04/03/2022 5:50:41 PM

الاسم ________

4 تقويم الوحدة، النموذج C

1. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = -5x^4$؟

Ⓐ $F(x) = x^{-5}$
● $F(x) = -x^5 + C$
Ⓑ $F(x) = -25x^4$
Ⓓ $F(x) = 25x^5$

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{1}{t^2}\, dt$؟

Ⓐ $\frac{1}{t} + C$
Ⓒ $-t + C$
● $-\frac{1}{t} + C$
Ⓓ $t^3 + C$

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (4x^3 - 6x^2 + 1)\, dx$؟

Ⓐ $4x^4 - 3x^3 + 1 + C$
● $x^4 - 2x^3 + x + C$
Ⓒ $x^4 - 2x^3 + 1 + C$
Ⓓ $16x^4 - 3x^3 - x + C$

---

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{x^3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$؟

Ⓐ $x^{\frac{7}{2}} - x + C$
Ⓑ $\frac{2}{7}x^{\frac{5}{2}} + x + C$
● $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - x + C$
Ⓓ $\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - x + C$

---

5. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{2}{e^{2x}}\, dx$؟

● $-e^{-2x} + C$
Ⓒ $e^{-2x} + C$
Ⓑ $-4e^{-2x} + C$
Ⓓ $4e^{-2x} + C$

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{-1}{4}\left(\frac{-4}{x} - e^{-4x}\right) dx$؟

Ⓐ $ln\,|x| + \frac{1}{4}e^{-4x} + C$
Ⓑ $-\,ln\,|x| - \frac{1}{16}e^{-4x} + C$
Ⓒ $\frac{-1}{4}\,ln\,|x| - \frac{1}{16}e^{-4x} + C$
● $ln\,|x| - \frac{1}{16}e^{-4x} + C$

---

7. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $4\int -\cos\frac{1}{4}x\, dx$؟

Ⓐ $-4\sin\frac{1}{4}x + C$
Ⓑ $4\sin\frac{1}{4}x + C$
Ⓒ $\sin\frac{1}{4}x + C$
● $-16\sin\frac{1}{4}x + C$

---

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (1 + \tan^2 x)\, dx$؟

Ⓐ $\sec^2 x + C$
● $\tan x + C$
Ⓒ $\cot x + C$
Ⓓ $x + \sec^2 x + C$

9. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{\sqrt[4]{x^2+1}}{2x^{-1}}\,dx$ ؟

Ⓐ $5(x^2+1)^{\frac{5}{4}} + C$

Ⓑ $-5(x^2+1)^{\frac{5}{4}} + C$

Ⓒ $-\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{4}} + C$

● $\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{4}} + C$

---

10. أيّ من الخيارات التالية يمثل التكامل غير المحدود $\int \frac{x^2-1}{3x^3-9x+1}\,dx$ ؟9

Ⓐ $-\ln|3x^3-9x+1| + C$

Ⓑ $\ln|x^{2-1}| - \ln|3x^3-9x+1| + C$

● $\ln|3x^3-9x+1| + C$

Ⓓ $-\ln|x^2-1| - \ln|3x^3-9x+1| + C$

---

11. أوجد التكامل غير المحدود $\int (x^2+5)\ln x\,dx$.

لتكن $u = \ln x$ و $dv = (x^2+5)\,dx$

$$\int (x^2+5)\ln x\,dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx + 5\int dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + 5x + C$$

12. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 \sin 2x\,dx$ باستعمال طريقة الجدول. اشرح الحلّ.

لتكن $u = x^2$ والباقي هو $\sin 2x$ أكتبه في العمود I، ثمّ أوجد تكامل العمود الأوّل I نزولًا، ومشتقّة العمود الثاني D نزولًا. إذن،

D		I
x^2	+	$\sin 2x$
$2x$	−	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
2	+	$-\frac{1}{4}\sin 2x$
0		$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$\int x^2 \sin 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$$
$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

---

13. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{5x-4}{2x^2-5x+2}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة ذات مقام خطّيّ.

$$\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x-2}$$

---

14. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+4}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة.

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

---

15. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$ ؟

Ⓐ $\frac{\ln x^5}{5} + C$

Ⓑ $\ln^5 x + C$

● $\frac{\ln^5 x}{5} + C$

Ⓓ $\frac{\ln^4 x}{5} + C$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos x}$؟

Ⓐ $-\, ln\,(1 + \cos x) + C$

● $-\, ln\,|1 + \cos x| + C$

Ⓒ $ln\,|x| + C$

Ⓓ $ln\,|1 + x| + C$

---

17. يمكن نمذجة معدّل انتشار وباء في إحدى المناطق كما يلي:

$$D(t) = \frac{120t}{t^2 + 3}$$

حيث $D(t)$ عدد المصابين بالعدوى بعد مرور t يوم.

أوجد عدد المصابين بالعدوى بعد 21 يومًا، علمًا أنّ عدد المصابين عند $t = 0$ كان 27 شخصًا.

$$D(t) = \int \frac{120t}{t^2 + 3}\, dt = 120 \int \frac{t}{t^2 + 3}\, dt$$

ليكن $u = t^2 + 3$، إذن، $du = 2t\, dt$

$$D(u) = 60 \int \frac{1}{u} du = 60\, ln\, |u| + C$$

$$D(t) = 60\, ln\left|t^2 + 3\right| + C$$

بما أنّ $D(0) = 27$، $C \approx -39$

إذن، $D(t) = 60\, ln\, \left|t^2 + 3\right| - 39$

عدد المصابين بالعدوى بعد 21 يومًا

$$D(21) = 60\, ln\, \left|21^2 + 3\right| - 39 \approx 327$$

---

18. أثبت أنّ $\int \frac{\cos x\, dx}{x^2} + \int \frac{\sin x\, dx}{x} = -\frac{\cos x}{x} + C$

أكتب $\int \frac{\cos x\, dx}{x^2}$ باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء. ليكن $u = \cos x$ و $dv = \frac{dx}{x^2}$، إذن،

$$\int \frac{\cos x\, dx}{x^2} = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x\, dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{x^2} + \int \frac{\sin x\, dx}{x} = -\frac{\cos x}{x} + C$$

---

19. أوجد التكامل غير المحدود $\int \tan x \sec^2 x\, dx$.

عوّض $u = \tan x$، إذن، $du = \sec^2 x\, dx$

$$\int \tan x \sec^2 x\, dx = \int u\, du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C = \tan^2 x + C$$

---

20. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{ln\, x}{(x + 2)^2}\, dx$.

باستعمال طريقة الجدول:

D		I
$ln\, x$	$+$	$\frac{1}{(x+2)^2}$
$\frac{1}{x}$	$-$	$-\frac{1}{x+2}$

$$\int \frac{ln\, x}{(x + 2)^2}\, dx = -\frac{ln\, x}{x + 2} + \int \frac{1}{x(x + 2)}\, dx$$

أكمل الحل باستعمال الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{x(x + 2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x + 2)}$$

$$\int \frac{1}{x(x + 2)}\, dx = \frac{1}{2}\, ln\, |x| - \frac{1}{2}\, ln\, |x + 2| + C$$

$$\int \frac{ln\, x}{(x + 1)^2}\, dx = -\frac{ln\, x}{x + 2} + \frac{1}{2}\, ln\, |x| - \frac{1}{2}\, ln\, |x + 2| + C$$

الاسم ________________________________

4 تقويم الأداء، النموذج A

يشهد العالم كلّ بضعة عقود انتشار وباء سببه الفيروسات يؤدّي إلى تزايد عدد الوفيّات، وبالتالي إلى تناقص عدد سكّان العالم. افترض أنّ أحد هذه الأوبئة أدّى إلى تناقص عدد سكّان العالم، وأنّ هذا التناقص في عدد السكّان يمكن نمذجته بما يلي:

$$P'(x) = \frac{3}{\sqrt{25x^2 + 2}}$$

حيث تمثّل الدالّة $P(x)$ التناقص في عدد السكّان (مليون نسمة)، وهو عدد صحيح سالب، ويمثّل x عدد سنوات انتشار الوباء. لإيجاد صيغة $P(x)$ عليك إيجاد قيمة التكامل $\int \frac{3}{\sqrt{25x^2 + 2}}\, dx$.

إنّ طريقة التعويض، وكذلك التكامل بالأجزاء، والتكامل بالكسور الجزئيّة، جميعها طرائق مطروحة للاستعمال عند تعذّر حلّ تكامل معيّن. وكلّ طريقة من هذه الطرائق لها صعوبتها الخاصّة بها: في طريقة التعويض تكمن الصعوبة في إيجاد التعويض المناسب، وفي طريقة التكامل بالأجزاء قد لا يكون هناك ما يشير بوضوح إلى الأجزاء التي يجب اختيارها. أمّا طريقة التكامل بالكسور الجزئيّة فربّما تكون أقلّ صعوبةً بسبب وجود قواعد مساعدة.

سنقوم في ما يلي باستخدام بعضٍ من هذه الطرائق لإيجاد الدالّة المطلوبة في تسلسل محكم.

1. اكتب التكامل المطلوب بدلالة المتغيّر u حيث $u = 5x$.

بما أنّ $u = 5x$، إذن، $du = 5dx$ و $25x^2 = u^2$

$$\int \frac{3}{\sqrt{25x^2 + 2}}\, dx = \frac{3}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}}$$

2. نستعمل الآن تعويضًا آخر، فنعوّض $u = \sqrt{2}\tan t$. اكتب التكامل $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}}$ في صورة تكامل بدلالة $\sec t$.

ليكن $u = \sqrt{2}\tan t$، إذن، $du = \sqrt{2}\sec^2 t\, dt$ و

$$\begin{aligned}
&\sqrt{u^2 + 2} \\
&= \sqrt{2\tan^2 t + 2} \\
&= \sqrt{2(\tan^2 t + 1)} \\
&= \sqrt{2\sec^2 t} \\
&= \sqrt{2}\sec t
\end{aligned}$$

إذن،

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t\, dt}{\sqrt{2}\sec t} = \int \sec t\, dt$$

.3 أوجد الآن قيمة التكامل $\int \sec t\, dt$.

تلميح: اضرب الدالّة الموجودة داخل رمز التكامل في المقدار $\frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t}$

$$\int \sec t\, dt = \int \sec t \times \frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t}\, dt$$
$$= \int \frac{\sec^2 t + \sec t \tan t}{\sec t + \tan t}\, dt$$

لنفترض الآن أنّ $v = \sec t + \tan t$،

إذن $dv = (\sec t \tan t + \sec^2 t)\, dt$

$$\int \sec t\, dt = \int \frac{\sec^2 t + \sec t \tan t}{\sec t + \tan t}\, dt$$
$$= \int \frac{dv}{v}$$
$$= \ln |v| + C$$
$$= \ln |\sec t + \tan t| + C$$

.4 أوجد الآن الدالّة P، علمًا أنّ عدد سكّان العالم تناقص في السنة الأولى بسبب هذا الوباء بمقدار 000 900 نسمة.

$$P(x) = \ln |\sec t + \tan t| + C$$
$$= \frac{3}{5} \ln \left| \frac{5x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{25x^2 + 2}}{\sqrt{2}} \right| + C$$
$$P(1) = -0.9, \qquad C \approx -2.9$$

إذن، $P(x) = \frac{3}{5} \ln \left| \frac{5x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{25x^2 + 2}}{\sqrt{2}} \right| - 2.9$

.5 كم نسمة سوف يتناقص عدد سكان العالم في السنة الثانية من انتشار هذا الوباء؟

عوّض $x = 2$

$$P(2) = \frac{3}{5} \ln \left| \frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{102}}{\sqrt{2}} \right| -2.9 \approx -1.3075$$

إذن، سوف يتناقص عدد سكّان العالم في السنة الثانية من انتشار هذا الوباء بمقدار 500 307 1 نسمة.

الاسم ______

4 تقويم الأداء، النموذج B

يعمل فارس خبيرًا في التحليل الماليّ والاقتصاديّ في إحدى الشركات. طلبت منه الشركة تحليل الوضع الماليّ لإحدى منشآتها الصناعيّة وتحديد مستويات الإنتاج المطلوبة كي تحقّق هذه المنشأة ربحًا.

بعد دراسة العديد من البيانات المتعلّقة بالتكلفة الحدّيّة، التي تمثّل التغيّر في التكلفة الإجماليّة الذي ينشأ عندما تزداد كمّيّة السلعة المنتجة بمقدار وحدة واحدة، وكذلك البيانات المتعلّقة بالإيرادات الحدّيّة، وهي الإيرادات الإضافيّة الناتجة عن بيع وحدة إضافيّة واحدة من السلعة المنتجة، اكتشف فارس المعطيات التالية:

- التكلفة الثابتة للإنتاج (أيّ التكلفة قبل إنتاج أيّ سلعة) تساوي QR 320 000 شهريًّا.
- القدرة الإنتاجيّة للمنشأة الصناعيّة لا تتجاوز 6 000 وحدة من السلعة المنتجة شهريًّا، وجميع الوحدات المنتجة تُباع.
- يمكن نمذجة التكلفة الحدّيّة في شهر بالدالّة $M_C(x) = xe^{-x+1}$، حيث x عدد الوحدات المنتجة شهريًّا بالآلاف $(0 \le x \le 6)$، و M_C التكلفة الحدّيّة بمئات آلاف الريالات القطريّة.
- يمكن نمذجة الإيرادات الحدّيّة، بمئات آلاف الريالات القطريّة، في نفس الشهر بالدالّة التالية: $M_R(x) = \dfrac{4x + 10}{x^2 + 4x + 3}$

1. **a.** اكتب الدالّة $M_R(x)$ في صورة جمع كسور جزئيّة ذات مقامات خطّيّة.

$$\frac{4x+10}{x^2+4x+3} = \frac{4x+10}{(x+1)(x+3)}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$
$$= \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

إذن، $A(x+3) + B(x+1) = 4x + 10$

$A = 3, B = 1$

إذن، $M_R(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x+3}$

b. أوجد دالّة الإيرادات بدلالة عدد الوحدات المبيعة x من السلعة المنتجة.

لتكن $R(x)$ دالّة الإيرادات.

بما أنّ $M_R(x) = R'(x)$

إذن، $R(x) = \int M_R(x)\, dx$

$$R(x) = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) dx$$
$$= 3\int \frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{1}{x+3}\, dx$$
$$= 3\ln(x+1) + \ln(x+3) + K$$

بما أنّ $R(0) = 0$،

إذن، $3\ln(1) + \ln(3) + K = 0$

$K = -\ln 3$

إذن، دالّة الإيرادات هي

$R(x) = 3\ln(x+1) + \ln(x+3) - \ln 3$

c. اكتب دالّة الإيرادات التي وجدتها في الجزء b في صورة لوغاريتم واحد.

باستعمال خصائص اللوغاريتم،

لكلّ $0 \le x \le 6$ أجد أنّ:

$$R(x) = 3\ln(x+1) + \ln(x+3) - \ln 3$$
$$= \ln(x+1)^3 + \ln(x+3) - \ln 3$$
$$= \ln\left[(x+1)^3(x+3)\right] - \ln 3$$
$$= \ln\left[\frac{(x+1)^3(x+3)}{3}\right]$$

.2 أوجد دالّة التكلفة بدلالة عدد الوحدات x من السلعة المنتجة.

لتكن $C(x)$ دالّة التكلفة.

بما أنّ $M_C(x) = C'(x)$،

إذن، $C(x) = \int M_C(x)\,dx$

$$C(x) = \int xe^{-x+1}\,dx$$

أستعمل طريقة التكامل بالجدول:

D		I
x	$+$	e^{-x+1}
1	$-$	$-e^{-x+1}$
0	$+$	e^{-x+1}

$$C(x) = \int xe^{-x+1}\,dx$$

$$= -xe^{-x+1} - 1e^{-x+1} + K'$$

$$C(x) = -(x+1)e^{-x+1} + K'$$

بما أنّ التكلفة الثابتة تساوي QR 320 000،
إذن، $C(0)=3.2$

$$-(0+1)e^{1} + K' = 3.2,$$

$$K' = 3.2 + e \approx 6$$

دالّة التكلفة الشهريّة

$$C(x) = -(x+1)e^{-x+1} + 6$$

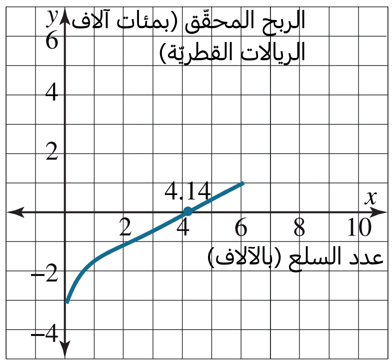
.3 استنتج صيغة دالّة الأرباح $P(x)$.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = ln\left[\frac{(x+1)^{3}(x+3)}{3}\right] + (x+1)e^{-x+1} - 6$$

$$P(x) = ln\left[\frac{(x+1)^{3}(x+3)}{3e^{6}}\right] + (x+1)e^{-x+1}$$

.4 أخيرًا، رسم فارس التمثيل البيانيّ لدالّة الأرباح، كما هو مبيّن في الرسم أدناه.



ثمّ أنهى تقريره بالاستنتاج التالي: "تحقّق المنشأة الصناعيّة ربحًا عندما يتجاوز عدد الوحدات المنتجة والمبيعة 4 140 وحدة شهريًّا، وأقصى ربح يمكن لهذه المنشأة تحقيقه هو QR 100 000. إنّ أيّ تعديل في استراتيجيّة عمل المنشأة الصناعيّة يجب أن يلحظ دائمًا أن تحقيق القيمة القصوى للربح يحصل عند مستوى الإنتاج الذي يحقّق مساواة بين دالّة التكلفة الحدّيّة ودالّة الإيرادات الحدّيّة".

برّر هذا الاستنتاج.

وفقًا للتمثيل البيانيّ، يقع المنحنى تحت المحور x لجميع قيم x، حيث $0 \le x < 4.14$، ويقع فوق المحور x لجميع قيم x، حيث $4.14 < x \le 6$، إذن، دالّة الربح موجبة لهذه القيم فقط.

أقصى قيمة للأرباح تتحقّق عند $x = 6$ (أي عند 6 000 وحدة منتجة) وتساوي 1، أي QR 100 000.

عند القيمة القصوى للربح، قيمة المشتقّة الأولى لدالّة الربح تساوي الصفر، $P'(x) = 0$

لكنّ، $P(x) = R(x) - C(x)$،

إذن، $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

$$P'(x) = 0$$

$$R'(x) - C'(x) = 0$$

$$R'(x) = C'(x)$$

$$M_R(x) = M_C(x)$$

الاسم ____________________

الاختبار التراكميّ للوحدات 1-4

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{-x+3}{2x+1}$ تساوي:

Ⓐ $-\infty$ Ⓒ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $-\frac{1}{2}$ Ⓓ ∞

---

2. إذا كانت $\lim_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)] = 5$
و $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$، فإنّ $\lim_{x \to 0} g(x)$ تساوي:

Ⓐ 2 Ⓒ 4

Ⓑ 3 Ⓓ لا يمكن تحديدها

---

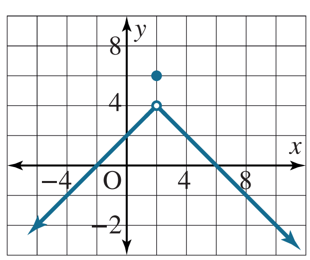
3. أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{4x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{x} \times \frac{\sin 3x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{9}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{\sin 3x}{3x}\right]$$
$$= \frac{9}{4}[1 \times 1]$$
$$= \frac{9}{4}$$

---

4. حدّد سبب عدم اتّصال منحنى الدالّة f
المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 6 - x, & x > 2 \end{cases}$$



Ⓐ الدالّة غير معرّفة عند $x = 2$

Ⓑ نهاية الدالّة غير موجودة عند $x = 2$

Ⓒ الدالّة متعدّدة التعريف وصيغتها تتغيّر عند $x = 2$

Ⓓ $\lim_{x \to 2} f(x)$ لا تساوي $f(2)$

---

5. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = (x^2+1)(5x^2+1)^2$.

$$f'(x) = (2x)(5x^2+1)^2 + 2(10x)(5x^2+1)(x^2+1)$$
$$= 2x(5x^2+1)\left[(5x^2+1) + 10(x^2+1)\right]$$

---

6. أوجد مشتقّة الدالّة $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$.

$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

---

7. مشتقّة الدالّة $f(x) = ln\,(3x+5)$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{3x+5}$ Ⓒ $\frac{3}{3x+5}$

Ⓑ $\frac{3x+5}{3}$ Ⓓ $\frac{8}{3x+5}$

---

8. أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(-3, 0)$ إذا كان
$x^2 + y^2 + 2xy + 3x - y = 0$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 3 - \frac{dy}{dx} = 0$$

أعوّض $x = -3$ و $y = 0$

$$-6 + 0 + 0 - 6\frac{dy}{dx} + 3 - \frac{dy}{dx} = 0$$
$$-7\frac{dy}{dx} = 3$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{7}$$

---

9. أوجد المشتقّات الأربع الأولى للدالّة
$y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

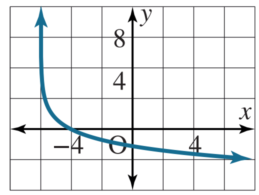
المشتقّة الأولى $y' = 3x^2 - 4x + 5$

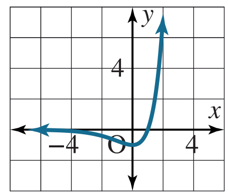
المشتقّة الثانية $y'' = 6x - 4$

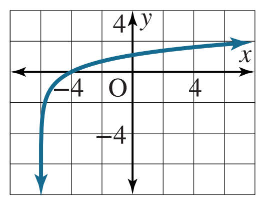
المشتقّة الثالثة $y''' = 6$

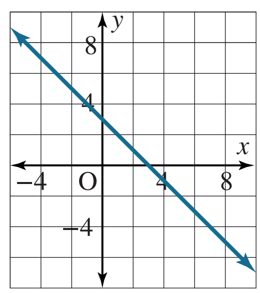
المشتقّة الرابعة $y^{(4)} = 0$

10. أيّ من الدوالّ الممثّلة بيانيًّا أدناه متزايدة؟

Ⓐ


Ⓑ


●


Ⓓ


11. أيّ من العبارات التالية صحيحة؟

Ⓐ إذا كانت $f'(x)$ متزايدة، فإنّ قيم $f(x)$ موجبة.

Ⓑ إذا كانت قيم $f(x)$ سالبة، فإنّ $f'(x)$ متناقصة.

Ⓒ إذا كانت $f'(x)$ متناقصة، فإنّ $f(x)$ متناقصة.

● إذا كانت $f(x)$ متناقصة، فإنّ قيم $f'(x)$ سالبة.

12. أوجد فترات تزايد وتناقص الدالّة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

الدالّة متزايدة في الفترة $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$،

ثمّ متناقصة في الفترة $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$،

ثمّ متزايدة في الفترة $[1, \infty[$

13. للدالّة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ قيمة عظمى محلّيّة تساوي:

Ⓐ $f(1)$ Ⓒ $f(0)$

● $f(-3)$ Ⓓ $f(2)$

14. أيّ من الدوالّ التالية لها قيمة صغرى محلّيّة عند $x = -1$؟

Ⓐ $f(x) = 1 - xe^x$

Ⓑ $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

● $f(x) = xe^x - 1$

Ⓓ $f(x) = e^x + x$

15. لتكن الدالّة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$.
إذا كان $a > 0$، فإنّ تقعّر منحنى الدالّة يكون إلى الأعلى في الفترة:

● $\left]-\frac{1}{a}, \infty\right[$ Ⓒ $\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[$

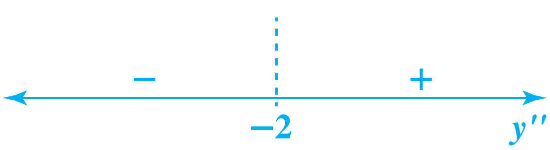
Ⓑ $\left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$ Ⓓ $\left]\frac{1}{a}, \infty\right[$

16. أوجد نقاط انعطاف الدالّة $y = xe^x$.

أوجد المشتقّتين الأولى والثانية، ثمّ أستعمل خطّ الأعداد لمعرفة إشارتيهما.

المشتقّة الأولى: $y' = e^x + xe^x$

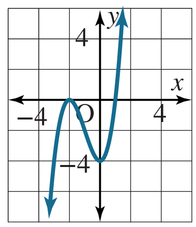
المشتقّة الثانية: $y'' = (x + 2)e^x$

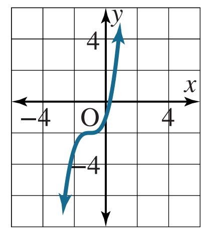


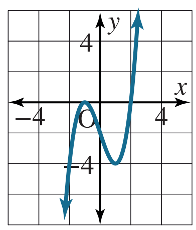
إذن، للدالّة نقطة انعطاف واحدة هي $(-2, -2e^{-2})$.

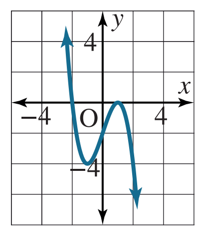
17. أيّ من التمثيلات البيانيّة أدناه هو التمثيل البيانيّ للدالة f المعطاة في الجدول التالي:

الفترة	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
تزايد وتناقص الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة
اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة f	إلى الأسفل	إلى الأسفل	إلى الأعلى	إلى الأعلى

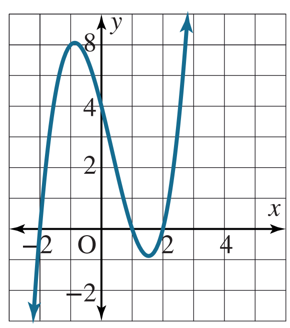
Ⓐ


Ⓒ


Ⓑ


Ⓓ


18. إذا كان التمثيل البيانيّ أدناه هو لمشتقّة الدالّة f، فإنّ فترات تناقص الدالّة f هي:



Ⓐ $[-2, 1]$ و $[2, \infty[$

Ⓑ $[1, 2]$

Ⓒ $]-\infty, -2]$

Ⓓ $]-\infty, -2]$ و $[1, 2]$

19. صنع عامر علبة من قطعة مربّعة الشكل من الورق المقوّى، وذلك بقصّ أربعة مربّعات من زواياها ثمّ طيّ أطرافها إلى الأعلى. إذا كان حجم العلبة هو $V(x) = -4x^3 - 4x^2 + 20x$، حيث x طول ضلع المربّع، فإنّ قيمة x (بالأمتار) التي تعطي العلبة ذات الحجم الأكبر هي:

Ⓐ 1 Ⓒ 1.79

Ⓑ $\frac{5}{3}$ Ⓓ 12

20. إذا كان حجم مكعّب يزداد بمعدّل $54\ \text{in}^3/\text{min}$ وطول كلّ ضلع من أضلاعه يزداد بمعدّل $2\ \text{in/min}$، فإنّ طول ضلع هذا المكعّب يساوي:

Ⓐ $\sqrt[3]{54}$ Ⓒ 9

Ⓑ 3 Ⓓ $4\sqrt{3}$

21. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = -6x^2$؟

Ⓐ $F(x) = 2x^{-3}$ Ⓒ $F(x) = -12x$

Ⓑ $F(x) = -2x^3$ Ⓓ $F(x) = -3x^2$

22. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{1}{t^3}\, dt$؟

Ⓐ $\frac{2}{t^2} + C$ Ⓒ $-\frac{1}{2t^2} + C$

Ⓑ $\frac{t^2}{2} + C$ Ⓓ $-\frac{t^2}{2} + C$

23. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (6x^2 - 2x + 3)\, dx$؟

Ⓐ $2x^3 - x^2 + 3 + C$

Ⓑ $6x^3 - 2x^2 + 3x + C$

Ⓒ $12x^2 - 2 + C$

Ⓓ $2x^3 - x^2 + 3x + C$

MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_CBA2_ISBN.indd 4 09/03/2022 1:38:11 PM

.24 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) dx$ ؟

Ⓐ $x^{\frac{5}{2}} + x + C$
Ⓒ $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$
Ⓑ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 1 + C$
● $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C$

.25 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{4}{e^{4x}} dx$ ؟

Ⓐ $-16e^{-4x} + C$
● $-e^{-4x} + C$
Ⓑ $e^{-4x} + C$
Ⓓ $16e^{-4x} + C$

.26 أي الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int sec^2(10x)\, dx$ ؟

● $\frac{1}{10}\tan(10x) + C$
Ⓒ $10\tan(10x) + C$
Ⓑ $\tan(10x) + C$
Ⓓ $\frac{1}{10\tan(10x)} + C$

.27 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \left(\frac{4}{x} - e^{-3x}\right) dx$ ؟

● $4\, ln|x| + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$
Ⓑ $ln|x| - e^{-3x} + C$
Ⓒ $4\, ln|x| - \frac{1}{3}e^{-3x} + C$
Ⓓ $\frac{4}{ln|x|} + \frac{1}{3e^{-3x}} + C$

.28 أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^2} dx$.

ليكن $u = x^2 + 8x$،

$$du = (2x+8)\, dx = 2(x+4)\, dx$$

$$\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+4)}{(x^2+8x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2}\int u^{-2} du = -\frac{1}{2}u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+8x)} + C$$

.29 استعمل طريقة التكامل بالجدول لإيجاد التكامل غير المحدود $\int x^2 e^{-3x} dx$.

D		I
x^2	+	e^{-3x}
$2x$	−	$\frac{e^{-3x}}{-3}$
2	+	$\frac{e^{-3x}}{9}$
0		$\frac{e^{-3x}}{-27}$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{27}(9x^2 + 6x + 2)e^{-3x} + C$$

.30 اكتب الدالّة $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2}$ في صورة جمع كسور جزئيّة ذات مقامات خطّيّة، ثمّ أوجد التكامل غير المحدود $\int f(x)\, dx$.

بما أنّ $\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$، فإنّ

$$\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

ليكن $x = 2$، $B = 3$

ليكن $x = -1$، $A = 2$

إذن، $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$

$$\int f(x)\, dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\right) dx$$

$$= 2\, ln|x+1| + 3\, ln|x-2| + C$$

الاسم

5 اختبار بداية الوحدة

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حجم أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها 5 cm وارتفاعها 12 cm؟

Ⓐ $60\pi\ cm^3$

Ⓑ $120\pi\ cm^3$

Ⓒ $720\pi\ cm^3$

● $300\pi\ cm^3$

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المساحة السطحية لكرة طول نصف قطرها 10 cm؟

Ⓐ $20\pi\ cm^2$ Ⓒ $200\pi\ cm^2$

● $400\pi\ cm^2$ Ⓓ $40\pi\ cm^2$

---

3. الدالّة $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$ هي جمع الدالّتين $g(x)$ و $h(x)$، حيث

● $g(x) = \frac{1}{2+x}$ و $h(x) = \frac{1}{2-x}$

Ⓑ $g(x) = \frac{1}{x+2}$ و $h(x) = \frac{1}{x-2}$

Ⓒ $g(x) = \frac{2}{4-x^2}$ و $h(x) = \frac{2}{4+x^2}$

Ⓓ $g(x) = \frac{2}{2-x}$ و $h(x) = \frac{2}{2+x}$

---

4. أيّ من العبارات التالية تنطبق على التمثيل البيانيّ للدالّة $f(x) = 4x^2 - 1$؟

Ⓐ مدى الدالّة f هو $]-\infty, 1]$

Ⓑ f متناقصة في الفترة $]-\infty, \infty[$

Ⓒ تمثّل النقطة $(0, 1)$ قيمة قصوى للدالّة

● لها مقطعا x

5. أيّ من العبارات التالية تنطبق على الدالّة $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$؟

Ⓐ مجال الدالّة هو $]0, \infty[$.

● لمنحنى الدالّة خطّا تقارب رأسيّان، وخطّ تقارب أفقيّ واحد.

Ⓒ مدى الدالّة هو $]-\infty, 0[$.

Ⓓ الدالّة متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل.

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المساحة التقريبيّة لدائرة طول قطرها يساوي 4؟

Ⓐ 6.3   Ⓒ 39.5

● 12.6   Ⓓ 50.3

---

7. صنع خالد مجسّمًا من الجبن على شكل هرم مربّع قائم، ارتفاعه 4 cm وطول ضلع قاعدته 3 cm، ثمّ قطع الهرم رأسيًّا بحيث يمرّ المقطع في رأس الهرم ويتعامد مع قاعدته ويقطع ضلعَي القاعدة. أيّ من الخيارات التالية يمثّل شكل هذا المقطع إذا نظرت إليه من الجانب؟

● المقطع مثلّث متطابق الضلعين، ارتفاعه 4 cm وطول قاعدته 3 cm

Ⓑ المقطع مثلّث متطابق الضلعين، ارتفاعه 3 cm وطول قاعدته 4 cm

Ⓒ المقطع مربّع، طول قاعدته 3 cm

Ⓓ المقطع مستطيل طوله 4 cm وعرضه 3 cm

8. اشترى يوسف قالب حلوى على شكل منشور مستطيل قائم، ارتفاعه 10 cm وطول قاعدته 40 cm وعرضها 20 cm، ثمّ قطّعه رأسيًّا عند منتصف طول القاعدة ليقسم المنشور إلى نصفين متساويين. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة محيط المقطع إذا نظرت إليه من جانب القطعة الناتجة؟

A 80 cm
C 400 cm
B 120 cm
D 4 000 cm

9. إذا كان حجم مكعّب يزداد بمعدّل 24 in^3/min وطول كلّ ضلع من أضلاعه يزداد بمعدّل 2 in/min فإنّ طول ضلع هذا المكعّب يساوي:

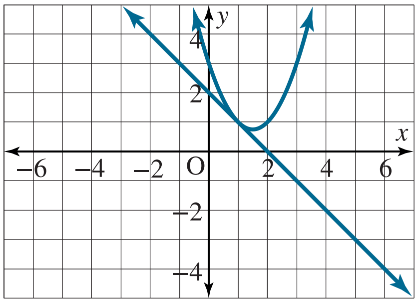
A 2 in

B $2\sqrt{2}$ in

C $\sqrt[3]{12}$ in

D 4 in

10. أوجد حلّ المعادلة $x^2 - 3x + 3 = -x + 2$ باستعمال التمثيل البيانيّ.



الحلّ هو $x = 1$

11. أيّ من الدوالّ التالية هي دالّة الأصل للدالّة $f(x) = x^{11}$؟

A $F(x) = x^{12}$
C $F(x) = \frac{1}{12}x^{12}$
B $F(x) = 11x^{10}$
D $F(x) = 12x^{12}$

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{3}{t^4}\,dt$؟

A $-\frac{3}{t^3} + C$
C $\frac{1}{t^3} + C$
B $-\frac{1}{t^3} + C$
D $\frac{3}{t^3} + C$

13. أوجد التكامل غير المحدود $\int (-3x^2 + 2)\,dx$.

$$\int (-3x^2 + 2)\,dx = -3\int x^2\,dx + 2\int dx$$
$$= -3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 2x + C$$
$$= -x^3 + 2x + C$$

14. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int -6e^{3x}\,dx$؟

A $-2e^{3x} + C$
C $2e^{3x} + C$
B $-\frac{3}{2}e^{4x} + C$
D $\frac{3}{2}e^{4x} + C$

15. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \sin \frac{5}{2}x\,dx$؟

A $-\cos \frac{5}{2}x + C$
C $\frac{2}{5}\cos \frac{5}{2}x + C$
B $\cos \frac{5}{2}x + C$
D $-\frac{2}{5}\cos \frac{5}{2}x + C$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,dx$؟

A $\ln|x| + \frac{1}{x} + C$
C $\ln|x| - \frac{1}{x} + C$
B $-\ln|x| - \frac{1}{x} + C$
D $-\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

17. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}-2}$.

لتكن $u = \frac{x^3}{3} - 2$. إذن، $du = x^2\, dx$.
إذن،

$$\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}-2}\, dx = \int e^{\frac{x^3}{3}-2}\left(x^2\, dx\right)$$
$$= \int e^u\, du$$
$$= e^u + C$$

أعوّض $u = \frac{x^3}{3} - 2$:

$$= e^{\frac{x^3}{3}-2} + C$$

---

18. أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}+3}\, dx$.

لتكن $u = \frac{x}{3} + 3$. إذن، $x = 3(u-3)$
و $du = \frac{dx}{3}$. إذن،

$$\int (x)\sqrt{\frac{x}{3}+3}\,\frac{dx}{3} = \int 3(u-3)\sqrt{u}\, du$$
$$= 3\int (u-3)\sqrt{u}\, du$$
$$= 3\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right) du$$
$$= \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{6}{5}\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{5}{2}} - 6\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

19. أوجد التكامل غير المحدود
$\int \left(-\ln x + 4x^3\right) dx$.

$$\int \left(-\ln x + 4x^3\right) dx$$
$$= -\int \ln x\, dx + 4\int x^3\, dx$$

ليكن $u = \ln x$ و $dv = dx$، إذن، $v = x$
و $du = \frac{1}{x}\, dx$

$$= -\left[x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] + x^4 + C$$
$$= -x \ln x + x + x^4 + C$$

---

20. أوجد التكامل غير المحدود $-\int x^3 \sin x\, dx$
باستعمال طريقة الجدول.

لتكن $u = x^3$ وما يبقى هو $\sin x$، أكتبه في القائمة الثانية. إذن،

D		I
x^3	$+$	$\sin x$
$3x^2$	$-$	$-\cos x$
$6x$	$+$	$-\sin x$
6	$-$	$\cos x$
0		$\sin x$

$$-\int x^3 \sin x\, dx$$
$$= -\left[-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x\right] + C$$
$$= x^3 \cos x - 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x + C$$

الاسم ______________________________

5-1 اختبار الدرس

التكامل المحدود

1. أوجد أوّلًا $\int 3x^2\,dx$، ثمّ أوجد $\int_0^2 3x^2\,dx$.

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

$$\int_0^2 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^2 = (2)^3 - (0)^3 = 8$$

---

2. إذا كان $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 3$ و $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$،

أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل

$\int_{-1}^{1} [3f(x) + 2h(x)]\,dx$؟

Ⓐ -13

Ⓑ 5

● 12

Ⓓ 13

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل المحدود

$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$؟

Ⓐ 1

Ⓑ 3

● 5

Ⓓ 13

---

4. أوجد $\int_1^3 \frac{3dx}{x}$.

$$\int_1^3 \frac{3dx}{x} = 3\,ln\,|x|\Big|_1^3 = 3\,[ln\,|3| - ln\,|1|]$$

$$= 3\,ln\,3 - 3\,ln\,1$$

$$\approx 3.3 - 0 \approx 3.3$$

---

5. أوجد $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x \csc^2 x\,dx$ – باستعمال طرائق التكامل.

لتكن $u = \cot x$، إذن، $du = -\csc^2 x\,dx$

إذا كان

$x = -\frac{\pi}{4}$، $u\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

إذا كان $x = \frac{\pi}{4}$، $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

إذن،

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x \csc^2 x\,dx$$

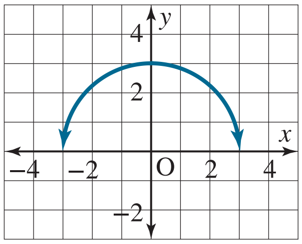
$$= \int_{-1}^{1} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

الاسم ______________________________

5-2 اختبار الدرس

المساحة تحت المنحنى

1. استعمل الشكل أدناه لإيجاد قيمة التكامل المحدود $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.



بما أن التمثيل البيانيّ للدالّة $y = \sqrt{9-x^2}$ يمثّل نصف دائرة تقع فوق المحور x ، مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3، يمكن إيجاد المساحة تحت المنحنى الواقعة بين 0 و 3 من خلال القاعدة الهندسيّة لمساحة ربع الدائرة ولتكن A:

$$A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{9}{4}\pi$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{4}\pi$$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 1$؟

Ⓐ $(x^2 - x)\Big|_0^1$

Ⓑ $\left|(x^2 - x)\Big|_0^1\right|$

● $\left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|$

Ⓓ $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \cos x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = \pi$؟

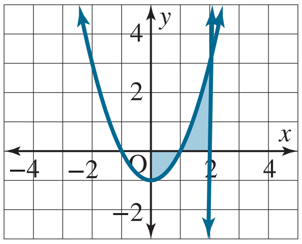
Ⓐ $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$

● $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right|$

Ⓒ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$

Ⓓ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$

4. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 1$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 2$.



يبيّن الشكل هذه المساحة منقسمةً تحت المحور x وفوقه. إذن:

$$\int_0^2 (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \left|\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx\right| + \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$$

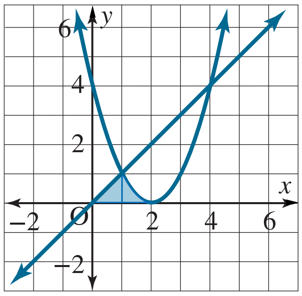
$$= \left|\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1\right| + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left|\frac{1}{3} - 1\right| + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= 2$$

M05_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 2 04/03/2022 6:09:38 PM

.5 استعمل التمثيل البيانيّ أدناه لإيجاد المساحة الواقعة بين المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ومنحنى الدالّة $y = x^2 - 4x + 4$ والمحور x.



أوجد أوّلًا نقطة التقاء المنحنيين.

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$x = 1$ أو $x = 4$

آخذ القيمة $x = 1$ لأنّها تقع بين المقطعين x للمنحنيين، وهما $x = 0$ و $x = 2$. إذن، قيمة المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_1^2$$

$$\approx 0.83$$

الاسم ____________________

5-3 اختبار الدرس

المساحة بين منحنيين

1. أوجد قيمة المساحة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ومنحنى الدالّة $g(x) = 2x$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{1}{2}x^2 = 2x$$
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$$

إذن، يتقاطع منحنيا الدالّتين عند $x = 0$ و $x = 4$، وتقع الفترة $[1, 2]$ بين هاتين النقطتين. أختبر إحدى هاتين القيمتين للمتغيّر x لأستنتج أنّ $g(x) \geq f(x)$. إذن، المساحة بين منحنيي هاتين الدالّتين تساوي

$$\int_1^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_1^2 \left[(2x) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right] dx$$
$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2$$
$$= \frac{11}{6}$$

---

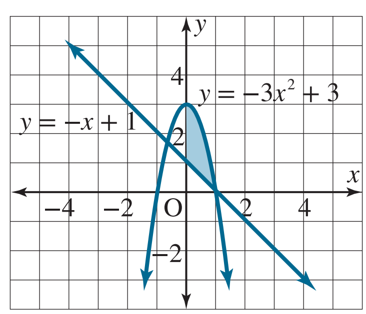
2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالّة $g(x) = x - 1$ من $x = 1$ إلى $x = 2$؟

A $-\frac{5}{2}$ C $\frac{7}{2}$

B $\frac{17}{6}$ D $\frac{15}{2}$

---

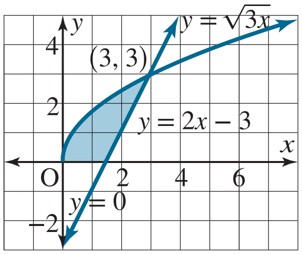
3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة المظلَّلة؟



A $\frac{1}{2}$ C 2

B $\frac{3}{2}$ D $\frac{7}{2}$

4. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sqrt{3x}$ والمستقيم $y = 2x - 3$ والمحور x المبيّنة في الشكل أدناه.



$$\text{المساحة} = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{3x}\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \sqrt{3x} - (2x - 3)\, dx$$
$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{3}$$
$$\approx 3.75$$

---

5. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = e^{-x+3} + 1$ ومنحنى الدالّة $y = e^{x-3} + 1$ والمستقيمات $x = 1$ و $x = 5$ و $y = 0$.

أوجد نقطة التقاء المنحنيين:

$$e^{x-3} + 1 = e^{-x+3} + 1$$
$$x = 3$$

إذن،

$$\int_1^3 (e^{x-3} + 1)\, dx + \int_3^5 e^{-x+3} + 1\, dx$$
$$= (e^{x-3} + x)\Big|_1^3 + (-e^{-x+3} + x)\Big|_3^5$$
$$\approx 5.73$$

الاسم ______________________

5-4 اختبار الدرس

الحجوم الدورانيّة

1. أوجد الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = 2x$ و $y = 0$ من $x = 2$ إلى $x = 4$ حول المحور x.

$$V = \int_{2}^{4} \pi [2x]^2\, dx$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \frac{224\pi}{3}$$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sqrt{2x}$ و $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = 3$ حول المحور x؟

Ⓐ 9

Ⓑ 6π

Ⓒ 9π

Ⓓ 36π

3. أوجد الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالّة $y = -2x^2 + 8$ و $y = 0$ حول المحور x.

$$-2x^2 + 8 = 0$$

$x = 2$ أو $x = -2$

$$V = \int_{-2}^{2} \pi [-2x^2 + 8]^2\, dx$$

$$= \pi\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 64x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2\,048\pi}{15} \approx 137\pi$$

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حجم اسطوانة طول نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها $3h$؟

Ⓐ $3\pi r^2 h$

Ⓑ $\frac{\pi r^2 h}{3}$

Ⓒ $\pi r^2 h$

Ⓓ $r^2 h$

5. أوجد الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = 3e^x$ و $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = 1$ حول المحور x.

$$V = \int_{0}^{1} \pi [3e^x]^2\, dx$$

$$= \frac{9}{2}\pi\left(e^{2x}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\approx 28.75\pi$$

الاسم ____________________

5-5 اختبار الدرس

تطبيقات التكامل المحدود

.1 ينمذَج معدّل الاستهلاك السنويّ للوقود (بملايين البراميل) في إحدى المدن خلال العشرين سنة الأولى من القرن الحادي والعشرين، بالدالّة $C'(t) = 10\, e^{\frac{t}{20}}$، حيث t عدد السنوات، ابتداءً من 1 يناير 2000، أوجد الكمّيّة الكلّيّة للوقود المستهلك في هذه المدينة من 1 يناير 2000 إلى 1 يناير 2020

$$C(20) - C(0) = \int_0^{20} 10\, e^{\frac{t}{20}}\, dt$$

$$= 200\, e^{\frac{t}{20}} \Big|_0^{20}$$

$$\approx 344$$

إذن، الكمّيّة الكلّيّة للوقود المستهلك في هذه المدينة من 1 يناير 2000 إلى 1 يناير 2020 هي 344 مليون برميل تقريبًا.

.2 يُقاس الاستهلاك المنزلي للكهرباء بوحدة الكيلوواط. افترض أنّ استهلاك أحد المنازل من الكهرباء يُعطى بالدالّة $C'(t) = 2.4 + 1.2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$، حيث $C(t)$ كمّيّة الكهرباء المستهلكة بالكيلوواط، و t عدد الساعات المنقضية بعد منتصف الليل. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاستهلاك اليوميّ لهذا المنزل من الكهرباء، بالكيلوواط/ساعة؟

Ⓐ 56 Ⓒ 59.2

● 57.6 Ⓓ 576

.3 اعتمدت إحدى الشركات طريقة جديدة في الإنتاج تؤدّي إلى توفير قيمة ماليّة يمكن حسابها من خلال دالّة التوفير $S(t)$، حيث t الزمن بالسنوات، و $S(t)$ قيمة المبلغ الموفَّر بآلاف الريالات القطريّة. تزداد قيمة المبلغ الموفَّر في الفترة الأولى لكنّها تتناقص بعد ذلك وفق المعدّل $S'(t) = 200 - t^2$. غير أنّ هذه الطريقة الجديدة نتجت عنها تكاليف إضافيّة $C(t)$ تزداد بمعدّل $C'(t) = t^2 + 2t + 20$، حيث t الزمن بالسنوات، و $C(t)$ قيمة التكاليف الإضافيّة بآلاف الريالات القطريّة. حدّد المدّة الزمنيّة (مقرّبةً إلى أقرب سنة كاملة) التي توفّر فيها الشركة مبلغًا صافيًا، ثمّ أوجد قيمة ذلك المبلغ خلال تلك المدّة.

قيمة مبلغ التوفير النهائيّ هي ما أحصل عليه بعد طرح التكاليف الإضافيّة من قيمة مبلغ التوفير الأصليّ.

$$f(t) = S(t) - C(t)$$

$$f'(t) = S'(t) - C'(t)$$

$$= \left(200 - t^2\right) - \left(t^2 + 2t + 20\right)$$

$$= -2t^2 - 2t + 180$$

$$f'(t) = 0$$

$$t = 9$$

قيمة التوفير الصافي تساوي:

$$f(9) - f(0) = \int_0^9 \left[-2t^2 - 2t + 180\right] dt$$

$$= \left(-\frac{2}{3}t^3 - t^2 + 180t\right)\Big|_0^9$$

$$\approx 1\,053$$

إذن، وفّرت الطريقة الجديدة على الشركة 1 053 000 ريال قطريّ خلال 9 سنوات.

4. يمكن إيجاد المعدّل السنويّ لاستهلاك الغاز الطبيعيّ في إحدى المدن (بتريليونات الأقدام المكعّبة) باستعمال الدالّة $C'(t) = 2t + e^{0.088t}$، حيث t الزمن بالسنوات ابتداءً من العام 2000.
أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة التقريبيّة للغاز الطبيعيّ المستهلك في هذه المدينة بين العام 2015 والعام 2021؟

- Ⓐ 246 تريليون قدم مكعّب
- Ⓑ 268 تريليون قدم مكعّب
- Ⓒ 513 تريليون قدم مكعّب
- Ⓓ 780 تريليون قدم مكعّب

---

5. افترض أنّ جسمًا يتحرّك على خطّ مستقيم بسرعة $v(t) = 4\sin 2t$. أوجد إزاحة هذا الجسم في الفترة $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin 2t \, dt$$

$$= -2\cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4$$

الاسم ________________________________

5-6 اختبار الدرس

المعادلات التفاضليّة

1. أوجد الحلّ العامّ للمعادلة $\frac{1}{2}y\frac{dy}{dx} = 2x^3$

$$\mathbf{y\,dy = 4x^3\,dx}$$

$$\int y\,dy = \int 4x^3\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x^4 + C$$

$$y^2 = 2x^4 + K$$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y}$، حيث $y = 1$ عند $x = 0$؟

Ⓐ $y^3 = \frac{x^2}{2} + C$

● $y^3 = \frac{x^2}{2} + 1$

Ⓒ $y^2 = \frac{x^3}{2} + 1$

Ⓓ $y^2 = \frac{x^3}{2} + C$

3. يمكن نمذجة معدّل تزايد عدد السناجب في محميّة بيئيّة بالدالّة الأسّيّة P بدلالة الزمن t (بالسنوات)، حيث $\frac{dP}{dt} = 60\,e^{0.12t}$.
أوجد دالّة النموّ P إذا كان العدد الابتدائيّ للسناجب في هذه المحميّة هو 60 سنجابًا.

$$P = \int 60e^{0.12t}\,dt$$

$$= \frac{60}{0.12}e^{0.12t} + C$$

$$= 500\,e^{0.12t} + C$$

وبما أنّ عدد السناجب في البداية كان 60، فإنّ $P(0) = 60$. إذن،

$$60 = 500\,e^{0.12(0)} + C$$

$$C = -440$$

إذن، $P = 500e^{0.12t} - 440$

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ الخاص للمعادلة التفاضليّة $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\sqrt{x}}$ باستعمال القيمة الابتدائيّة $y = -1$ عند $x = 0$؟

● $y = \frac{-1}{2\sqrt{x}+1}$

Ⓑ $y = \frac{1}{2\sqrt{x}+1}$

Ⓒ $y = \frac{-1}{\sqrt{x}+1}$

Ⓓ $y = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

5. تنمو مستعمرة بكتيريّة في مختبر ضمن شروط مثاليّة، حيث يزداد عدد الخلايا البكتيريّة في هذه المستعمرة أسّيًّا بمرور الزمن. بعد 5 ساعات أصبح عدد البكتيريا في المستعمرة 50 000 بكتيريا، وبعد 7 ساعات أصبح عددها 70 000 بكتيريا. أوجد العدد الابتدائيّ للبكتيريا في هذه المستعمرة.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$y = Ae^{kt}$$

عند $t = 5$، $y = 50\,000$، $50\,000 = Ae^{5k}$

عند $t = 7$، $y = 70\,000$، $70\,000 = Ae^{7k}$

$$\frac{50\,000}{70\,000} = \frac{Ae^{5k}}{Ae^{7k}}$$

$$\frac{5}{7} = e^{-2k}, k \approx 0.17$$

$$50\,000 = Ae^{5(0.17)}$$

$$A = 21\,370$$

$$y = 21\,370\,e^{0.17t}$$

عند $t = 0$، $y = 21\,370$. إذن، العدد الابتدائيّ للبكتيريا في هذه المستعمرة هو 21 370

M05_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 2 04/03/2022 6:09:44 PM

الاسم ________________________________

5 تقويم الوحدة، النموذج A

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{-1}^{1} 5x^4\, dx$؟

Ⓐ -2 ● 2

Ⓑ 0 Ⓓ 10

.2 إذا كان $\int_{0}^{1} h(x)\, dx = 5$ و $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = 1$،
أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{0}^{1} \left[f(x) - \frac{h(x)}{5} \right] dx$؟

Ⓐ -4 Ⓒ $\frac{4}{5}$

● 0 Ⓓ لا يمكن إيجاده

.3 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{1}^{2} \left(2x - \frac{1}{x^2} + e^x\right) dx$؟

Ⓐ $\frac{27}{4} + e^2 - e$ Ⓒ $\frac{13}{2} + e^2 + e$

● $\frac{5}{2} + e^2 - e$ Ⓓ $\frac{9}{2} + e^2$

.4 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 2$ ؟

● $\left| \frac{2}{x} \Big|_1^2 \right|$ Ⓒ $\frac{-2}{x^2} \Big|_1^2$

Ⓑ $\left| \frac{-2}{x^2} \Big|_1^2 \right|$ Ⓓ $\frac{2}{x} \Big|_1^2$

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $f(x) = \sin x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = \pi$؟

● $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

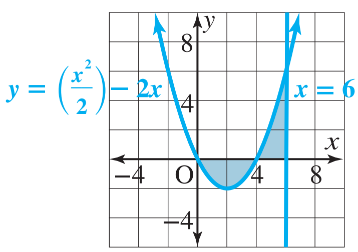
Ⓑ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx \right|$

Ⓒ $-\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

Ⓓ $\left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx \right|$

.6 أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 6$. مثّل الدالّة بيانيًّا وحدّد المساحة المطلوبة.

يبيّن الشكل المساحة المطلوبة منقسمة إلى مساحتين تقع إحداهما تحت المحور x والأخرى فوقه.



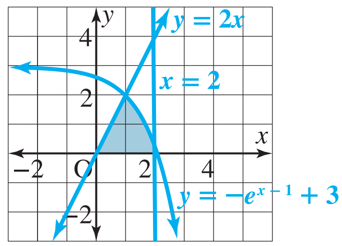
$$A = \left| \int_{0}^{4} \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) dx \right| + \int_{4}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) dx$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{6} - x^2\right) \Big|_0^4 \right| + \left(\frac{x^3}{6} - x^2\right) \Big|_4^6$$

$$= \frac{32}{3}$$

7. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين المستقيم $y = 2x$ ومنحنى الدالّة $y = -e^{x-1} + 3$ والمحور x.
مثّل المعطيات بيانيًّا لتحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ولتبيّن المساحة المطلوب إيجادها.

يبيّن الشكل أدناه المساحة المطلوبة.



نلاحظ من التمثيل البيانيّ أن نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم تقع عند $x = 1$ ونقطة تقاطع المنحنى مع المحور x عند $x = 1 + \ln 3$، إذن، قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_0^1 2x\,dx + \int_1^{1+\ln 3} \left(-e^{x-1} + 3\right) dx$$
$$= x^2 \Big|_0^1 + \left(-e^{x-1} + 3x\right)\Big|_1^{1+\ln 3}$$
$$= -1 + 3\ln 3 \approx 2.3$$

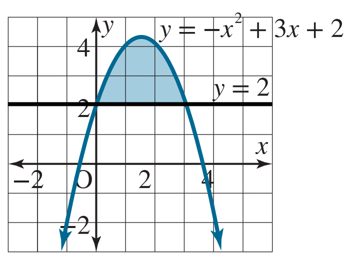
---

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 3x + 3$ ومنحنى الدالّة $g(x) = x + 3$؟

Ⓐ $-\frac{32}{3}$ Ⓒ 1
● $\frac{32}{3}$ Ⓓ 32

---

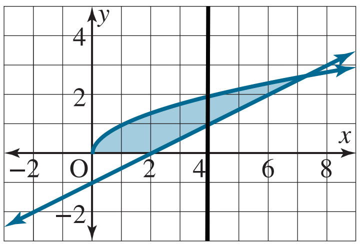
9. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة المظلّلة؟



Ⓐ $-\frac{9}{2}$ Ⓒ 9
● $\frac{9}{2}$ Ⓓ $\frac{27}{4}$

---

10. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = \frac{x}{2} - 1$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$، المبيّنة في الشكل أدناه.



$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - \left(\frac{x}{2} - 1\right)\right] dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_2^4$$
$$= \frac{13}{3}$$

---

11. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sin x + 1$ ومنحنى الدالّة $y = \cos x + 1$ والمستقيمات $x = 0$ و $x = \pi$ و $y = 0$.

نوجد نقطة التقاء المنحنيّين في الفترة المحدّدة:

$$\sin x + 1 = \cos x + 1$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$

نجرّب قيمتين إحداهما أكبر من $\frac{\pi}{4}$ والأخرى أصغر منها، مثل $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{6}$، لنعرف الفترة التي تكون فيها قيمة إحدى الدالّتين أكبر من قيمة الدالّة الأخرى، فنستنتج أنّ قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 1) - (\sin x + 1)\,dx$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x + 1) - (\cos x + 1)\,dx$$
$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$+ (-\sin x - \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \frac{-1}{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 3$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{2}{3}$ Ⓒ $\frac{4\pi}{3}$
Ⓑ $\frac{2\pi}{3}$ Ⓓ $\frac{6\pi}{3}$

13. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = 9 - x^2$ والمستقيم $y = 0$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{92\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{1\,204\pi}{5}$
Ⓑ $\frac{124\pi}{3}$ Ⓓ $\frac{1\,296\pi}{5}$

14. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sin x \sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{\pi}{18}$ Ⓒ $\frac{\pi}{6}$
Ⓑ $\frac{\pi}{3}$ Ⓓ لا يمكن إيجاده

15. معدّل استهلاك الوقود في إحدى الدول الصغيرة ثابت تقريبًا منذ مطلع العام 2000 ويمكن تقديره من خلال الدالة $C'(t) = 17.07t\, e^{\frac{t^2}{2.1}}$ (بملايين البراميل)، حيث t عدد السنوات ابتداءً من العام 2000، أوجد قيمة الاستهلاك الكلّي لهذه الدولة من الوقود من نهاية العام 2001 إلى نهاية العام 2002.

$$\int_1^2 C'(t)\,dt = \int_1^2 17.07t\, e^{\frac{t^2}{2.1}}\,dt$$

ليكن $u = \frac{t^2}{2.1}$. إذن، $du = \frac{2}{2.1}t\,dt$، إذن،

$$C(u) = 17.07 \times \frac{2.1}{2}\int_{0.47}^{1.9} e^u\,du$$

$$= 17.92\,(e^u)\Big|_{0.47}^{1.9} \approx 91$$

إذن، الاستهلاك الكلي للوقود يساوي 91 مليون برميل تقريبًا.

16. عند إلقاء جسم من مكان مرتفع فإنّه يسقط بتسارع ثابت يساوي 32 ft/sec^2، وإذا كانت النقطة التي يُلقى منها الجسم عند سطح الأرض، فإنّ تسارع الجسم يساوي $a(t) = -32$. ألقيَ جسم من أعلى برج ارتفاعه 2 150 ft بسرعة ابتدائيّة تساوي -15 ft/sec، أوجد ارتفاع الجسم، $s(t)$، عن سطح الأرض عند الزمن t.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1$$

عند $t = 0$، $v(t) = -15$ ، إذن:

$$-15 = -32(0) + C_1,\ C_1 = -15$$

$$v(t) = -32t - 15$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-32t - 15)\,dt$$
$$= -16t^2 - 15t + C_2$$

عند $t = 0$، $s(t) = 2\,150$ ، إذن:

$$2\,150 = -16(0) - 15(0) + C_2,\ C_2 = 2\,150$$

$$s(t) = -16t^2 - 15t + 2150$$

17. لنفترض أنّ جسمًا يتحرّك على خطّ مستقيم بسرعة $v(t) = \cos^5 t$. أوجد إزاحة هذا الجسم بالأمتار خلال الفترة $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(0)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cos t\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^2 \cos t\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t\right) \cos t\,dt$$

لتكن $u = \sin t$:

$$= \int_0^1 \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du$$
$$= \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{8}{15}$$

إذن، إزاحة هذا الجسم تساوي $\frac{8}{15}$ متر تقريبًا.

18. اشترى جاسم مكيّفًا جديدًا يسمح له بتوفير المال. يمكن حساب معدّل التوفير الشهري من خلال الصيغة $R'(t) = 50 - \frac{e^{0.2t}}{100}$ حيث t الزمن بالأشهر. لكنّ معدّل التكلفة الشهريّة لصيانة هذا النوع من المكيّفات قد يبلغ $C'(t) = \frac{e^{0.2t}}{10}$. أوجد المدّة التي يصبح استعمال هذا النوع من المكيّفات بعدها غير مربح، ثمّ أوجد مبلغ التوفير الصافيّ الكليّ (بالريال) الذي سيوفّره جاسم خلال هذه المدّة.

لتكن $f(t)$ ناتج طرح تكلفة الصيانة الشهرية من قيمة التوفير الشهري:

$$f(t) = R(t) - C(t)$$

$$f'(t) = R'(t) - C'(t)$$

$$= \left(50 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \frac{e^{0.2t}}{10}$$

$$= 50 - \frac{11e^{0.2t}}{100}$$

$$f'(t) = 0$$

$t \approx 31$ **شهرًا**

قيمة التوفير النهائيّ خلال هذه المدّة هي $f(31) - f(0)$، وهي القيمة التي يمكن الحصول عليها من خلال التكامل المحدود:

$$f(31) - f(0) = \int_0^{31} \left[\left(50 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \left(\frac{e^{0.2t}}{10}\right)\right] dt$$

$$= \int_0^{31} \left(50 - \frac{11e^{0.2t}}{100}\right) dt$$

$$= \left(50t - \frac{11e^{0.2t}}{20}\right)\Bigg|_0^{31} \approx 1\,280$$

إذن، سيوفّر جاسم 1 280 ريالًا تقريباً خلال 31 شهرًا.

---

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة $\frac{dy}{dx} = xy$ ؟

● $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ Ⓒ $y = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

Ⓑ $y = e^{\frac{x^2}{2}} + C$ Ⓓ $x = Ce^{\frac{y^2}{2}}$

20. إذا كانت المعادلة التفاضليّة لنموّ قطيع من الأغنام هي $\frac{dy}{dt} = ky$، حيث t الزمن بالسنوات، أوجد قيمة ثابت النموّ الأسيّ k إذا ازداد عدد الأغنام في القطيع من 250 رأس في البداية إلى 2 000 رأس تقريبًا خلال خمس سنوات.

Ⓐ $-\frac{ln\, 8}{5}$ ● $\frac{ln\, 8}{5}$

Ⓑ $\frac{ln\, 4}{5}$ Ⓓ $ln\, 8$

الاسم ______________________________

5 تقويم الوحدة، النموذج B

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{-1}^{1} 4x^3\,dx$ ؟

Ⓐ -2 Ⓒ 2

● 0 Ⓓ 8

---

2. إذا كان $\int_{0}^{1} h(x)\,dx = 4$ و $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2$ ،
أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{0}^{1} \left[f(x) - \frac{h(x)}{4}\right] dx$ ؟

Ⓐ -2 ● 1

Ⓑ 0 Ⓓ لا يمكن إيجاده

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{0}^{1} (2x - 1 + e^{2x})\,dx$ ؟

Ⓐ $\frac{e^2+1}{2}$ Ⓒ $e^2 + 2$

● $\frac{e^2-1}{2}$ Ⓓ $\frac{e^2-2}{2}$

---

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{-3}{x^2}$ والمحور x من $x = 2$ إلى $x = 3$ ؟

Ⓐ $\left|\frac{-3}{x^2}\right|_2^3$ Ⓒ $\frac{-3}{x^2}\Big|_2^3$

● $\left|\frac{3}{x}\Big|_2^3\right|$ Ⓓ $\frac{3}{x}\Big|_2^3$

---

5. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \cos x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$؟

Ⓐ $\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$

Ⓑ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right|$

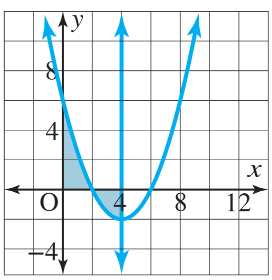
● $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

Ⓓ $\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right|$

---

6. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$. مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد المساحة المطلوبة.

يبيّن الشكل المساحة المطلوبة منقسمة إلى مساحتين تقع إحداهما تحت المحور x والأخرى فوقه.



$$A = \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\right) dx + \left|\int_{2}^{4} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\right) dx\right|$$

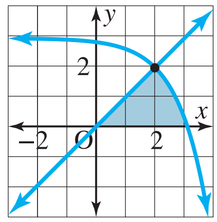
$$A = \left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x\right)\Big|_0^2 + \left|\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x\right)\Big|_2^4\right|$$

$$A = \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = 8$$

M05_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 1 04/03/2022 6:09:53 PM

.7 أوجد قيمة المساحة الواقعة بين المستقيم $y = x$ ومنحنى الدالّة $y = -e^{x-2} + 3$ والمحور x.
مثّل المعطيات بيانيًّا لتحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ولتبيّن المساحة المطلوب إيجادها.

يبيّن الشكل أدناه المساحة المطلوبة.



نلاحظ من التمثيل البيانيّ أنّ نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم تقع عند $x = 2$ ونقطة تقاطع المنحنى مع المحور x عند $x = 2 + \ln 3$، إذن، قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\mathrm{A} = \int_0^2 x\,dx + \int_2^{2+\ln 3} \left(-e^{x-2} + 3\right) dx$$

$$\mathrm{A} = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(-e^{x-2} + 3x\right)\Bigg|_2^{2+\ln 3}$$

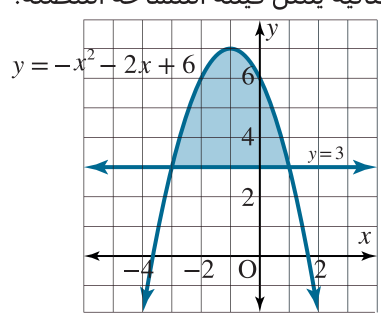
$$\approx 3.3$$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ومنحنى الدالّة $g(x) = x + 2$؟

Ⓐ $-\frac{9}{2}$ ● $\frac{9}{2}$

Ⓑ $\frac{5}{2}$ Ⓓ $\frac{27}{2}$

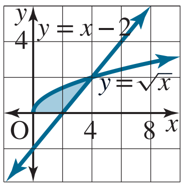
.9 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة المظلّلة؟



Ⓐ $-\frac{32}{3}$ Ⓒ 32

● $\frac{32}{3}$ Ⓓ $\frac{29}{3}$

.10 أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x - 2$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$، المبيّنة في الشكل أدناه.



$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x - 2)\right] dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \frac{10}{3}$$

.11 أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sin x + 2$ ومنحنى الدالّة $y = \cos x + 2$ والمستقيمات $x = 0$ و $x = \pi$ و $y = 0$.

نوجد نقطة التقاء المنحنيّين في الفترة المحدّدة:

$$\sin x + 2 = \cos x + 2$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

نجرّب قيمتين إحداهما أكبر من $\frac{\pi}{4}$ والأخرى أصغر منها، مثل $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{6}$، لنعرف الفترة التي تكون فيها قيمة إحدى الدالّتين أكبر من قيمة الدالّة الأخرى، فنستنتج أنّ قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2) - (\sin x + 2)\,dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x + 2) - (\cos x + 2)\,dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$+ (-\sin x - \cos x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

.12 أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = -\sqrt{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 3$ حول المحور x؟

Ⓐ 4π
Ⓑ $\frac{7\pi}{2}$
Ⓒ $\frac{11\pi}{2}$
Ⓓ $\frac{15}{2}$

.13 أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = -3x^2 + 3$ والمستقيم $y = 0$ حول المحور x؟

Ⓐ 46
Ⓑ $\frac{24\pi}{5}$
Ⓒ $\frac{36\pi}{5}$
Ⓓ $\frac{48\pi}{5}$

.14 أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \cos x \sqrt{\sin x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{\pi}{3}$
Ⓑ $\frac{\pi}{6}$
Ⓒ $\frac{\pi}{18}$
Ⓓ لا يمكن إيجاده

.15 يمكن إيجاد معدّل الاستهلاك السنويّ من الغاز الطبيعي في إحدى المدن (بتريليونات الأقدام المكعّبة) من خلال الدالّة $C'(t) = t + e^{0.02t}$ حيث t الزمن (بالسنوات) ابتداءً من العام 2000، أي $t = 0$.
أوجد كمية الغاز الطبيعي التي استهلكتها هذه المدينة من العام 2002 إلى العام 2010

$$C(10) - C(2) = \int_2^{10} \left(t + e^{0.02t}\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + 50e^{0.02t}\right)\Bigg|_2^{10} \approx 57$$

إذن، استهلكت المدينة 57 تريليون قدم مكعّب تقريبًا من الغاز الطبيعي بين العامين 2002 و 2010

.16 عند إلقاء جسم من مكان مرتفع فإنّه يسقط بتسارع ثابت يساوي 32 ft/sec^2، وإذا كانت النقطة التي يُلقى منها الجسم عند سطح الأرض، فإنّ تسارع الجسم يساوي $a(t) = -32$. ألقي جسم من أعلى برج ارتفاعه 1 750 ft بسرعة ابتدائيّة تساوي $k = -20 \text{ ft/sec}$. أوجد ارتفاع الجسم، $s(t)$، عن سطح الأرض عند الزمن t.

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int -32\, dt = -32t + C_1$$

عند $t = 0$، $v(t) = -20$، إذن:

$$-20 = -32(0) + C_1,\ C_1 = -20$$

$$v(t) = -32t - 20$$

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (-32t - 20)\, dt$$

$$= -16t^2 - 20t + C_2$$

عند $t = 0$، $s(t) = 1\,750$، إذن:

$$1\,750 = -16(0) - 20(0) + C_2,$$

$$C_2 = 1\,750$$

$$s(t) = -16t^2 - 20t + 1\,750$$

.17 لنفترض أنّ جسمًا يتحرّك على خطّ مستقيم بسرعة $v(t) = \cos^3 t$. أوجد إزاحة هذا الجسم بالأمتار خلال الفترة $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(0)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t\, dt$$

لتكن $u = \sin t$:

$$= \int_0^1 \left(1 - u^2\right) du$$

$$= \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

إذن، إزاحة هذا الجسم تساوي $\frac{2}{3}$ متر تقريبًا.

18. اعتمدت شركة إعلانات مجموعة من الإجراءات الجديدة لتوفير التكلفة التشغيليّة الشهريّة. بناءً على تلك الإجراءات يمكن حساب معدّل التوفير الشهري من خلال الصيغة $R'(t) = 75 - \frac{e^{0.2t}}{100}$ حيث t الزمن بالأشهر. يمكن إيجاد معدّل التكلفة التشغيليّة الشهريّة في هذه الشركة من خلال الصيغة $C'(t) = \frac{e^{0.2t}}{20}$. أوجد المدّة التي يصبح بعدها اعتماد تلك الإجراءات غير مفيد للشركة. ثمّ أوجد مبلغ التوفير الصافيّ الكليّ (بالريال) الذي ستوفّره الشركة خلال تلك المدة.

لتكن $f(t)$ ناتج طرح التكلفة الشهريّة من قيمة التوفير الشهريّ، إذن:

$$f(t) = R(t) - C(t)$$

$$f'(t) = R'(t) - C'(t)$$
$$= \left(75 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \frac{e^{0.2t}}{20}$$
$$= 75 - \frac{6e^{0.2t}}{100}$$

$$f'(t) = 0$$

$t \approx 36$ شهرًا

قيمة التوفير النهائيّ خلال هذه المدّة هي $f(36) - f(0)$، وهي القيمة التي يمكن الحصول عليها من خلال التكامل المحدود:

$$f(36) - f(0)$$

$$= \int_0^{36} \left[\left(75 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \left(\frac{e^{0.2t}}{20}\right)\right] dt$$

$$= \int_0^{36} \left(75 - \frac{6e^{0.2t}}{100}\right) dt$$

$$= \left(75t - \frac{3e^{0.2t}}{10}\right)\Bigg|_0^{36} \approx 2\ 299$$

إذن، تسمح هذه الإجراءات بتوفير مبلغ 2 299 ريالًا تقريباً خلال 36 شهرًا.

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة $\frac{dy}{dx} = 2xy$ ؟

● $y = Ce^{x^2}$ Ⓒ $y = Ce^{-x^2}$

Ⓑ $y = e^{x^2} + C$ Ⓓ $x = Ce^{y^2}$

20. إذا كانت المعادلة التفاضليّة لنموّ قطيع من الماعز هي $\frac{dy}{dt} = ky$، حيث t الزمن بالسنوات، أوجد قيمة ثابت النموّ الأسيّ k إذا ازداد عدد الماعز في القطيع من 350 رأسًا في البداية إلى 1 750 رأسًا تقريبًا خلال أربع سنوات.

Ⓐ $-\frac{ln\ 5}{4}$ ● $\frac{ln\ 5}{4}$

Ⓑ $\frac{ln\ 4}{5}$ Ⓓ $ln\ 5$

الاسم ______________________________

5 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_{-1}^{1} 3x^2\, dx$؟

Ⓐ -2 ● 2

Ⓑ 0 Ⓓ 6

.2 إذا كان $\int_0^1 h(x)\, dx = 6$ و $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$،
أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_0^1 \left[f(x) - \frac{h(x)}{3}\right] dx$؟

● -1 Ⓒ $\frac{2}{3}$

Ⓑ -5 Ⓓ لا يمكن إيجادها

.3 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة التكامل المحدود $\int_0^1 (3x + 1 + e^{-x})\, dx$؟

Ⓐ $\frac{5}{2} + \frac{1}{e}$ Ⓒ $\frac{7}{2} + \frac{1}{e}$

Ⓑ $\frac{5}{2} - \frac{1}{e}$ ● $\frac{7}{2} - \frac{1}{e}$

.4 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = \frac{-4}{x^2}$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 2$ ؟

● $\left|\frac{4}{x}\right|_1^2$ Ⓒ $\frac{-4}{x^2}\Big|_1^2$

Ⓑ $\left|\frac{-4}{x^2}\right|_1^2$ Ⓓ $\frac{4}{x}\Big|_1^2$

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = -\sin x$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = \pi$؟

● $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

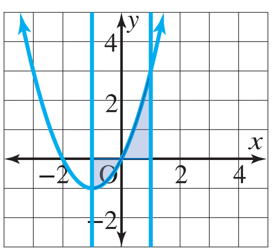
Ⓑ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx\right|$

Ⓒ $-\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

Ⓓ $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx\right|$

.6 أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ والمحور x من $x = -1$ إلى $x = 1$. مثّل الدالّة بيانيًّا وحدّد المساحة المطلوبة.

يبيّن الشكل المساحة المطلوبة، A، منقسمة إلى مساحتين تقع إحداهما تحت المحور x والأخرى فوقه.



$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x)\, dx\right| + \int_0^1 (x^2 + 2x)\, dx$$

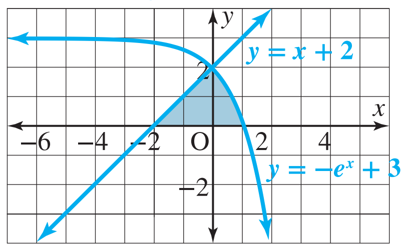
$$= \left|\frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big|_0^1\right|$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

M05_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 1 04/03/2022 6:10:02 PM

7. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين المستقيم $y = x + 2$ ومنحنى الدالّة $y = -e^x + 3$ والمحور x. مثّل المعطيات بيانيًّا لتحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ولتبيّن المساحة المطلوب إيجادها.

يبيّن الشكل أدناه المساحة المطلوبة.



نلاحظ من التمثيل البيانيّ أن نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم تقع عند $x = 0$ ونقطة تقاطع المنحنى مع المحور x تقع عند $x = ln\ 3$.

إذن، قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_{-2}^{0} (x + 2)\, dx + \int_{0}^{ln\ 3} (-e^x + 3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + (-e^x + 3x)\Bigg|_{0}^{ln\ 3}$$

$$= 3\ ln\ 3 \approx 3.3$$

---

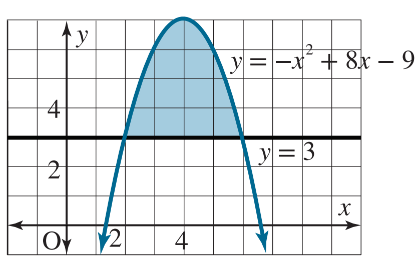
8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ومنحنى الدالّة $g(x) = x - 1$؟

Ⓐ $-\frac{9}{2}$ Ⓒ 3

● $\frac{9}{2}$ Ⓓ 9

---

9. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة المظلّلة؟

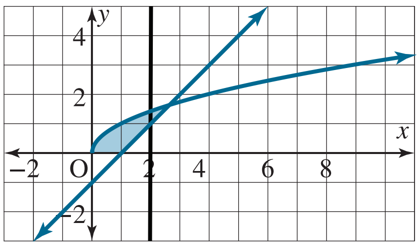


Ⓐ $\frac{29}{3}$ Ⓒ 32

● $\frac{32}{3}$ Ⓓ $\frac{31}{3}$

---

10. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x - 1$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 2$، المبيّنة في الشكل أدناه.



$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx + \int_{1}^{2} [\sqrt{x} - (x - 1)]\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{2} - 3}{6} = 1.39$$

---

11. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \sin x + 3$ ومنحنى الدالّة $y = \cos x + 3$ والمستقيمات $x = 0$ و $x = \pi$ و $y = 0$.

نوجد نقطة التقاء المنحنيّين في الفترة المحدّدة:

$$\sin x + 3 = \cos x + 3$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

نجرّب قيمتين إحداهما أكبر من $\frac{\pi}{4}$ والأخرى أصغر منها، مثل $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{6}$، لنعرف الفترة التي تكون فيها قيمة إحدى الدالّتين أكبر من قيمة الدالّة الأخرى، فنستنتج أنّ قيمة المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3) - (\sin x + 3)\, dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x + 3) - (\cos x + 3)\, dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$+ (-\sin x - \cos x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 4$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{3}{4}$ Ⓒ $\frac{4\pi}{3}$

Ⓑ $\frac{2\pi}{3}$ ● $\frac{3\pi}{4}$

---

13. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = 4 - x^2$ والمستقيم $y = 0$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{512}{15}$ ● $\frac{512\pi}{15}$

Ⓑ $\frac{124\pi}{5}$ Ⓓ $\frac{621\pi}{5}$

---

14. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = (1 + \sin x)\sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = -\frac{\pi}{2}$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ حول المحور x؟

Ⓐ $\frac{5\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{6\pi}{5}$

● $\frac{8\pi}{3}$ Ⓓ لا يمكن إيجاده

---

15. يمكن حساب معدّل استهلاك الغاز الطبيعي في إحدى المدن باستعمال الدالّة $C'(t) = t + e^{0.05t}$ (بتريليونات الأقدام المكعبة)، حيث t عدد السنوات ابتداءً من العام 2000، أوجد قيمة الاستهلاك الكلّي لهذه المدينة من الغاز الطبيعي من نهاية العام 2003 إلى نهاية العام 2015.

$$C(15) - C(3) = \int_3^{15} \left(t + e^{0.05t}\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + 20e^{0.05t}\right)\Bigg|_3^{15}$$

$$\approx 127$$

إذن، قيمة الاستهلاك الكلّي لهذه المدينة من الغاز الطبيعي تساوي 127 تريليون قدم مكعّب تقريبًا.

16. عند إلقاء جسم من مكان مرتفع فإنّه يسقط بتسارع ثابت يساوي 32 ft/sec^2، وإذا كانت النقطة التي يُلقى منها الجسم عند سطح الأرض، فإنّ تسارع الجسم يساوي $a(t) = -32$. ألقي جسم من أعلى برج ارتفاعه 1 600 ft بسرعة ابتدائيّة تساوي -25 ft/sec؛ أوجد ارتفاع الجسم $s(t)$، عن سطح الأرض عند الزمن t.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1$$

عند $t = 0$، $v(t) = -25$ ، إذن:

$$-25 = -32(0) + C_1,\ C_1 = -25$$

$$v(t) = -32t - 25$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-32t - 25)\,dt$$

$$= -16t^2 - 25t + C_2$$

عند $t = 0$، $s(t) = 1\,600$ ، إذن:

$$1\,600 = -16(0) - 25(0) + C_2,\ C_2 = 1\,600$$

$$s(t) = -16t^2 - 25t + 1\,600$$

---

17. لنفترض أنّ جسمًا يتحرّك على خطّ مستقيم بسرعة $v(t) = \sin^5 t$. أوجد إزاحة هذا الجسم بالأمتار خلال الفترة $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(0)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right)^2 \sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t\right) \sin t\,dt$$

لتكن $u = \cos t$:

$$= -\int_1^0 \left(1 - 2u^2 + u^4\right) du$$

$$= -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_1^0 = \frac{8}{15}$$

إذن، إزاحة هذا الجسم تساوي $\frac{8}{15}$ متر تقريبًا.

18. اشترت هدى ثلّاجة جديدة تسمح لها بتوفير المال. يمكن حساب معدّل التوفير الشهري من خلال الصيغة $R'(t) = 120 - \frac{e^{0.2t}}{100}$ حيث t الزمن بالأشهر. لكنّ معدّل التكلفة الشهريّة لصيانة هذا النوع من الثلاجات قد يبلغ $C'(t) = \frac{e^{0.2t}}{15}$. أوجد المدّة التي يصبح استعمال هذا النوع من الثلاجات بعدها غير مربح، ثمّ أوجد مبلغ التوفير الصافيّ الكليّ (بالريال) الذي ستوفّره هدى خلال هذه المدّة.

لتكن $f(t)$ ناتج طرح تكلفة الصيانة الشهريّة من قيمة التوفير الشهري:

$$f(t) = R(t) - C(t)$$
$$f'(t) = R'(t) - C'(t)$$
$$= \left(120 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \frac{e^{0.2t}}{15}$$
$$= 120 - \frac{23e^{0.2t}}{300}$$
$$f'(t) = 0$$

$t \approx 37$ شهرًا

قيمة التوفير النهائيّ خلال هذه المدّة هي $f(37) - f(0)$، وهي القيمة التي يمكن الحصول عليها من خلال التكامل المحدود:

$$f(37) - f(0) = \int_0^{37} \left[\left(120 - \frac{e^{0.2t}}{100}\right) - \left(\frac{e^{0.2t}}{15}\right)\right] dt$$
$$= \int_0^{37} \left(120 - \frac{23e^{0.2t}}{300}\right) dt$$
$$= \left(120t - \frac{23e^{0.2t}}{60}\right)\Big|_0^{37} \approx 3\ 813$$

إذن، ستوفّر هدى 3 813 ريالًا تقريباً خلال 37 شهرًا.

---

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة $\frac{dy}{dx} = 4xy$ ؟

- Ⓐ $y = Ce^{2x^2}$
- Ⓑ $y = e^{2x^2} + C$
- Ⓒ $y = Ce^{-2x^2}$
- Ⓓ $x = Ce^{2y^2}$

20. إذا كانت المعادلة التفاضليّة لنموّ قطيع من الأغنام هي $\frac{dy}{dt} = ky$، حيث t الزمن بالسنوات، أوجد قيمة ثابت النموّ الأسيّ k إذا ازداد عدد الأغنام في القطيع من 250 رأسًا في البداية إلى 1 000 رأس تقريبًا خلال ثلاثة سنوات.

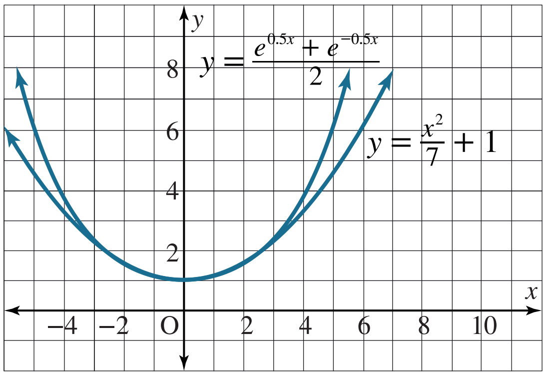
- Ⓐ $-\frac{ln\ 4}{3}$
- Ⓑ $\frac{ln\ 3}{4}$
- Ⓒ $\frac{ln\ 4}{5}$
- Ⓓ $\frac{ln\ 4}{3}$

الاسم ______________________________

5 تقويم الأداء، النموذج A

قد تتساءل ما إذا كانت هناك صيغة رياضيّة معروفة للمنحنى الذي يرسمه سلك الكهرباء المعلّق بين عمودين، وقد يحسم أحدكم هذه المسألة بأن يعتبره، ببساطة، قطعًا مكافئًا. غير أنّ الحقيقة كانت مذهلة عند اكتشافها، فقد تبيّن أنّ الدالّة التي تنمذج هذا المنحنى هي $y = a\left(\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2b}\right)$، حيث $a, b > 0$.

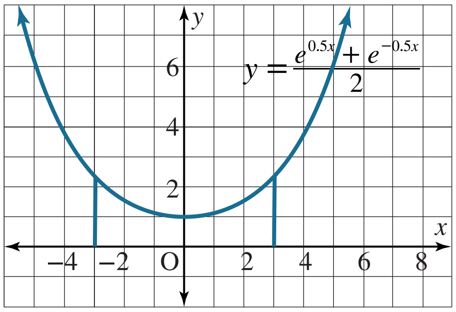
في الشكل 1 نجد التمثيل البيانيّ للدالة $y = a\left(\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2b}\right)$ حيث تمّ أخذ $a = b = \frac{1}{2}$، أي الدالّة $y = \frac{e^{0.5x} + e^{-0.5x}}{2}$ والتمثيل البيانيّ للدالّة $y = \frac{x^2}{7} + 1$، وذلك للمقارنة بين منحنييهما.



الشكل 1

ستقوم فيما يلي بإيجاد طول السلك الكهربائي بين عمودين. مثلا، خذ الجزء الواقع بين $x = -3$ و $x = 3$ من التمثيل البيانيّ للدالّة $y = \frac{e^{0.5x} + e^{-0.5x}}{2}$.

(انظر الشكل 2)



الشكل 2

1. **a.** أوجد قيمة $(e^{bx} + e^{-bx})^2$.

$$\left(e^{bx} + e^{-bx}\right)^2 = e^{2bx} + 2e^{bx}e^{-bx} + e^{-2bx}$$
$$= e^{2bx} + 2 + e^{-2bx}$$

b. ليكن $a = 1$. أوجد قيمة y'^2.

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2b}\right)$$
$$= \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}$$
$$y'^2 = \frac{e^{2bx} + e^{-2bx} - 2}{4}$$

2. معدّل تزايد طول سلك الكهرباء هو $l'(x) = \sqrt{1 + y'^2}$، حيث x الطول بالأمتار إلى الجهة الموجبة، وليكن $a = 1$.

a. أثبت أنّ $\sqrt{1 + y'^2} = by$.

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{e^{2bx} + e^{-2bx} - 2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{e^{2bx} + e^{-2bx} + 2}{4}}$$
$$= \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2} = by$$

M05_MTH01_ANC12_ADV_QTR_AR_ISBN.indb 1 04/03/2022 6:10:09 PM

b. أوجد طول السلك $l(x)$ بين $x = 0$ و $x = 3$.

$$l(x) = \int_0^3 l'(x)\,dx$$
$$= \int_0^3 by(x)\,dx$$
$$= \int_0^3 \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2b}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{1}{2b}\left(e^{3b} - e^{-3b}\right)$$

c. أثبت أنّ طول السلك بين $x = 0$ و $x = -3$ يساوي طوله بين $x = 0$ و $x = 3$ باستعمال قواعد التكامل المحدود.

$$\int_{-3}^{0} l'(x)\,dx = -\int_0^{-3} l'(x)\,dx$$

ليكن $x = -t$.

إذن، عند $x = -3$ يكون $t = 3$

$$= -\int_0^3 l'(-t)\,d(-t)$$
$$= \int_0^3 l'(-t)\,dt$$
$$= \int_0^3 by(-t)\,dt$$
$$= \int_0^3 \frac{e^{-bt} + e^{bt}}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2b}\left(e^{3b} - e^{-3b}\right)$$

d. أوجد قيمة b إذا كان ميل المماس يساوي 2 عند النقطة التي احداثيها x هو 3.

$$y'(3) = 2$$
$$\frac{e^{3b} - e^{-3b}}{2} = 2$$

ليكن $e^{3b} = X$.

إذن، $X^2 - 4X - 1 = 0$

$$X = 2 + \sqrt{5}$$
$$e^{3b} = 2 + \sqrt{5}$$
$$b = \frac{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)}{3}$$

3. ما الصعوبة التي تواجهها في عمليّة إيجاد قيمة التكامل المحدود لإيجاد طول السلك عندما $a \neq 1$؟

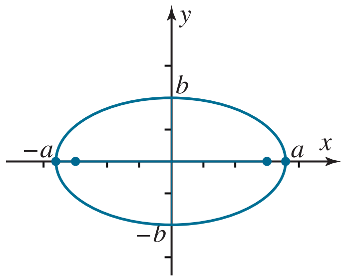
عندما $a \neq 1$، فإنّ

$$y'(x) = a \times \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}$$
$$y'^2 = a^2 \times \frac{e^{2bx} + e^{-2bx} - 2}{4}$$

بالتالي، لن تستطيع التخلّص من إشارة الجذر في الصيغة $\sqrt{1 + a^2 \times \frac{e^{2bx} + e^{-2bx} - 2}{4}}$، وستصبح عمليّة إيجاد قيمة التكامل المحدود $\int_0^3 l'(x)\,dx$ أكثر تعقيدًا.

الاسم ____________________

5 تقويم الأداء، النموذج B



1. إيجاد صيغة مساحة القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي، بحيث يكون مجموع بعدي كل نقطة من هذه النقاط عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابت. تُعرّف النقطتان الثابتتان بأنّهما بؤرتي القطع الناقص. وللقطع الناقص محوران، الأكبر طوله $2a$ والأصغر طوله $2b$.

معادلة القطع الناقص في المستوى الإحداثيّ عندما يكون مركزه نقطة الأصل هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

a. اكتب y بدلالة x للجزء الواقع فوق المحور x من القطع الناقص.

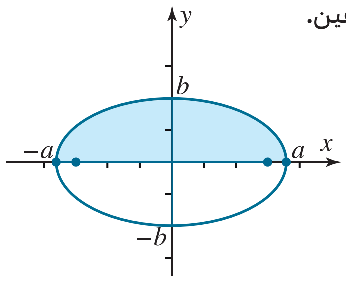
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

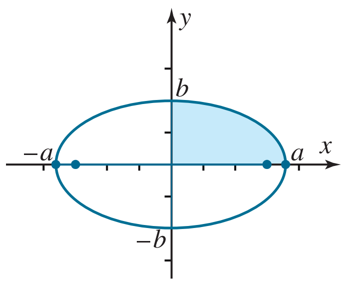
بما أنّ الجزء المطلوب يقع فوق المحور x، إذن، $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

b. لتكن A مساحة القطع الناقص. عبّر عن هذه المساحة باستعمال تكاملين مختلفين.



بما أنّ القطع الناقص متناظر بالنسبة للمحور x ، فإنّ مساحته تساوي مثلَي مساحة المنطقة الواقعة فوق المحور x (المظلّلة في الرسم المجاور). إذن،

$$A=2\int_{-a}^{a} y\,dx=2\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



وبما أنّ القطع الناقص متناظر أيضًا بالنسبة للمحور y، فإنّ مساحته تساوي 4 أمثال المساحة المظلّلة في الرسم المجاور، أي إنّ:

$$A=4\int_{0}^{a} y\,dx=4\,\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

c. استعمل التكامل بالتعويض، حيث $x = a\sin\theta$، لتبرهن أنّ $A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$.

أستعمل صيغة التكامل الثانية، $x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta$$

باستعمال متطابقة فيثاغورس: $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

d. استنتج صيغة لإيجاد مساحة القطع الناقص بدلالة a و b.

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

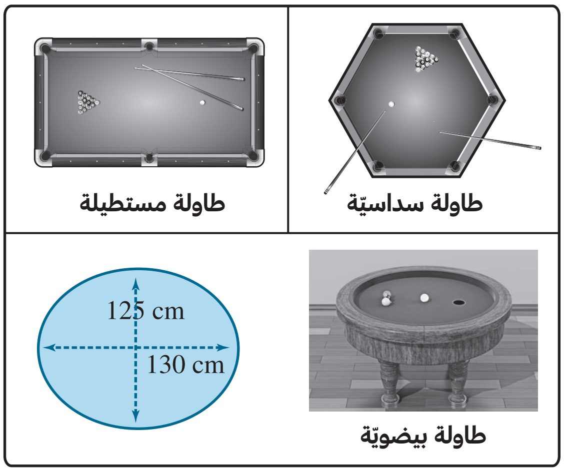
باستعمال متطابقة نصف الزاوية: $\cos^2\theta = \frac{1}{2}[1+\cos 2\theta]$

$$A = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2\theta]\, d\theta = 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = 2ab\left[\frac{\pi}{2}\right] = \pi ab$$

2. تصنع إحدى الشركات طاولات لعبة البلياردو بأشكال مختلفة، بعضها تقليديّ مستطيل الشكل، وبعضها الآخر بأشكال مبتكرة. تغطّى أوجه الطاولات بنوع خاصّ من القماش، سعر المتر المربّع الواحد منه QR 350.

حدّد تكلفة القماش اللازم لتغطية وجه الطاولة البيضويّة.



الطاولة البيضويّة:

مساحتها:

$$\pi ab = \pi(0.65)(0.63) \approx 1.3\ m^2$$

تكلفة القماش:

$$1.3 \times 350 = QR\ 455$$

6 اختبار بداية الوحدة

1. إذا كانت الزاوية المرجعيّة لزاوية هي الزاوية التي قياسها 50°، وكان خطّ الانتهاء لهذه الزاوية يقع في الربع الثالث (III)، أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمتين السالبة والموجبة لقياس هذه الزاوية؟

Ⓐ $-230°$ و $130°$

Ⓑ $-310°$ و $50°$

Ⓒ $-50°$ و $310°$

● $-130°$ و $230°$

---

2. أوجد النسب المثلّثيّة الستّ للزاوية 300° من دون استعمال الحاسبة.

قياس الزاوية المرجعيّة لهذه الزاوية هو:

$$360° - 300° = 60°$$

أحدّد النقطة P على خطّ انتهاء الزاوية وأصلها بالمحور x برسم قطعة مستقيمة متعامدة معه. المثلّث الناتج هو من النوع

$$30° - 60° - 90°$$

أحدّد النقطة $P\left(1, -\sqrt{3}\right)$، (قيمة الإحداثيّ y سالبة، وبالتالي، تقع النقطة في الربع الرابع).

الوتر يساوي:

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

أستخدم تعريفات النسب المثلّثيّة والقيم $x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$ و $r = 2$

$$\sin 300° = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 300° = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 300° = \frac{1}{2} \qquad \sec 300° = 2$$

$$\tan 300° = -\sqrt{3} \qquad \cot 300° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\sin \frac{13\pi}{6}$؟

● $\sin \frac{\pi}{6}$

Ⓑ $-\sin \frac{\pi}{6}$

Ⓒ $\cos \frac{\pi}{6}$

Ⓓ $-\cos \frac{\pi}{6}$

---

4. أيّ من العبارات التالية ليست صحيحة بالنسبة للزاوية $\frac{5\,009\,\pi}{4}$؟

Ⓐ $\sin\left(\frac{5\,009\,\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ⓑ $\frac{\pi}{4}$ و $\left(\frac{\pi}{4} + 1252\,\pi\right)$ يلتقّان إلى نفس النقطة على دائرة الوحدة

● $\sin\left(\frac{5\,009\,\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ⓓ $\sin\left(\frac{5\,009\,\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\,008\,\pi}{4}\right)$

---

5. حل المعادلة الجذرية التالية:

$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x} = -1$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x} = -1$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x} - 1$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2x} - 1\right)^2$$

$$x + 1 = 2x - 2\sqrt{2x} + 1$$

$$x - 2\sqrt{2x} = 0$$

$$x = 2\sqrt{2x}$$

$$x^2 = 8x$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$x = 0$ أو $x = 8$

نتحقق من الحلول بالتعويض في المعادلة الأصلية 0 و 8 عن x،

$$\sqrt{8+1} - \sqrt{2(8)} \stackrel{?}{=} -1$$

$$-1 = -1$$

$$\sqrt{0+1} - \sqrt{2(0)} \stackrel{?}{=} -1$$

$$1 \neq -1$$

نجد أن للمعادلة حل واحد مقبول هو $x = 8$

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة الجذريّة $\sqrt{x-1} = 3$؟

Ⓐ $x = -10$

Ⓑ $x = 4$

● $x = 10$

Ⓓ $x = 14$

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجال ومدى الدالّة $h(x) = -|x|$؟

● المجال هو كلّ الأعداد الحقيقيّة والمدى هو $]-\infty, 0]$

Ⓑ المجال هو $]0, \infty[$ والمدى هو كلّ الأعداد الحقيقيّة

Ⓒ المجال هو $[0, -\infty[$ والمدى هو كلّ الأعداد الحقيقيّة

Ⓓ المجال هو كلّ الأعداد الحقيقيّة والمدى هو $]0, \infty]$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلول المعادلة $|x| + |x - 1| = 3$؟

Ⓐ $x = -4$ أو $x = 2$

● $x = -1$ أو $x = 2$

Ⓒ $x = -2$ أو $x = 1$

Ⓓ $x = -2$ أو $x = 4$

.9 أيّ من الخيارات التالية يمثّل المركّبتين الأساسيّتين للمتّجه **v** إذا كان قياس زاوية اتّجاهه $-30°$ ومقداره 2؟

Ⓐ $\langle 1, -\sqrt{3} \rangle$

Ⓑ $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$

Ⓒ $\langle -\sqrt{3}, 1 \rangle$

● $\langle \sqrt{3}, -1 \rangle$

.10 إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\mathbf{v} + \mathbf{u}$؟

Ⓐ $\langle -3, -1 \rangle$

Ⓑ $\langle 3, 7 \rangle$

● $\langle -1, 7 \rangle$

Ⓓ $\langle 1, -1 \rangle$

.11 يجري جمال في نهر بقارب ذي محرك سرعته 5 mph في اتّجاه يشكّل زاوية قياسها $60°$ من الشمال إلى الشرق. حدّد مركّبتَي المتّجه الذي يمثّل سرعة القارب واتّجاهه عبر النهر، ثمّ مثّله بيانيًّا.

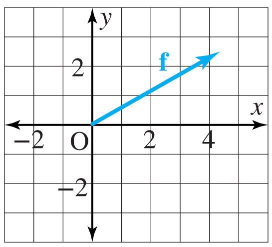
إذا كان f هو المتّجه الذي يمثّل سرعة القارب، فإنّ مقدار f هو 5 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي $30°$ إلى الأعلى.

إذن، مركّبتا المتّجه هما:

$$x = 5 \cos 30° = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33$$

$$y = 5 \sin 30° = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$

$$\mathbf{f} = \langle 4.33, 2.5 \rangle$$



.12 تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها $45°$ مع الجنوب الجغرافيّ بسرعة 450 mph، أوجد الصورة التركيبيّة للمتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة.

إذا كان v هو المتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، فإنّ مسارًا يشكّل زاوية قياسها $45°$ مع الجنوب الجغرافيّ يرسم زاوية اتّجاه للمتّجه v قياسها $-45°$. السرعة 450 mph هي مقدار v، $|\mathbf{v}| = 450$.

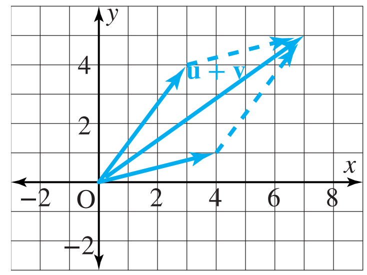
إذن،

$$\mathbf{v} = \langle 450 \cos(-45°), 450 \sin(-45°) \rangle$$

$$= \langle 318.2, -318.2 \rangle$$

M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indd 2 04/03/2022 6:40:08 PM

13. أوجد مجموع المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 4, 1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$ بيانيًّا.

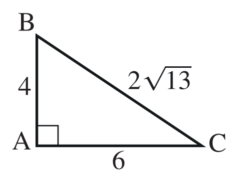


14. إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 6 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\mathbf{v} - \mathbf{u}$؟

● $\langle -1, -3 \rangle$ Ⓒ $\langle 1, 3 \rangle$

Ⓑ $\langle 3, 9 \rangle$ Ⓓ $\langle 1, -5 \rangle$

15. أيّ من الخيارات التالية يمثّل نسبة كلّ من الجيب، وجيب التمام، والظلّ للزاوية B؟



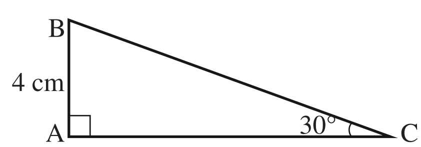
Ⓐ $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \tan B = \frac{3}{2}$

Ⓑ $\sin B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos B = \frac{2}{\sqrt{13}}, \tan B = \frac{2}{3}$

Ⓒ $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \tan B = \frac{2}{3}$

● $\sin B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos B = \frac{2}{\sqrt{13}}, \tan B = \frac{3}{2}$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل طول AC؟



Ⓐ $(\sin 60° \times 4)$ cm   Ⓒ $\left(\frac{4}{\sin 60°}\right)$ cm

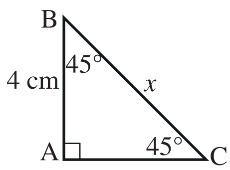
● $\left(\frac{4}{\tan 30°}\right)$ cm   Ⓓ $(\tan 30° \times 4)$ cm

17. إذا أقلعت طائرة بزاوية قياسها °4 وحلّقت مسافة 25 km صعودًا، أيّ من الخيارات التالية يمثّل الارتفاع التقريبيّ للطائرة بعد قطعها تلك المسافة؟

Ⓐ 6.25 km   ● 1.74 km

Ⓑ 1.04 km   Ⓓ 24.93 km

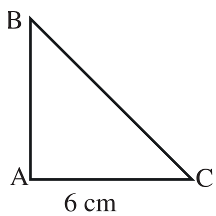
18. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة x؟



Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $2\sqrt{2}$

Ⓑ $\sqrt{2}$ ● $4\sqrt{2}$

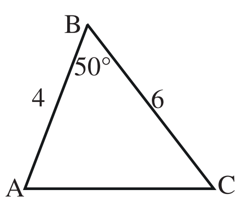
19. المثلّث أدناه هو مثلّث قائم الزاوية متطابق الضلعين. استعمل نظريّة فيثاغورس لتحديد الخيار الذي يمثّل طول الوتر ممّا يلي.



Ⓐ 6   Ⓒ 12

● 8.48   Ⓓ 72

20. استعمل قانون جيب التمام لإيجاد طول AC في المثلّث المعطى.



أستعمل قانون جيب التمام لكتابة المعادلة التي تعطي طول AC:

$$(AC)^2 = (BA)^2 + (BC)^2 - 2(BA)(BC)\cos B$$

$$(AC)^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 50° \approx 21.15$$

$$AC \approx 4.6$$

الاسم ______________________________

6-1 اختبار الدرس

مدخل إلى المتّجهات

1. أثبت، من دون استعمال الرسم، أنّ السهم الممتدّ من النقطة $A(-1, 2)$ إلى النقطة $B(2, 5)$ يكافئ السهم الممتدّ من النقطة $C(6, 0)$ إلى النقطة $D(9, 3)$.

باستعمال الصورة التركيبيّة للقطعة المستقيمة المتّجهة أجد أنّ $\overrightarrow{AB}$ يمثّل المتّجه $\langle 2-(-1), 5-2\rangle = \langle 3, 3\rangle$، وأنّ $\overrightarrow{CD}$ يمثّل المتّجه

$\langle 9-6, 3-0\rangle = \langle 3, 3\rangle$

بالتالي، مع أنّ السهمين يقعان في موضعين مختلفين في المستوى الإحداثيّ، إلّا أنّهما يمثّلان نفس المتّجه، إذن، هما متكافئان.

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّله $\overrightarrow{SR}$ حيث $S(2, -4)$ و $R(5, 0)$؟

Ⓐ 5   Ⓒ $\sqrt{65}$

Ⓑ $\sqrt{26}$ Ⓓ 25

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المركّبتين الأساسيّتين للمتّجه **v** إذا كان قياس زاوية اتّجاهه $30°$ ومقداره 4؟

Ⓐ $\langle 2, 2\sqrt{3}\rangle$ Ⓒ $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

Ⓑ $\langle 2\sqrt{3}, 2\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

---

4. أوجد متّجه الوحدة للمتّجه $\mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$ وتحقّق من أنّ مقداره يساوي 1

$$|\mathbf{v}| = |\langle 3, 1\rangle| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

إذن،

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 3, 1\rangle = \left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\rangle$$

مقدار هذا المتّجه هو

$$\left|\left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{10}} = 1$$

---

5. أوجد مقدار المتّجه $\mathbf{v} = \langle -3, -4\rangle$ وقياس زاوية اتّجاهه.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\mathbf{v} = \langle -3, -4\rangle = \langle |\mathbf{v}| \cos \alpha, |\mathbf{v}| \sin \alpha\rangle$$

$$-3 = |\mathbf{v}| \cos \alpha = 5 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

بما أنّ مركّبتَي المتّجه سالبتان فإنّ $180° < \alpha < 270°$ وبالتالي تكون:

$$\alpha' = \cos^{-1}\left(\left|\frac{-3}{5}\right|\right) \approx 53.13°$$

$$\alpha = 180° + \alpha' = 180° + 53.13°$$

$$\approx 233.13°$$

إذن، قياس زاوية اتّجاه المتّجه v يساوي $233.13°$ تقريبًا.

الاسم ______________________________

6-2 اختبار الدرس

العمليّات على المتّجهات

1. اضرب الكمّيّة القياسيّة $k = 4$ في المتّجه $\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$، ثمّ قارن مقدار واتّجاه المتّجه الناتج بمقدار واتّجاه المتّجه الأصليّ.

لضرب كمّيّة قياسيّة في متّجه، يكفي ضرب هذه الكمّيّة في مركّبتي المتّجه.

$$4\mathbf{v} = 4\langle 2, 5 \rangle = \langle 8, 20 \rangle$$

بما أنّ $k > 0$ ، فإنّ اتّجاه $4\mathbf{v}$ هو نفس اتّجاه $\mathbf{v}$، أمّا مقدار المتّجه $4\mathbf{v}$ فيساوي 4 أمثال مقدار المتّجه $\mathbf{v}$.

2. إذا كان $\mathbf{u} = \langle 0, 7 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$؟

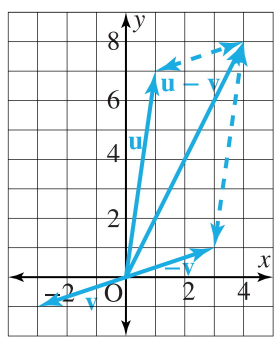
A $\langle 1, -9 \rangle$

B $\langle -1, 9 \rangle$

C $\langle 1, 19 \rangle$

D $\langle 1, -2 \rangle$

3. إذا كان $\mathbf{v} = \langle -3, -1 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 1, 7 \rangle$، أوجد $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ بيانيًّا.



4. استعمل معطيات التمرين 3 لإيجاد المتّجه $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ جبريًّا، ثمّ أوجد مقداره واتّجاهه.

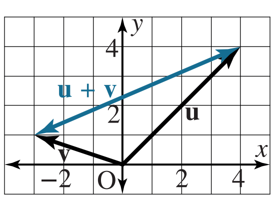
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 1 - (-3), 7 - (-1) \rangle$$
$$= \langle 4, 8 \rangle$$
$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\langle 4, 8 \rangle|$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (8)^2}$$
$$= 4\sqrt{5}$$

لتكن α هي زاوية اتجاه $\mathbf{u} - \mathbf{v}$، إذن:

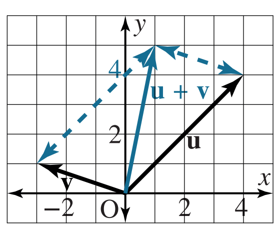
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 4, 8 \rangle$$
$$= \langle |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \cos \alpha, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \sin \alpha \rangle$$
$$4 = 4\sqrt{5} \cos \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.43°$$

5. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{v} = \langle 3, -1 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 4, 4 \rangle$ بيانيًّا بطريقة متوازي الأضلاع؟

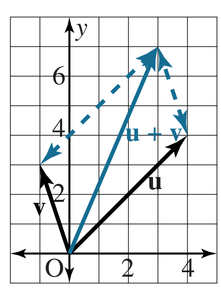
A



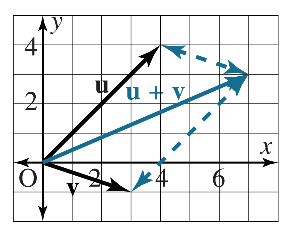
B



C



D



الاسم ________________

6-3 اختبار الدرس

الضرب القياسيّ للمتّجهات

1. أوجد ناتج الضرب القياسيّ التالي: $\langle 2, 5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$

$\langle 2, 5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle = (2)(4) + (5)(2) = 18$

2. استعمل الضرب القياسيّ لتحديد الخيار الذي يمثّل مقدار المتّجه $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ممّا يلي.

A $\sqrt{\langle 2, 1\rangle \cdot \langle 2, 1\rangle}$

B $\sqrt{(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (2\mathbf{i} + \mathbf{j})}$

C $\langle 2, 1\rangle \cdot \langle 2, 1\rangle$

D $(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j})$

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الشغل الناشئ عن قوّة مقدارها 15 N في الاتّجاه $\langle 2, 1\rangle$ عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(4, 2)$؟

A $\frac{150}{\sqrt{5}}$ j

B $\frac{165}{\sqrt{5}}$ j

C 150 j

D 165 j

4. أوجد، باستعمال الحاسبة، قيمة تقريبيّة لقياس الزاوية الواقعة بين المتّجهين $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, -5\rangle$ بطريقة جبريّة.

أستعمل قاعدة إيجاد قياس زاوية بين متّجهين.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{\langle -2, -3\rangle \cdot \langle 1, -5\rangle}{|\langle -2, -3\rangle| \cdot |\langle 1, -5\rangle|}$$
$$= \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}\right) = 45^\circ$$

5. أثبت أنّ المتّجهين $\mathbf{u} = \langle -3, 6\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$ متعامدان.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle -3, 6\rangle \cdot \langle 8, 4\rangle$$
$$= -24 + 24$$
$$= 0$$

إذن، المتّجهان متعامدان.

الاسم ________________________________

6-4 اختبار الدرس

المتّجهات في الفضاء الثلاثيّ الأبعاد

1. ليكن $A = (2, -1, 5)$ و $B = (-1, 2, 4)$.
أوجد المتّجه $3\overrightarrow{AB}$ بالصورة التركيبيّة.

$$3\overrightarrow{AB} = 3\langle -1 - 2, 2 - (-1), 4 - 5\rangle$$
$$= \langle -9, 9, -3\rangle$$

2. استنادًا إلى معطيات التمرين السابق، أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$؟

Ⓐ $\frac{\sqrt{19}}{3}$

● $\sqrt{19}$

Ⓒ $\sqrt{171}$

Ⓓ $\sqrt{189}$

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل متّجهًا مقداره 4 واتّجاهه نفس اتّجاه المتّجه $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$؟

● $\frac{-4}{\sqrt{11}}\mathbf{i} + \frac{12}{\sqrt{11}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{11}}\mathbf{k}$

Ⓑ $\frac{4}{\sqrt{11}}\mathbf{i} + \frac{12}{\sqrt{11}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{11}}\mathbf{k}$

Ⓒ $\frac{-4}{\sqrt{11}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{11}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{11}}\mathbf{k}$

Ⓓ $\frac{-4}{\sqrt{11}}\mathbf{i} + \frac{12}{\sqrt{11}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{11}}\mathbf{k}$

4. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$، فإنّ

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$
$$= \frac{(3)(-1) + (2)(4) + (1)(-2)}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (-2)^2}}$$
$$= \frac{3}{7\sqrt{6}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) \approx 80^\circ$$

5. أوجد قياسات زوايا الاتّجاه للمتّجه $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$$
$$2 = 3\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$
$$\cos\beta = \frac{1}{3}$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5^\circ$$
$$\cos\gamma = \frac{-2}{3}$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) \approx 132^\circ$$

M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 1 04/03/2022 6:40:14 PM

الاسم ________________

6 تقويم الوحدة، النموذج A

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتجه الذي يمثّله $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-2, -1)$ و $B(2, -1)$؟

Ⓐ 0

● 4

Ⓒ $2\sqrt{5}$

Ⓓ 16

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المركّبتين الأساسيّتين للمتّجه **v** إذا كان قياس زاوية اتّجاهه $-45°$ ومقداره 2؟

Ⓐ $\langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$

● $\langle \sqrt{2}, -\sqrt{2} \rangle$

Ⓒ $\langle -\sqrt{2}, -\sqrt{2} \rangle$

Ⓓ $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

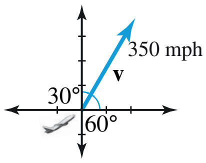
---

3. أوجد متّجه الوحدة للمتّجه $\mathbf{v} = 2\langle 2, -1 \rangle$ وتحقّق من أنّ مقداره يساوي 1

$$|\mathbf{v}| = 2|\langle 2, -1 \rangle| = 2\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$
$$= 2\sqrt{5}$$
$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$
$$\left|\left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{5}}$$
$$= 1$$

---

4. تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها $30°$ مع الشمال الجغرافيّ بسرعة 350 mph
أوجد الصورة التركيبيّة للمتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، وفسّر ماذا تمثّل مركّبتا هذا المتّجه.



إذا كان v هو المتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، فإنّ مسارًا بزاوية قياسها $30°$ مع الشمال الجغرافي يحدّد زاوية اتّجاه للمتّجه v قياسها $60°$ السرعة 350 mph هي مقدار v، $|\mathbf{v}| = 350$. إذن،

$$\mathbf{v} = \langle 350 \cos 60°, 350 \sin 60° \rangle$$
$$= \langle 175, 175\sqrt{3} \rangle$$

تمثّل مركّبتا متّجه السرعة v السرعتين الشماليّة والشرقيّة للطائرة. أي إنّ الطائرة عندما تطير في مسار يشكّل زاوية قياسها $30°$ مع الشمال الجغرافي (أي بزاوية قياسها $60°$ مع المحور الأفقيّ)، وبسرعة مقدارها 350 mph، فإنّها تطير شرقًا بسرعة مقدارها 175 mph وشمالاً بسرعة $175\sqrt{3}$ mph

---

5. إذا كان مقدار المتّجه **v** يساوي 5، أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه $-4\mathbf{v}$؟

Ⓐ -20 ● 20

Ⓑ 1 Ⓓ 80

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{v} = \langle 3, -1 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$؟

● 5 Ⓒ $\sqrt{29}$

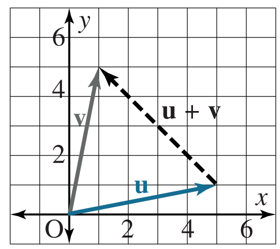
Ⓑ 7 Ⓓ $\sqrt{40}$

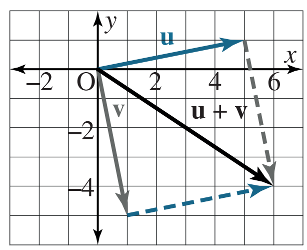
7. ليكن $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -4 \right\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\frac{2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}}{2}$؟

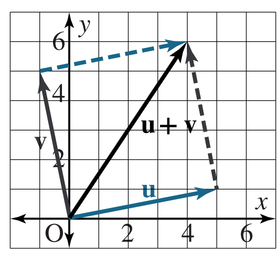
Ⓐ $\langle 3, 9 \rangle$　　Ⓒ $\langle -3, -9 \rangle$

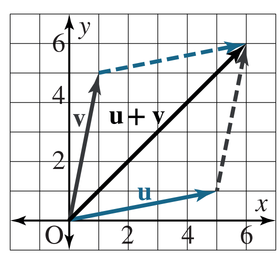
Ⓑ $\langle 3, -9 \rangle$　　Ⓓ $\langle -3, 9 \rangle$

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle$ بيانيًّا؟

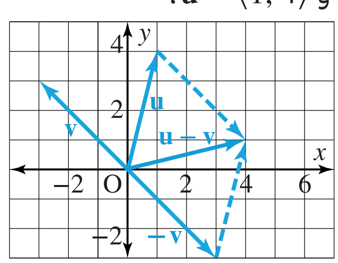
Ⓐ


Ⓑ


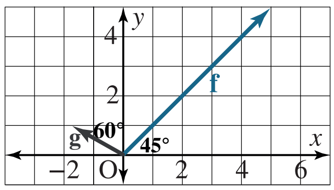
Ⓒ


Ⓓ


9. إذا كان $\mathbf{v} = \langle -3, 3 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$، أوجد $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ بيانيًّا.



10. يجري فهد في النهر بقارب ذي محرّك سرعته 7 mph في اتّجاه بزاوية قياسها $45°$ من الشرق إلى الشمال، (انظر المتّجه **f** في الشكل أدناه). أمّا سرعة التيّار النهريّ فتبلغ 2 mph، وهو يتّجه بزاوية قياسها $60°$ من الشمال إلى الغرب (انظر المتّجه **g** في الشكل أدناه). أوجد سرعة قارب فهد واتّجاهه عبر النهر. (اعتمد التقريب $5\sqrt{2} \approx 7$)



إذا كان f هو المتّجه الذي يمثّل سرعة المحرّك، فإنّ مقدار f هو 7 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي $45°$ إلى الأعلى، فإنّ مركّبتيه هما

$$x = 7\cos 45° = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$y = 7\sin 45° = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$\mathbf{f} = \langle 5, 5 \rangle$$

وإذا كان g هو المتّجه الذي يمثّل سرعة التيار النهري، فإنّ مقدار g هو 2 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي $30°$ إلى الأعلى. لكنّ المتّجه يقع في الربع الثاني، وبالتالي، فإنّ مركّبته الأفقيّة سالبة ومركّباته هما

$$x = -2\cos 30° = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

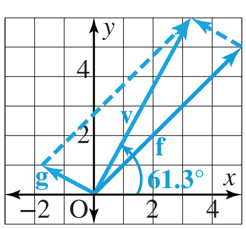
$$y = 2\sin 30° = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathbf{g} = \langle -\sqrt{3}, 1 \rangle$$

إذن، متّجه سرعة القارب هو

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} + \mathbf{g} = \langle 5, 5 \rangle + \langle -\sqrt{3}, 1 \rangle = \langle 3.27, 6 \rangle$$

مقداره $|\mathbf{v}| = \sqrt{(3.27)^2 + (6)^2} \approx 6.83$



إذا كانت θ هي زاوية اتّجاه v، فإنّ

$$|\mathbf{v}|\cos\theta = 6.83\cos\theta = 3.27$$

$$\cos\theta = 0.48$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.48) \approx 61.3°$$

إذن، يسير القارب بسرعة 6.83 mph تقريبًا، وبزاوية قياسها $61.3°$ تقريبًا من الشرق الى الشمال.

.11 أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج الضرب القياسيّ $\langle 2, -6\rangle \cdot \langle 1, -2\rangle$؟

Ⓐ -10
Ⓑ 4
● 14
Ⓓ 18

.12 استعمل الضرب القياسيّ لتحديد الخيار الذي يمثّل مقدار المتّجه $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ممّا يلي.

● $\sqrt{\langle -1, -1\rangle \cdot \langle -1, -1\rangle}$

Ⓑ $\sqrt{(-\mathbf{i} - \mathbf{j})^2 + (-\mathbf{i} - \mathbf{j})^2}$

Ⓒ $\langle -1, -1\rangle \cdot \langle -1, -1\rangle$

Ⓓ $(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} - \mathbf{j})$

.13 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الشغل الناشئ عن قوّتين، الأولى مقدارها 10 N في الاتّجاه $\langle 4, 2\rangle$، والثانية مقدارها 5 N في نفس الاتّجاه، عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(8, 4)$؟

Ⓐ $\frac{15}{2\sqrt{5}} \langle 4, 2\rangle$ N • m

Ⓑ $\frac{100}{\sqrt{5}}$ N • m

● $\frac{300}{\sqrt{5}}$ N • m

Ⓓ 150 N . m

.14 أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, -4\rangle$ بطريقة جبريّة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{\langle 2, -3\rangle \cdot \langle -1, -4\rangle}{|\langle 2, -3\rangle| \cdot |\langle -1, -4\rangle|} = \frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}\right) \approx 47.73°$$

.15 ليكن للمتّجهين $\mathbf{u} = \langle -9, 6\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -2, -3\rangle$ أيّ من الخيارات التالية هو الخيار الصحيح؟

Ⓐ للمتّجهين نفس المقدار.

Ⓑ المتّجهان ليسا متعامدين.

Ⓒ للمتّجهين نفس الاتجاه.

● المتّجهان متعامدان.

.16 إذا كان الشغل $\mathbf{w}$، الناشئ عن قوّة F مقدارها 8 N في الاتّجاه $\langle 2, 3\rangle$، عند تحريك جسم من النقطة $O(0, 0)$ إلى النقطة $A(4, 1)$ هو $\frac{88}{\sqrt{13}}$ N • m، أوجد قياس الزاوية المكوّنة بين اتّجاه القوّة واتّجاه حركة الجسم باستعمال قاعدة الشغل.

$$\overrightarrow{OA} = \langle 4, 1\rangle$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{F} = 8 \cdot \frac{\langle 2, 3\rangle}{|\langle 2, 3\rangle|} = \frac{8}{\sqrt{13}} \langle 2, 3\rangle$$

$$|\mathbf{F}| = \left|\frac{16}{\sqrt{13}}, \frac{24}{\sqrt{13}}\right| = 8$$

$$\mathbf{w} = |\mathbf{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \;.\; \cos\theta$$

$$\frac{88}{\sqrt{13}} = 8 \cdot \sqrt{17} \;.\; \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{221}}$$

$$\theta \approx 42.27°$$

17. إذا كان $A = (3, 2, 1)$ و $B = (1, 2, 3)$،
أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $-2\overrightarrow{AB}$؟

Ⓐ $\langle -4, 0, 4 \rangle$

● $\langle 4, 0, -4 \rangle$

Ⓒ $\langle 4, 4, -4 \rangle$

Ⓓ $\langle -4, 4, 4 \rangle$

---

18. أيّ من الخيارات التالية يمثل المتّجه الذي مقداره 8 واتّجاهه عكس اتّجاه المتّجه $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \sqrt{14}\,\mathbf{k}$؟

● $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \sqrt{14}\,\mathbf{k}$

Ⓑ $\frac{5}{8}\mathbf{i} - \frac{5}{8}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{14}}{8}\mathbf{k}$

Ⓒ $\frac{-5}{8}\mathbf{i} + \frac{5}{8}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{14}}{8}\mathbf{k}$

Ⓓ $-40\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 8\sqrt{14}\,\mathbf{k}$

---

19. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{(1)(1) + (4)(2) + (-2)(4)}{\sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (4)^2}}$$

$$= \frac{1}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{21}\right) \approx 87.27°$$

20. أوجد قياسات زوايا الاتّجاه α و β و γ للمتّجه $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$، ثمّ تحقّق من أنّ

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (3)^2} = \sqrt{26}$$

$$-1 = \sqrt{26}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{26}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right) \approx 101.31°$$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right) \approx 38.33°$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right) \approx 53.96°$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right)^2$$

$$= 1$$

الاسم

6 تقويم الوحدة، النموذج B

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّله $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-3, -2)$ و $B(3, -2)$؟

Ⓐ 0

Ⓑ 6

Ⓒ $2\sqrt{13}$

Ⓓ 36

.2 أيّ من الخيارات التالية يمثّل المركّبتين الأساسيّتين للمتّجه **v** إذا كان قياس زاوية اتّجاهه $-30°$ ومقداره 6؟

Ⓐ $\langle 3\sqrt{3}, 3\rangle$

Ⓑ $\langle -3\sqrt{3}, -3\rangle$

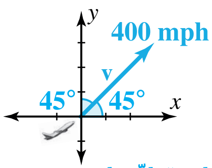
Ⓒ $\langle 3\sqrt{3}, -3\rangle$

Ⓓ $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$

.3 أوجد متّجه الوحدة للمتّجه $\mathbf{v} = 3\langle 1, -2\rangle$ وتحقّق من أنّ مقداره يساوي 1

$$|\mathbf{v}| = 3|\langle 1, -2\rangle| = 3\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$
$$= 3\sqrt{5}$$
$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3}{3\sqrt{5}}\langle 1, -2\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right\rangle$$
$$\left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{5}}$$
$$= 1$$

.4 تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها $45°$ مع الشمال الجغرافيّ بسرعة 400 mph
أوجد الصورة التركيبيّة للمتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، وفسّر ماذا تمثّل مركّبتا هذا المتّجه.



إذا كان v هو المتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، فإنّ مسارًا بزاوية قياسها 45° مع الشمال الجغرافيّ يحدّد زاوية اتّجاه للمتّجه v قياسها 45° أيضًا.
السرعة 400 mph هي مقدار v، $|\mathbf{v}| = 400$.
إذن،

$$\mathbf{v} = \langle 400 \cos 45°, 400 \sin 45°\rangle$$
$$= \langle 200\sqrt{2}, 200\sqrt{2}\rangle$$

تمثّل مركّبتا متّجه السرعة v السرعتين الشماليّة والشرقيّة للطائرة. أي إنّ الطائرة عندما تطير في مسار يشكّل زاوية قياسها 45° مع الشمال الجغرافيّ (أي بزاوية قياسها أيضًا 45° مع المحور الأفقيّ)، وبسرعة مقدارها 400 mph، فإنّها تطير شرقًا بسرعة مقدارها $200\sqrt{2}$ mph وشمالاً بسرعة مساوية لها، أي $200\sqrt{2}$ mph

.5 إذا كان مقدار المتّجه **v** يساوي 4، أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه $-5\mathbf{v}$؟

Ⓐ -20

Ⓑ 1

Ⓒ 20

Ⓓ 80

.6 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 4, 5\rangle$؟

Ⓐ $2\sqrt{2}$

Ⓑ 14

Ⓒ $2\sqrt{7}$

Ⓓ 10

M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 2 04/03/2022 6:40:24 PM

.7 ليكن المتجهان $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{3}, -3 \right\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 5, 3 \rangle$.
أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\frac{3\mathbf{u} - \mathbf{v}}{4}$؟

(A) $\langle -1, -3 \rangle$

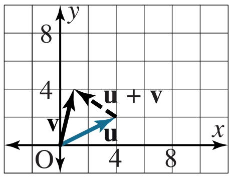
(B) $\langle 1, 3 \rangle$

(C) $\langle 1, -3 \rangle$

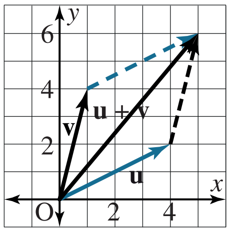
(D) $\langle -1, 3 \rangle$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 4, 2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, 4 \rangle$ بيانيًّا؟

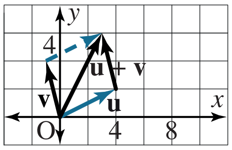
(A)



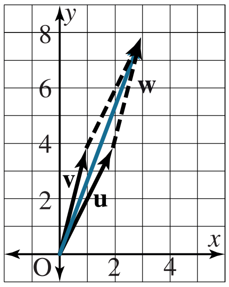
(B)



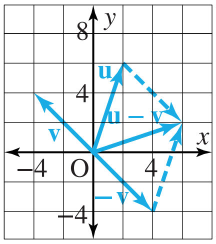
(C)



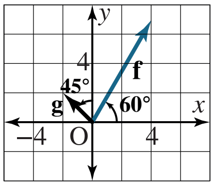
(D)



.9 إذا كان $\mathbf{v} = \langle -4, 4 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 2, 6 \rangle$،
أوجد $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ بيانيًّا.



.10 يبحر ناصر في النهر بقارب ذي محرّك سرعته 8 mph في اتّجاه بزاوية قياسها $60°$ من الشرق إلى الشمال، (انظر المتّجه **f** في الشكل أدناه). أمّا سرعة التيّار النهريّ فتبلغ 3 mph، وهو يتّجه بزاوية قياسها $45°$ من الشمال إلى الغرب، (انظر المتّجه **g** في الشكل أدناه). أوجد سرعة قارب ناصر واتّجاهه عبر النهر.
(اعتمد التقريب $3\sqrt{3} \approx 5.2$)



إذا كان f هو المتّجه الذي يمثّل سرعة المحرّك، فإنّ مقدار f هو 8 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي $60°$ إلى الأعلى، وبالتالي، فإنّ مركّبتيه هما

$$x = 8 \cos 60° = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$y = 8 \sin 60° = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 7$$

$$\mathbf{f} = \langle 4, 7 \rangle$$

وإذا كان g هو المتّجه الذي يمثّل سرعة التيّار النهريّ، فإنّ مقدار g هو 3 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي $45°$ إلى الأعلى. لكنّ المتّجه يقع في الربع الثاني، وبالتالي، فإنّ مركّبته الأفقيّة سالبة ومركّبتيه هما

$$x = -3 \cos 45° = -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 3 \sin 45° = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{g} = \left\langle -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

إذن، متّجه سرعة القارب هو

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} + \mathbf{g} = \langle 4, 7 \rangle + \left\langle -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$\approx \langle 1.88, 9.12 \rangle$$

مقداره $|\mathbf{v}| = \sqrt{(1.88)^2 + (9.12)^2} \approx 9.31$

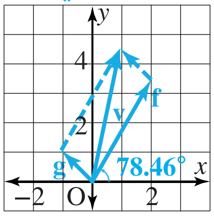
إذا كانت θ هي زاوية اتّجاه v، فإنّ

$$|\mathbf{v}| \cos \theta = 9.31 \cos \theta$$

$$= 1.88$$

$$\cos \theta = 0.2$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.2) \approx 78.46°$$



إذن، يسير القارب بسرعة 9.31 mph تقريبًا، وبزاوية قياسها $78.46°$ تقريبًا من الشرق إلى الشمال.

M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 3 04/03/2022 6:40:27 PM

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج الضرب القياسيّ $\langle 3, -5\rangle \cdot \langle -1, 2\rangle$؟

● -13
Ⓑ 11
Ⓒ 13
Ⓓ 17

12. استعمل الضرب القياسيّ لتحديد الخيار الذي يمثّل مقدار المتّجه $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ممّا يلي.

● $\sqrt{\langle 2, -1\rangle \cdot \langle 2, -1\rangle}$
Ⓑ $\sqrt{(2\mathbf{i} - \mathbf{j})^2 + (2\mathbf{i} - \mathbf{j})^2}$
Ⓒ $\langle 2, -1\rangle \cdot \langle 2, -1\rangle$
Ⓓ $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$

13. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الشغل الناشئ عن قوّتين، الأولى مقدارها $12\ \mathrm{N}$ في الاتّجاه $\langle 5, 1\rangle$ والأخرى مقدارها $4\ \mathrm{N}$ في نفس الاتّجاه، عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(8, 4)$؟

Ⓐ $\frac{16}{\sqrt{26}}\langle 5, 1\rangle\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
Ⓑ $4\sqrt{26}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
● $\frac{352}{13}\sqrt{26}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
Ⓓ $104\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

14. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle$ بطريقة جبريّة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{\langle 3, -2\rangle \cdot \langle -2, -5\rangle}{|\langle 3, -2\rangle| \cdot |\langle -2, -5\rangle|} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}\right) \approx 78.11^\circ$$

15. ليكن المتّجهان $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$، أيّ من الخيارات التالية هو الخيار الصحيح؟

Ⓐ للمتّجهين نفس المقدار.
Ⓑ المتّجهان ليسا متعامدين.
Ⓒ للمتّجهين نفس الاتّجاه.
● المتّجهان متعامدان.

16. إذا كان الشغل $\mathbf{w}$، الناشئ عن قوّة F مقدارها $12\ \mathrm{N}$ في الاتّجاه $\langle 4, 2\rangle$، عند تحريك جسم من النقطة $O(0, 0)$ إلى النقطة $A(3, 4)$ هو $30\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$، أوجد قياس الزاوية المكوّنة بين اتّجاه القوّة واتّجاه حركة الجسم باستعمال قاعدة الشغل.

$$\overrightarrow{OA} = \langle 3, 4\rangle$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 5$$

$$\mathbf{F} = 12 \cdot \frac{\langle 4, 2\rangle}{|\langle 4, 2\rangle|} = \frac{6}{\sqrt{5}}\langle 4, 2\rangle$$

$$|\mathbf{F}| = \left|\frac{24}{\sqrt{5}}, \frac{12}{\sqrt{5}}\right| = 12$$

$$\mathbf{w} = |\mathbf{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}|\ .\cos\theta$$

$$30 = 12 \times 5 \times \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

17. إذا كان $A = (4, 1, 2)$ و $B = (3, 2, 5)$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة لِ $-3\overrightarrow{AB}$؟

Ⓐ $\langle -3, 3, 9\rangle$

Ⓑ $\langle 3, -3, -9\rangle$

Ⓒ $\langle -3, -9, -6\rangle$

Ⓓ $\langle 3, 3, 9\rangle$

---

18. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المتجّه الذي مقداره 12 واتّجاهه عكس اتّجاه المتجّه $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \sqrt{16}\,\mathbf{k}$؟

Ⓐ $64\mathbf{i} - 64\mathbf{j} - 12\sqrt{16}\,\mathbf{k}$

Ⓑ $-8\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \sqrt{16}\,\mathbf{k}$

Ⓒ $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{16}}{3}\mathbf{k}$

Ⓓ $-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{16}}{3}\mathbf{k}$

---

19. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{(2)(4) + (1)(2) + (3)(-3)}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (3)^2}\cdot\sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{442}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{442}}\right) \approx 87.27^\circ$$

20. أوجد قياسات زوايا الاتّجاه α و β و γ للمتّجه $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$، ثمّ تحقّق من أنّ

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$2 = \sqrt{14}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 57.69^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right) \approx 143.3^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74.5^\circ$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2$$

$$= 1$$

M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indd 5 04/03/2022 6:40:31 PM

الاسم ______________________________

6 تقويم الوحدة، النموذج C

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّله $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(4, 7)$ و $B(4, 1)$؟

Ⓐ 10

● 6

Ⓒ 8

Ⓓ 36

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المركّبتين الأساسيّتين للمتّجه **v** إذا كان قياس زاوية اتّجاهه $-60°$ ومقداره 3؟

Ⓐ $\left\langle \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Ⓑ $\left\langle -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

Ⓒ $\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

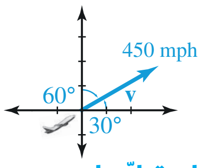
● $\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

---

3. أوجد متّجه الوحدة للمتّجه $\mathbf{v} = 4\langle 1, -1 \rangle$ وتحقّق من أنّ مقداره يساوي 1

$$|\mathbf{v}| = 4\left|\langle 1, -1 \rangle\right| = 4\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$
$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{4}{4\sqrt{2}}\langle 1, -1 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$
$$\left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{2}}$$
$$= 1$$

4. تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها $60°$ مع الشمال الجغرافيّ بسرعة 450 mph
أوجد الصورة التركيبيّة للمتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، وفسّر ماذا تمثّل مركّبتا هذا المتّجه.



إذا كان v هو المتّجه الذي يمثّل سرعة الطائرة، فإنّ مسارًا بزاوية قياسها $60°$ مع الشمال الجغرافيّ يحدّد زاوية اتّجاه للمتّجه v قياسها $30°$
السرعة 450 mph هي مقدار v، إذن، $|\mathbf{v}| = 450$.

$$\mathbf{v} = \langle 450 \cos 30°, 450 \sin 30° \rangle$$
$$= \langle 225\sqrt{3}, 225 \rangle$$

تمثّل مركّبتا متّجه السرعة v السرعتين الشماليّة والشرقيّة للطائرة. أي إنّ الطائرة عندما تطير في مسار يشكّل زاوية قياسها $60°$ مع الشمال الجغرافيّ (أي بزاوية قياسها $30°$ مع المحور الأفقيّ)، وبسرعة 450 mph، فإنّها تطير شرقًا بسرعة $225\sqrt{3}$ mph وشمالًا بسرعة 225 mph

---

5. إذا كان مقدار المتّجه **v** يساوي 3، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه $-5\mathbf{v}$؟

Ⓐ -15

● 15

Ⓑ 8

Ⓓ 45

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقدار المتّجه الذي يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{v} = \langle 5, 3 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle$؟

● $\sqrt{145}$

Ⓒ 145

Ⓑ $\sqrt{140}$

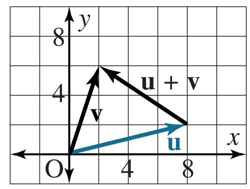
Ⓓ $\sqrt{17}$

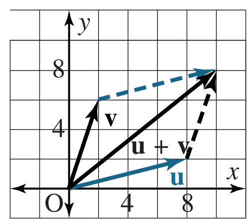
7. ليكن المتجهان $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, -4 \rangle$.
أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\frac{\mathbf{u} - 2\mathbf{v}}{3}$؟

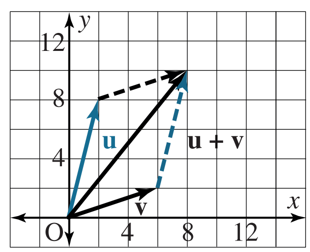
Ⓐ $\langle -3, 2 \rangle$ ● $\langle 3, 1 \rangle$

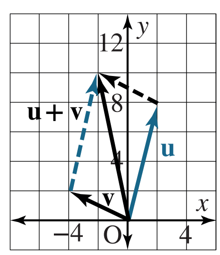
Ⓑ $\langle -9, 6 \rangle$ Ⓓ $\langle -1, 3 \rangle$

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 8, 2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$ بيانيًّا؟

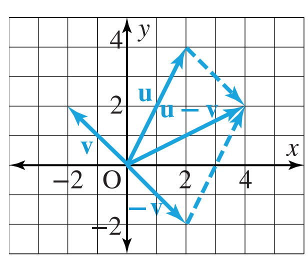
Ⓐ


●


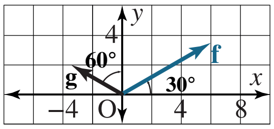
Ⓒ


Ⓓ


9. إذا كان المتّجه
$\mathbf{v} = \langle -2, 2 \rangle$
و $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle$،
أوجد $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ بيانيًّا.



10. يبحر منصور في النهر بقارب ذي محرّك سرعته 6 mph في اتّجاه بزاوية قياسها 30° من الشرق إلى الشمال (انظر المتّجه **f** في الشكل أدناه). أمّا سرعة التيّار النهريّ فتبلغ 3 mph، وهو يتّجه بزاوية قياسها 60° من الشمال إلى الغرب (انظر المتّجه **g** في الشكل أدناه). أوجد سرعة قارب منصور واتّجاهه عبر النهر. (اعتمد التقريب $3\sqrt{3} \approx 5.2$)



إذا كان f هو المتّجه الذي يمثّل سرعة المحرّك، فإنّ مقدار f هو 6 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي 30° إلى الأعلى، وبالتالي فإنّ مركّبتيه هما

$$x = 6 \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y = 6 \sin 30° = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\mathbf{f} = \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle$$

وإذا كان g هو المتّجه الذي يمثّل سرعة التيّار النهريّ، فإنّ مقدار g هو 3 mph وقياس زاوية اتّجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتّجاه شرق-غرب) يساوي 30° إلى الأعلى. لكنّ المتّجه يقع في الربع الثاني، وبالتالي، فإنّ مركّبته الأفقيّة سالبة ومركّبتيه هما

$$x = -3 \cos 30° = -3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

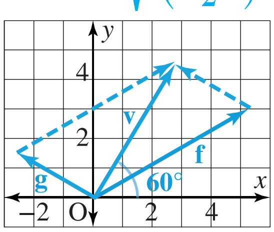
$$y = 3 \sin 30° = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{g} = \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

إذن، متّجه سرعة القارب هو

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} + \mathbf{g} = \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle + \left\langle -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2} \right\rangle$$

مقداره $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3} \approx 5.2$



إذا كانت θ هي زاوية اتّجاه v، فإنّ

$$|\mathbf{v}| \cos \theta = 3\sqrt{3} \cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

إذن، يسير القارب بسرعة 5.2 mph تقريبًا، وبزاوية قياسها 60° من الشرق إلى الشمال.

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج الضرب القياسيّ $\langle 3, -5\rangle \cdot \langle 2, 1\rangle$؟

Ⓐ -7

Ⓑ 0

● 1

Ⓓ 11

12. استعمل الضرب القياسيّ لتحديد الخيار الذي يمثّل مقدار المتّجه $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ممّا يلي.

● $\sqrt{\langle 1, -2\rangle \cdot \langle 1, -2\rangle}$

Ⓑ $\sqrt{(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})^2 + (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})^2}$

Ⓒ $\langle 1, -2\rangle \cdot \langle 1, -2\rangle$

Ⓓ $(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

13. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الشغل الناشئ عن قوّتين، الأولى مقدارها 15 N في الاتّجاه $\langle 3, 3\rangle$، والأخرى مقدارها 3 N في نفس الاتّجاه، عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 2)$؟

Ⓐ $\frac{6}{\sqrt{2}}\langle 3, 3\rangle$ N • m

● $\frac{90}{\sqrt{2}}$ N • m

Ⓒ $\frac{60}{\sqrt{2}}$ N • m

Ⓓ 108 N • m

14. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 5, 2\rangle$ بطريقة جبريّة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{\langle 3, -2\rangle \cdot \langle 5, 2\rangle}{|\langle 3, -2\rangle| \cdot |\langle 5, 2\rangle|} = \frac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}\right) \approx 55.49°$$

15. ليكن المتّجهان $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$
أيّ من الخيارات التالية هو الخيار الصحيح؟

Ⓐ للمتّجهين نفس المقدار.

Ⓑ المتّجهان ليسا متعامدين.

Ⓒ للمتّجهين نفس الاتّجاه.

● المتّجهان متعامدان.

16. إذا كان الشغل $\mathbf{w}$، الناشئ عن قوّة F مقدارها 10 N في الاتّجاه $\langle 3, 5\rangle$، عند تحريك جسم من النقطة $O(0, 0)$ إلى النقطة $A(2, 3)$ هو $5\sqrt{39}$ N • m، أوجد قياس الزاوية المكوّنة بين اتّجاه القوّة واتّجاه حركة الجسم باستعمال قاعدة الشغل.

$$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 3\rangle$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{13}$$

$$F = 10 \cdot \frac{\langle 3, 5\rangle}{|\langle 3, 5\rangle|} = \frac{10}{\sqrt{34}}\langle 3, 5\rangle$$

$$|F| = \left|\frac{30}{\sqrt{34}}, \frac{50}{\sqrt{34}}\right| = 10$$

$$w = |F| \cdot |\overrightarrow{OA}| \, . \cos\theta$$

$$5\sqrt{39} = 10 \cdot \sqrt{13} \, . \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{5\sqrt{39}}{10\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30°$$

17. إذا كان $A = (1, 2, 0)$ و $B = (4, 3, -3)$،
فأيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة
لِ $-4\overrightarrow{AB}$؟

Ⓐ $\langle 4, 12, 12\rangle$

Ⓑ $\langle 12, 4, -12\rangle$

Ⓒ $\langle -12, 4, -12\rangle$

● $\langle -12, -4, 12\rangle$

---

18. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المتجه الذي مقداره 10
واتّجاهه عكس اتّجاه المتجّه
$\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \sqrt{15}\,\mathbf{k}$؟

Ⓐ $\frac{6}{10}\,\mathbf{i} - \frac{7}{10}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{15}}{10}\mathbf{k}$

● $-6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \sqrt{15}\,\mathbf{k}$

Ⓒ $-60\mathbf{i} + 70\mathbf{j} - 10\sqrt{15}\,\mathbf{k}$

Ⓓ $-6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - \sqrt{15}\,\mathbf{k}$

---

19. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{(1)(1) + (2)(3) + (1)(-2)}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{21}}{42}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{21}}{42}\right) \approx 56.94°$$

20. أوجد قياسات زوايا الاتّجاه α و β و γ للمتّجه
$\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$، ثمّ تحقّق من أنّ
$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$-2 = \sqrt{14}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right) \approx 122.31°$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74.5°$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 36.7°$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$= \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2$$

$$= 1$$

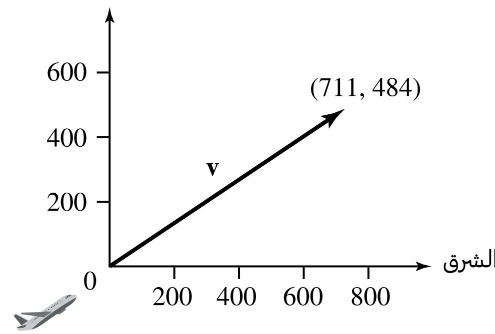
M06_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indd 5 04/03/2022 6:40:40 PM

الاسم ____________________

6 تقويم الأداء، النموذج A

يستعمل مراقبو الملاحة الجوّيّة في المطارات المتّجهات لتحديد مسارات الطائرات.

يبيّن الشكل أدناه السرعة **v**، km/h، لطائرة S تطير باتّجاه الشمال الشرقيّ.



الجزء A

1. أوجد سرعة الطائرة S.

لتكن v سرعة الطائرة S:

$$|v| = \sqrt{711^2 + 484^2} \approx 860 \text{ km/h}$$

إذن، سرعة الطائرة S تساوي 860 km/h تقريبًا.

2. أوجد قياس الزاوية التي يكوّنها مسار الطائرة S مع كلّ من الشرق الجغرافيّ والشمال الجغرافيّ.

لتكن α الزاوية التي يكوّنها مسار الطائرة S مع الشرق الجغرافيّ:

$$\cos \alpha = \frac{711}{860}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{711}{860} \approx 34°$$

إذن، قياس الزاوية التي يكوّنها مسار الطائرة مع الشرق الجغرافيّ هو 34° تقريبًا.

$90° - 34° = 56°$ إذن، قياس الزاوية التي يكوّنها مسار الطائرة مع الشمال الجغرافيّ هو 56° تقريبًا.

3. أوجد قيمة كلّ من السرعتين الشرقيّة والشماليّة للطائرة.

تمثّل مركّبتا متّجه السرعة v القيمة المطلقة لكلّ من السرعة الشرقيّة والسرعة الشماليّة للطائرة.

إذن، السرعة الشرقيّة للطائرة تساوي 711 km/h، والسرعة الشماليّة للطائرة تساوي 484 km/h

الجزء B

مرّت طائرة T بالقرب من الطائرة S بسرعة تساوي نصف سرعة الطائرة S ولكن في الاتّجاه المعاكس.

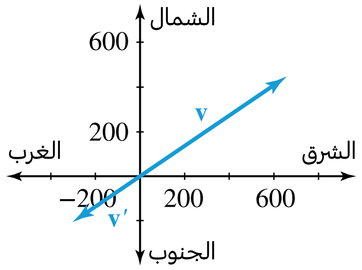
1. أوجد قيمة كلّ من السرعتين الغربيّة والجنوبيّة للطائرة T.

لتكن v′ سرعة الطائرة T:

$$v' = -0.5v = -0.5\langle 711, 484\rangle = \langle -0.5 \times 711, -0.5 \times 484\rangle$$
$$= \langle -355.5, -242\rangle$$

إذن، السرعة الغربيّة للطائرة T تساوي 355.5 km/h،

والسرعة الجنوبيّة للطائرة T تساوي 242 km/h



.2 هبّت رياح سرعتها 85 km/h بزاوية اتّجاه قياسها °214

.a أوجد مركّبتَي سرعة الرياح **w**.

$|\mathbf{w}| = \langle 85 \cos 214°, 85 \sin 214° \rangle \approx \langle -70.5, -47.5 \rangle$

.b أوجد مركّبتَي المتّجه الذي يمثّل مجموع متّجهَي سرعة الطائرة T.

$\langle -355.5, -242 \rangle + \langle -70.5, -47.5 \rangle = \langle -426, -289.5 \rangle$

.c أوجد مقدار سرعة الطائرة T. هل ازدادت سرعة الطائرة T بسبب الرياح أم تناقصت؟

مقدار سرعة الطائرة T قبل هبوب الرياح هو:

$0.5 \times 860 = 430$ km/h

مقدار سرعة الطائرة T بعد هبوب الرياح هو:

$\sqrt{(-426)^2 + (-289.5)^2} \approx 515.06$ km/h

إذن، ازدادت سرعة الطائرة T بعد هبوب الرياح.

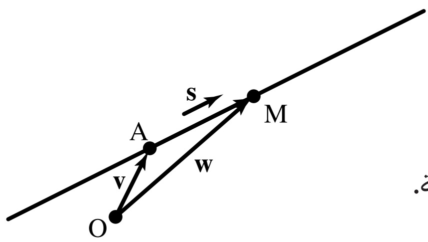
الاسم ______________________

6 تقويم الأداء، النموذج B

لاحظ مراقب الملاحة الجوّيّة في أحد المطارات وجود طائرتين على شاشة الرادار. الطائرة الأولى متّجهة نحو المطار للهبوط فيه وكانت على بعد 50 كيلومترًا شرقًا و 130 كيلومترًا شمالًا، وكان ارتفاعها في تلك اللحظة 7 500 متر فوق سطح المطار.

أمّا الطائرة الأخرى فكانت تطير على ارتفاع ثابت، مقداره 6 000 متر فوق سطح المطار، وظهرت على شاشة الرادار على بعد 72 كيلومترًا شرقًا و 102 كيلومتر جنوبًا.

ستقوم في ما يلي بمساعدة مراقب الملاحة الجوّيّة للتحقّق ممّا إذا كان مسارا الطائرتين آمنين أم يجب تعديلهما لتجنّب التقائهما.



.1 نكتب أولًا المعادلة المتّجهة للمستقيم في الفضاء. ليكن (D) المستقيم الذي يمرّ بالنقطة A وله متّجه اتجاه **s**، وهو المتّجه الذي يحدّد اتّجاه (D)، ولتكن M نقطة أخرى على المستقيم (D). (انظر الرسم المجاور).

.a متّجه الموضع للنقطة هو المتّجه الممتدّ من نقطة الأصل إلى هذه النقطة. أوجد متّجه الموضع لكلّ من النقطتين A و M.

بما أن $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$، إذن v هو متّجه الموضع للنقطة A

بما أن $\mathbf{w} = \overrightarrow{OM}$، إذن w هو متّجه الموضع للنقطة M

.b اكتب المتّجه $\overrightarrow{AM}$ بدلالة المتّجهين **v** و **w**

باستعمال طريقة الرأس للذيل، بغضّ النظر عن موقع النقطة M على المستقيم، فإنّ:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \overrightarrow{AM}$$

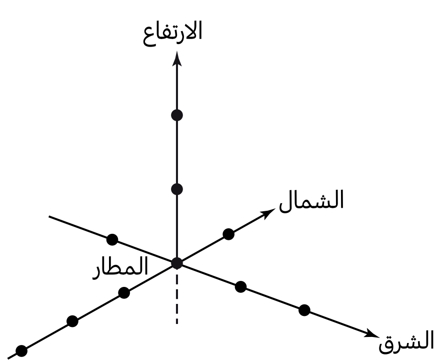
.c حدّد العلاقة بين المتّجهين $\overrightarrow{AM}$ و **s**، ثمّ اكتب المتّجه $\overrightarrow{AM}$ بدلالة **s** وكمّيّة قياسيّة t.

أينما وجدت النقطة M على المستقيم يكون للمتّجهين نفس الاتّجاه، أي إنّ $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{s}$

.d استنتج أنّ $\mathbf{w} = \mathbf{v} + t\mathbf{s}$ (هذه المعادلة تسمّى المعادلة المتّجهة للمستقيم (D) في الفضاء).

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \overrightarrow{AM}$$

أعوّض $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{s}$، إذن، $\mathbf{w} = \mathbf{v} + t\mathbf{s}$



.2 يحدّد مراقب الملاحة الجوّيّة إحداثيّات مواقع الطائرات بناءً على موقعها بالنسبة للمطار، حيث يمثّل الجزء الموجب من المحور x اتّجاه الشرق، ويمثّل الجزء الموجب من المحور y اتّجاه الشمال، أمّا ارتفاع الطائرة فيمثّله الجزء الموجب من المحور z.

.a حدّد إحداثيّات موقعَي الطائرتين لحظة ظهورهما على شاشة الرادار.

الطائرة الأولى: $P(50, 130, 7.5)$

الطائرة الأخرى: $Q(72, -102, 6)$

b. أوجد المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

المسافة تساوي $\sqrt{(50-72)^2+(130+102)^2+(7.5-6)^2} \approx 233$ **Km**

c. أوجد إحداثيات متّجه الموضع لنقطة على مسار الطائرة الأولى أثناء هبوطها وإحداثيات متّجه اتّجاه المستقيم الذي يمثّل هذا المسار، ثمّ أوجد المعادلة المتّجهة للمستقيم الذي يمثّل مسار الطائرة الأولى.

متّجه الموضع للطائرة الأولى هو $\overrightarrow{OP}\langle 50, 130, 7.5\rangle$ **والمطار الذي تتّجه الطائرة للهبوط فيه يقع عند نقطة الأصل O، إذن متّجه اتّجاه المستقيم الذي يمثّل مسارها هو** $\overrightarrow{PO}=\langle 0-50, 0-130, 0-7.5\rangle=\langle -50, -130, -7.5\rangle$**. بالتالي المعادلة المتّجهة للمستقيم هي** $\mathbf{w}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PO}$**، حيث** t **قيمة قياسيّة.**

$\mathbf{w}=\langle 50, 130, 7.5\rangle+t\langle -50\ , -130, -7.5\rangle$

d. أوجد المعادلة المتّجهة للمستقيم الذي يمثّل مسار الطائرة الثانية إذا كانت متّجهة للهبوط في مطار آخر يبعد 230 كيلومترًا إلى الشرق من المطار الأوّل.

متّجه الموضع للطائرة الثانية هو $\overrightarrow{OQ}\langle 72, -102, 6\rangle$**، ولتكن** $N(230, 0, 0)$ **النقطة التي تمثّل موقع المطار الآخر، أي إنّ متّجه اتّجاه المستقيم الذي يمثّل مسارها أثناء الهبوط في المطار الآخر هو** $\overrightarrow{QN}=\langle 230-72, 0-(-102), 0-6\rangle=\langle 158, 102, -6\rangle$**. إذن، المعادلة المتّجهة للمستقيم الثاني هي:**

$\mathbf{w}'=\overrightarrow{OQ}+k\overrightarrow{QN}$

$\mathbf{w}'=\langle 72, -102, 6\rangle+k\langle 158, 102, -6\rangle$

e. استعمل المعادلتين السابقتين لتحديد ما إذا كان هناك احتمال لالتقاء الطائرتين أم لا.

عند نقطة التقاء الطائرتين (إن وجدت) تتساوى معادلتا المستقيمين اللذين يمثّلان مساريهما، أي إنّ $\mathbf{w}'=\mathbf{w}$

$\langle 72, -102, 6\rangle+k\langle 158, 102, -6\rangle=\langle 50, 130, 7.5\rangle+t\langle -50, -130, -7.5\rangle$

أحصل ممّا سبق على نظام المعادلات التالي:

$$\begin{cases} 72+158k=50-50t \\ -102+102k=130-130t \\ 6-6k=7.5-7.5t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 158k+50t=-22 \\ 102k+130t=232 \\ -6k+7.5t=1.5 \end{cases}$$

أستعمل الحاسبة لحلّ المعادلة الأولى من النظام فأجد أنّ $t=\dfrac{1\,945}{772}$ **و** $k=\dfrac{-723}{772}$ **بتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة من النظام أجد أنّ المساواة لا تتحقّق، أي ليس لهذا النظام حلول. إذن، لا يمكن للمستقيمين أن يلتقيا، وبالتالي، مسارا الطائرتين آمنان.**

الاسم ____________________

الاختبار التراكميّ للوحدات 6-1

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{-x+4}{3x+2}$ تساوي:

Ⓐ $-\infty$
● $-\frac{1}{3}$
Ⓒ $\frac{1}{3}$
Ⓓ ∞

---

2. أوجد النهاية التالية: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{5x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5}\left[\frac{\sin 4x}{x} \times \frac{\sin 4x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{16}{5}\left[\frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{\sin 4x}{4x}\right]$$
$$= \frac{16}{5}[1 \times 1]$$
$$= \frac{16}{5}$$

---

3. حدّد سبب عدم اتّصال الدالّة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & , x<6 \\ -4 & , x=6 \\ 3x-20 & , x>6 \end{cases}$$

Ⓐ الدالّة غير معرّفة عند $x = 6$
Ⓑ نهاية الدالّة غير موجودة عند $x = 6$
● $\lim_{x\to 6} f(x)$ لا تساوي $f(6)$
Ⓓ الدالّة متعدّدة التعريف وتتغيّر صيغتها عند $x = 6$

---

4. أوجد مشتقّة الدالّة

$$f(x) = (x^2+4)(2x^2+1)^2$$

$$f'(x) = (2x)(2x^2+1)^2$$
$$+ 2(4x)(2x^2+1)(x^2+4)$$
$$= 2x(2x^2+1)(6x^2+17)$$

---

5. مشتقّة الدالّة $f(x) = ln(1-4x)$ هي:

Ⓐ $\frac{1}{1-4x}$
Ⓑ $\frac{1-4x}{-4}$
● $\frac{-4}{1-4x}$
Ⓓ $\frac{8}{1-4x}$

---

6. أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(3, 0)$ إذا كان

$$x^2 + y^2 + 5xy - 3x + y = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 5y + 5x\frac{dy}{dx} - 3 + \frac{dy}{dx} = 0$$

أعوّض $x = 3$ و $y = 0$

$$6 + 0 + 0 + 15\frac{dy}{dx} - 3 + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$16\frac{dy}{dx} = -3$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{16}$$

---

7. المشتقّة الرابعة للدالّة $y = ax^3 + x^2 + 4x + 1$، حيث a هو عدد حقيقيّ، هي:

Ⓐ $y^{(4)} = 6a$
Ⓑ $y^{(4)} = 3a$
Ⓒ $y^{(4)} = 6$
● $y^{(4)} = 0$

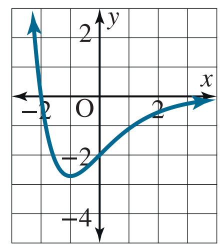
---

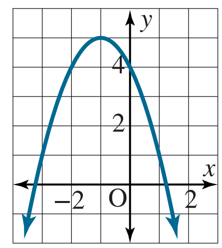
8. للدالّة $f(x) = xe^x + 3$ قيمة صغرى مطلقة تساوي:

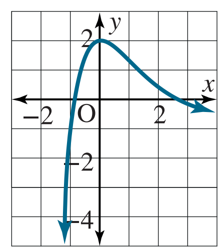
Ⓐ $f(1)$
● $f(-1)$
Ⓒ $f(0)$
Ⓓ $f\left(3-\frac{1}{e}\right)$

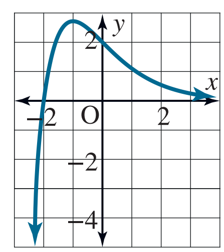
9. أيّ من التمثيلات البيانيّة أدناه يمثّل الدالّة f الممثَّلة في الجدول التالي:

الفترة	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, \infty[$
تزايد وتناقص الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متناقصة
اتّجاه تقعّر الدالّة f	إلى الأسفل	إلى الأسفل	إلى الأعلى

Ⓐ 

Ⓒ 

Ⓑ 

● 

10. إذا كان حجم مكعّب يزداد بمعدّل $192\ \text{in}^3/\text{min}$ وطول كلّ ضلع من أضلاعه يزداد بمعدّل $4\ \text{in/min}$، فإنّ طول ضلع هذا المكعّب يساوي:

● 4
Ⓒ 9
Ⓑ $\sqrt[3]{192}$
Ⓓ 16

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (9x^2 + 4x - 1)\ dx$؟

Ⓐ $9x^3 + 4x^2 - x + C$
Ⓑ $x^3 + x^2 - x + C$
● $3x^3 + 2x^2 - x + C$
Ⓓ $3x^3 + x^2 - 2x + C$

12. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int e^{-2x}\ dx$؟

● $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$
Ⓒ $\frac{1}{2}e^{-2x} + C$
Ⓑ $-e^{-2x} + C$
Ⓓ $\frac{1}{2e^{-2x}} + C$

13. أوجد التكامل غير المحدود

$$\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}\ dx$$

ليكن $u = x^2 + 6x$،

$$du = (2x+6)dx = 2(x+3)\ dx$$

$$\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{(x^2+6x)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-2}\ du$$

$$= -\frac{1}{2}u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{2u} + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+6x)} + C$$

14. استعمل طريقة التكامل بالجدول لإيجاد التكامل غير المحدود $\int x^2 e^{-2x}\ dx$.

D		I
x^2	$+$	e^{-2x}
$2x$	$-$	$\frac{e^{-2x}}{-2}$
2	$+$	$\frac{e^{-2x}}{4}$
0		$\frac{e^{-2x}}{-8}$

$$\int x^2 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)\ e^{-2x} + C$$

15. اكتب الدالّة $f(x) = \frac{5x-8}{x^2-3x+2}$ في صيغة جمع كسور جزئيّة ذات مقامات خطّيّة، ثمّ أوجد التكامل غير المحدود $\int f(x)\ dx$.

بما أنّ $\frac{5x-8}{x^2-3x+2} = \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}$،

وليكن $\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

إذن،

$$\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$5x-8 = A(x-2) + B(x-1)$$

ليكن $x = 2$، $B = 2$

ليكن $x = 1$، $A = 3$

إذن، $f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

$$\int f(x)\ dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right) dx$$
$$= 3\ ln|x-1| + 2\ ln|x-2| + C$$

---

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل المحدود $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\ dx$

Ⓐ -1 Ⓒ 2

● 1 Ⓓ 3

---

17. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 2x$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 3$؟

Ⓐ $\frac{2}{3}$ Ⓒ $\frac{4}{3}$

Ⓑ 1 ● 2

---

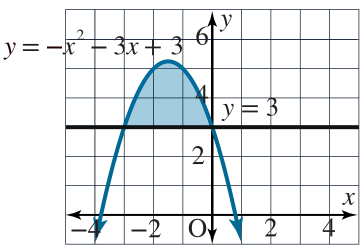
18. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ومنحنى الدالّة $g(x) = x + 2$؟

Ⓐ $-\frac{32}{3}$ Ⓒ 11

● $\frac{32}{3}$ Ⓓ 32

---

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة المظلّلة في الرسم أدناه؟



Ⓐ $-\frac{9}{2}$ Ⓒ 9

● $\frac{9}{2}$ Ⓓ $\frac{27}{4}$

---

20. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الحجم الدورانيّ الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = \cos x\ \sqrt{\sin x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ حول المحور x؟

● $\frac{\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{\pi}{6}$

Ⓑ $\frac{\pi}{9}$ Ⓓ π

---

21. معدّل استهلاك الوقود في إحدى الدول ثابت تقريبًا منذ مطلع العام 2000 ويمكن تقديره باستعمال الدالّة $C'(t) = 16.12t\ e^{\frac{t^2}{3}}$ (بملايين البراميل)، حيث t عدد السنوات ابتداءً من العام 2000 إذن، كمّيّة الاستهلاك الكلّيّ في هذه الدولة من الوقود من نهاية العام 2001 إلى نهاية العام 2002، مقرَّبًا إلى أقرب مليون برميل، يساوي:

Ⓐ 29 ● 58

Ⓑ 48 Ⓓ 92

.22 أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة $\frac{dy}{dx} = 6xy$؟

- (A) $y = Ce^{3x^2}$
- (B) $y = e^{3x^2} + C$
- (C) $y = Ce^{-3x^2}$
- (D) $x = Ce^{3y^2}$

.23 إذا كانت المعادلة التفاضليّة لنموّ قطيع من الأغنام هي $\frac{dy}{dt} = ky$، حيث t الزمن بالسنوات، أوجد قيمة ثابت النموّ الأسّيّ k إذا ازداد عدد الأغنام في القطيع من 500 رأس في البداية إلى 2 500 رأس تقريبًا بعد خمس سنوات.

- (A) $\frac{-ln\, 5}{5}$
- (B) $ln\, 5$
- (C) $\frac{5}{ln\, 5}$
- (D) $\frac{ln\, 5}{5}$

.24 أيّ من المتّجهات التالية هو متّجه الوحدة في نفس اتّجاه المتّجه $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$؟

- (A) $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right\rangle$
- (B) $\left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$
- (C) $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$
- (D) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}} \right\rangle$

.25 قياس زاوية اتّجاه المتّجه $\mathbf{u} = \langle 1, -2\rangle$، مقرّبًا إلى أقرب درجة، يساوي:

- (A) $63°$
- (B) $-63°$
- (C) $117°$
- (D) $243°$

.26 إذا كان $\mathbf{u} = \langle -1, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, -2\rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل مركّبتَي المتّجه $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$؟

- (A) $\langle 7, -9\rangle$
- (B) $\langle 8, -2\rangle$
- (C) $\langle -8, 0\rangle$
- (D) $\langle -1, -1\rangle$

.27 تُطبّق قوّة مقدارها 60 lb على جسم بزاوية قياسها $45°$، وتطبّق على الجسم في الوقت نفسه قوّة أخرى مقدارها 55 lb بزاوية قياسها $-30°$ أوجد مقدار القوّة الناتجة.

- (A) 8 333.41
- (B) 88.82
- (C) 10.25
- (D) 91.29

.28 أيّ من القيم التالية تمثّل ناتج الضرب القياسيّ للمتّجهين $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$؟

- (A) 3
- (B) 9
- (C) 10
- (D) 12

.29 إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, -1\rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قياس الزاوية الواقعة بين المتّجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$؟

- (A) $0°$
- (B) $45°$
- (C) $90°$
- (D) $135°$

.30 إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, 3, 5\rangle$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة m التي تجعل المتّجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين؟

- (A) -16
- (B) 10
- (C) -8
- (D) 8

الاسم ______________________________

7 اختبار بداية الوحدة

1. اشترت أسماء صندوقًا مكعّب الشكل، حجمه 729 cm^3 لتضع فيه أغراضها الخاصّة، وتضعه في دُرج الخزانة. إذا كان عمق الدرج 10 cm، هل سيتّسع للصندوق؟

حجم الصندوق 729 cm^3، إذن، طول كلّ ضلع من أضلاعه $\sqrt[3]{729} = 9\text{ cm}$، وهذا أصغر من 10 cm، إذن، يمكن وضع الصندوق في الدرج.

---

2. إذا كانت مساحة لوحة إعلانات 16 m^2، أيّ من الخيارات التالية يمثّل طول أحد أضلاع هذه اللوحة؟

● 4

Ⓑ $\sqrt[3]{16}$

Ⓒ ± 4

Ⓓ لا يمكن تحديده

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $x^3 - 51 = 0$؟

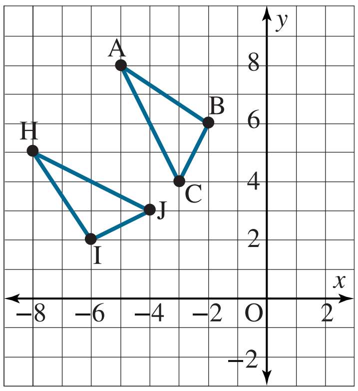
Ⓐ $x = \sqrt{51}$

● $x = \sqrt[3]{51}$

Ⓒ $x = -\sqrt[3]{51}$

Ⓓ $x = 4$

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الانعكاس الذي يحوّل المثلّث ABC إلى المثلّث HIJ؟



Ⓐ انعكاس حول نقطة الأصل

Ⓑ انعكاس حول المستقيم $y = x$

● انعكاس حول المستقيم $y = -x$

Ⓓ انعكاس حول المستقيم $y = -2x$

---

5. أوجد طول $\overline{AB}$ في التمرين السابق.

$$\mathbf{A\,(-5, 8),\ B\,(-2, 6)}$$

$$\mathbf{AB = \sqrt{(-2+5)^2 + (6-8)^2}}$$

$$\mathbf{= \sqrt{13}}$$

$$\mathbf{\approx 3.6}$$

---

6. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المسافة بين النقطة C ونقطة الأصل في الشكل الوارد في التمرين 4؟

Ⓐ $\sqrt{7}$

Ⓑ ± 5

● 5

Ⓓ 25

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $4x^2 - 100 = 0$؟

● ± 5

Ⓑ 5

Ⓒ ± 10

Ⓓ 10

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $2x^2 - 10x + 5 = 0$؟

Ⓐ $5 \pm \sqrt{15}$

Ⓑ $\frac{-5 \pm \sqrt{15}}{2}$

Ⓒ $\frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{4}$

● $\frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$

.9 أوجد حلّ المعادلة $-9x^2 + 30x = 25$ باستعمال القانون العامّ للمعادلة التربيعيّة، ثمّ تحقّق من إجابتك بتحويل المقدار إلى مربّع كامل.

$$-9x^2 + 30x - 25 = 0$$
$$9x^2 - 30x + 25 = 0$$
$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} = \frac{5}{3}$$
$$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$$
$$(3x - 5)^2 = 0$$
$$x = \frac{5}{3}$$

.10 اكتب المقدار $\sqrt{8x} \times \sqrt[3]{32x^6}$ في صورة جذر تربيعيّ واحد.

$$\sqrt{8x} \times \sqrt[3]{32x^6} = \left(2^3x\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^5x^6\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(2^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{5}{3}}\right)\left(x^{\frac{6}{3}}\right)$$
$$= 2^{\frac{19}{6}}x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^{\frac{19}{3}}x^5}$$

.11 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $5x^5 - 160 = 0$؟

Ⓐ ± 2

● 2

Ⓒ $\pm\sqrt[5]{160}$

Ⓓ $\sqrt[5]{160}$

.12 أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج طرح المتّجه $\mathbf{u} = \langle 1, 4\rangle$ من المتّجه $\mathbf{v} = \langle 2, -4\rangle$؟

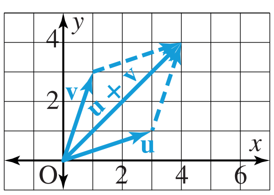
Ⓐ $\langle 3, 0\rangle$

Ⓑ $\langle 1, -8\rangle$

Ⓒ $\langle -1, 0\rangle$

● $\langle -1, 8\rangle$

.13 ارسم المتّجه الذي يمثّل مجموع المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$.



.14 أوجد مفكوك ذات الحدّين $(-x + 3)^3$ مستعملًا مثلّث باسكال لإيجاد معاملات ذات الحدّين.

المستوى الثالث في مثلّث باسكال هو 1 3 3 1 وهو معاملات $(a + b)^3$. إذن،

$$(-x + 3)^3 = (-x)^3 + 3(-x)^2 \times 3 + 3(-x)(3)^2 + 3^3$$
$$= -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$$

15. أيّ من الخيارات التالية يمثّل معامل x^4 في توزيع $(x-3)^6$؟

Ⓐ $-1\,458$

Ⓑ -540

● 135

Ⓓ $1\,215$

---

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة كلّ من الجيب وجيب التمام للزاوية $\frac{5\pi}{3}$؟

● $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Ⓑ $\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Ⓒ $\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓓ $\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

17. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قياس الزاوية المرجعيّة للزاوية $330°$ وقيمة جيبها؟

Ⓐ $330°$ و $\sin 330° = -\frac{1}{2}$

Ⓑ $-30°$ و $\sin 330° = -\frac{1}{2}$

● $30°$ و $\sin 330° = -\frac{1}{2}$

Ⓓ $-330°$ و $\sin 330° = -\frac{1}{2}$

---

18. إذا كان قياس الزاوية المرجعيّة لزاوية هو $45°$، وكان خطّ الانتهاء لهذه الزاوية يقع في الربع الثاني (II)، أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمتين السالبة والموجبة لقياس هذه الزاوية؟

Ⓐ $-135°$ و $225°$

Ⓑ $315°$ و $-45°$

● $135°$ و $-225°$

Ⓓ $45°$ وليست لها قيمة سالبة

---

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة المثلّثيّة $\tan^2\theta - 2\tan\theta = -1$، حيث $0 \le \theta \le \pi$؟

Ⓐ $\theta=\frac{\pi}{2}$

Ⓑ $\theta=-\frac{\pi}{4}$ أو $\theta=\frac{\pi}{4}$

Ⓒ $\theta=-\frac{\pi}{2}$ أو $\theta=\frac{\pi}{2}$

● $\theta=\frac{\pi}{4}$

---

20. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة المثلّثيّة $-2\cos^2\theta - \sin^2\theta - \frac{1}{4} = -2$ حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

Ⓐ $\theta=\frac{\pi}{6}$

● $\theta=-\frac{\pi}{6}$ أو $\theta=\frac{\pi}{6}$

Ⓒ $\theta=-\frac{\pi}{3}$ أو $\theta=\frac{\pi}{3}$

Ⓓ $\theta=\frac{\pi}{3}$

الاسم ________________

7-1 اختبار الدرس

الأعداد المركّبة والعمليّات عليها

1. أوجد ناتج $(3 - 2i) - (3 + 3i)$.

$(3 - 2i) - (3 + 3i)$

$= (3 - 3) + (-2 - 3)i$

$= -5i$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج $(1 - 3i) \cdot (3 - 2i)$؟

Ⓐ $-3 - 11i$

Ⓑ $3 - 11i$

Ⓒ $-3 - 7i$

Ⓓ $3 - 7i$

3. إذا كان $z = 1 + \sqrt{2}i$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة z^2؟

Ⓐ $-1 + 2\sqrt{2}i$

Ⓑ $3 + 2\sqrt{2}i$

Ⓒ 3

Ⓓ $-3 + 4i$

4. اكتب العدد المركّب $\frac{2 - i}{2 + 3i}$ في الصيغة القياسيّة.

$$\frac{2 - i}{2 + 3i} = \frac{2 - i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i}$$

$$= \frac{4 - 6i - 2i + 3i^2}{2^2 + 3^2}$$

$$= \frac{1 - 8i}{13}$$

$$= \frac{1}{13} - \frac{8}{13}i$$

5. أوجد حلّ المعادلة $2x^2 + 18 = 0$

$2x^2 + 18 = 0$

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 - (3i)^2 = 0$

$(x - 3i)(x + 3i) = 0$

$x = 3i$ أو $x = -3i$

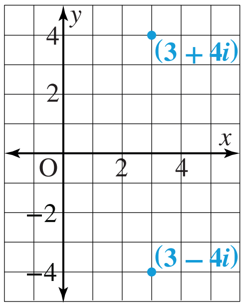
M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 1 04/03/2022 6:50:11 PM

الاسم ______________________________

7-2 اختبار الدرس

المستوى المركّب

1. مثّل العددين $(3 + 4i)$ و $(3 - 4i)$ في المستوى المركّب، وحدّد العلاقة بينهما.



العدد $3 + 4i$ تمثّله النقطة $(3, 4)$، والعدد $3 - 4i$ تمثّله النقطة $(3, -4)$.
كلّ من هذين العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان اللتان تمثّلانهما متناظرتان عبر المحور R الحقيقيّ.

---

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $(5 - 3i)$؟

Ⓐ 2

Ⓑ 4

● $\sqrt{34}$

Ⓓ 34

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المسافة بين النقطة التي تمثّل العدد $(6 + 4i)$ والنقطة التي تمثّل العدد $(2 + i)$؟

Ⓐ $4 + 3i$

● 5

Ⓒ $\sqrt{89}$

Ⓓ 25

---

4. أوجد المقياس $|(1 - 3i)(4 + 8i)|$ بطريقتين.

الطريقة 1:

$$|(1 - 3i)(4 + 8i)|$$
$$= |(1 - 3i)|\,|(4 + 8i)|$$
$$= \sqrt{1 + 9} \times \sqrt{16 + 64}$$
$$= 20\sqrt{2}$$

الطريقة 2:

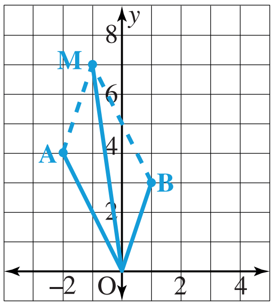
$$|(1 - 3i)(4 + 8i)|$$
$$= |28 - 4i|$$
$$= \sqrt{784 + 16}$$
$$= 20\sqrt{2}$$

---

5. أوجد المجموع $(-2 + 4i) + (1 + 3i)$ بيانيًّا باستعمال المستوى المركّب.

أعيّن النقطة $A(-2, 4)$ التي تمثّل العدد $(-2 + 4i)$ والنقطة $B(1, 3)$ التي تمثّل العدد $(1 + 3i)$، ثمّ أرسم القطعتين المستقيمتين OA و OB.

أرسم النقطة M بحيث يشكّل الرباعيّ OAMB متوازي أضلاع. النقطة M تمثّل ناتج $(-2 + 4i) + (1 + 3i)$. إذن، $M(-1, 7)$



الاسم ______________________________________

7-3 اختبار الدرس

الصورة القطبيّة للأعداد المركّبة

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القطبيّة للعدد المركّب $1 + i$؟

Ⓐ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

Ⓑ $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

Ⓒ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4}\right)$

Ⓓ $\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4}$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد المركّب $4\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)$؟

Ⓐ $2\sqrt{3} - 2i$

Ⓑ $2\sqrt{3} + 2i$

Ⓒ $-2\sqrt{3} - 2i$

Ⓓ $2 - 2\sqrt{3}i$

3. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ و $z_2 = 2\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right)$.

$$z_1z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\times 2\left(\cos \left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 6\left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 6\left(\cos \left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 3\sqrt{3} - 3i$$

4. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ و $z_2 = 1 - i$ باستعمال الصورة القطبيّة.

$$|z_1| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + 3} = 2$$
$$\tan \theta_1 = -\sqrt{3}$$
$$\tan^{-1} |-\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$$

بما أنّ العدد $1 - \sqrt{3}i$ يقع في الربع الرابع، فإنّ

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

إذن، $z_1 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

$$|z_2| = |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$
$$\tan \theta_2 = -1$$
$$\tan^{-1} |-1| = \frac{\pi}{4}$$

بما أنّ العدد $1 - i$ يقع في الربع الرابع، فإنّ

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

إذن، $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

$$z_1z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$
$$\times \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos \left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i \sin \left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)$$

إذن، في الصورة القياسيّة $z_1z_2 = -0.73 - 2.73i$

5. أوجد ناتج $\frac{z_1}{z_2}$ في الصورة القياسيّة.

$z_1 = 6(\cos 60° + i \sin 60°)$

و $z_2 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6(\cos 60° + i \sin 60°)}{3(\cos 30° + i \sin 30°)}$$
$$= 2[\cos (60° - 30°) + i \sin (60° - 30°)]$$
$$= 2[\cos 30° + i \sin 30°]$$
$$= \sqrt{3} + i$$

الاسم ________________

7-4 اختبار الدرس

قوى وجذور الأعداد المركّبة

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $(1+i)^4$؟

Ⓐ $(\cos \pi + i \sin \pi)$

● $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Ⓒ $4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

Ⓓ $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

2. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة z^6 إذا كان $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$؟

Ⓐ 2

Ⓑ 2^5

● 2^6

Ⓓ $2^6 + 2^6 i$

3. أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد المركّب $z = 27\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

الجذور التكعيبيّة للعدد z هي:

$$\sqrt[3]{27}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right)\right];$$

حيث $k = 0, 1, 2$.

بما أنّ $\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3} = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ فإنّ الجذور التكعيبيّة للعدد المركّب z هي:

$$z_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right]$$

$$z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right]$$

$$z_3 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right]$$

4. أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد i.

أكتب العدد i في صورته القطبيّة أوّلًا:

$$z = 0 + i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

الجذور التكعيبيّة للعدد z هي:

$$\sqrt[3]{1} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

بما أنّ $\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ فإنّ الجذور التكعيبيّة للعدد $z = i$ هي:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right);$$

حيث $k = 0, 1, 2$.

إذن، الجذور التكعيبيّة الثلاثة هي:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -i$$

5. أوجد الجذور الخمسة من الرتبة 5 للوحدة. استعمل الحاسبة لتقرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0$$

إذن، الجذور الخمسة من الرتبة 5 للوحدة هي:

$$\cos\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right);$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

إذن،

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0\, i$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = 0.30 + 0.95\, i$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} = -0.80 + 0.59\, i$$

$$z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} = -0.80 - 0.59\, i$$

$$z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} = 0.31 - 0.95\, i$$

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 2 04/03/2022 6:50:16 PM

الاسم ______________________________

7 تقويم الوحدة، النموذج A

1. أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج $(-2i)\cdot(1-2i)$؟

Ⓐ $4-2i$ Ⓒ $-4+2i$

● $-4-2i$ Ⓓ $2-4i$

---

2. إذا كان $z=\sqrt{3}+3i$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة z^2؟

Ⓐ $12-6\sqrt{3}i$ Ⓒ 12

Ⓑ $-6-18i$ ● $-6+6\sqrt{3}i$

---

3. اكتب العدد المركّب $\frac{3+2i}{4-i}$ في الصورة القياسيّة.

$$\frac{3+2i}{4-i}=\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i}$$
$$=\frac{12+3i+8i+2i^2}{16+1}$$
$$=\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

---

4. أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $3x^2+27=0$؟

● $x=3i$ أو $x=-3i$

Ⓑ $x=-3i$

Ⓒ $x=3i$

Ⓓ ليس لها حلّ

---

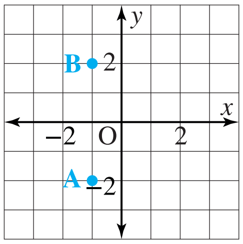
5. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $(2+i)$؟

Ⓐ 1 ● $\sqrt{5}$

Ⓑ $\sqrt{3}$ Ⓓ 5

---

6. مثّل العددين $-1-2i$ و $-1+2i$ في المستوى المركّب، وحدّد العلاقة بينهما.



العدد $-1-2i$ تمثّله النقطة $A(-1,-2)$، والعدد $-1+2i$ تمثّله النقطة $B(-1,2)$، كلّ من هذين العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور R الحقيقيّ.

---

7. أيّ من الخيارات التالية يمثّل المسافة بين النقطة التي تمثّل العدد $(-1-2i)$ والنقطة التي تمثّل العدد $(-1+2i)$؟

Ⓐ 0 ● 4

Ⓑ 2 Ⓓ $2\sqrt{5}$

---

8. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $|(2+3i)(3-2i)|$؟

Ⓐ $\sqrt{12}$ Ⓒ 12

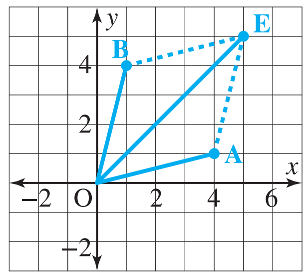
Ⓑ $\sqrt{13}$ ● 13

9. أوجد ناتج $(4+i)+(1+4i)$ بيانيًّا باستعمال المستوى المركّب.

أعيّن النقطة $A(4, 1)$ التي تمثّل العدد $(4+i)$، والنقطة $B(1, 4)$ التي تمثّل العدد $(1+4i)$، في المستوى المركّب، ثمّ أرسم الخطّين (OA) و (OB).

أرسم النقطة E بحيث يشكّل الرباعيّ OAEB متوازي أضلاع. النقطة E هي التي تمثّل ناتج $(4+i)+(1+4i)$،

إذن، $E(5, 5)$



10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القطبيّة للعدد المركّب $-4+4\sqrt{3}\,i$؟

● $8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Ⓑ $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

Ⓒ $8\left(\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

Ⓓ $\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}$

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد المركّب $5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$؟

● $5i$

Ⓑ $-5i$

Ⓒ $5+5i$

Ⓓ $5-5i$

12. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين

$$z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

و $$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{z_1z_2} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=\sqrt{6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right.\\
&\left.+\,i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&=\sqrt{6}(\cos\pi+i\sin\pi)\\
&=-\sqrt{6}+0i
\end{aligned}$$

13. إذا كان $z_3=z_1z_2$، وكان

$$z_1=\sqrt{6}\,(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)$$

و $$z_3=\sqrt{12}\,(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد z_2؟

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i$

● $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}i$

14. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة العدد المركّب $(1+i)^6$؟

Ⓐ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

Ⓑ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Ⓒ $8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

● $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 2 04/03/2022 6:50:19 PM

.15 أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين $z_1 = 4 + 4i$ و $z_2 = 2$ بكتابتهما في الصورة القطبيّة أوّلًا.

$|z_1| = |4 + 4i| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

$\tan \theta_1 = 1$

$\theta_1 = \tan^{-1} |1|$

$= \frac{\pi}{4}$

بما أنّ النقطة التي تمثّل العدد $4 + 4i$ تقع في الربع الأوّل، فإنّ $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

إذن، $z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$|z_2| = |2| = 2$

$\tan \theta_2 = 0$

$\theta_2 = \tan^{-1} |0|$

$= 0$

بما أنّ النقطة التي تمثّل العدد 2 تقع في الربع الأوّل، فإنّ $\theta = \theta_2 = 0$

إذن، $z_2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$

$z_1 z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\times\, 2(\cos 0 + i \sin 0)$

$= 8\sqrt{2}\left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right.$

$\left.+\, i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right]$

$= 8\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

إذن، في الصورة القياسيّة $z_1 z_2 = 8 + 8i$.

.16 أيّ من العبارات التالية ليست صحيحة؟

Ⓐ للعدد -1 جذر تكعيبيّ واحد ضمن مجموعة الأعداد الحقيقيّة، وثلاثة جذور تكعيبيّة ضمن مجموعة الأعداد المركّبة

● $\sqrt{i}$ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد 1

Ⓒ عدد الجذور الثمانية للوحدة من الرتبة 8 هو 8

Ⓓ توجد بين الجذور الخمسة من الرتبة 5 للوحدة أعداد مركّبة مع مرافقاتها

.17 أيّ من الخيارات التالية يمثّل z^3 في الصورة القياسيّة إذا كان $z = \sqrt[3]{27}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$؟

Ⓐ $3i$ ● $27i$

Ⓑ 3 Ⓓ 27

.18 أوجد الجذور من الدرجة الرابعة للعدد المركّب $z = 81(\cos 120° + i \sin 120°)$

الزاوية التي قياسها بالدرجات $120°$، قياسها بالراديان $\frac{2\pi}{3}$، إذن، الجذور من الدرجة الرابعة للعدد z هي:

$$\sqrt[4]{81}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3$.

وبما أنّ $\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

فإنّ هذه الجذور هي:

$$z_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_3 = 3\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_4 = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

19. أوجد الصورة القطبيّة للعدد $z = i^6$، ثمّ أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد z.

أكتب أوّلًا العدد i في صورته القطبيّة:

$$i = 0 + i = 1 \times \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

إذن،

$$z = i^6 = \cos 3\pi + i \sin 3\pi$$

الجذور التكعيبية للعدد z هي:

$$\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

وبما أنّ $\frac{3\pi + 2k\pi}{3} = \pi + \frac{2k\pi}{3}$

فإنّ الجذور التكعيبيّة للعدد $z = i^6$ هي:

$$\cos\left(\pi + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2$.

إذن، الجذور التكعيبيّة الثلاثة هي:

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

20. أوجد الجذور من الرتبة 7 للوحدة، ثمّ مثّلها بيانيًّا. ماذا يمكنك أن تستنتج من التمثيل البيانيّ؟ استعمل الحاسبة لتقريب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0$$

إذن، الجذور من الرتبة 7 للوحدة هي:

$$\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{7}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

إذن،

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0i$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = 0.62 + 0.78i$$

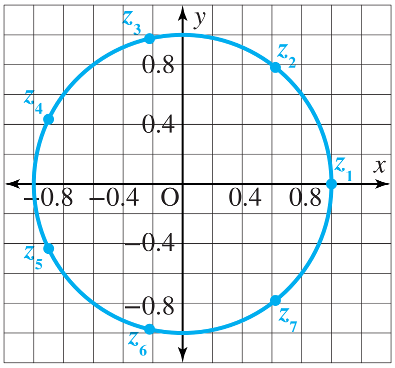
$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7} = -0.22 + 0.97i$$

$$z_4 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} = -0.9 + 0.43i$$

$$z_5 = \cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7} = -0.9 - 0.43i$$

$$z_6 = \cos \frac{10\pi}{7} + i \sin \frac{10\pi}{7} = -0.22 - 0.97i$$

$$z_7 = \cos \frac{12\pi}{7} + i \sin \frac{12\pi}{7} = 0.62 - 0.78i$$



يمكنني أن ألاحظ من التمثيل البيانيّ أنّ العدد z_2 هو العدد المرافق للعدد z_7 والعدد z_3 هو العدد المرافق للعدد z_6 والعدد z_4 هو العدد المرافق للعدد z_5

الاسم ______________________________

7 تقويم الوحدة، النموذج B

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج $(2 - i) \cdot (-3i)$؟

Ⓐ $3 - 6i$ Ⓒ $-3 + 6i$

● $-3 - 6i$ Ⓓ $-6 - 3i$

.2 إذا كان $z = \sqrt{3} + 2i$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة z^2؟

Ⓐ $7 + 4\sqrt{3}i$ ● $-1 + 4\sqrt{3}i$

Ⓑ $-7 - 4\sqrt{3}i$ Ⓓ 7

.3 أكتب العدد المركب $\frac{4 + i}{3 - i}$ في الصيغة القياسية.

$$\frac{4+i}{3-i} = \frac{4+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$
$$= \frac{12 + 4i + 3i + i^2}{9 + 1}$$
$$= \frac{11}{10} + \frac{7i}{10}$$

.4 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $3x^2 + 48 = 0$؟

● $x = 4i$ أو $x = -4i$

Ⓑ $x = -4i$

Ⓒ $x = 4i$

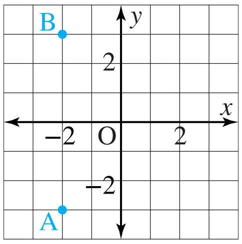
Ⓓ لا يمكن حلها

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركب $(1 + 2i)$؟

Ⓐ 1 ● $\sqrt{5}$

Ⓑ $\sqrt{3}$ Ⓓ 5

.6 مثّل العددين $-2 - 3i$ و $-2 + 3i$ في المستوى المركب، وحدّد العلاقة بينهما.



العدد $-2 - 3i$ تمثّله النقطة $A(-2, -3)$، والعدد $-2 + 3i$ تمثّله النقطة $B(-2, 3)$، كلّ من العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور R الحقيقي.

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل المسافة بين النقطة التي تمثل العدد $(-2 - 3i)$ والنقطة التي تمثّل العدد $(-2 + 3i)$؟

Ⓐ 0 Ⓒ $2\sqrt{13}$

Ⓑ 4 ● 6

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $|(3 - i)(1 + 3i)|$؟

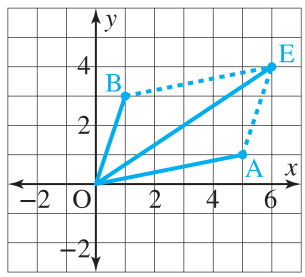
Ⓐ $\sqrt{10}$ Ⓒ 8

Ⓑ $\sqrt{20}$ ● 10

9. أوجد ناتج $(5 + i) + (1 + 3i)$ بيانيًّا باستعمال المستوى المركّب.

أعيّن النقطة $A(5, 1)$ التي تمثل العدد $(5 + i)$، والنقطة $B(1, 3)$ التي تمثل العدد $(1 + 3i)$، في المستوى المركّب،ثم أرسم الخطين (OA) و (OB).

أرسم النقطة E بحيث يشكل الرباعيّ OAEB متوازي أضلاع. النقطة E هي التي تمثّل ناتج $(5 + i) + (1 + 3i)$،
إذن، $E(6, 4)$



10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القطبيّة للعدد المركب $-2\sqrt{3} + 2i$؟

(A) $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

(B) $4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

(C) $4\left(\sin \frac{5\pi}{6} + i \cos \frac{5\pi}{6}\right)$

(D) $\sin \frac{5\pi}{6} + i \cos \frac{5\pi}{6}$

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد المركب $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$؟

(A) $-3i$ (C) $3 + 3i$

(B) $3i$ (D) $3 - 3i$

12. أوجد الصورة القياسيّة لضرب العددين المركّبين
$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$
و $$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z_1 z_2} &= \mathbf{\sqrt{5}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)} \\ &\quad \mathbf{\times \sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)} \\ &= \mathbf{\sqrt{15}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)\right.} \\ &\quad \mathbf{\left. + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]} \\ &= \mathbf{\sqrt{15}(\cos \pi + i \sin \pi)} \\ &= \mathbf{-\sqrt{15} + 0i} \end{aligned}$$

13. إذا كان $z_3 = z_1 z_2$، وكان
$$z_1 = \sqrt{3}\ (\cos 30° + i \sin 30°)$$
و $$z_3 = \sqrt{15}\ (\cos 75° + i \sin 75°)$$
أي من الخيارات التالية يمثل العدد z_2 في الصورة القياسيّة؟

(A) $\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} i$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{10}}{10} i$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i$

14. أي من الخيارات التالية يمثّل قيمة العدد المركّب $(-1 + i)^6$؟

(A) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2}\right)$

(B) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

(C) $8\left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2}\right)$

(D) $8\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

15. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين $z_1 = 3 + 3i$ و $z_2 = 4$ بكتابتهما في الصورة القطبيّة أوّلاً.

$|z_1| = |3 + 3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$\tan \theta_1 = 1$

$\theta_1 = \tan^{-1} |1|$

$= \frac{\pi}{4}$

بما أن النقطة التي تمثل العدد $3 + 3i$ تقع في الربع الأول فإن $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

إذن، $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$|z_2| = |4| = 4$

$\tan \theta_2 = 0$

$\theta_2 = \tan^{-1} |0|$

$= 0$

بما أن النقطة التي تمثل العدد 4 تقع في الربع الأول فإن $\theta = \theta_2 = 0$

إذن، $z_2 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$

$z_1 z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\times 4(\cos 0 + i\sin 0)$

$= 12\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right.$

$\left. + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right]$

$= 12\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

إذن في الصورة القياسية $z_1 z_2 = 12 + 12i$

16. أيّ من العبارات التالية ليست صحيحة؟

Ⓐ للعدد -2 جذر تكعيبيّ واحد ضمن مجموعة الأعداد الحقيقيّة، وثلاثة جذور تكعيبية في مجموعة الأعداد المركّبة

● $-\sqrt{i}$ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد 1

Ⓒ الجذور السبعة للوحدة من الرتبة 7 عددها 7

Ⓓ نجد بين الجذور الستة من الرتبة 6 للوحدة أعدادًا مركّبة مع مرافقاتها

---

17. أي من الخيارات التالية يمثّل z^6 في الصورة القياسيّة إذا كان $z = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$؟

Ⓐ 2

● 64

Ⓒ $2i$

Ⓓ $64i$

---

18. أوجد الجذور من الدرجة الرابعة للعدد المركّب $z = 256\,(\cos 240° + i\sin 240°)$

الزاوية التي قياسها بالدرجات $240°$، قياسها بالراديان $\frac{4\pi}{3}$، إذن، الجذور من الدرجة الرابعة للعدد z هي:

$$\sqrt[4]{256}\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3$.

وبما أنّ $\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

فإنّ هذه الجذور هي:

$z_1 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$z_3 = 4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$z_4 = 4\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$

19. أوجد الصورة القطبيّة للعدد $z = i^5$، ثم أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد z.

أكتب أولاً العدد i في صورته القطبية:

$$i = 0 + i = 1 \times \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن،

$$z = i^5 = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}$$

الجذور التكعيبيّة للعدد z هي:

$$\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

وبما أنّ

$$\frac{\frac{5\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

فإن الجذور التكعيبية للعدد $z = i^5$ هي:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2$.

إذن الجذور التكعيبيّة الثلاثة هي:

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$
$$= 0 - i$$
$$z_3 = \cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

20. أوجد الجذور من الرتبة 5 للوحدة، ثم مثلها بيانيًا.
ماذا يمكنك أن تستنتج من التمثيل البيانيّ؟
استعمل الحاسبة لتقرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$$

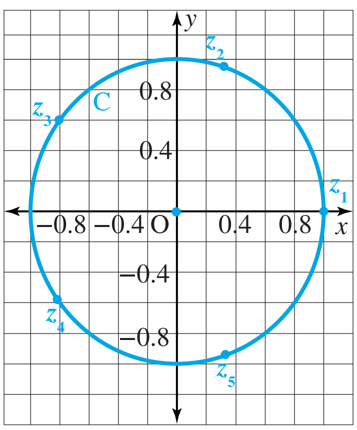
إذن الجذور من الرتبة 5 للوحدة هي:

$$\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

إذن،

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i$$
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = 0.31 + 0.95i$$
$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -0.81 + 0.59i$$
$$z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -0.81 - 0.59i$$
$$z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = 0.31 - 0.95i$$



يمكننا أن نرى كيف أن
z_2 هو العدد المرافق للعدد z_5
z_3 هو العدد المرافق للعدد z_4

الاسم ________________________

7 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج $(-4i) \cdot (1 + 2i)$؟

Ⓐ $-8 - 4i$ ● $8 - 4i$

Ⓑ $-8 + 4i$ Ⓓ $-4 + 8i$

.2 إذا كان $z = \sqrt{2} + 3i$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة z^2؟

Ⓐ $-4 + 6\sqrt{2}i$ Ⓒ 7

Ⓑ $-10 + 6\sqrt{2}i$ ● $-7 + 6\sqrt{2}i$

.3 اكتب العدد المركّب $\frac{1-2i}{3-i}$ في الصورة القياسيّة.

$$\frac{1-2i}{3-i} = \frac{1-2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$
$$= \frac{3 + i - 6i - 2i^2}{9+1}$$
$$= \frac{5-5i}{10}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

.4 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حلّ المعادلة $2x^2 + 18 = 0$؟

● $x = 3i$ أو $x = -3i$

Ⓑ $x = -3i$

Ⓒ $x = 3i$

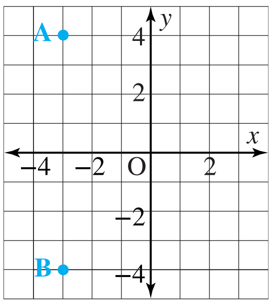
Ⓓ ليس لها حلّ

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $(1 - 3i)$؟

Ⓐ 4 Ⓒ $\sqrt{8}$

● $\sqrt{10}$ Ⓓ 10

.6 مثّل العددين $-3 + 4i$ و $-3 - 4i$ في المستوى المركّب، وحدّد العلاقة بينهما.



العدد $-3 - 4i$ تمثّله النقطة $A(-3, -4)$، والعدد $-3 + 4i$ تمثّله النقطة $B(-3, 4)$، كلّ من العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور R الحقيقي.

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل المسافة بين النقطة التي تمثّل العدد $(1 - 4i)$ والنقطة التي تمثّل العدد $(1 + 4i)$؟

Ⓐ 0 Ⓒ $2\sqrt{15}$

● 8 Ⓓ 6

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مقياس العدد المركّب $|(8 - 6i)(6 - 8i)|$؟

Ⓐ $\sqrt{14}$ Ⓒ 10

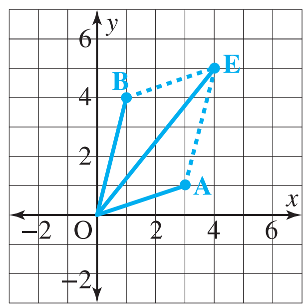
Ⓑ $\sqrt{80}$ ● 100

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 1 04/03/2022 6:50:30 PM

9. أوجد ناتج $(3 + i) + (1 + 4i)$ بيانيًّا باستعمال المستوى المركّب.

أعيّن النقطة $A(3, 1)$ التي تمثّل العدد $(3 + i)$، والنقطة $B(1, 4)$ التي تمثّل العدد $(1 + 4i)$، في المستوى المركّب، ثمّ أرسم الخطّين (OA) و (OB).

أرسم النقطة E بحيث يشكّل الرباعيّ OAEB متوازي أضلاع. النقطة E هي التي تمثّل ناتج $(3 + i) + (1 + 4i)$، إذن، $E(4, 5)$



---

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القطبيّة للعدد المركّب $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$؟

● $4\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

Ⓑ $\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$

Ⓒ $4\left(\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}\right)$

Ⓓ $\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}$

---

11. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد المركّب $4\left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}\right)$؟

● $4i$

Ⓑ $-4i$

Ⓒ $4 + 4i$

Ⓓ $4 - 4i$

---

12. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

و $$z_2 = \sqrt{8}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad \times \sqrt{8}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= 4(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= -4 + 0i \end{aligned}$$

---

13. إذا كان $z_3 = z_1 z_2$، وكان

$$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos 30° + i \sin 30°)$$

و $$z_3 = \sqrt{15}\,(\cos 150° + i \sin 150°)$$

فأيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد z_2؟

Ⓐ $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

● $-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

Ⓑ $-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

Ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

---

14. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة العدد المركّب $(1 - i)^4$؟

Ⓐ $\sqrt{2}\left(\cos 7\pi + i \sin 7\pi\right)$

Ⓑ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

Ⓒ $4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

● $4\left(\cos 7\pi + i \sin 7\pi\right)$

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indd 2 04/03/2022 6:50:33 PM

15. أوجد الصورة القياسيّة لناتج ضرب العددين المركّبين $z_1 = 2 + 2i$ و $z_2 = 3$ بكتابتهما في الصورة القطبيّة أوّلًا.

$|z_1| = |2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

$\tan \theta_1 = 1$

$\theta_1 = \tan^{-1} |1|$

$= \frac{\pi}{4}$

بما أنّ النقطة التي تمثّل العدد $2 + 2i$ تقع في الربع الأوّل، فإنّ $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

إذن، $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$|z_2| = |3| = 3$

$\tan \theta_2 = 0$

$\theta_2 = \tan^{-1} |0|$

$= 0$

بما أنّ النقطة التي تمثّل العدد 3 تقع في الربع الأوّل، فإنّ $\theta = \theta_2 = 0$

إذن، $z_2 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\times 3(\cos 0 + i \sin 0)$

$= 6\sqrt{2}\left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right.$

$\left. + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 0\right)\right]$

$= 6\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

إذن، في الصورة القياسيّة $z_1 z_2 = 6 + 6i$.

16. أيّ من العبارات التالية ليست صحيحة؟

Ⓐ للعدد -3 جذر تكعيبيّ واحد ضمن مجموعة الأعداد الحقيقيّة، وثلاثة جذور تكعيبيّة ضمن مجموعة الأعداد المركّبة

● $-i$ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد -1

Ⓒ عدد الجذور التسعة للوحدة من الرتبة 9 هو 9

Ⓓ توجد بين الجذور السبعة من الرتبة 7 للوحدة أعداد مركّبة مع مرافقاتها

---

17. أيّ من الخيارات التالية يمثّل z^4 في الصورة القياسيّة إذا كان $z = \sqrt[4]{16}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$؟

Ⓐ -2 ● -16

Ⓑ $-2i$ Ⓓ $-16i$

---

18. أوجد الجذور من الدرجة الرابعة للعدد المركّب $z = 16(\cos 180° + i \sin 180°)$

الزاوية التي قياسها بالدرجات $180°$، قياسها بالراديان π، إذن، الجذور من الدرجة الرابعة للعدد z هي:

$$\sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3$.

وبما أنّ $\frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

فإنّ هذه الجذور هي:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_4 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 3 04/03/2022 6:50:36 PM

19. أوجد الصورة القطبيّة للعدد $z = i^7$، ثمّ أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد z.

أكتب أوّلًا العدد i في صورته القطبيّة:

$$i = 0 + i = 1 \times \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

إذن،

$$z = i^7 = \cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2}$$

الجذور التكعيبيّة للعدد z هي:

$$\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{7\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

وبما أنّ $\dfrac{\frac{7\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

فإنّ الجذور التكعيبيّة للعدد $z = i^7$ هي:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2$.

إذن، الجذور التكعيبيّة الثلاثة هي:

$$z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$z_2 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} = i$$

20. أوجد الجذور من الرتبة 6 للوحدة، ثمّ مثّلها بيانيًّا. ماذا يمكنك أن تستنتج من التمثيل البيانيّ؟ استعمل الحاسبة لتقريب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

$$z = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0$$

إذن، الجذور من الرتبة 6 للوحدة هي:

$$\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{6}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

إذن،

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0i$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

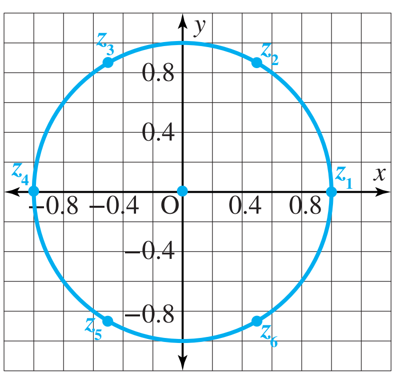
$$z_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_5 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_6 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



يمكنني أن ألاحظ من التمثيل البيانيّ أنّ العدد z_2 هو العدد المرافق للعدد z_6 والعدد z_3 هو العدد المرافق للعدد z_5

الاسم ____

7 تقويم الأداء، النموذج A

الأعداد المركّبة هي أداة ضروريّة، وأحيانًا حصريّة، لفهم ومعالجة بعض المسائل الواقعيّة وإيجاد حلول لها. سنتعرّف هنا إلى طريقة استعمال الأعداد المركّبة لإيجاد النسب المثلّثيّة للزاوية $\frac{2\pi}{5} = 72°$، نعلم أنه بإمكاننا إيجاد قيم هذه النسب بطرق هندسيّة، غير أنّ استعمال الأعداد المركّبة هو طريقة أخرى للحلّ تساعدنا في فهم الدور الحقيقيّ، وخصوصًا عندما يكون حصريًّا، للأعداد المركّبة "الخياليّة".

1. لتكن المعادلة $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$

a. أثبت أنّ المعادلة $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$ هي نفس المعادلة بعد التوزيع.

$$(z + 1)^5 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$$
$$(z - 1)^5 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1$$
$$(z + 1)^5 = (z - 1)^5$$
$$10z^4 + 20z^2 + 2 = 0$$
$$5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$$

b. ليكن $u = z^2$. أوجد حلّ المعادلة $5u^2 + 10u + 1 = 0$

$u_2 = \frac{-5 + \sqrt{20}}{5}$ و $u_1 = \frac{-5 - \sqrt{20}}{5}$

2. ليكن $Z = \frac{z + 1}{z - 1}$، حيث z هي حلّ المعادلة.

a. أثبت أنّ $z \neq 1$ و $Z \neq 1$

إذا كان $z = 1$، إذن، $2^5 = 0^5$، وهذا مستحيل. إذن، $z \neq 1$

إذا كان $Z = 1$، إذن، $z + 1 = z - 1$، وهذا يعني أنّ $1 = -1$، وهذا مستحيل. إذن، $Z \neq 1$

b. أثبت أنّ Z هو جذر من الدرجة الخامسة للعدد 1، استنتج القيم المحتملة للعدد المركّب Z في صورته القطبيّة.

$$(z + 1)^5 = (z - 1)^5$$
$$\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^5 = 1$$
$$Z^5 = 1$$

إذن، Z هو جذر من الدرجة الخامسة للعدد 1

$$Z = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$
$$1 \leq k \leq 4\,(Z \neq 1, k \neq 0)$$

3. لتكن M النقطة التي تمثّل العدد المركّب z، الذي هو حلّ المعادلة، في المستوى الإحداثيّ.

a. أثبت أنّ M تقع على المحور y.

إذا كانت النقطة A تمثّل العدد -1 والنقطة B تمثّل العدد 1، فإنّ:

$$(z+1)^5 = (z-1)^5$$

$$\left|(z+1)^5\right| = \left|(z-1)^5\right|$$

$$|z+1|^5 = |z-1|^5$$

$$|z+1| = |z-1|$$

$$AM = BM$$

ما يعني أنّ النقطة M تقع على الخطّ المنصّف الرأسيّ للمقطع [AB] وهو المحور y.

b. استنتج أنّ $z = ix$، حيث x هو حلّ المعادلة $5x^4 - 10x^2 + 1 = 0$، ثمّ أوجد كلّ القيم الممكنة للمتغيّر x

أعوّض $z = ix$ في المعادلة $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$ فأحصل على

$$5x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

$$5X^2 - 10X + 1 = 0$$

ليكن $X = x^2$:

$$X_1 = \frac{5-\sqrt{20}}{5} \text{ و } X_2 = \frac{5+\sqrt{20}}{5}$$

$X = x^2$، إذن،

$$x_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{20}}{5}} \text{ و } x_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{20}}{5}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}} \text{ و } x_4 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}$$

---

c. استنتج قيمة كلّ من $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ و $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$$Z = \frac{z+1}{z-1} = \frac{ix+1}{ix-1} = \frac{-(ix+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2-2ix-1}{1+x^2}$$

$$Z_i = \frac{x_i^2 - 2ix_i - 1}{1+x_i^2} \quad 1 \le i \le 4$$

بما أنّ Z_4 هو الجذر الوحيد الذي يشتمل على جزء حقيقيّ موجب وجزء تخيّليّ سالب كلاهما موجب، إذن،

$$Z_4 = \frac{x_4^2-1}{1+x_4^2} + i\,\frac{-2x_4}{1+x_4^2} = \frac{\frac{5+\sqrt{20}}{5} - 1}{1 + \frac{5+\sqrt{20}}{5}}$$

$$Z_4 = \frac{\sqrt{20}}{10+\sqrt{20}} + i\,\frac{-10\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}}{10+\sqrt{20}} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{20}}{10+\sqrt{20}}$$

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \frac{-10\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}}{10+\sqrt{20}}$$

ولكن

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

و

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

إذن،

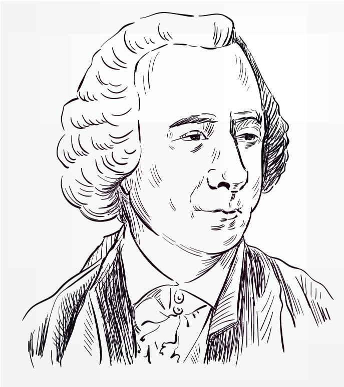
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{20}}{10+\sqrt{20}}$$

و

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{-10\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}}{10+\sqrt{20}} = \frac{10\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}}{10+\sqrt{20}}$$

الاسم ________________

7 تقويم الأداء، النموذج B



تُعدُّ صيغة أويلر من أكثر الصيغ شهرةً في مجال التحليل الرياضيّ، وقد سُمّيت بهذا الاسم نسبةً إلى عالم الرياضيّات السويسريّ ليونارد أويلر Leonhard Euler (1707-1783)، الذي يُعدّ من أبرز علماء الرياضيّات في التاريخ. تُكتب هذه الصيغة كما يلي:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

حيث e هو أساس اللوغاريتم الطبيعيّ، و i هو العدد التخيّليّ $i = \sqrt{-1}$ و x يمثّل زاوية مقيسة بالراديان.

1. توصف المتطابقة $e^{i\pi} + 1 = 0$ بأنّها "أجمل معادلة رياضيّة على الإطلاق". تحقّق من صحّة هذه المتطابقة، ثمّ وضّح سبب إطلاق هذا الوصف عليها في رأيك.

أكتب صيغة أويلر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

أعوّض $x = \pi$، $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

أعوّض $\cos \pi = -1$ و $\sin \pi = 0$ $e^{i\pi} = -1 + i(0)$

أضيف 1 إلى كلا طرفَي المعادلة $e^{i\pi} + 1 = 0$

يكمن جمال هذه الصيغة في جمعها بين أهمّ الأعداد المستعملة في الرياضيّات، وهي e و i و π بالإضافة إلى الواحد والصفر (هنا يمكن للمعلّم مناقشة إجابات الطلّاب).

2. تكمن أهميّة هذه الصيغة في أنّها تسمح بتحويل المقادير المثلّثيّة إلى مقادير أسّيّة، ما يجعل العمليّات على الأعداد المركّبة أبسط، لا سيّما أنّ أيّ عدد معطى في الصورة القطبيّة $z = r(\cos x + i \sin x)$ يمكن كتابته في الصورة الأسّيّة كما يلي: $z = re^{ix}$. استعمل هذه الصيغة لبرهنة نظريّة دي موافر.

ليكن $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$، إذن، في الصورة الأسّيّة $z = re^{i\theta}$

وبالتالي، فإنّ $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n$، حيث n عدد صحيح موجب.

$$z^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

أي إنّ

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

M07_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 1 04/03/2022 6:50:39 PM

3. من التطبيقات الهامّة أيضًا لصيغة أويلر استعمالها لإيجاد قيم بعض التكاملات غير المحدودة.

a. اكتب e^{-ix} بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

أكتب صيغة أويلر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

أعوّض $-x$ عن x $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$

أبسّط $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

b. برهن أنّ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ و $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

عند جمع المعادلتين $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ **و** $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

أحصل على: $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ **أو** $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

وعند طرحهما أحصل على: $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ **أو** $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

c. برهن أنّ $\cos^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\right)$.

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\right)$$

d. استنتج التكامل غير المحدود $\int \cos^2 x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4}\int \left(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix}}{2i} - \frac{e^{-2ix}}{2i} + 2x\right) + C \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x + 2x) + C\end{aligned}$$

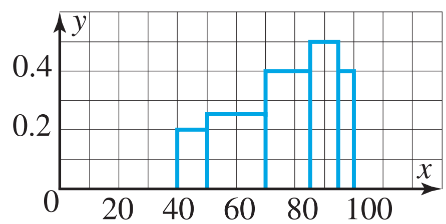
الاسم ________________________________

8 اختبار بداية الوحدة

.1 يمثّل الجدول أدناه درجات طلّاب الصفّ الثاني عشر في مادّة الرياضيّات في إحدى المدارس؛ (الدرجة القصوى 100)؛ أنشئ جدول الكثافة التكراريّة، ثمّ أنشئ المدرّج التكراريّ. أوجد النسبة المئويّة للطلّاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 85 درجة.

الفئات	40 - 50	50 - 70	70 - 85	85 - 95	95 - 100
التكرار f	2	5	6	5	2

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
40 - 50	2	10	$\frac{1}{5} = 0.2$
50 - 70	5	20	$\frac{1}{4} = 0.25$
70 - 85	6	15	$\frac{2}{5} = 0.4$
85 - 95	5	10	$\frac{1}{2} = 0.5$
95 - 100	2	5	$\frac{2}{5} = 0.4$



$\frac{7}{20} \times 100\% = 35\%$

النسبة المئويّة للطلّاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 85 درجة، هي 35%

.2 يمثّل الجدول أدناه أعمار الطلّاب المشاركين في مسابقة السباحة لفئة الصغار. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الوسط الحسابيّ لأعمار هؤلاء الطلّاب؟

العمر x	5	6	7	8
التكرار f	2	1	3	3

Ⓐ 2.25 ● 6.78

Ⓑ 6.5 Ⓓ 15.25

.3 يمثّل الجدول أدناه نتائج خمسة طلّاب في اختبار الرياضيّات، (الدرجة القصوى 20)؛ أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الانحراف المعياريّ لهذه البيانات؟

رقم الطالب	1	2	3	4	5
النتيجة	20	15	13	19	17

Ⓐ 0 Ⓒ 6.56

● 2.56 Ⓓ 16.8

.4 يمثّل الجدول أدناه نتائج عامر في 8 اختبارات في اللغة العربيّة على مدار السنة؛ (الدرجة القصوى 10)؛ أيّ من الخيارات التالية يمثّل الانحراف المعياريّ لهذه النتائج؟

النتيجة x	7	8	9
التكرار f	2	1	5

Ⓐ 0.73 Ⓒ 2.41

● 0.86 Ⓓ 8.37

.5 يبيّن الجدول أدناه عدد ساعات التعليم الأسبوعيّة لعشرين معلّمة في إحدى المدارس الثانويّة. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الوسط الحسابيّ لعدد ساعات تعليمهنّ الأسبوعيّة مقرّبًا إلى أقرب ساعة؟

الفئات (عدد ساعات التعليم)	6 - 10	10 - 20	20 - 24	24 - 30
التكرار f	2	5	12	1

Ⓐ 5 ● 19

Ⓑ 18 Ⓓ 20

.6 يمثّل الجدول أدناه أطوال قامات 16 طالبًا من طلّاب الصفّ الثاني عشر في إحدى المدارس الثانويّة، مقرّبةً إلى أقرب سنتمتر. أوجد وسيط أطوال قامات هؤلاء الطلّاب، وفسّر معناه.

الفئات	156 - 162	162 - 168	168 - 174	174 - 180	180 - 186
التكرار f	2	2	3	8	1

أكوّن الجدول التكراريّ التراكميّ التصاعديّ:

الفئات	التكرار f	الحدود العليا	التكرار التراكميّ التصاعديّ
156 - 162	2	162	2
162 - 168	2	168	4
168 - 174	3	174	7
174 - 180	8	180	15
180 - 186	1	186	16

رتبة الوسيط:

$$\frac{\sum f}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

الفئة الوسيطيّة هي:

$174 - 180$

$$\frac{x - 174}{180 - 174} = \frac{8 - 7}{15 - 7}$$

$$x = 174.75$$

وسيط أطوال قامات هؤلاء الطلّاب هو 174.75 cm،

هذا يعني أنّ أطوال قامات 50% من الطلّاب أقلّ من 174.75 cm

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة تباين أطوال قامات الطلّاب المذكورين في التمرين السابق؟

Ⓐ 3.2

Ⓑ 6.87

● 47.25

Ⓓ 172.5

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المدى الرُّبيعيّ للمنحنى التكراريّ التراكميّ الوارد في التمرين السابق؟

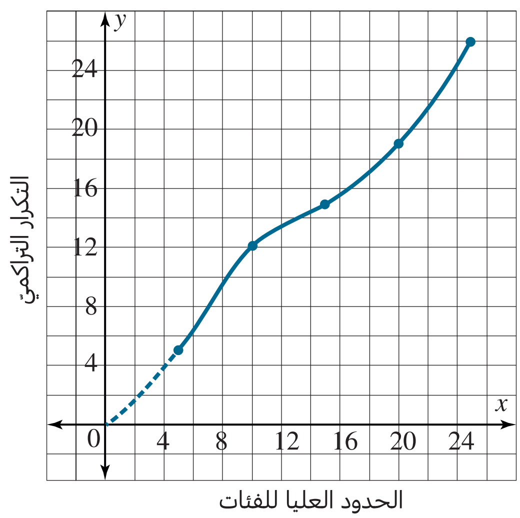
Ⓐ 5.8

● 14.7

Ⓒ 20.5

Ⓓ 26.3

.9 أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة التقريبيّة للوسيط في المنحنى التكراريّ التراكميّ أدناه؟



Ⓐ 5.2

Ⓑ 10.5

● 11.5

Ⓓ 13

.10 إذا كان احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{1}{3}$، واحتمال الحدث B هو $P(B) = \frac{1}{2}$، وكان الحدثان A و B مستقلّين، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال $P(A$ و $B)$؟

● $\frac{1}{6}$

Ⓑ $\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{1}{2}$

Ⓓ $\frac{5}{6}$

.11 لديك علبتان A و B من الكرات الملوّنة. تحتوي العلبة A على 6 كرات حمراء وكرتين خضراوين. أمّا العلبة B فتحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات خضراء. إذا سحبت كرة عشوائيًّا، أوجد، باستعمال مخطّط الشجرة، احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء.

بما أنّ لديّ علبة واحدة فقط من كلّ من A و B، إذن، $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$

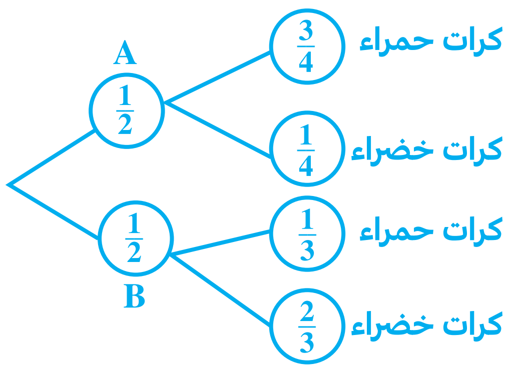
في العلبة A: $P(\text{خضراء}) = \frac{2}{8}$

و $P(\text{حمراء}) = \frac{6}{8}$

في العلبة B: $P(\text{خضراء}) = \frac{4}{6}$

و $P(\text{حمراء}) = \frac{2}{6}$

يبيّن مخطّط الشجرة احتمالات الحصول على كلّ من اللونين من العلبتين:



إذن، $P(\text{خضراء و } A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

و $P(\text{خضراء و } B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

وبالتالي

$P((\text{خضراء و } A) \text{ أو } (\text{خضراء و } B)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$

$= \frac{11}{24}$

.12 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مفكوك المقدار $(x^2 + y)^4$؟

Ⓐ $x^8 + x^6y + x^4y^2 + x^2y^3 + y^4$

Ⓑ $x^8 - x^6y + x^4y^2 - x^2y^3 + y^4$

Ⓒ $x^8 - 4x^6y + 6x^4y^2 - 4x^2y^3 + y^4$

● $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

.13 أيّ من الخيارات التالية يمثّل معامل الحدّ x^3 في مفكوك المقدار $(2x+1)^4$؟

Ⓐ 8
Ⓑ 16
Ⓒ 24
● 32

.14 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة احتمال الحدث، "الحصول على الصورة مرّة واحدة عند رمي قطعة نقديّة مرّتين"؟

Ⓐ $\frac{1}{4}$
Ⓑ $\frac{1}{3}$
Ⓒ $\frac{3}{8}$
● $\frac{1}{2}$

.15 فريق يتكوّن من 12 لاعبًا. إذا أعطى المدرّب كلّ لاعب رقمًا بين 1 و 12، ثمّ اختار خمسة لاعبين عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون جميع الأرقام التي مع اللاعبين الخمسة فرديّة؟

أوجد أوّلًا العدد الكلّيّ للنواتج الممكنة.

$${}_{12}C_5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = 792$$

ثمّ أوجد عدد النواتج الممكنة بحيث تكون جميع الأرقام التي مع الطلّاب الخمسة فرديّة.

$${}_6C_5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6$$

$${}_6C_0 = \frac{6!}{0!(6-0)!} = 1$$

أضرب نتيجتَي النواتج الممكنة لإيجاد العدد الكلّيّ للنواتج.

$${}_6C_5 \times {}_6C_0 = 6 \times 1 = 6$$

هناك 6 نتائج حيث تكون جميع الأرقام فرديّة.

إذن،

$$P\left(\text{أرقام فرديّة}\right) = \frac{6}{792} \approx 0.0076$$

.16 إذا كانت الحوادث E_1 و E_2 و E_3 حوادث متنافية وشاملة، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال $P(E_1)$ إذا كان $P(E_1) = \frac{1}{2}P(E_2) = \frac{1}{2}P(E_3)$؟

Ⓐ 0.1
● 0.2
Ⓒ 0.33
Ⓓ 0.4

.17 إذا كان احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{1}{3}$، واحتمال الحدث B هو $P(B) = \frac{1}{4}$، وكان $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$، أوجد قيمة الاحتمال المشروط $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

.18 أيّ من الخيارات التالية يمثّل حدثين مستقلّين؟

Ⓐ الحدثان A و B حيث $P(B|A) = \frac{1}{4}$، و $P(A) = \frac{1}{3}$، و $P(B) = \frac{1}{12}$.

● الحدثان A و B حيث $P(A) = 0.3$، و $P(B) = 0.5$، و $P(A \cap B) = 0.15$

Ⓒ الحدثان A و B حيث $P(A) = 0.9$، و $P(B) = 0.1$، و $P(A \cap B) = 0.9$

Ⓓ الحدثان A و B حيث $P(A) = 0.5$، و $P(B) = 0.3$، و $P(A|B) = 0.3$

.19 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة ${}_8P_7$؟

Ⓐ $\frac{8!}{15!}$
Ⓑ $\frac{8!}{7!}$
Ⓒ $7!$
● $8!$

.20 يريد المعلّم المسؤول عن النشاطات في مدرسة ثانويّة أن يختار 5 من بين طلّاب الصفّ الثاني عشر المتقدّم البالغ عددهم 15 طالبًا، وذلك لمساعدته في التحضير لمهرجان الربيع. إن لم تكن هناك معايير محدّدة للاختيار، أوجد عدد الخيارات المتوافرة للمعلّم المسؤول عن النشاطات.

$${}_{15}C_5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3\,003$$

هناك 3 003 خيارات متوافرة لمسؤول النشاطات.

الاسم ________________

8-1 اختبار الدرس

المتغيّر العشوائيّ المنفصل

1. حدّد ما إذا كان كلّ من المتغيّرين العشوائيّين التاليين متغيّرًا منفصلًا أم متّصلًا.

a. عدد حبّات الفاصولياء في كيلوجرام واحد من الفاصولياء.

b. طول الطفل تحت عمر السنة.

a. عدد حبّات الفاصولياء هو عدد صحيح دائمًا وقد يتغيّر في كلّ كيلوجرام، فهو إذن متغيّر منفصل.

b. يمكن أن يكون طول الطفل تحت عمر السنة أيّ عدد حقيقيّ: 50 cm، 60.3 cm، 70.1 cm، ... فهو إذن متغيّر متّصل.

---

2. لكي يمثّل الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، يجب أن تكون قيمة a

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{8}$	a	$\frac{1}{8}$

Ⓐ $\frac{1}{8}$

Ⓑ $\frac{2}{8}$

● $\frac{3}{8}$

Ⓓ 3

---

3. يحتوي وعاء على أربع كرات حمراء وكرتين زرقاوين. إذا سحبت كرة من الوعاء ثمّ أعدتها إليه، ثمّ سحبت كرة ثانية، أيّ من الخيارات التالية يمثّل التوزيع الاحتماليّ لعدد الكرات الزرقاء المسحوبة؟ يُعتمد المتغيّر X الذي يمثّل عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

●

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

Ⓑ

X	1	2
$P(X)$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

Ⓒ

X	0	1
$P(X)$	$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{9}$

Ⓓ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

.4 للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ المبيّن في الجدول أدناه.

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	k

أوجد قيمة k، ثمّ أوجد $P(X \le 3)$.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + k = 1$$

$$k = \frac{1}{5}$$

$$P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

.5 قد يكون للمتغيّر العشوائيّ X أربع قيم ممكنة هي: 5، 7، 9، 10

يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتماليّ لهذه القيم.

X	5	7	9	10
$P(X)$	0.5	0.3	0.1	0.1

أوجد احتمال أن تكون قيمة المتغيّر العشوائيّ X هي 7 أو 10، ثمّ أوجد $P(5 < X \le 9)$.

$$P(7 \text{ أو } 10) = P(7) + P(10)$$

$$= 0.3 + 0.1$$

$$= 0.4$$

$$P(5 < X \le 9) = P(7) + P(9)$$

$$= 0.3 + 0.1$$

$$= 0.4$$

M08_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 2 04/03/2022 7:08:57 PM

الاسم ____________________

8-2 اختبار الدرس

القيمة المتوقّعة والتباين

1. صُمّم مكعّب عدديّ مرقّم من 1 إلى 6 بحيث تكون إمكانيّة الحصول على الأعداد الفرديّة عند رميه أكبر. يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتماليّ لنواتج تجربة رمي هذا المكعّب.
أوجد القيمة المتوقّعة لتجربة رمي المكعّب.

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(x_i)$$
$$= 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.1$$
$$= 3.1$$

2. إذا كانت القيمة المتوقّعة للمتغيّر العشوائيّ X هي $E(X) = 4$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 3X - 2$؟

Ⓐ 10 (مظلّل)   Ⓒ 34

Ⓑ 12   Ⓓ 36

3. إذا كان تباين المتغيّر العشوائيّ X هو $\text{Var}(X) = 9$، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة تباين التحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 2X + 5$؟

Ⓐ 23   Ⓒ 41

Ⓑ 36 (مظلّل)   Ⓓ 225

4. يُستعمل في إحدى الألعاب مجسّم مثمَّن (أي له 8 أوجه)، وجه واحد يحمل الرقم 1 وثلاثة أوجه تحمل الرقم 4، والأوجه الأربعة المتبقّية تحمل الرقم 8، أوجد القيمة المتوقّعة لرمي هذا المجسّم.

X	1	4	8
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(x_i)$$
$$= 1 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 8 \times \frac{1}{2} \approx 5.6$$

5. للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

$P(X = x) = \frac{k}{3}x,\ x = 1, 3, 5, 7, 9$

أنشئ جدولًا يبيّن التوزيع الاحتماليّ للمتغيّر العشوائيّ X. أوجد قيمة k، ثمّ أوجد قيمة الانحراف المعياريّ σ.

X	1	3	5	7	9
$P(X)$	$\frac{k}{3}$	k	$\frac{5k}{3}$	$\frac{7k}{3}$	$3k$

$$\frac{k}{3} + k + \frac{5k}{3} + \frac{7k}{3} + 3k = 1$$
$$k = \frac{3}{25}$$

X	1	3	5	7	9
$P(X)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{25} + 3 \times \frac{3}{25} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{7}{25} + 9 \times \frac{9}{25} = 6.6$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2\, P(x_i)$$
$$= (1 - 6.6)^2 \times \frac{1}{25} + (3 - 6.6)^2 \times \frac{3}{25} + (5 - 6.6)^2 \times \frac{1}{5} + (7 - 6.6)^2 \times \frac{7}{25} + (9 - 6.6)^2 \times \frac{9}{25}$$
$$\approx 5.44$$
$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{5.44} \approx 2.33$$

M08_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indd 1 04/03/2022 7:08:58 PM

الاسم ________________

8-3 اختبار الدرس

التوزيع ذو الحدّين

1. حدّد ما إذا كانت كلّ من التجربتين التاليتين تجربة ذات حدّين أم لا.

a. يسدّد لاعب كرة قدم ثلاث ركلات جزاء. احتمال أن يسجّل هدفًا في الركلة الأولى هو 70%، ثمّ يتناقص هذا الاحتمال في كلّ ركلة تالية بمعدل 30%

b. ارمِ مكعّبًا منتظمًا مرقّمًا من 1 الى 6 خمس مرّات. افترض أنّ احتمالات الحصول على أيّ رقم في المرّات الخمس متساوية. "النجاح" هو الحصول على عدد فرديّ في كلّ رمية.

a. ليست تجربة ذات حدّين لأنّ قيم احتمالات النجاح في المحاولات الثلاث ليست ثابتة، فقيمة الاحتمال تتناقص بعد كلّ محاولة.

b. هناك ناتجان ممكنان لكلّ محاولة، هما الحصول على عدد فرديّ (نجاح)، أو الحصول على عدد زوجيّ (فشل). لا تؤثّر نتيجة أيّ محاولة في احتمال النجاح في المحاولات الأخرى، وبالتالي هذه التجربة تجربة ذات حدّين.

---

2. افترض أنّ هدّاف فريق كرة القدم يسجّل في 75% من ركلات الجزاء خلال الموسم الكرويّ الواحد. إذا أعطاه الحكم 8 ركلات جزاء في مجموع المباريات، أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لعدد الركلات المسجَّلة؟

Ⓐ 0.6 Ⓒ 1.5

Ⓑ 1.22 ● 6

---

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الانحراف المعياريّ لعدد الركلات المسجلة من التمرين السابق؟

● 1.22 Ⓒ 2.25

Ⓑ 1.5 Ⓓ 6

---

4. في اختبار للرياضيّات 10 أسئلة. لكلّ سؤال 4 خيارات للإجابة. افترض أنّ أحد الطلّاب يختار إجابات الأسئلة بشكل عشوائيّ، وأنّ احتمال تخمين الإجابة الصحيحة هو 25%، وأنّ المطلوب للنجاح في الاختبار هو الإجابة عن 6 أسئلة على الأقلّ بشكل صحيح. ما احتمال نجاح هذا الطالب؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\mathbf{P(X \geq 6)}$$
$$\mathbf{= P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)}$$
$$\mathbf{= {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3}$$
$$\mathbf{+ {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$\mathbf{+ {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)^1}$$
$$\mathbf{+ {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^0}$$
$$\mathbf{= 0.016 + 0.003 + 0.0004 + 0.00003}$$
$$\mathbf{+ 0.00000095 \approx 0.02}$$

---

5. لديك التوزيع الاحتماليّ ذو الحدّين التالي:

$$P(X = x) = {}_4C_x\ (0.3)^x\ (0.7)^{4-x}$$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4$. أنشئ جدولًا لهذا التوزيع الاحتماليّ، ثمّ أوجد القيمة المتوقّعة وقيمة الانحراف المعياريّ.

$$\mathbf{P(0) = {}_4C_0\,(0.3)^0\,(0.7)^4 = 0.2401}$$
$$\mathbf{P(1) = {}_4C_1\,(0.3)^1\,(0.7)^3 = 0.4116}$$
$$\mathbf{P(2) = {}_4C_2\,(0.3)^2\,(0.7)^2 = 0.2646}$$
$$\mathbf{P(3) = {}_4C_3\,(0.3)^3\,(0.7)^1 = 0.0756}$$
$$\mathbf{P(4) = {}_4C_4\,(0.3)^4\,(0.7)^0 = 0.0081}$$

X	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

$$\mathbf{E(X = x) = np = 4 \times 0.3 = 1.2}$$
$$\mathbf{\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times 0.3 \times 0.7} \approx 0.92}$$

الاسم ___________________________

8-4 اختبار الدرس

التوزيع الطبيعيّ

1. تتبع أطوال قامات طالبات الصفّ الرابع في إحدى المدارس، أي اللواتي تبلغ أعمارهنّ 9 أو 10 أعوام كمتغيّر متّصل، توزيعًا احتماليًّا طبيعيًّا هو $X \sim \mathrm{N}(132, 49)$. أعطِ وصفًا إجماليًّا لأطوال قامات الطالبات باستعمال القاعدة التجريبيّة.

التوزيع الاحتماليّ هو $X \sim \mathrm{N}(132, 49)$.

بالمقارنة مع الصيغة $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — $\sigma = \sqrt{49} = 7$ و $\mu = 132$

باستعمال القاعدة التجريبيّة — $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.68$

$P(132 - 7 \leq x \leq 132 + 7) = 0.68$

$P(125 \leq x \leq 139) = 0.68$

باستعمال القاعدة التجريبيّة — $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$

$P(118 \leq x \leq 146) = 0.95$

باستعمال القاعدة التجريبيّة — $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$

$P(111 \leq x \leq 153) = 0.997$

تتراوح أطوال قامات 68% من الطالبات بين 125 cm و 139 cm

تتراوح أطوال قامات 95% من الطالبات بين 118 cm و 146 cm

تتراوح أطوال قامات 99.7% من الطالبات بين 111 cm و 153 cm

---

2. لتكن f دالّة الكثافة الاحتماليّة للمتغيّر المتّصل X. أيّ من العبارات التالية غير صحيحة؟

Ⓐ يتضيّق منحنى الدالّة f أو يتمدّد تبعًا لقيمة الانحراف المعياريّ σ

● يؤدّي تغيير القيمة المتوقّعة μ مع تثبيت قيمة الانحراف المعياريّ σ إلى تمدد منحنى التوزيع الطبيعيّ رأسيًّا، ما يؤدي إلى تغيّر شكل انتشاره.

Ⓒ المساحة تحت منحنى الدالّة f تساوي واحدًا صحيحًا.

Ⓓ القيمة المتوقّعة μ وقيمة الانحراف المعياريّ σ عددان ثابتان بالنسبة لقيم المتغيّر المتّصل X.

3. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \leq 1.5)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.0068

Ⓑ 0.7733

● 0.9332

Ⓓ لا يمكن إيجادها

4. أظهرت دراسة أجريت في إحدى القرى أنّ أطوال قامات الأطفال دون عمر السنتين في هذه القرية تتبع توزيعًا احتماليًّا طبيعيًّا قيمة وسطه الحسابيّ تساوي 70.2 cm مع انحراف معياريّ يساوي 1.8 cm، أوجد قيمة احتمال أن يتراوح طول قامة طفل اختير عشوائيًّا بين 65 cm و 74 cm

النتيجة z:

$$z_1 = \frac{65 - 70.2}{1.8} \approx -2.89$$

$$z_2 = \frac{74 - 70.2}{1.8} \approx 2.11$$

الاحتمال هو:

$$P(65 \leq x \leq 74)$$

$$= P(-2.89 \leq z \leq 2.11)$$

$$= P(z < 2.11) - P(z < -2.89)$$

$$= P(z < 2.11) - P(z > 2.89)$$

$$= 0.9826 - (1 - 0.9981)$$

$$= 0.9807$$

5. راجع المعطيات الواردة في التمرين السابق، ثمّ أوجد الطول الذي تقلّ عنه أطوال قامات 69% من الأطفال دون عمر السنتين في تلك القرية.

يمكنني استعمال الجدول الطبيعيّ المعكوس لإيجاد قيمة z بحيث يكون

$$P(Z \leq z) = 0.69$$

$$z = 0.5$$

$$x = (0.5)(1.8) + 70.2 = 71.1 \text{ cm}$$

إذن، أطوال قامات 69% من الأطفال دون عمر السنتين لا تزيد عن 71.1 cm تقريبًا.

الاسم ______________________________

8 تقويم الوحدة، النموذج A

1. يحتوي وعاء على أربع كرات حمراء وثلاث كرات زرقاء. إذا سحبت كرة من الوعاء ولم ترجعها إليه، ثمّ سحبت كرة ثانية، أيّ من الخيارات التالية يمثّل التوزيع الاحتماليّ لعدد الكرات الزرقاء المسحوبة؟ يُعتمد المتغيّر X الذي يمثّل عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

Ⓐ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

Ⓑ

X	1	2
$P(X)$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

Ⓒ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

Ⓓ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

2. لكي يمثّل الجدول أدناه توزيعًا احتماليًا يجب أن تكون قيمة a

X	0	1	2
$P(X)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

Ⓐ $\frac{1}{9}$

Ⓑ $\frac{4}{9}$

Ⓒ $\frac{1}{3}$

Ⓓ 4

3. للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	$2k$	0.3	0.4

أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $P(X \leq 3)$؟

Ⓐ 0.3

Ⓑ 0.4

Ⓒ 0.5

Ⓓ 0.6

4. صُمّم مجسّم رباعيّ مرقّم من 1 إلى 4 بحيث تكون إمكانيّة الحصول على العددين الزوجيّين عند رميه أكبر. يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتماليّ لنواتج تجربة رمي هذا المجسّم. أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لتجربة رمي المجسّم.

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.2	0.3	0.2	0.3

Ⓐ 0.5

Ⓑ 1

Ⓒ 2.6

Ⓓ 3

M08_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_29250.indb 1 04/03/2022 7:09:01 PM

5. إذا كانت القيمة المتوقّعة للمتغيّر العشوائيّ X هي $\mathrm{E}(X) = 2$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 2X + 5$؟

Ⓐ 4

Ⓑ 8

● 9

Ⓓ 13

---

6. إذا كان تباين المتغيّر العشوائيّ X هو $\mathrm{Var}(X) = 9$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الانحراف المعياريّ للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 3X + 2$؟

● 9

Ⓑ $\sqrt{81}$

Ⓒ 81

Ⓓ 83

---

7. قرص دوّار مقسّم إلى عشرة أجزاء متساوية تحمل أرقامًا، جزءان منه يحملان الرقم 1، وأربعة أجزاء تحمل الرقم 2، وجزء يحمل الرقم 3، والأجزاء المتبقّية تحمل الرقم 4
إذا قمت بتدوير هذا القرص، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للرقم الذي سيتوقّف عنده مؤشّر القرص؟

Ⓐ 1

Ⓑ 2

● 2.5

Ⓓ 3

8. للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{3k}{2}x \qquad x = 2, 4, 6, 8, 10$$

أنشئ جدولًا يبيّن التوزيع الاحتماليّ للمتغيّر العشوائيّ X. أوجد قيمة k، ثمّ أوجد قيمة الانحراف المعياريّ σ.

X	2	4	6	8	10
$\mathrm{P}(X)$	$3k$	$6k$	$9k$	$12k$	$15k$

$$3k + 6k + 9k + 12k + 15k = 1$$

$$k = \frac{1}{45}$$

X	2	4	6	8	10
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathrm{E}(X) = 2 \times \frac{1}{15} + 4 \times \frac{2}{15} + 6 \times \frac{1}{5} + 8 \times \frac{4}{15} + 10 \times \frac{1}{3} = 7.3$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \mathrm{E}(X)\right]^2 \mathrm{P}(x_i)$$

$$= (2 - 7.3)^2 \times \frac{1}{15} + (4 - 7.3)^2 \times \frac{2}{15} + (6 - 7.3)^2 \times \frac{1}{5} + (8 - 7.3)^2 \times \frac{4}{15} + (10 - 7.3)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$\approx 6.22$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{6.22} \approx 2.5$$

9. أظهر استطلاع للرأي أجرته إدارة إحدى المدارس أنّ 22% من طلّاب المدرسة يعترضون على المنهج الرياضيّ المتّبع في حصص التربية البدنيّة. اختارت الإدارة 5 طلّاب بشكل عشوائيّ لسؤالهم عن رأيهم. أوجد التوزيع الاحتماليّ لأن يكون بين هؤلاء الطلّاب الخمسة من لديه هذا الاعتراض. أنشئ جدولًا لهذا التوزيع الاحتماليّ، ثمّ أوجد القيمة المتوقّعة وقيمة الانحراف المعياريّ.

$$P(X = x) = {}_5C_x(0.22)^x(0.78)^{5-x}$$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$P(0) = {}_5C_0(0.22)^0(0.78)^5 = 0.2887$$
$$P(1) = {}_5C_1(0.22)^1(0.78)^4 = 0.4071$$
$$P(2) = {}_5C_2(0.22)^2(0.78)^3 = 0.2296$$
$$P(3) = {}_5C_3(0.22)^3(0.78)^2 = 0.0647$$
$$P(4) = {}_5C_4(0.22)^4(0.78)^1 = 0.0091$$
$$P(5) = {}_5C_5(0.22)^5(0.78)^0 = 0.0005$$

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.2887	0.4071	0.2296	0.0647	0.0091	0.0005

$$E(X = x) = np = 5 \times 0.22 \approx 1.1$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \times 0.22 \times 0.78} \approx 0.93$$

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل تجربة ذات حدّين؟

Ⓐ يرمي لاعب كرة سلّة ثلاث رميات. احتمال أن يسجّل في الرمية الأولى هو 50%، ثمّ يتزايد هذا الاحتمال في كلّ محاولة تالية بمعدّل 10%

● ترمي مكعّبًا منتظمًا مرقّمًا من 1 الى 6 خمس مرّات. تفترض أنّ احتمالات الحصول على أيّ رقم في المرّات الخمس متساوية. "النجاح" هو الحصول على العدد 6 في كلّ رمية.

Ⓒ تقوم وزارة الصحّة بقياس أوزان الأطفال في رياض الأطفال، وتصنّف أعدادهم الإجماليّة ضمن فئات وزنيّة.

Ⓓ في صفّ يضمّ 15 طالبًا، 4 طلّاب فقط حصلوا على الدرجة الممتازة في اختبار الرياضيّات. تختار أحد طلّاب الصفّ ثمّ تختار طالبًا آخر، والنجاح هو أن تختار طالبًا واحدًا على الأقلّ حصل على الدرجة الممتازة في الاختبار.

11. تصيب 70% من الأسهم التي يرميها مهنّد بالقوس دائرة منتصف الهدف. إذا رمى مهنّد 10 أسهم، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لعدد الأسهم التي تصيب دائرة منتصف الهدف؟

Ⓐ 1.45

Ⓑ 2.1

Ⓒ 3

● 7

12. أوجد قيمة كلّ من التباين والانحراف المعياريّ للمعطيات الواردة في التمرين السابق.

$$Var(X) = npq = 10 \times 0.7 \times 0.3 = 2.1$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.1} \approx 1.45$$

13. يتضمّن اختبار القبول في إحدى الكلّيّات 6 أسئلة لاختبار مستوى الذكاء. لكلّ سؤال 3 خيارات للإجابة. افترض أنّ أحد الطلّاب المتقدّمين يختار إجابات الأسئلة بشكل عشوائيّ، وأنّ احتمال اختياره الإجابة الصحيحة هو 30%، أوجد احتمال أن تكون إجابات هذا الطالب عن 3 أسئلة على الأكثر صحيحة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

أفترض أنّ عدد الإجابات الصحيحة هو X

$$\mathbf{P(X \le 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)}$$
$$\mathbf{= {}_6C_0(0.3)^0(0.7)^6 + {}_6C_1(0.3)^1(0.7)^5}$$
$$\mathbf{+ {}_6C_2(0.3)^2(0.7)^4 + {}_6C_3(0.3)^3(0.7)^3}$$
$$\mathbf{= 0.1176 + 0.3025 + 0.3241 + 0.1852}$$
$$\mathbf{\approx 0.93}$$

---

14. أجرت إدارة إحدى المدارس الثانويّة استطلاعًا للرأي، شمل الطلّاب الثلاثة الأوائل في كلّ شعبة من ستّة شعب من الصفّين الحادي عشر والثاني عشر. كان الهدف من الاستطلاع معرفة ما إذا كان الطلّاب يؤيّدون قرار تخصيص يوم الأربعاء من كلّ أسبوع لجميع النشاطات الرياضيّة. إذا كان 46% من الطلّاب الذين شاركوا في الاستطلاع يؤيّدون هذا القرار، أوجد احتمال أن يكون 10 منهم لا يؤيّدونه.

عدد الطلّاب المشاركين في الاستطلاع هو 18، وبالتالي، يمكن حساب الاحتمالات باستعمال الصيغة

$$\mathbf{P(X = x) = {}_{18}C_x(0.46)^x(0.54)^{18-x}}$$

حيث $x = 0, \dots, 18$.

احتمال أن يكون 10 من هؤلاء الطلّاب لا يؤيّدون القرار يساوي احتمال أن يكون 8 منهم يؤيّدونه.

$$\mathbf{P(8) = {}_{18}C_8(0.46)^8(0.54)^{10} = 0.185}$$

15. أوجد قيمة الاحتمال $P(x < 3)$ حيث $X \sim N(2, 4)$.

ألاحظ في الصيغة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أنّ $\sigma = 2$ و $\mu = 2$، إذن:

$$\mathbf{z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3 - 2}{2} = 0.5}$$
$$\mathbf{P(x < 3) = P(z < 0.5) = 0.6914}$$

---

16. لتكن f دالّة الكثافة الاحتماليّة للمتغيّر المتّصل X. أيّ من العبارات التالية غير صحيحة؟

Ⓐ تكون الدرجة المعياريّة z موجبة إذا كان $x \ge \mu$ وسالبة إذا كان $x < \mu$.

● منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \sigma$

Ⓒ تفيد القاعدة التجريبيّة أنّ 68% من المساحة تحت منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ تقع بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$

Ⓓ يمكن أن تستنتج من تناظر المنحنى أنّ المساحة الواقعة إلى يمين الوسط الحسابيّ تساوي المساحة الواقعة إلى يساره، وأنّ كلتيهما تساوي 0.5

---

17. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \le 0.25)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.5199

Ⓑ 0.5596

● 0.5987

Ⓓ 0.8944

18. أيّ الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعي $P(z \geq 1.5)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.0668

Ⓑ 0.5596

Ⓒ 0.9332

Ⓓ 0.9394

---

19. إذا كان $X \sim N(0, 1)$، أثبت بكتابة كلّ الخطوات أنّ:

$P(-0.83 \leq x \leq 1.67) = P(-1.67 \leq x \leq 0.83)$

$\mathbf{P(-0.83 \leq x \leq 1.67)}$

$\mathbf{= P(x \leq 1.67) - P(x \leq -0.83)}$

$\mathbf{= P(x \geq -1.67) - P(x \geq 0.83)}$

$\mathbf{= [1 - P(x \leq -1.67)] - [1 - P(x \leq 0.83)]}$

$\mathbf{= P(x \leq 0.83) - P(x \leq -1.67)}$

$\mathbf{= P(-1.67 \leq x \leq 0.83)}$

20. للمتغيّر العشوائيّ X توزيع طبيعيّ. احتمال أن تكون قيمة X أكبر من 9 هو 88.4%، واحتمال أن تكون قيمة X أكبر من 22 هو 9.6%، أوجد قيمة كلّ من المتوسّط والانحراف المعياريّ لهذا التوزيع.

$\mathbf{P(x > 9) = 0.884}$

$\mathbf{P(x \leq 9) = 1 - P(x > 9)}$

$\mathbf{= 1 - 0.884}$

$\mathbf{= 0.116}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_1 = -1.2}$

$\mathbf{-1.2 = \frac{9 - \mu}{\sigma} \ldots\ldots. A}$

$\mathbf{P(x > 22) = 0.096}$

$\mathbf{P(x \leq 22) = 1 - P(x > 22)}$

$\mathbf{= 1 - 0.096}$

$\mathbf{= 0.904}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_2 = 1.31}$

$\mathbf{1.31 = \frac{22 - \mu}{\sigma} \ldots\ldots. B}$

$\mathbf{A: -1.2\,\sigma + \mu = 9}$

$\mathbf{B: 1.31\,\sigma + \mu = 22}$

$\mathbf{B - A: \sigma = 5.17}$

$\mathbf{\mu \approx 15.22}$

الاسم ________________________________

8 تقويم الوحدة، النموذج B

.1 يحتوي وعاء على أربع كرات حمراء وخمس كرات زرقاء. إذا سحبت كرة من الوعاء ولم ترجعها إليه، ثمّ سحبت كرة أخرى، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل التوزيع الاحتماليّ لعدد الكرات الزرقاء المسحوبة؟ يُعتمد المتغيّر X الذي يمثّل عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

Ⓐ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Ⓑ

X	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9}$	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

●

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9}$	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Ⓓ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

.2 لكي يمثّل الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا يجب أن تكون قيمة a

X	0	1	2
$P(X)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

● $\frac{1}{8}$

Ⓑ $\frac{1}{4}$

Ⓒ $\frac{4}{8}$

Ⓓ 5

.3 للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.2	$3k$	0.1	0.4

أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $P(X \leq 2)$؟

Ⓐ 0.1

Ⓑ 0.3

Ⓒ 0.4

● 0.6

.4 صُمّم مجسّم رباعيّ مرقّم من 1 إلى 4 بحيث تكون إمكانيّة الحصول على العددين الفرديّين عند رميه أكبر. يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتماليّ لنواتج تجربة رمي هذا المجسّم. أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لتجربة رمي المجسّم.

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.4	0.1	0.4	0.1

Ⓐ 0.55

Ⓑ 1

Ⓒ 2

● 2.2

5. إذا كانت القيمة المتوقّعة للمتغيّر العشوائيّ X هي $\mathrm{E}(X) = 3$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 3X + 4$؟

Ⓐ 9

Ⓑ 13

Ⓒ 27

Ⓓ 31

---

6. إذا كان تباين المتغيّر العشوائيّ X هو $\mathrm{Var}(X) = 16$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الانحراف المعياريّ للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 2X + 5$؟

Ⓐ 8

Ⓑ $\sqrt{69}$

Ⓒ 64

Ⓓ 69

---

7. قرص دوّار مقسّم إلى عشرة أجزاء متساوية تحمل أرقامًا، ثلاثة أجزاء منه تحمل الرقم 1، وجزء واحد يحمل الرقم 2، وجزآن يحملان الرقم 3، والأجزاء المتبقّية تحمل الرقم 4
إذا قمت بتدوير هذا القرص، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للرقم الذي سيتوقّف عنده مؤشّر القرص؟

Ⓐ 1

Ⓑ 2.7

Ⓒ 2.9

Ⓓ 3

8. للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{5k}{3}x \qquad x = 3, 6, 9, 12, 15$$

أنشئ جدولًا يبيّن التوزيع الاحتماليّ للمتغيّر العشوائيّ X. أوجد قيمة k، ثمّ أوجد قيمة الانحراف المعياريّ σ.

X	3	6	9	12	15
$\mathrm{P}(X)$	$5k$	$10k$	$15k$	$20k$	$25k$

$$5k + 10k + 15k + 20k + 25k = 1$$

$$k = \frac{1}{75}$$

X	3	6	9	12	15
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathrm{E}(X) = 3 \times \frac{1}{15} + 6 \times \frac{2}{15} + 9 \times \frac{1}{5} + 12 \times \frac{4}{15} + 15 \times \frac{1}{3} = 11$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \mathrm{E}(X)\right]^2 \mathrm{P}(x_i)$$

$$= (3-11)^2 \times \frac{1}{15} + (6-11)^2 \times \frac{2}{15} + (9-11)^2 \times \frac{1}{5} + (12-11)^2 \times \frac{4}{15} + (15-11)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$= 14$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

.9 أظهر استطلاع للرأي أجرته إدارة إحدى المدارس أنّ 25% من طلّاب المدرسة يعترضون على الزيّ الذي اعتمدته إدارة المدرسة للعام الدراسيّ القادم. اختارت الإدارة 4 طلّاب بشكل عشوائيّ لسؤالهم عن رأيهم. أوجد التوزيع الاحتماليّ لأن يكون بين هؤلاء الطلّاب الأربعة من لديه هذا الاعتراض. أنشئ جدولًا لهذا التوزيع الاحتماليّ، ثمّ أوجد القيمة المتوقّعة وقيمة الانحراف المعياريّ.

$$\mathrm{P}(X = x) = {}_4\mathrm{C}_x(0.25)^x(0.75)^{4-x}$$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\mathrm{P}(0) = {}_4\mathrm{C}_0(0.25)^0(0.75)^4 = 0.3164$$
$$\mathrm{P}(1) = {}_4\mathrm{C}_1(0.25)^1(0.75)^3 = 0.4219$$
$$\mathrm{P}(2) = {}_4\mathrm{C}_2(0.25)^2(0.75)^2 = 0.2109$$
$$\mathrm{P}(3) = {}_4\mathrm{C}_3(0.25)^3(0.75)^1 = 0.0469$$
$$\mathrm{P}(4) = {}_4\mathrm{C}_4(0.25)^4(0.75)^0 = 0.0039$$

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = x)$	0.3164	0.4219	0.2109	0.0469	0.0039

$$\mathrm{E}(X = x) = np = 4 \times 0.25 \approx 1$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times 0.25 \times 0.75} \approx 0.866$$

.10 أيّ من الخيارات التالية يمثّل تجربة ذات حدّين؟

Ⓐ يتمّ تسديد ثلاث كرات من نقطة الجزاء إلى حارس المرمى في لعبة كرة القدم. احتمال أن يصدّ الكرة الأولى هو 40%، ثمّ يتزايد هذا الاحتمال مع كلّ تسديدة تالية بمعدّل 10%

Ⓑ ترمي مكعّبًا منتظمًا مرقّمًا من 1 إلى 6 خمس مرّات. افترض أنّ احتمالات الحصول على أيّ رقم في المرّات الخمس متساوية. "النجاح" هو الحصول على العدد 4 في كلّ رمية.

Ⓒ تقوم وزارة الصحّة بقياس أطوال الأطفال في رياض الأطفال، وتصنّف أعدادهم الإجماليّة ضمن فئات طوليّة.

Ⓓ في صفّ يضمّ 20 طالبًا، 5 طلّاب فقط حصلوا على الدرجة الممتازة في اختبار الفيزياء. تختار أحد طلّاب الصفّ ثمّ تختار طالبًا آخر، والنجاح هو أن تختار طالبًا واحدًا على الأقلّ حصل على الدرجة الممتازة في الاختبار.

.11 تصيب 75% من الأسهم التي يرميها مهنّد بالقوس دائرة منتصف الهدف. إذا رمى مهنّد 15 سهمًا، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لعدد الأسهم التي تصيب دائرة منتصف الهدف؟

Ⓐ 11.25

Ⓑ 15

Ⓒ 21.26

Ⓓ 26.25

.12 أوجد قيمة كلّ من التباين والانحراف المعياريّ للمعطيات الواردة في التمرين السابق.

$$\mathrm{Var}(X) = npq = 15 \times 0.75 \times 0.25 = 2.8125$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{2.8125} \approx 1.677$$

.13 يتضمّن اختبار القبول في إحدى الكلّيّات 8 أسئلة لاختبار مستوى الذكاء. لكلّ سؤال 3 خيارات للإجابة. افترض أنّ أحد الطلّاب المتقدّمين يختار إجابات الأسئلة بشكل عشوائيّ، وأنّ احتمال اختياره الإجابة الصحيحة هو 33%، أوجد احتمال أن تكون إجابات هذا الطالب عن 4 أسئلة على الأكثر صحيحة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

أفترض أنّ عدد الإجابات الصحيحة هو X

$$\mathbf{P}(X \le 4) = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2) + \mathbf{P}(3) + \mathbf{P}(4)$$

$$= {}_8C_0(0.33)^0(0.67)^8 + {}_8C_1(0.33)^1(0.67)^7 + {}_8C_2(0.33)^2(0.67)^6 + {}_8C_3(0.33)^3(0.67)^5 + {}_8C_4(0.33)^4(0.67)^4$$

$$= 0.04 + 0.16 + 0.28 + 0.27 + 0.17$$

$$\approx 0.92$$

.14 أجرت إدارة إحدى المدارس الثانويّة استطلاعًا للرأي، شمل ثلاثة طلاب من كلّ شعبة من أربع شعب من الصفّين الحادي عشر والثاني عشر. كان الهدف من الاستطلاع معرفة ما إذا كان الطلّاب يؤيّدون قرار تخصيص حصّة دراسيّة كلّ أسبوع لتعلّم برمجة الروبوتات. إذا كان 38% من الطلّاب الذين شاركوا في الاستطلاع يؤيّدون هذا القرار، أوجد احتمال أن يكون 8 منهم لا يؤيّدونه.

عدد الطلّاب المشاركين في الاستطلاع هو 12، وبالتالي، يمكن حساب الاحتمالات باستعمال الصيغة

$$\mathbf{P}(X = x) = {}_{12}C_x(0.38)^x(0.62)^{12-x}$$

حيث $x = 0, ..., 12$.

احتمال أن يكون 8 من هؤلاء الطلّاب لا يؤيّدون القرار يساوي احتمال أن يكون 4 منهم يؤيّدونه.

$$\mathbf{P}(4) = {}_{12}C_4(0.38)^4(0.62)^8 = 0.225$$

.15 أوجد قيمة الاحتمال $P(x < 3.8)$ حيث $X \sim N(2, 9)$.

ألاحظ في الصيغة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أنّ $\sigma = 3$ و $\mu = 2$، إذن:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.8 - 2}{3} = 0.6$$

$$\mathbf{P}(x < 3.8) = \mathbf{P}(z < 0.6) = 0.7257$$

.16 لتكن f دالّة الكثافة الاحتماليّة للمتغيّر المتّصل X. أيّ من العبارات التالية غير صحيحة؟

Ⓐ تكون الدرجة المعياريّة z موجبة إذا كان $x \ge \mu$ وسالبة إذا كان $x < \mu$.

Ⓑ منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$

● تفيد القاعدة التجريبيّة أنّ 68% من المساحة تحت منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$

Ⓓ يمكن أن تستنتج من تناظر المنحنى أنّ المساحة الواقعة إلى يمين الوسط الحسابيّ تساوي المساحة الواقعة إلى يساره، وأنّ كلتيهما تساوي 0.5

.17 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \le 0.35)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.5199

Ⓑ 0.6179

● 0.6368

Ⓓ 0.9115

18. أيّ الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \geq 1.2)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.1151

Ⓑ 0.4207

Ⓒ 0.5793

Ⓓ 0.8849

---

19. إذا كان $X \sim N(0, 1)$، أثبت بكتابة كلّ الخطوات أنّ:

$P(-0.75 \leq x \leq 1.72) = P(-1.72 \leq x \leq 0.75)$

$\mathbf{P(-0.75 \leq x \leq 1.72)}$

$\mathbf{= P(x \leq 1.72) - P(x \leq -0.75)}$

$\mathbf{= P(x \geq -1.72) - P(x \geq 0.75)}$

$\mathbf{= [1 - P(x \leq -1.72)] - [1 - P(x \leq 0.75)]}$

$\mathbf{= P(x \leq 0.75) - P(x \leq -1.72)}$

$\mathbf{= P(-1.72 \leq x \leq 0.75)}$

20. للمتغيّر العشوائيّ X توزيع طبيعيّ. احتمال أن تكون قيمة X أكبر من 8 هو 78.9%، واحتمال أن تكون قيمة X أكبر من 20 هو 10.1%، أوجد قيمة كلّ من المتوسّط والانحراف المعياريّ لهذا التوزيع.

$\mathbf{P(x > 8) = 0.789}$

$\mathbf{P(x \leq 8) = 1 - P(x > 8)}$

$\mathbf{= 1 - 0.789}$

$\mathbf{= 0.211}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_1 = -0.8}$

$\mathbf{-0.8 = \frac{8 - \mu}{\sigma} \; ....A}$

$\mathbf{P(x > 20) = 0.101}$

$\mathbf{P(x \leq 20) = 1 - P(x > 20)}$

$\mathbf{= 1 - 0.101}$

$\mathbf{= 0.899}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_2 = 1.28}$

$\mathbf{1.28 = \frac{20 - \mu}{\sigma} \; ....B}$

$\mathbf{A: -0.8\,\sigma + \mu = 8}$

$\mathbf{B: 1.28\,\sigma + \mu = 20}$

$\mathbf{B - A: \sigma = 5.77}$

$\mathbf{\mu \approx 12.62}$

الاسم ______________________________

8 تقويم الوحدة، النموذج C

.1 يحتوي وعاء على خمس كرات سوداء وأربع كرات بيضاء. إذا سحبت كرة من الوعاء ولم ترجعها إليه، ثمّ سحبت كرة أخرى، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل التوزيع الاحتماليّ لعدد الكرات البيضاء المسحوبة؟ يُعتمد المتغيّر X الذي يمثّل عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

Ⓐ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

Ⓑ

X	1	2
$P(X)$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

Ⓒ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

Ⓓ

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

.2 لكي يمثّل الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا يجب أن تكون قيمة a

X	1	2	4
$P(X)$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Ⓐ $\frac{1}{8}$

Ⓑ $\frac{1}{2}$

Ⓒ $\frac{3}{8}$

Ⓓ 4

.3 للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

X	2	5	6	7
$P(X)$	0.4	$3k$	0.1	0.2

أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $P(X \le 6)$؟

Ⓐ 0.1

Ⓑ 0.8

Ⓒ 0.6

Ⓓ 0.9

.4 صُمّم مجسّم رباعيّ مرقّم من 1 إلى 4 بحيث تكون إمكانيّة الحصول على العددين الزوجيّين عند رميه أكبر. يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتماليّ لنواتج تجربة رمي هذا المجسّم. أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لتجربة رمي المجسّم.

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	0.4	0.1	0.4

Ⓐ 0.5

Ⓑ 1

Ⓒ 2

Ⓓ 2.8

5. إذا كانت القيمة المتوقّعة للمتغيّر العشوائيّ X هي $\mathrm{E}(X) = 4$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 5X + 2$؟

Ⓐ 20

Ⓑ 22

Ⓒ 100

Ⓓ 102

6. إذا كان تباين المتغيّر العشوائيّ X هو $\mathrm{Var}(X) = 16$، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الانحراف المعياريّ للتحويل الخطّيّ للمتغيّر العشوائيّ $Y = 4X + 1$؟

Ⓐ 16

Ⓑ $\sqrt{257}$

Ⓒ 256

Ⓓ 257

7. قرص دوّار مقسّم إلى عشرة أجزاء متساوية تحمل أرقامًا، أربعة أجزاء منه تحمل الرقم 1، وثلاثة أجزاء تحمل الرقم 2، وجزء يحمل الرقم 3، والأجزاء المتبقّية تحمل الرقم 4

إذا قمت بتدوير هذا القرص، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة للرقم الذي سيتوقّف عنده مؤشّر القرص؟

Ⓐ 1

Ⓑ 2

Ⓒ 2.1

Ⓓ 2.5

8. للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{3k}{4}x \qquad x = 4, 8, 12, 16, 20$$

أنشئ جدولًا يبيّن التوزيع الاحتماليّ للمتغيّر العشوائيّ X. أوجد قيمة k، ثمّ أوجد قيمة الانحراف المعياريّ σ.

X	4	8	12	16	20
$\mathrm{P}(X)$	$3k$	$6k$	$9k$	$12k$	$15k$

$$3k + 6k + 9k + 12k + 15k = 1$$

$$k = \frac{1}{45}$$

X	4	8	12	16	20
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

$$\mathrm{E}(X) = 4 \times \frac{1}{15} + 8 \times \frac{2}{15} + 12 \times \frac{1}{5} + 16 \times \frac{4}{15} + 20 \times \frac{1}{3} = 14.7$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathrm{E}(X)]^2 \, \mathrm{P}(x_i)$$

$$= (4 - 14.7)^2 \times \frac{1}{15} + (8 - 14.7)^2 \times \frac{2}{15} + (12 - 14.7)^2 \times \frac{1}{5} + (16 - 14.7)^2 \times \frac{4}{15} + (20 - 14.7)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$\approx 24.89$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{24.89} \approx 4.99$$

9. أظهر استطلاع للرأي أجرته إدارة إحدى المدارس أنّ 24% من طلّاب المدرسة يعترضون على اعتماد مادّة الفنون ضمن حصص التعلّم عن بعد. اختارت الإدارة 5 طلّاب بشكل عشوائيّ لسؤالهم عن رأيهم. أوجد التوزيع الاحتماليّ لأن يكون بين هؤلاء الطلّاب الخمسة من لديه هذا الاعتراض. أنشئ جدولًا لهذا التوزيع الاحتماليّ، ثمّ أوجد القيمة المتوقّعة وقيمة الانحراف المعياريّ.

$P(X = x) = {}_5C_x(0.24)^x(0.76)^{5-x}$

حيث $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$P(0) = {}_5C_0(0.24)^0(0.76)^5 = 0.2535$
$P(1) = {}_5C_1(0.24)^1(0.76)^4 = 0.4003$
$P(2) = {}_5C_2(0.24)^2(0.76)^3 = 0.2528$
$P(3) = {}_5C_3(0.24)^3(0.76)^2 = 0.0798$
$P(4) = {}_5C_4(0.24)^4(0.76)^1 = 0.0126$
$P(5) = {}_5C_5(0.24)^5(0.76)^0 = 0.0007$

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.2535	0.4003	0.2528	0.0798	0.0126	0.0007

$E(X = x) = np = 5 \times 0.24 \approx 1.2$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \times 0.24 \times 0.76} \approx 0.955$

---

10. أيّ من الخيارات التالية يمثّل تجربة ذات حدَّين؟

Ⓐ يشارك منصور في لعبة الرماية بالمسدّس على الأطباق. احتمال أن يصيب الطبق من المحاولة الأولى هو 50%، ثمّ يتزايد هذا الاحتمال في كلّ محاولة تالية بمعدّل 10%

● ترمي مكعّبًا منتظمًا مرقّمًا من 1 إلى 6 أربع مرّات. افترض أنّ احتمالات الحصول على أيّ رقم في المرّات الأربع متساوية. "النجاح" هو الحصول على العدد 3 في كلّ رمية.

Ⓒ تقوم وزارة الصحّة بقياس محيط رأس الأطفال في رياض الأطفال، وتصنّف أعدادهم الإجماليّة ضمن فئات طوليّة..

Ⓓ في صفّ يضمّ 25 طالبًا، 7 طلّاب فقط حصلوا على الدرجة الممتازة في اختبار الكيمياء. تختار أحد طلّاب الصفّ ثمّ تختار طالبًا آخر، والنجاح هو أن تختار طالبًا واحدًا على الأقلّ حصل على الدرجة الممتازة في الاختبار.

11. تصيب 65% من الأسهم التي يرميها مهنّد بالقوس دائرة منتصف الهدف. إذا رمى مهنّد 12 سهمًا، فأيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لعدد الأسهم التي تصيب دائرة منتصف الهدف؟

Ⓐ 1.35

Ⓑ 2.79

● 7.8

Ⓓ 12

---

12. أوجد قيمة كلّ من التباين والانحراف المعياريّ للمعطيات الواردة في التمرين السابق.

$Var(X) = npq = 12 \times 0.65 \times 0.35 = 2.73$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.73} \approx 1.652$

13. يتضمّن اختبار القبول في إحدى الكلّيّات 7 أسئلة لاختبار مستوى الذكاء. لكلّ سؤال 3 خيارات للإجابة. افترض أنّ أحد الطلّاب المتقدّمين يختار إجابات الأسئلة بشكل عشوائيّ، وأنّ احتمال اختياره الإجابة الصحيحة هو 25%، أوجد احتمال أن تكون إجابات هذا الطالب عن 3 أسئلة على الأكثر صحيحة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

أفترض أنّ عدد الإجابات الصحيحة هو X

$$P(X \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= {}_7C_0(0.25)^0(0.75)^7 + {}_7C_1(0.25)^1(0.75)^6 + {}_7C_2(0.25)^2(0.75)^5 + {}_7C_3(0.25)^3(0.75)^4$$

$$= 0.13 + 0.31 + 0.31 + 0.17$$

$$\approx 0.92$$

---

14. أجرت إدارة إحدى المدارس الثانويّة استطلاعًا للرأي، شمل أربعة طلاب من كلّ شعبة من أربع شعب من الصفّين الحادي عشر والثاني عشر. كان الهدف من الاستطلاع معرفة ما إذا كان الطلّاب يؤيّدون قرار تخصيص حصّة دراسيّة كلّ أسبوعين لتعلّم لعبة الشطرنج. إذا كان 40% من الطلّاب الذين شاركوا في الاستطلاع يؤيّدون هذا القرار، أوجد احتمال أن يكون 12 منهم لا يؤيّدونه.

عدد الطلّاب المشاركين في الاستطلاع هو 16، وبالتالي، يمكن حساب الاحتمالات باستعمال الصيغة

$$P(X = x) = {}_{16}C_x(0.4)^x(0.6)^{16-x}$$

حيث $x = 0, \ldots, 16$.

احتمال أن يكون 12 من هؤلاء الطلّاب لا يؤيّدون القرار يساوي احتمال أن يكون 4 منهم يؤيّدونه.

$$P(4) = {}_{16}C_4(0.4)^4(0.6)^{12} = 0.1014$$

---

15. أوجد قيمة الاحتمال $P(x < 4.4)$ حيث $X \sim N(3, 4)$.

ألاحظ في الصيغة $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أنّ $\sigma = 2$ و $\mu = 3$، إذن:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4.4 - 3}{2} = 0.7$$

$$P(x < 4.4) = P(z < 0.7) = 0.7580$$

---

16. لتكن f دالّة الكثافة الاحتماليّة للمتغيّر المتّصل X. أيّ من العبارات التالية غير صحيحة؟

Ⓐ تكون الدرجة المعياريّة z موجبة إذا كان $x \geq \mu$ وسالبة إذا كان $x < \mu$.

Ⓑ منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$

Ⓒ تفيد القاعدة التجريبيّة أنّ 68% من المساحة تحت منحنى دالّة الكثافة الاحتماليّة $f(x)$ تقع بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$

● يمكن أن تستنتج من تناظر المنحنى أنّ المساحة الواقعة إلى يمين الانحراف المعياري تساوي المساحة الواقعة إلى يساره، وأنّ كلتيهما تساوي 0.4

---

17. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \leq 0.45)$ باستعمال الجدول؟

Ⓐ 0.5199

Ⓑ 0.6554

● 0.6736

Ⓓ 0.9265

.18 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال الطبيعيّ $P(z \geq 1.8)$ باستعمال الجدول؟

- (A) 0.0359
- (B) 0.7881
- (C) 0.9641
- (D) 0.9706

.19 إذا كان $X \sim N(0, 1)$، أثبت بكتابة كلّ الخطوات أنّ:

$P(-0.76 \leq x \leq 1.69) = P(-1.69 \leq x \leq 0.76)$

$\mathbf{P(-0.76 \leq x \leq 1.69)}$

$\mathbf{= P(x \leq 1.69) - P(x \leq -0.76)}$

$\mathbf{= P(x \geq -1.69) - P(x \geq 0.76)}$

$\mathbf{= [1 - P(x \leq -1.69)] - [1 - P(x \leq 0.76)]}$

$\mathbf{= P(x \leq 0.76) - P(x \leq -1.69)}$

$\mathbf{= P(-1.69 \leq x \leq 0.76)}$

.20 للمتغيّر العشوائيّ X توزيع طبيعيّ. احتمال أن تكون قيمة X أكبر من 10 هو 85.3%، واحتمال أن تكون قيمة X أكبر من 19 هو 9.8%، أوجد قيمة كلّ من المتوسّط والانحراف المعياريّ لهذا التوزيع.

$\mathbf{P(x > 10) = 0.853}$

$\mathbf{P(x \leq 10) = 1 - P(x > 10)}$

$\mathbf{= 1 - 0.853}$

$\mathbf{= 0.147}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_1 = -1.05}$

$\mathbf{-1.05 = \frac{10 - \mu}{\sigma} \ ....A}$

$\mathbf{P(x > 19) = 0.098}$

$\mathbf{P(x \leq 19) = 1 - P(x > 19)}$

$\mathbf{= 1 - 0.098}$

$\mathbf{= 0.902}$

باستعمال الجدول، $\mathbf{z_2 = 1.29}$

$\mathbf{1.29 = \frac{19 - \mu}{\sigma} \ ....B}$

$\mathbf{A: -1.05\ \sigma + \mu = 10}$

$\mathbf{B: 1.29\ \sigma + \mu = 19}$

$\mathbf{B - A: \sigma \approx 3.85}$

$\mathbf{\mu \approx 14.04}$

الاسم ______________________________

8 تقويم الأداء، النموذج A

يُعدّ المركّب الكيميائيّ المعروف بالديوكسين (Dioxin) من الملوّثات البيئيّة الشديدة الضرر، فهو قد يسبّب مشاكل في الإنجاب والنموّ، ويؤدّي إلى تضرّر الجهاز المناعيّ، وصولًا إلى التسبّب في الإصابة بمرض السرطان.

يمكن أن تصل مادّة الديوكسين إلى جسم الانسان نتيجة استعمال مبيدات الحشرات التي تحتوي هذه المادّة، أو عبر زراعة الخضار والفواكه في تربة ملوّثة بهذه المادّة. لذا، تقوم الهيئات المتخصّصة في المراقبة الصحّيّة والبيئيّة بتحديد نسب مئويّة قصوى من ترسّبات الديوكسين يجب عدم تجاوزها في التربة ليُسمَح بالزراعة فيها.

1. أظهرت الدراسات أنّ 94% من جميع عيّنات التربة المأخوذة من المنطقة A تحتوي على ترسّبات من مادّة الديوكسين لا تتجاوز النسب المسموح بها. بناءً على ذلك، وللتحقّق من النتائج، اختار الباحثون 30 عيّنة عشوائيّة من التربة من ثلاثين موقعًا مختلفًا في المنطقة A.

a. وضّح لماذا تُعدُّ هذه التجربة تجربة ذات حدّين.

هذه التجربة تحقّق الشروط الثلاثة المطلوبة:

- **تقوم التجربة على تكرار المحاولة 30 مرّة. (عدد العيّنات).**
- **لكلّ محاولة (عيّنة) احتمالان: النجاح (أي أن لا تتجاوز ترسّبات الديوكسين في التربة النسب المسموح بها)، أو الفشل (أي أن تتجاوز ترسّبات الديوكسين في التربة النسب المسموح بها).**
- **قيم احتمال النجاح في كلّ محاولة (في كلّ عيّنة) متساوية.**

b. أوجد قيمة كلّ من p (احتمال النجاح) و q (احتمال الفشل) لهذه التجربة.

احتمال أن لا تتجاوز العيّنة النسب المسموح بها هو $p = 0.94$

احتمال أن تتجاوز العيّنة النسب المسموح بها هو $q = 1 - p = 1 - 0.94 = 0.06$

c. اكتب دالّة التوزيع الاحتماليّ لهذه التجربة، حيث يمثّل المتغيّر المنفصل X لهذه التجربة عدد العيّنات (من أصل 30) التي لا تتجاوز ترسّبات الديوكسين فيها النسب المسموح بها.

$$\mathrm{P}(X = r) = {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, p^{r} q^{n-r}$$

حيث $n = 30$، $p = 0.94$، $q = 0.06$

$$\mathrm{P}(X = r) = {}_{30}\mathrm{C}_{r}\,(0.94)^{r}\,(0.06)^{30-r}$$

d. أوجد احتمال أن يحتوي 90% من هذه العيّنات على ترسّبات لا تتجاوز النسب المسموح بها من مادّة الديوكسين.

90% من العيّنات يساوي

$$X = 30 \times 0.9 = 27$$

إذن،

$$\mathrm{P}(X = 27) = {}_{30}\mathrm{C}_{27}\,(0.94)^{27}\,(0.06)^{30-27} \approx 0.165$$

e. أوجد القيمة المتوقّعة للمتغيّر X، ثمّ فسّر هذه القيمة.

القيمة المتوقّعة:

$$E(X) = np = 30 \times 0.94 = 28.2$$

أي إنّه، عند اختيار 30 عيّنة عشوائيّة من التربة من المنطقة A، من المتوقّع أن لا تتجاوز ترسّبات الديوكسين في 28 عيّنة تقريبًا النسب المسموح بها.

2. أجرى الباحثون في المنطقة B أيضًا دراسة لفحص ترسّبات الديوكسين في التربة، وأخذوا n عيّنة مختلفة لفحصها. هذه التجربة هي تجربة ذات حدَّين، المتغيّر المنفصل فيها Y هو عدد العيّنات (من أصل n عيّنة) التي لا تتجاوز ترسّبات الديوكسين فيها النسب المسموح بها.

أظهرت الدراسة أنّ القيمة المتوقّعة للمتغيّر Y هي 38.4 وأنّ التباين يساوي 1.536

a. أوجد قيمة كلّ من n و p و q لهذه التجربة، ثمّ فسّر معنى كلّ قيمة من هذه القيم.

$$E(Y) = np = 38.4$$

و $\mathrm{Var}(Y) = npq = 1.536$

$$q = \frac{npq}{np} = \frac{1.536}{38.4} = 0.04$$

لكنّ $p = 1 - q$،

إذن، $p = 1 - 0.04 = 0.96$

$$np = 38.4,\ n = \frac{38.4}{0.96} = 40$$

عدد العيّنات العشوائيّة هو 40 عيّنة.

احتمال أن لا تتجاوز العيّنة النسب المسموح بها هو $p = 0.96$

احتمال أن تتجاوز العيّنة النسب المسموح بها هو $q = 0.04$

b. أوجد احتمال أن يحتوي 90% من العيّنات المأخوذة من المنطقة B على ترسّبات لا تتجاوز النسب المسموح بها من مادّة الديوكسين.

90% من العيّنات يساوي

$$Y = 40 \times 0.9 = 36$$

إذن،

$$P(Y = 36) = {}_{40}C_{36}\,(0.96)^{36}\,(0.04)^{40-36}$$
$$\approx 0.054$$

الاسم ________________

8 تقويم الأداء، النموذج B

يستخدم عمال توصيل الطلبات في شبكة لمطاعم الوجبات السريعة 50 درّاجة ناريّة لتوصيل الطلبات إلى الزبائن.

وقّعت إدارة شبكة المطاعم مع مركز لتصليح الآليّات وصيانتها عقدًا لصيانة تلك الدرّاجات لمدّة 3 سنوات، تدفع الإدارة بموجبه QR 200 عن كلّ درّاجة ناريّة.

1. تبيّن تقارير الاستهلاك أنّ تكلفة صيانة 6% من هذه الدرّاجات خلال 3 سنوات تبلغ QR 400 للدرّاجة الواحدة، وأنّ تكلفة صيانة 14% منها تبلغ QR 300 للدرّاجة الواحدة. أمّا تكلفة صيانة الدرّاجة الواحدة من بقيّة الدرّاجات فتبلغ QR 120 تقريبًا خلال 3 سنوات.

ليكن X المتغيّر العشوائيّ الذي يمثّل قيمة الفائدة التي تجنيها إدارة شبكة المطاعم من صيانة درّاجة ناريّة واحدة بالريال القطريّ.

a. أنشئ جدول التوزيع الاحتماليّ لقيم المتغيّر X.

القيم المتوقّعة للمتغير X هي:

$120 - 200 = -80$

$300 - 200 = 100$

$400 - 200 = 200$

X	−80	100	200
P(X)	0.8	0.14	0.06

b. أوجد القيمة المتوقّعة للمتغيّر X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$$
$$= (-80 \times 0.8) + (100 \times 0.14) + (200 \times 0.06)$$
$$= -38$$

c. قدّر، بناءً على القيمة المتوقّعة للمتغيّر X، قيمة الربح الذي يُتوقَّع أن يحقّقه مركز الصيانة من تنفيذ هذا العقد.

تبيّن القيمة المتوقّعة أنّ إدارة شبكة المطاعم تخسر ما معدّله QR 38 مقابل صيانة كلّ درّاجة ناريّة. إذن، يربح مركز الصيانة ما معدّله $50 \times 38 = 1\,900$، أي 1 900 ريال قطريّ مقابل تنفيذ العقد.

2. لاحظت فرق الصيانة أنّ استهلاك الدرّاجات الناريّة من الوقود يتبع توزيعًا احتماليًّا طبيعيًّا بمتوسّط استهلاك يساوي 4.4 لتر لكلّ 100 كيلومتر، وانحراف معياريّ يساوي 1.2

a. أعطِ وصفًا إجماليًّا لمعدّل استهلاك الدرّاجات الناريّة من الوقود باستعمال القاعدة التجريبيّة.

$\mu = 4.4$ و $\sigma = 1.2$

باستعمال القاعدة التجريبيّة:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.68$$
$$P(3.2 \leq x \leq 5.6) = 0.68$$

باستعمال القاعدة التجريبيّة:

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$$
$$P(2 \leq x \leq 6.8) = 0.95$$

باستعمال القاعدة التجريبيّة:

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$$
$$P(0.8 \leq x \leq 8) = 0.997$$

إذن، معدّل استهلاك 68% من الدرّاجات من الوقود لكلّ 100 كيلومتر يتراوح بين 3.2 L و 5.6 L

ومعدّل استهلاك 95% من الدرّاجات من الوقود لكلّ 100 كيلومتر يتراوح بين 2 L و 6.8 L

ومعدّل استهلاك 99.7% من الدرّاجات من الوقود لكلّ 100 كيلومتر يتراوح بين 0.8 L و 8 L

b. مع ارتفاع أسعار الوقود وتكلفة الصيانة، تريد إدارة شبكة المطاعم إمّا أن تتوقّف عن استخدام الدرّاجات الناريّة التي يزيد معدّل استهلاكها من الوقود عن 5.3 L/100 Km أو أن تستبعد الدرّاجات الناريّة التي تكلفة صيانتها عالية (أي التي تكلفة صيانتها QR 300 و QR 400 خلال 3 سنوات). أيّ من هذين الخيارين يسمح للإدارة بإيقاف أقلّ عدد من الدرّاجات الناريّة عن العمل؟

بناءً على معدّل استهلاك الوقود:

عند اختيار درّاجة ناريّة واحدة، أوجد احتمال أن يكون معدّل استهلاكها من الوقود أكثر من 5.3 L/100 Km

بما أنّ معدّل استهلاك الوقود يتبع توزيعًا طبيعيًّا، فإنّ القيمة المعياريّة المناظرة للقيمة $x = 5.3$ هي:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{5.3 - 4.4}{1.2} = 0.75$$

إذن،

$$\begin{aligned} P(z > 0.75) &= 1 - P(z \leq 0.75) \\ &= 1 - 0.7734 \\ &= 0.2266 \end{aligned}$$

$$50 \times 0.2266 = 11.33$$

أي سيتمّ إيقاف 11 درّاجة تقريبًا عن العمل.

بناءً على تكلفة الصيانة العالية:

بما أن تكلفة صيانة 16% من الدرّاجات هي QR 300 وتكلفة صيانة 4% من الدرّاجات هي QR 400،
إذن وفق الخيار الثاني ستم استبعاد 20% من الدرّاجات.

$$50 \times \frac{20}{100} = 10$$

إذن، الخيار الثاني هو الذي يسمح بإيقاف أقلّ عدد من الدرّاجات الناريّة عن العمل.

الاسم ________________________________

اختبار نهاية السنة الدراسيّة

.1 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$؟

Ⓐ 0 ● 2

Ⓑ 1 Ⓓ غير معرّفة

.2 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos 4x$؟

Ⓐ -1 ● 1

Ⓑ 0 Ⓓ 4

.3 حدّد قيمة x حيث الدالّة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ غير متّصلة، وحدّد نوع عدم الاتّصال.

الدالّة غير متّصلة عند $x = 2$

نوع عدم الاتّصال هو عدم اتّصال غير قابل للإزالة.

.4 لتكن الدالّة $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$، صِلْ كلّ عبارة إلى اليمين بما يناسبها إلى اليسار.

الدالّة غير متّصلة عند $x = 1$	عدم الاتّصال لانهائيّ
الدالّة غير متّصلة عند $x = -2$	غير صحيح
الدالّة غير متّصلة عند $x = -1$	عدم الاتّصال قابل للإزالة

.5 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = (x^2 - 2x)^2$؟

Ⓐ $(2x-2)(x^2-2x)$

● $(4x-4)(x^2-2x)$

Ⓒ $2(x^2-2x)$

Ⓓ $(x-1)(x^2-2x)$

.6 أيّ من الخيارات التالية يمثّل مشتقّة الدالّة $f(x) = e^{-\sqrt{2x^2+1}}$؟

Ⓐ $-2xe^{-\sqrt{2x^2+1}}$ Ⓒ $\frac{-4x}{\sqrt{2x^2+1}} e^{-\sqrt{2x^2+1}}$

Ⓑ $e^{-\sqrt{2x^2+1}}$ ● $\frac{-2x}{\sqrt{2x^2+1}} e^{-\sqrt{2x^2+1}}$

.7 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x^2 + y^2 + y + x - 2 = 0$ عند النقطة $(0, 0)$؟

Ⓐ $\frac{dy}{dx} = -3$ Ⓒ $\frac{dy}{dx} = 0$

● $\frac{dy}{dx} = -1$ Ⓓ $\frac{dy}{dx} = 1$

.8 أيّ من الخيارات التالية يمثّل المشتقّة الثانية للدالّة $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$؟

● $6x - 4$ Ⓒ $3x - 4$

Ⓑ $3x^2 - 4x$ Ⓓ 6

.9 أوجد القيم القصوى المحلّيّة للدالّة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

مجال الدالّة هو الفترة المفتوحة $]-\infty, \infty[$

$$f'(x) = x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$x = 0$ أو $x = -2$

المشتقّة f' معرّفة لكلّ قيم x. أجد قيم الدالّة عند القيم الحرجة.

للدالّة f قيمة عظمى محلّيّة عند $x = -2$ تساوي $f(-2) = \frac{7}{3}$، وقيمة صغرى محلّيّة عند $x = 0$ تساوي $f(0) = 1$.

.10 أيّ من الدوالّ التالية لها قيمة صغرى محلّيّة عند $x = -\frac{1}{2}$؟

Ⓐ $f(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ⓑ $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{x}$

● $f(x) = xe^{2x}$

Ⓓ $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

.11 مثّل الدالّة $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2$ بيانيًّا من خلال دراسة المجال، والمقاطع، والتناظر، والقيم القصوى، وفترات التزايد والتناقص، ونقاط الانعطاف، وفترات التقعّر إلى الأعلى أو الأسفل.

مجال الدالّة هو $]-\infty, \infty[$

المقطع x: $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ المقطع y: $(0, 0)$

التزايد والتناقص والقيم القصوى:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x = 0$$

$x = -1$ أو $x = 0$

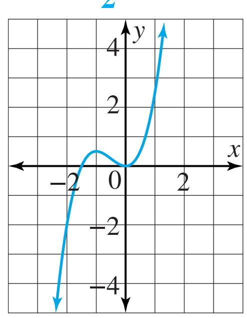
الدالّة متزايدة في الفترتين $]-\infty, -1]$ و $[0, \infty[$ ومتناقصة في الفترة $[-1, 0]$.

للدالّة قيمة عظمى محلّيّة عند $x = -1$ تساوي $f(-1) = \frac{1}{2}$، وقيمة صغرى محلّيّة عند $x = 0$ تساوي $f(0) = 0$

التقعّر ونقاط الانعطاف:

$$f''(x) = 6x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$



اتّجاه تقعّر منحنى الدالّة إلى الأسفل في الفترة $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ وإلى الأعلى في الفترة $\left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$ وللدالّة نقطة انعطاف عند $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

.12 إذا كان كلّ من x و y دالّة بدلالة t، وكانت تربط بين x و y المعادلة $x^2 - y = 3$، فإنّ

● $\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

Ⓑ $\frac{dy}{dt} = 2\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

Ⓒ $\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$

Ⓓ $\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$

.13 يتزايد طول مستطيل L بمعدّل 2 cm/s، بينما يتناقص عرضه W بمعدّل 4 cm/s، عندما يكون L = 8 cm و W = 4 cm، أوجد معدّل تغيّر مساحة هذا المستطيل. ماذا تلاحظ؟

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dW}{dt}L + \frac{dL}{dt}W = -4 \times 8 + 2 \times 4$$

$$= -24\ \text{cm}^2/\text{s}$$

ألاحظ أنّ مساحة المستطيل تتناقص لأن المشتقة الأولى سالبة.

.14 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $\int (4x^3 + 3x^2 + 1)\ dx$؟

Ⓐ $4x^4 + 3x^3 + x + C$

Ⓑ $x^4 + x^3 + x$

Ⓒ $4x^4 + 3x^3 + x$

● $x^4 + x^3 + x + C$

.15 أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $2\int -\cos x\ dx$؟

● $-2\sin x + C$

Ⓑ $2\sin x + C$

Ⓒ $\sin x + C$

Ⓓ $-2\cos x + C$

16. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل غير المحدود $-\int \frac{\cos x\, dx}{2+\sin x}$؟

Ⓐ $ln(2+\sin x)+C$

● $-ln|2+\sin x|+C$

Ⓒ $ln|2+\sin x|+C$

Ⓓ $-ln(2+\sin x)+C$

---

17. أوجد التكامل غير المحدود $\int x^3 \cos x\, dx$.

D		I
x^3	+	$\cos x$
$3x^2$	−	$\sin x$
$6x$	+	$-\cos x$
6	−	$-\sin x$
0		$\cos x$

إذن،

$$\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$$

---

18. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الدالّة $f(x)=\frac{-3x+7}{x^2+2x-3}$ في صورة جمع كسور جزئيّة ذات مقامات خطّيّة؟

Ⓐ $\frac{-3x}{x^2+2x-3}+\frac{7}{x^2+2x-3}$

Ⓑ $-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+3}$

● $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+3}$

Ⓓ $x-1-\frac{x+3}{4}$

---

19. أيّ من الخيارات التالية يمثّل التكامل المحدود $\int_0^1 (3x^2+e^x)\, dx$؟

Ⓐ 2

● e

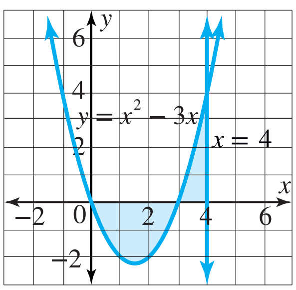
Ⓒ $1+e$

Ⓓ $3+e$

---

20. أوجد قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x)=x^2-3x$ والمحور x من $x=0$ إلى $x=4$، ثمّ مثّل الدالّة بيانيًّا وحدّد المساحة المطلوبة.

يبيّن الشكل أدناه هذه المساحة منقسمةً إلى قسمين، أحدهما يقع تحت المحور x والآخر فوقه.



$$\int_0^4 (x^2-3x)dx = \left|\int_0^3 (x^2-3x)\, dx\right| + \int_3^4 (x^2-3x)\, dx$$

$$= \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3\right| + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_3^4$$

$$= \frac{19}{3}$$

---

21. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالّة $f(x)=-x^2+5x-4$، ومنحنى الدالّة $g(x)=-x+4$؟

Ⓐ $-\frac{10}{3}$

● $\frac{4}{3}$

Ⓒ $\frac{10}{3}$

Ⓓ $\frac{16}{3}$

22. أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالّة $y = 2\sqrt[3]{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = 3$ حول المحور x؟

Ⓐ $36\sqrt[3]{9}$
Ⓑ $\frac{36}{5}\sqrt[3]{9}$
Ⓒ $36\pi\sqrt[3]{9}$
● $\frac{36}{5}\pi\sqrt[3]{9}$

23. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الحلّ العامّ للمعادلة $2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$؟

● $y^2 = x^3 + C$
Ⓑ $y^2 = x^3$
Ⓒ $2y^2 = 3x^3 + C$
Ⓓ $2y^2 = 3x^3$

24. ليكن $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة للمتّجه $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$؟

Ⓐ $\langle 3, 1\rangle$
● $\langle 5, 1\rangle$
Ⓒ $\left\langle \frac{9}{2}, 2\right\rangle$
Ⓓ $\left\langle -\frac{17}{2}, 5\right\rangle$

25. أثبت أنّ المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 2, 6\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -9, 3\rangle$ متعامدان.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle \cdot \langle -9, 3\rangle$$
$$= -18 + 18$$
$$= 0$$

26. أوجد قياس الزاوية بين المتّجهين $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, 1\rangle$ بطريقة جبريّة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{\langle 1, -1\rangle \cdot \langle -1, 1\rangle}{|\langle 1, -1\rangle| \cdot |\langle -1, 1\rangle|}$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -1$$
$$\theta = \cos^{-1}(-1) = \pm\pi$$

27. ليكن $A = (2, -2, 1)$ و $B = (3, -1, 2)$.
أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة التركيبيّة لِ $3\overrightarrow{AB}$؟

Ⓐ $\langle 1, 1, 1\rangle$
Ⓑ $\langle 3, -3, 3\rangle$
● $\langle 3, 3, 3\rangle$
Ⓓ $\langle 1, -1, 1\rangle$

28. أيّ من الخيارات التالية يمثّل ناتج الضرب القياسي للمتّجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، حيث $|\mathbf{u}| = 2$ و $|\mathbf{v}| = 5$، وقياس الزاوية بينهما يساوي $\frac{\pi}{4}$؟

Ⓐ 10
● $5\sqrt{2}$
Ⓒ $10\sqrt{2}$
Ⓓ $20\sqrt{2}$

29. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القياسيّة للعدد المركّب $\frac{2+i}{1+i}$؟

Ⓐ $1 + \frac{1}{2}i$
Ⓑ $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
Ⓒ $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
● $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

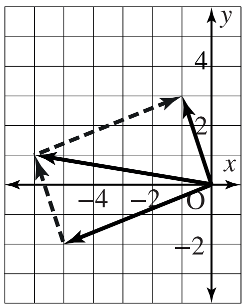
Z01_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_EOY_29236.indd 4 07/03/2022 5:58:31 PM

30. أيّ من الخيارات التالية ينطبق على تمثيل العددين المركّبين $3 - 2i$ و $3 + 2i$ في المستوى المركّب وعلى العلاقة بينهما؟

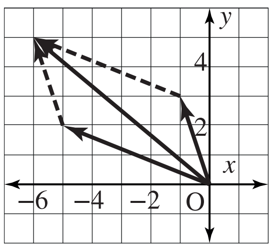
- العدد $3 - 2i$ تمثّله النقطة $A(3, -2)$، والعدد $3 + 2i$ تمثّله النقطة $B(3, 2)$. كلّ من العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور الحقيقيّ.
- Ⓑ العدد $3 - 2i$ تمثّله النقطة $A(3, -2)$، والعدد $3 + 2i$ تمثّله النقطة $B(3, 2)$، ولا علاقة بين العددين المركّبين.
- Ⓒ العدد $3 - 2i$ تمثّله النقطة $A(-2, 3)$، والعدد $3 + 2i$ تمثّله النقطة $B(2, 3)$. كلّ من العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور التخيّليّ.
- Ⓓ العدد $3 - 2i$ تمثّله النقطة $A(3, -2)$، والعدد $3 + 2i$ تمثّله النقطة $B(3, 2)$. كلّ من العددين المركّبين مرافق للآخر، والنقطتان متناظرتان عبر المحور التخيّليّ.

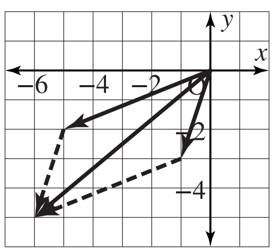
31. أيّ من الخيارات التالية يمثّل مجموع العددين $(-1 - 3i) + (-5 - 2i)$ بيانيًّا في المستوى المركّب؟

Ⓐ

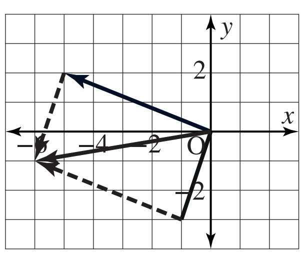


Ⓑ





Ⓓ



32. أيّ من الخيارات التالية يمثّل الصورة القطبيّة لناتج قسمة العدد $z_1 = 1 + i$ على العدد $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$؟

- Ⓐ $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)$
- Ⓑ $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$
- Ⓒ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$

Z01_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_EOY_29236.indd 5
07/03/2022 5:58:33 PM

.33 أيّ من الخيارات التالية يمثّل $(1-i)^4$ بالصورة القطبيّة؟

Ⓐ $4(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$

Ⓑ $4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

● $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Ⓓ $\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$

.34 أيّ من الخيارات التالية ليس جذرًا من الدرجة الثالثة للعدد المركّب $z = 125(\cos 60° + i \sin 60°)$؟

Ⓐ $5\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$

Ⓑ $5\left[\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right]$

Ⓒ $5\left[\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right]$

● $5\left[\cos\left(\frac{17\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{9}\right)\right]$

.35 للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.16	$3k$	0.3	0.24

أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال $P(X < 4)$؟

Ⓐ $0.7 + k$ ● 0.76

Ⓑ 0.66 Ⓓ 1

.36 للمتغيّر العشوائيّ X التوزيع الاحتماليّ التالي:

$P(X = x) = \frac{k}{2}x,\ x = 2, 3, 5, 7, 11$

اكتب جدولًا تبيّن فيه التوزيع الاحتماليّ للمتغيّر X، ثمّ أوجد القيمة المتوقّعة $E(X)$ والانحراف المعياريّ σ.

X	2	3	5	7	11
$P(X)$	k	$\frac{3k}{2}$	$\frac{5k}{2}$	$\frac{7k}{2}$	$\frac{11k}{2}$

$$\frac{2k}{2} + \frac{3k}{2} + \frac{5k}{2} + \frac{7k}{2} + \frac{11k}{2} = 1$$

$$k = \frac{1}{14}$$

X	2	3	5	7	11
$P(X)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{11}{28}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{14} + 3 \times \frac{3}{28} + 5 \times \frac{5}{28} + 7 \times \frac{7}{28} + 11 \times \frac{11}{28}$$

$$\approx 7.43$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

$$= (2 - 7.43)^2 \times \frac{1}{14} + (3 - 7.43)^2 \times \frac{3}{28} + (5 - 7.43)^2 \times \frac{5}{28} + (7 - 7.43)^2 \times \frac{7}{28} + (11 - 7.43)^2 \times \frac{11}{28}$$

$$\approx 10.33$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{10.33} \approx 3.21$$

.37 يسجّل أحمد هدفًا في 55% من المرّات التي يركل فيها الكرة إلى المرمى. إذا ركل أحمد الكرة 8 مرّات، أيّ من الخيارات التالية يمثّل القيمة المتوقّعة لعدد الأهداف التي يسجّلها؟

Ⓐ 1.4 ● 4.4

Ⓑ 1.98 Ⓓ 44

.38 يطرح معلّم الرياضيّات 8 أسئلة للإجابة الذهنيّة السريعة، ولكلّ سؤال خياران للإجابة. افترض أنّ أحد الطلّاب يختار إجابات الأسئلة بشكل عشوائيّ، وأنّ احتمال اختياره الإجابة الصحيحة هو 25%، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة احتمال أن يجيب الطالب عن 6 أسئلة على الأقل إجابة صحيحة؟

Ⓐ $_8C_6\,(0.25)^6\,(0.75)^2 + {}_8C_7\,(0.25)^7\,(0.75)^1 + {}_8C_8\,(0.25)^8$

Ⓑ $_8C_6\,(0.75)^6\,(0.25)^2 + {}_8C_7\,(0.75)^7\,(0.25)^1 + {}_8C_8\,(0.75)^8$

Ⓒ $_8C_0\,(0.25)^0\,(0.75)^8 + {}_8C_1\,(0.25)^1\,(0.75)^7 + {}_8C_2\,(0.25)^2\,(0.75)^6 + {}_8C_3\,(0.25)^3\,(0.75)^5 + {}_8C_4\,(0.25)^4\,(0.75)^4 + {}_8C_5\,(0.25)^5\,(0.75)^3$

Ⓓ $_8C_7\,(0.25)^7\,(0.75)^1 + {}_8C_8\,(0.25)^8$

.39 أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة الاحتمال $P(x < 4)$ إذا كان $X \sim N(3, 25)$؟

Ⓐ 0.4207

Ⓑ 0.5793

Ⓒ 0.6914

Ⓓ 0.9999

.40 أظهرت دراسة أُجريت على المباني الأثريّة في وسط إحدى المدن القديمة بهدف ترميمها، أنّ ارتفاعات هذه المباني تتبع توزيعًا احتماليًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابيّ يساوي 4.6 m مع انحراف معياريّ يساوي 0.8 m، أيّ من الخيارات التالية يمثّل قيمة احتمال أن يتراوح ارتفاع مبنى اختير عشوائيًّا بين 4 m و 5 m، وما الارتفاع الذي تقلّ عنه ارتفاعات 72.5% من المباني الأثريّة في هذه المدينة القديمة؟

Ⓐ قيمة احتمال أن يتراوح ارتفاع مبنى اختير عشوائيًّا بين 4 m و 5 m تساوي 0.000031، والارتفاع الذي تقلّ عنه ارتفاعات 72.5% من المباني الأثريّة هو 5.08 m

Ⓑ قيمة احتمال أن يتراوح ارتفاع مبنى اختير عشوائيًّا بين 4 m و 5 m تساوي 0.4648، والارتفاع الذي تقلّ عنه ارتفاعات 72.5% من المباني الأثريّة هو 5.2 m

Ⓒ قيمة احتمال أن يتراوح ارتفاع مبنى اختير عشوائيًّا بين 4 m و 5 m تساوي 0.6914، والارتفاع الذي تقلّ عنه ارتفاعات 72.5% من المباني الأثريّة هو 3.56 m

Ⓓ قيمة احتمال أن يتراوح ارتفاع مبنى اختير عشوائيًّا بين 4 m و 5 m تساوي 0.4648، والارتفاع الذي تقلّ عنه ارتفاعات 72.5% من المباني الأثريّة هو 5.08 m

Z01_MTH01_SE_ANC12_ADV_QTR_AR_EOY_29236.indd 7 07/03/2022 5:58:38 PM

شكر وتقدير

Photographs

Topic 2:

Top Left Lianys/Shuttestock;

Topic 3:

Top Left BlueRingMedia/Shuttestock;

Topic 4:

Top Right wrangler/Shuttestock;

Topic 5:

Bottom Right AlexLMX/Shuttestock; **Bottom Right** ojovago/Shuttestock;

Topic 6:

Top Right Tartila/Shuttestock; **Top Left** GoodStudio/Shuttestock;

Topic 7:

Top Left Natata/Shuttestock;

Topic 8:

Top Left David Moreno Hernandez/Shuttestock