# الوحدةُ 7

# المتجهاتُ

# Vectors

## ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

لفهمِ تأثيرِ قوةٍ ما في جسمٍ، يجبُ تحديدُ كلٍّ منْ مقدارِ هذهِ القوةِ، واتجاهِها، في ما يُعرَفُ بالمتجهِ. في هذهِ الوحدةِ، سأتعلَّمُ كثيرًا عنِ المتجهاتِ وتطبيقاتِها الحياتيةِ، منْ مثلِ تحديدِ تأثيرِ الرياحِ في حركةِ السفنِ الشراعيةِ.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلَّ المعادلاتِ الخطِّيةِ بمُتغيِّرَيْنِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ إيجادَ إحداثيَّيْ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
- ✓ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الكاملةِ.

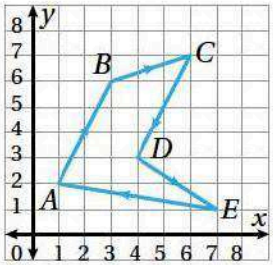
## سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ المتجهاتِ، وكيفيةَ تمثيلِها على المستوى الإحداثيِّ.
- ◄ جمعَ المتجهاتِ، وطرحَها، وضربَها القياسيَّ.
- ◄ التفسيرَ الهندسيَّ للمتجهاتِ، وبعضَ التطبيقاتِ الحياتيةِ عليْها.
- ◄ إيجادَ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 82

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:




a) $\overrightarrow{EA}$

b) $\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{CB}$

الحل:

$$\langle 1-7, 2-1\rangle = \langle -6, 1\rangle$$

$$\langle 4-6, 3-7\rangle = \langle -2, -4\rangle$$

$$\langle 3-1, 6-2\rangle = \langle 2, 4\rangle$$

$$\langle 7-4, 1-3\rangle = \langle 3, -2\rangle$$

$$\langle 6-3, 7-6\rangle = \langle 3, 1\rangle$$

$$\langle 3-6, 6-7\rangle = \langle -3, -1\rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 83

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$

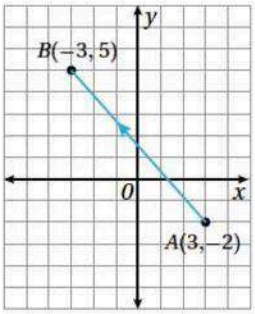
b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$

الحل:

$$\sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 84




أتحقق من فهمي

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.

الحل:

$$\frac{5 - -2}{-3 - 3} = \frac{7}{-6} = \frac{-7}{6}$$

$$\tan^{-1}(\frac{-7}{6}) = -49.4$$

الاتجاه

$$180 - 49.4 = 130.6$$

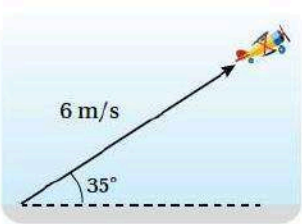
مع محور $x$ الموجب

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 85

أتحقق من فهمي

ألعابٌ: أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميســاءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةٍ قياسُها °35 عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ 6 m/s كما في الشكلِ المجاورِ.

أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.




الحل:

$v_x = |v|\ cos\theta$ ، و $v_y = |v|\ sin\theta$

$$v_x = 6 \times \cos 35 = 4.91$$

$$v_x = 6 \times \sin 35 = 3.44$$

$$v = \langle |v|cos\theta, |v|sin\theta \rangle$$

$$v = \langle 4.91, 3.44 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1 $(2, 5)$ , $(4, -1)$

الحل:

$$\langle 4-2, -1-5 \rangle = \langle 2, -6 \rangle$$

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

2 $(-4, 7)$ , $(-3, 0)$

الحل:

$$\langle -3 - -4, 0 - 7 \rangle = \langle 1, -7 \rangle$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

3 $(6, -2), (8, 1)$

الحل:

$$\langle 8-6, 1--2\rangle = \langle 2,3\rangle$$

$$|u| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

4 $(4, -9), (3, -5)$

الحل:

$$\langle 3-4, -5--9\rangle = \langle -1,4\rangle$$

$$|u| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

5 $(-1.5, 3), (0.5, -4)$

الحل:

$$\langle 0.5 - -1.5, -4 - 3\rangle = \langle 2, -7\rangle$$

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ الصفحة: 86

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

6 $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$

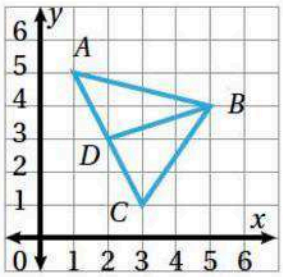
الحل:

$$\langle -2 - -6, \frac{-1}{3} - \frac{-2}{3} \rangle = \langle 4, \frac{1}{3} \rangle$$

$$|u| = \sqrt{4^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{144+1}{9}} = \frac{\sqrt{145}}{3}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:




7 $\overrightarrow{AB}$

8 $\overrightarrow{DB}$

9 $\overrightarrow{CB}$

10 $\overrightarrow{CA}$

11 $\overrightarrow{AC}$

12 $\overrightarrow{DA}$

الحل:

$$\langle 5-1, 4-5\rangle = \langle 4, -1\rangle$$

$$\langle 5-2, 4-3\rangle = \langle 3, 1\rangle$$

$$\langle 5-3, 4-1\rangle = \langle 2, 3\rangle$$

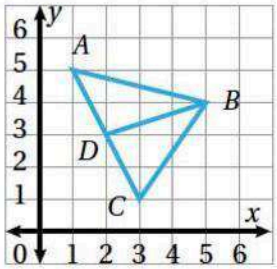
$$\langle 1-3, 5-1\rangle = \langle -2, 4\rangle$$

$$\langle 3-1, 1-5\rangle = \langle 2, -4\rangle$$

$$\langle 2-1, 3-5\rangle = \langle 1, -2\rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:




7 $\overrightarrow{AB}$

8 $\overrightarrow{DB}$

9 $\overrightarrow{CB}$

10 $\overrightarrow{CA}$

11 $\overrightarrow{AC}$

12 $\overrightarrow{DA}$

13 في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ $D$ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$ ؟

الحل:

$$|AD| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|DC| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|AD| = |DC| = \sqrt{5}$$

$D$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

14 $\langle 2,-6\rangle$

15 $\langle 7,-8\rangle$

16 $\langle -1,-1\rangle$

17 $\langle 3,5\rangle$

18 $\langle 0,0\rangle$

19 $\langle 2,9\rangle$

الحل:

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

إذا كانَــتْ $M$ هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ $O$ هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

20 $\overrightarrow{FG}$

21 $\overrightarrow{GF}$

22 $\overrightarrow{OM}$

الحل:

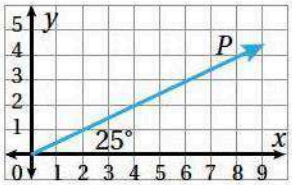
$$\langle -2, 4 \rangle$$

$$\langle 2, -4 \rangle$$

$$\langle 3, 4 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

23 أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ $P$ في الشكلِ المجاورِ بطريقتيْنِ.




الحل:

اتجاه $P$ هو $25^\circ$ مع الأفقي
اتجاه $P$ هو $65^\circ$ مع العمودي

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 86

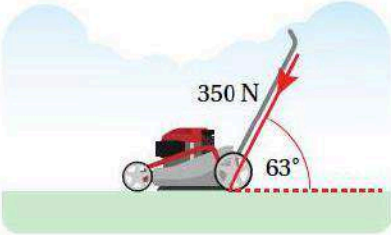
24 حيواناتٌ: أكتبُ السرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سرعتُهُ الأفقيةُ $v_x = 27\ \text{km/h}$ ، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25\ \text{km/h}$

الحل:

$$\langle 27, 25 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87

25 فيزياءُ: تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N،
وبزاويةٍ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ.
أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.




الحل:

$$\langle 350 \times \cos 63 \ , 350 \times \sin 63 \rangle$$

$$\langle 158.90 \ , 311.85 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87

**26** أكتبُ المتجهَ $\boldsymbol{v}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\boldsymbol{v}| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها $90°$ معَ محورِ $x$.

الحل:

$$\langle 27 \times \cos 90 \ , 27 \times \sin 90 \rangle$$

$$\langle 0 \, , 27 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ الصفحة: 87

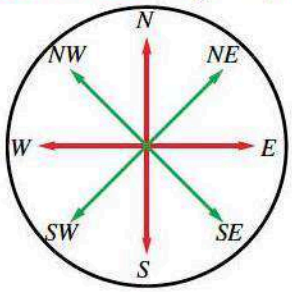
27 أكتبُ المتجهَ $\boldsymbol{v}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\boldsymbol{v}| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها $320°$ معَ محورِ $x$.

الحل:

$$\langle 10 \times \cos 320 \ , 10 \times \sin 320 \rangle$$

$$\langle 7.66 \ , -6.43 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87




**28** خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أُخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ (إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتيْنِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما).

الحل:

$$\langle 248\ ,-562\rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87

29 تحدٍّ: إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ $B$، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$4 + (y-2)^2 = 13$$

$$(y-2)^2 = 9$$

$$y - 2 = 3 \; or \; y - 2 = -3$$

$$y = 5 \; or \; y = -1$$

إذن، إحداثي $B$ هما:

$$(3, 5)، (3, -1)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87

30 تبريرٌ: ما مجموعةُ قيمِ $b$ التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b\rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

$$|v| = \sqrt{16 + b^2} = 5$$

$$b^2 + 16 = 25$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3 \; or \; b = -3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ الصفحة: 87

31 أكتشفُ الخطأَ: حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{v} = \langle 6, -1 \rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

| ناصرٌ | ليلى |
|---|---|
| $\lvert \boldsymbol{v} \rvert = 37$ | $\lvert \boldsymbol{v} \rvert = \sqrt{35}$ |

هلْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

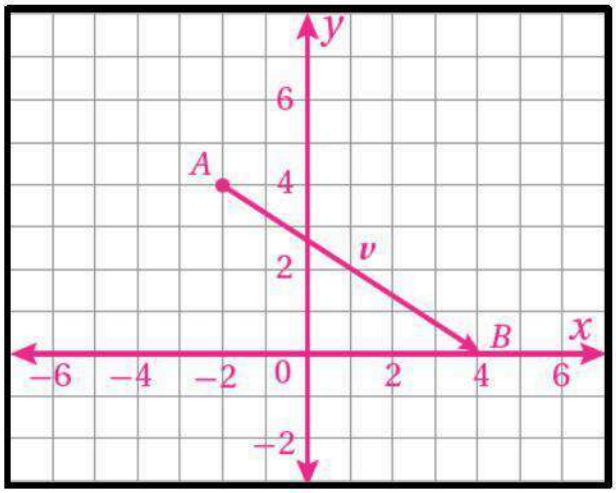
الحل:

كلتا الإجابتين غير صحيحة؛ لأن ناصرا نسي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلا من جمعهما.

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ الصفحة: 87

32 مسألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.

الحل:




$$\overrightarrow{AB} = v = \langle 6, -4 \rangle$$

$$|v| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 89

أتحقق من فهمي

في الشـــكلِ المجاورِ، $ABCD$ مســـتطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB} = a$ ، وَ $\overrightarrow{BC} = b$ . أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $a$ وَ $b$:

a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{CB}$

الحل:

$$\overrightarrow{AD} = b$$

$$\overrightarrow{DC} = a$$

$$\overrightarrow{CB} = -b$$

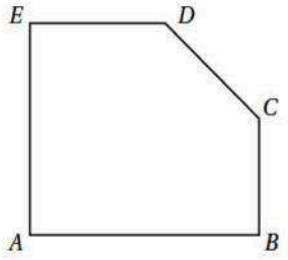
رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 90

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$




الحل:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 91

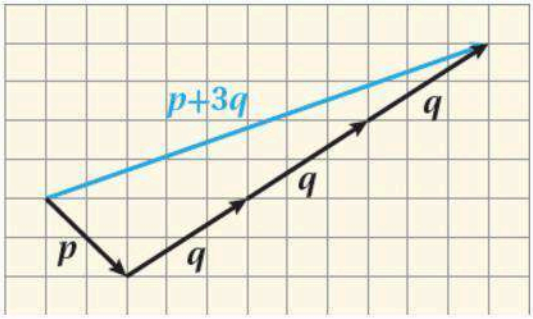
أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

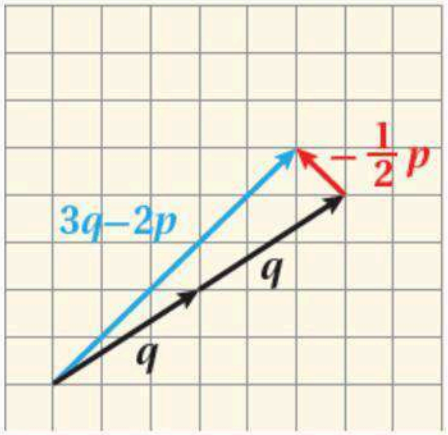
a) $p + 3q$ b) $3q - 2p$ c) $2q - \frac{1}{2}p$

الحل:

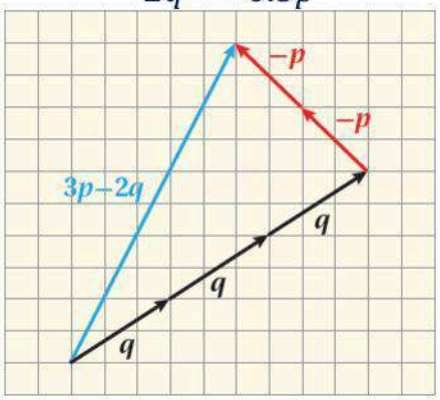
$p + 3q$




$3q - 2p$




$2q - 0.5p$



رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 92

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $a = \langle 3, 1 \rangle$، وَ $b = \langle -2, 7 \rangle$، وَ $c = \langle 0, -5 \rangle$، فأَجِدْ كلًّا ممّا يأتي:

a) $-b$ b) $4c$ c) $b-c$ d) $4a + 3c$

الحل:

$$-b = \langle 2, -7 \rangle$$

$$4c = \langle 0, -20 \rangle$$

$$b - c = \langle -2, 12 \rangle$$

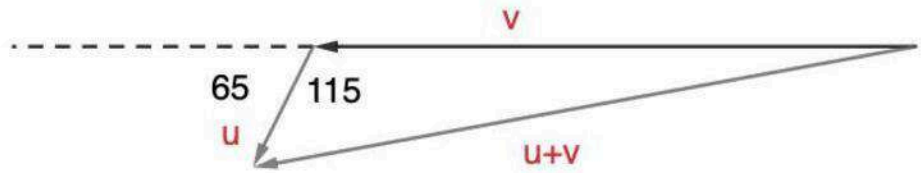
$$4a + 3c = \langle 12, -11 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 93

أتحقق من فهمي

ملاحةٌ بحريةٌ: انطلقَ قاربٌ شــراعيٌّ منْ ميناءٍ بســرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 30 km/h، مُتَّجِهًا إلى جزيــرةٍ تقعُ غربَهُ. وفي هذهِ الأثناءِ، هبَّتْ رياحٌ بلغَتْ ســرعتُها المتجهةُ 10 km/h بزاويةِ 25° جنوبَ الغربِ. كيفَ يُمكِنُ للبَحّارِ تعديلُ مقدارِ سرعةِ القاربِ واتجاهِهِ للوصولِ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

الحل:




افترض أن $v$ هو متجه سرعة القارب، وأن $u$ هو متجه سرعة الرياح انظر الشكل أعلاه وبذلك، فإن:

$$|v + u|^2 = 30^2 + 10^2 - 2(30)(10)\cos 115°$$
$$= 1252$$

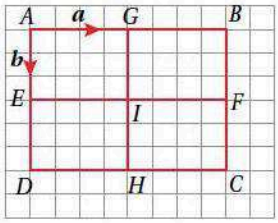
$$|v + u| = \sqrt{1252} \approx 35.38\, km/h$$

$$\frac{\sin\theta}{10} = \frac{\sin 115}{35.8}$$

$$\sin\theta \approx 0.26$$
$$\theta = \sin^{-1}(0.26) = 15.07°$$

أي يجب تعديل اتجاه القارب بزاوية $15.07^\circ$ شمال غرب، وزيادة سرعته لتصبح 35.38 ؛ لكي يصل إلى وجهته في الوقت المُحدَّد

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94




اعتمادًا على الشــكلِ المجاورِ حيثُ $\overrightarrow{AG} = a$ ، وَ $\overrightarrow{AE} = b$، أكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بدلالةِ $a$ وَ $b$:

1. $\overrightarrow{EI}$
2. $\overrightarrow{FC}$
3. $\overrightarrow{DE}$
4. $\overrightarrow{GE}$
5. $4\overrightarrow{GD}$
6. $\overrightarrow{CA}$

الحل:

1) $\overrightarrow{EI} = a$

2) $\overrightarrow{FC} = b$

3) $\overrightarrow{DE} = -b$

4) $\overrightarrow{GE} = b - a$

5) $4\,\overrightarrow{GD} = 8b - 4a$

6) $\overrightarrow{CA} = -(2a + 2b)$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

إذا كانَ $a = \langle 34, -86 \rangle$، وَ $b = \langle -65, 17 \rangle$ ، وَ $c = \langle 9, -1 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

7 $a + c$ 8 $b - a$ 9 $3c + b$ 10 $a + b - 2c$

الحل:

$$a + c = \langle 43, -87 \rangle$$

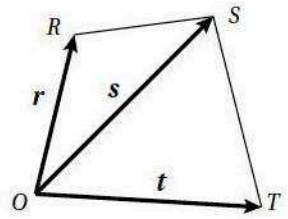
$$b - a = \langle -99, 103 \rangle$$

$$3c + b = \langle 38, 14 \rangle$$

$$a + b - 2c = \langle -49, -67 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $r$ وَ $s$ وَ $t$:




11 $\overrightarrow{SR}$ 12 $\overrightarrow{ST}$ 13 $\overrightarrow{RS}$

الحل:

$r - s$

$t - s$

$s - r$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

14 إذا كانَ $\langle 3x-y, y-x^2 \rangle = \langle 7, -5 \rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ $x$ وَ $y$؟

الحل:

$$3x - y = 7$$
$$y - x^2 = -5$$

$$y = 3x - 7$$
$$3x - 7 - x^2 = -5$$

$$x^2 - 3x + 7 - 5 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x = 2 \; or \; x = 1$$
$$x = 2 \; so \; y = -1$$
$$x = 1 \; so \; y = -4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

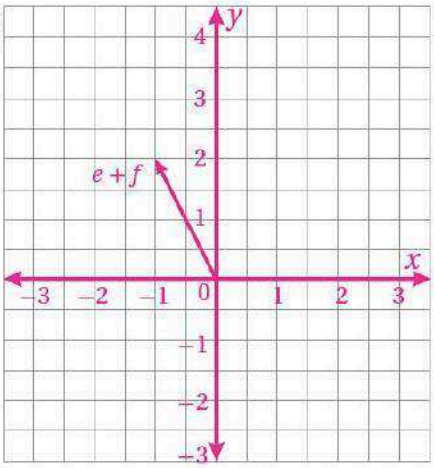
إذا كانَ $e = \langle -3, -2 \rangle$ ، وَ $f = \langle 2, 4 \rangle$ ، فأُمثِّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ:

15) $e + f$ 16) $3f$ 17) $e - f$

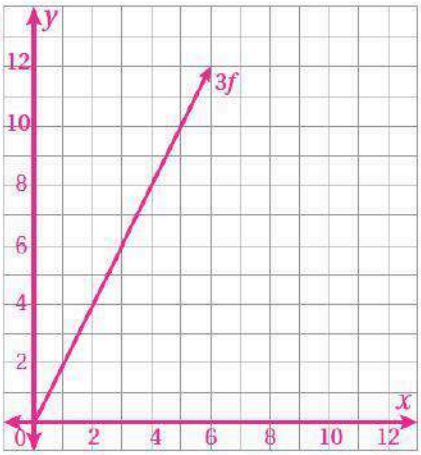
18) $f - e$ 19) $4e$ 20) $2f + e$

الحل:

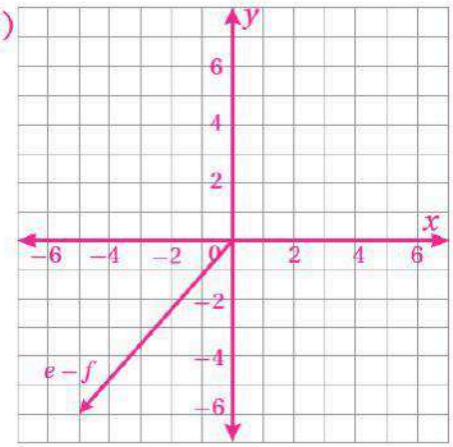
15)



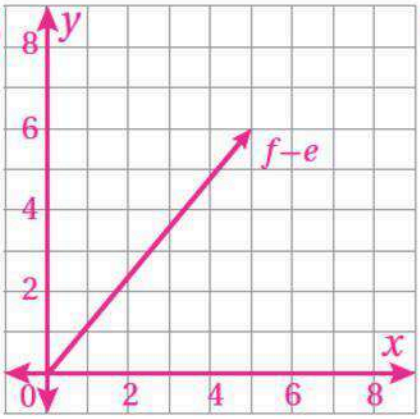

16)



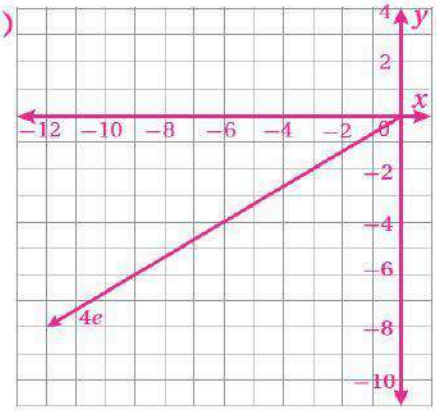

17)



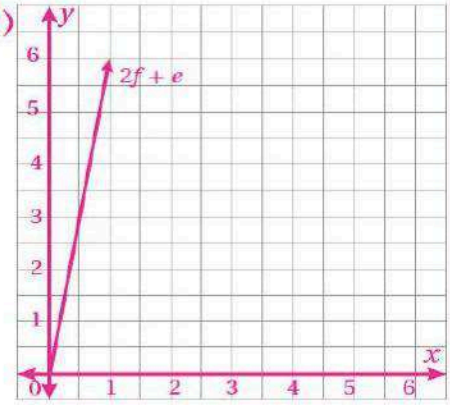

18)




19)




20)



رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

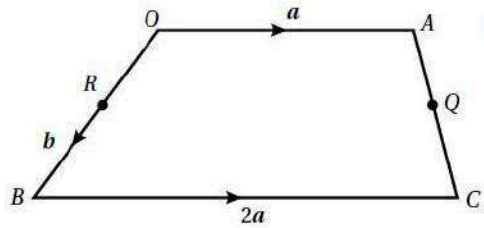
21 إذا كانَ $\boldsymbol{d} = \langle 5, 9 \rangle$ ، وَ $\boldsymbol{e} = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأَجِدُ $|4\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{e}|$ ، $|\frac{1}{3}\boldsymbol{e}|$

الحل:

$$|\frac{1}{3}\, e| = 13\, |e| = \frac{1}{3}\sqrt{(11)^2 + (-8)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{185} \approx 4.5$$

$$|4d - 3e| = \sqrt{(-13)^2 + (60)^2} = \sqrt{3769} \approx 61.4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94




في الشكلِ المجاورِ، $OACB$ شبهُ منحرفٍ، فيهِ $R$ منتصفُ $\overline{OB}$، وَ $Q$ منتصفُ $\overline{AC}$. إذا كانَ $\overrightarrow{BC} = 2a$ وَ $\overrightarrow{OB} = b$ ، فأكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $a$ وَ $b$:

22 $\overrightarrow{QR}$ 23 $\overrightarrow{AQ}$ 24 $\overrightarrow{RQ}$

25 كيفَ يُمكِنُ تحديدُ إذا كانَ $\overline{OA}$ وَ $\overline{BC}$ متوازيينِ في الشكلِ $OACB$؟

الحل:

22

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{1}{2}(-2a + (-b) + a) + (-a) + \frac{1}{2}b$$
$$= \frac{-3}{2}a$$

23

$$AQ = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= \frac{1}{2}(-a + b + 2a) = \frac{1}{2}(a + b)$$

24

$$\overrightarrow{RQ} = \frac{3}{2}a$$

25

بما أن

$$\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{BC} = 2a$$

فإن

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA}$$

إذن

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{OA}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

26 رياضةٌ: في سباقٍ للمشيِ، انطلقَتْ رندُ منْ نقطةِ البدايةِ، فقطعَتْ مسافةَ 15 km في اتجاهِ الشرقِ، ثمَّ اتجهَتْ شمالًا مسافةَ 17 km، كمْ كيلومترًا تبعدُ رندُ عنْ نقطةِ البدايةِ؟

الحل:

$$\sqrt{15^2 + 17^2}$$

$$\sqrt{225 + 289}$$

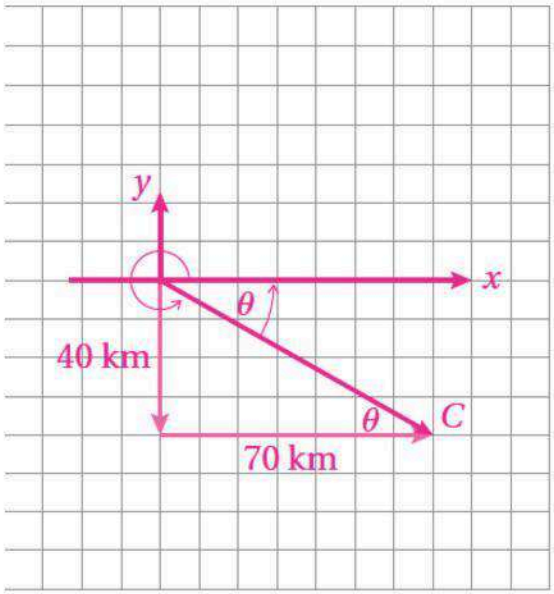
$$\sqrt{514}$$

$$22.67$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 94

27 نزهةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أَجِدُ اتجاهَ القاربِ وبُعْدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ.

الحل:




$$|AC| = \sqrt{40^2 + 70^2} = \sqrt{6500} \approx 80.62\ km$$

$$tan\theta = \frac{40}{70}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29.7°$$

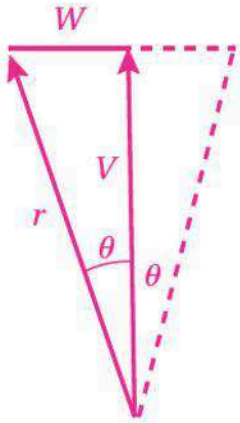
أي إن القارب يَبعُد 80.62 عن نقطة انطلاقه A ، وفي اتجاه 330.3° مع محور $x$ الموجب

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

28 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

**مسألةُ اليومِ** بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ بسرعةٍ مقدارُها 450 km/h، لكنَّها واجهَتْ رياحًا شرقيةً سرعتُها 60 km/h، فأخذَتِ تنحرفُ نحوَ اليسارِ.
كيفَ يُمكِنُ للطيارِ أنْ يُعدِّلَ اتجاهَها وسرعتَها ليصلَ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

الحل:




$$|v+w| = \sqrt{450^2 + 60^2} \approx 453.98\ km/h$$

$$tan\theta = \frac{60}{450} = \frac{2}{15}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{15}\right) \approx 7.59^o$$

أي يتعيَّن على الربّان أن يحرف مسار الطائرة بزاوية 7.59 ° نحو اليمين، ويزيد سرعتها لتصبح 453.98 ، فتعيدها الرياح إلى اتجاه الشمال، وتخفض سرعتها حتى تصل 450

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

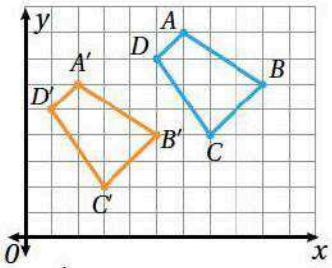
29 سباقُ زعانفَ: شاركَ سامي في سباقِ الزعانفِ الذي نظَّمَهُ اتحادُ الرياضاتِ البحريةِ على شاطئِ خليجِ العقبةِ. سبحَ سامي بسرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 3 km/h في اتجاهِ الجنوبِ، لكنَّهُ واجهَ أمواجًا سرعتُها 1.8 km/h، وقدْ دفعَتْهُ إلى اتجاهِ الشرقِ، فغيَّرَ مقدارَ سرعتِهِ واتجاهَها ليقاومَ الأمواجَ، ويفوزَ بالسباقِ. أَجِدُ السرعةَ المتجهةَ التي يجبُ أنْ يسبحَ بها سامي.

الحل:

$$|v + u| = \sqrt{3^2 + 1.8^2} = \sqrt{12.24} \approx 3.50\ km/h$$

إذن، يجب أن يسبح بسرعة 3.5 ، وفي اتجاه $31^\circ$ غرب الجنوب حتى ينهي السباق في موعده

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95




تحويلاتٌ هندسيةٌ: أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $ABCD$ المجاورِ باستعمالِ المتجهِ $\langle a, b\rangle$، حيثُ $a$ مقدارُ الانسحابِ على محورِ $x$، وَ $b$ مقدارُ الانسحابِ على محورِ $y$:

30 أَجِدُ $\langle a, b\rangle$.

31 إذا أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $A'B'C'D'$ باستعمالِ المتجهِ $\langle 3, -4\rangle$، فأرسمُ الشكلَ الناتجَ منَ الانسحابِ، وأُسمّيهِ $A''B''C''D''$.

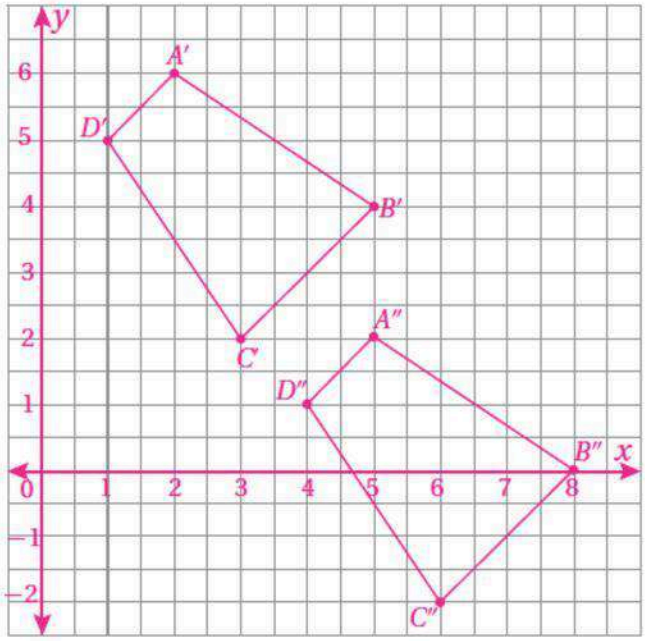
32 أُحدِّدُ المتجهَ $\langle f, e\rangle$ الذي يصفُ انسحابَ الشكلِ $ABCD$ إلى الشكلِ $A''B''C''D''$.

الحل:

30

$$\langle a, b\rangle = \langle -4, -2\rangle$$

31



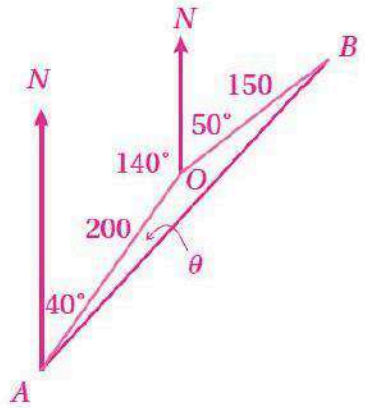

32

$$\langle f, e\rangle = \langle -1, -6\rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

33 انطلقَتْ سـيارةٌ منَ المدينةِ $A$ إلى المدينةِ $B$، فقطعَتْ مسـافةَ 200 km في اتجاهِ °040، ثمَّ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها إلى °050، وقطعَتْ مسافةَ 150 km. أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ $B$ وبُعْدَها عنِ النقطةِ $A$.

الحل:




$$m\angle AON = 180° - 40° = 140°$$
$$m\angle AOB = 360° - (50° + 140°) = 170°$$
$$AB^2 = 200^2 + 150^2 - 2 \times 200 \times 150 \times cos170°$$
$$= 121588.47$$
$$AB = \sqrt{121588.47} \approx 348.7\ km$$
$$\frac{sin\,\theta}{150} = \frac{\sin 170}{348.7}$$
$$sin\,\theta = 0.075$$
$$\theta = sin^{-1}(0.075) \approx 4.3°$$

أي إن $B$ تَبعُد عن $A$ مسافة 348.70 ، واتجاهها من A هو 44.3

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

34 إذا كانَتْ $<3, x> + y^2<3, 5> - <15, 7> = 0$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ العددَيْنِ $x$ وَ $y$.

الحل:

$$x + 5\,y^2 - 7 = 0$$

$$3 + 3\,y^2 - 15 = 0$$

$$3\,y^2 = 12$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2$$

$$x + 5\,y^2 - 7 = 0$$

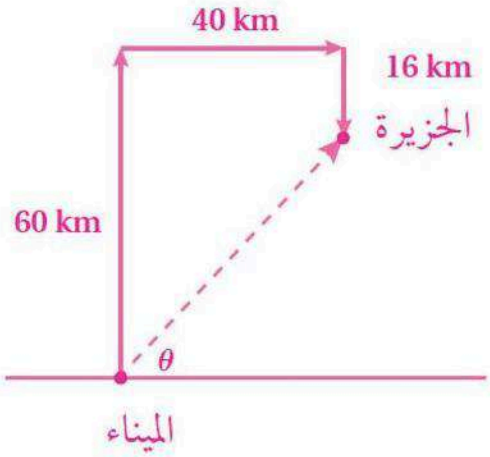
$$x + 5 \times 4 - 7 = 0$$

$$x + 20 - 7 = 0$$
$$x = -13$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

35 تبريرٌ: انطلقَ يختٌ في رحلةٍ بحريةٍ منَ الميناءِ، فقطعَ مسافةَ 60 km شمالًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 40 km شرقًا، ثمَّ مسافةَ 16 km جنوبًا، فوصلَ إلى جزيرةٍ. أَجِدُ بُعْدَ الجزيرةِ عنِ الميناءِ، ثمَّ أَجِدُ المسافةَ التي قطعَها اليختُ في رحلتِهِ البحريةِ حتى وصلَ الجزيرةَ، وأُقارِنُ بينَهُما.

الحل:




مجموع المسافات التي قطعها اليخت:

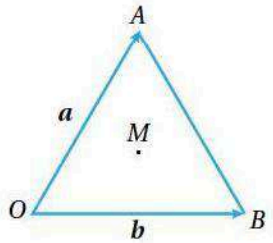
$$60 + 40 + 16 = 116$$

وبافتراض أن الجزيرة تَبعُد عن الميناء $x\ km$ ، فإن:

$$x = \sqrt{44^2 + 40^2} \approx 59.46\ km$$

إذن، مجموع المسافات التي قطعها اليخت تساوي مثلي بُعْد الجزيرة عن الميناء تقريبًا؛ لأن اليخت لم يسلك المسار المستقيم من الميناء إلى الجزيرة

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: جمعُ المتجهاتِ وطرحُها الصفحة: 95

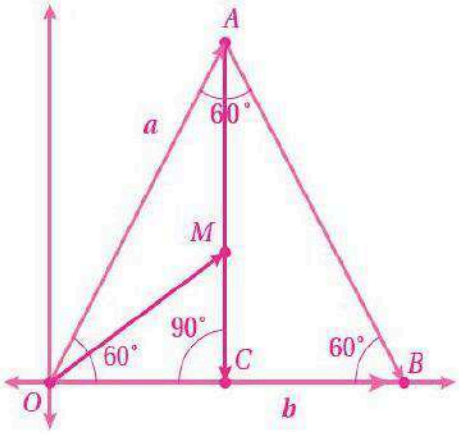



تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $OAB$ مثلثًا مُتطابِقَ الأضلاعِ، ويُمثِّلُ فيهِ $M$ مركزَ المثلثِ؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ $M$ عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:

36 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بالصورةِ الإحداثيةِ.

37 أُثبِتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(a + b)$

الحل:




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -a + b$$
$$= b - a$$
$$= \langle |b|\cos 0°, |b|\sin 0° \rangle - \langle |a|\cos 60°, |a|\sin 60° \rangle$$
$$= \langle |b|, 0 \rangle - \langle \frac{1}{2}|a|, \frac{\sqrt{3}}{2}|a| \rangle$$
$$= \langle |b| - \frac{1}{2}|a|, \frac{-\sqrt{3}}{2}|a| \rangle$$

لأن $|a| = |b|$

$$= \langle \frac{1}{2}|a|, \frac{-\sqrt{3}}{2}|a| \rangle$$

37

انظر الشكل السابق:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$
$$= OA + \frac{2}{3}AC$$

لأن مركز المثلث يقسم القطع المتوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$
$$= a + \frac{2}{3}(-a + \frac{1}{2}b)$$
$$= a - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$
$$= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(a + b)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 96

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $v = \langle -3, 2 \rangle$، وَ $u = \langle 6, 9 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $u \cdot v$ b) $v \cdot u$ c) $u \cdot u$

الحل:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= 6 \times -3 + 9 \times 2 \\ &= -18 + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cdot u &= v_1 u_1 + v_2 u_2 \\ &= -3 \times 6 + 2 \times 9 \\ &= -18 + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot u &= u_1 u_1 + v_2 u_2 \\ &= 6 \times 6 + 9 \times 9 \\ &= 36 + 81 \\ &= 117 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 98

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ $\theta$ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $v = \langle 2, 7 \rangle$ وَ $u = \langle -1, 1 \rangle$

الحل:

$$|u| = \sqrt{-1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|v| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= -1 \times 2 + 1 \times 7 \\ &= -2 + 7 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{2} \times \sqrt{53}} = \frac{5}{\sqrt{106}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{106}}\right) = 61^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 99

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $v = \langle 3, -5 \rangle$، وَ $u = \langle 1, 0 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا.

الحل:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= 1 \times 3 + 0 \times -5 \\ &= 3 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرا، وإنما يساوي 3

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أتحقق من فهمي

سحبَ فارسٌ عربةً، فبذلَ شغلًا مقدارُهُ 13 J، بقوةٍ مقدارُها 50 N، مسافةَ $d = 30$ m

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

الحل:

$$W = |F||d|\cos\theta$$
$$13 = 50 \times 30\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{13}{1500}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{1500}\right) = 89.5^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8 \rangle$ , $\boldsymbol{b} = \langle 4, -3 \rangle$

الحل:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= 6 \times 4 + 8 \times -3 \\ &= 24 + -24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

2 $\boldsymbol{u} = \langle -3, 11 \rangle$ , $\boldsymbol{v} = \langle -9, 4 \rangle$

الحل:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= -3 \times -9 + 11 \times 4 \\ &= 27 + 44 \\ &= 71 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

3 $\boldsymbol{c} = \langle -12, 43 \rangle$ , $\boldsymbol{v} = \langle 22, 14 \rangle$

الحل:

$$\begin{aligned} c \cdot v &= c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= -12 \times 22 + 43 \times 14 \\ &= -264 + 602 \\ &= 338 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدْ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

4 $\boldsymbol{d} = \langle 21, 32 \rangle$ , $\boldsymbol{e} = \langle -21, 25 \rangle$

الحل:

$$\begin{aligned} d \cdot e &= d_1 e_1 + d_2 e_2 \\ &= 21 \times -21 + 32 \times 25 \\ &= -441 + 800 \\ &= 359 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

5 إذا كانَ $|\boldsymbol{b}| = 6$، وَ $|\boldsymbol{a}| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ هوَ $42°$، فأَجِدُ ناتجَ $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$

الحل:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$$\cos 42 = \frac{a \cdot b}{9 \times 6}$$

$$a \cdot b = 54 \times \cos 42 = 40.13$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

6 إذا كانَ $|\boldsymbol{b}| = 76$، وَ $|\boldsymbol{a}| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ هوَ $120°$، فأَجِدُ ناتجَ $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$

الحل:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$$\cos 120 = \frac{a \cdot b}{34 \times 76}$$

$$a \cdot b = 2584 \times \cos 120 = -1292$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a} = \langle 7, 10\rangle$ ، وَ $\boldsymbol{b} = \langle 4, -10\rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

الحل:

$$|b| = \sqrt{4^2 + -10^2} = \sqrt{116}$$
$$|a| = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= 4 \times 7 + 10 \times 10 \\ &= 28 + -100 \\ &= -72 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$$\cos\theta = \frac{-72}{\sqrt{149} \times \sqrt{116}} = \frac{-72}{\sqrt{17284}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-72}{\sqrt{17284}}\right) = 123.2^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

8 $\boldsymbol{c} = \langle 2, 4 \rangle$ , $\boldsymbol{d} = \langle -24, 12 \rangle$

الحل:

$$|c| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$
$$|d| = \sqrt{-24^2 + 12^2} = \sqrt{720}$$

$$\begin{aligned} c \cdot d &= c_1\, d_1 + c_2\, d_2 \\ &= 2 \times -24 + 4 \times 12 \\ &= -48 + 48 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{c \cdot d}{|c|\,|d|}$$
$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{20} \times \sqrt{720}} = 0$$

$$\theta = \cos^{-1}(0) = 90^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

9 $\boldsymbol{a} = \langle 4, 16\rangle$ , $\boldsymbol{k} = \langle 8, -2\rangle$

الحل:

$$|a| = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{272}$$
$$|k| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}$$

$$\begin{aligned} a \cdot k &= a_1 k_1 + a_2 k_2 \\ &= 4 \times 8 + 16 \times -2 \\ &= 32 + -32 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot k}{|a|\,|k|}$$
$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{272} \times \sqrt{68}} = 0$$

$$\theta = \cos^{-1}(0) = 90^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

**10** أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\boldsymbol{e} = \langle 3, 4 \rangle$ ، وَ $\boldsymbol{a} = \langle 11, -8 \rangle$ متعامديْنِ أمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

$$\begin{aligned} a \cdot e &= a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ &= 11 \times 3 + -8 \times 4 \\ &= 33 + -32 \\ &= 1 \end{aligned}$$

غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرا، وإنما يساوي 3

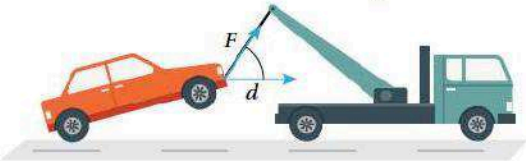
رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 100

**11** إذا كانَ $r = \langle 3, -4 \rangle$ ، وَ $s = \langle b, b+2 \rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ $b$.

الحل:

$$0 = s \cdot r = s_1 r_1 + s_2 r_2$$
$$0 = b \times 3 + (b+2) \times -4$$
$$3b - 4b - 8 = 0$$
$$-b - 8 = 0$$
$$b = -8$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101




12 سيّاراتٌ: تسحبُ شاحنةٌ سيّارةً كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السحبِ $F = 34\text{N}$، والمسافةُ المقطوعةُ $d = 12\text{ km}$، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46\text{J}$، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.

الحل:

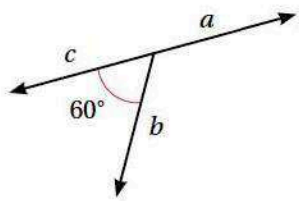
$$d = 12\ km = 12000\ m$$
$$W = |F||d|\cos\theta$$

$$46 = 34 \times 12000 \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{46}{408000}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{46}{408000}\right) = 89.99^o$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|a| = 2$، وَ $|b| = 4$، وَ $|c| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:




13 $a \bullet b$ 14 $b \bullet c$ 15 $a \bullet c$

الحل:

$$a \,.\, b = |a| \times |b| \cos\theta$$
$$= 2 \times 4 \times \cos 120$$
$$= 8 \times \frac{-1}{2} = -4$$

$$b \,.\, c = |b| \times |c| \cos\theta$$
$$= 4 \times 5 \times \cos 60$$
$$= 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

$$a \,.\, c = |a| \times |c| \cos\theta$$
$$= 2 \times 5 \times \cos 180$$
$$= 10 \times -1 = -10$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101

**16** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

**مسألةُ اليومِ** دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها 54° مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

الحل:

$$W = |F||d|\cos\theta$$

$$W = 70 \times 18 \times \cos 54$$
$$W = 740.6\ J$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101

برهانٌ: إذا كانَتْ $a, b, c$ متجهاتٍ، وكانَ $0$ المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

17 $a \bullet b = b \bullet a$ 18 $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ 19 $0 \bullet a = 0$

الحل:

$$a = \langle a_1, a_2 \rangle , b = \langle b_1, b_2 \rangle , c = \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} a \,.\, b &= a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 \\ &= b_1 \times a_1 + b_2 \times a_2 \\ &= b \,.\, a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \,.\, (b + c) &= a_1 \times (b_1 + c_1) + a_2 \times (b_2 + c_2) \\ &= (a_1 \times b_1) + (a_1 \times c_1) + (a_2 \times b_2) + (a_2 \times c_2) \\ &= (a_1 \times b_1) + (a_2 \times b_2) + (a_1 \times c_1) + (a_2 \times c_2) \\ &= a \,.\, b + a \,.\, c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \,.\, a &= 0 \times a_1 + 0 \times a_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101

20 مسألةٌ مفتوحةٌ: إذا كانَ $p \bullet q = 30$ ، وَ $q = \langle 6 , 2 \rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتمَلةً للمتجهِ $p$.

الحل:

بافتراض أن $p = \langle a, b \rangle$ ،فإن:

$$p.q = 30$$

أي إن

$$6a + 2b = 30$$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أن

$$a = 2$$

فإن

$$b = 9$$

وعندئذٍ، فإن

$$p = \langle 2,9 \rangle$$

وبافتراض وجود قيم أُخرى ل $a$، فإنه توجد قيم مناظرة ل $b$، فتنتج قيم ممكنة للمتجه.

**21** مسألةٌ مفتوحةٌ: أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $\boldsymbol{a} = \langle -8 , -2 \rangle$

الحل:

بافتراض أن

$$b = \langle c, d \rangle$$

يعامد المتجه

$$a = \langle -8, -2 \rangle$$

فإن:

$$-8c - 2d = 0$$

أي إن

$$d = -4c$$

إذن، جميع المتجهات في صورة

$$\langle c, -4c \rangle$$

تعامد المتجه

$$a = \langle -8, -2 \rangle$$

ومن أمثلتها:

$$\langle 3, -12 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: الضربُ القياسيُّ الصفحة: 101

22 تبريرٌ: أُبيِّنُ باستعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(6, -2), (1, 5), (-4, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

إذا كان

$$A(6,-2), B(1,5), C(-4,-2)$$

فإن:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -5,7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -10,0 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100+0} = \sqrt{100} = 10$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle -5,-7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

إذن، المثلث $ABC$ متطابق الضلعين

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{50}{\sqrt{74} \times 10}\right) = 54.5^o$$

$$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{50}{10 \times \sqrt{74}}\right) = 54.5^o$$

$$m\angle B = 180 - (54.5 + 54.5) = 71^o$$

23 تبريرٌ: إذا كانَ المتجهانِ $a = \langle -1 , r \rangle$ ، وَ $b = \langle 2, -3 \rangle$ متوازييْنِ، فما قيمةُ $r$؟

الحل:

$a \parallel b$ إذا كان قياس الزاوية بينهما $0^o$ أو $180^o$ أي أن

$$\frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \pm 1$$

$$\frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1$$

$$4+12r+9r^2 = 13+13r^2$$
$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$
$$(2r-3)^2 = 0$$
$$r = \frac{3}{2}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $v = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإنَّ $|v|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

الحل:

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2 \rangle$

b) $\langle -2, 3 \rangle$

c) $\langle -3, 2 \rangle$

d) $\langle 3, 2 \rangle$

الحل:

الجواب: a

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

الحل:

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

4 إذا كانَتْ $B(3, y), A(0, 2)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ $y$ تساوي:

a) 5

b) $-1$

c) $5, -1$

d) $7, -3$

الحل:

الجواب: c

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

5 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ تساوي:

a) $\langle -2, 4 \rangle$

b) $\langle 4, 6 \rangle$

c) $\langle -4, -6 \rangle$

d) $\langle -2, -4 \rangle$

الحل:

الجواب: b

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

6 إذا كانَ $p = u + 2v$، فإنَّ $|p|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

الحل:

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

7 معكوسُ المتجهِ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ هوَ:

a) $\langle -2,4\rangle$

b) $\langle 2,-4\rangle$

c) $\langle 4,6\rangle$

d) $\langle -4,-6\rangle$

الحل:

الجواب: b

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

8 إذا كانَ $a = \langle 2,-3 \rangle$ , $b = \langle 3,4 \rangle$، فإنَّ $a \cdot 2b$ تساوي:

a) $-6$ b) $6$ c) $-12$ d) $12$

الحل:

الجواب: c

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

إذا كانَتِ النقاطُ $A, B, C, D$ نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$ , $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ $C$ إذا كانَ:

9 $\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AB}$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DB}$

الحل:

9)

$$C\ (8, 3)$$

10)

$$C\ (\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

**أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها:**

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: $\boldsymbol{v}$ وَ $\boldsymbol{u}$ ، فإنَّ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$

الحل:

11)

صحيحة

12)

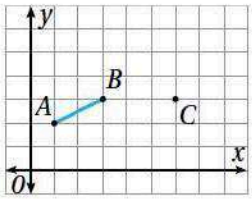
غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان

13)

صحيحة

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

أنسخُ الرســمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ:




14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ $E$ على المســتوى الإحداثيِّ.

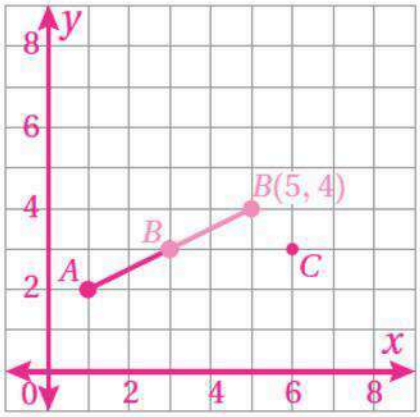
15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$، فأُحــدِّدُ النقطــةَ $D$ علــى المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ $M$ على المستوى الإحداثيِّ.

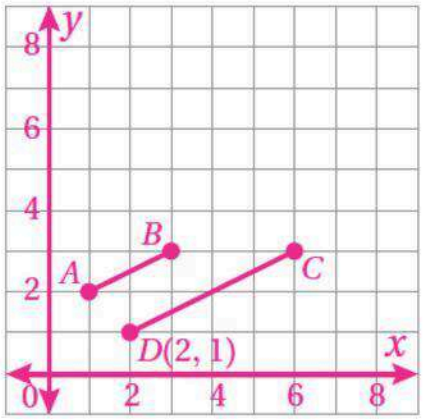
17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ $k$.

الحل:

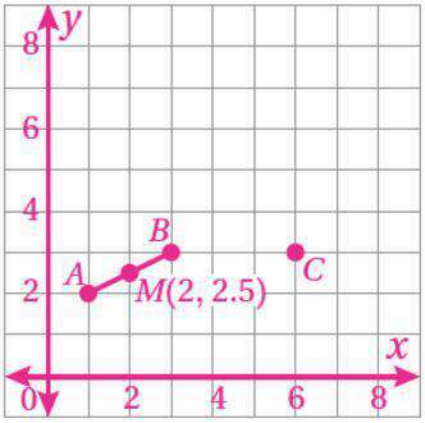
14)




15)




16)




17)

$$k = 4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

إذا كانَ $u = \langle -1, 5 \rangle$، وَ $v = \langle 2, -1 \rangle$، وَ $w = \langle 4, -2 \rangle$،
فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

18 $-3\,(v - w)$

19 $v \cdot 2u$

20 $w \cdot (u + \frac{1}{2}\,w)$

21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ $v$ وَ $w$.

الحل:

18)

$$\langle 6, -3 \rangle$$

19)

$$20$$

20)

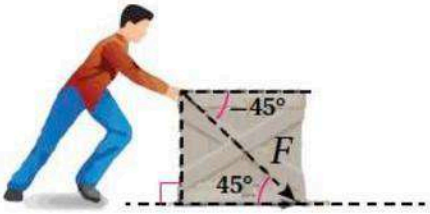
$$-4$$

21)

$$0°$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشـــكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشـــغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m




الحل:

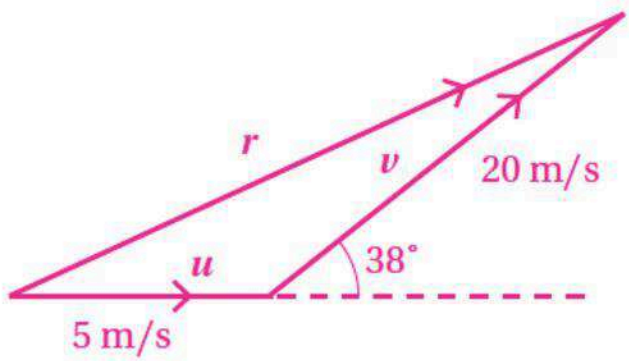
661.9J

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

23 ركضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةِ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s ، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s ، وبزاويةٍ قياسُها 38° معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ.

الحل:

يُمثِّل المتجه $u$ سرعة حسام، ويُمثِّل المتجه $v$ سرعة الكرة، ويُمثِّل المتجه $r$ محصلة السرعتين ولهذا، فإن:

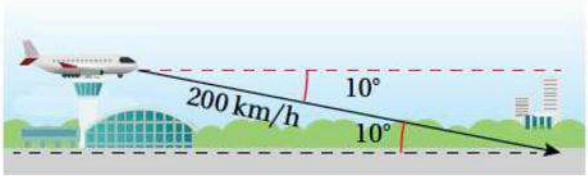



$$(|r|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2 \times 5 \times 20 cos142°$$
$$= 582.6$$
$$|r| = \sqrt{582.6} \approx 24.1\ m/s$$

أي إن محصلة سرعة الكرة هي 24.1 m/s تقريبًا

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

24 هبطَتْ طائرةٌ بسـرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُـها 10°. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.




الحل:

قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360^\circ - 10^\circ = 350^\circ$ ؛ لذا، فإن الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:

$$\langle 200\cos 350^\circ , 200\sin 350^\circ \rangle = \langle 196.96, -34.73 \rangle$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِـهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْـنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8 \rangle$ يُمثِّلُ مسـارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $\boldsymbol{b} = \langle 4, -3 \rangle$ يُمثِّلُ مسـارَ الطائرةِ الثانيةِ. هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

نعم، يتعامدان؛ لأن $a \,.\, b = 0$

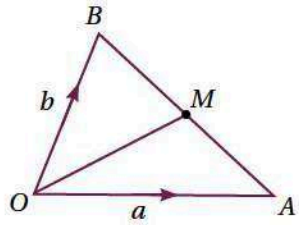
26 أَجِـدُ الزاويـةَ $\theta$ بيـنَ المتجهيْـنِ $\boldsymbol{p}$ وَ $\boldsymbol{q}$ إذا كانَ $\boldsymbol{p} = \langle 5, -1 \rangle, \boldsymbol{q} = \langle -2, 3 \rangle$

الحل:

$135°$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسـومَيْنِ فـي الوضعِ القياسيِ، حيثُ $O$ نقطةُ الأصـلِ، وَ $M$ نقطـةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:




27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$.

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

الحل:

27)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -a + b$$

28)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

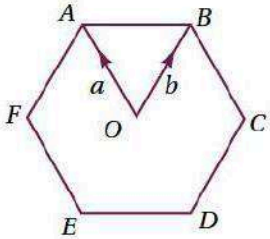
$$= a + \frac{1}{2}(-a + b)$$

$$= a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السابعة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 102

الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ $O$، وفيهِ $\overrightarrow{OA} = a$ , $\overrightarrow{OB} = b$:




29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $a$ وَ $b$.

30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ $K$ بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ $a$ وَ $b$.

الحل:

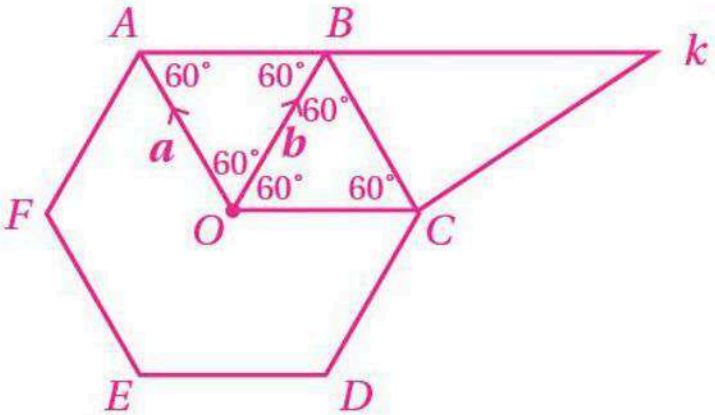
29)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -a + b$$

30)

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{AB}$$

لكن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ ؛ لأن ABCO متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان




إذن

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AB} = a + 2(b - a) = 2b - a$$

# صقر الجنوب

ملتقيات