

مخطوطة دليل المعلم

الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

مخطط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود.	• يتعرف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته. • يمثل الاقتران كثير الحدود بيانياً، ويجد مجاله ومداها. • يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود.	• وحيد الحد، كثير الحدود، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفري، المعامل الرئيس، المجال، المدى.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيو جبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.	• يجد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. • يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها. • يمثل الاقترانات النسبية بيانياً، ويجد خطوط التقارب. • يحل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية.	• خوارزمية القسمة، اقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسي.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيو جبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: تركيب الاقترانات.	• يتعرف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين. • يحسب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى. • يجد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمَت قاعدتا مُركَّبتيه. • يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.	• تركيب الاقترانات، الاقتران المُركَّب، المُركَّبَتان.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
الدرس 4: الاقتران العكسي.	• يتعرَّف الاقتران العكسي. • يجد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، ويحدد مجاله ومداها. • يحل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي.	• العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحايد، الاقتران الجذري.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيو جبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	2
الدرس 5: المتتاليات.	• يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها. • يكتب حدود متتالية عُلِمَ حدها العام. • يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية. • يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.	• المتتالية، الحد، الحد العام.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.	1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				18

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، والاقترانات الثابتة، والخطية، والتربيعية، وكيفية تمثيلها بيانياً، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلموا أيضاً المتتاليات الخطية، والتربيعية، والتكعبية، ووصف الحد العام لكل منها. وسيتعلمون في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانياً، وإيجاد مجاله ومداها وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، ويتعرفون الاقتران النسبي، ويجدون مجاله ومداها، ويمثلونه بيانياً، ويجدون خطوط تقارب منحناه. سيتعلمون أيضاً تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المركب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلمون المتتاليات الأسية بوصفها اقتراناً، ويجدون حدها العام.

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل الاقترانات لنمذجة التطبيقات الحياتية بصورة رياضية تُسهّل فهمها. فمثلاً، تُستعمل بعض أنواع الاقترانات لوصف العلاقة بين أسعار السلع والكميات المباعة منها. سأتعرف في هذه الوحدة أنواعاً عديدة من الاقترانات والمتتاليات ذات الاستعمالات الحياتية الكثيرة.

تعلمت سابقاً:

- ✓ الاقترانات الخطية، والتربيعية، وتمثيلها بيانياً.
- ✓ إيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للاقتران التربيعي.
- ✓ تكوين معادلات تربيعية، وحلّها.
- ✓ جمع مقادير جبرية، وطرحها، وضربها.
- ✓ المتتاليات الخطية، والتربيعية، وكتابة حدودها.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ▶ الاقترانات كثيرات الحدود، وخصائصها، وتمثيلها بيانياً.
- ▶ جمع كثيرات الحدود، وطرحها، وضربها، وقسمتها.
- ▶ الاقترانات النسبية، ومجالها، ومداها.
- ▶ تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، والاقتران الجذري.
- ▶ استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات تربيعية، وتكعبية، وأسية.

6

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقاً

الصف التاسع

- تعرف المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية.
- وصف الاقترانات التربيعية، وتمثيلها بيانياً، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- وصف الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعبية، والتعبير عنه بمقدار جبري.

الصف العاشر

- تعرف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانياً، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانياً.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المركب ومداها.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكل من الاقتران ومعكوسه.
- تعرف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات أسية.

لاحقاً

الصف الحادي عشر العلمي

- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والمتفرعة، واستنتاج خواصها الأساسية.
- اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وإيجاد حدها العام ومجموع (n) من حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لانهاية تقاربية.
- إدخال أوساط حسابية وهندسية بين عددين.

نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود

مشروع الوحدة

مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية

باستعمال كثيرات الحدود.

هدف المشروع: نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتراح كثير حدود، واستعمال النموذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إن أمكن.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية)، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مقررًا لهم.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشروع، ثم كتابة تقرير مفصل عنه، ودور كل منهم في إنجازه.
- وجه أفراد المجموعات إلى اختيار متغيرين من واقع الحياة، مثل: العمر بالسنوات، والطول بالسنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين سنة و 15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- بين لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنَوِّهاً بأنه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمّن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- وضح للطلبة أهمية اشتغال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا للمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

فكرة المشروع

جمع بيانات عن العلاقة بين متغيرين في أحد المجالات الحياتية، ونمذجتها باستعمال اقتران كثير الحدود.

المواد والأدوات

جهاز حاسوب، شبكة إنترنت، برمجية إكسل (Microsoft Excel).

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أختار أنا وأفراد مجموعتي متغيرين لجمع بيانات حولهما، مثل: تكلفة إنتاج سلعة معينة، وعدد الوحدات المنتجة، أو عدد ساعات النهار في إحدى المدن في أيام مختلفة من العام، أو أي متغيرين آخرين.
- 2 أجمع البيانات، ثم أدونها في جدول من عمودين، بحيث يحوي العمود الأول قيم المتغير x ، ويحوي العمود الثاني القيم المناظرة للمتغير y (يجب جمع ما لا يقل عن 15 زوجًا).
- 3 أستعمل برمجية إكسل لتمثيل الأزواج المرتبة بيانيًا، وإيجاد اقتران كثير الحدود الأفضل تمثيلًا لها باتباع الخطوات الآتية:
 - أدخل البيانات في عمودين متجاورين ضمن صفحة إكسل، وأظلل العمودين، ثم أختار (مُحَطَّطَات) من تبويب (إدراج)، وأنقر (مبعثر)، ثم أختار المُحَطَّط الذي يبين مجموعة نقاط منفصلة، فيظهر مُحَطَّط بياني.
 - أنقر بزر الفأرة الأيمن إحدى النقاط، ثم أختار أيقونة (إضافة خطّ اتجاه) من القائمة المُسدّلة، فيظهر مستقيم يتوسط النقاط، وتظهر خيارات التنسيق جانبًا، فأنقر المربع أمام أيقونة (عرض المعادلة في المُحَطَّط)، لتظهر معادلة المستقيم التي هي قاعدة الاقتران كثير الحدود المطلوب.
 - إذا لاحظت أن المستقيم أو المنحنى الظاهر لا يُناسب النقاط، فأنتي أستطيع تغيير نوعه؛ إذ يُمكنني مثلاً اختيار مُتعدّد الحدود (أي كثير الحدود)، واختيار الترتيب (أي درجة كثير الحدود) المناسب.
 - عندما أحصل على المستقيم أو المنحنى الأنسب للنقاط أكتب قاعدة الاقتران.
- 4 أجد مجال الاقتران، ومداه، وأصفاه، ونقاط القيم القصوى المحلية له.
- 5 أجد الاقتران العكسي (إن وجد)، وأجد مجاله، ومداه، وأحدّد فائدته، ودلالته في سياق موضوع البحث.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضًا تقديميًا (بوربوينت) يُبين فيه خطوات العمل في المشروع والنتائج التي توصلنا إليها مُوضَّحة بالصور والرسوم، ثم نعرضه أمام زملائنا في مختبر الحاسوب.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار.			
2	جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة.			
3	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
4	دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج.			
5	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملاً، ومنظماً، ويحوي رسوماً توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

« إذا كان $f(x) = 2x + 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

- 1 $f(0)$ 5 2 $f(3)$ 11 3 $f(-1)$ 3

« اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

- 4 $3(2x - 5) + 4x$ $10x - 15$
 5 $4a(2a^2 + 5ab^3 + 2)$ $8a^3 + 20a^2b^3 + 8a$
 6 $(3x^2 - 4x) + (7x + 5)$ $3x^2 + 3x + 5$

« جد x بدلالة y في كل مما يأتي:

- 7 $y = x + 4$ $x = y - 4$
 8 $y = 5x$ $x = \frac{y}{5}$
 9 $y = 4x + 3$ $x = \frac{(y-3)}{4}$

« أجد الحدين التاليين في كل مما يأتي:

- 10 2, 4, 6, 8, ... 10, 12
 11 40, 35, 30, 25, ... 20, 15

إجابات المسائل (أختبر معلوماتي):

- 13) 104°F 14) 30°C 15) 16, 19
 16) 76, 70 17) 27, 38

الوحدة 5: الاقتترانات

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمراجعة.

إيجاد صورة عدد في الاقتران.

إذا كان $g(x) = 3x - 2$ و $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 1 $g(0)$ -3 2 $f(2)$ 4 3 $f(-3)$ -11 4 $g(-4)$ 21

مثال: إذا كان $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$ ، فأجد $g(-2)$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 5x + 4 \\ g(-2) &= 2(-2)^2 + 5(-2) + 4 \\ &= 8 - 10 + 4 = 2 \end{aligned}$$

قاعدة الاقتران
بتعويض $x = -2$
بالتبسيط

تبسيط المقادير الجبرية.

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

- 1 $-3(2x - 2y - 4)$ $-6x + 6y + 12$ 2 $(4a + b) + 2(a - 3b)$ $6a - 5b$
 3 $5x^2(2x - 5)$ $10x^3 - 25x^2$ 4 $(x - 3)^2 + 11x$ $x^2 + 5x + 9$

مثال: أكتب $5a^2 - 2a(3a - 2b - 5) - 2a(3a - 2b - 5)$ في أبسط صورة.

$$\begin{aligned} &-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2 \\ &= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2 \\ &= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2 \\ &= -a^2 + 4ab + 10a \end{aligned}$$

المقدار الأصلي
خاصية التوزيع
بالتبسيط
بجمع الحدود المتشابهة

التعبير عن متغير بدلالة الآخر.

أجد قيمة x بدلالة y في كل مما يأتي:

- 1 $y = 4x - 7$ $x = \frac{y+7}{4}$ 2 $y = 3 - 5x$ $x = \frac{3-y}{5}$
 3 $y = x^2 - 5$ $\pm\sqrt{y+5}$ 4 $y = \frac{1}{2x-1}$ $x = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1+y}{2y}$

6

الوحدة 5: الاقتترانات

أستعد لدراسة الوحدة

تُستعمل الصيغة: $F = \frac{9}{5}C + 32$ لتحويل درجة الحرارة من مقياس سيلسيوس C إلى مقياس فهرنهايت F.

- 5 أحوّل 40°C إلى مقياس فهرنهايت F. 104°F 6 أحوّل 86°F إلى مقياس سيلسيوس C. 30°C

مثال: أجد قيمة x بدلالة y في كل مما يأتي:

a) $y = 3x - 8$

$$\begin{aligned} y &= 3x - 8 \\ y + 8 &= 3x \\ \frac{y+8}{3} &= x \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
إضافة 8 إلى الطرفين
بقسمة الطرفين على 3

b) $y = \frac{3}{2-x}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2-x} \\ y(2-x) &= 3 \\ 2y - yx &= 3 \\ yx &= 2y - 3 \\ x &= \frac{2y-3}{y} \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
بضرب الطرفين في $(2-x)$
ب طرح y من الطرفين، وضرب الطرفين في -1
بقسمة الطرفين على y

إيجاد حدود متتالية.

أجد الحدين التاليين للمتتاليات الآتية:

- 1 4, 7, 10, 13, ... 16, 19 2 100, 94, 88, 82, ... 76, 70 3 3, 6, 11, 18, ... 27, 38

مثال: أجد الحدين التاليين للمتتالية: 2, 7, 12, 17, ...

ألاحظ أن كل حد يزيد على الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت هو 5:

$$7 - 2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$$

إذن، الحدان التاليان هما: $17 + 5 = 22$ ، $22 + 5 = 27$

7

نتائج الدرس

- يتعرف كثير الحدود وصورته القياسية، ويعين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- يمثل كثيرات الحدود بيانياً، ويعين مجالها ومداها.
- يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية تتعلق بكثيرات الحدود.

المواد والأدوات:

برمجية جيو جبرا، ورق رسم بياني، آلة حاسبة.

التعلم القبلي:

- حساب قيمة الاقتران لقيم معلومة للمتغير المستقل.
- تمثيل المعادلات بيانياً.
- ضرب حد جبري في آخر، وكتابة الناتج في أبسط صورة.

التهيئة

1

- ذكّر الطلبة بالعلاقة، والاقتران، والفرق بينهما، والرمز المستخدم للاقتران: اكتب الاقتران $f(x) = 3x + 5$ ، ثم اطلب إليهم إيجاد كلٍّ مما يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- اطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانياً، ثم ناقشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين وما يمثّلانه في هذه المعادلة.
- اطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ مما يأتي: $(2x^2y^3)(3xy^2), (2.5y^4)(-2.5y^4)$

اقترانات كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فكرة الدرس

تعرف الاقترانات كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانياً، وإجراء عمليات الجمع والطرح والضرب عليها، وحل مسائل عنها.

المصطلحات

وحيد الحد، كثير الحدود، المعامل الرئيس، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفرى، المجال، المدى.

مسألة اليوم



يُنتج مصنع ثريات عددها x ثرياً أسبوعياً، حيث $0 \leq x \leq 350$ ، ويبيع الوحدة منها بسعر $(150 - 0.3x)$ ديناراً. إذا كانت تكلفة إنتاج x من الثريات هي $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ ديناراً، فأجد ربح المصنع من إنتاج x ثرياً أسبوعياً وبيعها.

الاقتران **وحيد الحد** (monomial) بمتغير واحد هو اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي، يُسمى المعامل، في متغير أسه عدد صحيح غير سالب. والجدول الآتي يعرض بعض الأمثلة على وحيد الحد، وأسوه، ومعامله:

وحيد الحد	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأس	2	5	3	1	0
المعامل	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقتران **كثير الحدود** (polynomial) بمتغير واحد هو اقتران يتكوّن من وحيد حد واحد، أو مجموع عدّة اقترانات وحيدة الحد بمتغير واحد. ومن أمثله الاقترانات الآتية:

$$f(x) = 2 \quad f(x) = 3x - 4 \quad f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$$

مفهوم أساسي

الصورة العامة لكثير الحدود:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث: n : عدد صحيح غير سالب. x : متغير.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$: أعداد حقيقية تُسمى معاملات حدود كثير الحدود.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فبكم دينارًا يبيع الواحدة؟ 120 دينارًا.
« ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
« كيف تجد ربح المصنع من إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ طرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
« ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

- وضح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، واذكر أمثلة على ذلك.
- ناقش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

مثال 1

- شارك الطلبة في حل المثال 1 الذي يبيّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إن كان كثير حدود.

مثال إضافي

- حدّد إذا كان كلّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فاكتبه بالصورة القياسية، ثم حدّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا

b) $h(x) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:

$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$ ، ومعامله الرئيس: -3، ودرجته 5، وحده الثابت 7

c) $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا

التقويم التكويني: ✓

- وجه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية: قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد المعامل الرئيس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لذا ذكرهم أن المعامل الرئيس هو معامل الحد الأكبر درجة بعد تبسيط الاقتران.

مثال 2

- ناقش الطلبة في خطوات تمثيل كثير الحدود بيانياً، وشاركهم في حل المثال 2 الذي يبين كيفية تمثيل كثير الحدود بيانياً، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره، مُبيناً لهم أن أصفار الاقتران هي الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنى مع المحور x ، وأن الناتج في هذه الطريقة يكون أحياناً قيمة تقريبية لعدم دقة الرسم، وأنه يمكن إيجاد الأصفار جبرياً بحل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرق التي تعلموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

إذا كان $a_n \neq 0$ ، فإنه يُسمى **المعامل الرئيس** (leading coefficient)، ودرجة (degree) كثير الحدود هي أكبر أس للمتغير في جميع حدوده، ويُسمى a_0 الحد الثابت. يكون كثير الحدود مكتوباً بالصورة القياسية (standard form) إذا كانت حدوده مكتوبة بترتيب تنازلي من أكبرها درجة إلى أصغرها درجة. كثير الحدود الذي جميع معاملاته أصفار يُسمى **كثير الحدود الصفري** (zero polynomial)، وهو $f(x) = 0$ ، وليس له درجة، ويُمثله المحور x في المستوى الإحداثي.

مثال 1

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثم أحدد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

1 $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثير حدود، درجته 3، وصورته القياسية هي:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معامله الرئيس -2، وحدته الثابت -4

2 $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليس كثير حدود؛ لأن أس المتغير في الحد الثاني هو -1

3 $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليس كثير حدود؛ لأن أس المتغير في الحد الأول هو $\frac{1}{2}$

4 $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثير حدود، درجته 2، وصورته القياسية هي: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معامله الرئيس $\frac{3}{4}$ ، وحدته الثابت $-\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي

أحدد إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثم أحدد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت. انظر الهامش

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

أذكر

لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ، فإن:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وإذا كان a مرفوعاً

للقوة السالبة في المقام،

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

(a) كثير حدود، صورته القياسية: $h(x) = \sqrt{2}x^5 - 5x + 9$ ، ودرجته 5، والمعامل الرئيس $\sqrt{2}$ ، والحد الثابت 9

(b) ليس كثير حدود.

(c) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$ ، ودرجته 4، والمعامل الرئيس -2، والحد الثابت 0

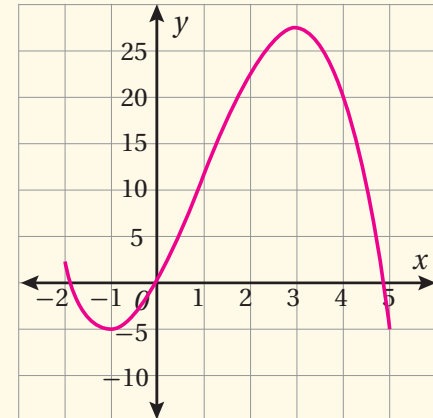
(d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = 7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$ ، ودرجته 5، والمعامل الرئيس 7، وحدته الثابت 2π

• مثل بيانيًا كلاً مما يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x, -2 \leq x \leq 5$

مجاله: $-2 \leq x \leq 5$ مداه: $-5 \leq y \leq 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

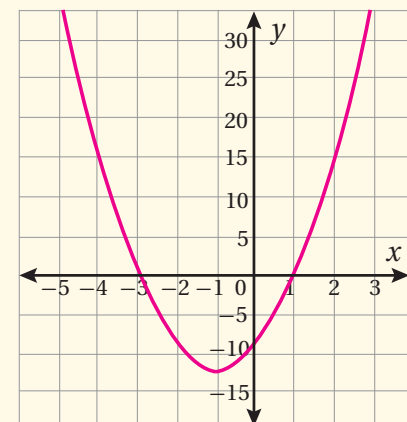


b) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \geq -12$

أصفاره: $-3, 1$



تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: اقتران function، وكثير الحدود polynomial، والدرجة degree، والمعامل الرئيس leading coefficient، والمجال domain، والمدى range.

مجال (domain) أي اقتران هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x ، و**مداه (range)** هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y .

لتمثيل الاقتران كثير الحدود $f(x)$ بيانيًا، أكوّن جدول قيم أُحدّد فيه قيم المتغير x ، وأحسب قيم $f(x)$ ، وأعيّن النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصلّب بينها بمنحنى متصل.

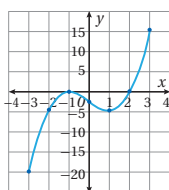
مثال 2

أمثل بيانيًا كل اقتران مما يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 \leq x \leq 3$

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1, 0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$



الخطوة 2: أعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصلّب بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية، حيث:

$-3 \leq x \leq 3$ ، أو الفترة $[-3, 3]$ ، ومداه: $-20 \leq y \leq 16$ ، أو الفترة $[-20, 16]$.

يُظهر الشكل أنّ أصفار هذا الاقتران هي: $-1, 2$

2) $f(x) = x^2 - 4x$

هذا الاقتران تربيعي، ومنحناه قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى؛ لأنّ معامل x^2 عدد موجب.

لرسم منحناه، أجد إحداثي نقطة رأسه.

أتعلّم

مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدّد في نصّ السؤال، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدّد من جدول قيم الاقتران، أو بتحليل التمثيل البياني للاقتران.

أتعلّم

أجد أصفار الاقتران من التمثيل البياني بإيجاد نقاط تقاطعه مع محور x .

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x)$, $g(x)$ ، بحيث إن:

(a) درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$

(b) درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$

ثم اطلب إليهم كتابة ملاحظاتهم على درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$x = 2$$

$$y = 2^2 - 4(2) = -4$$

الإحداثي x لرأس القطع المكافئ:

$$b = -4, a = 1$$

بتعويض

بتعويض $x=2$ في معادلة $f(x)$ والتبسيط

أُتدَرَّ

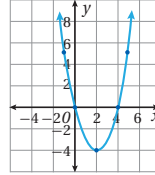
إحداثيا نقطة رأس القطع المكافئ هما:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

يكون منحنى القطع مفتوحاً إلى الأعلى إذا كان معامل x^2 موجباً، ومفتوحاً إلى الأسفل إذا كان معامل x^2 سالباً.

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم (الرأس ونقطتان إلى يساره، ونقطتان إلى يمينه).

x	-1	0	2	4	5
$y = f(x)$	5	0	-4	0	5
(x, y)	(-1, 5)	(0, 0)	(2, -4)	(4, 0)	(5, 5)



الخطوة 2: أعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في

المستوى الإحداثي، وأصلّ بينها بمنحنى متصل، وأضع سهمًا على طرفي المنحنى للدلالة على أنه يمتد إلى ما لا نهاية كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية (لَمْ يُحدّد في نصّ السؤال خلاف ذلك)، ومداه هو الأعداد الحقيقية التي لا تقلّ عن -4؛ أي الفترة $[-4, \infty)$.

لهذا الاقتران صفران، هما: 0, 4

أتحقق من فهمي

أُمثّل بيانيًا كلّ اقتران ممّا يأتي، مُحدّدًا مجاله ومداه: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 - 16, -3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

جمع كثيرات الحدود

لجمع كثيرات الحدود، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها، وأجمع معاملاتهما.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

(a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-70	-32	-18	-16	-14	0	38

المجال: $-3 \leq x \leq 3$

المدى: $-70 \leq y \leq 38$

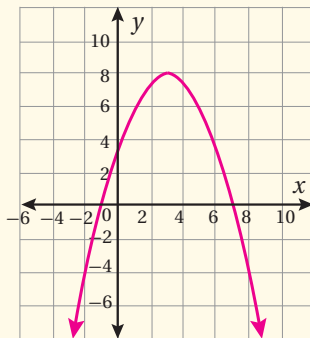
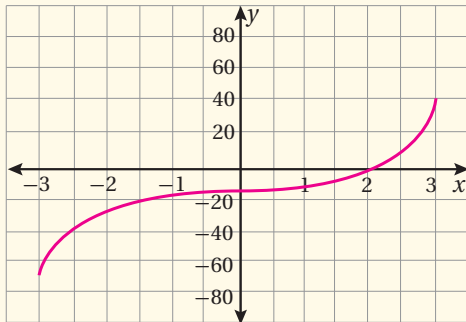
له صفر واحد هو 2

(b)

x	-2	-1	1	3	7	8
$y = f(x)$	-4.5	0	6	8	0	-4.5

المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \leq 8$ ، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: -1، و 7



- ناقش الطلبة في حلّ المثالين 3 و 4، موضحاً جمع كثيري حدود بالطريقة الأفقية بتجميع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتها. بعد ذلك نبّههم إلى أن المتغير يبقى كما هو بدرجته نفسها في الجمع وفي الطرح.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = 12x + 1 - 2x^2$ ، $h(x) = 6x^2 + 4x + 12$ فجد كلاً ممّا يأتي:

a) $f(x) + h(x) = 4x^2 + 16x + 13$

b) $h(x) - f(x) = 8x^2 - 8x + 11$

مثال 3

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$ ، $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$ فأجد $f(x) + g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2x^2 - 5x^3 + 4x - 9) + (7x^3 + 6x + 4) \\ &= 2x^2 + (-5x^3 + 7x^3) + (4x + 6x) + (-9 + 4) \\ &= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5 \end{aligned}$$

انظر الهامش

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$ ، $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$ فأجد $f(x) + g(x)$.

طرح كثيرات الحدود

لإيجاد ناتج طرح اقترائين، أحوّل عملية الطرح إلى جمع النظير الجمعي للمطروح، ثم أجمع كما في المثال السابق.

يمكنني أن أجد ناتج جمع اقترائين باستعمال الطريقة العمودية، وذلك بترتيب الحدود المتشابهة بعضها تحت بعض، ثم جمع المعاملات.

مثال 4

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ ، $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$ فأجد $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2x^2 - 5x - 3 - (+6x - 7x^2 - 8) \\ &= 2x^2 - 5x - 3 + (-6x + 7x^2 + 8) \\ &= 2x^2 - 5x - 3 - 6x + 7x^2 + 8 \\ &= 9x^2 - 11x + 5 \end{aligned}$$

انظر الهامش

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$ ، $g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$ فأجد $f(x) - g(x)$.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$$f(x) + g(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 8$$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$$f(x) - g(x) = 4x^3 - 18x^2 + 3x + 34$$

أتعلم

النظير الجمعي للاقتران $f(x)$ هو $-f(x)$ ، ويتّج من عكس إشارات معاملات حدود $f(x)$.

- ناقش الطلبة في ضرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّراً إياهم بجمع الأسس عند ضرب قوى لها الأساس نفسه، وشاركهم في حل المثال.

مثال إضافي

- جد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان
 $f(y) = y^2 - 7y + 5$, $g(y) = y^2 - y - 3$
 $f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$

تنويع التعليم:

اعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلك بكتابة أحد الاقترانين فوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايا الجدول، ثم جمع النواتج داخل الجدول قطريًا.

يُوضَّح الجدول المجاور طريقة ضرب:
 $(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

	x^2	$+4x$	$+3$
$2x^2$	$2x^4$	$+8x^3$	$+6x^2$
$-3x$	$-3x^3$	$-12x^2$	$-9x$
-2	$-2x^2$	$-8x$	-6

$$\begin{aligned}
 &(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3) \\
 &= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) + \\
 &\quad (+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6) \\
 &= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6
 \end{aligned}$$

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود، أستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع. يُمكنني أيضًا استعمال الطريقة العمودية كما في المثال الآتي.

مثال 5

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot g(x) &= 3x^3 (2x^2 - 5x - 4) && \text{بتعويض } f(x) \text{ و } g(x) \\
 &= 3x^3 (2x^2) + 3x^3 (-5x) + 3x^3 (-4) && \text{بتوزيع الضرب على الجمع} \\
 &= (3 \times 2)(x^3 \cdot x^2) + (3 \times -5)(x^3 \cdot x) + (3 \times -4)x^3 && \text{خاصية التجميع} \\
 &= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3 && \text{بالتبسيط}
 \end{aligned}$$

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5$, $g(x) = 4x^2 - 7$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 - 5x^2 + x - 5 \\
 \times \quad 4x^2 - 7 \\
 \hline
 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 \\
 + \quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35 \\
 \hline
 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35
 \end{array}$$

بترتيب الاقترانين عمودياً
 بضرب $4x^2$ في حدود f
 بضرب -7 في حدود f
 بجمع الحدود المتشابهة

أتحقق من فهمي

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كلِّ ممَّا يأتي: **انظر الهامش**

a) $f(x) = 5x^2 + 4$, $g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8$, $g(x) = 5x^2 + 4x$

تُستعمل كثيرات الحدود لتمثيل وحلِّ مسائل حياتية كثيرة في الصناعة، والتجارة، والاقتصاد، والزراعة، والتعليم، ومعظم مناحي الحياة.

أتذكَّر

أطبِّق قاعدة ضرب القوى من قوانين الأسس عند ضرب الحدود الجبرية:
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

إجابة أتحقق من فهمي 5:

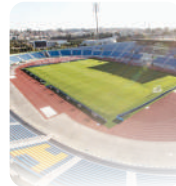
a) $35x^3 + 30x + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

مثال 6: من الحياة



تُعَدُّ الرياضة الصباحية أفضل وسيلة لحرق الدهون وفقدان الوزن؛ إذ تعمل على تزويد الجسم بالطاقة التي تلزمه من الحموض الدهنية الحرة الزائدة المفيدة لحرق الدهون.



ستاد عمان الدولي أكبر ملاعب كرة القدم في الأردن، افتُتح عام 1968م.

لياقة: بلغ عدد المُشترِكين في مركز لياقة بدنية 840 شخصًا، يدفع كلُّ منهم اشتراكًا شهريًا مقداره 30 دينارًا. في دراسة للسوق، وجد الباحثون أنَّ المركز سيفقد 25 مُشترِكًا مُقابل كلِّ دينارٍ يزيد على قيمة الاشتراك. ما قيمة الاشتراك التي تُحقِّق للمركز أعلى دخل؟ ما مقدار هذا الدخل؟ افترض أنَّ المركز جعل قيمة الاشتراك x دينارًا، حيث: $x > 30$.

$$x - 30$$

قيمة زيادة الاشتراك

$$25(x-30)$$

عدد المُشترِكين الذين سيفقدُهم المركز

$$840 - 25(x-30)$$

عدد المُشترِكين الباقين

$$R(x) = x(840 - 25(x-30))$$

الدخل $R(x)$ يساوي عدد المُشترِكين الباقين

مضروبًا في قيمة الاشتراك

$$= 840x - 25x^2 + 750x$$

بتوزيع الضرب

$$= -25x^2 + 1590x$$

بجمع الحدود المتشابهة

هذا اقتران تربيعي، معاملُه الرئيس سالب؛ فمنحناه قطع مُكافئ مفتوح إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1590}{2(-25)} = \frac{1590}{50} = 31.8$$

الإحداثي x للرأس هو:

إذن، قيمة الاشتراك التي تُحقِّق للمركز أعلى دخل هي 31.8 دينارًا من كلِّ مُشترِك، ومقدار هذا الدخل هو $R(31.8)$.

$$R(31.8) = -25(31.8)^2 + 1590(31.8)$$

بتعويض 31.8 بدلًا من x في اقتران الدخل

$$= 25281$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، أعلى دخل يُحقِّقه المركز هو 25281 دينارًا كلَّ شهرٍ.

يُمكنني التحقق من صحَّة الحلِّ بتمثيل الاقتران باستعمال برمجية جيو جبرا.

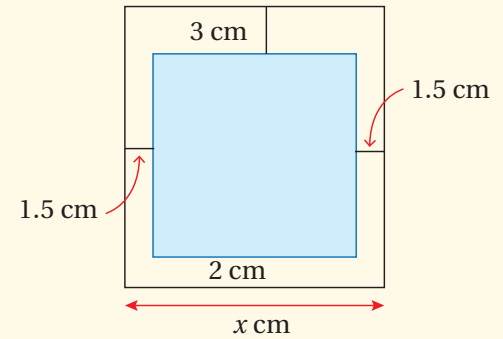
أتحقق من فهمي

رياضة: يتسع ملعب (ستاد) رياضيٍّ لنحو 62000 مُشجِّع. إذا كان ثمن بطاقة الدخول 11 دينارًا، فإنَّ مُعدَّل عدد الحضور هو 28000 مُشجِّع. وجدت دراسة أنَّ عدد بطاقات الدخول المبيعة يزيد بمقدار 4000 بطاقة مُقابل كلِّ دينار يُخصَّم من ثمن البطاقة. ما ثمن بطاقة الدخول الذي يُحقِّق أعلى دخل؟ ما مقدار هذا الدخل؟ انظر الهامش

- ناقش الطلبة في كيفية كتابة كثير حدود لنمذجة مسألة حياتية بطريقة مشابهة لترجمة المسألة إلى معادلة. وضح خطوات حل هذا المثال، ثم اطلب إلى الطلبة حله بطريقة بديلة بافتراض أن الزيادة هي x

مثال إضافي

إعلان: يريد سعد أن يطبع إعلانًا على ورقة مستطيلة محيطها 80 cm، بحيث يترك هامشًا من الأعلى عرضه 3 cm، وهامشًا من الأسفل عرضه 2 cm، وهامشًا من يمين الورقة ويسارها عرضه 1.5 cm



- اكتب اقترانًا يُمثل مساحة الإعلان بدلالة عرض الورقة x ، ثم جد أبعاد الورقة التي تجعل مساحة الإعلان أكبر ما يمكن.

$$A(x) = -x^2 + 38x - 105, 19 \text{ cm}, 21 \text{ cm}$$

- وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية (2-18) ضمن مجموعات).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن الاقتران في السؤال 2 كثير حدود بسبب إمكانية اختصار العامل x من البسط والمقام، فيتحول إلى $f(x) = 5x + 2$ ؛ لذا نبههم إلى أن القسمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$ ، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أن $x \neq 0$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 8 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

أتدرب وأحل المسائل

1 إلى 20 انظر ملحق الإجابات

أُحدِّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثم أجد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

1 $f(x) = 4 - x$

2 $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3 $h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$

4 $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5 $j(t) = \sqrt{7}t - 16t^2$

6 $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7 $f(x) = 13(2)^x + 6$

8 $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أمثل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًا، مُحدِّدًا مجاله ومداه:

9 $f(x) = x^2 - 3x - 4$

10 $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$

11 $y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \leq x \leq 3$

12 $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \leq x \leq 4$

إذا كان $f(x) = 2x + 1, g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4, h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي بالصورة القياسية:

13 $h(x) + g(x)$

14 $g(x) - h(x)$

15 $f(x) \cdot h(x)$

16 $x(f(x)) + h(x)$

17 $(f(x))^2 - g(x)$

18 $h(x) - x(g(x))$

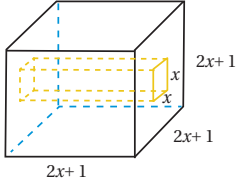
19 صاروخ: أُطلق صاروخ إلى أعلى، وكان ارتفاعه بالأمتر فوق سطح البحر بعد t ثانية من إطلاقه $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$. أجد أقصى ارتفاع يبلغه الصاروخ.



20 زراعة: وجد مُزارع أنّه إذا زرع 75 شجرة فاكهة في بُستانه، فإنّ مُعدّل ما يجنيه من كلّ شجرة هو 21 صندوقًا في الموسم. وكلّما نقص عدد الأشجار شجرة واحدة زاد مُعدّل ما يجنيه من كلّ شجرة بمقدار 3 صناديق؛ فتباعًا الأشجار بعضها عن بعض يُعزّز فرصها في الحصول على حاجتها من التربة. ما عدد الأشجار التي يتعيّن عليه زراعتها لإنتاج أكبر قدر من الثمر؟ ما مقدار هذا الثمر؟ انظر ملحق الإجابات



- 21 سياج: لدى سعيد 120 m من السياج، أراد أن يستعملها لتسييج 3 حظائر مستطيلة متساوية كما في المخطط الآتي. ما أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر؟ **انظر ملحق الإجابات**



- 22 هندسة: مكعب من الخشب، طول ضلعه $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيه تجويفٌ مقطوعٌ مُرَبَّعٌ، طول ضلعه x cm، وهو يمتدُّ من أحد الأوجه إلى الوجه المقابل. أكتب بالصورة القياسية الاقتران الذي يُمثل حجم الجزء المُتَبَقِّي من المكعب. **انظر ملحق الإجابات**

- 23 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس. $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

مهارات التفكير العليا

- 24 أكتشف الخطأ: وجد كلٌّ من طه وقاسم ناتج $(5x^3 + 7x^2 - 3) - 3x(x^2 - 2x - 3)$:

طه
$3x^3 - 6x^2 - 9x + 5x^3 + 7x^2 - 3$
$= 8x^3 + x^2 - 9x - 3$

قاسم
$3x^3 - 6x^2 - 9x + (-5x^3 - 7x^2 + 3)$
$= -2x^3 + 6x^2 - 6x$

أحد إذا كانت إجابة أيٍّ منهما صحيحة، مُبرِّراً إجابتي. 24 إلى 27 انظر ملحق الإجابات

- 25 مسألة مفتوحة: أكتب كثيري حدود، أحدهما ذو حدّين، والآخر ثلاثي الحدود، بحيث يكون ناتج ضربيهما اقتراناً ذا حدّين.

- 26 تحدّ: أجد أصفار الاقتران: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

- 27 تبرّر: إذا كان g ، f كثيري حدود، فأكتب العلاقة بين درجة كلٍّ منهما ودرجة كثير الحدود h الناتج من جمعيهما، و طرحهما، وضربيهما، مُبرِّراً إجابتي.

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرّر للإجابة، وامنعهم وقتاً كافياً لنقد مُبررات بعضهم.

- وجّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 25 إلى كتابة أي مقدار ذي حدّين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شرط أن تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسبة إلى عملية الجمع، فيكون مجموعها صفراً، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.

- وجّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 26 إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

الإثراء

5

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:

نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعات أول n من الأعداد الطبيعية بالاقتران:

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

(a) جد قيمة $F(5)$, $F(10)$

(b) صف ما تمثله كلٌّ من القيمتين في الفقرة a.

(c) جد مجموع: $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 400$

الختام

6

- اطلب إلى الطلبة وصف طرائق مختلفة لتصنيف كثيرات الحدود، ثم إعداد قائمة تتضمن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود و طرحها وضربها.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اختيار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- ذكّر الطلبة بضرورة تدوين قيمة المتغير الأول (المستقل) مع قيمة المتغير الثاني (التابع) المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول.

نتائج الدرس

- يقسم اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- يبين إن كان كثير حدود أحد عوامل كثير حدود آخر.
- يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها.
- يجد خطوط التقارب (إن وجدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- يمثل اقترانات نسبية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

التعلم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

التهيئة

1

- راجع الطلبة في قوانين الأسس، ثم اطلب إليهم تبسيط ما يأتي:

$$x^5 \div x^2 \quad \frac{6x^3}{2x} \quad \frac{12x^4}{4x^2} \quad \frac{6x^3 + 8x^2}{2x^2}$$

« اطلب إلى الطلبة حل المعادلات الآتية:

- a) $3x - 2 = 10$
- b) $2 - 4x = 0$
- c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية
Dividing Polynomials and Rational Functions

إيجاد ناتج قسمة اقتران كثير الحدود على آخر، وتعرف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها، ومداها، وتمثيلها بيانيًا.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

الاقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسي.
بركة سباحة على شكل متوازي مستطيلات، حجمها $54x^3 - 33x^2 - 3x^4$ وحدة مكعبة، ومساحة قاعدتها $6x - 3x^2$ وحدة مربعة. كيف يمكن إيجاد ارتفاع البركة؟ ما مقدار هذا الارتفاع؟

إن قسمة كثير حدود على آخر تُشبه كثيرًا عملية قسمة عدد كلي على آخر، إذ تُتبع الخطوات نفسها في كلتا الحالتين. يمكن قسمة كثير الحدود $f(x)$ على كثير الحدود $h(x) \neq 0$ إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $h(x)$. لقسمة كثير حدود على آخر، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية. وإذا كانت إحدى قوى المتغير في المقسوم مفقودة، فإني أضيفها في موقعها، وأكتب معاملها 0، ثم أنفذ خطوات القسمة كما في المثال الآتي.

مثال 1

أجد ناتج قسمة $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيها.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 10x + 74 \\ x + 5 \overline{) 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} \\ \underline{(-) 2x^3 + 10x^2} \\ -10x^2 + 24x \\ \underline{(-) -10x^2 - 50x} \\ 74x - 15 \\ \underline{(-) 74x + 370} \\ -385 \end{array}$$

بقسمة $2x^3$ على x ، وكتابة النتيجة $2x^2$ فوق الحد المشابه
بضرب المقسوم عليه $(x + 5)$ في $2x^2$
بالطرح، وتنزيل $24x$
بقسمة $-10x^2$ على x ، وكتابة النتيجة $-10x$ فوق الحد المشابه، ثم
ضرب المقسوم عليه $(x + 5)$ في $-10x$
بالطرح، وتنزيل -15
بقسمة $74x$ على x ، وكتابة النتيجة 74 فوق الحد الثابت، وضرب
المقسوم عليه $(x + 5)$ في 74
بالطرح

إذن، ناتج القسمة هو: $2x^2 - 10x + 74$ ، والباقي -385 ، ويمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x + 5}, x \neq -5$$

إرشاد

تتوقف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة. »
- كيف نجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه. »
- إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف نجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين. »
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

- اطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- وضّح لهم أنه يتعيّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 + 9x + 5$ على $2x + 1$
- اسألهم:
« كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال قسمة الأعداد الكلية؟ »

- ناقش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال، ونبّههم إلى أنه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أي قوة مفقودة في أي منهما.

- جد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.
الناتج: $3x^2 - 6x + 9$ ، والباقي -4

التقويم التكويني: ✓

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية: !

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أي قوة مفقودة؛ لذا أكّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فشجّعهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

مثال 2

- ناقش الطلبة في الشرط الذي يجعل عددًا عاملاً لعدد آخر. وبطريقة مماثلة، وضح الشرط الذي يجعل اقتران كثير حدود عاملاً لاقتران كثير حدود آخر، ثم شارك الطلبة في حل المثال، والتحقق من صحة الحل.

مثال إضافي

- بيّن إذا كان $h(x) = x + 1$ أحد عوامل الاقتران: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 12$ أم لا. لا، $h(x)$ ليس أحد عوامل $f(x)$ ؛ لأن باقي القسمة -11 ، وليس 0

أتُحقّق من صحّة الحل:

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)-385 &= 2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385 \\ &= 2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15 \\ &= 2x^3+24x-15 \quad \checkmark\end{aligned}$$

أتُحقّق من فهمي

أجد ناتج قسمة $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$ انظر الهامش

إذا كان $f(x)$ و $h(x)$ كثيري حدود، وكانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $h(x)$ ، و $h(x) \neq 0$ ، فإنّه يوجد كثير حدود وحيدان، هما: $q(x)$ (ناتج القسمة)، و $r(x)$ (باقي القسمة)، ودرجته أصغر من درجة $h(x)$ ، حيث:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \text{أو} \quad f(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

إذا كان $r(x) = 0$ ، فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $h(x)$ ، ويكون $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$.

مثال 2

أثبت أنّ $(2x^2 + x + 7)$ هو أحد عوامل الاقتران $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21$.

يكون $(2x^2 + x + 7)$ أحد عوامل الاقتران $f(x)$ إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $(2x^2 + x + 7)$ يساوي 0، أقيم $f(x)$ على $(2x^2 + x + 7)$:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 3 \\ 2x^2 + x + 7 \overline{) 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21} \\ \underline{(-) 6x^4 + 3x^3 + 21x^2} \\ -10x^3 - 11x^2 - 38x \\ \underline{(-) -10x^3 - 5x^2 - 35x} \\ -6x^2 - 3x - 21 \\ \underline{(-) -6x^2 - 3x - 21} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{بقسمة } 6x^4 \text{ على } 2x^2 \text{، وكتابة النتيجة } 3x^2 \text{ فوق} \\ \text{الحّد المشابه} \\ \text{بضرب المقسوم عليه } (2x^2 + x + 7) \text{ في } 3x^2 \\ \text{بالطرح، وتنزيل } -38x \\ \text{بقسمة } -10x^3 \text{ على } 2x^2 \text{، وكتابة النتيجة } -5x \\ \text{فوق الحّد المشابه، وضربها في المقسوم عليه} \\ \text{بالطرح، وتنزيل } -21 \\ \text{بقسمة } -6x^2 \text{ على } 2x^2 \text{، وكتابة النتيجة } -3 \\ \text{فوق الحّد الثابت، وضرب } -3 \text{ في المقسوم عليه} \\ \text{بالطرح}\end{array} \end{array}$$

أتذكّر

يمكن التحقق من صحّة القسمة بضرب الناتج في المقسوم عليه، وإضافة الباقي. فإذا كانت النتيجة مساوية للمقسوم كان الحل صحيحًا.

معلومة

يمكن استعمال خوارزمية القسمة للتأكد أنّ كثير الحدود $h(x)$ هو أحد عوامل كثير حدود آخر $f(x)$ أم لا.

إجابة أتُحقّق من فهمي 1:

الناتج:

$$4x^3 + 9x^2 + 36x + 156 \text{ ، والباقي: } 599$$

بما أن باقي القسمة $r(x)$ يساوي 0، فإن المقسوم يساوي المقسوم عليه مضروباً في ناتج القسمة؛ أي إن:

$$6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 = (2x^2 + x + 7)(3x^2 - 5x - 3)$$

وهذا يعني أن $(2x^2 + x + 7)$ عامل للاقتراح $f(x)$.

يمكن التحقق من ذلك بضرب العاملين في النتيجة السابقة.

أتحقق من فهمي

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55$, $h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$

الاقترانات النسبية (rational functions) هي اقترانات يمكن كتابتها بصورة نسبة بين كثيري حدود، مثل $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرط أن: $g(x) \neq 0$. ومن الأمثلة عليها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2-9}, \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مفهوم أساسي

الاقتران النسبي: اقتران تكون قاعدته (معادلته) بصورة $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث إن $g(x) \neq 0$ ، و $g(x)$ و $f(x)$ كثيري حدود.

مجال الاقتران النسبي: مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفراً.

مثال 3

أجد مجال كل اقتران نسبي في ما يأتي:

1 $q(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = 0$:

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

إذن، مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3، -3، ويكتب برمز المجموعة كما يأتي: $\{x | x \neq \pm 3\}$

أتذكر

يمكن استعمال قاعدة تحليل الفرق بين مربعين لتحليل $x^2 - 9 = 0$

مثال 3

- ناقش الطلبة في مفهوم الاقتران النسبي، واذكر أمثلة عليه، موضحاً أنه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفراً؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك شارك الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

مثال إضافي

- جد مجال كل مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\{x | x \neq 2\}$

b) $g(x) = \frac{3}{x^2-16}$ $\{x | x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \frac{2x-6}{x^2+25}$ كل الأعداد الحقيقية

إجابة أتحقق من فهمي 2:

(a) ناتج القسمة هو $x^2 + 2x - 11$ ، والباقي 0

(b) ناتج القسمة هو $5x - 3$ ، والباقي 0

اقتران المقلوب

ناقش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانياً، موضحاً لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم ناقشهم في خصائص اقتران المقلوب.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران النسبي rational function، واقتران المقلوب reciprocal function، وخط التقارب الرأسية vertical asymptote، وخط التقارب الأفقي horizontal asymptote.

$$2 \quad y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء قيم x التي تجعل $2x^3-5x^2-3x=0$:

$$x(2x^2-5x-3)=0$$

بإخراج x عامل مشترك

$$x(2x+1)(x-3)=0$$

بتحليل العبارة التربيعية $2x^2-5x-3$

$$x=0 \text{ أو } 2x+1=0 \text{ أو } x-3=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x=0, x=-\frac{1}{2}, x=3$$

بحل المعادلات

إذن، مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $0, 3, -\frac{1}{2}$ ، أو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq -\frac{1}{2}\}$

أنتحقق من فهمي

أجد مجال كل مما يأتي: انظر الهامش

$$a) h(x) = \frac{x^3+8}{x^2-5x+6}$$

$$b) y = \frac{x^2-4}{6x-3x^2}$$

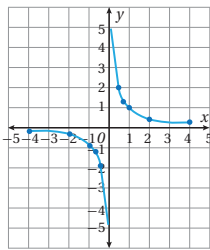
من أبسط الاقترانات النسبية الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ الذي يُسمى **اقتران المقلوب** (reciprocal function)، ومنه تولّد اقترانات نسبية كثيرة. يُمكن تمثيل هذا الاقتران بيانياً في الفترة $[-4, 4]$ مثلاً بإنشاء جدول قيم مع استثناء 0 ؛ لأنه ليس من مجاله. أُخذت قيم صغيرة للمتغير x قريبة من الصفر لتمثيل الاقتران بدقة؛ فالقيم الصحيحة وحدها لا تمثل الصورة كاملة، وإنما تكون الصورة مُجتزأة ناقصة.

x	-4	-2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1.25	-2	-5	5	2	1.25	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أعین النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط يمين $x=0$ بمنحنى، وأصل بين النقاط يسار $x=0$ بمنحنى آخر؛ لأن الاقتران غير مُعرّف عند $x=0$ ، فينتج الشكل المجاور.

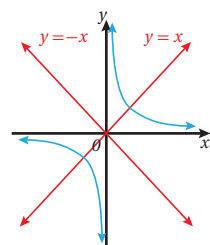
إجابة أنتحقق من فهمي 3:

- (a) مجال $H(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و 3، أي $\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$
 (b) مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و 2؛ أي $\{x \mid x \neq 0, x \neq 2\}$



ألاحظ من الشكل الخصائص الآتية لاقتران المقلوب:

- كلما اقتربت x من الصفر اقترب المنحنى من المحور y . ولذلك يكون المحور y الذي معادلته $x=0$ خط تقارب رأسي (vertical asymptote) للمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$.



- كلما زادت قيمة $|x|$ اقترب المنحنى أكثر وأكثر من المحور x . ولذلك يكون المحور x الذي معادلته $y=0$ خط تقارب أفقي (horizontal asymptote) لهذا المنحنى.

- منحنى اقتران المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ لا يقطع المحورين أبداً، ولكنه يقترب كثيراً منهما.

- للمنحنى محوراً تماثل، هما المستقيمان:

$$y = x, y = -x$$

يلاحظ من الرسم أن مدى الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر. وباستعمال رمز المجموعات، يكتب مداه كما يأتي:

$$\{y | y \neq 0\}$$

مثال 4

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأمثلة بيانية، وأجد مجاله، ومداه.

الخطوة 1: أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران.

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي عند صفر المقام؛ أي عندما $x-3=0$ يكون

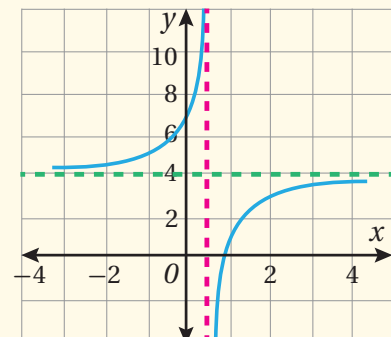
خط التقارب الرأسي هو المستقيم $x=3$

كلما زادت $|x|$ اقترب من الصفر، واقتربت قيمة $f(x)$ من 2؛ أي إن

خط التقارب الأفقي هو $y=2$

أنتعلم

إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسط الاقتران النسبي ومقامه، فإنه توجد خطوط تقارب رأسيّة عند أصفار مقامه جميعها.



المجال: $\{x | x \neq 3\}$

المدى: $\{y | y \neq 2\}$

إرشادات للمعلم

بأن للطلبة أنه يوجد للاقتران النسبي $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. فإذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي، وإذا تساوت درجتا البسط والمقام فإن خط التقارب الأفقي يكون المستقيم $y = \frac{a_n}{b_n}$ ، حيث a_n المعامل الرئيس للبسط، و b_n المعامل الرئيس للمقام. وإذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام كان خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=0$.

بأن لهم أيضاً أنه قد يوجد للاقتران النسبي الذي ليس لبسطه ومقامه عوامل مشتركة عدة خطوط تقارب رأسيّة تبعاً لأصفار مقامه، وأنه قد لا يوجد له خطوط تقارب رأسيّة إذا لم يكن لمقامه أصفار، وأنه لا يمكن أن يقطع منحناه خط التقارب الرأسي.

إرشاد: وجّه الطلبة إلى استعمال ورق الرسم البياني لتمثيل الاقترانات بصورة دقيقة ومرتبّة، منبّهاً إياهم إلى اختيار قيم للمتغير x على جانبي كل خط تقارب رأسي.

مثال 5: من الحياة

- ناقش الطلبة في حلّ المثال 5 الذي يُمثّل موقعاً حياتياً تستعمل فيه الاقترانات النسبية، ثم اسألهم عن مجال هذا الاقتران ومداه. بعد ذلك وضح لهم أن المجال في هذه الحالة هو الأعداد الحقيقية غير السالبة فلا يكون الزمن سالباً، وأن المدى هو الأعداد الحقيقية من 0.05 إلى أقل من 0.1؛ لأن خط التقارب الأفقي هو $y = 0.1$

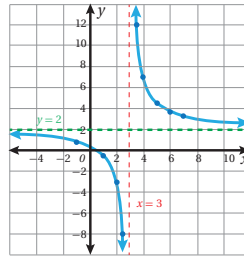
مثال إضافي

- يبيع خالد اشتراكات إحدى الصحف لمؤسسات. فإذا باع 5 اشتراكات لكل واحدة من أول 12 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى، وباع لكل منها اشتراكين. جد متوسط عدد الاشتراكات التي باعها خالد لكل مؤسسة زارها، ثم جد قيمة x إذا كان هذا المتوسط 3 اشتراكات.

$$M(x) = \frac{60 + 2x}{12 + x}, x = 24$$

الخطوة 2: أنشئ جدول القيم الآتي باستثناء العدد 3؛ لأن الاقتران غير مُعرّف عند 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$y = \frac{5}{x-3} + 2$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25



الخطوة 3: أرسم خطّي التقارب، ثم أعيّن النقاط

(x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل

بين النقاط إلى يمين المستقيم $x = 3$

بمنحنى أمده بمحاذاة خطّي التقارب،

ثم أصل بين النقاط إلى يسار المستقيم

$x = 3$ بمنحنى أمده بمحاذاة خطّي

التقارب، فينتج الشكل المجاور.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية ما

عدا 3، أو $\{x | x \neq 3\}$.

المدى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 2، أو $\{y | y \neq 2\}$.

انظر الهامش

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله، ومداه.

توجد مواقف حياتية كثيرة تُستعمل فيها الاقترانات النسبية، مثل حساب معدلات تتضمن مُتغيّرات.

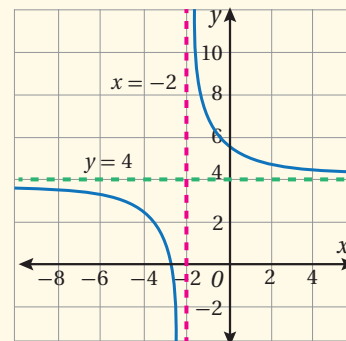
مثال 5: من الحياة

محاليل: يحتوي خزان كبير على 100 لتر من الماء، أذيب فيه 5 kg من السكر. وعند فتح الصنبور، بدأ الماء يصب في الخزان بمعدل 10 لترات في الدقيقة، وفي الوقت نفسه أضيف إلى الخزان 1 kg من السكر كل دقيقة. أجد تركيز السكر في الخزان (أي نسبة السكر إلى الماء) بعد 12 دقيقة، محدداً إذا كان هذا التركيز أكبر منه في البداية أم لا.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

له خط تقارب رأسي هو $x = -2$ ، وخط تقارب أفقي هو $y = 4$

x	-8	-6	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	4
$y=f(x)$	3.5	3.25	2.5	1	-2	10	7	5.5	5	4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2؛ أي $\{x | x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{y | y \neq 4\}$

إذا كان t هو عدد الدقائق التي تلي فتح الصنبور، فإن:

$$W(t) = 100 + 10t$$

كمية الماء هي الكمية الأصلية مضافاً إليها معدل الصَّب مُضروباً في t

$$S(t) = 5 + 1t$$

كمية السكر هي الكمية الأصلية مضافاً إليها معدل الإضافة مضروباً في t

$$C(t) = \frac{5 + t}{100 + 10t}$$

تركيز السكر هو نسبة السكر إلى الماء في الخزان

$$C(12) = \frac{5 + 12}{100 + 10(12)}$$

تركيز السكر بعد 12 دقيقة هو نتيجة تعويض $t = 12$ في الاقتران: $C(t)$

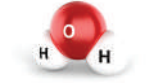
$$C(12) = \frac{17}{220} \approx 0.08$$

بالتبسيط، واستعمال الآلة الحاسبة

إذن، تركيز السكر في الخزان بعد 12 دقيقة هو 0.08 kg/L وقد كان تركيزه في البداية 0.05 kg/L ، إذن، تركيز السكر بعد 12 دقيقة أكبر منه في البداية؛ لأن $0.08 > 0.05$

أتحقق من فهمي

محاليل: يحتوي خزان كبير على 300 لتر من الماء، أُذيب فيه 8 kg من السكر. وعند فتح الصنبور، بدأ الماء يصب في الخزان بمعدل 20 لترًا في الدقيقة، وفي الوقت نفسه أُضيف إلى الخزان 2 kg من السكر كل دقيقة. أجد تركيز السكر في الخزان بعد t دقيقة، ثم أجد قيمة t التي يكون عندها تركيز السكر في الخزان 0.04 kg/L انظر الهامش



تسمح الروابط القطبية للماء بإذابة العديد من المواد؛ ما يجعله مذيئًا مثاليًا.

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1 $(x^2 + 5x - 1) \div (x - 1)$

الناتج: $x + 6$ ، والباقي: 5

2 $(3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$

الناتج: $3x + 2$ ، والباقي: 0

3 $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$

الناتج: $x^2 - x + 3$ ، والباقي: 0

4 $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$

الناتج: $3x^2 - 2x + 5$ ، والباقي: 11

5 $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$

الناتج: $-3x^2 - 4x - 6$ ، والباقي: -14

6 $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$

الناتج: $2x^2 - 3$ ، والباقي: $3x + 5$

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي:

7 $h(x) = x - 2, f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x - 6$

الناتج: $3x^3 + 4x + 3$ ، والباقي: 0

8 $h(x) = 2x^2 - 7x - 4, f(x) = 6x^4 - 17x^3 - 28x^2 - x + 4$

الناتج: $3x^2 + 2x - 1$ ، والباقي: 0

- وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية (2-12) ضمن مجموعات).

- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة التاسعة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$C(t) = \frac{8 + 2t}{300 + 20t}$$

$$0.04 = \frac{8 + 2t}{300 + 20t}$$

$$8 + 2t = 0.04(300 + 20t)$$

$$8 + 2t = 12 + 0.8t$$

$$1.2t = 4 \Rightarrow t = 3.33 \text{ min}$$



- وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبررات بعضهم.
- وجه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 22 إلى كتابة العامل $(x-1)^2$ بصورة $(x^2 - 2x + 1)$ ، ثم أسألهم:

« ماذا يكون العامل الآخر الذي ناتج ضربه في $(x^2 - 2x + 1)$ اقتران من الدرجة الثالثة؟ »

الإثراء

5

- ا طرح على الطلبة المسألة الآتية:

« إذا كان $(x-1)$ أحد عوامل الاقتران $f(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$ ، فما مجموع مربعات أصفار $f(x)$ ؟ 42 »

الختام

6

- اطلب إلى الطلبة إعداد قائمة تتضمن الخطوات التي يتبعونها في قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، ويُطبّقوها في قسمة $f(x) = 3x^2 + 6x^4 - 28x - 10$ على $h(x) = 2x^2 + 5$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الانتهاء من جمع البيانات عن المتغيرين اللذين اختاروهما.
- ذكّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

أجد مجال كل اقتران من الاقترانات الآتية: انظر ملحق الإجابات

9 $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$

10 $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$

11 $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي، وأمثله بيانيًا، وأجد مجاله، ومداه: انظر ملحق الإجابات

12 $f(x) = \frac{2}{x-3}$

13 $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

14 $w(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x}$

15 $g(x) = \frac{5x^2}{x^2+4}$

- 16 أدرس إحدى مسائل القسمة في هذا الدرس، ثم أكتب العلاقة بين درجة كل من المقسوم والمقسوم عليه والباقي.
- درجة ناتج القسمة تساوي درجة المقسوم ناقص درجة المقسوم عليه، ودرجة باقي القسمة أصغر من درجة المقسوم عليه.
- 17 مساحة ورقة مستطيلة تساوي $(3x^3 + 14x^2 + ax + 8)$ وحدات مربعة، وطولها يساوي $(x+2)^2$ وحدة. أجد قيمة a . انظر ملحق الإجابات

18 أخل المسألة الواردة في بداية الدرس. انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا (19-21) انظر ملحق الإجابات

19 أيها لا ينتمي: أجد فيما يأتي الاقتران المختلف عن الاقترانات الثلاثة الأخرى، مُبرّرًا إجابتي:

$h(x) = \frac{9}{x^2+1}$

$l(x) = \frac{7}{x^2-9}$

$f(x) = \frac{3}{x+5}$

$g(x) = \frac{5}{x+2}$

20 مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتران نسبي يكون لتمثيله البياني خط تقارب أفقي هو: $y = 3$ ، وخط تقارب رأسيان هما: $x = -2$, $x = 7$.

21 تحد: أجد اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يكون أحد عوامله $(x-1)$ ، وباقي قسمته على $(x+2)$ هو 9، وباقي قسمته على $(x-3)$ هو 44.

تركيب الاقترانات Composition of Functions

تعرف مفهوم الاقتران المركب، وشرط تركيب اقترانين، وإيجاد قيمته لعدد معطى، وإيجاد قاعدة اقتران مركب إذا عُلِّمَت قاعدتا مركبتيه.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



تركيب الاقترانات، الاقتران المركب، المركبتان.
عندما تسقط قطرة ماء المطر على بحيرة تتكوّن موجة دائرية
يتزايد طول نصف قطرها بالنسبة إلى الزمن وفق الاقتران:
 $r(t) = 25\sqrt{t+2}$ ، حيث r نصف القطر بالسنتيمترات،
و t الزمن بالدقائق. أجد مساحة الموجة عندما $t = 2$.

تعلّمت سابقاً أنّه يمكن استعمال أيّ اقترانين، مثل $g(x) = 2x - 1$ ، $f(x) = x^2$ ، لتكوين اقتران جديد، وذلك بإجراء عمليات جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة عليهما كما في الأمثلة الآتية:

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (f-g)(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$$

واليوم سأتعلّم طريقة جديدة لتكوين اقتران جديد من الاقترانين f ، و g عن طريق دمجهما، بحيث تكون مخرجة أحدهما مدخلة للآخر. وتسمى عملية الدمج هذه **تركيب الاقترانات** (function composition)، ويسمى الاقتران الناتج **الاقتران المركب** (composite function).

يمكن تركيب الاقترانين بطريقتين، هما: تطبيق f أولاً، ثم g على نتيجة f ، ويُرمز إلى ذلك بالرمز $(g \circ f)$ ، ويُقرأ: g بعد f . وتطبيق g أولاً، ثم f على نتيجة g ، ويُرمز إلى ذلك بالرمز $(f \circ g)$.

مفهوم أساسي

تركيب الاقترانات

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإن الاقتران الناتج من تركيب f ، و g هو:
 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. ويُقرأ: f بعد g ، ويكون مجال الاقتران المركب $(f \circ g)$ هو مجموعة قيم x من مجال g التي تكون مخرجاتها $g(x)$ في مجال f .

نتائج الدرس

- يتعرف مفهوم تركيب الاقترانات وشرطه، والاقتران المركب.
- يحسب قيم اقتران مركب عند قيم معلومة للمتغير المستقل.
- يجد قاعدة الاقتران المركب.
- يجد مركبتي اقتران مركب.
- يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.

التعلم القبلي:

- حساب قيمة اقتران معطى عند قيم معلومة للمتغير المستقل.
- ضرب مقادير جبرية وتبسيطها.
- تحديد مجال الاقتران كثير الحدود والاقتران النسبي.

التهيئة

1

- اكتب على اللوح:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1, g(x) = 4 - 3x,$$

$h(x) = \frac{x}{2x-6}$ ، ثم اطلب إلى الطلبة تحديد مجال كل من هذه الاقترانات، وإيجاد كل ممّا يأتي:

- 1) $f(1)$ 2
- 2) $f(-2)$ 17
- 3) $g(3)$ -5
- 4) $h(2)$ -1

مجال f ، g هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومجال h هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 3

- اطلب إلى الطلبة تبسيط المقدارين الآتين:

a) $3(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 4$

$$12x^2 + 2x + 2$$

b) $2x(x^2 + 5x) - 3(x^3 - 5x^2 + 4)$

$$-x^3 + 25x^2 - 12$$

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
« ما طول نصف قطر الموجة بعد 7 دقائق من سقوط قطرة المطر على البحيرة؟ 75 cm »
« كيف تحسب مساحة الموجة؟ باستعمال صيغة مساحة الدائرة: $A = \pi r^2$ »
« كيف تحسب مساحة الموجة بعد عدّة دقائق من سقوط قطرة الماء على البحيرة؟ إيجاد طول نصف قطرها r أولاً، ثم تعويضه في صيغة المساحة. »
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

- اكتب الاقترانين: $g(x) = 4 + 2x$, $f(x) = x - 2$ ، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة f للأعداد: 2, 3, 5, 9، ثم كتابة النتائج في عمودين كما يأتي:

f	
2	→ 0
3	→ 1
5	→ 3
9	→ 7

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة g للأعداد الناتجة من f ، ثم كتابة النتائج كما في المخطط الآتي:

f		g	
2	→ 0	→	4
3	→ 1	→	6
5	→ 3	→	10
9	→ 7	→	18
$g \circ f$			

- يبيّن للطلبة أن النتيجة النهائية الأولى 4 تُمثّل قيمة g لـ $f(2)$ ، وأنها تكتب بصورة $g(f(2)) = 4$ ، أو $(g \circ f)(2) = 4$ ، وهكذا الحال لبقية النتائج.
- وضح للطلبة أن عملية تعويض قيمة اقتران في اقتران آخر تسمى تركيب الاقترانات، وأنه عند تعويض $f(x)$ مكان x في معادلة $g(x)$ ينتج الاقتران المُركَّب $(g \circ f)(x)$ الذي هو $g(f(x))$ ، وأنه عند تعويض قيمة $g(x)$ في معادلة $f(x)$ ينتج $(f \circ g)(x)$ ، وأن هذين الاقترانين المُركَّبين يكونان غالبًا مختلفين.

مثال 1

- ناقش الطلبة في تعريف تركيب اقترانين، وطريقتي التركيب، وشروطه، مُبيّنًا أنه إذا كانت الاقترانات كثيرات حدود فإن مجالها ومداهما الأعداد الحقيقية؛ فيمكن تركيبها بالطريقتين. بعد ذلك شارك الطلبة في حل المثال، مُوضّحًا خطوتي الحل في كل فقرة.

التقويم التكويني:

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يجد بعض الطلبة قيمة $(g \circ f)(x)$ ببدء التعويض في $g(x)$ أولاً، ثم تعويض النتيجة في $f(x)$ ؛ لذا نبههم إلى البدء من أقصى اليمين، بتعويض x في معادلة $f(x)$ ، ثم تعويض الناتج في معادلة $g(x)$.

• إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ ، فجد ما يأتي:

a) $(f \circ g)(2)$ 49

b) $(g \circ f)(2)$ $\frac{13}{6}$

c) $(f \circ g)(5)$ 19.75

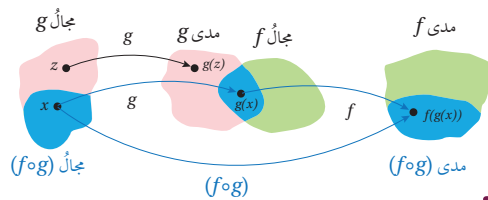
تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: تركيب الاقترانات composition of functions، والتركيب component، والاقتران المركّب composite function.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

يُوضَّح المخطط الآتي أنَّ مجال $(f \circ g)$ هو مجموعة جزئية من مجال g ، وأنَّ مدى $(f \circ g)$ هو مجموعة جزئية من مدى f . وإذا كانت إحدى القيم مثل $g(z)$ (حيث z أحد عناصر مجال g) غير موجودة في مجال f ، فلا يُمكن إيجاد $(f \circ g)(z)$ في هذه الحالة:



مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$ ، فأجِد:

1) $(g \circ f)(3)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(3) &= g(f(3)) && \text{تعني } g \text{ لـ } f(3) \text{ أي: } f(3) \text{ ثم } g \\ &= g(3^2) && \text{بتعويض } x=3 \text{ في معادلة } f \\ &= g(9) && \text{بالتبسيط} \\ &= 9 + 4 = 13 && \text{بتعويض } x=9 \text{ في معادلة } g \text{، والتبسيط} \end{aligned}$$

2) $(g \circ f)(-2)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) && \text{تعني } g \text{ لـ } f(-2) \text{ أي: } f(-2) \text{ ثم } g \\ &= g((-2)^2) && \text{بتعويض } x=-2 \text{ في معادلة } f \\ &= g(4) && \text{بالتبسيط} \\ &= 4 + 4 = 8 && \text{بتعويض } x=4 \text{ في معادلة } g \text{، والتبسيط} \end{aligned}$$

3) $(f \circ g)(5)$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(5) &= f(g(5)) && \text{تعني } f \text{ لـ } g(5) \text{ أي: } g(5) \text{ ثم } f \\ &= f(5+4) && \text{بتعويض } x=5 \text{ في معادلة } g \\ &= f(9) && \text{بالتبسيط} \\ &= 9^2 = 81 && \text{بتعويض } x=9 \text{ في معادلة } f \text{، والتبسيط} \end{aligned}$$

أفكر

هل توجد أي قيم للمتغير x لا يُمكن حساب $(h \circ j)(x)$ عندها؟

إذا كان $h(x) = \sqrt{x}$, $j(x) = 2x + 1$ ، فأجِد كلاً ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $(h \circ j)(4)$ b) $(j \circ h)(4)$ c) $(h \circ h)(16)$ d) $(j \circ j)(-8)$

إجابة أنصحق من فهمي 1:

a) 3 b) 5 c) 2 d) -29

- ناقش الطلبة في كيفية تعويض مقدار جبري من اقتران في معادلة اقتران آخر للتعبير عن تركيبهما جبرياً، موضحاً الخطوات المتبعة في المثال، وتبسيط المقدار الناتج لأبسط صورة.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = \sqrt{2x+10}$, $g(x) = 4x+1$ فجد $(f \circ g)(x)$ ، ثم جد $(f \circ g)(3)$ بطريقتين.

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{8x+12}, (f \circ g)(3) = \sqrt{8(3)+12}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(13) = \sqrt{2(13)+10}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

إرشاد: وجّه الطلبة إلى التحقق من صحة الإجابة عند إيجاد قاعدة الاقتران المركّب، بحساب قيمة الاقتران المركّب لعدد ما بالتعويض في القاعدة، واستعمال تعريف الاقتران المركّب، ومقارنة النتيجة، فإذا تساوت كانت القاعدة صحيحة.

تنويع التعليم

- وزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم اطلب إلى كل ثنائي أن يكتب اقترانين؛ كل على حدة، ثم العمل معاً لإيجاد ناتج تركيبهما، والتحقق من صحته.

يُمكنُ إيجاد قاعدة الاقتران المركّب بدلالة المتغير x ، ثم حساب قيمة الاقتران المركّب عند أي قيمة عددية معطاة.

مثال 2

إذا كان $f(x) = 3x+5$, $g(x) = 2x^2-6$ فأوجد قاعدة كلٍّ من: $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ ، ثم أجد $(f \circ g)(-2)$ و $(g \circ f)(0)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{تعريف الاقتران المركّب}$$

$$= f(2x^2-6) \quad \text{بتعويض } g(x) = 2x^2-6$$

$$= 3(2x^2-6) + 5 \quad \text{بتعويض } (2x^2-6) \text{ مكان } x \text{ في معادلة } f$$

$$(f \circ g)(x) = 6x^2 - 13 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$(f \circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11 \quad \text{بتعويض } x = -2 \text{ والتبسيط}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{تعريف الاقتران المركّب}$$

$$= g(3x+5) \quad \text{بتعويض } f(x) = 3x+5$$

$$= 2(3x+5)^2 - 6 \quad \text{بتعويض } (3x+5) \text{ مكان } x \text{ في معادلة } g$$

$$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6 \quad \text{بترتيب } (3x+5)$$

$$(g \circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$(g \circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44 \quad \text{بتعويض } x = 0 \text{ والتبسيط}$$

أنتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = 2 - 3x$ فأوجد قاعدة كلٍّ من: $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ ، ثم أجد $(f \circ g)(3)$ و $(g \circ f)(-1)$. انظر الهامش

يُمكنُ النظرُ إلى كثيرٍ من الاقترانات بوصفها اقترانات مركّبة، وإيجاد اقترانين بسيطين يُكافئُ تركيبهما الاقتران المركّب، عندئذٍ يكونُ الاقترانان البسيطان مُركّبتَي الاقتران المركّب (components of the composite function).

فمثلاً، يُمكنُ اعتبارُ الاقتران $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقتراناً مركّباً، ومُركّباتُهما: $g(x) = 4x^2 + 9$, $h(x) = \sqrt{x}$ ، ويكونُ $f(x) = (h \circ g)(x)$.

رموز رياضية

يُقرأ الرمز $(f \circ g)(x)$ ، f بعد $g(x)$ ، ويُقرأ الرمز $g(x) \circ f$ ، f قبل $g(x)$.

أفكر

هل تُحقّق عملية تركيب الاقترانات الخاصية التبادلية؟

إجابة أنتحقق من فهمي 2:

$$(f \circ g)(x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x) = 9x^2 - 24x + 12$$

$$(f \circ g)(3) = 21$$

$$(g \circ f)(x) = 2 - 3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x + 2$$

$$(g \circ f)(-1) = 11$$

- وضح للطلبة كيفية تفكيك اقتران معطى إلى اقترانين بسيطين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى، ثم أخبرهم أنه يوجد في حالات عدّة أكثر من طريقة لكتابة اقترانين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى. بعد ذلك ناقش الطلبة في حلّ المثال، ثم اطلب إليهم البحث عن إجابة أخرى.

إرشاد

تدّ لا تكون القيود على مجال الاقترانات واضحة بعد إجراء عملية تركيب الاقترانات وتبسيطها؛ لذا من المهمّ الانتباه إلى مجال الاقترانين قبل تركيبهما.

مثال 3

أجدّ الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يُمكن التعبير عن كلّ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

1 $h(x) = \frac{1}{x+3}$

أفترض أنّ $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x+3$. وبذلك، فإنّ:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+3) & \text{بتعويض } g(x) = x+3 \\ &= \frac{1}{x+3} = h(x) & \text{بتعويض } x+3 \text{ مكان } x \text{ في معادلة } f \end{aligned}$$

2 $h(x) = (2+x^2)^{10}$

أفترض أنّ $f(x) = x^{10}$ ، $g(x) = 2+x^2$. وبذلك، فإنّ:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(2+x^2) & \text{بتعويض } g(x) = 2+x^2 \\ &= (2+x^2)^{10} = h(x) & \text{بتعويض } 2+x^2 \text{ في معادلة } f \end{aligned}$$

أنّ تحقق من فهمي

أجدّ الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يُمكن التعبير عن كلّ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$ انظر الهامش

a) $h(x) = 4x^2 - 1$ b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكن استعمال فكرة الاقترانات المركّبة في مواقف حياتية كثيرة، مثل: التجارة، والصناعة، وغيرهما.

مثال 4: من الحياة

صناعة: وجدّ مدير مصنع للأثاث أنّ تكلفة إنتاج q من خزانات الكتب في فترة العمل الصباحية بالدينار هي: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كان عدد خزانات الكتب التي يُمكن إنتاجها في t ساعة في الفترة الصباحية هي: $q(t) = 20t$ ، $0 \leq t \leq 5$ ، فما تكلفة الإنتاج بدلالة t كمّ دينارًا تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة؟



مثال إضافي

- جدّ الاقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن $h(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 9}$ بصورة $h(x) = f(g(x))$. إجابة محتملة:

$$g(x) = x^2 + 9, f(x) = 2 + \sqrt{x}$$

مثال 4: من الحياة

- ناقش الطلبة في حلّ المثال 4 الذي يُبين توظيف تركيب الاقترانات في موقف حياتي، ثم اطلب إليهم تفسير الاقترانين المعطيين في المسألة، ومدلول الاقتران الناتج من تركيبهما. بعد ذلك اسألهم عن حساب التكلفة من دون كتابة اقتران مُركّب.

إجابة أنّ تحقق من فهمي 3:

من الإجابات المحتملة:

a) $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = 2x$ ، أو $f(x) = 4x - 1$ ، $g(x) = x^2$

من الإجابات المحتملة:

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 5$ ، $g(x) = (x+2)^2$ ، أو $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$ ، $g(x) = x+2$

تجارة: أعلن محل لبيع الأجهزة الكهربائية عن خصم قيمته 15% على جميع الأجهزة. يريد خليل أن يشتري ثلاجة من هذا المحل، ولديه قسيمة من المصنع تُحوّله الحصول على خصم 25 دينارًا من ثمن الثلاجة:

(a) اكتب اقترانين g, f ، يُمثّل أحدهما ما سيدفعه خليل لشراء ثلاجة ثمنها x دينارًا مستفيدًا من الخصم المعلن، ويُمثّل الآخر ما سيدفعه مستفيدًا من القسيمة.

$$f(x) = x - 25, \quad g(x) = x - 0.15x = 0.85x$$

(b) اكتب قاعدة كلٍّ من $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ ، مُفسّرًا دلالاتهما، ومُحدّدًا أيهما أفضل لخليل.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من القسيمة أولاً، ثم الخصم المعلن: $(g \circ f)(x) = 0.85x - 21.25$

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من الخصم المعلن أولاً، ثم القسيمة: $(f \circ g)(x) = 0.85x - 25$

الأفضل لخليل هو $(f \circ g)(x)$ ؛ لأنه سيدفع أقل بمقدار 3.75 دينار.

التدريب

4

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (1-10)، وتابعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم ناقشهم فيها.

تعليمات المشروع

وجّه الطلبة إلى البدء بتنفيذ الخطوة 3 من المشروع، بتمثيل البيانات التي جمعوها باستعمال برمجية Excel، وإيجاد قاعدة الاقتران المناسب للبيانات.

لإيجاد تكلفة الإنتاج بدلالة t ، أعرض قيمة $q(t)$ في معادلة التكلفة، فأكون اقترانًا مُركّبًا هو $(C \circ q)(t)$:

$$\begin{aligned} (C \circ q)(t) &= C(20t) \\ &= (20t)^2 + 2(20t) + 800 \quad \text{بتعويض } 20t \text{ مكان } q \text{ في معادلة التكلفة} \\ (C \circ q)(t) &= 400t^2 + 40t + 800 \quad \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة هي: $(C \circ q)(4)$

$$(C \circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذن، تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة هي: 7360 دينارًا.

أتحقق من فهمي

قياس: يُحوّل الاقتران $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ درجات الحرارة من المقياس الفهرنهايتي F إلى مقياس سيلسيوس C . ويحوّل الاقتران $K(C) = C + 273$ درجات الحرارة من مقياس سيلسيوس إلى مقياس كلفن K . أكتب الاقتران الذي يُحوّل درجة الحرارة من المقياس الفهرنهايتي إلى مقياس كلفن، ثم أجِد درجة الحرارة على مقياس كلفن التي تُقابل 86 درجة فهرنهايت. **انظر الهامش**

معلومة

الكلفن وحدة لقياس درجة الحرارة، اعتمدت في النظام الدولي، ورمز إليها بالرمز (K) ، وقد سُميت بهذا الاسم نسبةً إلى الفيزيائي اللورد كلفن.

أدرب وأحل المسائل

إذا كان $f(x) = x + 7$ ، $g(x) = \frac{x}{2}$ ، فأجِد كلاً مما يأتي:

- 1 $(f \circ g)(4)$ 9
- 2 $(g \circ f)(4)$ 5.5
- 3 $(g \circ g)(-2)$ $-\frac{1}{2}$
- 4 $(f \circ f)(3)$ 17

إذا كان $c(x) = x^3$ ، $d(x) = 2x - 3$ ، فأجِد كلاً مما يأتي:

- 5 $(c \circ d)(3)$ 27
- 6 $(d \circ c)(5)$ 247
- 7 $(c \circ d)(x)$ $(c \circ d)(x) = (2x - 3)^3$
- 8 $(d \circ c)(x)$ $(d \circ c)(x) = 2x^3 - 3$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$$(K \circ C)(F) = K\left(\frac{5}{9}(F - 32)\right) = \frac{5}{9}(F - 32) + 273$$

$$(K \circ C)(86) = \frac{5}{9}(86 - 32) + 273 = 303K$$

تنبيه: في الأسئلة (15-18)، وجّه الطلبة إلى اختيار التمثيل البياني للاقتران الأيمن في صيغة الاقتران المركّب، ورسم عمود من القيمة x المحددة في السؤال بحيث يلاقي المنحنى، ثم رسم مستقيم أفقي إلى المحور y ، وتحديد قيمة y ، ثم تعيين تلك القيمة على المحور x في التمثيل البياني الثاني، ثم رسم عمود يلاقي المنحنى، ثم رسم خط أفقي إلى المحور y ، وتحديد قيمة y ، فتكون تلك القيمة هي قيمة الاقتران المركّب.

9 إذا كان $a(x) = x + 4$, $b(x) = x - 7$ ، فأثبت أن $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$. انظر ملحق الإجابات

10 إذا كان $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3x + 4$ ، فأجد $(f \circ g)(x)$ ، ثم أجد قيمة $(f \circ g)(-3)$. انظر ملحق الإجابات

11 إذا كان $g(x) = 2x - 10$, $f(x) = \frac{1}{x-4}$ ، فأجد $(g \circ f)(x)$ بصورة كسر واحد، ثم أعيّن مجاله. انظر ملحق الإجابات

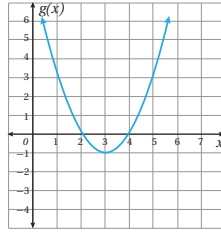
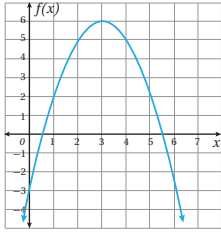
إذا كان $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 7$ ، فأعبر عن كل ممّا يأتي بصورة اقتران مركّب، مُعتمداً الاقترانين f, g :

12 $x^2 - 6$
($f \circ g$)(x)

13 $x + 2$
($f \circ f$)(x)

14 $x^2 + 2x - 6$
($g \circ f$)(x)

أستعمل التمثيلين البيانيين للاقترانين $f(x), g(x)$ لإيجاد قيمة الاقتران المركّب في الأسئلة (15-18):



15 $(f \circ g)(2)$ ($f \circ g$)(2) = $f(g(2)) = f(0) = -3$

16 $(g \circ f)(4)$ ($g \circ f$)(4) = $g(f(4)) = g(5) = 3$

17 $(g \circ g)(5)$ ($g \circ g$)(5) = $g(g(5)) = g(3) = -1$

18 $(f \circ f)(3)$ ($f \circ f$)(3) = $f(f(3)) = f(6) = -3$

أجد اقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يُمكن التعبير عن كلٍّ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

19 $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$ انظر ملحق الإجابات

20 $h(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$ انظر ملحق الإجابات

21 إذا كان $g(x) = \frac{2}{3-x}$, $x > 3$, $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$ ، فهل يُمكن تكوين $(f \circ g)(x)$ ؟ أبرّر إجابتني.

انظر ملحق الإجابات

22 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس. انظر ملحق الإجابات

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأسئلة ذوات الأرقام الفردية في الصفحة العاشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقشهم أيضاً في الأسئلة الباقية من الدرس.



يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدة في الثَّلاجة بالاقتران:
 $N(T) = 23T^2 - 56T + 1$, حيثُ T درجة حرارة الطعام. عند
إخراج الطعام من الثَّلاجة تُعطى درجة حرارته بالاقتران: $T(t) = 5t + 1.5$,
حيثُ t الزمنُ بالساعات.

23 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$. (23-26) انظر ملحق الإجابات

24 أجدُ الزمنَ الذي يصلُ عنده عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خلية، مُقرَّبًا إجابتي إلى منزلتين عشريتين.

25 إذا كانَ $0 < a$ ، $f(x) = ax + b$ ، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$ ، فأجدُ قيمة كلِّ من a ، و b .

26 أجدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسط صورة، علمًا بأن: $h(x) = x + 3$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = x^2 + 1$.

مهارات التفكير العليا (27-30) انظر ملحق الإجابات

27 أكتشفُ الخطأ: وجدتُ كلَّ من هدى ووفاء ناتجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيثُ: $g(x) = x^2 + 5$ ، $f(x) = x^2 - 6x - 5$. أجدُ
إذا كانت إجابة أيٍّ منهما صحيحة، مُبرَّرًا إجابتي.

هدى
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (x^2 + 5)^2 - 6(x^2 + 5) - 5$
$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5$
$= x^4 + 4x^2 - 10$

وفاء
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (x^2 + 5)^2 - 6x^2 - 5$
$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5$
$= x^4 + 4x^2 + 20$

28 مسألة مفتوحة: أكتبُ اقترانين f ، و g بحيث يكون $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

29 تحدُّ: إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ، $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، فما قاعدة $(f \circ g)(x)$ ؟ ما مجاله؟

30 تحدُّ: إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ ، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، فأحلُّ المعادلة $(f \circ g)(x) = -4$.

5

الإثراء

• اشرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

« إذا كان $f(x) = 3x - 7$ ، وكان

$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 11$ ، فما قاعدة $g(x)$ ؟

$$g(x) = \frac{4}{3}x^2 + 6$$

« إذا كان $f(x) = \sqrt{3x}$ ، وكان

$(g \circ f)(x) = 18x + 7$ ، فما قاعدة $g(x)$ ؟

$$g(x) = 6x^2 + 7$$

« إذا كان $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = \frac{2+3x}{2x-6}$ ، فما

مجال كل من $(f \circ g)(x)$ ، و $(g \circ f)(x)$ ؟

مجال $(f \circ g)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية
باستثناء 0 و $\frac{1}{3}$

مجال $(g \circ f)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية
باستثناء 3 و $\frac{-2}{3}$

6

الختام

• اطلب إلى الطلبة البحث في مكتبة المدرسة أو شبكة
الإنترنت عن أمثلة تطبيقية على تركيب الاقترانات، ثم
كتابة مثال واقعي عن تركيب الاقترانات.

الاقتران العكسي

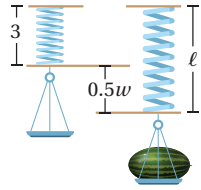
Inverse Function

الدرس

4

تعرّف الاقتران العكسي، وإيجاده، وتحديد مجاله ومداه.

العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحايّد، الاقتران الجذري.



يُستعمل الاقتران $l = 0.5w + 3$ لإيجاد طول الزنبرك l بالستيمترات في الميزان الزنبركيّ عند قياس كتلة جسم w بالكيلوغرام. هل يُمكن إيجاد اقتران آخر يُستعمل لإيجاد كتلة الجسم إذا عُلِمَ طول الزنبرك؟

فكرة الدرس

المصطلحات

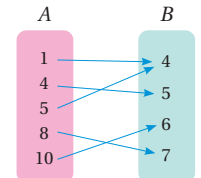
مسألة اليوم

نتائج الدرس

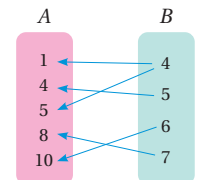
- يتعرف العلاقة العكسية، والاقتران العكسي.
- يجد الاقتران العكسي، ويحدد مجاله ومداه.
- يتعرف الاقتران الجذري، ويحدد مجاله ومداه.
- يمثل الاقتران واحد لواحد واقترانه العكسي في المستوى الإحداثي نفسه، ويتعرف العلاقة بينهما.

التعلم القبلي:

- تمييز العلاقة والاقتران.
- تغيير موضوع القانون.



تعلّمت سابقاً أنّ العلاقة تربط بين مجموعتين من العناصر، وأنّ إحداها تُسمّى المجال، والأخرى تُسمّى المدى. وبالنظر إلى العلاقة المُمثّلة في المخطط السهمي المجاور، ألاحظ أنّ المجال هو: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ ، والمدى هو: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.



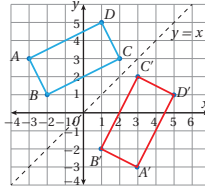
عند عكس اتجاه الأسهم لترتبط عناصر B بعناصر A تنتج علاقة عكسية (inverse relation)، مجالها B ، ومداها A .

مثال 1

تُمثّل الأزواج المُرتّبة للعلاقة: $\{(1, 5), (2, 3), (-2, 1), (-3, 3)\}$ إحداثيات رؤوس المستطيل $ABCD$. أجد العلاقة العكسية، ثمّ أُمثّل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه.

لإيجاد العلاقة العكسية، أبدأُ إحداثيات الأزواج المُرتّبة، فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(5, 1), (3, 2), (1, -2), (-3, -3)\}$.

عند تمثيل هذه الأزواج المُرتّبة بيانياً تنتج إحداثيات رؤوس المستطيل $A'B'C'D'$ الذي يُمثّل انعكاساً للمستطيل $ABCD$ حول المستقيم $y = x$.



التهيئة

1

- اسأل الطلبة عن العلاقة والاقتران والفرق بينهما.
- اكتب العلاقتين الآتيتين، ثم اسأل الطلبة عن المجال والمدى لكل منهما، وأيهما اقتران:

1) $\{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

2) $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x بدلالة y في كلّ ممّا يأتي:

1) $y = 2x - 5$ $x = \frac{y+5}{2}$

2) $y = \frac{3y+4}{5}$ $x = \frac{5y-4}{3}$

- وجه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم) واسألهم:
« لماذا يستطيع الزنبرك عندما تُعلّق به كتلة؟ لأن قوة الجاذبية تشد الكتلة إلى الأسفل، فيزداد طول الزنبرك.
« إذا علّق بالميزان مادة كتلتها 4 k ، فما طول الزنبرك؟ 5 cm
« كيف تُحسب كتلة جسم علّق بهذا الميزان فأصبح طول الزنبرك 7 cm ؟ ما كتلته؟
بتعويض 7 بدل l في المعادلة وحلها لإيجاد w . كتلته 8 kg
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

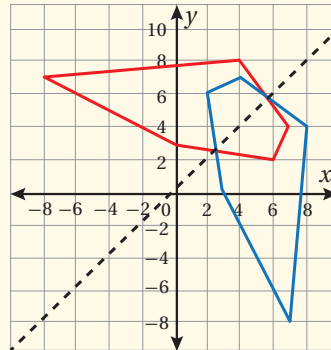
- وضح للطلبة مفهوم العلاقة العكسية التي تنتج بعكس اتجاه الأسهم في المخطط السهمي، أو بتبديل الإحداثيين في الأزواج المرتبة التي تُمثل العلاقة. فإذا كان (a, b) موجوداً في العلاقة R ، فإن (b, a) يكون موجوداً في العلاقة العكسية للعلاقة R .

مثال 1

- ناقش الطلبة في حلّ المثال 1 الذي يُبين كيفية إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة مكتوبة بصورة أزواج مرتبة، وتمثيل العلاقة ومعكوسها في المستوى البياني نفسه، ومقارنة التمثيلين البيانيين، مُذكّراً إيّاهم بالانعكاس حول مستقيم.

مثال إضافي

- تُمثل العلاقة $\{(2, 6), (3, 0), (4, 7), (7, -8), (8, 4)\}$ رؤوس مضلع خماسي. جد العلاقة العكسية، ومثلّ العلاقات في المستوى الإحداثي نفسه.



- العلاقة العكسية هي:
 $\{(6, 2), (0, 3), (7, 4), (-8, 7), (4, 8)\}$ وهي تُمثل
انعكاساً لرؤوس المضلع حول المستقيم $y = x$

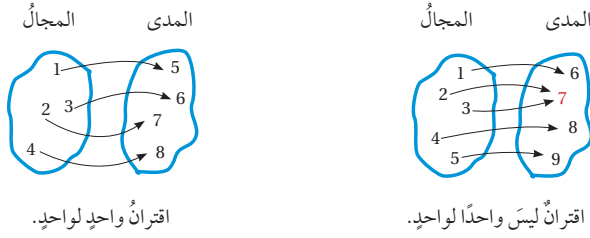
أتحقق من فهمي

نُمثِّل الأزواج المرتبة للعلاقة: $\{(4, 3), (-4, 3), (-3, 1)\}$ إحداثيات رؤوس المثلث ABC . أجد العلاقة العكسية، ثم أُمثِّل بيانيًا العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه. انظر الهامش.

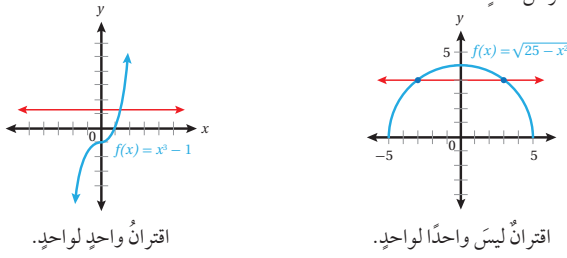
الاقترانات هي نوع خاص من العلاقات؛ لأن لها خاصية لا تُحققها جميع العلاقات؛ فهي تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى. وبما أن كل اقتران هو علاقة فإنه يمكن إيجاد علاقة عكسية للاقتران (معكوس الاقتران)، فإذا كان المعكوس اقترانًا أيضًا سُمِّيَ اقترانًا عكسيًا (inverse function). ويرمز إلى الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$. يمكن تحديد إذا كان معكوس الاقتران $f(x)$ اقترانًا أم لا بالنظر إلى $f(x)$ نفسه؛ فإذا ارتبط كل عنصر في المدى بعنصر واحد فقط في المجال كان المعكوس اقترانًا، عندئذ يُسمَّى $f(x)$ اقترانًا واحدًا لواحد (one to one function).

رموز رياضية

يُقرأ الرمز $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$.



يمكن أيضًا استعمال طريقة تُسمَّى اختبار الخط الأفقي (horizontal line test) للتحقق من أن الاقتران هو واحد لواحد، وذلك برسم أي خط أفقي، والتأكد أنه لا يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة.



وَصَح للطلبة أنه يمكننا إيجاد معكوس للاقتران مثلما نجد معكوسًا للعلاقة. غير أن معكوس الاقتران $f(x)$ لا يكون اقترانًا إلا إذا كان كل عنصر في مدى الاقتران f مرتبطًا بعنصر واحد فقط من مجاله؛ فلا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بعنصر واحد من المدى. ويسمى الاقتران الذي يُحقق هذه الخاصية اقتران واحد لواحد، ويكون معكوسه هو الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.

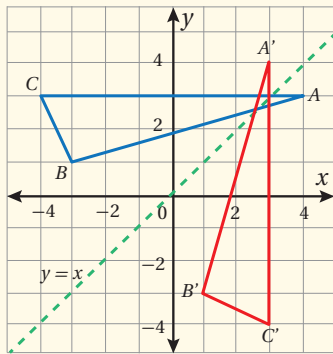
وجّه الطلبة إلى تأمل المخططين السهميين في الصفحة 33، ثم رسم معكوس كل منهما، ثم اسألهم:

« أي المعكوسين هو اقتران؟ »

وَصَح للطلبة اختبار الخط الأفقي؛ لكي يتمكنوا من تمييز اقتران واحد لواحد.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

العلاقة العكسية هي: $\{(1, -3), (3, -4), (3, 4)\}$ ، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$



مثال 2

- وضح للطلبة خطوات إيجاد الاقتران العكسي لاقتران عُلِّمت معادلته كما في المثال.
- اكتب على اللوح بعض الأعداد، ثم اطلب إلى الطلبة تعويضها في $f(x)$ ، وتعويض الأعداد الناتجة في الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ ، وملاحظة العلاقة بين الاقتران ومعكوسه.

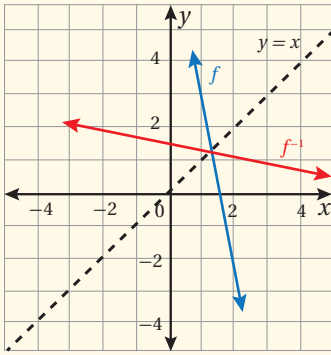
$$\text{إذا كان } f(a) = b \text{ فإن } f^{-1}(b) = a$$

- وضح لهم أيضًا أنه لرسم الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران، يجب اختيار بعض النقاط، وتبديل ترتيب إحداثي كل منها، وتعيين النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ورسم المنحنى (أو المستقيم) المار بها.

مثال إضافي

- جد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 7 - 5x$ ، ثم مثل $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.

$$f^{-1}(x) = \frac{7-x}{5}$$

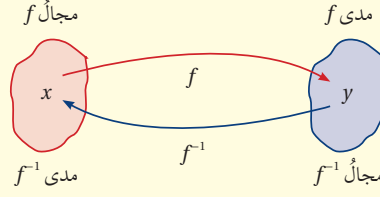


التقويم التكويني: ✓

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مفهوم أساسي

لأي اقتران $f(x)$ ، يوجد اقتران عكسي $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ اقترانًا واحدًا لواحد، عندئذ يكون مجال $f(x)$ هو مدى $f^{-1}(x)$ ، ومدى $f(x)$ هو مجال $f^{-1}(x)$.



يُمكن إيجاد الاقتران العكسي للاقتران المكتوب بصورة معادلة بالتبديل بين x و y في قاعدة الاقتران.

مثال 2

أجد الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ لكل اقتران مما يأتي:

$$1 \quad f(x) = 4(x-5)$$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $y = f(x)$

$$y = 4(x-5)$$

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

$$y = 4(x-5)$$

المعادلة الأصلية

$$y = 4x - 20$$

بتوزيع الضرب في 4 على الحدين

$$y + 20 = 4x$$

بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة

$$\frac{y+20}{4} = x$$

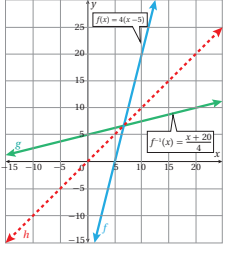
بقسمة طرفي المعادلة على 4

الخطوة 3: أبدل x بـ y ، وأبدل y بـ x في الصيغة التي توصلت إليها في الخطوة 2، فينتج:

$$\frac{x+20}{4} = y$$

كّرر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: علاقة عكسية inverse relation، واقتزان عكسي inverse function، واقتزان واحد لواحد one to one function، واقتزان محايد identity function.

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فيكون الناتج قاعدة الاقتزان العكسي $f^{-1}(x)$.

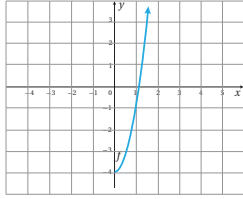


أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فينتج:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$

عند تمثيل كل من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتزان $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتزان $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمال اختبار الخط الأفقي، أجد أن $f(x)$ هو اقتزان واحد لواحد عندما $x \geq 0$ ؛ لذا فإن له اقتزاناً عكسياً.

الخطوة 1: أكتب الاقتزان بصورة $y = 3x^2 - 4$

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1

بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية

$$y = 3x^2 - 4$$

$$y + 4 = 3x^2$$

$$\frac{y+4}{3} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$$

بإضافة 4 إلى طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 3

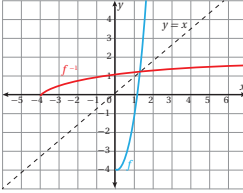
بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين؛ لأن مجال f الذي يمثل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة.

الخطوة 3: أبديل x بـ y ، وأبديل y بـ x ، فينتج: $\sqrt{\frac{x+4}{3}} = y$

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ،

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$$

عند تمثيل كل من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتزان $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتزان $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.



معلومة

بوجه عام، لا يوجد للاقتزان التربيعي اقتزان عكسي؛ لأنه ليس اقتزان واحد لواحد. ولكن إذا اختزل مجاله بالفترة التي يكون فيها اقتزان واحد لواحد، كان له عندئذ اقتزان عكسي.

رموز رياضية

يدل الرمز $f^{-1}(x)$ على الاقتزان العكسي للاقتزان f ، أما الرمز $\frac{1}{f(x)}$ فيدل على مقلوب الاقتزان f .

مثال 3

- ناقش الطلبة في النتيجة الخاصة بتركيب اقتران مع الاقتران العكسي له، وكيفية توظيفها لتحديد إذا كان كل من اقترانين معطينين يُمثّل اقتراناً عكسياً للآخر أم لا، بناءً على المثال 3.

مثال إضافي

- أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x) = 4x^2 - 1, x \geq 0$ و $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}, x \geq -1$ هو اقتران عكسي للآخر.

$$(f \circ g)(x) = 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}\right)^2 - 1$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right)(x+1) - 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2-1)+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(2x) = x$$

إذن، كل من $f(x), g(x)$ اقتران عكسي للآخر؛ لأن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$

أتحقق من فهمي

أجدد الاقتران العكسي لكل من الاقترانين الآتيين: انظر الهامش

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

من خصائص أي اقترانين متعاكسين أن كلا منهما يعكس أثر الآخر؛ لذا ينتج من تركيبهما الاقتران الذي يُبقي كل عنصر في مجالهما على حاله، وهو **الاقتران المحايد** (identity function) الذي يربط كل عنصر بنفسه، وقاعدته هي: $f(x) = x$

نتيجة

يكون $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.

إرشاد

تعني جملة (إذا وفقط إذا) أن العبارة صحيحة في الاتجاهين.

تُستعمل النتيجة السابقة لإثبات أن كلا من اقترانين معلومين هو اقتران عكسي للآخر، وللتحقق من صحة الحل عند إيجاد الاقتران العكسي.

مثال 3

أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x) = \frac{x+5}{3}$ و $g(x) = 3x - 5$ هو اقتران عكسي للآخر بإيجاد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(3x - 5)$

$= \frac{(3x - 5) + 5}{3}$

$= \frac{3x + (-5 + 5)}{3}$

$(f \circ g)(x) = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g\left(\frac{x+5}{3}\right)$

$= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5$

$= x + 5 - 5$

$(g \circ f)(x) = x$

إذن، كل من الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر؛ لأن $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

تعريف الاقتران المركب

بتعويض $g(x) = 3x - 5$

بتعويض $3x - 5$ مكان x في معادلة $f(x)$

بالتبسيط

بالتبسيط

تعريف الاقتران المركب

بتعويض $f(x) = \frac{x+5}{3}$

بتعويض $\frac{x+5}{3}$ مكان x في معادلة $g(x)$

باختصار العامل 3 من البسط والمقام

بالتبسيط

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{7}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

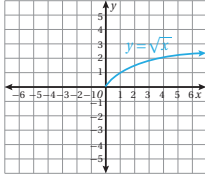
أنظر الهامش

أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x) = 4x - 8$ و $g(x) = \frac{x}{4} + 2$ هو اقتران عكسي للآخر.

نتج في المثال الثاني الاقتران العكسي $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذراً تربيعياً لمقدار جبري، وهو نوع خاص من الاقترانات يُسمى **الاقتران الجذري** (radical function)، مثل:

$$f(x) = \sqrt{5+x^2} \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+12}{8}} \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$$

إذا كان دليل الجذر فردياً مثل: $\sqrt[3]{\quad}$ ، $\sqrt[5]{\quad}$ كان مجال الاقتران الجذري جميع الأعداد الحقيقية، ومداؤه جميع الأعداد الحقيقية. أما إذا كان دليله زوجياً مثل: $\sqrt{\quad}$ ، $\sqrt[4]{\quad}$ ، فإن مجاله يكون مجموعة الأعداد التي تجعل المقدار تحت رمز الجذر عدداً غير سالب؛ لأن الجذور الزوجية للأعداد السالبة ليست حقيقية، ويكون مداؤه مجموعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة. فمثلاً، $f(x) = \sqrt{x}$ مجاله $x \geq 0$ ، ومداؤه $y \geq 0$ ، وتمثله البياني كما في الشكل الآتي:



مثال 4

أجد مجال الاقتران $f(x) = \sqrt{2x-6}$ ومداؤه، ثم أجد الاقتران العكسي له.
مجال هذا الاقتران هو قيم x التي تجعل $2x-6 \geq 0$:

$$\begin{aligned} 2x-6 &\geq 0 && \text{أكتب المتباينة} \\ 2x-6+6 &\geq 0+6 && \text{بإضافة 6 إلى الطرفين} \\ 2x &\geq 6 && \text{بالتبسيط} \\ x &\geq 3 && \text{بقسمة الطرفين على 2} \end{aligned}$$

إذن، مجال $f(x)$ هو $x \geq 3$ ، أو الفترة $[3, \infty)$ ، ومداؤه جميع الأعداد الحقيقية من قيمته عند 3 فصاعداً؛ لأن المقصود بالجذر هنا هو الجذر الموجب. فالمدى هو $y \geq 0$ ، أو الفترة $[0, \infty)$.

أتذكر

عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد موجب لا تُغيّر رمز المتباين. أما الضرب في عدد سالب فيعكس رمز المتباين.

- وضح للطلبة مفهوم الاقتران الجذري ومجاله ومداؤه، ثم ناقشهم في المثال 4، مُذكرًا إياهم بخصائص علاقة التباين ($>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$).
- وضح لهم أيضاً كيفية حل المعادلة التي تحوي جذوراً عند إيجاد الاقتران العكسي لاقتران جذري.

مثال إضافي

- جد المجال والمدى والاقتران العكسي لكل من الاقترانين الآتيين:

a) $g(x) = 2 + \sqrt{9-3x}$

b) $h(x) = \sqrt[3]{4x-15}$

(a) المجال: $x \leq 3$ أو الفترة $(-\infty, 3]$ ، والمدى $y \geq 2$ أو الفترة $[2, \infty)$ ، $g^{-1}(x) = \frac{9-(x-2)^2}{3}$ ، $x \geq 2$

$$g^{-1}(x) = \frac{9-(x-2)^2}{3}, x \geq 2$$

(b) المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: جميع الأعداد الحقيقية

$$h^{-1}(x) = \frac{x^3+15}{4}$$

إرشادات للمعلم

وضح للطلبة كيف يُوظف الاقتران العكسي في مسائل عملية بحيث يصبح المتغير المستقل تابعاً، والمتغير التابع مستقلاً. فالاقتران الذي يربط محيط مربع بطول ضلعه هو $p(s) = 4s$ ، والاقتران العكسي له هو $s(p) = \frac{p}{4}$ ، فينتج طول الضلع بدلالة المحيط.

وضح للطلبة أيضاً اختلاف خطوات إيجاد الاقتران العكسي في المسائل العملية عنها في الطريقة السابقة؛ إذ لا يُبدّل المتغيران لأنهما مسميان لكميات معينة خاصة، ولا يستعمل رمز الاقتران العكسي.

مثال 5: من الحياة

- ناقش الطلبة في خطوات حل المثال 5 الذي يشير إلى استعمال مفهوم الاقتران العكسي في موقف عملي حياتي.

مثال إضافي

- دفع مصطفى مبلغ 1385 دينارًا تكلفة لبضاعة اشتراها شاملة ضريبة مبيعات بنسبة 12%، ودفع مبلغ 13 دينارًا أجرة شحن:
- (a) اكتب اقترانًا يُعبّر عن التكلفة C بدلالة ثمن البضاعة الأصلي p . $C(p) = 1.12p + 13$
- (b) اكتب اقترانًا يُعبّر عن الثمن الأصلي بدلالة التكلفة. $p(C) = \frac{C - 13}{1.12}$
- (c) ما الثمن الأصلي للبضاعة التي اشتراها مصطفى؟ 1225 دينارًا.

لإيجاد الاقتران العكسي، أكتب الاقتران بصورة $y = \sqrt{2x-6}$ ، ثم أخل المعادلة لإيجاد x بدلالة y :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2x-6} && \text{المعادلة الأصلية} \\ y^2 &= 2x-6 && \text{بتربيع الطرفين} \\ y^2 + 6 &= 2x && \text{بإضافة 6 إلى الطرفين} \\ \frac{y^2 + 6}{2} &= x && \text{بقسمة الطرفين على 2} \end{aligned}$$

بإبدال y بدلالة x ، و x بدلالة y في المعادلة الناتجة، فإنه ينتج: $\frac{x^2 + 6}{2} = y$

أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فينتج: $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6}{2}$

يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو مدى $f(x)$ أي مجاله الفترة $[0, \infty)$ ، ومداه هو مجال $f(x)$ أي الفترة $[3, \infty)$.

أتذكر

مجال الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ هو مدى الاقتران f .

انظر الهامش

أتتحقق من فهمي

أجد مجال $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداه، ثم أجد الاقتران العكسي له.

تتطلب بعض المسائل الحياتية استعمال مفهوم الاقتران العكسي لحلها. فإذا علم طول نصف قطر كرة أمكن إيجاد حجمها بالتعويض المباشر في قانون حساب حجم الكرة: $V(r) = \frac{4}{3}r^3\pi$. ولكن إذا علم الحجم، وطُلب إيجاد طول نصف القطر، فيجب تغيير الصيغة الخاصة بإيجاد الحجم V إلى صيغة أخرى لإيجاد r ، وهنا يبرز مفهوم الاقتران العكسي.

إرشاد

لا يُستعمل رمز الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ في المسائل العملية، وإنما يُستعمل رمز مثل $r = r(V)$ الذي يُعبّر عن نصف القطر بدلالة الحجم.

مثال 5: من الحياة

فيزياء: سقط جسم ساكن من ارتفاع 200 m عن سطح الأرض، فكان ارتفاعه h عن الأرض بالأمطار بعد t ثانية من سقوطه $h(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبر عن t بصورة اقتران بدلالة الارتفاع h ، ثم أجد الزمن الذي يكون فيه ارتفاع الجسم 50 m فقط.

إن التعبير عن t بدلالة h يعني إيجاد الاقتران العكسي للاقتران $h(t)$. ولأن الزمن t لا يكون سالبًا، فإن مجال $h(t)$ هو $t \geq 0$ ، وفيه يكون $h(t)$ اقتران واحد لواحد، وله اقتران عكسي.

إجابة أتتحقق من فهمي 4:

مجال $g(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -4؛ أي $\{x|x \geq -4\}$ ، أو الفترة $[-4, \infty)$.
ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -2؛ أي $\{y|y \geq -2\}$ ، أو الفترة $[-2, \infty)$.

$$g^{-1}(x) = \frac{(x+2)^2 - 12}{3}, x \geq -2$$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $h = 200 - 4.9t^2$

الخطوة 2: أجعل t موضوع القانون.

$$h = 200 - 4.9t^2$$

$$h - 200 = -4.9t^2$$

$$\frac{h - 200}{-4.9} = t^2$$

$$\frac{200 - h}{4.9} = t^2$$

$$\sqrt{\frac{200 - h}{4.9}} = t$$

$$t(h) = \sqrt{\frac{200 - h}{4.9}}$$

$$t(50) = \sqrt{\frac{200 - 50}{4.9}}$$

$$\approx 5.53$$

إذن، يكون الجسم على ارتفاع 50 m بعد مضي 5.53 ثوانٍ تقريباً من لحظة سقوطه.

انظر الهامش

أتحقق من فهمي

يرتبط محيط الرأس C للطفل بطوله H (كلا القياسين بالسنتيمتر) عن طريق الاقتران:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$

(a) أكتب اقتراناً يعبر عن محيط الرأس C بدلالة طول الطفل H .

(b) أجد محيط رأس طفل طوله 66 cm



كتلة رأس الطفل حديث الولادة تساوي ربع كتلة جسده تقريباً.

1-4 انظر ملحق الإجابات

أدرب وأحل المسائل

أحدد الاقتران الذي له اقتران عكسي في كل مما يأتي، مبرراً إجابتي، ثم أكتب الاقتران العكسي (إن وُجد):

1 $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2 $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

3

A	f	B
4	→	7
5	→	9
7	→	13
8	→	15

4

C	g	D
-3	→	3
3	→	7
-7	→	6
6	→	6

الواجب المنزلي

اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الحادية عشرة من كتاب التمارين، محدداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.

يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابة أتحقق من فهمي 5:

a) $C(H) = \frac{H + 26.75}{2.15}$

b) $C \approx 43.1 \text{ cm}$

تنويع التعليم

بعد حل السؤال 18، اطلب إلى الطلبة البحث عن اقترانات أخرى تكون عكسية لنفسها.

من الإجابات المحتملة:

$$f(x) = \frac{a}{x}, f(x) = \frac{1}{x} \text{، حيث } a \text{ عدد حقيقي.}$$

$$f(x) = a - x \text{، حيث } a \text{ عدد حقيقي، وغيره.}$$

إذا كان $f(x) = 3(-\frac{x}{2} + 4)$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

$$5 \quad f(-2) \quad 9 \quad 6 \quad f(4) \quad 18 \quad 7 \quad f^{-1}(9) \quad -2 \quad 8 \quad f^{-1}(18) \quad 4$$

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانات الآتية:

$$9 \quad f(x) = x + 7 \quad f^{-1}(x) = x - 7$$

$$10 \quad f(x) = 8x \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$$

$$11 \quad f(x) = \frac{x}{2} + 6 \quad f^{-1}(x) = 2(x - 6)$$

$$12 \quad f(x) = \frac{3x - 6}{5} \quad f^{-1}(x) = \frac{5x + 6}{3}$$

$$13 \quad f(x) = 4x^3 \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$$

$$14 \quad g(x) = 4 + \sqrt{6 - 3x}, x \leq 2 \quad g^{-1}(x) = \frac{6 - (x - 4)^2}{3}, x \geq 4$$

$$15 \quad g(x) = \frac{8 - 3x}{5x}, x \neq 0 \quad g^{-1}(x) = \frac{8}{5x + 3}, x \neq -\frac{3}{5}$$

$$16 \quad j(x) = (x - 2)^2 + 4, x \geq 2 \quad j^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}, x \geq 4$$

17 أثبت أن كلا من الاقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر:

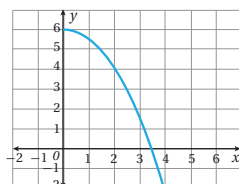
$$f(x) = (x + 3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$$

18 أثبت أن $f(x) = \frac{x}{x - 1}, x \neq 1$ هو اقتران عكسي لنفسه. انظر ملحق الإجابات



19 صناعة: إذا كان $C(x)$ يُمثل التكلفة C بالدنانير لإنتاج x وحدة من مصابيح الإنارة، فماذا يُمثل المقدار $C^{-1}(23000)$ ؟

عدد المصابيح التي يمكن إنتاجها بمبلغ مقداره 23000 دينار.



20 أرسم منحنى الاقتران العكسي للاقتران f المجاور

في المستوى الإحداثي نفسه، مُعَيَّنًا المجال والمدى

لكل من f و f^{-1} . انظر ملحق الإجابات

إرشادات:

- في معرض مناقشة الطلبة في السؤال 20، اسألهم: « كيف يمكن رسم منحنى الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران؟ »
- استمع لإجابات الطلبة. وفي حال لم يتوصلوا إلى إجابة صحيحة، فذكرهم بالعلاقة بين منحنى الاقتران والاقتران العكسي، وربط ذلك بالمثال 1، وتمثيل العلاقة والعلاقة العكسية.



21 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقتران:

$f(x) = x^2 - 2x + 5$, $-3 \leq x \leq 1$ ، ثمَّ أمثلُ $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيًا في المستوى الإحداثيَّ نفسه.
(إرشاد: أكتبُ $f(x)$ بصورة $(x+b)^2 + c$ باستعمالِ إكمالِ المربع). انظر ملحق الإجابات



22 كيمياء: في دورق 100 mL من أحد المحاليل، منها 25 mL

من حامض الهيدروكلوريك. إذا أُضيفَ إلى الدورق n mL من محلولٍ مُشابه، تركيزُ الحامض فيه 60%، فإنَّ تركيزَ الحامض في الدورق يُعطى بالاقتران: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبّرُ عن n بصورة اقترانٍ بدلالة التركيز C ، ثمَّ أجدُ عددَ المليترات n التي يجبُ إضافتها ليصبحَ تركيزُ الحامض في الدورق 50% انظر ملحق الإجابات

23 أخلُ المسألة الواردة في بداية الدرس. انظر ملحق الإجابات

24 تُعطى مساحةُ السطح الكلية A للأسطوانة التي نصفُ قاعدتها r ، وارتفاعها 40 cm بالاقتران:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\pi r$. أُعبّرُ عن نصف القطر r بصورة اقترانٍ بدلالة المساحة A ، ثمَّ أجدُ طولَ نصفِ قُطرِ قاعدة أسطوانةٍ مساحةُ سطحها الكلية 2000 cm^2 انظر ملحق الإجابات

25 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقتران $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، ثمَّ أمثلُ $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيًا في المستوى الإحداثيَّ نفسه.
انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

26 تبرير: إذا كانَ للاقتران $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ له صفرٌ عندما $x = 4$ ، فما الذي يُمكنُ استنتاجُه عن منحنى $f^{-1}(x)$ ؟ انظر ملحق الإجابات

27 مسألة مفتوحة: أكتبُ قاعدة اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ له، ثمَّ أثبتُ أنَّ كلاَّ منهما اقترانٌ عكسيٌّ للآخر.
انظر ملحق الإجابات

28 تحدّ: إذا كانَ $f(x) = x^2 + 3$ و $g(x) = 5x - 1$ ، و $x > 0$ ، فأحلُ المعادلة: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$.
انظر ملحق الإجابات

تنبيه:

عند حل السؤال 24، وجّه الطلبة إلى إكمال المربع؛
لكتابة المساحة بصورة مشابهة لتلك التي وردت في
السؤال 21

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبررات بعضهم.

- في السؤال 28، يتعيّن على الطلبة إيجاد الاقتران المُركّب والاقتران العكسي للاقتران $g(x)$ ، ثم القيمة $g^{-1}(34)$ ، ثم مساواتهما، وحل المعادلة التربيعية الناتجة، والانتباه أن x موجبة. أسألهم:

« كيف يمكن إيجاد $g^{-1}(34)$ من دون إيجاد الاقتران العكسي؟

5 الإثراء

- ا طرح على الطلبة المسألة الآتية:
« إذا كان $f(x) = 5 - 3x$ و $g(x) = \frac{2x-3}{7}$ ، فجد كلاً ممّا يأتي، مُدوّنًا استنتاجك:
 $(f \circ g)(x)$, $(f \circ g)^{-1}(x)$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب أن يكتب على ورقة اقترانًا والاقتران العكسي له، واقترانًا ليس له اقتران عكسي، واقترانًا عكسيًا لنفسه، ثم يُسلمك الورقة عند الخروج من الصف.

تعليمات المشروع:

- وجّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوتين 4 و 5 من المشروع.
- ذكّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكد أن عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

المتتاليات

Sequences

نتائج الدرس



- يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.
- يكتب حدود متتالية إذا عُلِمَ حدها العام.
- يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعييبية، وأسية.
- يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.

التعلم القبلي:

- إكمال متتاليات خطية وتربيعية وتكعييبية معطاة بعض حدودها.
- التعبير عن الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعييبية بمقدار جبري.
- تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعييبية.

التهيئة

1

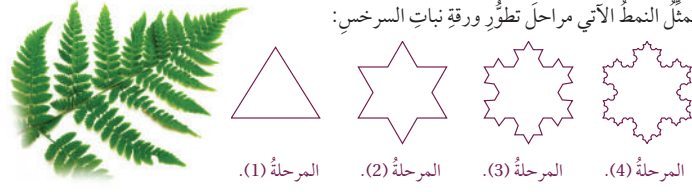
- اكتب على اللوح المتتاليات الآتية:
- 1) 1, 5, 9, 13, ...
- 2) 1, 4, 9, 16, ...
- 3) 2, 9, 28, 65, ...
- اطلب إلى الطلبة كتابة الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة كتابة الحد العام لكل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعييبية بحسب حدها العام.

استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات تربيعية، وتكعييبية، وأسية. المتتالية، الحد، الحد العام.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



المرحلة (1). المرحلة (2). المرحلة (3). المرحلة (4).

أستعمل النمط لأكمل الجدول الآتي:

المرحلة	1	2	3	4	5	6
عدد الأضلاع	3	12	48	192		

تُعدُّ المتتالية (sequence) اقترانًا مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مراجعة مفهوم

المتتالية: هي مجموعة من الأعداد تتبّع ترتيبًا معيّنًا، ويُسمّى كلُّ عددٍ فيها **الحدّ** (term).

مثال 1

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) 2, 5, 8, 11, ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ كلَّ حدٍّ يزيد على الحدّ السابق بمقدار 3، إذن تتزايد المتتالية بمقدار 3، والحدود الثلاثة التالية هي:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

أتذكّر

قد تتسجّ المتتالية من جمع (أو طرح) عدد ثابتٍ لحدودها، أو من ضرب حدودها في عدد ثابتٍ، أو من كلتا العمليتين معًا.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم) ثم اسألهم:
« كيف يمكن رؤية تطور الأشكال الهندسية لورقة السرخس؟ باستخدام المجهر. »
- « هل يُمثّل تطور ورقة السرخس متتالية؟ لماذا؟ نعم، لأنها تتبع ترتيب ما. »
- « أيكم يُكمل الجدول الذي يُمثّل تطور ورقة السرخس؟ 768, 3072 »
- « أيكم يستطيع كتابة الحد العام؟ $3(4)^{n-1}$ »
- « هل هذه المتتالية خطية، أم تربيعية، أم تكعيبية أو غير ذلك؟ أسية »
- قد لا يتمكن الطلبة من إيجاد الحد العام؛ فهذه المتتالية أسية لم يسبق لهم أن تعلموها، ولكن سؤلهم عنها سيثير فضولهم عن موضوع الدرس.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم كل مرة:
« من يؤيد الإجابة؟ »
« من لديه إجابة أخرى؟ »
« اذكرها. »
- وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أخبرهم أنهم سيتعرفون هذا النوع من المتتاليات في الدرس، ثم اكتب العنوان على اللوح.

التدريس

3

- وضح للطلبة أن المتتالية تتكوّن من حدود، لكلّ منها رتبة تُمثّل ترتيب الحد في المتتالية.
- أخبر الطلبة أن المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

- وضح للطلبة أنه يمكن وصف المتتالية، وكتابة الحدود التالية عن طريق الحدود الأولى للمتتالية.
- ذكّر الطلبة بأن المتتاليات الثلاث الأولى قد درسوها سابقًا.
- اكتب حدود المتتالية في الفرع الرابع على اللوح، ثم حلّلها إلى عواملها الأولية.
- اطلب إلى أحد الطلبة أن يكتب كل حد من حدود المتتالية بصورة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- اكتب صيغة الاقتران الأسّي $y = a(b)^n$ الذي درسه الطلبة في الفصل الدراسي الأول، ثم قارنه بحدود المتتالية؛ ليستنتجوا أن $a = 1$ و $b = \frac{1}{3}$
- بيّن للطلبة أن هذه المتتالية أسية لأن حدها العام بصورة اقتران أسّي.

✓ إرشاد:

قد يؤدي تنظيم حدود المتتالية في جدول إلى فهم الطلبة الموضوع بصورة أفضل، وبخاصة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط.

• جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

2) $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots$

الحل:

1) $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$

2) $0.00001, 0.000001, 0.0000001, \dots$

التقويم التكويني

- وجه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال (فردياً، أو ضمن مجموعات).
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعداً، ومُوجّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية

قد يخطئ بعض الطلبة في حل الفرع الأول من بند (أتحقق من فهمي)، وذلك بإضافة العدد 2 إلى البسط فقط؛ أي اعتبار الحد العام لمتتالية $T(n) = \frac{n+2}{2}$ ؛ لذا صحّح لهم ذلك بتعويض $n = 1$ في الحد العام؛ للتأكد أن الناتج ليس الحد الأول، وذكرهم بأن المتتالية تنتج من إضافة العدد $\frac{3}{2}$ كل مرة؛ أي إن الحد العام هو: $T(n) = n + \frac{3}{2}$

2) $3, 6, 12, 24, \dots$

بقسمة أي حدّين متتاليين، أجد أن الحصول على أي حدّ يكون بضرب الحدّ السابق له في 2، إذن تتضاعف المتتالية بمقدار 2، والحدود الثلاثة التالية هي:

$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$

3) $80, 73, 66, 59, \dots$

بطرح أي حدّين متتاليين، أجد أن كل حدّ ينقص عن الحدّ السابق بمقدار 7، إذن تتناقص المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$80, 73, 66, 59, 52, 45, 38, \dots$

4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

بقسمة أي حدّين متتاليين، أجد أن كل حدّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروباً في الحدّ السابق له، إذن تتضاءل المتتالية بمقدار $\frac{1}{3}$ ، والحدود الثلاثة التالية هي:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2187}, \dots$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي: انظر الهامش

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$

b) $5, 10, 20, 40, \dots$

c) $150, 141, 132, 123, \dots$

d) $400, 200, 100, 50, \dots$

أتذكّر

يمكن التعبير عن المتتالية:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

في صورة:

$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$

$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

إجابة أتتحقق من فهمي 1:

a) $\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \dots$

b) $80, 160, 320, \dots$

c) $114, 105, 96, \dots$

d) $25, 12.5, 6.25, \dots$

- أخبر الطلبة أنه يمكن إكمال حدود المتتالية إذا عُلِمَ حدها العام الذي يربط كل حد برتبته.
- وضح للطلبة كيف يمكن إيجاد الحد من رتبته إذا عُلِمَت قاعدة الحد العام للمتتالية، مُقدِّمًا مزيدًا من الأمثلة؛ للتأكد أن الطلبة يمتلكون المهارة المطلوبة.
- أخبر الطلبة بأهمية وجود علاقة تربط بين الحد ورتبته؛ وذلك لإيجاد أي حد من دون حاجة إلى إيجاد الحدود جميعها، وصولًا إلى الحد المطلوب.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط في التعويض بالحد العام للمتتالية بدءًا بالصفر؛ لذا أخبرهم أن المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها.

إرشاد:

- ذكّر الطلبة بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تُمثّل الأعداد الصحيحة الموجبة.

تعلّمتُ في صفوف سابقة **الحد العام** (n^{th} term) لمتتالية، الذي يُمثّل العلاقة بين أي حد ورتبته (n)، ويرمزُ إليه بالرمز $T(n)$. يُسهّل الحد العام إيجاد أي حد في المتتالية باستعمال رتبته، مثل الحد الذي رتبته خمسون مثلاً. ويمكن تصنيف المتتالية اعتمادًا على حدها العام إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأُسّية، وغير ذلك.

مثال 2

أُبينُ إذا كان المقدار الجبري المُعطى بجانب كل متتالية ممّا يأتي يُمثّل حدًا عامًا لها أم لا، ثم أُصنّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أُسّية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها:

1 $4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$

أعوّضُ رتب بعض الحدود في المقدار الجبري المُعطى للتأكد أنها تنتج من الحد العام:

الحد	رتبة الحد
4	$n = 1$
7	$n = 2$
10	$n = 3$
13	$n = 4$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثّل الحد العام للمتتالية، وهي خطية؛ لأن الحد العام خطي.

لإيجاد الحد الخامس والسبعين، أعوّض $n = 75$ في قاعدة الحد العام:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \dots, n^2 + 3$

أعوّضُ للتأكد أن الحدود تنتج من الحد العام:

الحد	رتبة الحد
4	$n = 1$
7	$n = 2$
12	$n = 3$
19	$n = 4$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحد العام للمتتالية، وهي تربيعية؛ لأن الحد العام تربيعي. أُعوض $n = 75$ في الحد العام لإيجاد الحد الخامس والسبعين:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

$$3 \quad 2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1$$

أُعوض للتأكد أن جميع الحدود تنتج من الحد العام:

الحد	رتبة الحد
2	$n = 1 \rightarrow (1)^3 + 1$
9	$n = 2 \rightarrow (2)^3 + 1$
28	$n = 3 \rightarrow (3)^3 + 1$
65	$n = 4 \rightarrow (4)^3 + 1$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحد العام للمتتالية، وهي تكعيبية؛ لأن الحد العام تكعيب. أُعوض $n = 75$ في الحد العام لإيجاد الحد الخامس والسبعين:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

$$4 \quad 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$$

أُعوض للتأكد أن جميع الحدود تنتج من الحد العام:

الحد	رتبة الحد
2	$n = 1 \rightarrow (2)^1$
4	$n = 2 \rightarrow (2)^2$
8	$n = 3 \rightarrow (2)^3$
16	$n = 4 \rightarrow (2)^4$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحد العام للمتتالية، وهي أسية؛ لأن الحد العام أسّي.

أُعوض $n = 75$ في الحد العام لإيجاد الحد الخامس والسبعين:

$$(2)^{75} = 3.777893186 \times 10^{22}$$

أنددُر

الصورة العلمية لعدد ما هي كتابته في صورة: $A \times 10^n$ ، حيث: $1 \leq A < 10$ ، n : عدد صحيح، علماً بأن الحد الخامس والسبعين كُتب بالصورة العلمية.

- بسّط للطلبة الفرع الرابع باستعمال التحليل إلى العوامل.
- عند التعويض $n = 75$ في الحد العام للمتتالية الأسية باستعمال الآلة الحاسبة، ينتج عدد بالصورة العلمية؛ لذا ذكّر الطلبة أنهم درسوها سابقاً.

إرشادات للمعلم

أرشد الطلبة إلى استخدام الآلة الحاسبة في حل الفرع الرابع من المثال 2.

مثال إضافي

- بيّن إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية ممّا يأتي يُمثل حداً عاماً لها أم لا، ثم صنّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أسية، ثم جد الحد الخامس والأربعين في كلّ منها:

$$1) \quad 5, 5, 5, 5, \dots T(n) = 5$$

$$2) \quad -1, 1, -1, 1, \dots T(n) = (-1)^n$$

الحل:

$$1) \quad T(45) = 5 \quad \text{الحد العام يُمثل المتتالية، وهي خطية.}$$

$$2) \quad T(45) = -1 \quad \text{الحد العام يُمثل المتتالية، وهي أسية.}$$

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أحياناً عند إيجاد الحد العاشر - مثلاً - بمضاعفة الحد الخامس؛ لذا صحّح لهم ذلك.

- ذكّر الطلبة أن قاعدة الحد العام للمتتالية المذكورة في المثال 2، وأن هذا المثال يشرح كيفية إيجاد قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية.
- ناقش الطلبة في حلّ المثال 3، موضحاً لهم كيفية إيجاد الحد العام باستخدام المقادير الجبرية، وذلك باستخدام المتغير n للدلالة على رتبة الحد، والرمز $T(n)$ للدلالة على الحد نفسه.

مثال إضافي

- جد الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

- 1) 5, 9, 13, 17, ...
- 2) 3, 8, 15, 24, ...
- 3) 0, 6, 24, 60, ...
- 4) 0, 42, 336, 2394, ...

الحل:

- 1) $7n + 1$
- 2) $n^2 + 2n$
- 3) $n^3 - n$
- 4) $7^n - 7$

إرشاد:

- قد يتمكن بعض الطلبة من التعبير عن الحد العام لفظياً، من دون القدرة على التعبير عنه بالرموز؛ لذا ساعد هؤلاء الطلبة على إتقان مهارة التعبير عن المقادير الجبرية باستعمال الرموز. فمثلاً، ثلاثة أضعاف عدد مضاف إليه 5 هي $3x+5$

أنتحق من فهمي

أُبين إذا كان المقدار الجبري المُعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يُمثل حداً عاماً لها أم لا، ثم أصنّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أُسية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها: **انظر الهامش**

- a) 1, 3, 5, 7, ..., $2n-1$ b) 0, 3, 8, 15, ..., $n^2 - 1$
c) 1.5, 8.5, 27.5, 64.5, ..., $n^3 + 0.5$ d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, 2^{-n}$

يُمكن إيجاد الحد العام للمتتاليات التربيعية والتكعيبية والأُسية بملاحظة العلاقة بين الحدود ورُتبها.

مثال 3

أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

- 1) 5, 12, 19, 26, 33, ...

ألاحظ أن حدود المتتالية تتزايد بمقدار 7:

$$5, 12, 19, 26, 33, \dots$$

+7 +7 +7 +7

يُمكن مبدئياً التعبير عن المتتالية بالحد $7n$ ؛ لأنّ تزايد حدود المتتالية بمقدار 7 في كل مرة يُذكرني بحقائق ضرب العدد 7، ولكن عند تعويض $n = 1$ ينتج العدد 7، وهو أكبر من الحد الأول بـ 2؛ لذا أطرح العدد 2 من $7n$ ، وبذلك يصبح الحد العام: $T(n) = 7n - 2$.

- 2) 5, 8, 13, 20, 29, ...

ألاحظ أن الفرق بين كل حدّين متتاليين غير ثابت. إذن، المتتالية غير ناتجة من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها. ألاحظ أيضاً أن المتتالية غير ناتجة من ضرب حدودها في عدد ثابت.

أفسر المتتالية عن طريق تربيع رتبة كل حد:

1	4	9	16	25 ...	n^2
5	8	13	20	29 ...	?

بالنظر إلى ناتج تربيع رتبة كل حد، ألاحظ أنه إذا أضيف 4 إلى مربع رتبة الحد تنتج المتتالية المطلوبة. وبذلك، فإن الحد العام هو: $T(n) = n^2 + 4$

إرشاد

يُمكن فهم المتتالية بصورة أفضل بتحليل حدودها إلى العوامل الأولية.

إجابة أنتحق من فهمي 2:

- (a) الحد العام يُمثل المتتالية، وهي متتالية خطية.
(b) الحد العام يُمثل المتتالية، وهي متتالية تربيعية.
(c) الحد العام يُمثل المتتالية، وهي متتالية تكعيبية.
(d) الحد العام يُمثل المتتالية، وهي متتالية أُسية.

3 0, 7, 26, 63, 124, ...

ألاحظ أن الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.

إذن، المتتالية غير ناتجة من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها.

ألاحظ أيضًا أن المتتالية غير ناتجة من ضرب حدودها في عدد ثابت، وأنها غير ناتجة من تربيع كل حد.

أفسر المتتالية عن طريق تكعيب رتبة كل حد n^3 :

1	8	27	64	125	...	n^3
0	7	26	63	124	...	?

ألاحظ أنه عند طرح 1 من مكعب رتبة كل حد تنتج المتتالية المطلوبة.

وبذلك، فإن الحد العام هو: $T(n) = n^3 - 1$

4 11, 12.1, 13.31, 14.641, ...

ألاحظ أن حدود المتتالية تتضاعف بنسبة ثابتة؛ لأن:

$$\frac{12.1}{11} = 1.1 \quad \frac{13.31}{12.1} = 1.1 \quad \frac{14.641}{13.31} = 1.1$$

من هذا التناسب بين الحدود المتتالية، أستنتج أنه عند ضرب كل حد في 1.1 ينتج الحد التالي.

وبذلك، فإن الحد العام هو: $a \times (1.1)^n$ ، حيث a عدد ثابت (لماذا؟).

لحساب a ، أعوض بالحد العام $n = 1$ ، وبمساواته مع الحد الأول في المتتالية ينتج:

$$a(1.1)^1 = 11$$

$$a = \frac{11}{1.1} = 10$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = 10 \times (1.1)^n$

أتحقق من فهمي

أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي: انظر الهامش

a) 8, 15, 22, 29, 36, ...

b) 4, 7, 12, 19, 28, ...

c) -1, 6, 25, 62, 123, ...

d) 0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, ...

تستخدم المتتاليات في العديد من التطبيقات الحياتية، مثل: التطبيقات العلمية، والهندسية، والتجارية.

أذكر

الصيغة العامة للاقتراح

الأسّي: $y = a(b)^x$

حيث:

a , b : عددين حقيقيين.

$a \neq 0$, $b \neq 1$, $b > 0$

- اكتب على اللوح قاعدة الحد العام لكل فروع المثال 3، ثم اطلب إلى أحد الطلبة إيجاد أول أربعة حدود للمتتالية الأولى، بتعويض الأعداد 1, 2, 3, 4، ثم اطلب إلى ثلاثة طلبة آخرين إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليات الثانية، والثالثة، والرابعة؛ للتأكد أن كل حد عام يمثل متتاليته.

- ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ حتى يتقنوا كتابة الحد العام للمتتالية باستخدام المقادير الجبرية، وإيجاد الحدود المطلوبة بالتعويض في القاعدة.

- وجه الطلبة في هذه الأثناء، مقدمًا لهم التغذية الراجعة المناسبة.

تعزيز اللغة ودعمها

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتتالية Sequence، والحد term، والحد العام n^{th} term.

إرشادات:

- يُعدّ إيجاد الحد العام من أصعب التحديات التي يواجهها الطلبة؛ لذا اكتب خطوات الحل على نحوٍ مرتب ومتسلسل ومفهوم.
- اجعل الطلبة يعتادون على تحليل حدود المتتاليات إلى العوامل الأولية بوصف ذلك خطوة أولى لإيجاد الحد العام.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $7n + 1$

b) $n^2 + 3$

c) $n^3 - 2$

d) $2 \times (0.1)^n$

- ناقش الطلبة في حلّ المثال 4 الذي يُمثّل موقعًا حياتيًا تظهر فيه المتتاليات.
- وضّح للطلبة أنّه يمكن استعمال أي حد من حدود المتتالية مع رتبته لإيجاد قيمة الثابت a

تنويع التعليم

قد يواجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في فهم المثال 4؛ لذا قدّم لهم المثال الآتي بوصفه مراجعة للاقتران الأساسي.

مثال إضافي

يزداد سعر مُنتَج ما سنويًا بحسب المعادلة: $y = c(1.05)^n$ ، حيث تُمثّل c السعر قبل أن تطرأ عليه أي زيادة. إذا كان سعر المُنتَج بعد 3 سنوات 111.132 دينارًا، فجد:

(1) قيمة الثابت c

(2) سعر المُنتَج بعد 7 سنوات.

الحل:

1) 96

2) 122.52303

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة عند تعويض $n = 5$ في الحد العام في المثال 4، وذلك بترك الناتج كما هو من دون تقريب إلى أقرب عدد صحيح؛ لذا نبيّهم إلى أن الناتج يُمثّل عدد المنازل، وأنه لا يمكن أن يكون كسرًا.

مثال 4: من الحياة

طاقة مُتجدّدة: يزداد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء بإحدى المدن عالمًا تلو الآخر كما يظهر في الجدول الآتي:

العام	1	2	3	4	5
عدد المنازل	7000	9800	13720		

1) أجد الحد العام للمتتالية التي تُمثّل عدد المنازل.

ألاحظ أنّ حدود المتتالية تتضاعف بنسبة ثابتة؛ لأن:

$$\frac{9800}{7000} = 1.4 \quad \frac{13720}{9800} = 1.4$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = a \times (1.4)^n$ ، حيث a عدد ثابت.

لحساب a ، أعوّض بالحد العام $n = 1$ ، وبمساواته مع الحد الأول في المتتالية ينتج:

$$a(1.4)^1 = 7000$$

$$a = \frac{7000}{1.4} = 5000$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = 5000 \times (1.4)^n$.

2) أجد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء في العامين: الرابع، والخامس.

أعوّض القيمتين: $n = 4$ ، و $n = 5$ في الحد العام:

$$T(4) = 5000 \times (1.4)^4 = 19208$$

بتعويض $n = 4$ في الحد العام

$$T(5) = 5000 \times (1.4)^5 = 26891.2$$

بتعويض $n = 5$ في الحد العام

$$\approx 26891$$

بالتقريب إلى أقرب عدد صحيح

أنظر الهامش

أتتحقق من فهمي

يتزايد سعر مُنتَج سنويًا كما يظهر في الجدول الآتي:

عدد السنوات	1	2	3	4	5
السعر	15	22.5	33.75		

(a) أجد الحد العام للمتتالية التي تُمثّل السعر السنوي للمُنتَج.

(b) أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول.

تظهر المتتاليات أيضًا في كثير من الأنماط الهندسية.

إجابة أتتحقق من فهمي 4:

a) 50.625, 75.9375

b) $T(n) = 10 \times (1.5)^n$

- ناقش الطلبة في حلّ المثال 5 على اللوح، وتدرّج معهم في إيجاد قاعدة الحد العام للمتتالية التي يُشكّلها عدد المربعات في النمط الهندسي الوارد في المثال؛ وذلك باتّباع ما يأتي:

« تحليل الحدود إلى العوامل الأولية.

- « ملاحظة ناتج ضرب رتبة الحد نفسه في رتبة الحد الذي يليه.

تنويع التعليم

- وضّح للطلبة أنه يمكن حل المثال 5 بطريقة أخرى، وذلك بتمثيل كل حد بأنه عدد أضلاع المربعات الأفقية مضروباً في عدد أضلاع المربعات العمودية.

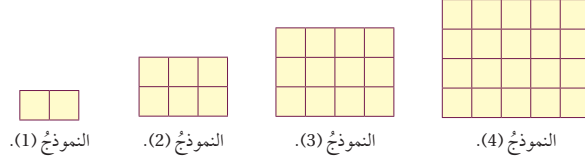
التدريب

4

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أندرب وأحلّ المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعدًا، ومُوجِّهاً، وقُدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالباً تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مثال 5

في ما يأتي نمط هندسي يُمثّل عدد المربعات في نماذجٍ متتالية. أجدُ الحد العام لهذه المتتالية.



بالنظر إلى النمط، ألاحظُ أنّ عدد المربعات يُشكّل المتتالية الآتية: 2, 6, 12, 20, ...
بالنظر إلى الحدود الأولى من المتتالية، ألاحظُ أنّ كل حد فيها يساوي حاصل ضرب رتبته في رتبة الحد الذي يليه:

$$2, 6, 12, 20, \dots$$

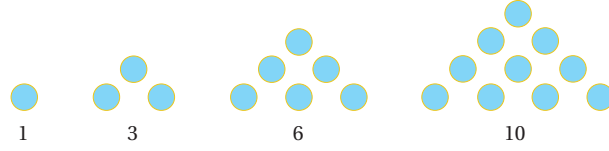
$$T(n) = n(n+1) = n^2 + n$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

انظر الهامش

أتحقّق من فهمي

في ما يأتي نمط هندسي يُمثّل عدد الدوائر في نماذجٍ متتالية. أجدُ الحد العام لهذه المتتالية.



أبحثُ

تُسمّى الأعداد 1, 3, 6, 10
أعداداً مثلثية. لماذا؟

أندرب وأحلّ المسائل

أجدُ الحدود الثلاثة التالية للمتتاليات الآتية:

1 6, 11, 16, 21, ...

26, 31, 36

4 -8, -7, -6, -5, ...

-4, -3, -2

7 7, 14, 33, 70, ...

131, 222, 349

10 3, 9, 27, 81, ...

243, 729, 2187

2 -1, 6, 13, 20, ...

27, 34, 41

5 -2, 1, 6, 13, ...

22, 33, 46

8 -11, -4, 15, 52, ...

113, 204, 331

11 $\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \frac{1}{1296}, \dots$

$\frac{1}{7776}, \frac{1}{46656}, \frac{1}{279936}$

3 $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$

5.5, 6.5, 7.5

6 4, 16, 36, 64, ...

100, 144, 196

9 5, 40, 135, 320, ...

625, 1080, 1715

12 2.6, 3.38, 4.394, 5.7122, ...

7.42586, 9.653618, 12.5497034

إجابة أتحقّق من فهمي 5:

$$T(n) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية مُعطى حُدّها العام في ما يأتي، ثمّ أصنّفها إلى متتالية خطيّة، أو تربيعيّة، أو تكعيبيّة، أو أُسيّة:

- | | | |
|---|--|---|
| 13 $n + 3$
خطيّة: 4,5,6,7,8 | 14 $3n - 1$
خطيّة: 2,5,8,11,14 | 15 $4n + 5$
خطيّة: 9,13,17,21,25 |
| 16 $n^2 - 1$
تربيعيّة: 0, 3, 8, 15, 24 | 17 $n^2 + 2$
تربيعيّة: 3,6,11,18,27 | 18 $200 - n^2$
تربيعيّة: 199,196,191,184,175 |
| 19 $n^3 + 1$
تكعيبيّة: 2,9,28,65,126 | 20 $\frac{n^3}{2}$
تكعيبيّة: 0.5,4,13.5,32,62.5 | 21 $3n^3 - 1$
تكعيبيّة: 2,23,80,191,374 |
| 22 6^n
أسيّة: 6,36,216,1296,7776 | 23 8×2^n
أسيّة: 16,32,64,128,256 | 24 5×3^n
أسيّة: 15,45,135,405,1215 |

أجد الحدّ العامّ لكلّ متتالية ممّا يأتي:

- | | | |
|---|--|--|
| 25 21, 24, 27, 30, 33, ...
$T(n) = 3n + 18$ | 26 1, 9, 17, 25, 33, ...
$T(n) = 8n - 7$ | 27 10, 13, 18, 25, 34, ...
$T(n) = n^2 + 9$ |
| 28 $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \dots$
$T(n) = 0.5n^2 - 3$ | 29 6, 13, 32, 69, 130, ...
$T(n) = n^3 + 5$ | 30 1, 15, 53, 127, 249, ...
$T(n) = 2n^3 - 1$ |
| 31 3, 6, 12, 24, 48, ...
$T(n) = 1.5(2)^n$ | 32 120, 60, 30, 15, ...
$T(n) = 240(0.5)^n$ | 33 80, 100, 125, ...
$T(n) = 64(1.25)^n$ |

يُمثّل الجدول الآتي نظامّ المعادلات الذي تستعمله إحدى الشركات لإيجاد تكلفة نقل n وحدة بالدينار الأردني:

قيمة n	التكلفة بالدينار الأردني
$n \leq 5$	$c = 40n + 50$
$6 \leq n \leq 10$	$c = 40n + 25$
$n \geq 11$	$c = 40n$

- 34 أجد تكلفة نقل 7 وحدات. 305
- 35 أجد تكلفة نقل 15 وحدة. 600
- 36 أجد عدد الوحدات التي نقلتها الشركة لقاء مبلغ 170 ديناراً. 3
- 37 تستعمل شركة منافسة المعادلة: $c = 50n$ لإيجاد تكلفة نقل الوحدات بالدينار الأردني، بغضّ النظر عن عددها. أجد عدد الوحدات التي تساوى فيها التكلفة في الشركتين. $n = 5$

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثانية عشرة من كتاب التمارين، محدّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطلّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

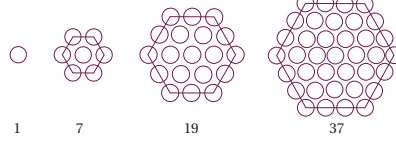
- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكّر أنه ليس شرطاً أن يتمكّن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، وإنّما يتعيّن عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا) ضمن مجموعات، ثم اطلب إلى افراد بعضها توضيح كيفية توصّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير حلولهم.

- وجّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمتتاليات، مثل المثال الوارد في بند الاستكشاف بداية الدرس.
- وجّه الطلبة إلى البحث عن أسماء بعض المتتاليات المشهورة، وذكر تطبيق حياتي عليها، مثل متتالية فيبوناشي (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...) إذ يُعدُّ عدد الحلزونات الظاهرة في أثناء نمو زهرة الكاميليا من أفضل التطبيقات على هذه المتتالية.
- نبّه الطلبة على ضرورة توثيق المعلومة دائماً.

- ا طرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
 - « ما مجال المتتاليات؟
 - « ما مداها؟
 - « ما العلاقة بين المتتاليات والاقترانات؟
 - « أيهما تُعدُّ حالة خاصة من الأخرى: الاقترانات من المتتاليات أم المتتاليات من الاقترانات؟ لماذا؟

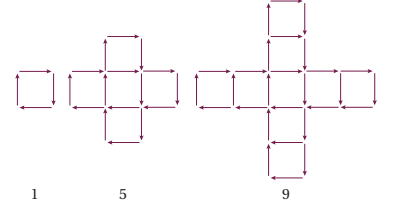
أجدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ من الأنماط الهندسية الآتية:

38



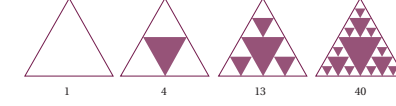
$$T(n) = 3n^2 - 3n + 1$$

39



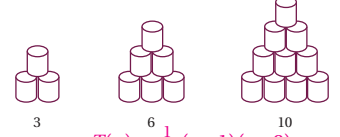
$$T(n) = 4n - 3$$

40



$$T(n) = \frac{1}{2} (3^n - 1)$$

41



$$T(n) = \frac{1}{2} (n+1)(n+2)$$

مهارات التفكير العليا

42 تحدّ: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتالية: $6, 16, 30, 48, 70, \dots$ هو: $T(n) = an + bn^2$ ، حيثُ a, b عدداً حقيقيّان،

$$a = 4, b = 2$$

43 تحدّ: أجدُ أولَ ثلاثة حدودٍ لمتتاليةٍ خطيّةٍ، مجموعُها 12، وحاصلُ ضربِها 28. $1, 4, 7$

44 مسألة مفتوحة: أجدُ أربعَ متتالياتٍ تبدأ بـ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطيّةً، والثانيةُ تربيعيّةً، والثالثةُ تكعيبيّةً، والرابعةُ أُسيّةً.

$$T(n) = 2n - 1$$
 خطيّة، $T(n) = 2n^2 - 1$ تربيعيّة،

$$T(n) = 2n^3 - 1$$
 تكعيبيّة، $T(n) = 2^n - 1$ أُسيّة،

45 أيُّها لا يتسمي: أحدّدُ المتتاليةَ المختلفةَ عنْ غيرها في ما يأتي: تُقبَلُ أيُّ أربعَ متتالياتٍ تبدأ بالعدد 1، وتكونُ الأولى خطيّةً، والثانيةُ تربيعيّةً، والثالثةُ تكعيبيّةً، والرابعةُ أُسيّةً.

$$1, 4, 9, \dots$$

$$2, 8, 18, \dots$$

المتتالية تكعيبيّة،
والمتتاليات الأخرى
كلها تربيعيّة.

$$2, 16, 54, \dots$$

$$4, 7, 12, \dots$$

اختبار نهاية الوحدة

7 خطُّ التقارب الأفقي للاقتزان $r(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4} + 7$ هو:

- a) $y = 0$ b) $y = 7$
c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشر في المتتالية $0, 2, 6, 12, 20, \dots$ هو:

- a) 90 b) 95
c) 97 d) 99

9 مجال الاقتزان $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هو:

- a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$
b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$
c) $\{x \mid x \neq 5\}$
d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كان $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 6x^3 - 7x + 3$ فأوجد $x^2 f(x) + g(x) - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 3$

11 إذا كان $h(x) = 3x^2 - 4x$, $j(x) = 4x^3 + 2x + 5$ فأوجد $h(x) \cdot j(x) - 12x^5 - 16x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 20x$

12 أقيم $(2x+3)$ على $(8x^3 + 12x - 5)$ $\frac{-50}{2x+3}$

13 أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتزان $f(x) = \frac{4}{2-x}$ ثم أمثله بيانياً، محدداً مجاله، ومداه.

انظر ملحق الإجابات

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 الحدُّ العام (T_n) للمتتالية $2, 6, 18, 54, \dots$ هو:

- a) $T_n = 2 \times 3^n$ b) $T_n = 2 \times 3^{n-1}$
c) $T_n = 6 \times 3^n$ d) $T_n = 6 \times 3^{n-1}$

2 إذا كان $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ ، فإن قيمة $f(-2)$ هي:

- a) -22 b) -15
c) 9 d) 29

3 إذا كان $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6$, $g(x) = 5x^2 - 7x + 4$ فإن ناتج $f(x) - g(x)$ هو:

- a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$
c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$
d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كان $g(x)$ كثير حدود من الدرجة السادسة، و $h(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية، فإن درجة ناتج قسمة $g(x)$ على $h(x)$ هي:

- a) الأولى. b) الثالثة.
c) الرابعة. d) الثامنة.

5 إذا كان $h(x) = x^2 - 2$, $f(x) = 3x - 5$ ، فإن قيمة $(g \circ f)(3)$ هي:

- a) 4 b) 7
c) 14 d) 16

6 إذا كان $f(x) = 8 - 2x$ ، فإن قيمة $f^{-1}(4)$ هي:

- a) 0 b) -6 c) -2 d) 2

التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام زملاء.
- عيّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجباً منزلياً، ثم ناقشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أن الأسئلة (23-26) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

ملحوظة: تُخصّص حصتان (90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنة بالدول الأخرى التي يتقدم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدم أيضاً طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية - وفق هذا البرنامج - يُعبّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات ورسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علماً بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعين عليك - عزيزي المعلم - تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمن امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

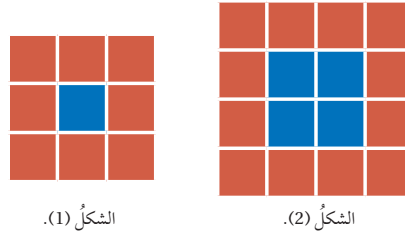
22 يبيع محل عصائر ما مُعدّلة 3500 علبية عصير أسبوعياً، سعر الواحدة منها 0.75 قرشاً. وجد صاحب المحل أن مبيعاته ستقل 100 علبية مقابل كل زيادة مقدارها 0.05 دينار على سعر العلبية. أكتب اقتراناً يمثل الدخل الأسبوعي للمحل إذا طُبقت الزيادة على السعر x مرة، ثم أجد السعر الذي يُحقّق للمحل أعلى دخل أسبوعي.

انظر ملحق الإجابات

تدريب على الاختبارات الدولية

23 في بيت خضر بركة سباحة مستطيلة، بُعدها 13 m، 8 m، وقد أراد أن يُحيط بها ممراً منتظماً بحيث تصبح المساحة الإجمالية لسطح البركة والممر معاً 176 m^2 ، ما عرض الممر؟
عرض الممر هو: 1.5 m

رُتبت فدوى بطاقات حمراء وزرقاء كما في الشكلين الآتيين:



الشكل (1).

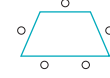
الشكل (2).

24 إذا استمر هذا النمط، فما عدد البطاقات الحمراء في الشكل n ؟
عدد البطاقات الحمراء في الشكل رقم n هو: $4n+4$

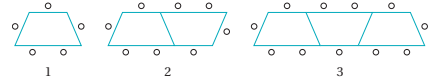
25 ما عدد البطاقات الزرقاء فيه؟
عدد البطاقات الزرقاء في الشكل نفسه هو: n^2

26 استعملت فدوى 64 بطاقة لتكوين أحد أشكال هذا النمط. كم عدد كل من البطاقات الحمراء والزرقاء المستعملة؟
عدد البطاقات الزرقاء هو: 36
عدد البطاقات الحمراء هو: 28

يوجد في قاعة طعام إحدى المدارس طاولات على شكل شبه منحرف. وكل طاولة تتسع لخمس طلبة كما في الشكل الآتي:



لاحظ مُشرف القاعة أن عدد الطلبة يتغير تبعاً لعدد الطاولات المُلاصقة بعضها لبعض كما في الشكل الآتي:



14 أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

عدد الطاولات المُلاصقة	1	2	3	4	5
عدد الطلبة	5	8	11	14	17

15 أجد الحد العام. $T(n) = 3n + 2$

16 ما عدد الطلبة الذين يُمكنهم الجلوس حول 13 طاولة مُلاصقة؟
41

17 تنوي إدارة المدرسة عمل حفل لـ 200 طالب. كم طاولة مُلاصقة تُلزم لذلك؟
66 طاولة

إذا كان $-1 \neq x$ ، $f(x) = 4x - 3$ ، $g(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ ، فأجد: (18-21) انظر ملحق الإجابات

18 $g^{-1}(x)$

19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

21 أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = \sqrt{4-x}$ ، مُحدداً المجال والمدى لكل من: $f(x)$ و $f^{-1}(x)$.

كتاب التمارين

الدرس 1

اقتترانات كثيرات الحدود

أحدث إذا كان كل مما يأتي كثير حدود أم لا، مُحدِّدًا الدرجة والمعامل الرئيس والحد الثابت لكل كثير حدود، ثم أكتبه بالصورة القياسية: (1-8) انظر ملحق الإجابات

- $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$
- $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$
- $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$
- $j(x) = \sqrt{x^2 + 16} - 4x$
- $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \leq x \leq 3$
- $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \leq x \leq 2$
- $g(x) = 12 - 4x - x^2$
- $h(x) = (2x - 5)^2 - 10$

إذا كان $h(x) = 2x - 4$ ، $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$ ، $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$ فأجد ناتج ما يأتي:

- $f(x) + g(x)$
 $-3x^4 + 7x^3 + 5x - 8$
- $f(x) - g(x)$
 $-5x^3 - 3x^2 + 5x + 6$
- $g(x) - x(h(x))$
 $x^3 + 3x^2 + 4x - 7$
- $h(x) \cdot f(x)$
 $-8x^4 + 20x^3 + 2x^2 - 22x + 4$
- $(h(x))^2 + f(x)$
 $-4x^6 + 6x^5 - 11x + 15$
- $f(x) \cdot g(x)$
 $-4x^6 - 18x^3 + 15x^4 + 52x^2 - 19x^2 - 35x + 7$
- هل العدد -2 صفء للاقتتران $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$ ؟ أبتز إجابتي.
نعم، لأن $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$
- أجد أصفار الاقتتران $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$
 $(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$
- لدى مزارع 24 m من السياج، أراد أن يُسجّح به حظيرة مستطيلة لدواجنه؛ على أن يجعل جدار مخزن في مزرعته أحد جوانب الحظيرة من دون سياج. ما أكبر مساحة ممكنة للحظيرة التي يُمكنُ تسيجها بهذا السياج؟ انظر ملحق الإجابات
- يزيد ارتفاع أسطوانة 3 وحدات على طول نصف قطرها. أكتب اقتترانًا يُعبّر عن حجم الأسطوانة بدلالة x إذا كان طول نصف قطرها $(2x + 1)$ وحدة.
(حجم الأسطوانة التي نصف قطرها r وارتفاعها h هو $V = \pi r^2 h$).
 $V(x) = \pi(2x+1)^2(2x+4) = \pi(8x^4 + 24x^3 + 18x^2 + 4)$

الوحدة 5: الاقتترانات

8

الدرس 2

قسمة كثيرات الحدود والاقتترانات النسبية

أجد ناتج قسمة $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كل مما يأتي:

- $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5; h(x) = x + 4$ الناتج $2x^2 - 12x + 36$ ، والباقي -139
- $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12; h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ الناتج $2x^2 + 2x + 6$ ، والباقي $2x + 6$
- أجد قيمة k بحيث يكون باقي قسمة $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هو 8
- أجد قيمة C بحيث يكون $h(x) = x - 3$ أحد عوامل $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ (3-6) انظر ملحق الإجابات

أجد خطوط التقارب لكل اقتتران مما يأتي، وأمثلّه بيانيًا، ثم أجد مجاله ومداه:

- $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$
- $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أجد المجال والمدى وخطوط التقارب لكل من الاقتترانين المُمثلين بيانيًا في ما يأتي:



أجد المجال والمدى لكل مما يأتي:

- $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$
- $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

يُعطى تركيز مضاد حيوي (بالمليغرام لكل ديسيلتر) في دم مريض بعد ساعة من تناوله بالاقتتران: $C(t) = \frac{50t}{t^2 + 25}$. أجد تركيز هذا المضاد بعد 5 ساعات من تناوله.

12 متى يكون تركيز هذا المضاد 4 mg/dL ؟

تُفكّلت فصيلة نادرة من الحشرات إلى محمية خاصة لمنع انقراضها. وقد بلغ عدد أفراد هذه الفصيلة بعد شهرًا من نقلها $P(t) = \frac{72(1 + 0.6t)}{3 + 0.02t}$.

13 كم كان عدد الحشرات عند نقلها إلى المحمية؟

14 كم سيبلغ عددها بعد 30 شهرًا من نقلها؟

15 بعد كم شهر سيصل عددها إلى 558 حشرة؟

9

الدرس 3

تركيب الاقتترانات

أجد قيمة كل مما يأتي، مُستعملًا القيم المُبيّنة في الجدولين الآتيين:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	3	5	7

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

- $(f \circ g)(1)$ -1
- $(f \circ g)(-2)$ 7
- $(g \circ f)(1)$ 8
- $(g \circ f)(0)$ 0
- $(g \circ g)(-1)$ -1
- $(f \circ f)(-1)$ -7

إذا كان $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = 3x - 4$ ، فأجد:

- $(f \circ g)(2)$ 5
- $(f \circ g)(0)$ -7
- $(f \circ g)(8)$ 41
- $(g \circ f)(1)$ 5
- $(f \circ g)(x)$ $6x - 7$
- $(g \circ f)(x)$ $6x - 1$

إذا كان $h(x) = \frac{2}{x}$ و $k(x) = \frac{1}{x+1}$ ، فأجد:

- $(h \circ k)(3)$ 8
- $(k \circ h)(3)$ $\frac{3}{5}$
- $(h \circ h)(6)$ 6
- $(k \circ k)(-3)$ 2
- $(k \circ h)(x)$
- $(h \circ k)(x)$

(17-23) انظر ملحق الإجابات

أجد اقتترانين $f(x)$ و $g(x)$ بحيث يكون $(g \circ f)(x) = h(x)$ في كل مما يأتي:

- $h(x) = x^6 + 1$
- $h(x) = 4(x + 1)^2$
- $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$
- $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$

25 يرتبط سعر سلعة مُعيّنة وعدد الوحدات المباعة منها بالعلاقة $p = 100 - \frac{x}{4}$ ، $0 \leq x \leq 400$ ، حيث p السعر بالدينار، و x عدد الوحدات المباعة. إذا كانت التكلفة C بالدينار لإنتاج x وحدة هي $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$ ، فأجد التكلفة C في صورة اقتتران نسبة إلى السعر p ، ثم أجد التكلفة إذا كان سعر الوحدة الواحدة 19 دينارًا.

10

كتاب التمارين

الدرس 4

الاقتراح العكسي

إذا كان $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 1 $g(9)$ 70 2 $g(4)$ 60 3 $g^{-1}(70)$ 9 4 $g^{-1}(60)$ 4

5 إذا كان $f(x)$ اقتراناً واحد لواحد، و $f(3) = 8$ ، فماذا يُستنتج من هذه المعطيات؟

6 إذا كان $f(x)$ يُمثل عدد الوحدات المُنتجة في x ساعة عمل لمنتج مُعين، فماذا يُمثل المقدار $f^{-1}(2540)$ ؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أجد الاقتراح العكسي $f^{-1}(x)$ لكل مما يأتي، مُحدداً مجاله ومداً: (7-16) انظر ملحق الإجابات

- 7 $f(x) = 3x - 5$ 8 $f(x) = 4 - 7x$
9 $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$ 10 $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$
11 $f(x) = \frac{x}{2x+6}$ 12 $f(x) = \frac{x}{8-4x}$
13 $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$ 14 $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$
15 $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$ 16 $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أبين إذا كان كل من الاقترانين $f(x)$ ، و $h(x)$ اقتراناً عكسياً للآخر أم لا:

- 17 $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$ 18 $f(x) = \frac{2x}{3x+5}, h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

(17-21) انظر ملحق الإجابات

19 أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = \sqrt{6+3x}$ ، ثم أمتل $f(x)$ ، و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نقيبه.

20 هندسة: تُعطى مساحة الدائرة بالاقتران $A(r) = \pi r^2$ ، حيث A المساحة، و r نصف القطر. أعبّر عن r في صورة اقتران نسبة إلى المساحة A ، ثم أجد طول نصف قطر دائرة مساحتها 250 cm^2

21 فيزياء: يُعطى زمن الدورة T ثانية لنبول بسيط بالاقتران $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$ ، حيث ℓ طول البندول بالمتار. أعبّر عن ℓ في صورة اقتران نسبة إلى الزمن T ، ثم أجد طول بندول زمن دورته 3 s

الدرس 5

المتتاليات

أكتب الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية مما يأتي:

- 1 4, 6, 8, 10, ... 2 3, 30, 300, 3000, ... 3 1, 4, 9, 16, ...
12, 14, 16 30000, 300000, 3000000 25, 36, 49
4 2, 4, 8, 16, ... 5 3, 10, 17, 24, ... 6 0, 4, 18, 48, ...
32, 64, 128 31, 38, 45 100, 180, 294

أصنّف المتتاليات الآتية إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسيّة، ثم أجد الحدود الثلاثة الأولى والحد العشريين لكل منها:

- 7 $T(n) = 3n + 1$ 8 $T(n) = 2n^2 + 1$ 9 3, 9, 19 10 $T(n) = n(n^2 + 1)$
 $T(20) = 61$ خطية. 4, 7, 10 $T(20) = 801$ تكعيبية. 2, 10, 30
11 $T(n) = 3(2)^n - 5$ 12 $T(n) = n(n^2 + 1)$ 13 1, 7, 19 14 $T(n) = 5(3)^{n-1}$ 15 $T(20) = 3145723$

أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

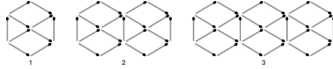
- 11 6, 11, 16, 21, 26, ... 12 -4, 3, 22, 59, 120, ... 13 $T(n) = n^3 - 5$
14 5, 15, 45, 135, ... 15 $T(n) = 5n + 1$ 16 $T(n) = 2n^2 + 3$

استثمر خالد 20000 دينار في مشروع تجاري، وتوقع أن تبلغ نسبة الربح منه 15% سنوياً:

15 أكتب مقدراً جبرياً يُمثل قيمة استثمار خالد بعد n من السنوات. $T(n) = 20000(1.15)^n$

16 أجد قيمة استثمار خالد بعد 12 سنة. 107005.0021

في ما يأتي نمط هندسي يُمثل فيه عدد أعواد الثقاب متتالية:



17 أرسّم النموذج الرابع في هذا النمط. انظر ملحق الإجابات

18 أجد عدد أعواد الثقاب اللازمة لبناء النموذج رقم 20 في هذا النمط. 181

19 ما أكبر مجموعة من الأشكال السداسية يُمكن بناؤها باستعمال 100 عود من الثقاب؟ 11

الدرس 1 ، إجابة أتتحقق من فهمي 6:

افترض أن سعر البطاقة x دينارًا، حيث $x < 11$ ، فيكون مقدار التخفيض $(11 - x)$ دينارًا، وسيزيد عدد البطاقات المباعة بمقدار $4000(11 - x)$ ، وبذلك يصبح عددها:

$(28000 + 4000(11 - x))$ ، ويساوي الدخل $R(x)$ سعر البطاقة مضروبًا في عدد البطاقات:

$$R(x) = x(28000 + 4000(11 - x))$$

$$= -4000x^2 + 72000x$$

الإحداثي x لرأس هذا القطع المكافئ هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-72000}{-8000} = 9$$

إذن، يكون الدخل أعلى ما يمكن إذا أصبح ثمن بطاقة الدخول 9 دنانير.

وأعلى دخل هو قيمة $R(x)$ عندما $x = 9$:

$$R(9) = -4000(9)^2 + 72000(9) = 324000$$

الدرس 1:

(1) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -x + 4$ ، درجته 1، معاملته الرئيس: -1، حده الثابت: 4

(2) ليس كثير حدود؛ لأن فيه عاملاً أسه سالب (x الموجودة في المقام).

(3) كثير حدود، صورته القياسية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$ ، ودرجته 2، ومعاملته الرئيس: 12، وحده الثابت: -12

(4) كثير حدود، صورته القياسية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$ ، ودرجته 3، ومعاملته الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

(5) كثير حدود، صورته القياسية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}t$ ، ودرجته 2، ومعاملته الرئيس: -16، وحده الثابت: 0

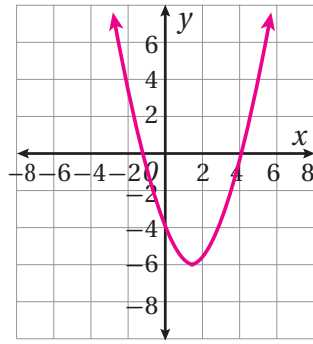
(6) ليس كثير حدود؛ لأن فيه أسًا كسريًا.

(7) ليس كثير حدود؛ لأن الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

(8) كثير حدود، صورته القياسية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$ ، ودرجته 7، ومعاملته الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

(9)

x	-2	0	1.5	3	5
$y = f(x)$	6	-4	-6.25	-4	6

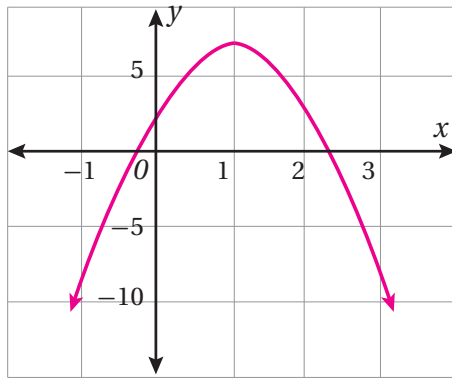


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq 6.25$ ، أو الفترة $[6.25, \infty)$.

(10)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	3	7	3	-9

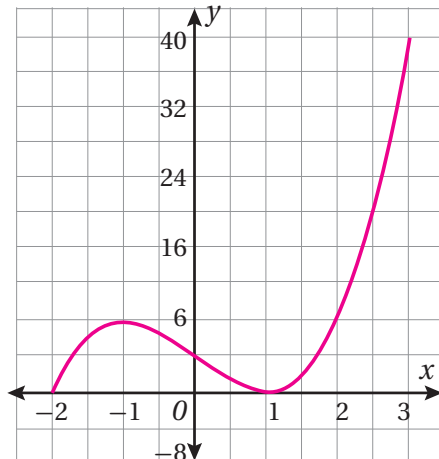


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

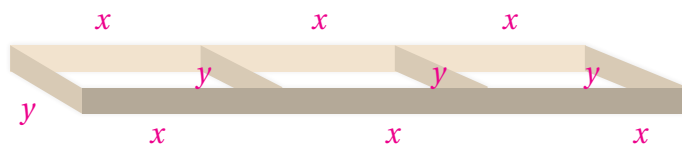
المدى: $y \leq 7$ ، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

(11)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40



(21) ليكن طول كل حظيرة x ، وعرضها y ، فيكون طول السياج الكلي للحظائر الثلاث:



$$6x + 4y = 120, \text{ ومنه ينتج أن:}$$

$$y = \frac{120 - 6x}{4}$$

المساحة الكلية للحظائر الثلاث:

$$A = 3xy = 3x \left(\frac{120 - 6x}{4} \right)$$

$$A(x) = 90x - 4.5x^2$$

تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-9} = 10$$

إذن، أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر هي: $A(10) = 450 \text{ m}^2$

(22) حجم ما تبقى من المكعب يساوي حجم المكعب الأصلي مطروحاً منه حجم التجويف.

حجم المكعب الأصلي هو $(2x+1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x+1)$

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$ ، فإن:

$$R(x) = (2x+1)^3 - x^2(2x+1)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

$$(23) \quad P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$$

(24) كلتا الإجابتين غير صحيحة. لم يُغيّر طه إشارات المطروح عندما حوّل الطرح إلى جمع. وبالرغم من أن قاسماً غير إشارات المطروح، فإنه أخطأ في نتيجة جمع بعض الحدود المتشابهة. النتيجة الصحيحة لهذه العملية هي: $-2x^3 - 13x^2 - 9x + 3$

(25) إجابة محتملة:

$$f(x) = 2x - 1, h(x) = 4x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) \cdot h(x) = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$$

$$= 8x^3 - 1$$

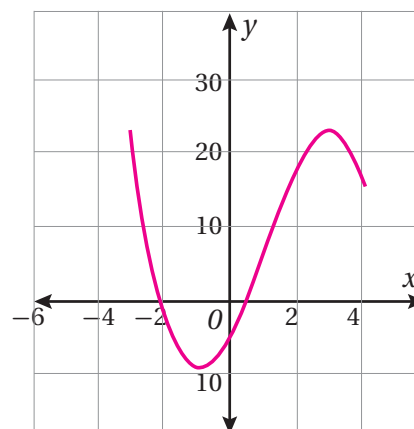
المجال: $-2 \leq x \leq 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$
المدى: $0 \leq y \leq 40$ ، أو الفترة $[0, 40]$.

(12)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23	-2	-9	-4	7	18	23	16

المجال: $-3 \leq x \leq 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$

المدى: $-9 \leq y \leq 23$ ، أو الفترة $[-9, 23]$.



$$(13) \quad h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$$

$$(14) \quad g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$$

$$(15) \quad f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$$

$$(16) \quad x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$$

$$(17) \quad (f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$$

$$(18) \quad h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$$

(19) أقصى ارتفاع للصاروخ هو ارتفاعه عندما

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-229}{2(-4.9)} \approx 23.4$$

$$h(23.4) \approx 2910 \text{ m}$$

(20) ليكن عدد الأشجار x (حيث $x > 75$)، فيكون ما يجنيه من كل شجرة: $21 + 3(75 - x)$

المحصول الكلي:

$$P(x) = x(21 + 3(75 - x))$$

$$= 21x + 3x(75) - 3x^2$$

$$P(x) = -3x^2 + 246x$$

لهذا القطع المكافئ قيمة عظمى عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{2(-3)} = 41$$

إذن، عدد الأشجار الذي يحقق أعلى محصول هو 41 شجرة في البستان.

$$P(41) = 5043 \text{ هو: أعلى محصول}$$

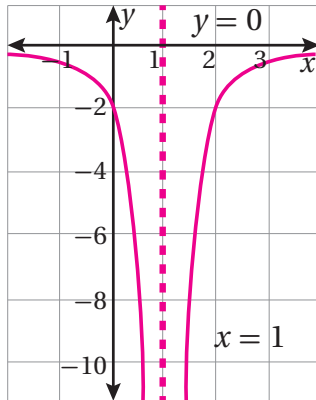
(13)

x	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
$y = h(x)$	-0.22	-0.5	-2	-8	8	-2	-0.5	-0.22

له خط تقارب رأسي هو $x = 1$ ، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أي $\{x | x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أي $\{y | y < 0\}$



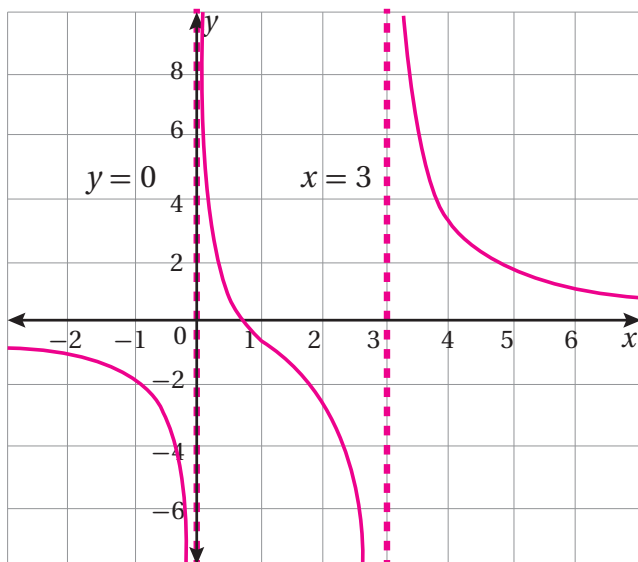
(14)

x	-2	-1	-0.5	0.5	0.75	1	2.5	3.5	5
$y = w(x)$	-1.1	-1.75	2.9	0.8	0	-0.5	-5.6	6.3	1.7

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = 0$ ، $x = 3$ ، وله خط تقارب أفقي هو: $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0، 3؛ أي $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.

(26) لإيجاد الأصفار، تُحل المعادلة: $f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 1, x = 2, x = -2$$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: -2، 2، 1

(27)

إذا كانت درجة f أكبر من درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g$ ، $f-g$ تساوي درجة f ؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة f تساوي درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g$ ، $f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأن ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين f ، g

الدرس 2:

(9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{x | x \neq 0\}$

(10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أي $\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1\}$

(11) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

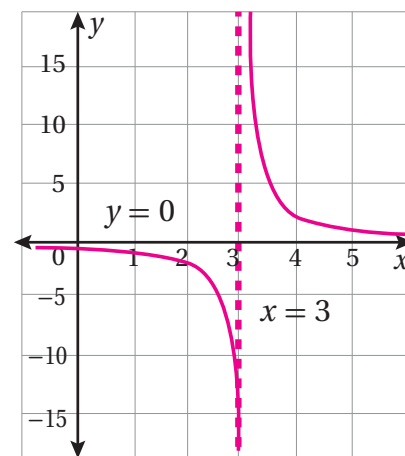
(12)

x	-1	0	1	2	2.8	3.2	3.5	4	6
$y = f(x)$	-0.5	-0.67	-1	-2	-10	10	4	2	0.67

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$ ، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x | x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 أي $\{y | y \neq 0\}$



(19) الاقتران المختلف هو $h(x) = \frac{9}{x^2 + 1}$ ؛ إذ ليس لمقامه أصفار وليس له خطوط تقارب رأسية. أمّا مقامات الاقترانات الأخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أي إن لها خط تقارب رأسي واحدًا على الأقل.

(20) إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+5x-14} + 3$ أو $f(x) = \frac{1}{x^2+5x-14} + 3$ حيث a و b عدنان حقيقيان؛ شرط أن يكون صفر المقدار $ax+b$ لا يساوي 7 أو -2

(21) العامل المعطى $(x-1)^2$ هو اقتران تربيعي، والاقتران المطلوب من الدرجة الثالثة، فيكون العامل الثاني اقترانًا خطيًا بصورة $(ax+b)$.

وعليه، فإن:

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b$$

من تقسيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b$ على $(x+2)$ ،

ثم مساواة الباقي بـ 9، فنتج المعادلة: $-18a + 9b = 9$

ومن ثم تقسيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b$ على

$(x-3)$ ، ثم مساواة الباقي بـ 44، فنتج المعادلة: $12a + 4b = 44$

وبقسمة طرفي المعادلة الأولى على 9، وطرفي المعادلة الثانية

على 4، وحل نظام المعادلتين:

$$a = 2, b = 5 \text{، فإن: } -2a + b = 1, 3a + b = 11$$

إذن، الاقتران المطلوب هو: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$

الدرس 3:

$$9) (a \circ b)(x) = a(x-7) = x-7+4 = x-3$$

$$(b \circ a)(x) = b(x+4) = x+4-7 = x-3$$

$$(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x) = x-3$$

$$10) (f \circ g)(x) = f(3x+4) = 2^{3x+4}$$

$$(f \circ g)(-3) = 2^{3(-3)+4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

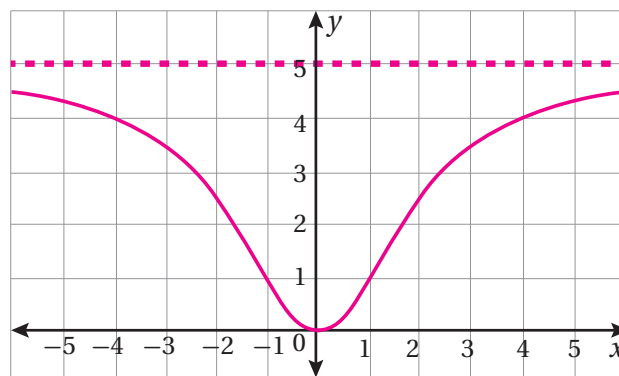
(15) بقسمة البسط على المقام، يمكن كتابة الاقتران بالصورة:

$$g(x) = 5 + \frac{-20}{x^2 + 4}$$

إذن، له خط تقارب أفقي هو $y = 5$ ، وليس له خطوط تقارب رأسية لعدم وجود أصفار حقيقية للمقام.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $0 \leq y < 5$ ، أو الفترة $[0, 5)$.



x	-5	-2	-1	0	1	2	5
$y = g(x)$	4.3	2.5	1	0	1	2.5	4.3

(17) عرض هذه الورقة $(x+2)^2$ ، وهو أحد عاملي مساحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x+2)^2$ ، كان الباقي صفرًا.

باقي قسمة المساحة على $(x+2)^2$ ، أو (x^2+4x+4) هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، ينتج أن $a = 20$

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x^2+4x+4 \overline{) 3x^3+14x^2+ax+8} \\ \underline{(-) 3x^3+12x^2+12x} \\ 2x^2+(a-12)x+8 \\ \underline{(-) 2x^2+8x+8} \\ (a-20)x \end{array}$$

(18) حجم البركة يساوي مساحة قاعدتها ضرب ارتفاعها.

ويمكن حساب الارتفاع h بقسمة الحجم V على مساحة القاعدة A :

$$h = V \div A$$

$$h = (3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x) \div (3x^2 - 6x) = x^2 + x - 9 + 0$$

إذن، ارتفاع البركة هو: $(x^2 + x - 9)$

الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$$

$$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$$

$$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$$

$$t = 3.38, t = -3.49$$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

$$a = 4, b = -3 \quad (25)$$

$$(26) \quad (f \circ g \circ h)(x) = f(g(x+3))$$

$$= f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 1 = \frac{x^2 + 6x + 10}{(x+3)^2}$$

(27) إجابة هدى صحيحة. عوضت وفاء x^2 مكان x في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$ ، ونسيت 5

(28) ستتوقع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$f(x) = x^2 + 3, g(x) = x - 2$$

$$(29) \quad (f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div \left(\frac{1}{x+2} - 3\right)$$

$$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1 \times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أي $x = -\frac{5}{3}$ ، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 و $-\frac{5}{3}$ ؛ أي $\{x \mid x \neq -2, x \neq -\frac{5}{3}\}$

$$(11) \quad (g \circ f)(x) = 2\left(\frac{1}{x-4}\right) - 10 = \frac{2}{x-4} - 10\left(\frac{x-4}{x-4}\right) \\ = \frac{2-10x+40}{x-4} \\ = \frac{42-10x}{x-4}$$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{x \mid x \neq 4\}$

(19) ستتوقع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$f(x) = \frac{4}{3-\sqrt{x}}, g(x) = 4+x^2$$

$$\text{أو } f(x) = \frac{4}{3-x}, g(x) = \sqrt{4+x^2} \text{ وغيرها.}$$

(20) ستتوقع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$f(x) = x^3, g(x) = \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{أو } f(x) = \frac{1}{x^3}, g(x) = 2x-3 \text{ وغيرها.}$$

(21) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$ ؛ لأن مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $f \circ g(x)$.

(22) عندما $t = 2$ يكون طول نصف قطر الموجة:

$$r(2) = 25\sqrt{2+2} \\ = 50 \text{ cm}$$

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$ ، أو 7854 cm^2 تقريبًا.

$$(23) \quad (N \circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t+1.5)^2 - 56(5t+1.5) + 1 \\ = 575t^2 + 65t - 31.25$$

$$18) \quad y = \frac{x}{x-1}$$

$$xy - y = x \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y$$

$$x = \frac{y}{y-1}$$

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} = f(x)$$

يمكن إثبات أن $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه ببيان أن:

$$(f \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x-1} \div \left(\frac{x}{x-1} - 1\right) = \frac{x}{\frac{x}{x-1} - 1}$$

$$= \frac{x}{x-1} \div \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x$$

(20) رسم المستقيم $y = x$ ، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس

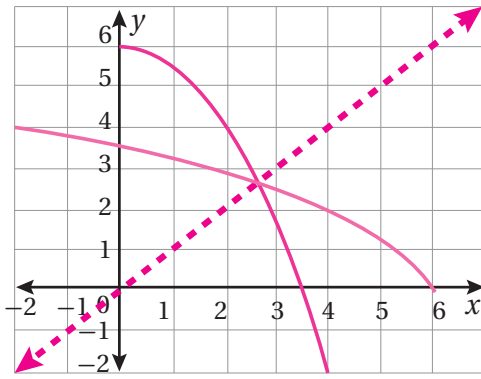
حول المستقيم $y = x$ ، مثل: $(0, 6)$ وانعكاسها $(6, 0)$ ، والنقطة

$(4, -2)$ وانعكاسها $(-2, 4)$ ، والنقطة $(2, 4)$ وانعكاسها $(4, 2)$ ،

ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل المجاور.

مجال $f(x)$: $0 \leq x \leq 4$ ، ومداه: $-2 \leq x \leq 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2 \leq x \leq 6$ ، ومداه: $0 \leq y \leq 4$



(30)

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{3}\right) - 2}{\frac{2x-1}{3} - 1} = \frac{\frac{4x-2}{3} - 2}{\frac{2x-1}{3} - 1} = \frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}} = \frac{4x-8}{2x-13}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{4x-8}{2x-13} = -4 \Rightarrow 4x-8 = -8x+52 \Rightarrow x = 5$$

الدرس 4:

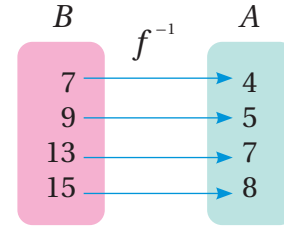
(1) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

(2) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.

$$h^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$$

(3) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.



(4) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران -3 و3 لهما الصورة نفسها 3

$$17) \quad (f \circ g)(x) = (-3 + \sqrt{x-2} + 3 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = -3 + \sqrt{(x+3)^2 + 2 - 2} = -3 + (x+3) = x$$

إذن، كل من الاقترانين $f(x)$, $g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

(21)

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4, -3 \leq x \leq 1$$

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y-4 = (x-1)^2$$

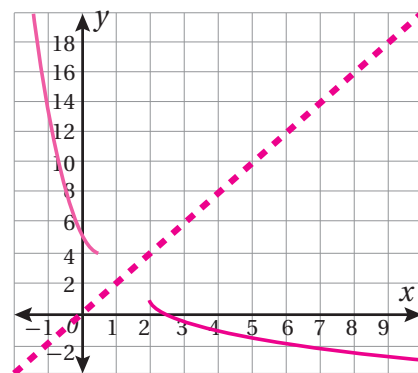
$$-\sqrt{y-4} = x-1$$

(أخذ الجذر السالب لأننا نتعامل هنا مع الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$$1 - \sqrt{y-4} = x$$

$$y = 1 - \sqrt{x-4}$$

مجال $f^{-1}(x)$: $4 \leq x \leq 20$ ، ومداة: $-3 \leq y \leq 1$



(22)

$$n(C) = \frac{100C-25}{0.6-C}; n(0.5) = \frac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \frac{25}{0.1} = 250 \text{ mL}$$

(23)

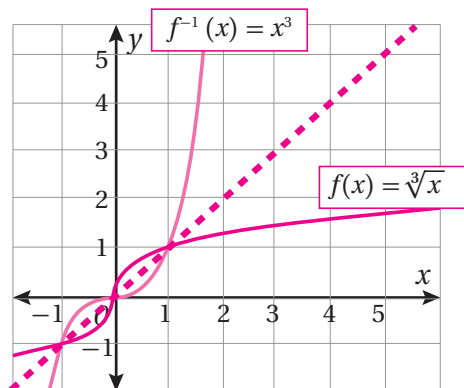
نعم؛ فالاقتران العكسي يُبين كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك،

$$\text{وهو: } w = 2(l-3)$$

$$24) \quad r(A) = -20 + \sqrt{\frac{A + 800\pi}{2\pi}};$$

$$r(2000) = -20 + \sqrt{\frac{2000 + 800\pi}{2\pi}} \approx 6.8 \text{ cm}$$

$$25) \quad f^{-1}(x) = x^3$$



(26)

بما أن للاقتران $f(x)$ صفراً عندما $x = 3$ ، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$ ؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

(27)

ستتوقع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x + 7, g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g\left(\frac{x-7}{9}\right) = 9\left(\frac{x-7}{9}\right) + 7 = x - 7 + 7 = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(9x + 7) = \frac{9x + 7 - 7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ و $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

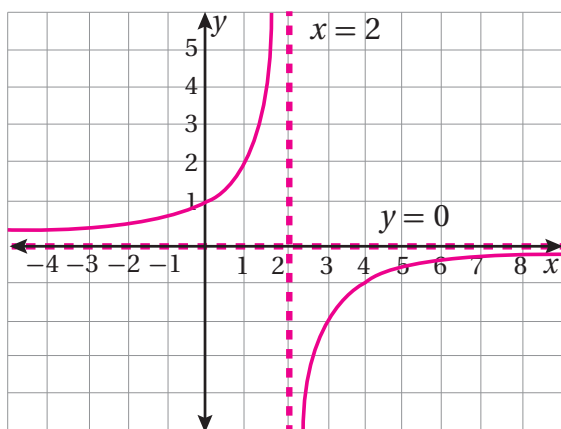
28) $x = 0.6$

اختبار نهاية الوحدة:

13 لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$ ، وخط تقارب أفقي هو

$$y = 0$$

x	-1	0	1	1.5	2.5	3	4	5
$y = f(x)$	1.33	2	4	8	-8	-4	-2	-1.33



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أي $\{x | x \neq 2\}$.

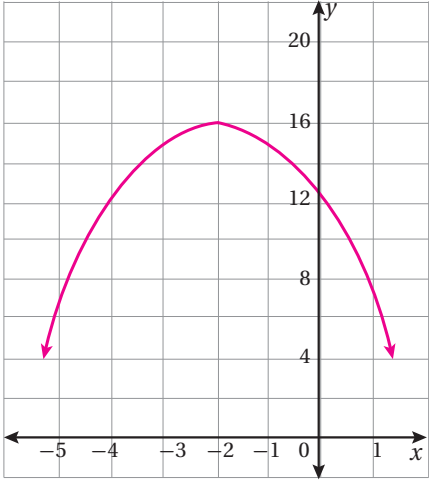
المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{y | y \neq 0\}$.

$$18) \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{x-2} - 1, x \neq 2$$

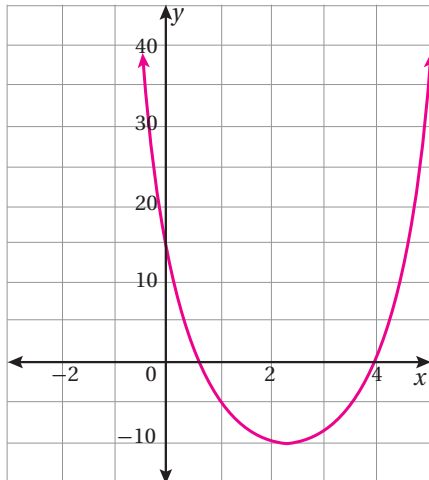
$$19) \quad (f \circ f)(x) = 16x - 15$$

المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ المدى: $\{y | -3 \leq y \leq 19\}$ 

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y | y \leq 16\}$ أو $(-\infty, 16]$ 

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y | y \geq -10\}$ أو $[-10, \infty)$ 

$$(6) \quad 20) \quad (g \circ f)(x) = \frac{1}{4x-2} + 2$$

$$21) \quad f^{-1}(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$ ، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$

مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$ ، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$

(22) عند تنفيذ الزيادة x مرة ستقل مبيعات المحل بمقدار $100x$ ، وتصبح كمية المبيعات $3500 - 100x$ ، وسعر العلبة الواحدة $0.75 + 0.05x$ ، ويكون الدخل:

$$R(x) = (0.75 + 0.05x)(3500 - 100x)$$

$$R(x) = 2625 + 100x - 5x^2$$

وهذا قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

الإحداثي x للرأس هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

إذن، سعر العلبة الذي يحقق أعلى دخل أسبوعي هو:

$$0.75 + 10(0.05) = 1.25$$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 1:

(1) ليس كثير حدود لأن أس المتغير x في الحد الثاني سالب.

(2) كثير حدود، درجته 3، معاملته الرئيس -5، الحد الثابت -1، صورته

$$f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$$
 القياسية هي:

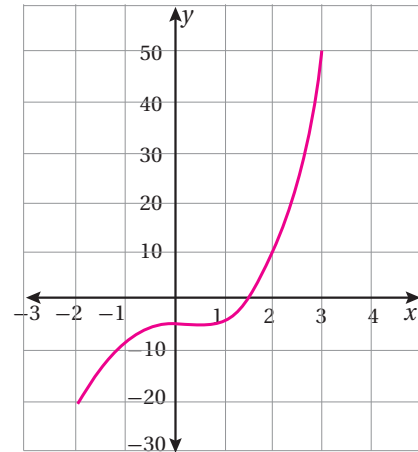
(3) كثير حدود، درجته 1، معاملته الرئيس $-\frac{16}{5}$ ، الحد الثابت $\frac{24}{5}$ ،

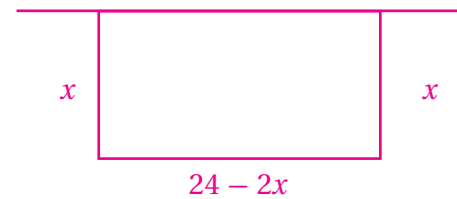
$$f(x) = -\frac{16}{5}x + -\frac{24}{5}$$
 صورته القياسية هي:

(4) ليس كثير حدود لأنه يحتوي مقدار جذري.

(5) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$

المدى: $\{y | -21 \leq y \leq 49\}$





$$A(x) = x(24 - 2x) = 24x - 2x^2$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2(-2)} = 6 \text{ هو الرأس } x \text{ للإحداثي}$$

أكبر مساحة ممكنة هي:

$$A(6) = 24(6) - 2(6)^2 = 72 \text{ m}^2$$

إجابات كتاب التمارين - الدرس 2:

$$(3) \text{ باقي القسمة هو } (k-6)$$

$$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$$

$$(4) \text{ باقي القسمة هو } 3 + (-18) + (c+9), \text{ ويجب أن يكون الباقي صفرًا}$$

$$(c+9) = 0 - 18 + 3$$

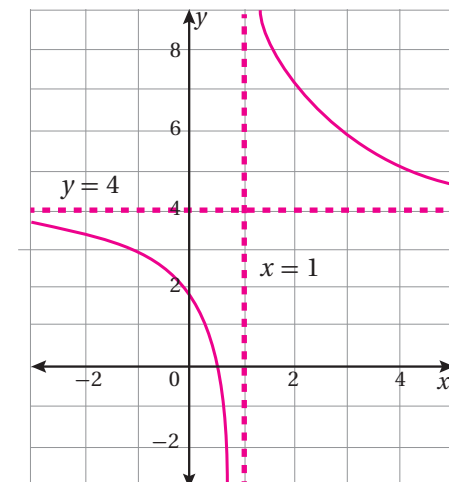
$$-6 + (c+9) = 0 \Rightarrow c = -3$$

$$(5) \text{ له خط تقارب رأسي هو } x = 1$$

$$\text{وله خط تقارب أفقي هو } y = 4$$

$$\text{المجال: } \{x \mid x \neq 1\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4 أي } \{y \mid y \neq 4\}$$



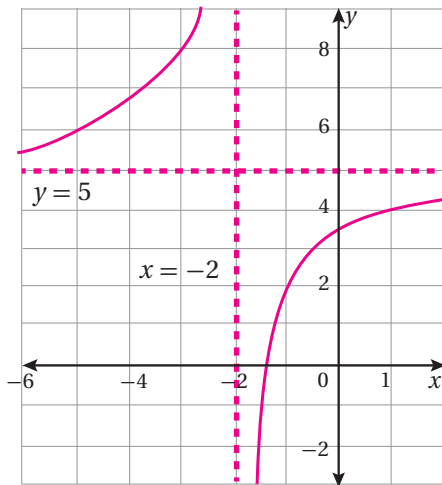
(6)

$$\text{له خط تقارب رأسي هو } x = -2$$

$$\text{وله خط تقارب أفقي هو } y = 5$$

$$\text{المجال: } \{x \mid x \neq -2\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي } \{y \mid y \neq 5\}$$



(7)

$$\text{المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء } -2, 2$$

$$\text{أي: } \{x \mid x \neq -2, x \neq 2\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء } [0, 1]$$

$$\text{أي: } (-\infty, 0] \text{ أو } (1, \infty)$$

$$\text{له خطا تقارب رأسيان هما: } x = -2, x = 2$$

$$\text{له خط تقارب أفقي هو } y = 1$$

$$\text{له خط تقارب هو } y = 0$$

(8)

$$\text{المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء } -1, 1$$

$$\text{أي: } \{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية}$$

$$\text{له خطا تقارب رأسيان هما: } x = -1, x = 1$$

(9)

$$\text{المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي } \{x \mid x \neq 3\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 أي } \{y \mid y > 5\}$$

$$\text{أو الفترة } (5, \infty)$$

(10)

$$\text{المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء } -2 \text{ أي } \{x \mid x \neq -2\}$$

$$\text{المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3 أي } \{y \mid y > 3\}$$

$$\text{الفترة } (3, \infty)$$

(22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$$f(x) = 2x^2 - 4 ; g(x) = \sqrt{x} + 7$$

$$f(x) = 2x^2 ; g(x) = \sqrt{x-4} + 7 \text{ أو}$$

$$23) \quad x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p) = \frac{8\sqrt{(100-p)}}{0.5} + 600$$

$$C(19) = 744$$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 4:

$$7) \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

$$8) \quad f^{-1}(x) = \frac{4+x}{7}$$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

$$9) \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$$

مجاله: $[3, \infty)$ ، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

$$10) \quad f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{3}$$

مجاله: $(-\infty, 5]$ ، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

$$11) \quad f^{-1}(x) = \frac{6x}{1-2x}$$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$ ، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء -3 أو $\{y \mid y \neq -3\}$

$$12) \quad f^{-1}(x) = \frac{8x}{1+4x}$$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$ ، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء 2 أو $\{y \mid y \neq 2\}$

$$13) \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{2}$$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 3 أي $[3, \infty)$ ، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$ أي $[\frac{1}{2}, \infty)$

$$11) \quad C(5) = \frac{50(5)}{5^2 + 25} = 5 \text{ mg/dL}$$

$$11) \quad C(t) = 4 \Rightarrow \frac{50t}{t^2 + 25} = 4 \Rightarrow 4t^2 - 50t + 100 = 0$$

$$t = 2.5, t = 10$$

إذن، يكون تركيز المضاد الحيوي في دم المريض 4 mg/dL بعد 2.5 ساعة من تناوله، وبعد 10 ساعات من تناوله.

13) a)

$$P(0) = \frac{72(l + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$$

13) b)

$$P(30) = \frac{72(l + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$$

$$13) \text{ c) } \frac{72(l + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3 + 0.02t) = 72(1 + 0.6t)$$

$$1674 + 11.16t = 72 + 43.2t$$

$$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهر من نقلها إلى المحمية.

إجابات كتاب التمارين-الدرس 3:

$$17) \quad k \circ h(x) = k\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x} + 1}$$

$$\frac{1}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{x}{2+x}$$

$$18) \quad h \circ k(x) = h\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2 \times \frac{x+1}{1} = 2x + 2$$

(19) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x^6$; $g(x) = x + 1$ أو $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2 + 1$ وغيرها.

(20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x + 1$; $g(x) = 4x^2$ أو $f(x) = 2x + 2$; $g(x) = x^2$ وغيرها.

(21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x - 5$; $g(x) = 2x^2$ أو $f(x) = (x-5)^2$; $g(x) = 2x$

$$20) \quad r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

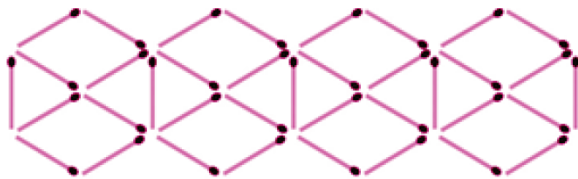
$$r(250) = \sqrt{\frac{250}{\pi}} \approx 8.92 \text{ cm}$$

$$21) \quad l(T) = \frac{9.8 T^2}{4\pi^2}$$

$$l(3) = \frac{9.8 (3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23 \text{ m}$$

إجابات كتاب التمارين - الدرس 5:

17)



$$14) \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 10x + 23}{3}$$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -5 أي $[-5, \infty)$ ،
ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$ أي $[\frac{-2}{3}, \infty)$

$$15) \quad f^{-1}(x) = \frac{(x+1)^3 + 2}{3}$$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

$$16) \quad f^{-1}(x) = \frac{3 - (x-1)^3}{4}$$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

$$17) \quad (f \circ h)(x) = 2(5x + 2) - 5 = 10x - 1 \neq x$$

لا يكون أي منهما اقترانًا عكسيًا للآخر

$$18) \quad (f \circ h)(x) = \frac{2\left(\frac{5x}{2-3x}\right)}{3\left(\frac{5x}{2-3x}\right) + 5}$$

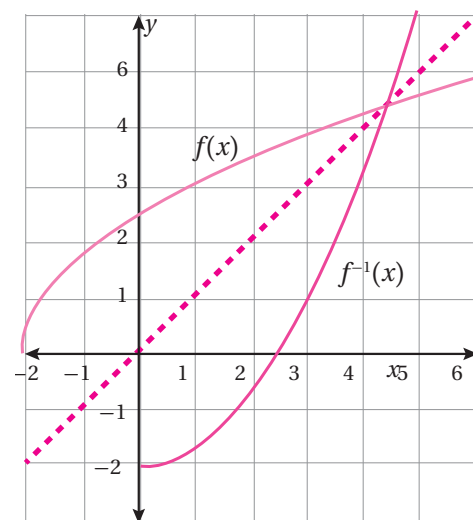
$$= \frac{10x}{2-3x} \div \frac{15x + 10 - 15x}{2-3x}$$

$$= \frac{10x}{2-3x} \div \frac{2-3x}{10} = x$$

وأيضًا يمكن أن نبين أن $(h \circ f)(x) = x$

إذن، كل من $f(x)$, $h(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

$$19) \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 6}{3}$$



مخطط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
معمل برمجة جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى.	• يصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير الحدود.		• جهاز حاسوب. • برمجة جيوجبرا.	1
الدرس 1: تقدير ميل المنحنى.	• يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران. • يرسم مماسًا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران. • يكتب معادلة المماس. • يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة - الزمن.	القاطع، المماس، نقطة التماس، الميل، معادلة المماس، السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: الاشتقاق.	• يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود. • يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين. • يجد الميل باستعمال المشتقة. • يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.	المشتقة، كثير الحدود، الميل.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: القيم العظمى والقيم الصغرى.	• يتعرف النقاط الحرجة. • يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.	النقطة الحرجة، القيمة العظمى، القيمة الصغرى، الميل، المشتقة.	• جهاز حاسوب. • برمجة جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج المشروع				1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				14

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، وكيفية تمثيله بيانياً وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره. وكذلك تعرفوا مفهوم القاطع وإيجاد ميل المستقيم ومعادلته. وسيتعلمون في هذه الوحدة إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة التماس مع مستقيم مرسوم، وتقدير ميل منحنى اقتران عن طريق رسم المماس، وتقدير السرعة اللحظية. وكذلك إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق، وحساب السرعة والتسارع اللحظي، فضلاً عن تعرف مفهوم النقاط الحرجة، والقيم الصغرى، والقيم العظمى، وإيجادها، وحل مسائل حياتية عنها.

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق لإيجاد الميل عند أي نقطة على المنحنى؛ ما يُسهّل الحسابات في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي يُمكن نمذجتها باستعمال الاقترانات. ومن ذلك، حساب سرعة سيارة عند لحظة ما، وحساب أعلى ارتفاع تبلغه كرة عند ركلها إلى الأعلى.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- إيجاد المشتقة الأولى لكثيرات الحدود.
- إيجاد القيم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والصغرى.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تعريف المماس، والقاطع، ونقطة التماس.
- ✓ حساب ميل المستقيم.
- ✓ معادلة الخط المستقيم.
- ✓ منحنى المسافة - الزمن، ومنحنى السرعة - الزمن.

54

الترباط الرأسي بين الصفوف

سابقاً

الصف التاسع

- تمثيل بعض الاقترانات بيانياً.
- تفسير منحنى المسافة - الزمن.
- تفسير منحنى السرعة - الزمن.
- إيجاد ميل المستقيم ومعادلته.
- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.

الصف العاشر

- إيجاد ميل منحنى مماسه مرسوم.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- اشتقاق كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق.
- إيجاد السرعة والتسارع اللحظي.
- إيجاد النقاط الحرجة والقيم الصغرى والقيم العظمى.
- حل مسائل حياتية.

لاحقاً

الصف الحادي عشر العلمي

- تعرف النهايات.
- إيجاد مشتقة x^n (لأي عدد نسبي n).
- إيجاد مشتقة عدة أنواع من الاقترانات.
- استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- إيجاد النقاط الحرجة واستعمالها لرسم منحنى الاقتران.
- تعرف القيم القصوى المحلية والمطلقة.

عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن

مشروع الوحدة

مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

هدف المشروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، بإيجاد أكبر حجم ممكن لصندوق مصنوع من قطعة ورقية مستطيلة الشكل.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوّن كل منها من (5-7) طلبة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مقرراً لهم.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيو جبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلاً عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مؤكداً لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المتعلقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيو جبرا.
- وضح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعيناً بسلم التقدير.
- يبن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلاً، تُنفذ الخطوات (1-4) بعد الانتهاء من الدرس الأول، والخطوة (5) بعد الدرس الثاني، والخطوات (6-8) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدّد وقتاً مناسباً لعرض النتائج التي توصّل إليها الطلبة، وناقشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفتح انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صوراً المراحل التنفيذ.
- وضح للطلبة أهمية اشتغال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزاً للمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

فكرة المشروع حساب أكبر حجم ممكن لصندوق باستعمال المشتقة.
المواد والأدوات ورقتان من الكرتون المقوى مستطيلتا الشكل من المقاس نفسه، مسطرة، مقص، برمجية جيو جبرا.

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أقص أربعة مربعات متساوية.
- 2 أطبق الأطراف بعضها على بعض، فيتشّج صندوق على شكل متوازي مستطيلات، مفتوح من الأعلى.
- 3 أحسب حجم الصندوق، بقياس كل من الطول، والعرض، والارتفاع باستعمال المسطرة. هل يمكن عمل صندوق أكبر حجماً باستعمال ورقة من المقاس نفسه؟
- 4 أعيد الخطوات السابقة، ولكن بطريقة جبرية، وافترض أن طول ضلع المربع المقصوص من كل زاوية يساوي x ، وأكتب ثلاثة مقادير جبرية تمثل الطول والعرض والارتفاع، ثم استعملها لإيجاد حجم الصندوق بدلالة x .
- 5 أكتب افتراضاً يمثل حجم الصندوق $V(x)$.
- 6 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي يكون عندها الحجم أكبر ما يمكن.
- 7 أمثل افتراض الحجم بياناً باستعمال برمجية جيو جبرا.
- 8 أنحقّق من النقطة التي يكون عندها الحجم أكبر ما يمكن باستعمال برمجية جيو جبرا، وذلك بالضغط على أيقونة  من شريط الأدوات، ثم نقر المنحنى، فتظهر إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً أبن فيه:

- 1 النتائج التي توصّل إليها كل فرد في المجموعة.
- 2 بعض الصعوبات التي واجهتها المجموعة في أثناء العمل بالمشروع، وكيف تجاوزتها.
- 3 مقترحاً لتطبيقات حياتي أو علمي تستعمل فيه فكرة المشروع.

55

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرفوها.			
2	تعبير أفراد المجموعة عن حجم الصندوق جبرياً.			
3	إيجاد أفراد المجموعة أكبر حجم للصندوق، وتحققهم من صحة الحل.			
4	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
5	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملاً، ومنظماً، ويحوي رسوماً توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

- 1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
- 2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
- 3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية والتربيعية، وإيجاد ميل مستقيم باستعمال نقطتين واقعتين عليه، وضرب المقادير الجبرية، وحساب محيط الدائرة ومساحتها التي عُلِم نصف قطرها.
- وجّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالاً واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة - من دون ذكر اسم الطالب-، وأدر نقاشاً حوله.

الوحدة 6: المشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمراجعة.

إيجاد ميل المستقيم.

أجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كل مما يأتي:

1 (4, 2), (5, 6) 4

2 (3, 6), (-2, 6) 0

مثال: أجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين: (1, 2) و (3, 4).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4 - 2}{3 - 1} = 1$$

صيغة ميل المستقيم m

$$(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (3, 4)$$

حلّ المعادلات الخطية.

أحلّ كلّاً من المعادلات الخطية الآتية:

1 $x = -\frac{1}{12}$
 $5x + 5 = 4 - 7x$

2 $x = \frac{5}{12}$
 $2(1 - 2x) = 8x - 3$

3 $3(4x - 2) = 8(x + 6)$
 $x = 13.5$

مثال: أحلّ المعادلة الخطية $3x + 5 = x - 3$

$$3x + 5 = x - 3$$

$$2x + 5 = -3$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

المعادلة الأصلية

بطرح x من الطرفين

بطرح 5 من الطرفين

بقسمة الطرفين على 2

حلّ المعادلات التربيعية.

أحلّ كلّاً من المعادلات التربيعية الآتية:

1 $x = 2, x = 1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$

2 $x = -3$
 $x^2 + 6x + 9 = 0$

3 $x^2 - 4x + 7 = 0$
لا توجد إجابات حقيقية.

مثال: أحلّ المعادلة التربيعية $x^2 + x - 6 = 0$

أحلّ هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0, x - 2 = 0$$

$$x = -3, x = 2$$

بالتحليل إلى العوامل

خاصية الضرب الصفري

بحلّ المعادلتين الناتجتين

13

الوحدة 6: المشتقات

أستعد لدراسة الوحدة

إذن، حلّ المعادلة هو: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكن أيضاً حلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

أجد قيم المعاملات: $a = 1, b = 1, c = -6$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، حلّ المعادلة هو: $x_1 = -3, x_2 = 2$

إيجاد ناتج ضرب المقادير الجبرية.

أكتب كلّاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $8x(3x - 2) 24x^2 - 16x$ 2 $(x - 6)(x + 4) x^2 - 2x - 24$ 3 $(x - 7)(x + 7) x^2 - 49$

مثال: أكتب كلّاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $(x - 3)(x + 4)$

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4x - 12$$

$$= x^2 + x - 12$$

بتوزيع الضرب

بالتبسيط

2 $(x + 1)(x - 1)$

$$(x + 1)(x - 1) = x(x - 1) + 1(x - 1)$$

$$= x^2 - x + x - 1$$

$$= x^2 - 1$$

بتوزيع الضرب على الجمع

بتوزيع الضرب على الطرح

بجمع الحدود المتشابهة

حساب محيط الدائرة ومساحتها.

أجد المحيط والمساحة للدائرة الممّطة نصف قطرها في كل مما يأتي:

1 $C = 10\pi \text{ cm}$
 $A = 25\pi \text{ cm}^2$
 $r = 5 \text{ cm}$

2 $C = 14\pi \text{ cm}$
 $A = 49\pi \text{ cm}^2$
 $r = 7 \text{ cm}$

3 $C = 16\pi \text{ cm}$
 $A = 64\pi \text{ cm}^2$
 $r = 8 \text{ cm}$

مثال: أجد المحيط والمساحة للدائرة التي نصف قطرها 3 cm:

$$C = 2\pi r$$

$$= 2\pi(3) = 6\pi \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2$$

$$= \pi(3)^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

صيغة محيط الدائرة

بتعويض طول نصف القطر، والتبسيط

صيغة مساحة الدائرة

بتعويض طول نصف القطر، والتبسيط

14

إرشادات للمعلم

لتحديد عدد حلول المعادلة التربيعية، ذكّر الطلبة بتمييز المعادلة وحالاته الثلاث:

- المميز < 0 ، إذن، يوجد حلان حقيقيان.
- المميز $= 0$ ، إذن، يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي).
- المميز > 0 ، إذن، لا توجد حلول حقيقية.

استكشاف ميل مماس المنحنى Exploring The Slope of The Tangent

التعلم القبلي:

- تمثيل كثيرات الحدود بيانيًا باستعمال برمجية جيوجبرا.
- تعيين نقطة متحركة على التمثيل البياني لكثير الحدود.

إرشادات للمعلم

يمكنك تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسوب في مختبر مدرستك، وتحديثها باستمرار، مُستعملًا الرابط الإلكتروني: <https://www.geogebra.org/download>

1 التهيئة

- توجّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في مدرستك.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- عرّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلاً، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم التمثيل البياني للاقتارات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.

2 التدريس

- وضّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتحوّل بينهم مُرشداً ومُساعدًا ومُوجّهاً، وتأكد أن كل فرد في المجموعة قد تمكّن من تنفيذ النشاط.
- ناقش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجباً، أو سالباً، أو صفراً، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
 - « هل يُؤثر اتجاه المماس في إشارة الميل؟ »
 - « هل يمكن إيجاد علاقة بين المماس والمحور x الموجب؟ »

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا لوصف التغيّر في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير حدود.

نشاط

أمثّل الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أرسّم مماسًا عند نقطة مُتحركة على منحناء، واصفًا التغيّر في قيمة ميل المماس.

الخطوة 1: أمثّل منحنى الاقتران بيانيًا باتباع الآتي:

- أكتب $f(x)$ في شريط الإدخال، ثم أكتب قاعدة الاقتران بنقر المفاتيح الآتية:

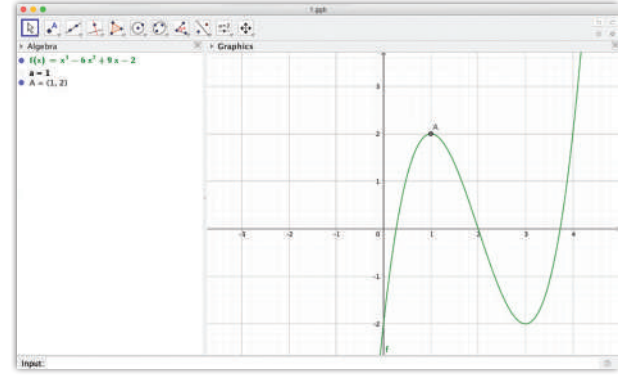
$x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

الخطوة 2: أحمّد نقطة مُتحركة A على منحنى الاقتران باتباع الآتي:

- أكتب $a = 1$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زرّ $\rightarrow$.

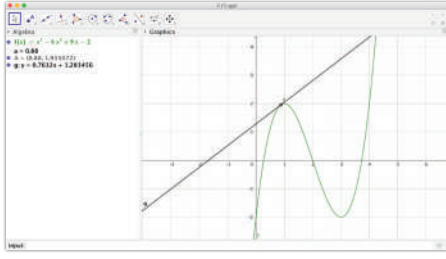
- أكتب $A = (a, f(a))$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زرّ $\rightarrow$.

يُمكنني تغيير موقع النقطة A على منحنى الاقتران بنقرها باستمرار، ثم تحريكها.



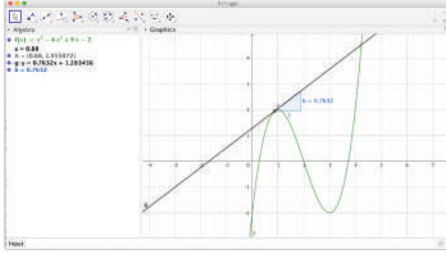
إرشادات للمعلم

- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ استعمال جهاز العرض (إن توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب لمعمل برمجية جيوجبرا، ويمكنك وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- ذكّر الطلبة أنه يمكن تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.



الخطوة 3: أرسم مماسًا للمنحنى عند النقطة A.

- أكتب $Tangent(A, f)$ في شريط الإدخال، ثم انقر زر $\leftarrow$.
- ألاحظ أن برمجة جيو جبرا تُسمي المماس g بصورة تلقائية.



الخطوة 4: أجد ميل المماس عند النقطة A.

- أكتب $Slope(g)$ في شريط الإدخال، ثم انقر زر $\leftarrow$.

الخطوة 5: أحرّك النقطة A، ملاحظًا التغير في قيمة الميل، ثم أجيب عن الأسئلة الآتية:

- متى يكون ميل المماس موجبًا؟
- متى يكون ميل المماس سالبًا؟
- متى يكون ميل المماس صفرًا؟

أندرب

أمثل كلاً من الاقترانات الآتية بيانيًا باستعمال برمجة جيو جبرا، ثم أرسم مماسًا لكل منها عند نقطة مُتحرّكة، واصفًا التغير في قيمة ميل المماس: (1-4) انظر ملحق الإجابات

1 $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2 $h(x) = 3 - 2x - x^2$

3 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4 $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

إرشادات للمعلم

يمكن إعادة توزيع الطلبة في المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أندرب)؛ لكي يتبادلوا الخبرات فيما بينهم.

تعليمات المشروع:

- أخبر الطلبة أنه يمكنهم الاستفادة من برمجة جيو جبرا لتنفيذ الخطوتين 7 و 8 في المشروع.

5 الختام

- وجّه الطلبة إلى كتابة كثير حدود من الدرجة الثانية أو أكثر، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لتمثيله بيانيًا باستعمال برمجة جيو جبرا، وإيجاد ثلاث نقاط يكون عندها الميل موجبًا، وسالبًا، وصفرًا.
- اطلب إلى كل طالب أن يتحقق من حل زميله.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تمثيل معادلة خطية أو تربيعية بيانيًا باستعمال برمجة جيو جبرا، ثم تدرّج معهم في الخطوات حتى يتمكنوا من تنفيذ النشاط.
- وجّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجة جيو جبرا، وحفّزهم على تبادل الخبرات المتعلقة بالمهارات التي تعلموها؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

3 التدريب

- وجّه الطلبة إلى حل أسئلة بند (أندرب) الوارد ذكرها في معمل برمجة جيو جبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرة؛ بتطبيق ما تعلموه من مهارات باستعمال البرمجة.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة - من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم -، ثم ناقش طلبة الصف فيها.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة التي لم يتمكنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

4 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة تمثيل عدّة اقترانات بيانيًا، وإيجاد النقاط التي يكون عندها الميل صفرًا، ومحاولة تفسير ذلك.
- اطلب إلى الطلبة مقارنة إجاباتهم بعضها ببعض، وحفّز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- وضح للطلبة أنه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجة جيو جبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجة جيو جبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معًا، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.

تقدير ميل المنحنى

Estimating Slope

نتائج الدرس

- يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يرسم مماسًا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يكتب معادلة المماس.
- يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة - الزمن.

التعلم القبلي:

- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.
- إيجاد ميل مستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- تفسير منحنى المسافة - الزمن، ومنحنى السرعة - الزمن.

التهيئة

1

- مهّد للموضوع بسؤال الطلبة عن تعريف القاطع والمماس ونقطة التماس، ثم اطلب إليهم رسم أمثلة توضيحية لكل منها على اللوح. اسألهم أيضًا عن قانون ميل المستقيم الذي درسوه سابقًا، ثم اكتبه على اللوح.

- اكتب على اللوح المثالين الآتيين، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد الميل بين النقطتين في كل منهما:

a) $A(6, 2), B(8, 10)$

b) $C(5, 4), D(9, -10)$

- ا طرح على الطلبة السؤال الآتي:
- « لماذا ظهرت إشارة الميل موجبة في الفرع a ، وسالبة في الفرع b ؟ »

- اطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم في المثال السابق.

فكرة الدرس

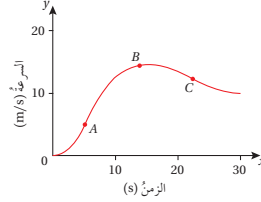
تقدير ميل المنحنى.

المصطلحات

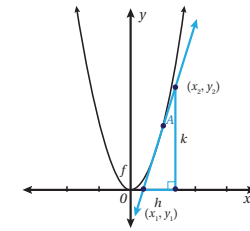
السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.

مسألة اليوم

يُمثل الشكل المجاور سرعة سيارة في 30 ثانية.



- هل يُمكن إيجاد تسارع السيارة عند النقاط A, B, C ؟
- عند أي النقاط يكون التسارع موجبًا؟
- عند أي النقاط يكون التسارع سالبًا؟
- عند أي النقاط يكون التسارع صفرًا؟



تعلمتُ سابقًا كيفية حساب ميل المستقيم، فهل يُمكن إيجاد ميل منحنى ليس مستقيمًا؟
إنَّ ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإنَّ ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه كما في النشاط المذكور آنفًا قبل الدرس.

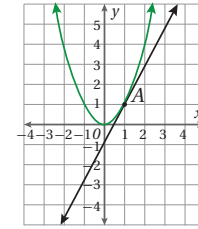
أفكر

لماذا يكون ميل المستقيم ثابتًا عند أي نقطة عليه؟

لإيجاد ميل منحنى عند نقطة ما، أرسم مماسًا عند تلك النقطة، ثم أجد ميل المماس باستعمال إحداثيات نقطتين تقعان عليه: (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، وذلك بالتعويض في صيغة ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{h} \text{ حيث: } x_2 - x_1 \neq 0$$

مثال 1



يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى الاقتران $y = x^2$ عند النقطة $A(1, 1)$.
أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .

- وجّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:

« ماذا يسمى هذا المنحنى؟ **منحنى السرعة - الزمن.**

« ما التسارع؟ **التغير في السرعة.**

« هل يمكن حساب التسارع المتوسط بين نقطتين على المنحنى؟ **نعم.**

« كيف يمكن حساب ذلك؟ **بقسمة فرق السرعة على فرق الزمن بين النقطتين.**

« هل يختلف التسارع من نقطة إلى أخرى على هذا المنحنى؟ **نعم.**

- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:

« من يؤيد الإجابة؟

« من لديه إجابة أخرى؟

« اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والآخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومساائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: الميل (Slope)، والمماس (Tangent)، والسرعة (velocity)، والتسارع (acceleration).

اشرح على اللوح كيفية إيجاد الميل لمماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران، مستعيناً بالتمثيل البياني الوارد في كتاب الطالب بداية الدرس.

المفاهيم العابرة:

عزّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عن طريق حوار تديره مع الطلبة، وتخبرهم فيه أنهم يدرسون الآن فرعاً من فروع الرياضيات يسمى التفاضل، وأن هذا الفرع قد طوّر في القرن السابع عشر الميلادي على يد نيوتن في إنجلترا، ثم ليبينز في ألمانيا؛ للمساعدة على وصف حركة الكواكب للأغراض الفلكية.

وجّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المناسبة عن ثلاثة علماء مشهورين بإسهاماتهم في علم التفاضل، ثم كتابة مقال من صفحة واحدة عنهم؟

مثال 1

- ارسم التمثيل البياني الوارد في هذا المثال على اللوح، مُحدّداً عليه المماس بصورة دقيقة.
- أخبر الطلبة أنه يمكن إيجاد ميل المماس بتطبيق قانون ميل المستقيم لأي نقطتين واقعتين على المماس.
- أعدّ حساب ميل المماس، ولكن باستعمال نقطتين أخريين لإثبات أن قيمة الميل لا تتغيّر بغض النظر عن النقطتين المُحدّدتين على المماس.
- اسأل الطلبة عن سبب ظهور إشارة الميل موجبة، وأرشدتهم إلى أن الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور x الموجب حادة.

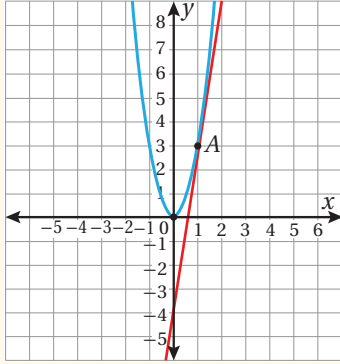
أخطاء مفاهيمية:

- في أثناء شرح المثال الأول، قد لا يُميّز الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة؛ لذا وضح لهم مفهوم كلّ منهما.

تنبيه: في أثناء شرح المثال الأول، لا تقبل من الطلبة إجابات تقريبية للميل؛ لأن المماس مرسوم بصورة دقيقة.

مثال إضافي

- يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى الاقتران $y = 3x^2$ عند النقطة $A(1, 3)$ ، جد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .



ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو: 6

التقويم التكويني

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (تحقق من فهمي) بعد كل مثال (فرديًا، أو ضمن مجموعات).
- تجول بين الطلبة مُرشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقَدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجة.

مثال 2

- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران، وارسم مماسًا تقريبيًا عند النقطة $A(3, 3)$.
- حدّد أي نقطتين على المماس، ثم جد الميل.
- أخبر الطلبة أن المماس غير مرسوم بدقة؛ ما يعني أن قيمة الميل غير دقيقة.

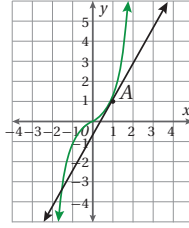
أحدّد نقطتين على المماس من الرسم: $B(0, -1)$ و $C(2, 3)$ ، ثمّ أحسب الميل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = 2$$

صيغة الميل

بالتعويض

بالتبسيط



إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو 2

أنتحق من فهمي

يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى

الاقتران $y = x^3$ عند النقطة $A(1, 1)$.
أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .

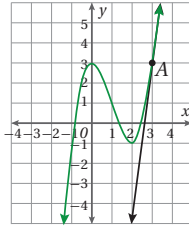
انظر الهامش

إذا لم يكن المماس مرسومًا عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها، فإنّه يُرسم باستعمال المسطرة. وبما أن الرسم اليدوي ليس دقيقًا، فإن ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلًا عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى، عندئذ يكون الناتج قيمة تقريبية لميل المنحنى.

مثال 2

أقدّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عند كل نقطة مما يأتي:

1 النقطة $A(3, 3)$



الخطوة 1: أرسّم مماسًا للمنحنى عند النقطة $A(3, 3)$ باستعمال المسطرة.

الخطوة 2: أحدّد نقطتين على المماس $A(3, 3)$ ، $C(2, -5)$ ، ثمّ أجد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 3}{2 - 3} = 8$$

صيغة الميل

بالتعويض

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو 8 تقريبًا.

إرشاد

استعمل شبكة المربعات لتمثيل المنحنيات بيانيًا بدقة.

أتعلّم

يكون ميل المنحنى عند نقطة عليه موجبًا إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية حادة مع محور x الموجب.

إجابة أنتحق من فهمي 1:

$$m = 3$$

إرشادات للمعلم

- وجّه الطلبة إلى استعمال الورق البياني لرسم التمثيل البياني للاقتران.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال برمجية جيو جبرا في المثال الثاني لعمل تمثيل بياني ومماس دقيق.

تنبيه: رُسم المماس بصورة تقريبية في المثال الثاني؛ لذا اقبل من الطلبة الإجابات التقريبية للميل.

- في الفرع الثاني من المثال الثاني، اسأل الطلبة: «ما سبب ظهور إشارة الميل سالبة؟»
- استمع لإجابات الطلبة، ثم ناقشهم فيها، مُبيناً أن المماس كَوّن زاوية منفرجة مع المحور x الموجب.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال قيمة الميل للنقطة $B(1, 1)$ وأي نقطة واقعة على المماس لكتابة معادلة المماس.
- ذكّر الطلبة أن الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي: $y = ax + b$ ، حيث تُمثّل a الميل، و b المقطع y للخط المستقيم.

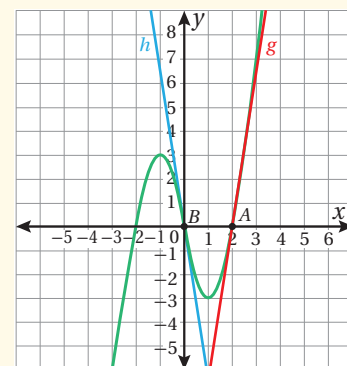
إرشادات للمعلم

قيمة الميل في الفرع الأول من المثال الثاني هي 9، وقيمة الميل في الفرع الثاني هي -3، ولكن اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك.

تنبيه: وضح للطلبة أن الميل لا يكون معرفاً إذا كان المماس موازياً لمحور الصادات؛ لأن فرق الصادات بين أي نقطتين واقعتين على المماس يساوي صفراً.

مثال إضافي

- قدّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 4x$ عند كلٍّ من النقطتين: $A(2, 0)$, $B(0, 0)$



الميل عند A هو 8 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).
الميل عند B هو -4 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

أتعلّم

يكون ميل المنحنى عند نقطة عليه سالباً إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية منفرجة مع محور x الموجب.

أفكّر

متى يكون ميل المنحنى صفراً؟

أندكر

معادلة المماس المارّ بالنقطة (a, b) هي: $y - b = m(x - a)$

2. النقطة $B(1, 1)$.

أرسم مماساً للمنحنى عند النقطة B ، ثمّ أجد نقطتين عليه $B(1, 1)$, $E(0, 3.8)$ ، ثمّ أجد الميل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3.8}{1 - 0} = -2.8$$

صيغة الميل

بالتعويض

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة B هو -2.8

3. أكتب معادلة المماس المارّ بالنقطة $B(1, 1)$

$$y - b = m(x - a) \\ y - 1 = -2.8(x - 1) \quad m = -1 \text{ و } B(1, 1) \\ y = 3.8 - 2.8x$$

معادلة المماس

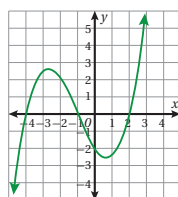
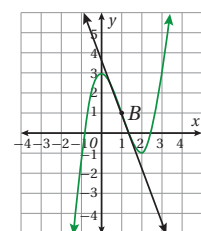
بتعويض النقطة $B(1, 1)$ و $m = -1$

بالتبسيط

أنتحق من فهمي

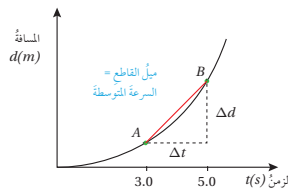
أقدّر ميل منحنى الاقتران المُمثّل بيانياً في الشكل المجاور عند كلٍّ من النقطتين: $A(-4, 0)$, $B(0, -2)$.

انظر الهامش



تعرّفت سابقاً أنّ منحنى المسافة - الزمن يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة ثابتة، وأنّه لا يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة متغيرة. تعرّفت أيضاً كيفية حساب السرعة المتوسطة $\bar{v}$ لجسم متحرك في فترة زمنية، وذلك بقسمة التغير في المسافة Δd على التغير في الزمن Δt :

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$



بالنظر إلى منحنى المسافة - الزمن المجاور، يتبيّن أنّ السرعة المتوسطة للسيارة من الثانية الثالثة إلى الثانية الخامسة تساوي ميل القاطع الذي يمرّ بالنقطتين A و B على المنحنى.

رموز رياضية

يُرمز إلى التغير في قيمة x بالرمز Δx

إجابة أنتحق من فهمي 2:

الميل عند النقطة $A(-4, 0)$ هو 4.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند النقطة $B(0, -2)$ هو -1.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

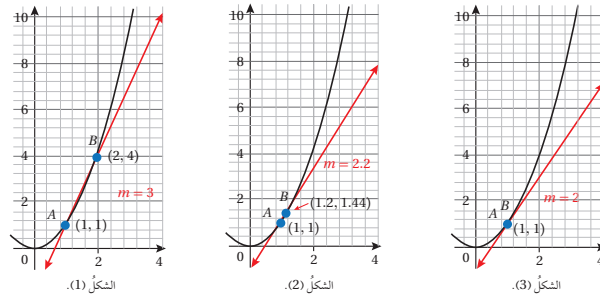
أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يعتقد الطلبة

من ذوي المستوى دون المتوسط أن الميل هو الفرق بين قيمتي y ؛ لذا أرشدهم إلى أن الميل هو ظل الزاوية التي يُكوّنها المستقيم مع محور x الموجب، وأنّه يساوي الفرق بين قيمتي y مقسوماً على الفرق بين قيمتي x .

- وضح للطلبة الفرق بين منحني المسافة- الزمن الذي يستعمل لحساب السرعة المتوسطة (ميل القاطع) والسرعة اللحظية (الميل عند نقطة واقعة على المنحني)، ومنحني السرعة- الزمن الذي يستعمل لحساب التسارع المتوسط (ميل القاطع) والتسارع اللحظي (الميل عند نقطة واقعة على المنحني).
- استعمل التمثيلات البيانية الواردة في الصفحة 61 من كتاب الطالب لتوضيح كيفية تقليص الفترة الزمنية للوصول إلى نقطة تكون عندها السرعة لحظية.
- مثل بيانياً الاقتران المعطى في المثال 3، ثم ارسم مماساً تقريبياً عند النقطة $A(3, 44.1)$ ، موضحاً للطلبة أن السرعة اللحظية عند نقطة هي ميل المماس لمنحني المسافة- الزمن عند تلك النقطة.
- أخبر الطلبة أنه ليس سهلاً رسم المماس في المثال 3
- أثر فضول الطلبة للبحث عن طريقة أخرى لإيجاد الميل على نحو أسهل وأدق.

تنبيه: الفت انتباه الطلبة إلى أن منحني المسافة - الزمن الوارد في المثال الثالث قد درسه في الفيزياء.

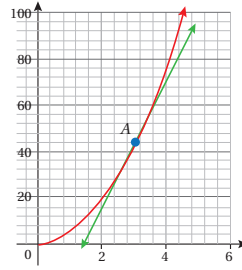
لكن السرعة المتوسطة لا تُقدّم معلومات كافية في كثير من المواقف، مثل تحديد سرعة سيارة لحظة مرورها أمام الرادار؛ فتلزم عندئذ **السرعة اللحظية** (velocity) التي يُمكن إيجادها بتقليص الفترة الزمنية للسرعة المتوسطة حتى تصبح نقطة (لحظة) كما في الأشكال التالية، فيصبح القاطع الذي يمرُّ بنقطتين على المنحني مماساً له عند نقطة واحدة.



بما أن ميل المماس يساوي ميل المنحني عند نقطة التماس، فإن السرعة اللحظية عند لحظة ما تساوي ميل منحني المسافة- الزمن عند تلك اللحظة.

مثال 3

يُمثل الاقتران $d(t) = 4.9t^2$ العلاقة بين المسافة المقطوعة d بالمتري والزمن t بالثانية (منحني المسافة- الزمن) لكرة تسقط سقوطاً حراً من وضع السكون. أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من سقوطها.



الخطوة 1: أعوض $t = 3$ بالاقتران لتحديد المسافة المقطوعة بعد 3 ثوانٍ، فتنتج النقطة $A(3, 44.1)$ التي تُمثل نقطة التماس.

الخطوة 2: أمثل منحني الاقتران $d(t) = 4.9t^2$ بيانياً، ثم أرسم المماس عند النقطة $A(3, 44.1)$.

فائدة

تُسمى المعادلة $d(t) = 4.9t^2$ غاليليو نسبةً إلى مكتشفها غاليليو غاليلي (1564-1642م). وهي تصف المسافة التي يقطعها جسم في أثناء سقوطه بصورة حرة من وضع السكون نحو سطح الأرض.

مثال إضافي

- يُمثل الاقتران $d(t) = 2t^2 - 1$ المسافة التي يقطعها جسم ما، حيث d المسافة المقطوعة بالمتري، و t الزمن بالثانية. قدر السرعة اللحظية بعد ثانيتين.
- أقبل من الطلبة الإجابات القريبة من الإجابة الصحيحة 8 m/s

أخطاء مفاهيمية:

قد يخلط الطلبة ذو المستوى دون المتوسط بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية؛ لذا وضح لهم الفرق بينهما.

- وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوّل بين الطلبة مُرشِّداً، ومُساعداً، ومُوجِّهاً، وقَدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختَر طالباً تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الخامسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطلِّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

الخطوة 3: أحمّد نقطتين على المماس $A(3, 44.1)$ و $B(2, 16)$ ، ثمّ أستعملهما لحساب الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$$

$$= 28.1$$

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة $A(3, 44.1)$ هو 28.1 تقريباً. ومنه، فإنّ سرعة الكرة اللحظية بعد 3 ثوانٍ هي 28.1 m/s

أفكر

إنّ حساب السرعة اللحظية برسم المماس وتحديد نقطتين عليه أمرٌ صعبٌ، فهل توجد طريقة أسهل وأدقّ لحساب الميل؟

أتحقّق من فهمي

يُمثّل الاقتران $d(t) = t^2 + t$ المسافة التي يقطعها جسم ما، حيث d المسافة المقطوعة بالمتّر، و t الزمن بالثانية. أقدّر السرعة اللحظية بعد 5 ثوانٍ، و 11 ثانية. انظر الهامش

أندرب وأحل المسائل

1 يُمثّل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى

اقتران عند النقطة $P(2.5, 1)$.

أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة P .

$$m = \frac{2}{3}$$

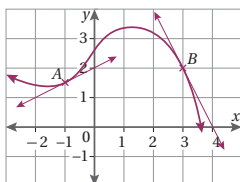
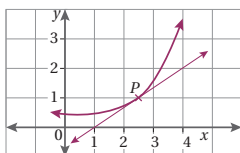
2 في الشكل المجاور، رُسم مماسان لمنحنى اقتران عند النقطتين

$A(-1, 1.5)$ و $B(3, 2)$.

أجد ميل منحنى الاقتران عند كلّ من A و B .

الميل عند A هو: $\frac{1}{2}$

الميل عند B هو: -2



إجابة أتحقّق من فهمي 3:

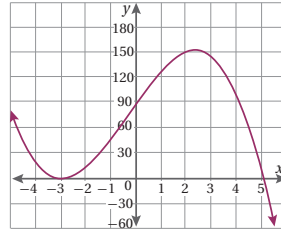
السرعة بعد 5 ثوانٍ هي 11 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

السرعة بعد 11 ثانية هي 23 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).



- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنع الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

الوحدة 6



3 أقدّر ميل منحنى الاقتران المُبين جانباً عند النقطة (2, 150)، والنقطة (4.5, 60).

الميل عند (2, 150) هو: 15

الميل عند (4.5, 60) هو: -75

أستعمل جدول القيم الآتي للإجابة عن الأسئلة (4-7):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

4 أمثل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانياً في الفترة $0 \leq x \leq 4$ انظر ملحق الإجابات

5 أرسّم مماساً لمنحنى الاقتران عند النقطة (3, 3.5) انظر ملحق الإجابات

6 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة (3, 3.5) تقريباً 1.9

7 ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفراً؟ (1, 1.5)

أنسخ جدول قيم الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ الآتي، ثم أستعمله لحل المسائل (8-10):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$	0	0.01	0.1	0.3375	0.8	1.5625	2.7

8 أرسّم منحنى الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ في الفترة $0 \leq x \leq 3$ انظر ملحق الإجابات

9 أرسّم مماساً لمنحنى الاقتران عند النقطة (2, 0.8) انظر ملحق الإجابات

10 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة (2, 0.8) تقريباً 1.2

أقدّر ميل منحنى كل اقتران مما يأتي:

أي إجابة قريبة من -4

11 $y = 4x^2 + 1$ عند النقطة (1, 5) أي إجابة قريبة من 8

12 $y = 3 + 2x^2$ عند النقطة (-1, 5) أي إجابة قريبة من 8

13 $y = 1 - x^2$ عند النقطة (-1, 0) أي إجابة قريبة من 2

14 $y = 5x^4 + 1$ عند النقطة (0, 1) أي إجابة قريبة من 2

15 $y = 9 - x^2$ عند النقطة (2, 5) أي إجابة قريبة من -4

16 $y = 8 - 2x$ عند النقطة (1, 6) أي إجابة قريبة من -2

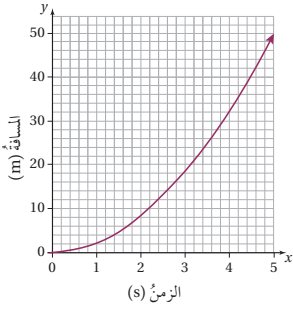
- وجّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للميل عند نقطة على المنحنى، مثل الرادار الذي يرصد سرعة السيارة لحظة مرورها أمامه.

- أكّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (1-4) من المشروع.
- وجّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.

- اشرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
 - « ما الفرق بين القاطع والمماس؟ »
 - « ما تعريف نقطة التماس؟ »
 - « هل يمكن رسم المماس بدقة؟ »
 - « متى تكون قيمة الميل موجبة أو سالبة أو صفرًا؟ »



درجات نارية: بدأت دراجة نارية الحركة من وضع السكون في مسار مستقيم. ويبيّن المنحنى المجاور المسافة التي قطعتها الدراجة في 5 ثوانٍ:

17 أرسّم نسخة من المنحنى، مستعينًا بالجدول الآتي: انظر ملحق الإجابات

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

18 أرسّم مماسًا للمنحنى عندما $x=2$. انظر ملحق الإجابات

19 أقدّر سرعة الدراجة بعد ثانيتين. أي إجابة قريبة من 8 m/s

20 أقدّر سرعة الدراجة بعد 4 ثوانٍ. انظر ملحق الإجابات

سيّارات: أراد مهندس أن يدرس تسارع سيّارة، فسجّل المسافة المقطوعة كلّ 3 ثوانٍ كما في الجدول الآتي، ثمّ استعمل المعادلة $x = at^2 + bt^2$ لتمثيل العلاقة بين قيم المسافة والزمن، حيث a و b عددين ثابتان:

الزمن t (ثانية)	0	3	6	9	12
المسافة x (متر)	0	26.19	95.04	177.39	224.64

21 أرسّم منحنى المسافة- الزمن. (21-24) انظر ملحق الإجابات

22 أقدّر السرعة عندما $t = 9$.

23 أجد قيمة كل من: a و b .

24 فيزياء: تمثّل المعادلة $s(t) = 3t - t^2$ المسافة التي يقطعها جسم بالمتر، حيث t الزمن بالثانية. أقدّر سرعة الجسم عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: أقدّر ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عند كلّ من النقاط الآتية، مبرّرًا إجابتني:

- نقطتا تقاطع المنحنى مع محور x .
- نقطة تقاطع المنحنى مع محور y .

26 مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتران من الدرجة الثانية، ثمّ أمثله بيانيًا، مُقدّرًا ميله عند نقطتين متعاكستين عليه: $(a,b), (-a,b)$. انظر ملحق الإجابات

✓ إرشاد: في السؤال 26:

- أخبر الطلبة أن المقصود بالنقطتين المتعاكستين اللتين ورد ذكرهما في السؤال هو النقطتان المتقابلتان على جانبي محور التماثل.
- اكتب على اللوح بعض الأمثلة على ذلك، مثل: $(1, 2), (-1, 2)$ على منحنى $y = x^2$

الاشتقاق
Differentiation



إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.

فكرة الدرس

المشتقة.

المصطلحات

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $f(t) = 80t - 5t^2$ ارتفاع منطادٍ بالمتر عن سطح الأرض بعد t ثانية من إطلاقه. ما سرعة المنطاد بعد 10 ثوانٍ من إطلاقه؟

تعرفنا في الدرس السابق كيفية إيجاد الميل أو تقديره، وهي طريقة ليست سهلة، وتحتاج إلى دقة عند رسم المماس. سأتعرف في هذا الدرس طريقة جبرية أسهل لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه من دون حاجة إلى رسم المماس.

عند إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند نقاط مختلفة عليه باستعمال طريقة ميل المماس التي تعرفناها سابقاً، وتنظيم القيم في الجدول الآتي، سألاحظ أن ميل المنحنى عند أي نقطة (x, y) يساوي قيمة x مضروبة في العدد 2؛ أي إن الميل m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4 = -2 \times 2$	$-2 = -1 \times 2$	$0 = 0 \times 2$	$2 = 1 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

وبالمثل، سأجد أن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ عند أي نقطة (x, y) على منحناه هو $m = 3x^2$. بوجه عام، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^n$ عند أي نقطة (x, y) عليه هو $m = nx^{n-1}$. **مشتقة** (derivative) الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند تلك النقطة، ويُرمز إليها بالرمز $f'(x)$.

رموز رياضية

تُستعمل الرموز $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, y' للتعبير عن المشتقة.

مفهوم أساسي

مشتقة اقتران القوة

- بالكلمات: عند اشتقاق الاقتران $f(x) = x^n$ ، فإن قوة x في المشتقة تكون أقل بواحد من قوة x في الاقتران الأصلي، وإن معامل x في المشتقة يساوي قوة x في الاقتران الأصلي.
- بالرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

نتائج الدرس

- يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود.
- يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.
- يجد الميل باستعمال المشتقة.
- يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.

التعلم القبلي:

- تقدير ميل المنحنى على نقطة واقعة عليه.
- تقدير السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

التهيئة

1

- ذكر الطلبة بما تعلموه في الدرس السابق، ثم اكتب على اللوح السؤال الآتي:
- « يتحرك جسم وفق المعادلة: $d = 16t - 2t^2$ ، حيث d المسافة بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما سرعة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء حركته؟
- أدر حواراً بين الطلبة عن طريقة إيجاد هذه السرعة وفق الطريقة المتبعة في الدرس السابق.
- دع الطلبة يحلوا السؤال ضمن مجموعات، وتابعهم في أثناء ذلك.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« ما ارتفاع المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ 300 m »
« كيف يمكن إيجاد سرعة المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ رسم منحنى المسافة-الزمن، ورسم مماس عندما $t = 10$ ، وحساب ميله. »
« هل توجد طريقة أخرى أسهل وأكثر دقة لإيجاد السرعة؟ نعم. »
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
« من يؤيد الإجابة؟ »
« من لديه إجابة أخرى؟ »
« اذكرها. »

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس طريقة سهلة لحساب الميل والسرعة والتسارع، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: كثير الحدود (polynomial)، والمشتقة (derivative)، والميل (slope).

- وطّف الشرح الوارد بداية الدرس من كتاب الطالب في إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند عدّة نقاط واقعه عليه، واستنتاج قاعدة مشتقة اقتران القوة.

المفاهيم العابرة:

أكّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، عزّز الوعي بالقضايا الإنسانية (الهوية) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية الهوية، وتأثيرها في الطاقة الإيجابية وزيادة درجة السعادة لديهم، ثم اسألهم:

- « ما هوايتك المفضلة؟ »
- « بماذا تشعر عند ممارسة هوايتك؟ »
- « أيكم لديه هوايات أخرى؟ »
- « اذكرها (إن وُجدت). »

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة بوجود عدّة رموز للمشتقة يمكن العثور عليها في الكتب المرجعية، أو المواقع الإلكترونية المتخصصة، ومن هذه الرموز: y' , $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{dy}{dx}$

تنبيه: قد لا يُميّز بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط اقتران كثير الحدود من غيره؛ لذا وضح لهم ذلك.

أخطاء مفاهيمية: قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أن المماس يُرسم للدائرة فقط؛ لذا الفت انتباههم إلى ذلك بتعريف المماس والقاطع ونقطة التماس.

مثال 1

- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة اشتقاق اقتران القوة.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

التقويم التكويني:

- وجه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال (فردياً، أو ضمن مجموعات).
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعدًا، ومُوجّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:
- 1) $f(x) = x^{25}$ $f'(x) = 25x^{24}$
 - 2) $f(x) = x^{77}$ $f'(x) = 77x^{76}$

إرشادات للمعلم

- في المثال الأول، قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط طرح واحد من الأس؛ لذا ذكّرهم دائماً بذلك.
- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط عند شرح قاعدة مشتقة مضاعفات لقوة بين المنحنيين؛ لأنهما رُسمَا معاً؛ لذا ارسم كلاّ منهما وحده، ثم ادمجهما على المستوى الإحداثي نفسه.

مثال 1

أجدُ مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

$$1) f(x) = x^8$$

$$f'(x) = 8x^{8-1}$$

$$f'(x) = 8x^7$$

قانونُ مشتقة القوة
بالتبسيط

$$2) f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^{5-1}$$

$$f'(x) = 5x^4$$

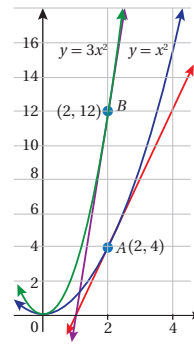
قانونُ مشتقة القوة
بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجدُ مشتقة كل اقتران ممّا يأتي: انظر الهامش

$$a) f(x) = x^7$$

$$b) f(x) = x^{11}$$



منَ المعلوم أن قيمَ y للاقتران $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثال قيم y التي تُناظرها للاقتران $g(x) = x^2$. وعليه، فإن ميلَ منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند النقطة $(2, 12)$ يساوي 3 أمثال ميلَ منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$. وهذا يعني أن مشتقة $(3x^2)$ تساوي 3 أمثال مشتقة (x^2) ؛ أي $(3 \times 2x)$.

بوجه عامّ، فإن مشتقة الاقتران $f(x) = ax^n$ ، حيث a عددٌ حقيقي، هي $f'(x) = a \times nx^{n-1}$.

مفهوم أساسي

قواعدُ أخرى للمشتقة:

- مشتقة مضاعفات القوة: إذا كان $f(x) = ax^n$ ، حيث n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالب، فإن $f'(x) = anx^{n-1}$.
- مشتقة الثابت: إذا كان $f(x) = c$ ، حيث c عددٌ حقيقي، فإن $f'(x) = 0$ ؛ أي إنَّ مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفراً.

أفكّر

هل يمكنُ استنتاج قاعدة لمشتقة الاقتران الخطي؟

تنبيه:

لا تطلب إلى الطلبة اشتقاق اقتران فيه أس سالب أو أس كسري؛ لأن المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة تعرّف اشتقاق كثير الحدود.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

$$a) f'(x) = 7x^6$$

$$b) f'(x) = 11x^{10}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$

$f'(x) = 8x^3$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

3 $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$

$f'(x) = -2$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

4 $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$

قانون مشتقة الثابت

أتحقق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران في ما يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

أتذكر

ميل الاقتران الثابت يساوي صفرًا.

مفهوم أساسي

مشتقة المجموع ومشتقة الفرق

• بالكلمات: مشتقة مجموع كثيري الحدود تساوي مجموع مشتقتيهما، ومشتقة الفرق بين كثيري الحدود تساوي الفرق بين مشتقتيهما.

• بالرموز: إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، حيث $g(x)$ و $h(x)$ كثيرا الحدود، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

- وظف الشرح الوارد في كتاب الطالب، والمقارنة بين ميل منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ وميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند عدة نقاط واقعة عليهما لها الإحداثي x نفسه؛ في استنتاج قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، مُبينًا أن ميل المماس عند A هو 2، وأن ميل المماس عند B هو 6
- يمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.
- استعمال هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.

أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في الاشتقاق؛ بنسيان الضرب في المعامل (في حال وجود معامل غير 1)؛ لذا الفت انتباههم إلى ذلك.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = -2x^8$ $f'(x) = -16x^7$

2 $f(x) = 9x$ $f'(x) = 9$

3 $f(x) = -1$ $f'(x) = 0$

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f'(x) = 60x^{11}$

b) $f'(x) = -56x^7$

c) $f'(x) = 3x^5$

d) $f'(x) = 0$

مثال 3

- استعمل صندوق (مفهوم أساسي) لشرح قاعدة اشتقاق مجموع كثيري حدود، ومشتقة الفرق.
- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:
- 1) $f(x) = 3 - 4x^2$ $f'(x) = -8x$
 - 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

مثال 4 فرع 1

- ذكّر الطلبة أن ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، مستعيناً بالشرح الوارد في بداية الدرس.
- جد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقة.
- قدر الميل برسم المماس إن توافر وقت لذلك.
- قارن بين طريقة تقدير الميل وإيجاد الميل باستعمال المشتقة من حيث دقة الناتج، وصعوبة الحل، والوقت المُستغرق في ذلك.

تنبيه: لا تقبل إجابات الطلبة التقريبية عند إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$1) f(x) = x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

قانون مشتقة مضاعفات القوى

بالتبسيط

$$2) f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$$

$$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$$

$$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$$

قانون مشتقة مضاعفات القوى

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد مشتقة كل من الاقترانين الآتيين: انظر الهامش

$$a) f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$$

$$b) g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$$

ألاحظ من الأمثلة السابقة أن مشتقة الاقتران هي اقتران جديد يمثل قيمة ميل منحنى الاقتران الأصلي عند قيم مختلفة؛ لذا يمكن إيجاد ميل منحنى الاقتران عند أي نقطة عليه، بتعويض الإحداثي x لتلك النقطة في اقتران المشتقة.

مثال 4

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ ، فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

1) ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$.

$$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$$

$$f'(x) = 6x - 18$$

$$f'(1) = 6(1) - 18$$

$$= -12$$

الاقتران الأصلي

باشتقاق الاقتران

بتعويض قيمة x

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$ هو -12 .

أتعلم

يُستعمل الرمز $f'(a)$ للتعبير عن مشتقة $f(x)$ عندما $x = a$.

إرشادات للمعلم

أثبت للطلبة بعد شرح المثال الثالث أن مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفراً، وذلك برسم التمثيل البياني لاقتران ثابت، وإيجاد الميل عند عدة نقاط واقعة عليه.

تنبيه: قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في فهم المثال الثالث؛ لذا اطلب إليهم اشتقاق كل حد وحده، ثم جمع المشتقات لكتابة مشتقة الاقتران كاملة.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$$a) f'(x) = x + 4$$

$$b) g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$$

2 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

$$f'(x) = 0 \quad \text{بمساواة المشتقة بالصفر}$$

$$6x - 18 = 0 \quad \text{بتعويض قيمة المشتقة}$$

$$6x = 18 \quad \text{بجمع 18 للطرفين}$$

$$x = 3 \quad \text{بقسمة الطرفين على 6}$$

إذن، قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً هي $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كان $9 - 25x + 5x^2 = f(x)$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل ممّا يأتي: انظر الهامش

(a) ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

(b) قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

تعرّفت سابقاً أنّ ميل منحنى المسافة - الزمن في لحظة ما (عند نقطة مُحدّدة) يساوي السرعة اللحظية عند تلك النقطة، وبصورة مشابهة فإنّ ميل منحنى السرعة - الزمن في لحظة ما يساوي التسارع اللحظي.

أستطيع الآن إيجاد كل من السرعة اللحظية، والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة بسهولة من دون حاجة إلى تقدير ميل المنحنى باستعمال المماس كما في الدرس السابق.

مثال 5: من الحياة

يُمثّل الاقتران $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسمٌ متحرّك، حيث t الزمن بالثانية:

1 أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران المسافة. أفترض أنّ اقتران السرعة هو $v(t)$.

$$v(t) = d'(t), \text{ إذن،}$$

المطلوب هو $v(3) = d'(3)$ ، التي تُمثّل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

$$d'(t) = 1.8t^2 - 1.5 \quad \text{مشتقة اقتران المسافة}$$

$$v(t) = d'(t) = 1.8t^2 - 1.5 \quad \text{تعريف اقتران السرعة}$$

$$v(3) = d'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5 \quad \text{بتعويض } t = 3$$

$$= 14.7 \text{ m/s} \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته هي 14.7 m/s .

معلومة

السرعة اللحظية تساوي مشتقة اقتران المسافة عند لحظة ما. التسارع اللحظي يساوي مشتقة اقتران السرعة عند لحظة ما.

مثال إضافي

إذا كان $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 6$ ، فجد كلّ ممّا يأتي باستعمال المشتقة:

1 ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $A(-2, 20)$

2 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.

3 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران 5

$$1) m = 5$$

$$2) x = 3, x = -\frac{5}{3}$$

$$3) x = -2, x = \frac{10}{3}$$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) $m = 5$

b) $x = -2.5$

مثال 5: من الحياة

- ذكّر الطلبة أنه يمكن إيجاد السرعة باستعمال منحنى المسافة - الزمن.
- نبّه الطلبة إلى أن القيمة تُمثّل السرعة اللحظية، لا السرعة المتوسطة.
- أخبر الطلبة أن اقتران التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.
- وضح للطلبة أن قيمة التسارع موجبة لأن السرعة تزداد.

تنبيه: في أثناء شرح المثال الخامس، لا تذكر للطلبة أن التسارع هو المشتقة الثانية لاقتران المسافة؛ لأنهم لا يعرفون ذلك في هذه المرحلة.

4 التدريب

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوّل بين الطلبة مُرشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقُدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطّلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

2. أجد تسارع الجسم بعد 5 ثواني من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة. أفترض أن اقتران التسارع هو $a(t)$.

$$a(t) = v'(t)$$

المطلوب هو $a(5) = v'(5)$ ، التي تُمثّل التسارع عندما $t = 5$.

$$a(t) = v'(t) = 3.6t$$

$$a(5) = 3.6(5)$$

$$a(5) = 18$$

مشتقة اقتران السرعة

بتعويض $t = 5$

بالتبسيط

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثواني من بدء حركته هو 18 m/s^2 .

أتحقق من فهمي

يُمثّل الاقتران $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسمٌ متحرّكٌ، حيثُ t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$. انظر الهامش

أتعلم

تكون قيمة التسارع صفرًا إذا كانت السرعة ثابتة.

أندرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

$$1. f(x) = -7 \quad f'(x) = 0 \quad 2. g(x) = 3x^9 \quad g'(x) = 27x^8 \quad 3. r(x) = -5x^2 \quad r'(x) = -10x$$

$$4. i(x) = x^4 - 3x \quad i'(x) = 4x^3 - 3 \quad 5. v(x) = x^2 + x + 1 \quad v'(x) = 2x + 1 \quad 6. t(x) = 6 - 2x + x^2 \quad t'(x) = -2 + 2x$$

أجد قيمة $f'(-2)$ في كل مما يأتي:

$$7. f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7 \quad -26.8 \quad 8. f(x) = x^{99} + \sqrt{2}x \quad 3.137435236 \times 10^{31} \quad 9. f(x) = \frac{7\pi}{18} \quad 0$$

$$10. \text{ أجد النقطة التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران } f(x) = 2x^2 - 10 \text{ هو } x = 3$$

يُمثّل الاقتران $d(t) = t^3 - 6t + 3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسمٌ متحرّكٌ، حيثُ t الزمن بالثانية:

$$11. \text{ أجد الاقتران } v(t) \text{ الذي يُمثّل سرعة الجسم في أي لحظة (ت) ثانية. } v(t) = 3t^2 - 6$$

$$12. \text{ أجد سرعة الجسم عندما } t = 3. \quad 21 \text{ m/s}$$

$$13. \text{ أجد الزمن } t \text{ عندما تكون السرعة } 6 \text{ m/s. } t = 2$$

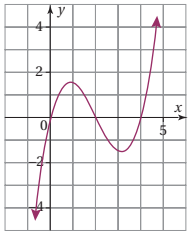
$$14. \text{ أجد الاقتران } a(t) \text{ الذي يُمثّل تسارع الجسم، حيثُ } t \text{ الزمن بالثانية. } a(t) = 6t$$

$$15. \text{ أجد تسارع الجسم عندما } t = 5. \quad 30 \text{ m/s}^2$$

إجابة أتحقق من فهمي 5:

السرعة: 15.1 m/s

التسارع: 5 m/s^2



- يُمثِّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:
- 16 أجد $f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$.
 17 أجد ميل منحنى الاقتران عند نقاط تقاطعه مع محور x .
 18 أجد على المنحنى النقطة التي يساوي عندها الميل 1.
 19 أجد على المنحنى النقطة التي يساوي عندها الميل 2.

20 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 3x^3 + 2$ عند النقطة التي يكون إحداثي x لها 1 $y - 5 = 9(x - 1)$

تقع النقطة $P(-2, b)$ على منحنى الاقتران $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$

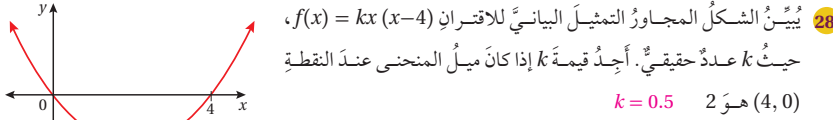
21 أجد قيمة b . $b = -10$
 22 أجد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفراً.
 $x = 1, x = -\frac{7}{9}$

إذا كانت قيمة الميل عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلة $y = x^3 - 2ax$ ، حيث a عدد ثابت، هي -12

23 أجد قيمة الثابت a . $a = 12$
 24 أجد قيمة ميل المنحنى عندما $x = 4$. 24

أجد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

25 $f(x) = 2x(x+1)$ $f'(x) = 4x + 2$
 26 $f(x) = (x+2)(x+5)$ $f'(x) = 2x + 7$
 27 $f(x) = (x+3)(x-3)$ $f'(x) = 2x$



مهارات التفكير العليا

29 تبرير: أثبت وجود نقطتين على منحنى الاقتران $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$ ، تكون عندهما مشتقة الاقتران تساوي 4 ، ثم أجد إحداثي هاتين النقطتين، مُبرراً إجابتي. انظر ملحق الإجابات

30 تحد: أجد قيم a, b إذا كان ميل منحنى الاقتران $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عند النقطة $(2, -3)$ هو صفراً.

31 تحد: أطلقت قذيفة رأسياً إلى الأعلى، فكان ارتفاعها عن سطح الأرض h بالمتري بعد t ثانية من إطلاقها $h(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما ارتفاع القذيفة عن الأرض عندما تكون سرعتها 98 m/s ؟ انظر ملحق الإجابات

- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة -ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- نبّه الطلبة عند حل السؤال 30 إلى أن النقطة المعطاة تُحقق معادلة المنحنى، وأن المشتقة عندئذٍ تساوي صفراً، وأنه يمكنهم تكوين معادلتين بالمتغيرين a, b وحلها.
- وجّه الطلبة عند حل السؤال 31 إلى إيجاد الزمن الذي تكون عنده السرعة 98 m/s ، ثم حساب ارتفاع القذيفة في تلك اللحظة.

5 الإثراء

- وجّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمشتقات.
- أكد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائماً.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة 5 من المشروع.
- وجّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- ا طرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
- « ما الفرق بين تقدير الميل برسم المماس وإيجاد الميل باستعمال المشتقة؟
- « أيهما أدق؟
- « هل يستحيل أحياناً رسم المماس؟

تنبيه على سؤال: وجّه الطلبة إلى فك الأقواس أولاً في الأسئلة (25-28)، ثم اشتقاق الاقترانات الناتجة.

نتائج الدرس



- يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.

التعلم القبلي:

- تعرف القطع المكافئ، وإيجاد رأس القطع المكافئ.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

التهيئة

1

- اكتب على اللوح أي اقتران تربيعي، مثل:
 $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- اسأل الطلبة عن أقل قيمة ممكنة لـ $f(x)$ قد تنتج عند التعويض في الاقتران.
- اسأل الطلبة عن إحداثيات رأس القطع المكافئ.
- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران التربيعي، ثم اسألهم:
- « ما أقل قيمة للاقتران؟ »
- اشرح على الطلبة السؤال الآتي:
- « هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقل قيمة وأكبرها لـ $f(x)$ ؟ »

القيم العظمى والقيم الصغرى

Maximum and Minimum Values



إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكثيرات الحدود.

نقطة حرجية، قيمة عظمى، قيمة صغرى.

تُمثل المعادلة $d = -16t^2 + 75t + 2.5$ المسافة (بالقدم) التي قطعتها كرة بعد ركلها، حيث t الزمن بالثانية. ما أقصى ارتفاع تصله الكرة؟

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

لغة الرياضيات

يشير مصطلح (النقطة الحرجية) إلى النقطة (x, y) ، ويشير مصطلح (القيمة الحرجية) إلى الإحداثي y للنقطة الحرجية.

أتعلم

يمكن استعمال برمجية جيو جبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى، وذلك باختيار Extremum من شريط الأدوات، ثم نقر المنحنى، فتظهر إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.

تُسمى النقطة التي يكون عندها ميل منحنى كثير الحدود صفراً **النقطة الحرجية** (critical point). في الشكل المجاور، A و B نقطتان حرجيتان؛ لأن ميل المنحنى عند كل منهما صفر.

تُسمى القيمة d في النقطة $A(c, d)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها موجبة، وعن يمينها سالبة، **القيمة العظمى المحلية** (local maximum)؛ لأنها أكبر من القيم المجاورة لها. وتُسمى القيمة h في النقطة $B(e, h)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها سالبة، وعن يمينها موجبة، **القيمة الصغرى المحلية** (local minimum)؛ لأنها أصغر من القيم المجاورة لها.

مثال 1

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجد).

الخطوة 1: أجد القيم الحرجية؛ أي قيم x التي ميل المنحنى عندها صفر.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

مشتقة الاقتران

بمساواة المشتقة بالصفر

بجمع 12 للطرفين

بقسمة الطرفين على 3

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

إذن، توجد نقطتان حرجيتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ و $x = 2$ ؛ لأن مشتقة الاقتران تساوي صفراً عند هاتين النقطتين.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« ما شكل المسار الذي تسلكه الكرة؟ قطع مكافئ.
« ماذا يحدث لسرعة الكرة بعد ركلها؟ تتناقص سرعتها حتى تصل إلى الصفر، ثم تهبط الكرة إلى الأرض.
« كيف يمكن معرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة هندسياً؟ رسم منحنى المسافة-الزمن، وملاحظة أقصى ارتفاع من الرسم.
« هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ نعم.
« كيف يمكن الاستفادة من درس الاشتقاق في معرفة أقصى ارتفاع؟ إيجاد سرعة الكرة بالاشتقاق، ثم جعل السرعة صفراً لإيجاد الزمن وتعويضه بمعادلة المسافة.
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
« من يؤيد الإجابة؟
« من لديه إجابة أخرى؟
« اذكرها.
وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومساءل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

- كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: المشتقة (derivative)، والميل (slope)، والنقطة الحرجة (critical point)، والقيمة الصغرى (minimum)، والقيمة العظمى (maximum).

التدريس

3

- وظّف الشرح الوارد قبل المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح معنى النقاط الحرجة، وكيفية إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى.

مثال 1

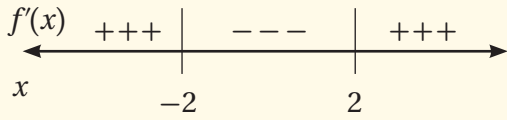
- استعمل المشتقة لإيجاد النقطتين اللتين يساوي عندهما الميل صفراً، مُبيناً للطلبة أنهما نقطتان حرجتان.
- اختبر إشارة الميل (المشتقة) حول كل نقطة، ثم صنفها إلى عظمى وصغرى باستعمال جدول الإشارات.
- استعمل التمثيل البياني لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى وصغرى، بوصف ذلك طريقة بديلة عن الإشارات.

يمكن اختبار إشارة المشتقة حول النقاط الحرجة في المثال الأول باستعمال خط الأعداد وحساب المشتقة عند عدد واحد في كل قسم من الأقسام التي قُسم إليها خط الأعداد لتحديد إشارتها:

$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15,$$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12 = 0 - 12 = -12,$$

$$f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$$



تنبيه:

- في هذا الدرس، يتعيّن على الطلبة معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى من دون تصنيفها إلى محلية ومطلقة؛ فلا تذكر لهم ذلك.
- لا تذكر للطلبة النقطة التي لا تكون عندها مشتقة الاقتران موجودة بوصفها نقطة حرجة؛ لأن المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة هو كثير الحدود.

إرشادات للمعلم

بعد شرح المثال الأول، أثبت للطلبة أنه لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الثابت والاقتران الخطي، وذلك بحل مثال على كلٍّ منهما على اللوح، مستعيناً برسم التمثيل البياني لكل اقتران.

التقويم التكويني:

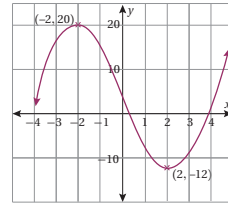
- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال (فردياً، أو ضمن مجموعات).
- تجوّل بين الطلبة مُرشداً، ومُساعداً، ومُوجّهاً، وقُدّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

الخطوة 2: لتحديد أيّ النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، اختبر إشارة ميل المنحنى حول كلٍّ منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارة الميل	موجبة		سالبة

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارة الميل	سالبة		موجبة

تغيّر إشارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $x = -2$ ، هي $f(-2) = 20$ ، وتغيّر إشارة ميل المنحنى حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة صغرى عندما $x = 2$ ، هي $f(2) = -12$.

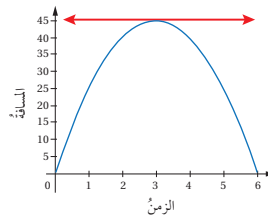


طريقة بديلة: يُمكن أيضاً تحديد إذا كان يوجد عند النقطة الحرجة قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران بتمثيل منحنى الاقتران بيانياً. فعند تمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانياً في الشكل المجاور، فإن النقطة $(-2, 20)$ تبدو أعلى من النقاط المجاورة لها على المنحنى، وبذلك تساوي القيمة العظمى 20، وتبدو النقطة $(2, -12)$ أخفض من النقاط المجاورة لها، وبذلك تساوي القيمة الصغرى -12.

أنظر الهامش

أتحقق من فهمي

أجد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إن وُجدت).



يُمثل الإحداثي الصادي y للنقطة التي يتغيّر عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمنحنى المسافة-الزمن؛ لأن مشتقة المنحنى عند تلك النقطة تساوي صفراً (المماس أفقي)؛ لذا يُمكن استعمال المشتقة لتحديد النقطة التي يبلغ عندها الجسم أقصى ارتفاع.

أفكر

لماذا لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الثابت؟ لماذا لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى للاقتران الخطي الذي مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية؟

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين مفهوم النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؛ لذا بيّن لهم الفرق بينها، مُذكّراً إياهم أن كل نقاط القيم القصوى هي نقاط حرجة، وأن كل نقطة حرجة ليست نقطة قيمة قصوى؛ إذ يجب أن تغيّر إشارة المشتقة (الميل) حول النقطة الحرجة لتكون نقطة قيمة قصوى.
- قد يخطئ بعض الطلبة في اختبار الإشارة حول النقطة الحرجة عند تصنيفها إلى عظمى وصغرى بالتعويض في الاقتران؛ لذا صحّح لهم ذلك، مُبيّناً أنه يجب التعويض في المشتقة التي تُمثل الميل.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = 11$

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$

- جد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران $f(x) = 3x^2 - x$ (إن وُجدت) باستعمال المشتقة.
- القيمة الصغرى للاقتران عندما $x = 0$ هي $f(0) = 0$ ، والقيمة العظمى له عندما $x = 2$ هي $f(2) = 4$

مثال 2: من الحياة

- وظّف التمثيل البياني الوارد بعد المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح أقصى ارتفاع قد يصل إليه الجسم قبل البدء بشرح المثال الثاني.
- ناقش الطلبة في المثال الثاني؛ باشتقاق الاقتران، ومساواة المشتقة بالصفر، وإيجاد النقطة الحرجة، واختبار إشارة المشتقة حولها للتأكد أنها عظمى، ثم التعويض في الاقتران لإيجاد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

تنويع التعليم:

يمكن شرح المثال الثاني عن طريق رسم التمثيل البياني للاقتران، وإيجاد أكبر قيمة تُمثّل أقصى ارتفاع تصله الكرة.

إرشادات للمعلم

استعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى بنقر أيقونة ، ونقر المنحنى بعد رسم منحنى الاقتران.

مثال إضافي

يُمثّل الاقتران $h(t) = 6 + 4t - t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من ركلها:

- جد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من ركلها.
2 m/s
- جد أقصى ارتفاع تصله الكرة.
10 m

مثال 2: من الحياة

يُمثّل الاقتران $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من ركلها:

1 أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها.

يُمثّل الاقتران المُعطى $h(t)$ ارتفاع الكرة (المسافة الرأسية). ومن المعلوم أن مشتقة الاقتران المسافة تساوي اقتران السرعة. لإيجاد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ، أعرّض $t = 3$ في $h'(t)$:

$$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$$

$$h'(t) = 25 - 10t$$

$$h'(3) = 25 - 10(3)$$

$$= -5$$

إذن، سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ هي -5 m/s

2 أجد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

يُمثّل أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة قيمة عظمى للاقتران $h(t)$. لإيجاد القيمة العظمى، أحدد القيم التي تُحقّق المعادلة $h'(t) = 0$:

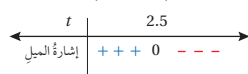
$$h'(t) = 25 - 10t$$

$$25 - 10t = 0$$

$$25 = 10t$$

$$t = 2.5$$

تغيّر إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $t = 2.5$



إذن، تصل الكرة أقصى ارتفاع عندما $t = 2.5$ ، وقيمة هذا الارتفاع هي $h(2.5)$:

$$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$$

$$= 32.25$$

إذن، أقصى ارتفاع تصله الكرة هو 32.25 m

أنتحق من فهمي

يُمثّل الاقتران $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاع حجر عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من قذفه

إلى الأعلى: انظر الهامش

- (a) أجد سرعة الحجر بعد ثانيتين من قذفه. (b) أجد أقصى ارتفاع يصله الحجر.

إجابة أنتحق من فهمي 2:

- a) 0 m/s b) 20 m

مثال 3: من الحياة

- أخبر الطلبة أنه توجد عدّة تطبيقات للقيم العظمى والقيم الصغرى، غير السرعة والتسارع، مثل إيجاد أكبر مساحة.
- بين للطلبة أن الاقتران المعطى يُمثل المساحة عن طريق إيجاد العلاقة بين الأبعاد والمحيط.
- وضح للطلبة أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عند نقطة القيمة العظمى لاقتران المساحة.
- أكّد للطلبة أنه يجب اختبار إشارة المشتقة حول النقطة الحرجة؛ لتصنيفها إلى عظمى وصغرى.

الإثراء

وجّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن أمثلة حياتية مشابهة للمثال الثالث.

مثال إضافي

لدى مُزارع 36 m من السياج، أراد أن يُسَيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا:

- 1 بين أن الاقتران $A(x) = x(18-x)$ يُمثل مساحة الحظيرة.

$$2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18 - x$$

$$A(x) = x(18-x)$$

- 2 جد $A'(x)$

$$A(x) = 18x - x^2$$

$$A'(x) = 18 - 2x$$

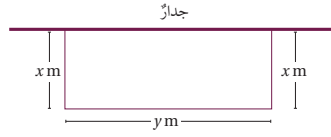
- 3 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$$x = 9 \text{ m}$$

إذا مثل الاقتران $f(x)$ مساحة منطقة ما، فإنّ القيمة الكبرى للمساحة تساوي القيمة العظمى للاقتران، والقيمة الصغرى للمساحة تساوي القيمة الصغرى للاقتران.

مثال 3: من الحياة

جدار: لدى مُزارع 32 m من السياج، أراد أن يُسَيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:



- 1 أ بين أن الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يُمثل مساحة الحظيرة.

$$x + y + x = 32 \text{؛ لذا، فإن } y = 32 - 2x$$

إذن، طول الحظيرة $y = 32 - 2x$ ، ومساحتها $x(32 - 2x)$ مترًا مربعًا.

- 2 أجد $A'(x)$

$$A(x) = x(32-2x)$$

اقتران المساحة

$$A(x) = 32x - 2x^2$$

بتوزيع الضرب على الطرح

$$A'(x) = 32 - 4x$$

مشتقة اقتران المساحة

- 3 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$$\text{لإيجاد قيمة } x \text{، أ حلّ المعادلة } A'(x) = 0:$$

$$32 - 4x = 0$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$32 = 4x$$

بجمع $4x$ للطرفين

$$x = 8$$

بقسمة الطرفين على 4

أجد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة.

أعوّض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يُمثل مساحة الحظيرة.

$$A(8) = 8(32-2(8))$$

بتعويض $x = 8$ في $A(x)$

$$= 128$$

بالتبسيط

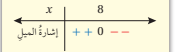
إذن، أكبر مساحة للحظيرة 128 m^2 ، وهي تنتج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m

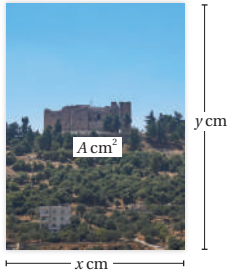
أندكّر

تُسمّى قيم x التي تُحقّق المعادلة $f'(x) = 0$ قيمًا حرجية للمنحنى الاقتران $f(x)$.

تنبيه

تتغيّر إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة من يسار إلى يمين $x = 8$ ؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $x = 8$





يُبين الشكل المجاور صورةً مستطيلة الشكل، محيطها

72 cm، ومساحتها $A \text{ cm}^2$: انظر الهامش

(a) أبين أن الاقتران $A(x) = 36x - x^2$ يُمثل مساحة الصورة.

(b) أجد $A'(x)$.

(c) أستخدم المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الصورة أكبر ما يمكن.

(d) أجد أكبر مساحة ممكنة للصورة.

بنى عز الدين أسامة قلعة عجلون أحد قادة صلاح الدين الأيوبي، وذلك عام 1184م/580هـ. تماز هذه القلعة بمتانة بنائها، وموقعها الاستراتيجي المثل.

أدرب وأحل المسائل

أستخدم المشتقة لإيجاد القيم العظمى والصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وُجدت): (1-10) انظر ملحق الإجابات

1 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2 $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3 $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4 $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5 $f(x) = 18x^2 - x^4$

6 $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7 $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8 $f(x) = 3x^2$

9 $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثل الاقتران $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاع سهم عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من إطلاقه:

11 أجد سرعة السهم بعد 3 ثوانٍ. -9.8 m/s

12 أستخدم المشتقة لإيجاد أقصى ارتفاع يصله السهم. 20.8 m

13 يُمثل الاقتران $A(x) = x(50-x)$ مساحة مستطيل، حيث x الطول بالمتري. ما أكبر مساحة ممكنة للمستطيل؟ 625 m^2

- وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوّل بين الطلبة مُرشداً، ومُساعداً، ومُوجّهاً، وقُدّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالباً تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السابعة عشرة من كتاب التمارين، مُحدّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطلّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابة أتحدى من فهمي 3:

a) $2x + 2y = 72 \Rightarrow y = 36 - x$

$A(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$

b) $A'(x) = 36 - 2x$

c) 18

d) 324 cm^2

- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

الإثراء

5

- ا طرح على الطلبة السؤال الآتي:
- « مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45، جد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في العدد الكبير أكبر ما يمكن. »

10,15

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (6-8) من المشروع.
- وجّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

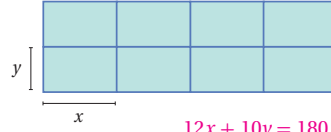
الختام

6

- ا طرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
- « ما الفرق بين النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؟ »
- « ما الخطوات الواجب اتباعها لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لاقتران؟ »
- اطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (مسألة اليوم).

14 للاقتران $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاث نقاط حرجية. أجد إحداثيات هذه النقاط، مُصنّفاً إياها إلى عظمى، وصغرى. (0, 3): صغرى، (0.5, 3.4375): عظمى، (2, -5): صغرى.

15 أجد قيمة الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمة حرجية عندما $x = 3$. $k = -\frac{1}{6}$



لدى مزارع 180 m من الشباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها x متراً، وعرضها y متراً كما في الشكل المجاور:

16 أبين أن العلاقة بين x و y هي $y = 18 - 1.2x$ $12x + 10y = 180 \Rightarrow y = 18 - 1.2x$

17 أبين أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يمثل المساحة الكلية للحظائر. $A(x) = 2(18 - 1.2x)(4x) = 144x - 9.6x^2$

18 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن. $x = 7.5$

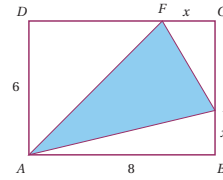
19 أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر. 540 m^2

20 برهان: أثبت أن الاقتران $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليس له قيم حرجية. $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$ لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة؛ لأن مميزها سالب.

مهارات التفكير العليا

21 تبرير: أجد قيمتي الثابتين a, b إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمة حرجية عند النقطة (1, 3)، ثم أجد نوع القيمة الحرجية، مُبرراً إجابتي. انظر ملحق الإجابات

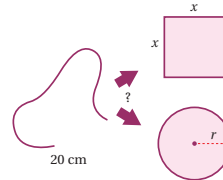
يُبين الشكل المجاور المثلث AFE الذي تقع رؤوسه على أضلاع المستطيل $ABCD$:



22 اعتماداً على القياسات المعطاة في الشكل، أبين أن الاقتران

$H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يمثل مساحة المثلث AFE . انظر ملحق الإجابات

23 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة المثلث AFE أصغر ما يمكن. $x = 4$

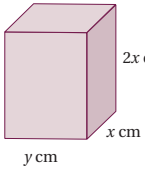


24 تحدّد: سلكك طوله 20 cm، يرادّ قصّه لعمل مُربّع ودائرة. أجد موقع القصّ بحيث يكون مجموع مساحتي المُربّع والدائرة أصغر ما يمكن. انظر ملحق الإجابات

اختبار نهاية الوحدة

8 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 4x^3 + 2$ عند النقطة التي إحداثي x لها -1

عند النقطة التي إحداثي x لها -1 انظر ملحق الإجابات



يُبين الشكل المجاور قالباً يُستعمل

لصنع كُبيْن البناء، وتبلغ مساحة

سطحه الكلية 600 cm^2 :

9 أبين أن الاقتران

انظر ملحق الإجابات

$V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يُمثل حجم القالب.

10 أستخدم المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل الحجم

أكبر ما يمكن. $x = \sqrt{50}$

11 أجد أكبر حجم ممكن للقالب. 942.8 cm^3

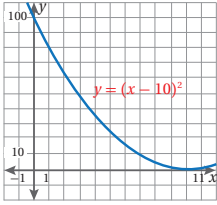
12 يُمثل الاقتران $d(t) = t^2 + 1$ المسافة (بالمتر) التي

يقطعها جسم متحرك، حيث t الزمن بالثانية. أجد السرعة

بعد ثلثيتين، ثم أجد الزمن t عندما تبلغ السرعة 6 m/s

4 m/s $t = 3 \text{ s}$

أطلقت سيارة سميّة جرس إنذار لتعبئة الوقود، فتوجّهت إلى محطة الوقود.



يُمثل المنحنى في الشكل

المجاور العلاقة بين

الزمن والمسافة المُتبقية

حتى وصلت سميّة إلى

المحطة:

13 أجد سرعة السيارة بعد ثلثيتين من انطلاق جرس تعبئة

الوقود. -16 m/s

14 أجد سرعة السيارة بعد 10 ثوانٍ. 0 m/s

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 ميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x - 1$ عند النقطة $x = 5$ هو:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -1 d) 0

2 إذا كان $f(x) = x(2x + 1)$ ، فإن $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x + 1$

c) $2x^2 + x$ d) $4x + 1$

3 قيمة x التي عندها قيمة عظمى للاقتران

$f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هي:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$

c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثل الاقتران $d(t) = t^2$ المسافة التي يقطعها جسم

متحرك، حيث t الزمن بالثانية، فإن سرعة الجسم عندما

$t = 1$ هي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

5 أكبر قيمة لسرعة جسم متحرك يسير بسرعة تُعطى

بالاقتران $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ ، حيث t الزمن

بالثانية، هي:

a) 3 b) 4

c) 8 d) 9

6 إذا كان $h(x) = 2x^2 + x$ ، فأجد $h'(x)$ ، ثم أبين أن

$x(1 + h'(x)) = 2h(x)$. انظر ملحق الإجابات

7 إذا وقعت النقطة $P(-1, c)$ على منحنى الاقتران

$f(x) = 5x^2 + 2$ ، فأجد قيمة c ، ثم أجد إذا كان الميل

موجباً أو سالباً عند النقطة P . $c = 7$

الميل سالب.

التقويم الختامي:

• راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.

• وزّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إلى أفراد كل

مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم

أمام زملاء.

• عيّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجباً منزلياً، ثم

ناقشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.

• الفت انتباه الطلبة إلى أن الأسئلة (31-35) وردت

ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

تدريب على الاختبارات الدولية

يتقدم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنة بالدول الأخرى التي يتقدم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدم أيضاً طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية - وفق هذا البرنامج - يُعبر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات ورسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علماً بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعين عليك - عزيزي المعلم - تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمن امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

اختبار نهاية الوحدة

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

15 $f(x) = 2\pi^3$ 16 $f(x) = x^8$ انظر (15-20)

17 $f(x) = -3x^4$ 18 $f(x) = x$ ملحق الإجابات

19 $f(x) = 1 - 2x$ 20 $f(x) = 4 - 5x^2 + x^3$

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

21 $f(x) = 17$ 22 $f(x) = 5x + 4$ انظر (21-24)

23 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 24 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ ملحق الإجابات

25 تمثل العلاقة $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة

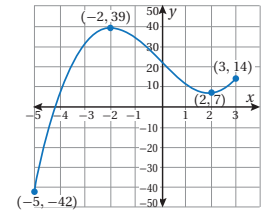
(بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك، حيث t الزمن بالثانية.

ما الزمن الذي تساوي عنده السرعة 14.7 m/s ؟

26 أجد قيمة الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = kx - x^2$

نقطة حرجة عندما $x = -1$ $k = 3$

اعتماداً على التمثيل البياني الآتي:



27 أحدد الفترة (الفترة) التي يكون عندها ميل المنحنى

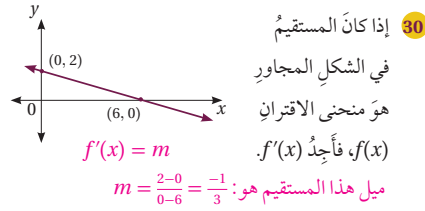
موجباً. الفترتان: $(-\infty, -2)$ و $(2, \infty)$

28 أحدد الفترة (الفترة) التي يكون عندها ميل المنحنى

سالباً. $(-2, 2)$

29 أحدد النقطة (النقاط) التي يكون عندها ميل المنحنى

صفرًا. النقطتان: $(-2, 39)$ و $(2, 7)$



30 إذا كان المستقيم

في الشكل المجاور

هو منحنى الاقتران

$f(x)$ ، فأجد $f'(x)$.

ميل هذا المستقيم هو: $m = \frac{2-0}{0-6} = -\frac{1}{3}$

تدريب على الاختبارات الدولية

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

31 جميع قيم x التي عندها قيم عظمى أو قيم صغرى

للاقتران $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هي:

a) $-1, 0, 1$ b) $-1, 0$

c) $0, 1$ d) $-1, 1$

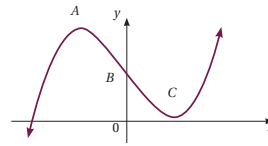
32 عدد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = (x-3)^9$ هو:

a) 1 b) 2 c) 8 d) 9

يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 17$

الذي له قيمة عظمى عند النقطة A، وقيمة صغرى عند النقطة

C، ويقطع محور y عند النقطة B:



33 أجد $f'(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 12$

34 أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة B. -12

35 أجد إحداثي كل من النقطتين A و C.

$A = (-2, 33)$

$B = (2, 1)$

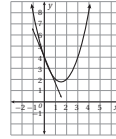
تنبيه للسؤال 32:

ورد خطئ مطبعي في كتابة اقتران هذا السؤال والاقتران الصحيح

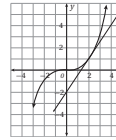
هو $f(x) = (x-3)^2$

الدرس 1

تقدير ميل المنحنى



1 يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $y = x^2 - 3x + 4$ عند النقطة $A(0, 4)$. أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة A . -6، 2، أو إجابة قريبة منها.



2 يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $y = \frac{1}{8}x^3$ عند النقطة $A(2, 1)$. أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة A . $m = \frac{3}{2}$

3 أقدّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2, 3)$.

4 أقدّر ميل منحنى الاقتران $y = 4x - 3x^2$ عند النقطة $(2, -4)$.

5 يُمثل الاقتران $d(t) = 40t - 16t^2$ المسافة التي يقطعها جسم مُتحرك، حيث d المسافة المقطوعة بالمتر، و t الزمن بالثواني. أقدّر سرعة الجسم المحظية بعد ثانيتين. انظر رسوم الطلبة، واقل الإجابات القريبة من -24

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-2	1	2	1

أرسم منحنى الاقتران $f(x)$ في الفترة $2 \leq x \leq -2$

بأستعمال جدول القيم المجاور:

6 أرسم مماساً لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

7 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(2, 1)$. -2 (اقل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

8 ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفراً؟ $(1, 2)$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

أرسم منحنى الاقتران $f(x)$ في الفترة $3 \leq x \leq -1$

بأستعمال جدول القيم المجاور:

9 أرسم مماساً لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

10 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(2, 1)$. 2 (اقل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

11 ما إحداثيات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندها صفراً؟ $(1, 0)$

الدرس 2

الاشتقاق

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = -\frac{7}{3}$ $f'(x) = 0$

2 $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$

3 $f(x) = 3x^{41}$ $f'(x) = 123x^{40}$

4 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$

5 $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ $f'(x) = 2x + 2$

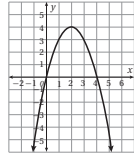
6 $f(x) = \frac{8}{5}$ $f'(x) = 0$

7 $f(x) = 3.2x$ $f'(x) = 3.2$

8 $f(x) = -x^{64}$ $f'(x) = -64x^{63}$

9 $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$ $f'(x) = 21x^2 + 12x - 1$

10 $f(x) = (x - 5)^2$ $f'(x) = 2x - 10$



أستعمل التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x) = 4x - x^2$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

11 أجد $f'(x)$. $f'(x) = 4 - 2x$

الميل عند (0, 0) هو: 4، وعند (4, 0) هو: -4

12 أجد ميل منحنى الاقتران عند تقاطع تقاطعه مع محور x

13 أجد ميل منحنى النقطة التي يكون عندها الميل 1 $(1.5, 3.75)$

14 أجد ميل منحنى النقطة التي يكون عندها الميل -2 $(3, 3)$

أجد قيمة $f'(-1)$ في كل مما يأتي:

15 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $f'(-1) = -5$

16 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ $f'(-1) = 5$

17 أجد النقطة التي يكون عندها ميل منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي -9 $(-2, 20)$

إذا كان $f(x) = x^2 + 5x + 7$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

18 ميل المنحنى $f(x)$ عندما $x = 2$ 9

19 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى $f(x)$ يساوي 0 -2.5

20 تُمثل العلاقة $d(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم مُتحرك، حيث t الزمن بالثواني.

أجد سرعة الجسم عندما $t = 2$ 7 m/s

21 إذا كان $f(x) = ax^n + b$ ، حيث a ، b عدنان حقيقيان، و n عدد صحيح غير سالب، فأجد $f'(x) = nax^{n-1}$

القيم العظمى والقيم الصغرى

الدرس 3

أجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وُجدت): 1-10 انظر ملحق الإجابات

1 $f(x) = 2$

2 $f(x) = -3$

3 $f(x) = 2x - 1$

4 $f(x) = 5x + 3$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6 $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

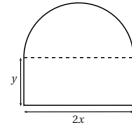
9 $f(x) = x^3(4 - x)$

10 $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أجد قيمة الثابت k ، علماً بأن للاقتران $f(x) = kx^2 + x$ قيمة حرجة عندما $x = 1$ $k = -0.5$

12 أجد العددين الموجبين اللذين مجموعهما 150، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن. $x = 75, y = 75$

13 يُمثل الاقتران $A(x) = x(9 - x)$ مساحة غرفة مستطيلة في مُخطّط أبعده المهندسة شفاء، حيث x الطول بالمتر. أجد أكبر مساحة ممكنة للغرفة. 20.25 m^2



يُمثل الشكل المجاور حديقة محيطها 80 m، وهي على شكل مستطيل طوله $2x$ متراً، وعرضه y متراً، ويجانبه نصف دائرة.

14 أبتن أن الاقتران $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثل مساحة الحديقة.

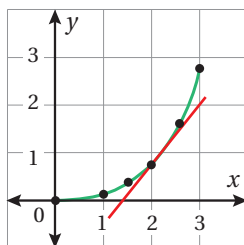
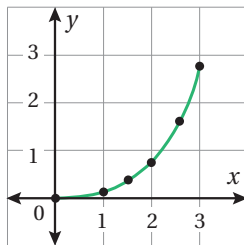
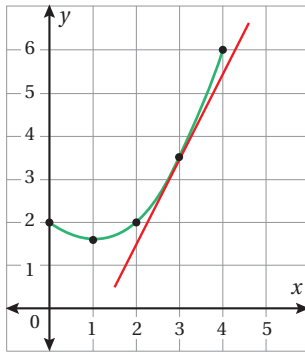
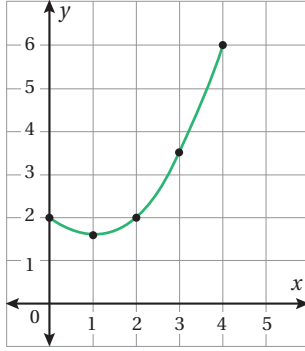
15 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحديقة أكبر ما يمكن. $x = 11.202$

16 أجد أكبر مساحة ممكنة للحديقة. 448.08 m^2

17 أجد قيمتي الثابتي a, b إذا كان للاقتران $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمة حرجة عند النقطة $(-3, -4)$ ، ثم أجد نوع القيمة الحرجة، مُبرراً إجابتي. انظر ملحق الإجابات

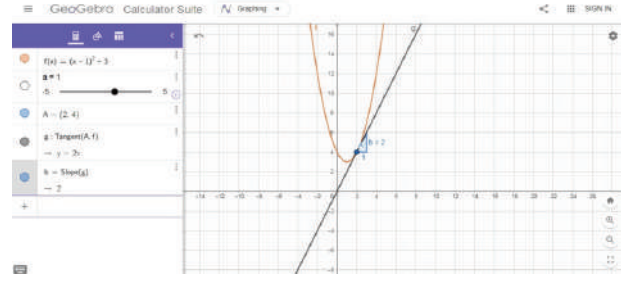
الدرس 1:

(4)



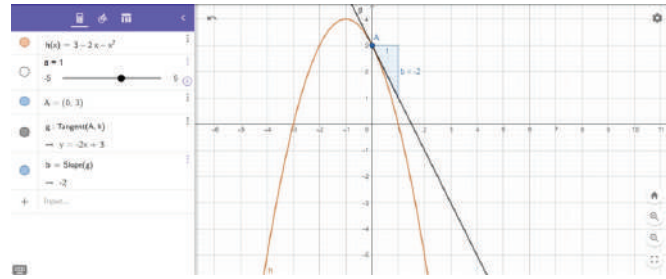
معمل برمجية جيوجبرا:

(1)



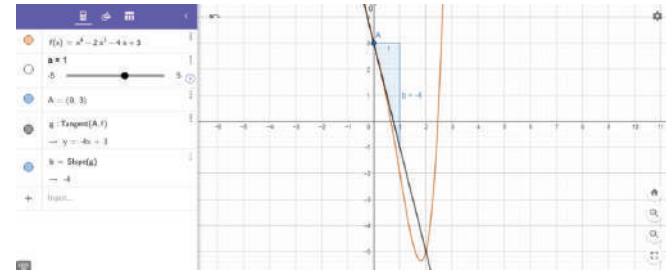
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1$ ، وصفرًا عندما $x = 1$ ، وموجبًا لكل $x > 1$

(2)



يكون الميل موجبًا لكل $x < -1$ ، وصفرًا عندما $x = -1$ ، وسالبًا لكل $x > -1$

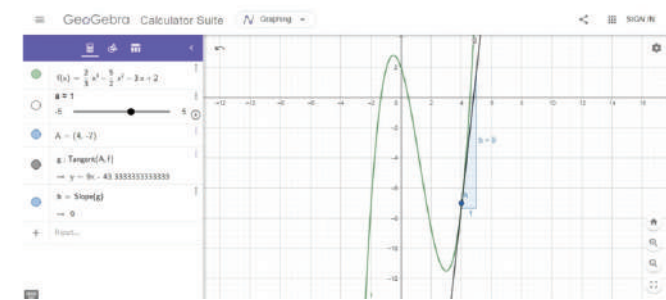
(3)



يكون الميل سالبًا لكل $x < 1.81$ ، وصفرًا عندما $x = 1.81$ ، وموجبًا لكل $x > 1.81$

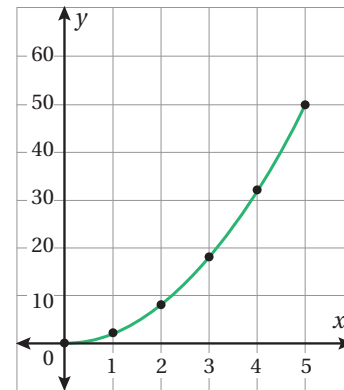
(9)

(4)

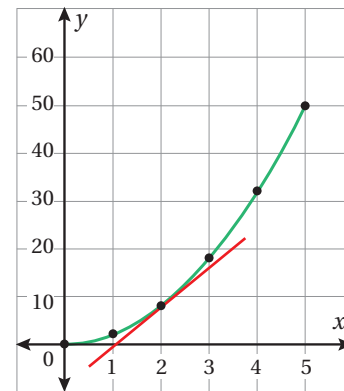


يكون الميل سالبًا لكل $-0.5 < x < 3$ ، وصفرًا عندما $x = -0.5$ ، وموجبًا لكل $x > 3$ ، ولكل $x < -0.5$

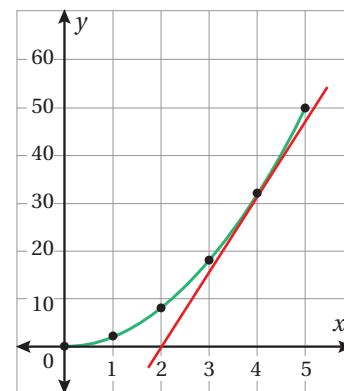
(17)



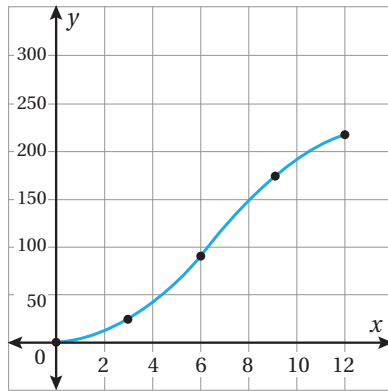
(18)



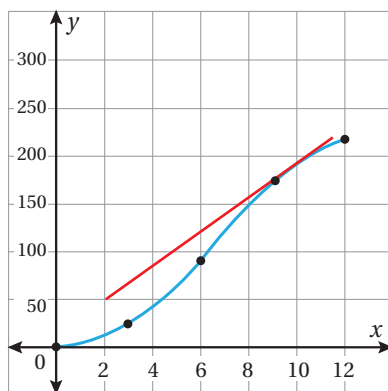
(20)



(21)



(22) أي إجابة قريبة من 18.75 m/s



(23)

بتعويض (3, 26.19) في المعادلة ينتج: $9a + 81b = 26.19$ وبتعويض (6, 95.04) في المعادلة ينتج: $36a + 1296b = 95.04$

وبضرب المعادلة الأولى في (-4) وجمعها مع الثانية ينتج:

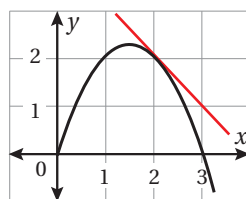
$$b = -0.01, 972b = -9.72$$

وبتعويض قيمة b في المعادلة الأولى نجد أن: $a = 2.82$

(24)

ارسم المنحنى ومماساً عند (2, 2)، مُقَدَّرًا ميله.

(اقبل من الطلبة أي إجابة قريبة من -1).



الدرس 3:

- (1) $(2, -1)$: صغرى
- (2) $(-3, -12)$: صغرى
- (3) $(2.5, 7.25)$: عظمى
- (4) $(-3, 40.5)$: عظمى
- (5) $(2, -22)$: صغرى
- (6) $(0, 0)$: صغرى
- (7) $(-3, 81)$: عظمى
- (8) $(3, 81)$: عظمى
- (9) $(-1, 8)$: عظمى
- (10) $(1, 0)$: صغرى
- (11) $(-2, 12)$: عظمى
- (12) $(2, -20)$: صغرى
- (13) $(0, 0)$: صغرى
- (14) $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 5.09)$: عظمى
- (15) $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2.9)$: صغرى
- (16) $(-2, 66)$: عظمى
- (17) $(-\frac{4}{3}, 47.48)$: صغرى

$$f'(x) = 2x + a \quad (21)$$

$$f'(1) = 2x + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f'(1) = 1 + -2 + b = 3 \Rightarrow b = 4$$

عند النقطة $(1, 3)$ قيمة صغرى؛ لأن إشارة المشتقة تتغير من سالبة إلى موجبة من يسار $x = 1$ إلى يمينه، حيث إن $f'(0) = -2, f'(1) = 2$

$$H(x) = 48 - \left[\left(\frac{1}{2} (x)(6-x) \right) + \left(\frac{1}{2} (8)(x) \right) + \left(\frac{1}{2} (6)(8-x) \right) \right] \quad (22)$$

(25) انظر رسوم الطلبة.

يتقاطع المنحنى مع المحور x عند $(8, 0)$ و $(-2, 0)$ ، وميله عند $(8, 0)$ هو 10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية حادة مع المحور x ، وميله عند $(-2, 0)$ هو -10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x يتقاطع المنحنى مع المحور y عند $(0, -16)$ ، وميله عندها هو -6 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x

(26) انظر رسوم الطلبة.

اقبل إجابات الطلبة التي تُمثّل اقتراناً من الدرجة الثانية ومماسين عند نقطتين متقابلتين متعاكستين حول محور تماثل المنحنى. سيختار معظم الطلبة الاقتران $f(x) = x^2$ لسهولة؛ لذا حفّزهم إلى ذكر أمثلة غيره.

الدرس 2:

$$f'(x) = x^2 - 5 \quad (29)$$

$$x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

وبتعويض قيم x في الاقتران، نجد الإحداثي y

$$f(-3) = 10, f(3) = -2$$

إذن، النقطتان، هما: $(-3, 10)$, $(3, -2)$

$$y' = 3ax^2 + 2bx \quad (30)$$

النقطة $(2, -3)$ واقعة على المنحنى، فتُحقّق معادلته، إذن:

$$8a + 4b + 5 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -8$$

والميل عندئذٍ هو صفر؛ أي إن:

$$8a(2)^2 + 4b(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$$

بحل هاتين المعادلتين، نجد أن:

$$b = -6 \text{ و } a = 2$$

$$h'(t) = -9.8t + 147 \text{ السرعة هي: } \quad (31)$$

وعندما تكون السرعة 98 m/s، فإن:

$$-9.8t + 147 = 98 \Rightarrow t = 5$$

ارتفاع القذيفة عن الأرض عندما $t = 5$ هو: $h(5)$

$$h(5) = -4.9(5)^2 + 147(5) = 612.5 \text{ m}$$

$$(24) \quad A_1 = x^2 \text{ مساحة المربع.}$$

$$d_1 = 4x \text{ محيط المربع.}$$

$$A_2 = \pi r^2 \text{ مساحة الدائرة.}$$

$$d_2 = 2\pi r \text{ محيط الدائرة.}$$

$$4x + 2\pi r = 20 \Rightarrow x = \frac{20-2\pi r}{4}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{20-2\pi r}{4} \right)^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \pi^2 + \pi \right) r^2 - 5\pi r + 25$$

$$A' = \left(\frac{1}{2} \pi^2 + 2\pi \right) r - 5\pi$$

$$\left(\frac{1}{2} \pi^2 + 2\pi \right) r - 5\pi = 0 \Rightarrow r \approx 1.4$$

$$\Rightarrow x \approx 2.8$$

موقع القص يكون تقريبًا على بُعد 11.2 cm من طرف السلك.
يكون هذا الجزء مربعًا، ويكون الجزء الآخر دائرة محيطها 8.8 cm

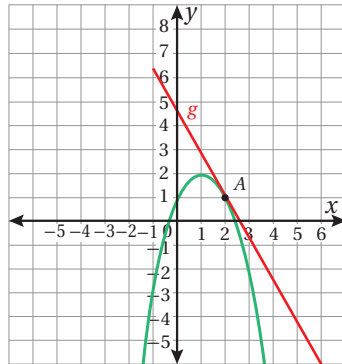
$$(23) \quad (2.5, -0.25) \text{ صغرى}$$

$$(24) \quad \left(\frac{1}{3}, 1.296 \right) \text{ عظمى}$$

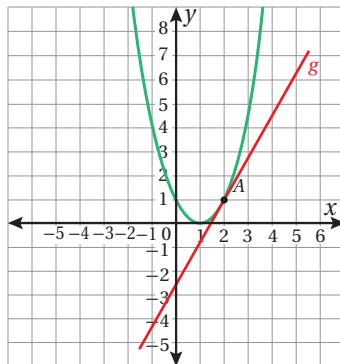
$$(1, 1) \text{ صغرى}$$

كتاب التمارين - الدرس 1:

(6)



(9)



اختبار نهاية الوحدة:

$$(6) \quad h'(x) = 4x + 1$$

$$x(1 + 4x + 1) = 4x^2 + 2x = 2h(x)$$

$$f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(-1) = 12 \quad (8)$$

$$m = 12 \quad f(-1) = -2$$

معادلة المماس هي:

$$y + 2 = 12(x + 1) \Rightarrow y = 12x + 10$$

كتاب التمارين - الدرس 3:

$$(1) \quad \text{لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.}$$

$$(2) \quad \text{لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.}$$

$$(3) \quad \text{لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.}$$

$$(4) \quad \text{لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.}$$

$$(5) \quad \text{له قيمة صغرى عندما } x = -1, \text{ هي: } 0$$

$$(6) \quad \text{له قيمة صغرى عندما } x = 4, \text{ هي: } -9$$

$$(7) \quad \text{له قيمة عظمى عندما } x = 0, \text{ هي: } 5$$

$$(8) \quad \text{له قيمة صغرى عندما } x = 4, \text{ هي: } -27$$

$$(9) \quad \text{له قيمة عظمى عندما } x = -5, \text{ هي: } 100$$

$$(10) \quad \text{له قيمة صغرى عندما } x = 1, \text{ هي: } -8$$

$$(9) \quad 2(xy) + 2(2xy) + 2(2x^2) = 600 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$$

$$V(x) = \left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x \right) (x)(2x)$$

$$= 200x - \frac{4}{3}x^3$$

$$f'(x) = 0 \quad (15)$$

$$f'(x) = 8x^7 \quad (16)$$

$$f'(x) = -12x^3 \quad (17)$$

$$f'(x) = 1 \quad (18)$$

$$f'(x) = -2 \quad (19)$$

$$f'(x) = -10x + 3x^2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.}$$

$$(22) \quad \text{لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.}$$

(9) له قيمة عظمى عندما $x = 3$ ، هي: 27

(10) له قيمة صغرى عندما $x = 0.5$ ، هي: -2.25

$$14) \quad x + 2y + \pi x = 80 \Rightarrow y = 40 - \frac{\pi}{2}x - x$$

$$A(x) = 2xy + \frac{1}{2} \pi x^2$$

$$= 2x \left(40 - \frac{\pi}{2}x - x \right) + \frac{1}{2} \pi x^2$$

$$= 80x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2} \pi x^2$$

$$= 80x - \frac{\pi}{2}x^2 - 2x^2 = 80x - \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) x^2$$

$$a = 2, b = 1 \quad (17)$$

صغرى؛ لأن إشارة المشتقة تتغير من سالبة قبل -4 إلى موجبة بعدها، حيث:

$$f'(-5) = -0.2, f'(-2) = 1$$

مخطط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: المتجهات في المستوى الإحداثي.	• يتعرف المتجه، ويكتبه بالصورة الإحداثية، ويمثله على المستوى الإحداثي. • يجد مقدار المتجه، ويحدد اتجاهه. • يجد السرعة المتجهة.	المتجه، المركبة الأفقية، المركبة الرأسية، الصورة الإحداثية، الوضع القياسي، السرعة المتجهة.	• برمجية جيو جبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: جمع المتجهات وطرحها	• يميز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، ويعبر عنها بالرموز. • يحل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسياً وجبرياً. • يتعرف المتجه الصفري. • يجد محصلة متجهين أو أكثر هندسياً وجبرياً في مواقف رياضية وحياتية.	المتجهان المتساويان، المتجهان المتوازيان، معكوس المتجه، المحصلة.	• برمجية جيو جبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: الضرب القياسي.	• يجد ناتج الضرب القياسي لمتجهين. • يتعرف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه. • يجد قياس الزاوية بين متجهين. • يحسب مقدار الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.	الضرب القياسي، الشغل.	• برمجية جيو جبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج المشروع				1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				13

نظرة عامة على الوحدة:

تعلم الطلبة المتجهات في الفيزياء، ومثلوها بصورة هندسية. وسيتعلمون في هذه الوحدة كيفية كتابة المتجه بالصورة الإحداثية، وتمثيله على المستوى الإحداثي، وإيجاد مقداره واتجاهه، وسيتعلمون أيضًا جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي، ويفسرون دلالة ذلك في مسائل حياتية. وكذلك سيتعلمون الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد الزاوية بين متجهين، وحساب الشغل، وحل مسائل حياتية عنها.

ما أهمية هذه الوحدة؟

لفهم تأثير قوة ما في جسم، يجب تحديد كل من مقدار هذه القوة، واتجاهها، في ما يُعرف بالمتجه. في هذه الوحدة، سَتَعْلَمُ كثيرًا عن المتجهات وتطبيقاتها الحياتية، من مثل تحديد تأثير الرياح في حركة السفن الشراعية.

سَتَعْلَمُ في هذه الوحدة:

- المتجهات، وكيفية تمثيلها على المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات، وبعض التطبيقات الحياتية عليها.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ حل المعادلات الخطية بمتغيرين.
- ✓ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- ✓ إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- ✓ النسب المثلثية للزاوية ضمن الدورة الكاملة.

80

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- حل معادلات خطية بمتغيرين.
- حل معادلات تربيعية بمتغير واحد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- إيجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة.

الصف العاشر

- إيجاد النسب المثلثية للزاوية ضمن الدورة الكاملة.
- تعرف المتجهات، وتمثيلها على المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر.
- حل مسائل حياتية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- استعمال الصورة القياسية للمتجهات $(xi + yj, xi + yj + zk)$ لجمع متجهين، أو طرحهما، أو ضرب متجه في ثابت، وتفسير هذه العمليات هندسيًا.
- استعمال متجه الوحدة، ومتجه الموقع، ومتجه الإزاحة.
- كتابة معادلة مستقيم عُلِمَ فيها متجه الموقع لنقطة عليه، واتجاه المتجه، أو عُلِمَ فيها متجهها الموقع لنقطتين على المستقيم.
- تحديد إذا كان المستقيمان متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، وإيجاد نقاط التقاطع بينهما (إن وجدت).
- استعمال الضرب القياسي في مسائل تحوي مستقيمتين ونقاطًا.

المتجهات في الجغرافيا

مشروع الوحدة

مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا.

هدف المشروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، باكتشاف استعمالات المتجهات في الخرائط الجغرافية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوّن كلّ منها من (5-7) طلبة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مقررًا لهم.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجة جيو جبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلاً عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مؤكّداً لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المتعلقة بجهاز الحاسوب وبرمجة جيو جبرا.
- وضح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعيناً بسلم التقدير.
- بيّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلاً، تُنفذ الخطوات (1-3) بعد الانتهاء من الدرس الأول، والخطوة (4) بعد الدرس الثاني، والخطوة (5) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدّد وقتاً مناسباً لعرض النتائج التي توصّل إليها الطلبة، وناقشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صوراً للمراحل التنفيذ.
- وضح للطلبة أهمية اشتغال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزاً لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم التالية.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

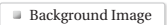
فكرة المشروع

أستعدّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاصّ باكتشاف استعمالات للمتجهات في الخرائط الجغرافية بناءً على ما سنتعلّمه في هذه الوحدة.

المواد والأدوات

شبكة إنترنت، برمجة جيو جبرا.

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أبحث في شبكة الإنترنت عن صورة لخريطة الوطن العربي أو الشرق الأوسط، ثم أحفظها في ملف بجهاز الحاسوب.
- 2 أستمّل برمجة جيو جبرا لإيجاد إحداثيات بعض العواصم العربية باتّباع الخطوات الآتية:
 - أنقرُ أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أختارُ الصورة التي حفظتها.
 - أظهِرُ الشبكة فوق الصورة بنقر الزرّ الأيمن لفأرة الحاسوب، ثم أختارُ (الإعدادات) ، ومنها أختارُ .
 - أجدُ إحداثيات أيّ عاصمة عربية على الخريطة باختيار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم نقر موقع العاصمة على الصورة، فتظهرُ الإحداثيات على الشريط الجانبي.
- 3 أرسّم متجهاً بين أيّ عاصمتين بنقر أيقونة المتجه  من شريط الأدوات.
- 4 أجدُ المسافة على الخريطة بين مدينة عمّان وأربع عواصم عربية باستعمال مقدار المتجه، ثم أأرّنها بالمسافات الحقيقية، وأكتبُ مقياس الرسم، منظمًا النتائج في جدول.
- 5 أجدُ اتجاه أربع عواصم عربية بالنسبة إلى مدينة عمّان باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.

عرض النتائج

أعدّ مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربونت) تُبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور، والحسابات التي أجرّيتها في خطوات المشروع.
- المعلومات الجديدة التي تعرّفها في أثناء العمل بالمشروع، ومقترح لتوسعة المشروع.

81

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرّفوها.			
2	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
3	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملاً، ومنظماً، ويحوي رسوماً توضيحية.			
4	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
5	عرض معلومة جديدة تعلّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
6	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

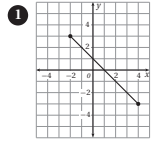
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

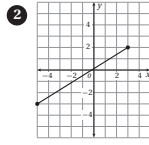
أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمراجعة.

إيجاد المسافة بين نقطتين.

أجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:



$6\sqrt{2}$



$\sqrt{89}$

3 $(-5, -7), (2, -3)$ $\sqrt{65}$

4 $(8, 0), (-4, -5)$ 13

5 $(-4, 7), (-3, 6)$ $\sqrt{2}$

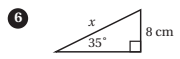
مثال: أجد المسافة بين النقطتين: $(-6, -5)$ و $(-2, -8)$.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{قانون المسافة بين نقطتين} \\ &= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2} && \text{بتعويض إحداثيات النقطتين} \\ &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

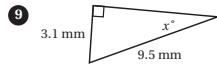
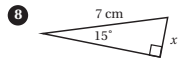
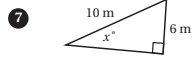
إذن، المسافة بين النقطتين: $(-6, -5)$ و $(-2, -8)$ هي 5 وحدات طول.

استعمال النسب المثلثية في إيجاد أطوال أضلاع في مثلث.

أستعمل النسبة المثلثية المناسبة لإيجاد قيمة x في كل من المثلثات الآتية، ثم أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة الكبرى:



(6-9) انظر الهامش



التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: إيجاد المسافة بين نقطتين، واستعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث قائم الزاوية.
- وجه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالاً واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة - من دون ذكر اسم الطالب -، وأدر نقاشاً حوله.

إجابات (أستعد لدراسة الوحدة):

6) $x \approx 13.95$

$AB \approx 11.43$

$\cos 55^\circ = \frac{8}{13.95} \approx 0.573$

$\tan 55^\circ = \frac{11.43}{8} \approx 1.429$

7) $x \approx 37^\circ$

$AB = 8$

$\cos 53^\circ = \frac{6}{10} = 0.6$

$\tan 53^\circ = \frac{8}{6} = 1.33$

8) $x \approx 1.81$

$AB = 6.76$

$\cos 75^\circ = \frac{1.81}{7} \approx 0.259$

$\tan 75^\circ = \frac{6.76}{1.81} \approx 3.734$

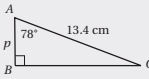
9) $x \approx 19^\circ$

$AB = 8.98$

$\cos 71^\circ = \frac{3.1}{9.5} \approx 0.326$

$\tan 71^\circ = \frac{8.98}{3.1} \approx 2.897$

مثال: أستعمل النسبة المثلثية المناسبة لإيجاد طول AB في المثلث الآتي، ثم أجد النسب المثلثية للزاوية A :



الضلع المجهول AB مجاور للزاوية A ؛ لذا أستعمل نسبة جيب تمام للزاوية A :

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} && \text{تعريف نسبة جيب تمام} \\ \cos 78^\circ &= \frac{p}{13.4} && \text{بتعويض القياسات المعروفة} \\ 0.21 &= \frac{p}{13.4} && \text{بتعويض قيمة } \cos 78^\circ \\ p &= (0.21)(13.4) && \text{بالضرب التبادلي} \\ p &= 2.81 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

لحساب نسبتي الجيب والظل للزاوية A ، يجب معرفة طول الضلع المقابل لها. وبما أن المثلث قائم الزاوية، فإنني أستعمل نظرية فيثاغورس:

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= (BC)^2 + (AB)^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ (13.4)^2 &= (BC)^2 + (2.81)^2 && \text{بتعويض} \\ 179.56 &= (BC)^2 + 7.90 && \text{بالتبسيط} \\ 179.56 - 7.90 &= BC^2 && \text{بطرح} \\ 171.66 &= BC^2 && \text{بالتبسيط} \\ 13.10 &= BC && \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين} \end{aligned}$$

أستطيع الآن حساب نسبتي الجيب والظل للزاوية A :

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} && \text{تعريف نسبة الجيب} \\ \sin 78^\circ &= \frac{13.10}{13.4} && \text{بتعويض} \\ \sin 78^\circ &\approx 0.98 && \text{بالتبسيط} \\ \tan A &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} && \text{تعريف نسبة الظل} \\ \tan 78^\circ &= \frac{13.10}{2.79} && \text{بتعويض القياسات المعروفة} \\ \tan 78^\circ &\approx 4.7 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

نتائج الدرس



- يتعرف المتجه، ويكتبه بالصورة الإحداثية، ويمثله على المستوى الإحداثي.
- يجد مقدار المتجه، ويحدد اتجاهه.
- يجد السرعة المتجهة.

التعلم القبلي:

- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- حل مثلث قائم الزاوية، وإيجاد النسب المثلثية لزاياه.

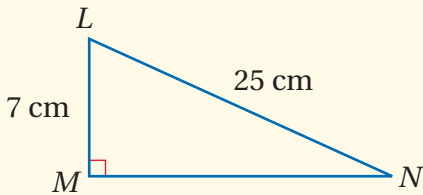
التهيئة

1

- راجع الطلبة في نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين، عن طريق حل السؤالين الآتيين:

« عيّن النقاط $A(1, -2)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 1)$ على المستوى الإحداثي، ثم جد طول كلٍّ من $\overline{AB}$ ، و $\overline{AC}$.

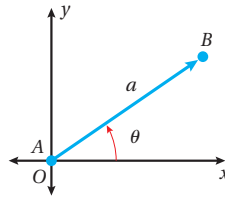
« أجد MN في المثلث القائم LMN المجاور، وقياس كلٍّ من الزاويتين MNL ، و MLN .



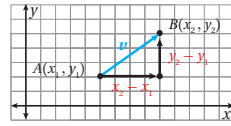
تعرف المتجه، وتمثله في المستوى الإحداثي، وإيجاد مقدار المتجه.
المركبة الأفقية، المركبة الرأسية، الصورة الإحداثية، الوضع القياسي، مقدار المتجه، السرعة المتجهة.



قطع يخت سياحي مسارًا مستقيمًا في البحر الأحمر، مُطلقًا من مدينة العقبة باتجاه الجنوب الغربي من مدينة طابا المصرية. هل يُمكن وصف اتجاه هذا اليخت، وتحديد المسافة التي قطعها باستعمال إحداثي هاتين المدينتين فقط؟



درست في الفيزياء تمثيل المتجهات في صورة سهم ينطلق من نقطة إسناد، مثل نقطة الأصل، وبطول يُحدده مقياس السهم مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس عقارب الساعة. ولأن استعمال مقياس الرسم قد لا يكون دقيقًا في بعض الأحيان؛ فإنه يتعين استعمال طريقة أكثر دقة لتمثيل المتجهات.

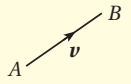


يُمكن تمثيل المتجه $(\overrightarrow{AB})$ في المستوى الإحداثي في صورة قطعة مستقيمة تمتد من نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ إلى نقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ ، وفي اتجاه يُحدده رمز السهم كما في الشكل المجاور.

تُسمى المسافة الأفقية بين نقطة بداية المتجه ونقطة نهايته **المركبة الأفقية** (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$ ، وتُسمى المسافة الرأسية بينهما **المركبة الرأسية** (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.

رموز رياضية

يُرمز إلى المتجه الذي ينطلق من نقطة A وينتهي عند نقطة B بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو بالرمز $\vec{v}$ مكتوبًا بالخط الغامق، ويُرمز إليه أيضًا بالرمز $\vec{v}$ ، وبخاصة عند كتابته بالقلم؛ نظرًا إلى صعوبة كتابته بخط غامق.



- وجّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« ما الفرق بين القارب واليخت؟ اليخت مثل القارب، لكنه أكبر حجمًا، ومزوّد بمحرك لدفعه إلى الأمام، وفيه كثير من وسائل الراحة والاستجمام.
« كيف يمكن حساب المسافة بين مدينتي العقبة وطابا؟ إذا عُرِفَت إحداثيات المدينتين فإنه يمكن إيجاد المسافة باستعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون المسافة بين نقطتين، وكذلك يمكن إيجادها بقياس المسافة بينهما على خريطة باستعمال مقياس الرسم.
« كيف يمكن تمثيل مسار اليخت على الخريطة؟ برسم قطعة مستقيمة من العقبة إلى طابا، ثم وضع إشارة تدل على بدء الرحلة من العقبة.
• استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
« من يؤيد الإجابة؟
« من لديه إجابة أخرى؟
« اذكرها.
وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومساائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتجه (vector)، والمركبة الأفقية (horizontal component)، والمركبة الرأسية (vertical component)، والصورة الإحداثية (coordinate form)، والوضع القياسي (standard position)، والسرعة المتجهة (velocity).

المفاهيم العابرة:

أكد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، عزز الوعي بالقضايا البيئية (أهمية البحار والمحيطات) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية البحار والمحيطات للطقس والمخزون الغذائي والمائي، وتأثيرها في حياة الإنسان والكائنات الحية، ثم اسألهم:

- « ما فائدة البحار والمحيطات؟
- « ما البحار التي يقع عليها وطننا الأردن؟
- « كيف نحافظ على البحار والمحيطات؟

مثال 1

- وضح الفرق بين الكميات القياسية (العددية) التي تُحدّد بعدد، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والكميات المتجهة التي تُحدّد بعدد واتجاه، مثل: القوة، والسرعة.
- استعمل فقرة الشرح الوارد ذكرها في بداية الدرس لتوضيح الفرق بين تمثيل المتجه هندسيًا والتعبير عنه جبريًا بالصورة الإحداثية.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبين كيف يُكتب المتجه بالصورة الإحداثية إذا عُلِمَت نقطتا بدايته ونهايته.

✓ **إرشاد:** حفّز الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني، أو دفاتر ورق المربعات عند البدء بدراسة هذه الوحدة.

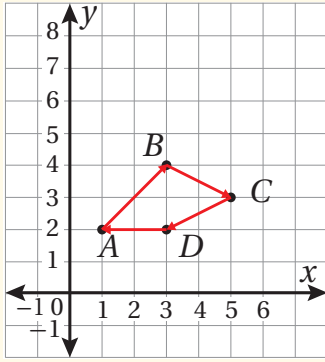
أخطاء مفاهيمية:

- قد لا يُميز بعض الطلبة بين $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$ عند كتابة المتجه بالصورة الإحداثية؛ لذا الفت انتباههم إلى طرح إحداثي نقطة البداية من الإحداثي المناظر له في نقطة النهاية.
- قد يُبدّل بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط موقعي المركبتين الأفقية والرأسية؛ لذا وضح لهم الطريقة الصحيحة لكتابة الصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل المجاور، اكتب كلاً من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

- 1 $\vec{AB}$ $\langle 2, 2 \rangle$
- 2 $\vec{BC}$ $\langle 2, -1 \rangle$
- 3 $\vec{CD}$ $\langle -2, 1 \rangle$
- 4 $\vec{DA}$ $\langle -2, 0 \rangle$

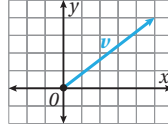


التقويم التكويني:

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (تحقق من فهمي) بعد كل مثال (فردياً، أو ضمن مجموعات).
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعدًا، ومُوجّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

يُمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية (coordinate form) بدلالة مُركبتيه الأفقية والرأسية (العمودية) كما يأتي:

$$\vec{v} = \vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle a, b \rangle$$



إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل 0، كما في الشكل المجاور، فإنّه يكون في الوضع القياسي (standard position).

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\langle a, b \rangle$ أو $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ لكتابة المتجه بصورته الإحداثية.

مثال 1

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

1 $\vec{AB}$

نقطة بداية المتجه هي $A(1, 2) = (x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته هي $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

$$x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$$

إذن، $\vec{AB} = \langle 2, 3 \rangle$

2 $\vec{BC}$

نقطة بداية المتجه هي $B(3, 5)$ ، ونقطة نهايته هي $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$$

إذن، $\vec{BC} = \langle 2, -2 \rangle$

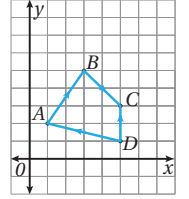
3 $\vec{DC}$

نقطة بداية المتجه هي $D(5, 1)$ ، ونقطة نهايته هي $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

إذن، $\vec{DC} = \langle 0, 2 \rangle$



طريقة بديلة

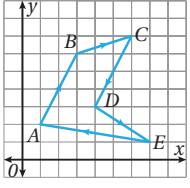
لانتقال من النقطة A إلى النقطة B، أتحركُ وحدتين إلى اليمين، وثلاث وحدات إلى الأعلى.

أتعلّم

يُعبّر عن الانتقال إلى اتجاه اليسار أو اتجاه الأسفل باستعمال الأعداد السالبة.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:



- a) $\vec{EA}$ $\langle -6, 1 \rangle$ b) $\vec{CD}$ $\langle -2, -4 \rangle$
 c) $\vec{AB}$ $\langle 2, 4 \rangle$ d) $\vec{DE}$ $\langle 3, -2 \rangle$
 e) $\vec{BC}$ $\langle 3, 1 \rangle$ f) $\vec{CB}$ $\langle -3, -1 \rangle$

مقدار المتجه (magnitude) هو كمية قياسية تُمثل طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي بداية المتجه ونهايته.

فإذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية المتجه v ، و $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الصيغة الآتية لمقدار المتجه $|v|$:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أتعلم

يُرمز إلى مقدار المتجه v بالرمز $|v|$

مفهوم أساسي

مقدار المتجه:

إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية المتجه v ، و $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن إيجاد مقدار المتجه $|v|$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كان المتجه v مكتوبًا بالصورة الإحداثية $v = \langle a, b \rangle$ ، فإنه يُمكن إيجاد مقداره باستعمال الصيغة الآتية:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إرشادات للمعلم

وجّه الطلبة إلى استعمال ورق المربعات أو ورق الرسم البياني لتمثيل المتجهات، إضافةً إلى المسطرة والمنقلة؛ فذلك يُكسبهم مهارة التمثيل بسرعة ودقة، واطلب إليهم استعمال الأقلام الملونة لتمييز المتجهات المختلفة بعضها من بعض.

- وضح للطلبة مفهوم مقدار المتجه (طوله)، وكيفية حسابه إذا عُلِّمت إحداثيات بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبين كيفية إيجاد مقدار المتجه المُمثِّل على المستوى الإحداثي، أو المعطى بالصورة الإحداثية.

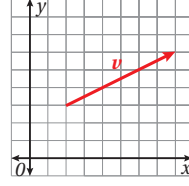
مثال إضافي

- جد مقدار كل متجه ممَّا يأتي:

1 $\vec{AB}$ حيث $A(3, -7)$ و $B(0, -5)$ $\sqrt{13}$

2 $\vec{CD} = \langle 5, -10 \rangle$ $5\sqrt{5}$

مثال 2



1 أجد مقدار المتجه v في الشكل المجاور.
الخطوة 1: أحدد إحداثيات كل من نقطة بداية المتجه، ونقطة نهايته.

إحداثيا نقطة بداية المتجه $(2, 3)$ ، وإحداثيا نقطة نهايته $(8, 6)$.

الخطوة 2: أعوِّض الإحداثيات بصيغة مقدار المتجه.

$$\begin{aligned} |v| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة مقدار المتجه} \\ &= \sqrt{(8 - 2)^2 + (6 - 3)^2} && \text{بالتعويض} \\ &= \sqrt{36 + 9} && \text{بالتبسيط} \\ &= 3\sqrt{5} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

2 أجد مقدار المتجه $\vec{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

المتجه مكتوب بالصورة الإحداثية، إذن:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{a^2 + b^2} && \text{صيغة مقدار المتجه} \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} && \text{بالتعويض} \\ &= 5 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أنتحق من فهمي

أجد مقدار كل متجه ممَّا يأتي:

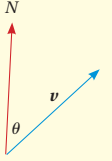
a) $\vec{AB} = \langle -1, 4 \rangle$ $\sqrt{17}$

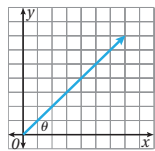
b) $\vec{CD} = \langle 5, -7 \rangle$ $\sqrt{74}$

يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد اتجاه المتجه، وذلك باستعمال المثلث قائم الزاوية الذي يُمثِّل المتجه وتُرا فيه.

أتعلم

يمكن أيضًا التعبير عن اتجاه المتجه بدلالة اتجاهه من الشمال.





مثال 3

أجد اتجاه $\vec{AB}$ في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أجد اتجاه $\vec{AB}$

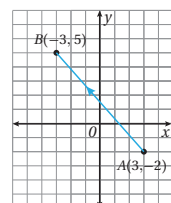
أستعمل نسبة الظل في المثلث قائم الزاوية الذي يُمثل $\vec{AB}$ وترًا فيه:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{استعمال نسبة الظل لإيجاد الزاوية}$$

$$= \frac{7}{7} = 1 \quad \text{بالتعويض}$$

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ \quad \text{باستعمال معكوس الظل}$$

إذن، اتجاه $\vec{AB}$ هو 45° مع الأفقي.



أتحقق من فهمي

أجد اتجاه $\vec{AB}$ في الشكل المجاور.

130.6° مع محور x الموجب.

إرشاد

أستعمل الآلة الحاسبة

العلمية لأجد $\tan^{-1}(1)$

كما يأتي:

SHIFT Tan 1

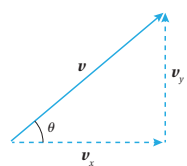
- بين للطلبة أن اتجاه أي متجه يُحدّد بقياس الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة التي تُمثله مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس حركة عقارب الساعة، أو اتجاه الشمال مع حركة عقارب الساعة.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبين كيفية تحديد اتجاه متجه مرسوم في الوضع القياسي، مُبينًا أن هذه الطريقة تُستعمل إذا عُلّمت نقطتا بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية، ثم اذكر أمثلة على ذلك.
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:

« هل يمكن استعمال نسبة أخرى غير ظل الزاوية؟
نعم، ولكن يجب إيجاد طول المتجه أولاً.

إرشاد: أرشد الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة بصورة صحيحة لإيجاد قياس زاوية عُلّمت إحدى نسبها المثلثية.

أخطاء مفاهيمية: قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في كتابة معادلة النسبة المثلثية؛ لذا الفت انتباههم إلى الصيغ الصحيحة للنسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية.

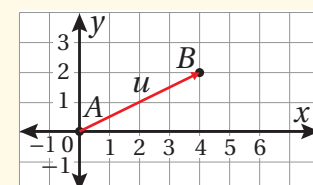
السرعة المتجهة (velocity) هي سرعة في اتجاه مُحدّد يُمكن تمثيلها بمتجه. في الشكل المجاور، يُمثل المتجه v السرعة المتجهة لجسم تحرّك في مسارٍ مستقيم، فصنّع زاوية قياسها θ مع محور x الموجب، وقد مثّل مقدار المتجه $|v|$ سرعة هذا الجسم.



تُمثّل v_x المُركبة الأفقية للسرعة المتجهة، وتُمثّل v_y المُركبة الرأسية لهذه السرعة، حيث: $v = \langle v_x, v_y \rangle$

مثال إضافي

1 جد اتجاه $\vec{AB}$ في الشكل الآتي.



26.6° مع محور x الموجب.

2 جد اتجاه $\vec{LM} = \langle 4, -3 \rangle$

323.1° مع محور x الموجب.

مثال 4: من الحياة

- وضح للطلبة كيفية تحليل المتجه إلى مركبة أفقية وأخرى رأسية باستعمال النسب المثلثية لزاوية الاتجاه.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يبين كيفية كتابة الصورة الإحداثية لسرعة متجهة باستعمال زاوية الاتجاه.

إرشاد: أكد باستمرار الفرق بين مفاهيم السرعة المتوسطة، والسرعة اللحظية، والسرعة المتجهة.

مثال إضافي

- انطلق صاروخ ألعاب نارية بسرعة 32 m/s، وبزاوية مقدارها 45° مع الأفقي. اكتب المتجه الذي يمثل السرعة المتجهة للصاروخ بالصورة الإحداثية.

$$(16\sqrt{2}, 16\sqrt{2})$$

تنويع التعليم

- استعمل برمجة جيوجبرا، واطلب إلى الطلبة استعمالها لاستكشاف المتجهات، وتعلم الكثير عنها.
- اطلب إلى الطلبة تصفح موقع برمجة جيوجبرا الإلكتروني الذي يحوي معلومات مفيدة لدراسة جميع دروس الوحدة:

<https://www.geogebra.org/t/2d-vectors>

أتعلم

قد يمثل المتجه أيضًا مسافة متجهة، أو قوة متجهة.

يمكن استعمال النسب المثلثية لكتابة المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة المتجهة بدلالة الزاوية θ التي تصنعها السرعة المتجهة مع محور x الموجب كما يأتي:

$$v_x = |v| \cos \theta$$

$$v_y = |v| \sin \theta$$

عندئذ، يمكن كتابة السرعة المتجهة بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$



كرة قدم: ركل ريان كرة بسرعة 25 m/s، كما في الشكل المجاور، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي. اكتب المتجه الذي يمثل السرعة المتجهة للكرة بالصورة الإحداثية.

أرسم شكلًا مبسطًا يعبر عن المسألة، بحيث يكون فيه $|v| = 25$ و $\theta = 40^\circ$:

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle \quad v_x = |v| \cos \theta, \quad v_y = |v| \sin \theta$$

$$= \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle$$

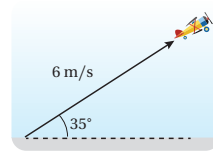
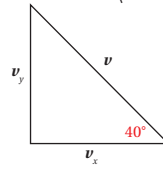
$$= \langle 25 \times 0.7660, 25 \times 0.6428 \rangle \quad \text{بتعويض قيم النسب المثلثية للزاوية } 40^\circ$$

$$= \langle 19.15, 16.07 \rangle$$

بالتبسيط

$$v = \langle 19.15, 16.07 \rangle$$

إذن، هو المتجه الذي يمثل سرعة الكرة.



ألعاب: أقلعت طائرة تتحكم فيها ميساء عن بُعد، وبزاوية قياسها 35° عن سطح الأرض، وبسرعة 6 m/s كما في الشكل المجاور.

اكتب المتجه الذي يمثل السرعة المتجهة للطائرة.

$$(4.91, 3.44)$$

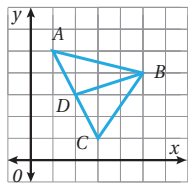


ازداد الاعتماد على الطائرات المسيّرة عن بُعد في كثير من المجالات، مثل: رصد الازدحامات المرورية، ومراقبة انتشار حرائق الغابات.

أُتدرب وأُحل المسائل

أكتب كل متجه عُلِمَتْ نقطتا بدايته ونهايته في ما يأتي بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره:

- | | | |
|---|---|---|
| 1 $(2, 5), (4, -1)$
$\langle 2, -6 \rangle \quad u = 2\sqrt{10}$ | 2 $(-4, 7), (-3, 0)$
$\langle 1, -7 \rangle \quad u = 5\sqrt{2}$ | 3 $(6, -2), (8, 1)$
$\langle 2, 3 \rangle \quad u = \sqrt{13}$ |
| 4 $(4, -9), (3, -5)$
$\langle -1, 4 \rangle \quad u = \sqrt{17}$ | 5 $(-1.5, 3), (0.5, -4)$
$\langle 2, -7 \rangle \quad u = \sqrt{53}$ | 6 $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$
$\langle 4, \frac{1}{3} \rangle \quad u = \frac{\sqrt{145}}{3}$ |



اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كلًا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 7 $\vec{AB} \langle 4, -1 \rangle$ | 8 $\vec{DB} \langle 3, 1 \rangle$ |
| 9 $\vec{CB} \langle 2, 3 \rangle$ | 10 $\vec{CA} \langle -2, 4 \rangle$ |
| 11 $\vec{AC} \langle 2, -4 \rangle$ | 12 $\vec{DA} \langle -1, 2 \rangle$ |

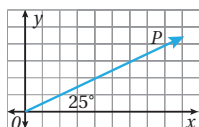
13 في السؤال السابق، أبين أن $|\vec{AD}| = |\vec{DC}|$. ماذا أستنتج من موقع النقطة D على القطعة المستقيمة AC؟

أجد مقدار كل متجه مما يأتي: D نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\vec{AC}$ ، $|\vec{AD}| = |\vec{DC}| = \sqrt{5}$

- | | | |
|---|---|--|
| 14 $\langle 2, -6 \rangle \quad 2\sqrt{10}$ | 15 $\langle 7, -8 \rangle \quad \sqrt{113}$ | 16 $\langle -1, -1 \rangle \quad \sqrt{2}$ |
| 17 $\langle 3, 5 \rangle \quad \sqrt{34}$ | 18 $\langle 0, 0 \rangle \quad 0$ | 19 $\langle 2, 9 \rangle \quad \sqrt{85}$ |

إذا كانت M هي نقطة منتصف $\vec{FG}$ ، حيث $F(4, 2)$ و $G(2, 6)$ ، وكانت O هي نقطة الأصل، فأكتب كل متجه مما يأتي بالصورة الإحداثية:

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 20 $\vec{FG} \langle -2, 4 \rangle$ | 21 $\vec{GF} \langle 2, -4 \rangle$ | 22 $\vec{OM} \langle 3, 4 \rangle$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|



23 أعبّر عن اتجاه المتجه P في الشكل المجاور بطريقتين.

اتجاه P هو 25° مع الأفقي.

اتجاه P هو 65°



24 حيوانات: أكتب السرعة المتجهة لتعلب يطارد أرنبًا على منحدر

بالصورة الإحداثية إذا كانت سرعته الأفقية $v_x = 27 \text{ km/h}$

وسرعته الرأسية $v_y = 25 \text{ km/h}$ $\langle 27, 25 \rangle$

• وجه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أُتدرب وأُحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من (2-24).

• تجوّل بين الطلبة مُرشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقُدِّم لهم التغذية الراجعة.

• إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

تنبيه:

عند حل الأسئلة (1-6)، وجه الطلبة إلى افتراض أن النقطة الأولى من اليسار هي نقطة بداية المتجه، وأن النقطة الثانية هي نهايته.

الواجب المنزلي:

• اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة العشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.

• يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.

• في اليوم التالي، اطلّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

- اشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم، مُنبِّهاً إياهم إلى تصحيح أرقامها، بحيث تبدأ بـ 29، وتنتهي بـ 32 في كتبهم.
- تذكّر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- اطح على الطلبة السؤال الآتي:
« إذا كانت $A(3, -2)$, $B(7, 5)$, $C(1, y)$ وكانت B تقسم القطعة المستقيمة AC بنسبة 1:2، فما العلاقة بين $|\vec{AB}|$ و $|\vec{BC}|$ ؟ ما قيمة y ؟ »

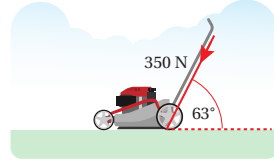
تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (1-3) من المشروع.
- وجّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية في ورقة، ثم تسليمها لك في نهاية الحصة:
« ما الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة؟ »
« اذكر 3 أمثلة على كلّ منهما. »
« بيّن بمثال كيفية إيجاد مقدار متجه عُلِمَت بدايته ونهايته. »

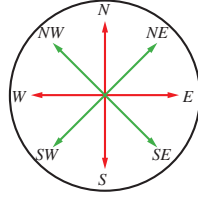
25 فيزياء: تدفع نور عربة بقوة مقدارها 350N، وبزاوية قياسها 63° مع المحور الأفقي. أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية.



(158.90, 311.85)

26 أكتب المتجه v بالصورة الإحداثية إذا كان $|v| = 27$ وصنع زاوية مقدارها 90° مع محور x . (0, 27)

27 أكتب المتجه v بالصورة الإحداثية إذا كان $|v| = 10$ وصنع زاوية مقدارها 320° مع محور x . (7.66, -6.43)



28 خرج عبد الرحمن من منزله، وسار بخط مستقيم شرقاً إلى المسجد مسافة 248 m، ثم خرج منه مرة أخرى، وسار بخط مستقيم جنوباً نحو منزل صديقه يحى مسافة 562 m. أعبّر عن المسار بين منزل عبد الرحمن ومنزل صديقه على شكل متجه بالصورة الإحداثية (إرشاد: البعد بين نقطتين هو أقصر مسافة بينهما).

(248, -562)

مهارات التفكير العليا

29 تحدّ: إذا كان $|\vec{AB}| = \sqrt{13}$ حيث $A(1, 2)$ نقطة بدايته، والنقطة $B(3, y)$ نقطة نهايته، فأجد إحداثي النقطة B ، مُبرّراً إجابتي. انظر الهامش

30 تبرير: ما مجموعة قيم b التي يكون عندها مقدار المتجه $(4, b)$ يساوي 5؟ أبرّر إجابتي. انظر الهامش

31 أكتشف الخطأ: حسب كلّ من ناصر وليلى مقدار المتجه $v = (6, -1)$ ، فكانت إجابة كلّ منهما كما يأتي:

ليلى
 $|v| = \sqrt{35}$

ناصر
 $|v| = 37$

أيهما إجابته صحيحة، مُبرّراً إجابتي؟ كلنا الإجابتين غير صحيحة؛ لأن ناصراً نسي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلاً من جمعهما.

32 مسألة مفتوحة: أرسم متجهاً على المستوى الإحداثي، ثم أكتب بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

ستتنوع إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة صحيحة: $\vec{AB} = v = (6, -4)$
 $|v| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

إجابات (أتدرب وأحل المسائل):

29) $|\vec{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$

$4 + (y-2)^2 = 13$

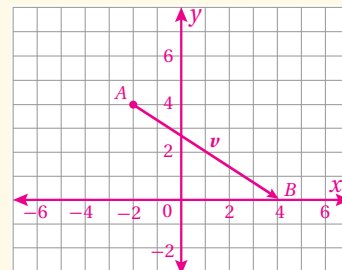
$(y-2)^2 = 9$

$y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5, y = -1$

إذن، إحداثيا B هما: $(3, 5)$ ، أو $(3, -1)$.

30) $|v| = \sqrt{16 + b^2} = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$



الدرس
2جمع المتجهات وطرحها
Adding and Subtracting Vectors

إجراء العمليات على المتجهات.

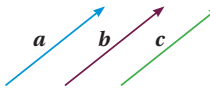
المتجهات المتساوية، المتجهات المتوازية، معكوس المتجه، المحصلة.

المصطلحات

مسألة اليوم

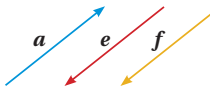


بدأت طائرة رحلتها نحو الشمال بسرعة مقدارها 450 km/h، لكنّها واجهت رياحاً شرقية سرعتها 60 km/h، فأخذت تنحرف نحو اليسار. كيف يُمكن للطيار أن يُعدّل اتجاهها وسرعتها ليصل إلى وجهته من دون تأخير؟



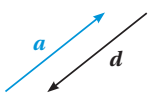
المتجهان المتساويان (equal vectors) هما متجهان لهما

نفس الاتجاه والمقدار. ففي الشكل المجاور، المتجهان

 $a = b = c$ متساويان، وبالرموز:

المتجهان المتوازيان (parallel vectors) هما متجهان لهما

الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار

نفسه. ففي الشكل المجاور، المتجهان a, e, f متوازيان،وبالرموز: $a \parallel e \parallel f$ 

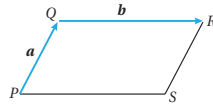
معكوس المتجه (opposite vectors) هو متجه له نفس

مقدار متجه آخر، لكنّه في اتجاه معاكس له. ففي الشكل المجاور،

المتجه d معكوس المتجه a ، وبالرموز: $d = -a$ أي إن

مثال 1

في الشكل المجاور، $QRSP$ متوازي أضلاع، فيه $PQ = a$ ، و $QR = b$. أعبّر عن كلٍّ مما يأتي باستعمال المتجهين a و b :



1 $\overrightarrow{SR}$
 $\overrightarrow{SR} = a$

متجه مواز ومساوٍ للمتجه PQ

2 $\overrightarrow{SP}$
 $\overrightarrow{SP} = -b$

متجه مواز ومعكوس للمتجه QR

90

نتائج الدرس

- يميز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، ويعبر عنها بالرموز.
- يحل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسياً وجبرياً.
- يتعرف المتجه الصفري.
- يجد محصلة متجهين أو أكثر هندسياً وجبرياً في مواقف رياضية وحياتية.

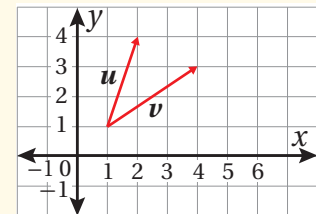
التعلم القبلي:

- كتابة المتجه بالصورة الإحداثية.
- إيجاد مقدار المتجه واتجاهه.
- كتابة المركبتين الأفقية والرأسية لمتجه معطى.
- حل المثلث باستعمال قانون الجيوب، وقانون جيبس التمام.

التهيئة

1

- ارسم على لوح المستوى الإحداثي المتجهين u و v كما في الشكل الآتي:



- اطلب إلى الطلبة التعبير عن هذين المتجهين بالصورة الإحداثية.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المقدار والاتجاه لكلٍّ من u و v .
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية لكلٍّ من u و v ، ورسمهما.
- أكمل الشكل المرسوم إلى مثلث، مُذكِّراً الطلبة بكيفية تطبيق قانوني الجيوب وجيبس التمام لحل المثلث.

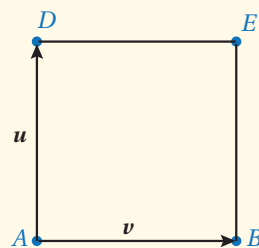
- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
 - « ما قياس زاوية متجه سرعة الطائرة مع الأفقي؟ 90° »
 - « ما قياس زاوية متجه سرعة الرياح مع الأفقي؟ 180° »
 - « ما تأثير الرياح على الطائرة؟ **ستدفع الطائرة إلى الغرب.** »
 - « هل سيُعدّل الطيّار اتجاه الطائرة نحو الشرق أم نحو الغرب للتغلب على أثر الرياح؟ **سيُعدّل اتجاه الطائرة نحو الشرق.** »
 - « ماذا سيفعل الطيّار للتغلب على أثر الرياح، والمحافظة على اتجاه الطائرة شمالاً والسرعة نفسها؟ **سيحرفها جهة اليمين، ويُقلّل سرعتها، بحيث تحرفها الرياح إلى مسارها الصحيح، وتزيد سرعتها حتى تصل 450 km/h** »
 - استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
 - « من يؤيد الإجابة؟ »
 - « من لديه إجابة أخرى؟ »
 - « اذكرها. »
- وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

- وضح للطلبة المقصود بالمتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors) ومعكوس المتجه (opposite vector)، وعبر عنها بالرموز، ثم ارسماها مُستعملًا المسطرة والمنقلة.
- مثال 1**
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، وارسم متوازي أضلاع على لوح المستوى الإحداثي مُشابه للمعطى في المثال، مُبرِّراً كل خطوة من خطوات الحل (يمكن اختيار طالب من ذوي المستوى فوق المتوسط لذكر التبرير).
 - ذكّر الطلبة أن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع يكونان متطابقين ومتوازيين.

تعزيز اللغة ودعمها

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors)، ومعكوس المتجه (opposite vector)، والمحصلة (resultant).

مثال إضافي



- في الشكل المجاور، $ABED$ مُربّع، فيه $\vec{AB} = \vec{v}$ ، $\vec{AD} = \vec{u}$ ،
أعبر عن كل من $\vec{EB}$ و $\vec{DE}$ باستعمال المتجهين $\vec{v}$ ، $\vec{u}$.

$$\vec{DE} = \vec{v}, \vec{EB} = -\vec{u}$$

3. $\vec{QP}$

$$\vec{QP} = -a$$

متجهٌ موازٌ ومعاكسٌ للمتجه $\vec{PQ}$

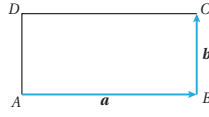
4. $\vec{RQ}$

$$\vec{RQ} = -b$$

متجهٌ معاكسٌ للمتجه $\vec{QR}$

أتدقق من فهمي

في الشكل المجاور، $ABCD$ مستطيل، فيه $\vec{AB} = a$ ، و $\vec{BC} = b$. أعبّر عن كلٍّ مما يأتي باستعمال المتجهين a و b :

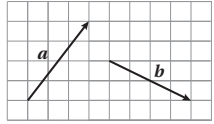


a) $\vec{AD}$ b

b) $\vec{DC}$ a

c) $\vec{CB}$ $-b$

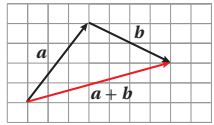
جمع المتجهين هندسيًا



يُمكن إجراء عمليات على المتجهين، مثل: الجمع، والطرح.

لإيجاد $a + b$ هندسيًا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أرسم المتجه a .



الخطوة 2: أرسم المتجه b بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه a .

الخطوة 3: أصِل بين نقطة بداية المتجه a ونقطة نهاية المتجه b .

b ، فيكون المتجه الناتج هو المتجه $a + b$.

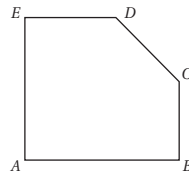
يُسمى المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر **المحصلة** (resultant).

أتعلم

يُطلق على هذه الطريقة في جمع المتجهين هندسيًا اسم قاعدة المثلث.

مثال 2

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجه الذي يُمثل ناتج الجمع في كلٍّ مما يأتي:



1. $\vec{BC} + \vec{CA}$

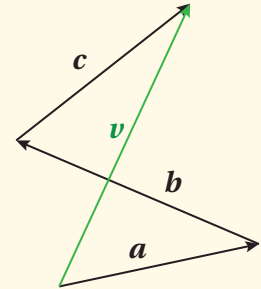
$$\vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$$

أصل نقطة بداية $\vec{BC}$ بنقطة نهاية $\vec{CA}$ ، فينتج $\vec{BA}$

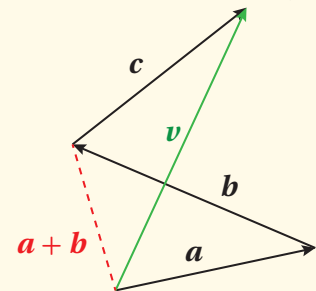
- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتدقق من فهمي) بعد كل مثال (فرديًا، أو ضمن مجموعات).
- تجوّل بين الطلبة مُرشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقَدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

التدريس

- وضّح للطلبة خطوات إيجاد مجموع متجهين هندسيًا باستعمال قاعدة المثلث.
- ارسم متجهين على لوح المستوى الإحداثي لتوضيح أن المتجه b يبقى كما هو من حيث الطول والاتجاه عند عمل انسحاب له، بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه a .
- أخبر الطلبة أن $a + b$ هو متجه يُسمى متجه المحصلة (resultant)، وأن له التأثير نفسه الذي يُحدثه كلٌّ من المتجهين a ، b الواحد تلو الآخر.
- ارسم على اللوح شكلًا يُشبه الشكل الآتي، مُستعملًا أفلانًا ذات ألوان لتمييز متجه المحصلة:



- أخبر الطلبة أن $v = a + b + c$ هو متجه المحصلة، وأنه ناتج جمع المتجهات a ، b ، c ، ثم اشرح لهم قاعدة المثلث؛ لجمع المتجهين a ، b أولاً، ثم جمع المحصلة $a + b$ مع المتجه c لينتج المتجه v كما في الشكل الآتي:



- أكّد للطلبة أنه يمكن تطبيق قاعدة المثلث عند إيجاد مجموع متجهين أو أكثر.

مثال 2

- قبل البدء بتقديم المثال 2، ارسم المضلع $ABCDE$ المعطى في المثال على اللوح.
- ناقش الطلبة في حل فروع المثال، مُبرِّراً الناتج في كل فرع.
- عند مناقشة الطلبة في حل الفرع 4، وضح لهم أن متجه المحصلة الناتج $\vec{AA}$ يُسمى المتجه الصفري، ثم اسألهم: لماذا سُمي بهذا الاسم؟ **لعدم وجود طول واتجاه له.**
- وضح للطلبة كيفية طرح المتجهات برسم المتجهين a, b باستعمال لوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.
- وضح للطلبة كيفية تطبيق قاعدة المثلث لإيجاد ناتج طرح متجهين هندسيًا، حيث $a - b = a + (-b)$
- عند رسم معكوس المتجه b ، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه، مراعيًا أن تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه a .
- عند رسم متجه المحصلة: $a - b$ ، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه.
- وضح للطلبة كيفية تمثيل المتجه a بعد ضربه في عدد حقيقي، وابدأ بالمتجه $2a$ ، و $3a$ ، ثم $-2a$ ، و $-3a$ ، و $-0.5a$
- في أثناء تمثيل المتجه a بـ k ، حيث k عدد حقيقي، اعكس اتجاه المتجه الناتج عندما يكون k عددًا سالبًا.

$$2) \vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EC}$$

$$\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{BC}$$

أصل نقطة بداية $\vec{BA}$ بنقطة نهاية $\vec{EC}$

$$3) \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

أصل نقطة بداية $\vec{AB}$ بنقطة نهاية $\vec{DE}$

$$4) \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA}$$

أصل نقطة بداية $\vec{AB}$ بنقطة نهاية $\vec{CA}$

أنتحق من فهمي

اعتمادًا على الشكل في المثال 2، أكتب المتجه الذي يُمثل ناتج الجمع في كل مما يأتي:

$$a) \vec{AE} + \vec{EC} + \vec{CB} \quad \vec{AB}$$

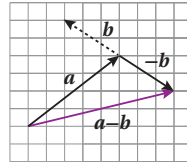
$$b) \vec{BE} + \vec{ED} + \vec{DC} \quad \vec{BC}$$

طرح المتجهين هندسيًا

يُمكن إيجاد ناتج طرح متجهين أو أكثر، أو ناتج ضرب متجه في عدد ثابت هندسيًا.

لإيجاد $a - b$ ، أجمع المتجه a مع معكوس المتجه b أي:

$$a - b = a + (-b)$$



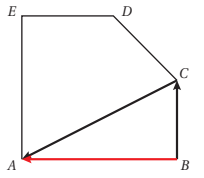
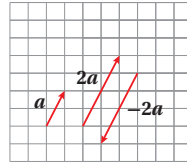
ولذلك يُمكن إيجاد ناتج طرح $a - b$ هندسيًا بطريقة مشابهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور. أجد محصلة a و $-b$

ضرب المتجه في عدد ثابت هندسيًا

ينتج من ضرب المتجه a في العدد الحقيقي k متجه مواز للمتجه a ، ويكون للمتجهين ka و a الاتجاه نفسه إذا كان k عددًا موجبًا، واتجاهان متعاكسان إذا كان k عددًا سالبًا.

$$2a = a + a$$

$$-2a = (-a) + (-a)$$



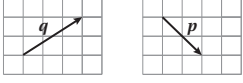
أتعلم

- يُسمى المتجه $\vec{AA}$ المتجه الصفري؛ وهو متجه ليس له مقدار واتجاه.
- لأي متجه a ، فإن:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

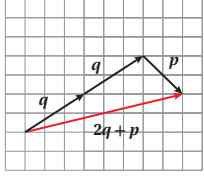
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

مثال 3



اعتمادًا على الشكل المجاور، أجد هندسيًا كلاً مما يأتي:

1 $2q + p$

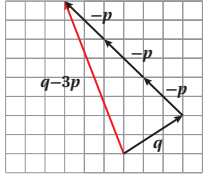


الخطوة 1: أرسم المتجه $2q$

الخطوة 2: أجد محصلة المتجهين $2q$ و p



2 $q - 3p$



الخطوة 1: أرسم المتجه $-3p$ من رأس المتجه q

الخطوة 2: أجد محصلة المتجهين q و $-3p$

أنتحق من فهمي

اعتمادًا على الشكل في المثال 3، أجد هندسيًا كلاً مما يأتي: انظر الهامش

a) $p + 3q$

b) $3q - 2p$

c) $2q - \frac{1}{2}p$

جمع المتجهات وطرحها جبريًا

يمكن إيجاد ناتج الجمع والطرح للمتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية عن طريق جمع مركباتها الأفقية والرأسية، أو طرحها.

مفهوم أساسي

إذا كان $a = \langle x_1, y_1 \rangle$ و $b = \langle x_2, y_2 \rangle$ ، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن:

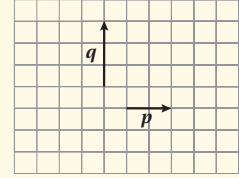
$$a + b = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \quad a - b = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \quad ka = \langle kx_1, ky_1 \rangle$$

مثال 3

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، مستعينًا بلوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.

مثال إضافي

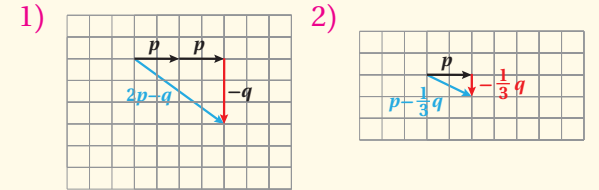
- اعتمادًا على الشكل المجاور، جد هندسيًا كلاً مما يأتي:



1 $2p - q$

2 $p - \frac{1}{3}q$

الحل:

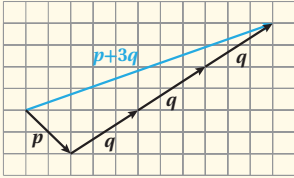


تنويع التعليم (استراتيجية التعلم بالأقران)

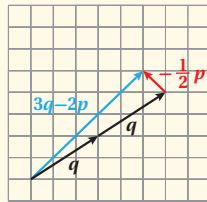
- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تمثيل المتجهات، وبخاصة تلك التي تُضرب في عدد حقيقي كسري، وحل مسائل عنها هندسيًا؛ لذا اطلب إليهم حل المثال الإضافي ضمن مجموعات؛ ما يُسهّل عليهم تمثيل المتجهات هندسيًا عندما تكون أفقية أو رأسية.
- وزّع الطلبة الذين أتقنوا مهارات تمثيل المتجهات على المجموعات؛ لمساعدة زملائهم في أثناء حل التمارين في بند (أنتحق من فهمي)، أو بند (أندرب وأحل المسائل).
- اكتب النص الوارد في بند (مفهوم أساسي) على يمين اللوح بخط واضح، مُستعملًا الألوان المناسبة، ثم وُضح للطلبة كيفية إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي عندما تكون المتجهات مكتوبة بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أنه يمكن التحقّق ممّا ورد في البند السابق بتمثيل المتجهات هندسيًا، ثم اذكر أمثلة عددية على ذلك.

إجابة أنتحق من فهمي 3:

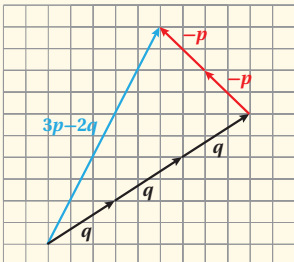
a) $p + 3q$



c) $2q - 0.5p$



b) $3q - 2p$



مثال 4

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، والفست انتباههم إلى أهمية استعمال الأقواس في كل فرع؛ لتمييز المتجهات بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أن المتجهات المعطاة هي متجهات بالوضع القياسي (standard position)، وأن أي متجه على المستوى الإحداثي يمكن كتابته بالوضع القياسي من دون أن يؤثر ذلك في مقداره أو اتجاهه.
- يمكنك الاستفادة من برمجية جيوجبرا في توضيح حل المسائل المعطاة عن المتجهات، والتحقق هندسياً من صحة ناتج كل منها.

مثال 5: من الحياة

تنبيه: وجّه الطلبة إلى تعديل رقم المثال ليصبح 5 بدلاً من 4 في كتبهم؛ فهذا خطأ مطبعي.

- قبل مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، اطلب إليهم ذكر تطبيقات حياتية على جمع المتجهات وطرحها.
- ناقش الطلبة في حل المثال، وارسم شكلاً تقريبياً للمعطيات على محورين متعامدين، وثبت عليها رموز الاتجاهات الأربعة (الشمال N ، والجنوب S ، والشرق E ، والغرب W).
- اكتب خطوات مُنظمة للحل كما في كتاب الطالب.

مثال 4

إذا كان $a = \langle 3, 1 \rangle$ و $b = \langle -4, 6 \rangle$ و $c = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 1 $a + b$
 $a + b = \langle 3 + (-4), 1 + 6 \rangle$
 $= \langle -1, 7 \rangle$
- 2 $2a$
 $2a = \langle 2 \times 3, 2 \times 1 \rangle = \langle 6, 2 \rangle$
- 3 $c - b$
 $c - b = \langle -3 - (-4), -1 - 6 \rangle$
 $= \langle 1, -7 \rangle$
- 4 $a + c$
 $a + c = \langle 3 + (-3), 1 + (-1) \rangle$
 $= \langle 0, 0 \rangle$

أتحقق من فهمي

إذا كان $a = \langle 3, 1 \rangle$ و $b = \langle -2, 7 \rangle$ و $c = \langle 0, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي: انظر الهامش

- a) $-b$ b) $4c$ c) $b - c$ d) $4a + 3c$

لجمع المتجهات وطرحها تطبيقات في مجالات عدّة، مثل: الهندسة، والطيران.

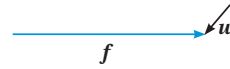
مثال 5: من الحياة

ملاحّة جوية: بدأت طائرة رحلتها نحو الشرق بسرعة مقدارها 400 km/h ، لكنّها واجهت رياحاً تهبّ من الشمال الشرقيّ بسرعة مقدارها 50 km/h . كيف يُمكنُ لِرَبّانِ الطائرة أن يُعدّل مقدارَ سرعتها واتجاهها ليصل إلى وجهته من دون تأخير؟

الخطوة 1: أرسم المتجهين اللذين يُمثّلان السرعة والاتجاه لكل من الطائرة، والرياح.

يُمثّل المتجه f السرعة المتجهة للطائرة.

يُمثّل المتجه w السرعة المتجهة للرياح. ألاحظ من الشكل الآتي أنّه يجب على الطائرة أن تنحرف عن مسارها قليلاً بحيث تعيدُها الرياح إلى مسارها الأصلي.



أفكر

ما العلاقة بين المتجهين $v - u$ و $u - v$ ؟

أتعلّم

في المثال 4، المتجه a هو معكوس المتجه c ؛ لأن مجموعهما يساوي المتجه الصفري؛ أي إنّ: $a + c = 0$

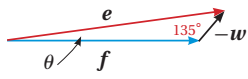
أتذكّر

يُمثّل مقدار (طول) كل من المتجه f والمتجه w سرعة، لا مسافة.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

- a) $-b = \langle 2, -7 \rangle$ b) $4c = \langle 0, -20 \rangle$
c) $b - c = \langle -2, 12 \rangle$ d) $4a + 3c = \langle 12, -11 \rangle$

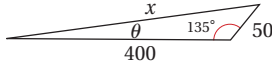
الخطوة 2: أرسم المتجه الذي يُمثل السرعة المتجهة للرياح بعد انحرافها عن مسارها.



بما أن الرياح تهب من الشمال الشرقي، فإن اتجاه w هو 45° ؛ لذا، فإن الزاوية بين w و f تساوي 135° (زاويتان متجاورتان على مستقيم)، ويكون المتجه e هو محصلة المتجهين f و w .

الخطوة 3: أجد سرعة الطائرة بعد انحرافها.

مقدار سرعة الطائرة بعد انحرافها عن مسارها يساوي مقدار المتجه e ، وليكن x .



أجد طول x باستعمال قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

قانون جيب التمام

$$x^2 = 400^2 + 50^2 - 2 \times 400 \times 50 \cos 135^\circ$$

بالتعويض

$$= 190784.3$$

بالتبسيط، واستعمال الآلة الحاسبة

$$x \approx 436.8$$

الخطوة 4: أجد قياس زاوية انحراف الطائرة θ باستعمال قانون الجيوب:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

قانون الجيوب

$$\frac{\sin \theta}{50} = \frac{\sin 135^\circ}{436.8}$$

بالتعويض

$$\theta = \sin^{-1}(0.0809)$$

بالتبسيط

$$\approx 4.64^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، يجب على الرّبان أن يحرف مسار الطائرة بزاوية 4.64° شمال الشرق، ويزيد مقدار سرعتها إلى 436.8 km/h ، عندئذ ستعمل الرياح على تقليل مقدار سرعتها إلى 400 km/h

أتحقق من فهمي

ملاحظة بحرية: انطلق قارب شرعي من ميناء بسرعة متجهة مقدارها 30 km/h ، مُتجهًا إلى جزيرة تقع غربه. وفي هذه الأثناء، هبّت رياح بلغت سرعتها المتجهة 10 km/h بزاوية 25° جنوب الغرب. كيف يمكن للبحار تعديل مقدار سرعة القارب واتجاهه للوصول إلى وجهته من دون تأخير؟ انظر الهامش

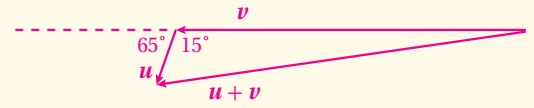
أتعلم

لماذا وُضع المتجه w بدلاً من المتجه w ؟



استطاع الأخوان رايت في العقد الأول من القرن العشرين أن يصنعوا أول طائرة تعمل بمحرك، ويمكن التحكم فيها.

إجابة أتحقق من فهمي 5:



افترض أن v هو متجه سرعة القارب، وأن u هو متجه سرعة الرياح (انظر الشكل أعلاه). وبذلك، فإن:

$$|v + u|^2 = 30^2 + 10^2 - 2(30)(10) \cos 115^\circ = 1252$$

$$|v + u| = \sqrt{1252} \approx 35.38 \text{ km/h}$$

$$\frac{\sin \theta}{10} = \frac{\sin 115^\circ}{35.38}$$

$$\sin \theta \approx 0.26$$

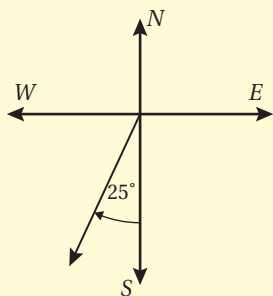
$$\theta = \sin^{-1}(0.26) = 15.07^\circ$$

أي يجب تعديل اتجاه القارب بزاوية 15.07° شمال غرب، وزيادة سرعته لتصبح 35.38 km/h لكي يصل إلى وجهته في الوقت المحدد.

إرشادات للمعلم

نبّه الطلبة عند حل المثال 5 والتدريب في بند (أتحقق من فهمي) إلى ما يأتي:

- جملة (رياح تهب من الشمال الشرقي) تعني أن متجه الرياح يصنع مع الأفقي زاوية قياسها 225° ، وأن قياس الزاوية بين معكوس متجه الرياح والمحور الأفقي هو 45° ، أمّا لو كانت الرياح تهب باتجاه الشمال الشرقي، فذلك يعني أن متجه الرياح يصنع زاوية قياسها 45° مع المحور الأفقي.



- جملة (رياح تهب بزاوية 25° جنوب غرب) تعني أن متجه الرياح يصنع مع محور y السالب (من S إلى W) زاوية قياسها 25° (يُعرف هذا التعبير بقياس الزاوية الربعية)، فيكون قياس الزاوية بينه وبين محور x السالب 65° (انظر الشكل المجاور).

• وجه الطلبة إلى حل الأسئلة (1-13) في مجموعات، وتجوّل بينهم مُرشِّداً، ومُساعداً، ومُوجِّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.

• ناقش الطلبة في حل الأسئلة (14-29)، ثم شاركهم في حلها على اللوح.

• وجه الطلبة إلى تعديل وحدة قياس السرعة في السؤال 29 لتصبح km/h بدلاً من km في كتبهم.

• أخبر الطلبة أنه يمكنهم استعمال برمجة جيو جبرا للتحقق من حل أسئلة الدرس في البيت، أو عن طريق تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.

• إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالباً تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

• اطلب إلى الطلبة حل بقية الأسئلة بعد الحصة، ثم عرضها عليك للتحقق من صحة الحل.

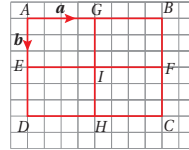
الواجب المنزلي:

• اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الحادية والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.

• يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.

• في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

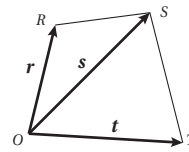


اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كل متجهٍ ممّا يأتي بدلالة a و b :

- 1 $\vec{EI}$ a 2 $\vec{FC}$ b 3 $\vec{DE}$ $-b$
4 $\vec{GE}$ $b - a$ 5 $4\vec{GD}$ $8b - 4a$ 6 $\vec{CA}$ $-(2a + 2b)$

إذا كان $a = \langle 34, -86 \rangle$ و $b = \langle -65, 17 \rangle$ و $c = \langle 9, -1 \rangle$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

- 7 $a + c$ $\langle 43, -87 \rangle$ 8 $b - a$ $\langle -99, 103 \rangle$ 9 $3c + b$ $\langle -38, 14 \rangle$ 10 $a + b - 2c$ $\langle -49, -67 \rangle$



اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلاً ممّا يأتي بدلالة r و s و t :

- 11 $\vec{SR}$ $r - s$ 12 $\vec{ST}$ $t - s$ 13 $\vec{RS}$ $s - r$

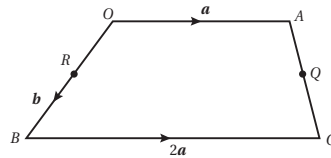
14 إذا كان $\langle 3x - y, y - x^2 \rangle = \langle 7, -5 \rangle$ ، فما قيمة كل من x و y ؟

$x = 1$ و $y = -4$ ، أو $x = 2$ و $y = -1$

إذا كان $e = \langle -3, -2 \rangle$ و $f = \langle 2, 4 \rangle$ ، فأمثل كلاً ممّا يأتي على المستوى الإحداثي: انظر ملحق الإجابات

- 15 $e + f$ 16 $3f$ 17 $e - f$
18 $f - e$ 19 $4e$ 20 $2f + e$

21 إذا كان $d = \langle 5, 9 \rangle$ و $e = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأجد $|4d - 3e|$ ، $\frac{1}{3}|e|$ انظر ملحق الإجابات



في الشكل المجاور، $OACB$ شبه منحرف، فيه R منتصف $\vec{OB}$ ، و Q منتصف $\vec{AC}$. إذا كان $\vec{BC} = 2a$ و $\vec{OB} = b$ ، فأكتب كلاً ممّا يأتي بدلالة a و b : انظر ملحق الإجابات

- 22 $\vec{QR}$ 23 $\vec{AQ}$ 24 $\vec{RQ}$

25 كيف يمكن تحديد إذا كان $\vec{OA}$ و $\vec{BC}$ متوازيين في الشكل $OACB$ ؟

26 رياضة: في سباقٍ للمشي، انطلقت رند من نقطة البداية، فطعت مسافة 15 km في اتجاه الشرق، ثم اتجهت شمالاً

مسافة 17 km، كم كيلومتراً تبعد رند عن نقطة البداية؟ 22.67 km تقريباً.

27 نزهة بحرية: أبحر قاربٌ سياحيّ مسافة 40 km جنوباً، ثم تحرك مسافة 70 km في اتجاه الشرق. أجد اتجاه القارب

وبُعده عن نقطة انطلاقه. انظر ملحق الإجابات

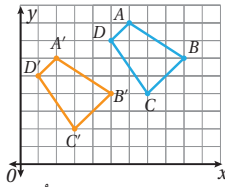
أخطاء مفاهيمية:

عند حل الأسئلة: 11، 12، 13، قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن طرح متجهين بكتابة عكس الحل الصحيح، مثل كتابة $s - r$ بدلاً من $r - s$ ؛ لذا الفت انتباه الطلبة إلى اتجاه السهم المرسوم على المتجه، وأن عكس الاتجاه الذي يشير إليه السهم عند الحركة يدل على معكوس المتجه؛ ما يعني أنه يجب كتابة المتجه بإشارة سالبة. وكذلك كتابة المتجه المطلوب في صورة محصلة (مجموع) متجهين.



28 أخلّ المسألة الواردة في بداية الدرس. انظر ملحق الإجابات

29 سباق زعانف: شارك سامي في سباق الزعانف الذي نظّمه اتحاد الرياضات البحرية على شاطئ خليج العقبة. سيح سامي بسرعة متجهة مقدارها 3 km في اتجاه الجنوب، لكنه واجه أمواجاً سرعتها 1.8 km، وقد دفعته إلى اتجاه الشرق، فغيّر مقدار سرعته واتجاهها ليقاوم الأمواج، ويفوز بالسباق. أجد السرعة المتجهة التي يجب أن يسبح بها سامي.



انظر ملحق الإجابات

تحويلات هندسية: أجيّ انسحاباً للشكل ABCD المجاور باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$ ، حيث a مقدار الانسحاب على محور x ، و b مقدار الانسحاب على محور y :

30 أجد $\langle a, b \rangle$. $\langle a, b \rangle = \langle -4, -2 \rangle$

31 إذا أجيّ انسحاباً للشكل $A'B'C'D'$ باستعمال المتجه $\langle 3, -4 \rangle$ ، فأرسم الشكل الناتج من الانسحاب، وأسميه $A''B''C''D''$. انظر ملحق الإجابات

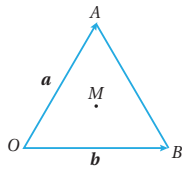
32 أجد المتجه $\langle f, e \rangle$ الذي يصف انسحاب الشكل ABCD إلى الشكل $A''B''C''D''$. $\langle f, e \rangle = \langle -1, -6 \rangle$

33 انطلقت سيارة من المدينة A إلى المدينة B، فقطعت مسافة 200 km في اتجاه 040° ، ثم غيرت اتجاه حركتها إلى 050° ، فقطعت مسافة 150 km. أجد اتجاه النقطة B وبُعدها عن النقطة A. انظر ملحق الإجابات

34 إذا كانت $0 < 15, 7 < - < 3, x > + y^2 < 3, 5 >$ ، فأجد قيمة كل من العددين x و y . $x = -13, y = \pm 2$

مهارات التفكير العليا

35 تبرير: انطلق يخبث في رحلة بحرية من الميناء، فقطع مسافة 60 km شمالاً، ثم تحرك مسافة 40 km شرقاً، ثم مسافة 16 km جنوباً، فوصل إلى جزيرة. أجد بُعد الجزيرة عن الميناء، ثم أجد المسافة التي قطعها يخبث في رحلته البحرية حتى وصل الجزيرة، وأقارن بينهما. انظر ملحق الإجابات



تحذ: يُمثل الشكل المجاور OAB مثلثاً مُتطابق الأضلاع، ويُمثل فيه M مركز المثلث، ما يعني أن المستقيم الواصل بين رأس المثلث والنقطة M عمودي على الضلع المقابل:

36 أكتب المتجه $\vec{AB}$ بالصورة الإحداثية. انظر ملحق الإجابات

37 أثبت أن $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. انظر ملحق الإجابات

- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- عند حل السؤال 37، ذكر الطلبة بخصائص المثلث متطابق الأضلاع: ارتفاعاته منصفات لأضلاعه (أي إنها القطع المتوسطة للمثلث)، ومنصفات لزواياه، وهي تتقاطع في مركزه الذي يقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس.

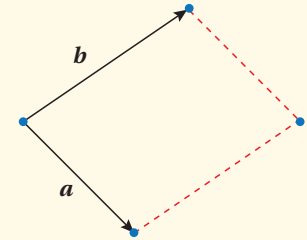
الإثراء

5

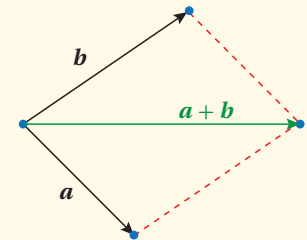
- وضح للطلبة كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًا بطريقة أخرى تُسمى قاعدة متوازي الأضلاع؛ إذ يمكن إيجاد محصلة المتجهين a, b في الشكل المجاور باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: سحب المتجه b بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه a .

الخطوة 2: إكمال رسم متوازي الأضلاع، بحيث يكون المتجهان a, b ضلعين فيه كما في الشكل الآتي:



الخطوة 3: رسم قُطر متوازي الأضلاع المار بتقاطع المتجهين لتمثيل المتجه $a + b$ كما في الشكل الآتي:



الخاتمة

6

- اطلب إلى كل طالب اختيار فكرة فهمها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها جيداً، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- اطلب إلى كل طالب تسليمك ورقته.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، خطّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي ترصدها.

نتائج الدرس

- يجد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.
- يتعرف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.
- يجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يحسب الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.

التعلم القبلي:

- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي.
- حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام.

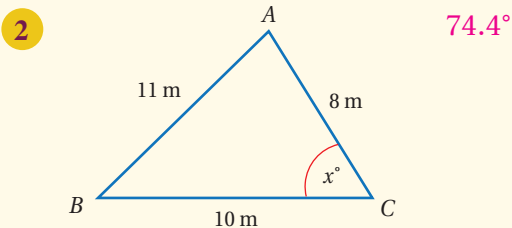
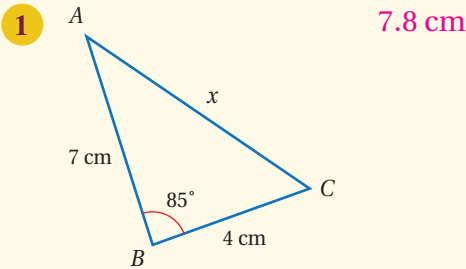
التهيئة

1

- ذكّر الطلبة بما تعلموه عن المتجهات في الدرسين السابقين، ثم اطرح عليهم السؤال الآتي:
- « إذا كان $u = \langle 3, -2 \rangle$, $v = \langle 4, 1 \rangle$ ، فجد كلاً مما يأتي:

- $u + v$ $\langle 7, -1 \rangle$
- $v - u$ $\langle 4, 3 \rangle$
- $2v + 3u$ $\langle 17, -4 \rangle$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x في المثلثين الآتين:



الضرب القياسي
Scalar Product



ضرب المتجهات، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

الضرب القياسي.

دفع محمد عربة طفليته بقوة مقدارها 70 N، وبزاوية مقدارها 54° مسافة 18 m. ما مقدار الشغل الذي بذله لدفع العربة بوحدة جول (J)، ويهمل قوة الاحتكاك؟

تعرفت سابقاً العمليات على المتجهات، مثل ضرب متجه في عدد ثابت، وسأتعرف في هذا الدرس كيفية إيجاد ناتج ضرب متجهين. **الضرب القياسي** (scalar product) هو عملية جبرية بين متجهين، تنتج منها كمية قياسية، ويرمز إليها بالرمز $v \cdot w$ ، وتقرأ: v dot w .

مفهوم أساسي

الضرب القياسي:

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 \quad \text{فإن: } w = \langle w_1, w_2 \rangle, \text{ و } v = \langle v_1, v_2 \rangle$$

مثال 1

إذا كان $v = \langle 2, 8 \rangle$ ، و $w = \langle -5, 4 \rangle$ ، فأجد $v \cdot w$:

$$\begin{aligned} v \cdot w &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \\ &= 2 \times -5 + 8 \times 4 \\ &= -10 + 32 \\ &= 22 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعويض

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كان $v = \langle -3, 2 \rangle$ ، و $u = \langle 6, 9 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- $u \cdot v$ 0
- $v \cdot u$ 0
- $u \cdot u$ 117

أتعلم

يسمى الضرب القياسي أيضاً الضرب النقطي Dot product

أتعلم

لاي متجه u ، فإن: $u \cdot u = |u|^2$

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« ما المقصود بالشغل؟ الطاقة المبذولة لتحريك جسم ما مسافة محددة.
« علام يعتمد مقدار الشغل؟ يعتمد على مقدار القوة المؤثرة، واتجاهها، والمسافة التي تحركها الجسم.
« ما وحدة قياس الشغل؟ الجول؛ وهو مقدار الشغل المبذول عندما تؤثر قوة مقدارها نيوتن واحد في جسم يتحرك مسافة متر واحد في اتجاه تلك القوة.
« هل تبذل شغلاً إذا حاولت دفع حائط غرفة الصف؟ لا؛ لأنه لن يتحرك.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- أخبر الطلبة أنهم سيتعلمون في هذا الدرس كيفية حساب الشغل.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: الضرب القياسي (scalar product)، والشغل (work).

- وضح للطلبة مفهوم الضرب القياسي لمتجهين، وكيفية حسابه إذا أُعطي متجهان بالصورة الإحداثية.

مثال 1

ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبين كيفية إيجاد الضرب القياسي لمتجهين، مُوضّحاً علاقة ناتج الضرب القياسي للمتجه في نفسه بمقدار المتجه (أو طوله) عندما يحل الطلبة التدريب في بند (أتحقق من فهمي).

مثال إضافي

إذا كان $v = \langle -6, -3 \rangle$, $u = \langle \frac{3}{2}, -4 \rangle$ ، فجد $u \cdot v$. 3

إرشادات للمعلم

وضّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيب التمام، مُبيناً أنه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كل منهما، وقياس الزاوية بينهما.

التقويم التكويني:

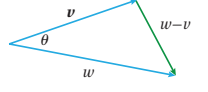
- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبين خطوات إيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين، واسألهم عن الحالات المختلفة للعلاقة بين متجهين، ثم اربطها بنتائج ضرب القياسي.

مثال إضافي

- جد قياس الزاوية بين المتجهين $w = \langle 1, -5 \rangle$, $v = \langle -4, 2 \rangle$ 127.9°

أخطاء شائعة: قد يخطئ بعض الطلبة في حساب قياس الزاوية بين متجهين؛ لذا وجههم إلى رسم المتجهين على المستوى الإحداثي، لملاحظة الزاوية بين المتجهين، ومقارنتها بإجاباتهم؛ للتحقق من معقولية الحل.



تعرفتُ سابقاً أنه إذا كان $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإن طول المتجه المرسوم باللون الأخضر في الشكل المجاور هو $|w-v|$ ، حيث: $w-v = \langle w_1-v_1, w_2-v_2 \rangle$ وباستعمال قانون جيبس التمام، فإن:

$$\begin{aligned} |w-v|^2 &= |w|^2 + |v|^2 - 2|w||v|\cos\theta \\ (w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 &= |w|^2 + |v|^2 - 2|w||v|\cos\theta \\ &= w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|w||v|\cos\theta \\ w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 &= w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|w||v|\cos\theta \\ -2w_1v_1 - 2w_2v_2 &= -2|w||v|\cos\theta \\ w_1v_1 + w_2v_2 &= |w||v|\cos\theta \\ v_1w_1 + v_2w_2 &= |v||w|\cos\theta \\ v \cdot w &= |v||w|\cos\theta \end{aligned}$$

ولذلك، فإن:

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$$

مفهوم أساسي

يمكن إيجاد ضرب القياسي للمتجهين a و b باستعمال الصيغة الآتية: $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ الزاوية المحصورة بين المتجهين.

مثال 2

أجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $a = \langle 6, 8 \rangle$ و $b = \langle 3, 4 \rangle$ **الخطوة 1:** أجد مقدار المتجه a .

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} && \text{صيغة مقدار المتجه} \\ &= \sqrt{6^2 + 8^2} && \text{بالتعويض} \\ &= \sqrt{100} = 10 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة أنه توجد تسميات أخرى للضرب القياسي، منها: الضرب النقطي (dot product)، والضرب الداخلي (inner product).



تُستخدم المتجهات في إنتاج الألعاب الإلكترونية؛ فهي تساعد المبرمجين على ضبط المواقع والاتجاهات لحركة الأجسام التي يتحكم فيها اللاعبون.

الخطوة 2: أجد مقدار المتجه b .

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

الخطوة 3: أجد الضرب القياسي بين a و b .

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$= 6 \times 3 + 8 \times 4$$

$$= 18 + 32$$

$$= 50$$

الخطوة 4: أعوض القيمة الناتجة من الخطوة السابقة في الصيغة الأخرى لقانون الضرب القياسي.

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

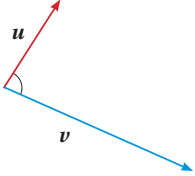
$$= \frac{50}{10 \times 5} = 1$$

$$\theta = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

بما أن قياس الزاوية بين المتجهين a و b صفر، فهما متوازيان.

أتحقق من فهمي

أجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $u = \langle -1, 1 \rangle$ و $v = \langle 2, 7 \rangle$ تقريباً 61° .



إذا كان a و b متجهين غير صفرين، وكانت الزاوية المحصورة بينهما قائمة، فإن المتجهين يكونان متعامدين، ويكون ناتج الضرب القياسي بينهما صفرًا؛ لأن $\cos 90^\circ = 0$.

إرشاد

أرسم المتجهين في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي، مُلاحظًا وضع التوازي بينهما.

مثال 3

- أخبر الطلبة أن الضرب القياسي لمتجهين متعامدين يساوي صفرًا، مُبينًا سبب ذلك.
- وَصِّح للطلبة أنه إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين غير صفرين يساوي صفرًا فإن المتجهين متعامدان.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال.

مثال إضافي

- حدّد إذا كان المتجهان في كلٍّ مما يأتي متعامدين، أو متوازيين، أو غير ذلك:

a) $u = \langle 2, 4 \rangle$, $v = \langle -8, 4 \rangle$ متعامدان

b) $u = \langle 1, -2 \rangle$, $v = \langle -3, 6 \rangle$ متوازيان

c) $u = \langle -2, 4 \rangle$, $v = \langle -1, 5 \rangle$ غير ذلك

d) $u = \langle 4, 5 \rangle$, $v = \langle 10, -8 \rangle$ متعامدان

مثال 4: من الحياة

- ناقش الطلبة في مفهوم الشغل، وصيغة إيجادها، ثم اكتب على اللوح وحدتي القوة والشغل.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال.

إرشادات للمعلم

القوة: مؤثر يؤدي إلى تغيير حالة الجسم الحركية. والقوة من الكميات المتجهة، وهي تقاس بوحدة نيوتن. أما الشغل فهو من الكميات المرتبطة بالقوة؛ إذ تبذل القوة شغلاً على جسم ما عندما تحركه في اتجاه ما بمقدار إزاحة معين، ويقاس الشغل بوحدة جول.

مثال إضافي

تدفع سلوى مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 17 N، وتصنع ذراع المكنسة زاوية قياسها 65° مع أرضية الغرفة. ما الشغل (بالجول) الذي تبذله سلوى لتحريك المكنسة مسافة 4 m بإهمال قوة الاحتكاك؟ **28.7 J تقريباً.**

مثال 3

أحدد إذا كان المتجهان $u = \langle 2, 3 \rangle$ و $v = \langle -6, 4 \rangle$ متعامدين أم لا.

$$\begin{aligned} \text{صيغة ضرب القياسي} \\ u \cdot v &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \\ &= 2 \times -6 + 3 \times 4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

بما أن $u \cdot v = 0$ ، فإن المتجهين متعامدان.

أتحقق من فهمي

غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفراً، وإنما يساوي 3. أحدد إذا كان المتجهان $u = \langle 1, 0 \rangle$ و $v = \langle 3, -5 \rangle$ متعامدين أم لا.

توجد تطبيقات عملية عدة على ضرب القياسي للمتجهات، أهمها حساب الشغل W الناتج من تأثير قوة ثابتة F بزاوية محددة θ على جسم ما؛ لتحريكه من نقطة إلى أخرى مسافة مقدارها d وحدة. فالشغل هو كمية قياسية تساوي ناتج ضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة، ووحدة قياسه هي جول (J). يمكن إيجاد مقدار الشغل باستعمال الصيغة الآتية:

$$W = |F| |d| \cos \theta$$

أتعلم

وحدة قياس الشغل هي نيوتن - متر، وتسمى الجول، ويرمز إليها بالرمز J

مثال 4: من الحياة



فيزياء: سحب عامل صندوقاً بقوة مقدارها $F = 13 \text{ N}$ ، وبذل شغلاً مقداره $W = 20 \text{ J}$ لسحب الصندوق مسافة أفقية مقدارها $d = 18 \text{ m}$. ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟

$$\begin{aligned} \text{قانون الشغل} \\ W &= |F| |d| \cos \theta \\ 20 &= 13 \times 18 \times \cos \theta \\ 20 &= 234 \times \cos \theta \end{aligned}$$

$$\frac{20}{234} = \cos \theta$$

$$\cos^{-1}(0.0855)$$

$$\theta = 85.1^\circ$$

بالتبسيط

معكوس جيب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

سحب فارس عربة، فبذل شغلًا مقداره 13 J، بقوة مقدارها

$$d = 30 \text{ m}$$

ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة

المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟

89.5° تقريبًا.



أدرب وأحل المسائل

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$1 \quad a = \langle 6, 8 \rangle, b = \langle 4, -3 \rangle \quad 0$$

$$2 \quad u = \langle -3, 11 \rangle, v = \langle -9, 4 \rangle \quad 71$$

$$3 \quad c = \langle -12, 43 \rangle, v = \langle 22, 14 \rangle \quad 338 \quad 4 \quad d = \langle 21, 32 \rangle, e = \langle -21, 25 \rangle \quad 359$$

$$5 \quad \text{إذا كان } |a| = 9 \text{ و } |b| = 6 \text{، وكان قياس الزاوية المحصورة بين } a \text{ و } b \text{ هو } 42^\circ \text{، فأجد ناتج } a \cdot b \quad 40.13$$

$$6 \quad \text{إذا كان } |a| = 34 \text{ و } |b| = 76 \text{، وكان قياس الزاوية المحصورة بين } a \text{ و } b \text{ هو } 120^\circ \text{، فأجد ناتج } a \cdot b \quad -1292$$

$$7 \quad \text{أجد قياس الزاوية بين المتجهين } a = \langle 7, 10 \rangle \text{ و } b = \langle 4, -10 \rangle \text{ لأقرب جزء من عشرة.} \quad 123.2^\circ$$

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما:

$$8 \quad c = \langle 2, 4 \rangle, d = \langle -24, 12 \rangle$$

$$0, 90^\circ$$

$$9 \quad a = \langle 4, 16 \rangle, k = \langle 8, -2 \rangle$$

$$0, 90^\circ$$

$$10 \quad \text{أحدد إذا كان المتجهان } e = \langle 3, 4 \rangle \text{ و } a = \langle 11, -8 \rangle \text{ متعامدين أم لا، مُبرّرًا إجابتي.}$$

$$a \cdot e = 1 \quad \text{إذن، المتجهان غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا.}$$

$$3b - 4(b+2) = 0$$

$$3b - 4b - 8 = 0$$

$$-b = 8, b = -8$$

$$11 \quad \text{إذا كان } r = \langle 3, -4 \rangle \text{ و } s = \langle b, b+2 \rangle \text{ متجهين متعامدين، فأجد قيمة } b.$$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثانية والعشرين من كتاب التمارين، مُحددًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

- أشرك الطلبة كافة في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكر أنه ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

الإثراء

5

إذا كان للمتجهين u و v المقدار نفسه، فأثبت أن $v + u$ و $u - v$ متعامدان.

تعليمات المشروع

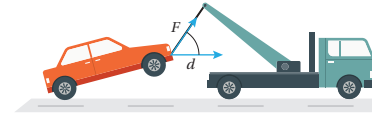
- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (5) من المشروع.
- وجّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

الختام

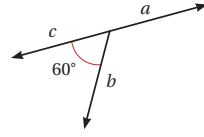
6

- اطلب إلى الطلبة - كتابةً - بيان كيف يمكن تحديد إن كان متجهان معطيان متعامدين أم متوازيين، ثم تحديد المتجهين المتعامدين والمتجهين المتوازيين من بين المتجهات الآتية:
- $u = \langle 4, 6 \rangle, v = \langle -3, -6 \rangle,$
 $w = \langle -8, 4 \rangle, z = \langle 10, 15 \rangle$

u, z : متعامدان. v, w : متعامدان.



- 12 سيارات: تسحب شاحنة سيارة كما في الشكل المجاور. إذا كان مقدار قوة السحب $F = 34N$ ، والمسافة المقطوعة $d = 12 km$ ، وشغل الشاحنة المبذول $W = 46 J$ ، فأجد قياس زاوية السحب.
- في الشكل المجاور، إذا كان $|a| = 2$ و $|b| = 4$ و $|c| = 5$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



- 13 $a \cdot b = -4$ 14 $b \cdot c = 10$ 15 $a \cdot c = -10$

- 16 أخل المسألة الواردة في بداية الدرس. $w = 70 \times 18 \times \cos 54^\circ \approx 74 J$

مهارات التفكير العليا

برهان: إذا كانت a, b, c متجهات، وكان 0 المتجه الصفري، فأثبت صحة كل مما يأتي:

- 17 $a \cdot b = b \cdot a$ 18 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ 19 $0 \cdot a = 0$

- 20 مسألة مفتوحة: إذا كان $p \cdot q = 30$ و $q = \langle 6, 2 \rangle$ ، فأجد قيمة مُحتملة للمتجه p . انظر ملحق الإجابات

- 21 مسألة مفتوحة: أجد متجهاً يُعايد المتجه $a = \langle -8, -2 \rangle$. انظر ملحق الإجابات

- 22 تبرير: أبتين باستخدام المتجهات أن المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(-4, -2)$, $(1, 5)$, $(6, -2)$ متطابق الضلعين، ثم أجد قياسات جميع زواياه، مُبرراً إجابتي. انظر ملحق الإجابات

- 23 تبرير: إذا كان المتجهان $a = \langle -1, r \rangle$ و $b = \langle 2, -3 \rangle$ متوازيين، فما قيمة r ؟

انظر ملحق الإجابات

تنبيه: نبه الطلبة إلى تعديل النقطة $(4, -2)$ في السؤال 22 لتصبح $(-4, -2)$.

اختبار نهاية الوحدة

8 إذا كان $a = \langle 2, -3 \rangle$ ، $b = \langle 3, 4 \rangle$ ، فإن $2b \cdot a$ تساوي:

- a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانت النقاط A, B, C, D نقاطاً في المستوى الإحداثي، حيث $A(4, -1)$ ، $B(2, -3)$ ، $D(7, 1)$ ، فأوجد إحداثي النقطة C إذا كان:

9 $\vec{AC} = -2\vec{AB}$ c) $(8, 3)$

10 $\vec{DC} = \frac{1}{3}\vec{DB}$ c) $(\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$

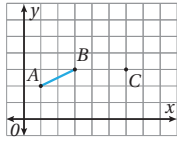
أحدد في ما يأتي العبارات الصحيحة، مُصحّحاً الخطأ في غير الصحيح منها: (11-13) انظر ملحق الإجابات

11 المتجهان المتساويان لهما نفس المقدار.

12 المتجهان المتوازيان لهما نفس المقدار والاتجاه.

13 لأي متجهين u و v ، فإن $u \cdot v = v \cdot u$.

أنسخ الرسم البياني الآتي، ثم أستعمله لأجيب عن الأسئلة التي تليه: (14-16) انظر ملحق الإجابات



14 إذا كان $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة E على المستوى الإحداثي.

15 إذا كان $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة D على المستوى الإحداثي.

16 إذا كان $\vec{AB} = 2\vec{AM}$ ، فأحدد النقطة M على المستوى الإحداثي.

17 إذا كانت $\vec{DC} = k\vec{AM}$ ، فأجد قيمة الثابت k . $k = 4$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $v = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإن $|v|$ تساوي:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كان $A(2, 5)$ ، $B(-1, 7)$ ، فإن $\vec{BA}$ هو:

- a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

- c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارة الصحيحة في ما يأتي هي:

a) مقدار المتجه $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدار المتجه $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدار المتجه $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدار المتجه $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانت $A(0, 2)$ ، $B(3, y)$ ، وكان $|\vec{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإن y تساوي:

- a) 5 b) -1

- c) $5, -1$ d) $7, -3$

إذا كان $v = \langle 1, 5 \rangle$ و $u = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجيب عن الأسئلة: 5, 6, 7

5 $v - u$ تساوي:

- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

- c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كان $p = u + 2v$ ، فإن $|p|$ تساوي:

- a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوس المتجه $u + v$ هو:

- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 2, -4 \rangle$

- c) $\langle 4, 6 \rangle$ d) $\langle -4, -6 \rangle$

التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عين بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجباً منزلياً، ثم ناقشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أن الأسئلة (26-30) وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

ملحوظة: تُخصّص حصتان (90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

إرشادات للمعلم

وجّه الطلبة إلى تعديل نص السؤالين 23 و 24 في كتبهم كما وردا في هذا الدليل.

يتقدم طلبه الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنة بالدول الأخرى التي يتقدم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدم أيضاً طلبه الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة (PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية - وفق هذا البرنامج - يُعبر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات ورسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علماً بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعين عليك - عزيزي المعلم - تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمن امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

25 أفلعت طائرتان معاً من المطار في الوقت نفسه. وقد رصد برج المراقبة حركة الطائرتين، فوجد بعد ثوانٍ عدّة أن $a = \langle 6, 8 \rangle$ يُمثل مسار الطائرة الأولى، وأن $b = \langle 4, -3 \rangle$ يُمثل مسار الطائرة الثانية. هل يتعامد مسارا الطائرتين؟ أبرر إجابتي.

نعم، يتعامدان؛ لأن $a \cdot b = 0$

تدريب على الاختبارات الدولية

26 أجد الزاوية θ بين المتجهين p و q إذا كان $p = \langle 5, -1 \rangle$, $q = \langle -2, 3 \rangle$

يُمثل الشكل المجاور المتجهين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ المرسومين في الوضع القياسي، حيث O نقطة الأصل، و M نقطة منتصف القطعة المستقيمة AB .

27 أكتب المتجه $\vec{AB}$ بدلالة a و b . انظر ملحق الإجابات

28 أبرهن أن $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ انظر ملحق الإجابات

الشكل المجاور هو سداسي منتظم، مركزه O ، وفيه $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

29 أكتب المتجه $\vec{AB}$ بدلالة a و b . انظر ملحق الإجابات

30 إذا مُدَّ $\vec{AB}$ على استقامته حتى النقطة K بحيث كانت $AB : BK = 1 : 2$ ، فأكتب المتجه $\vec{CK}$ بدلالة a و b . انظر ملحق الإجابات

إذا كان $u = \langle -1, 5 \rangle$ و $v = \langle 2, -1 \rangle$ و $w = \langle 4, -2 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

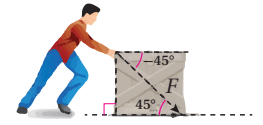
18 $-3(v-w)$

19 $v \cdot 2u$

20 $w \cdot (u + \frac{1}{2}w)$

21 الزاوية بين المتجهين v و w . 0°

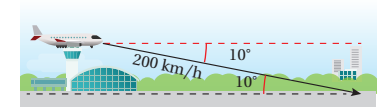
22 دفع عامل صندوقاً بقوة 78 N ، وبزاوية 45° كما في الشكل التالي. أجد مقدار الشغل الذي بذله العامل لتحريك الصندوق مسافة 12 m 661.9 J



23 ركض حسام في اتجاه السلّة في أثناء مباراة دوري كرة السلّة بسرعة أفقية مقدارها 5 m/s ، وقذف الكرة بسرعة مقدارها 20 m/s ، وبزاوية قياسها 38° مع الأفقي. أجد محصلة سرعة الكرة.



24 هبطت طائرة بسرعة مقدارها 200 km/h ، وبزاوية انخفاض قياسها 10° . أكتب السرعة المتجهة للطائرة بالصورة الإحداثية. انظر ملحق الإجابات



كتاب التمارين

الدرس 2

جمع المتجهات وطرحها

أُمثلُ بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية اعتمادًا على الشكلي المجاور: (1-6) انظر ملحق الإجابات

1 $a + b$

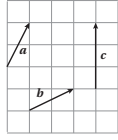
3 $a - c$

5 $-c$

2 $-a$

4 $b - a$

6 $-a - b$



في الشكل المجاور، M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$

أكتب كلًّا من المتجهات الآتية بدلالة المتجهين a و b :

7 $\overrightarrow{AB} = b - a$

8 $\overrightarrow{BO} = -b$

9 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(b - a)$

10 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(a + b)$

11 أجدُّ على الشكل موقعي النقطتين X و Y ، بحيث يكون $\overrightarrow{OY} = a + 2b$ ، $\overrightarrow{OX} = 2a + b$. انظر ملحق الإجابات

12 أكتب $\overrightarrow{XY}$ بدلالة a و b ، $b - a$

13 ما المتجهات الأخرى المكافئة لـ $\overrightarrow{XY}$ ؟ $\overrightarrow{AB}$

إذا كان $a = (27, -15)$ ، $b = (9, -21)$ ، $c = (-12, 0)$ ، فأجدُّ كلًّا مما يأتي:

14 $a - c = (39, -15)$

15 $b - 2a = (-45, 9)$

16 $3c - b = (-45, 21)$

17 $a - b - c = (30, 6)$

يُمثلُ الشكل المجاور المتجهات الآتية، علمًا بأنَّ O هي نقطة الأصل:

$\overrightarrow{OA} = (2, 2)$ $\overrightarrow{OB} = (4, 1)$ $\overrightarrow{OC} = (6, 0)$

أكتب كلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية، ثمَّ أرسِّمُ على الشكل:

18 $\overrightarrow{AB}$

19 $\overrightarrow{AC}$

20 $\overrightarrow{BC}$

21 حلَّ إجابات المسائل السابقة كافة لإثبات أنَّ ABC مستقيم؟ أبرِّز إجابتي.

نعم، كافية. بما أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فإن $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$ ، وبما أنهما يشتركان في النقطة A فهما يُكوِّنان مستقيماً واحداً. وهذا يعني أن ABC خط مستقيم؛ أي إنَّ النقط A و B و C تقع على المستقيم نفسه.

الدرس 1

المتجهات في المستوى الإحداثي

إذا كان $\overrightarrow{AD} = (2, -1)$ ، فأكتب كلًّا مما يأتي بالصورة الإحداثية، ثمَّ أجدُّ مقداره:

1 $\overrightarrow{AF} = (5, 1), \sqrt{26}$

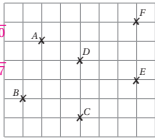
3 $\overrightarrow{CA} = (-2, 4), 2\sqrt{5}$

5 $\overrightarrow{EF} = (0, 3), 3$

2 $\overrightarrow{AB} = (-1, -3), \sqrt{10}$

4 $\overrightarrow{EB} = (-6, -1), \sqrt{37}$

6 $\overrightarrow{DC} = (0, -3), 3$



7 أكتب كلًّا من $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BF}$ بالصورة الإحداثية. ماذا أستنتج من موقع B ، D ، و F ؟

انظر ملحق الإجابات

أستعمل إحداثي النقطة $A(6, 3)$ للإجابة عن المسائل الآتية:

8 إذا كان $\overrightarrow{AB} = (2, -5)$ ، فأجدُّ إحداثي النقطة $B(8, -2)$

9 إذا كان $\overrightarrow{AC} = (-3, 4)$ ، فأجدُّ إحداثي النقطة $C(3, 7)$

10 إذا كان $\overrightarrow{AD} = (6, 0)$ ، فأجدُّ إحداثي النقطة $D(12, 3)$

11 شاحنتان: أكتب بالصورة الإحداثية السرعة المتجهة لشاحنة تسير على طريقٍ مُنحدرٍ، علمًا بأنَّ سرعتها الأفقية $v_x = 58 \text{ km/h}$ و سرعتها الرأسية $v_y = 37 \text{ km/h}$. $(58, 37)$

12 يدفع صالِحُ مكبسة كهربائية بقوة مقدارها 272 N ، وبزاوية قياسها 51° مع المحور الأفقي. أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية. $(171.18, 211.38)$

13 إذا كان $|AB| = 7$ ، حيث $A(-1, 4)$ هي نقطة بدايته، والنقطة $B(x, 2)$ هي نقطة نهايته، فأجدُّ قيمة x ، مُبرِّزًا إجابتي.

انظر ملحق الإجابات

الدرس 3

الضرب القياسي

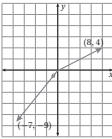
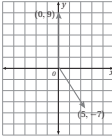
أجدُّ ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلِّ مما يأتي:

1 $a = (-1, 5)$ ، $b = (-6, -2)$ -4

3 -92

2 $u = (3, 9)$ ، $v = (6, 5)$ 63

4 -72

أحدُّ إذا كانَّ المتجهان u و v متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك في كلِّ مما يأتي:

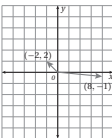
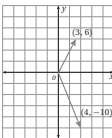
5 $u = (4, -9)$ ، $v = (-9, 4)$ غير ذلك

6 $u = (-5, 2)$ ، $v = (-10, 25)$ غير ذلك

أجدُّ قياس الزاوية بين المتجهين في كلِّ مما يأتي:

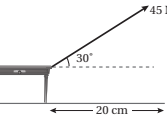
7 142.1°

8 131.6°

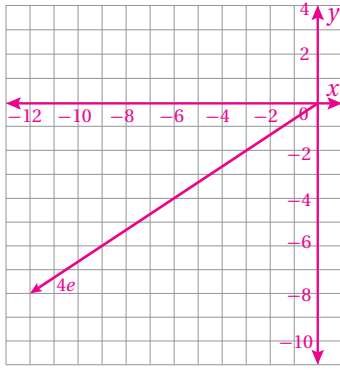



9 يُمثلُ الشكل المجاور سحب طاولة بقوة مقدارها 45 N ، وزاوية قياسها 30° مع الأفقي. إذا سُحِبَت الطاولة مسافة 20 cm ، فأجدُّ مقدار الشغل الذي بُدِّلَ.

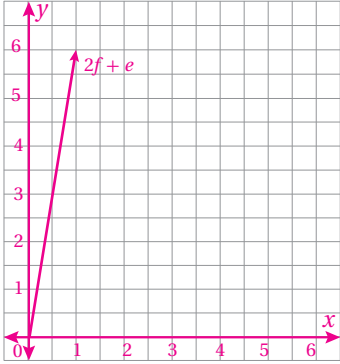
تقريباً 7.8 J



19)



20)



$$21) \quad \left| \frac{1}{3} e \right| = \frac{1}{3} |e| = \frac{1}{3} \sqrt{(11)^2 + (-8)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{185} \approx 4.5$$

$$|4d - 3e| = \sqrt{(-13)^2 + (60)^2} = \sqrt{3769} \approx 61.4$$

$$22) \quad \begin{aligned} \vec{QR} &= \vec{QA} + \vec{AO} + \vec{OR} \\ &= \frac{1}{2} \vec{CA} + \vec{AO} + \frac{1}{2} \vec{OB} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{CB} + \vec{BO} + \vec{OA}) + \vec{AO} + \frac{1}{2} \vec{OB} \\ &= \frac{1}{2} (-2\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{b} \\ &= -\frac{3}{2} \mathbf{a} \end{aligned}$$

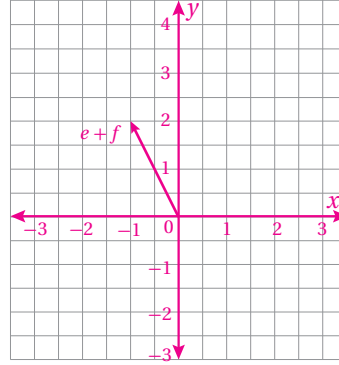
$$23) \quad \begin{aligned} \vec{AQ} &= \frac{1}{2} \vec{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{2} (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{a}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$24) \quad \vec{RQ} = \frac{3}{2} \mathbf{a}$$

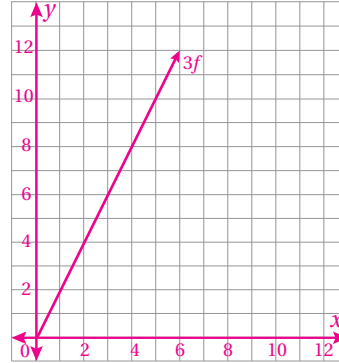
$$\vec{BC} = 2 \vec{OA}, \text{ فإن } \vec{BC} = 2\mathbf{a}, \vec{OA} = \mathbf{a} \text{ بما أن } (25)$$

$$\vec{BC} \parallel \vec{OA}, \text{ إذن}$$

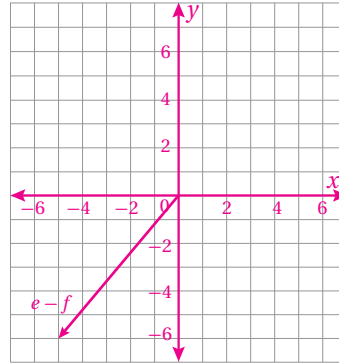
15)



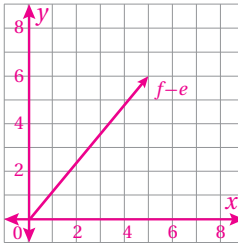
16)



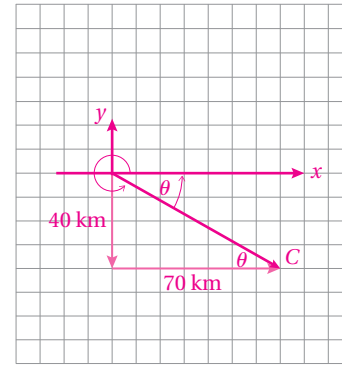
17)



18)



(27) انظر الشكل الآتي:



$$|AC| = \sqrt{40^2 + 70^2}$$

$$= \sqrt{6500} \approx 80.62 \text{ km}$$

$$\tan \theta = \frac{40}{70}$$

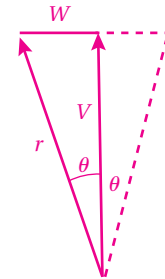
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{7} \right) \approx 29.7^\circ$$

أي إن القارب يبعد 80.62 km عن نقطة انطلاقه A، وفي اتجاه 330.3° مع محور x الموجب.

$$28) \quad |v+w| = \sqrt{450^2 + 60^2} \approx 453.98 \text{ km/h}$$

$$\tan \theta = \frac{60}{450} = \frac{2}{15}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{15} \right) \approx 7.59^\circ$$

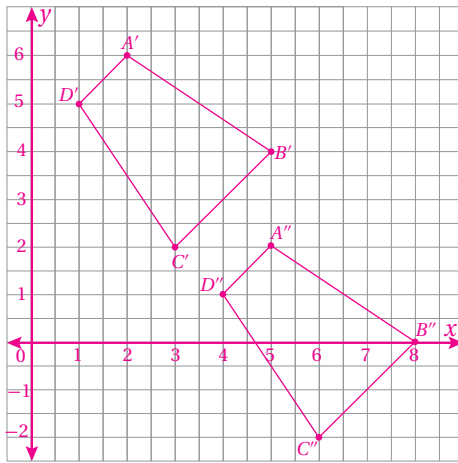


أي يتعين على الرّبان أن يحرف مسار الطائرة بزاوية 7.59° نحو اليمين، ويزيد سرعتها لتصبح 453.98 km، فتعيدها الرياح إلى اتجاه الشمال، وتخفض سرعتها حتى تصل 450 km/h

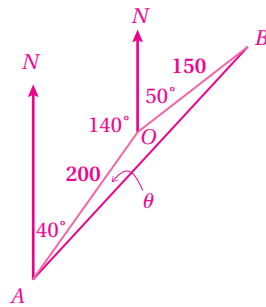
$$29) \quad |v+u| = \sqrt{3^2 + 1.8^2} = \sqrt{12.24} \approx 3.50 \text{ km/h}$$

إذن، يجب أن يسبح بسرعة 3.5 km/h، وفي اتجاه 31° غرب الجنوب حتى ينهي السباق في موعده.

(31) انظر الشكل الآتي:



(33) انظر الرسم التقريبي المجاور:



$$m\angle AON = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$m\angle AOB = 360^\circ - (50^\circ + 140^\circ) = 170^\circ$$

$$AB^2 = 200^2 + 150^2 - 2 \times 200 \times 150 \times \cos 170^\circ$$

$$= 121588.47$$

$$AB = \sqrt{121588.47} \approx 348.70 \text{ km}$$

$$\frac{\sin \theta}{150} = \frac{\sin 170}{348.7}$$

$$\sin \theta = 0.075$$

$$\theta = \sin^{-1} (0.075) \approx 4.30^\circ$$

أي إن B تبعد عن A مسافة 348.70 km، واتجاهها من A هو 044.3°

$$34) \quad x = -13, y = \pm 2$$

الدرس 3:

(17) إذا كان $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$, $c = \langle c_1, c_2 \rangle$ فإن:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 \quad (\text{لأن ضرب الأعداد الحقيقية تبديلي})$$

$$b \cdot a = b_1 a_1 + b_2 a_2 \quad \text{وإن:}$$

إذن، $a \cdot b = b \cdot a$ ؛ أي إن الضرب القياسي للمتجهات تبديلي.

(18) إيجاد الطرف الأيسر:

$$a \cdot (b + c) = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot (\langle b_1, b_2 \rangle + \langle c_1, c_2 \rangle)$$

$$= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle$$

$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

ثم إيجاد الطرف الأيمن:

$$a \cdot b + a \cdot c = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle c_1, c_2 \rangle$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

(بتبديل موقعي الحدين: الثاني، والثالث)

إذن، $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ؛ أي إن الضرب القياسي يتوزع على جمع المتجهات.

$$(19) \quad 0 \cdot a = \langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0 \times a_1 + 0 \times a_2 = 0 + 0 = 0$$

(20) بافتراض أن $p = \langle a, b \rangle$ ، فإن:

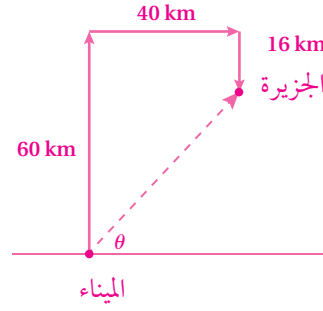
$$6a + 2b = 30 \quad \text{أي إن } p \cdot q = 30$$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أن $a = 2$ ،

$$\text{فإن } b = 9 \text{ وعندئذٍ، فإن } p = \langle 2, 9 \rangle$$

وبافتراض وجود قيم أخرى لـ a ، فإنه توجد قيم مناظرة لـ b ، فتنتج قيم ممكنة للمتجه p .

(35) انظر الرسم التقريبي المجاور:



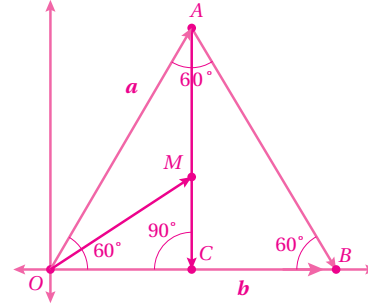
مجموع المسافات التي قطعها اليخت: $60 + 40 + 16 = 116 \text{ km}$

وبافتراض أن الجزيرة تبعد عن الميناء $x \text{ km}$ ، فإن:

$$x = \sqrt{44^2 + 40^2} \approx 59.46 \text{ km}$$

إذن، مجموع المسافات التي قطعها اليخت تساوي مثلي بُعد الجزيرة عن الميناء تقريباً؛ لأن اليخت لم يسلك المسار المستقيم من الميناء إلى الجزيرة.

(36) انظر الشكل المجاور.



$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$= -a + b$$

$$= b - a$$

$$= \langle |b| \cos 0^\circ, |b| \sin 0^\circ \rangle - \langle |a| \cos 60^\circ, |a| \sin 60^\circ \rangle$$

$$= \langle |b|, 0 \rangle - \langle \frac{1}{2} |a|, \frac{\sqrt{3}}{2} |a| \rangle$$

$$= \langle |b| - \frac{1}{2} |a|, -\frac{\sqrt{3}}{2} |a| \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{2} |a|, -\frac{\sqrt{3}}{2} |a| \rangle \quad (|a| = |b| \text{ لأن })$$

(37) انظر الشكل السابق.

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AC}$$

(لأن مركز المثلث يقسم القطع المتوسط بنسبة 2:1 من جهة الرأس).

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3} (\vec{AO} + \vec{OC})$$

$$= a + \frac{2}{3} (-a + \frac{1}{2} b)$$

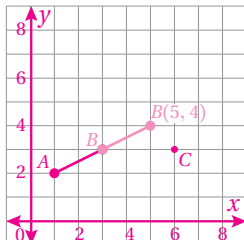
$$= a - \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} b$$

$$= \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} (a + b)$$

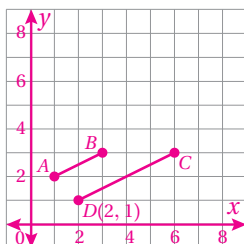
اختبار الوحدة:

- (11) صحيحة.
- (12) غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان.
- (13) صحيحة.

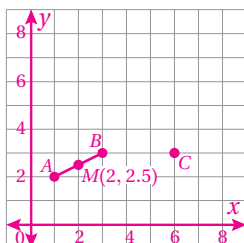
14)



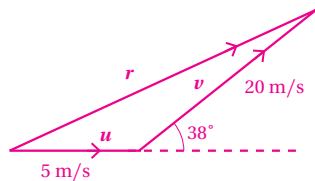
15)



16)



- (23) يُمثّل المتجه u سرعة حسام، ويُمثّل المتجه v سرعة الكرة، ويُمثّل المتجه r محصلة السرعتين. ولهذا، فإن:



$$(|r|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2 \times 5 \times 20 \cos 142^\circ$$

$$= 582.6$$

$$|r| = \sqrt{582.6} \approx 24.1 \text{ m/s}$$

أي إن محصلة سرعة الكرة هي 24.1 m/s تقريبًا.

- (21) بافترض أن $b = \langle c, d \rangle$ يعامد المتجه $a = \langle -8, -2 \rangle$ ، فإن:

$$d = -4c \text{ ؛ أي إن } -8c - 2d = 0$$

إذن، جميع المتجهات في صورة $\langle c, -4c \rangle$ تعامد المتجه $a = \langle -8, -2 \rangle$ ، ومن أمثلتها: $\langle 1, -4 \rangle$ ، $\langle 3, -12 \rangle$ ، $\langle -2, 8 \rangle$.

- (22) إذا كان $A(6, -2)$ ، $B(1, 5)$ ، $C(-4, -2)$ ، فإن:

$$\vec{AB} = \langle -5, 7 \rangle \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\vec{AC} = \langle -10, 0 \rangle \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{100} = 10$$

$$\vec{BC} = \langle -5, -7 \rangle \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

إذن، المثلث ABC متطابق الضلعين؛ لأن $AB = BC = \sqrt{74}$

$$m\angle A = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \times |\vec{AC}|} \right) = \cos^{-1} \frac{50}{\sqrt{74} \times 10} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle C = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \times |\vec{CB}|} \right) = \cos^{-1} \frac{50}{10 \times \sqrt{74}} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - (54.5^\circ + 54.5^\circ) = 71^\circ$$

- (23) $a \parallel b$ إذا كان قياس الزاوية بينهما 0° ، أو 180° ؛

أي إن $\frac{a \cdot b}{|a| \times |b|}$ يساوي $\cos 0^\circ$ ، أو $\cos 180^\circ$ ؛

$$\frac{a \cdot b}{|a| \times |b|} = \pm 1 \text{ أي إن}$$

$$\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}} \right)^2 = (\pm 1)^2$$

$$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1 \Rightarrow 4+12r+9r^2 = 13+13r^2$$

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$(2r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حل آخر:

$a \parallel b$ إذا وُجد عدد حقيقي k ، حيث: $b = ka$ ؛

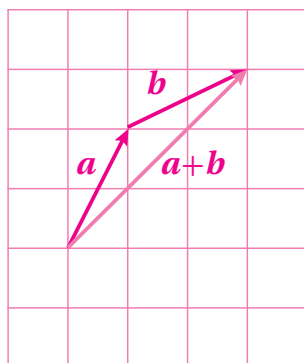
أي إن: $\langle 2, -3 \rangle = k \langle -1, r \rangle$ ، ومنه:

$$-3 = kr \Rightarrow r = \frac{-3}{k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \text{، و } 2 = -k \Rightarrow k = -2$$

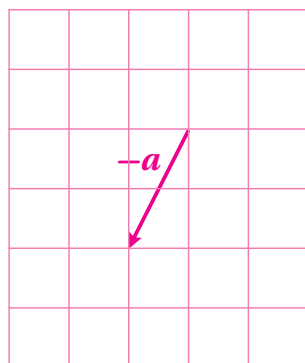
$$\begin{aligned}
 13) \quad |\vec{AB}| &= \sqrt{(x+1)^2 + 4} \\
 7 &= \sqrt{(x+1)^2 + 4} \\
 49 &= (x+1)^2 + 4 \\
 (x+4)^2 &= 45 \\
 x+1 &= \pm\sqrt{45} \\
 x &= -1 \pm 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

كتاب التمارين - الدرس 2:

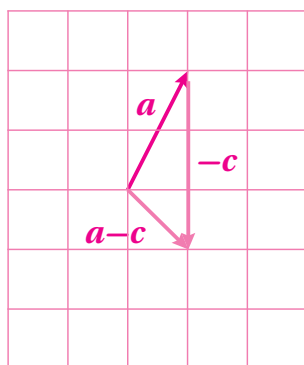
1)



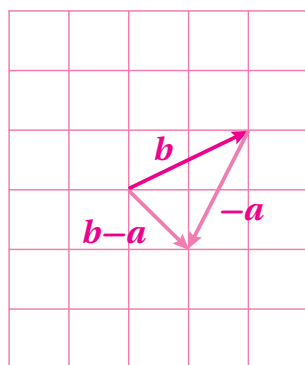
2)



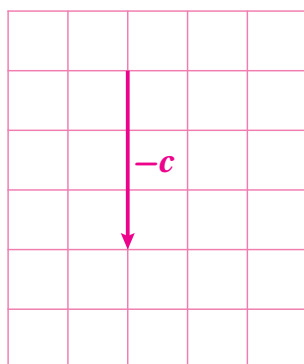
3)



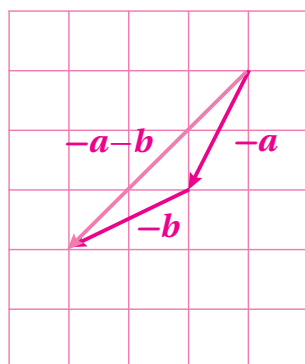
4)



5)



6)



(24) قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360^\circ - 10^\circ = 350^\circ$ ؛ لذا، فإن الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:
 $\langle 200\cos 350^\circ, 200\sin 350^\circ \rangle = \langle 196.96, -34.73 \rangle$

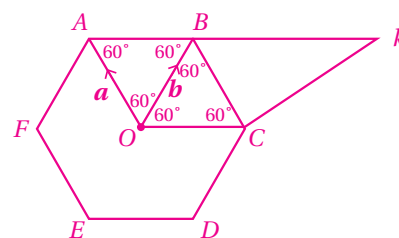
$$27) \quad \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}
 28) \quad \vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} \\
 &= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(-\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
 &= \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})
 \end{aligned}$$

$$29) \quad \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$30) \quad \vec{CK} = \vec{CB} + \vec{BK} = \vec{CB} + 2\vec{AB}$$

لكن $\vec{CB} = \vec{OA}$ لأن $ABCO$ متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.



$$\vec{CK} = \vec{OA} + 2\vec{AB} = \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}, \text{ إذن،}$$

كتاب التمارين - الدرس 1:

$$7) \quad \vec{BD} = \langle 3, 2 \rangle$$

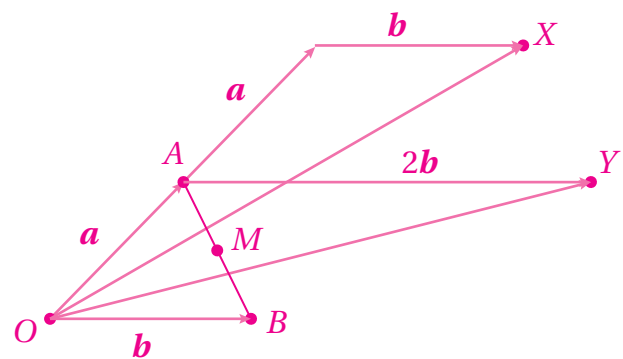
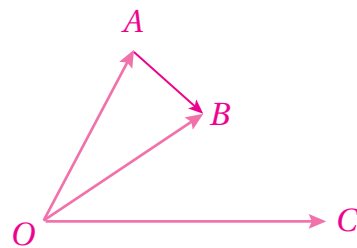
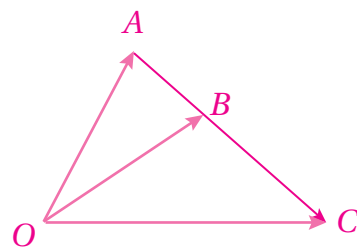
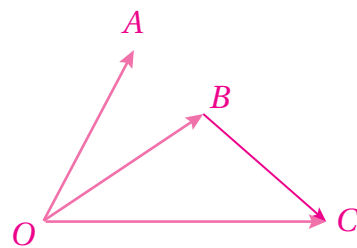
$$\vec{BF} = \langle 6, 4 \rangle$$

اتجاه $\vec{BD}$ هو $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$

واتجاه $\vec{BF}$ هو $\tan^{-1}(\frac{4}{6}) = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$

إذن، النقاط B ، و D ، و F تقع على خط مستقيم واحد.

11)

18) $\langle 2, -1 \rangle$ 19) $\langle 4, -2 \rangle$ 20) $\langle 2, -1 \rangle$ 

(21) نعم، كافية. بما أن $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ ، فإن $\vec{AC} \parallel \vec{AB}$ ، وبما أنهما يشتركان في النقطة B فهما يُكوّنان مستقيماً واحداً. وهذا يعني أن ABC خط مستقيم؛ أي إن النقاط A ، B ، و C تقع على المستقيم نفسه.

مخطط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية. • آلة حاسبة.	1
الدرس 1: أشكال الانتشار.	• يتعرف شكل الانتشار. • يصف العلاقة بين مجموعتي بيانات ممثلة بشكل الانتشار. • يمثل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدوياً، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • يرسم المستقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، ويجد معادلته يدوياً، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • يستعمل المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرات إذا عُلِّمت قيمة المتغير الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة.	• شكل الانتشار، • الارتباط، الارتباط • الموجب، • الارتباط السالب، • المستقيم الأفضل • مطابقة.	• ورق رسم بياني • لوح متنقل للمستوى الإحصائي (الربع الأول فقط). • مسطرة شفافة. • آلة حاسبة. • برمجية جيو جبرا.	4
معمل برمجية جيو جبرا	• يمثل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ويرسم المستقيم الأفضل مطابقة لها باستعمال برمجية جيو جبرا.		• برمجية جيو جبرا.	1
الدرس 2: المنحنى التكراري التراكمي.	• يرسم المنحنى التكراري التراكمي يدوياً، وباستعمال أدوات التكنولوجيا. • يُقدّر الربيعات Q_1، Q_2، Q_3، والمدى الربيعي، والمئينات للجداول التكرارية ذات الفئات، ويفسر معنى كل منها ضمن مواقف حياتية. • يجد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع.	• المنحنى التكراري • التراكمي.	• ورق رسم بياني. • لوح متنقل للمستوى الإحصائي. • مسطرة شفافة. • آلة حاسبة. • برمجية جيو جبرا.	3
الدرس 3: مقاييس التشتت للجداول التكرارية ذات الفئات.	• يجد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، ويفسر معنى كل منهما في مواقف حياتية متنوعة. • يختار الصيغة التي يفضلها لحساب التباين. • يجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الممثلة بمُدْرَج تكراري.		• آلة حاسبة.	3
الدرس 4: احتمالات الحوادث المتنافية.	• يميز الحادتين المتنافيتين من الحادتين غير المتنافيتين. • يجد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة. • يمثل التجارب العشوائية بأشكال فن، ويستعملها لإيجاد الاحتمالات. • يجد احتمال الحادث المتمم.	• الحادث البسيط، • الحادث المُركَّب، • الحادثان • المتنافيان، • الحادث المتمم، • أشكال فن.	• أحجار نرد. • صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة. • بطاقات مرقمة. • آلة حاسبة.	3
الدرس 5: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.	• يميز الحادتين المستقلتين من الحادتين غير المستقلتين. • يجد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة. • يمثل التجارب العشوائية بالشجرة الاحتمالية، ويستعملها لإيجاد الاحتمالات. • يجد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة.	• الحوادث المستقلة، • الحوادث غير المستقلة، • الاحتمال • المشروط، جدول • الاتجاهين.	• أحجار نرد. • صندوق فيه كرات، أو بطاقات ملونة. • بطاقات مرقمة. • آلة حاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز عرض Data Show	1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				21

نظرة عامة على الوحدة:

تعلّم الطلبة سابقاً تنظيم البيانات في جداول تكرارية، وتقدير مقاييس نزعتها المركزية، وكيفية إيجاد الربيعات 1 و 2 و 3 للقيم المفردة، واستعمالها لعرض البيانات المفردة بطريقة الصندوق ذي العارضتين. وكذلك إيجاد مقاييس التشتت للقيم المفردة. وسيتعلمون في هذه الوحدة تقدير مقاييس التشتت، وتقدير المئينات لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي، وسيتعرفون العلاقة بين مجموعتي بيانات (متغيرين) عن طريق تمثيلهما باستعمال شكل انتشار يدويًا، وباستعمال برمجية جيوجبرا، وسيستعملون المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية المتغير الآخر. سيتعلم الطلبة أيضًا حساب احتمالات الحوادث المركبة، وتمييز الحوادث المتنافية من الحوادث غير المتنافية، والحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، واستعمال القوانين وأشكال فن والشجرة الاحتمالية لحساب الاحتمالات.

ما أهمية هذه الوحدة؟

يساعدنا علم الإحصاء والاحتمالات على تفسير الظواهر، وتحليل البيانات الكثيرة في حياتنا اليومية. فمثلاً، إذا أردتُ استنتاج العلاقة بين زمن الاستيقاظ صباحاً وتحصيل الطلبة الدراسي، فإنني أحتاجُ إلى أداة إحصائية تُسمى شكل الانتشار، ومفهوم الارتباط، وهو مما سأتعلمُه في هذه الوحدة.

تعلّمتُ سابقاً:

- ✓ تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات.
- ✓ إيجاد مقاييس النزعة المركزية للبيانات (مفردات، جداول تكرارية)، وتحديد أثر إجراء تحويل خطي للقيم في مقاييس نزعتها المركزية.
- ✓ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المفردة أو المنظمة في جداول تكرارية.
- ✓ حساب الاحتمال لحوادث بسيطة.

سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- ◀ وصف العلاقة بين متغيرين باستعمال شكل الانتشار، والمستقيم الأفضل مطابقة.
- ◀ إيجاد قيم الربيعات والمئينات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
- ◀ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- ◀ حساب احتمال حوادث مركبة، والاحتمال المشروط.

106

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقاً

الصف التاسع

- إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والنوال لبيانات منظمة في جداول تكرارية ذات فئات، وفي مُدرجات ومنحنيات تكرارية.
- حساب مقاييس التشتت لبيانات مفردة، وتحديد أثر التحويلات الخطية للقيم في تلك المقاييس.
- إيجاد مجموعة عناصر اتحاد حادثين أو تقاطعهما.
- إيجاد احتمالات حوادث مركبة لتجربة عشوائية.

الصف العاشر

- تمثيل البيانات ذات المتغيرين بشكل الانتشار، ووصف العلاقة بين المتغيرين، واستعمال المستقيم الأفضل لمطابقة لنقاط شكل الانتشار لتمثيل العلاقة (إن وُجدت)، وتقدير قيمة متغير إذا عُلِمَت قيمة المتغير الآخر.
- استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتمثيل البيانات، وتقدير قيم الربيعات والمئينات لتلك البيانات.
- تقدير مقاييس التشتت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- إيجاد احتمالات حوادث مركبة تشمل المتنافية، وغير المتنافية، والمستقلة، وغير المستقلة، والمشروطة.

لاحقاً

الصف الحادي عشر العلمي

- إيجاد معامل ارتباط بيرسون، ومعامل ارتباط الرتب (سبيرمان) لقيم متناظرة لمتغيرين، وتفسير معنى كل منهما.
- تعرف مفهوم المتغير العشوائي.
- تحديد الحادث الذي يحقق كل قيمة للمدى في المتغير العشوائي.
- إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي.
- إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.
- توظيف جدول التوزيع الاحتمالي في حساب توقع المتغير العشوائي (المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي).

مشروع الوحدة: مستوى الأقارب التعليمي.

هدف المشروع: ترسيخ المفاهيم الإحصائية والاحتمالية التي سيتعلمها الطلبة في هذه الوحدة، بجمع بيانات حقيقية من بيئتهم، ثم تنظيمها في جداول تكرارية، ثم تحليلها باستعمال برمجة جيو جبرا، وكتابة استنتاجات عنها.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية أو خماسية، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مقررًا لهم.
- ذكّر أفراد المجموعات بالمواد والتجهيزات التي تلزمهم لتنفيذ المشروع، مثل: كتاب الطالب، والأوراق الملونة، ولوحة الكرتون، والآلات الحاسبة، وأجهزة الحاسوب، وبرمجة جيو جبرا، وبرمجة العرض التقديمي (بوربوينت)، وآلة التصوير، فضلاً عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مؤكداً لهم أهمية توثيق كل خطوة من خطوات تنفيذ المشروع بالطرائق المناسبة.
- بين لأفراد المجموعات أن المطلوب هو تصميم عرض تقديمي يلخص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصلوا إليها.

عرض النتائج

- وجّه أفراد المجموعات إلى استعمال برمجة العرض التقديمي (بوربوينت) لتلخيص خطوات تنفيذ المشروع والاستنتاجات التي توصلوا إليها.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمّن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- أخبر أفراد المجموعات أنه يُمكن عرض مشروعاتهم داخل الصف إن توافر جهاز عرض رأسي، أو في مختبر الحاسوب.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

فكرة المشروع جمع بيانات عن مستوى الأقارب التعليمي، وتنظيمها، وتحليلها، وكتابة استنتاجات عنها.

المواد والأدوات برمجة جيو جبرا، برمجة العرض التقديمي (بوربوينت).

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أجمع بيانات من 12 عائلة من أقاربي أو جيراني عن المستوى التعليمي للزوج والزوجة.
- 2 أنظّم في الجدول المجاور البيانات التي جمعتها على النحو الآتي:
 - أدوّن في عمودَي الزوج والزوجة قيماً عددية وفق التصنيف الآتي: من دون تعليم (1)، الأساسي (2)، الثانوي (3)، الدبلوم (4)، البكالوريوس (5)، الماجستير (6)، الدكتوراه (7).
- 3 استعمل برمجة جيو جبرا لتمثيل القيم العددية لمستوى تعليم الزوج والزوجة في صورة أزواج مرتّبة على هيئة شكل انتشار، ثم أجد معادلة المستقيم الأفضل مطابقة للنقاط العشرين.
- 4 أنظّم البيانات التي جمعتها في الجدول السابق في جدول تكراري ذي فئات كما في الجدول المجاور.
- 5 أحسب الانحراف المعياري للمستوى التعليمي لكل من الأزواج والزوجات، ثم أقرّن بينهما، وأفسرهما.
- 6 أكتب حادثتين متنافيتين، وآخرين غير متنافيتين عن اختيار شخصي (أو أكثر) عشوائياً من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوعهما معاً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل.
- 7 أكتب حادثتين مستقلتين، وآخرين مشروطين عن اختيار شخصي (أو أكثر) عشوائياً من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوعهما معاً.

عرض النتائج:

أعدّ مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) يلخص العمل، وما توصل إليه كل فرد في المجموعة، وما تعلّمته من هذا المشروع؛ على أن يتضمن العرض التقديمي صوراً للجدول، وشكل الانتشار، وجميع الاستنتاجات التي توصل إليها في أثناء تنفيذ المشروع.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	تمثيل البيانات التي جمعت بطرائق مناسبة تبعاً لنوعها (عددية، غير عددية).			
2	رسم شكل انتشار دقيق، وتحديد المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات.			
3	تنظيم البيانات في جدول تكراري ذي فئات بصورة دقيقة.			
4	إجراء الحسابات المُقترنة بالجدول على نحو صحيح، والتوصل إلى استدلالات مُبرّرة.			
5	مشاركة أفراد المجموعة جميعاً في عرض النتائج على نحو شائق.			

- 1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
- 2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
- 3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: استعمال القوانين لإيجاد كلٍّ من المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المفردة أو المنظمة في جدول ذي تكرارات، وإيجاد الاحتمال لحوادث بسيطة في تجربة عشوائية.
- وجَّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال الذي يلي السؤال. وإذا لم تساعد دراسة المثال المحلول هؤلاء الطلبة، فاطلب إلى الجميع التوقُّف عن حل الأسئلة، ثم اشرح المثال، أو مثلاً مكافئاً له على اللوح بمشاركة طلبة الصف كافة، ويمكنك اختيار بعضهم للمشاركة في شرح المثال.
- اختر سؤالاً واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة - من دون ذكر اسم الطالب-، وأدر نقاشاً حوله.

إرشاد: إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (أختبر معلوماتي)، فناقشهم في المثالين الإضافيين الآتين، مُستعملاً اللوح، واحرص على التدرُّج في توضيح خطوات الحل؛ بُغْيَة تنظيم هذه الخطوات عند حل أسئلة مشابهة، ووجَّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

مثالان إضافيان:

- 1 جد كلاً من المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات في الجدول التكراري الآتي:

القيمة x	10	20	30
التكرار f	2	2	1

$$R = 20, \sigma^2 = 56, \sigma = 7.48$$

- 2 يحتوي صندوق على بطاقات متماثلة، كُتِب على كلٍّ منها أحد الأعداد الآتية: 9، 8، 7، 6، 5، إذا اختار سليم بطاقة من الصندوق عشوائياً، فما احتمال أن تحمل البطاقة عدداً أولياً؟ $\frac{2}{5}$

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمراجعة.

إيجاد المدى، والانحراف المعياري، والتباين للبيانات.

- 1 أجد المدى، والانحراف المعياري، والتباين للبيانات في الجدول التكراري الآتي:

القيمة	التكرار
5	3
6	5
7	8
8	4

مثال: أجد المدى، والانحراف المعياري، والتباين للبيانات في الجدول التكراري المجاور:

القيمة x	10	12	15	17
التكرار f	1	3	4	2

أضيف إلى الجدول أعمدة لأحسب فيها القيم الآتية:

$$x \cdot f, x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})^2 f$$

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
10	1	10	-4	16	16
12	3	36	-2	4	12
15	4	60	1	1	4
17	2	34	3	9	18
المجموع	10	140			50

$$R = 17 - 10 = 7 \quad \text{المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} \quad \text{الوسط الحسابي}$$

$$= \frac{140}{10} = 14 \quad \text{بالتعويض والتبسيط}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{(\sum f)} \quad \text{التباين}$$

$$= \frac{50}{10} = 5 \quad \text{بالتعويض والتبسيط}$$

$$\sigma = \sqrt{5} = 2.24 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد احتمال وقوع حدث في تجربة عشوائية.

يحتوي كيس كُيس على 6 كرات حمراء، و5 كرات زرقاء، و4 كرات خضراء، علماً بأن جميع الكرات متماثلة. سحبَ هذ كرة واحدة عشوائياً، ما احتمال سحب كرة:

1 حمراء؟

2 ليست زرقاء؟

3 صفراء؟

مثال 1: رُميت قطعة نقد منتظمة عشوائياً مرّتين. أجد احتمال ظهور وجه الكتابة (T) مرّتين.

$$A = \{(T, T)\}, n(A) = 1 \quad \text{عناصر الحدث } A, \text{ وعددها}$$

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}, n(\Omega) = 4 \quad \text{عناصر فضاء العينة، وعددها}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} \quad \text{احتمال الحدث } A$$

مثال 2: رمي خليل حجر نرد منتظم مرة واحدة. أجد احتمال وقوع كلٍّ من الحادتين الآتين:

(1) ظهور عدد أقل من 3

إذا افترضت أن A هو حدث ظهور عدد أقل من 3، فإن:

$$A = \{1, 2\}, n(A) = 2 \quad \text{عناصر الحدث } A, \text{ وعددها}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6 \quad \text{عناصر فضاء العينة، وعددها}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{احتمال الحدث } A$$

(2) ظهور عدد أكبر من 6

إذا افترضت أن B هو حدث ظهور عدد أكبر من 6، فإن:

$$B = \emptyset, n(B) = 0 \quad \text{عناصر الحدث } B, \text{ وعددها}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{احتمال الحدث } B$$

أشكال الانتشار Scatter Graphs

نتائج الدرس

- يتعرف شكل الانتشار.
- يصف العلاقة بين مجموعتي بيانات ممثلة بشكل الانتشار.
- يمثل بيانات متغيرين بشكل انتشار يدويًا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- يرسم المستقيم الأفضل مطابقة في شكل الانتشار، ويحدد معادلته يدويًا، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- يستعمل المستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرات إذا عُلِّمت قيمة المتغير الآخر ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- يحدد متى يكون تقدير قيمة أحد المتغيرين مُضللًا، أو غير منطقي.

التعلم القبلي:

- تعيين النقاط على المستوى الإحداثي.
- إيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين.
- إيجاد قيمة أحد المتغيرين إذا عُلِّمت قيمة المتغير الآخر في معادلة مستقيم.

التهيئة

1

- ارسم مستوى إحداثيًا على اللوح المتنقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- ذكّر الطلبة بكيفية كتابة إحداثي نقطة على المستوى $A(x, y)$.
- دوّن جانبًا مجموعة من النقاط، مثل: $A(3, 5), B(0, 2), C(3, 0), D(-1, 1), E(1, -1), F(-1, -2)$ ، ثم ناقش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- دوّن جانبًا مجموعة أخرى من النقاط تتضمن إحداثياتها كسورًا، مثل $G(2.5, 3.4)$ ، ثم ناقش الطلبة في كيفية تعيينها على المستوى الإحداثي.
- ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين A, B ، مذكّرًا الطلبة بمعادلة المستقيم.
- ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين C, D ، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد معادلته.

فكرة الدرس فهم أشكال الانتشار، ووصفها، واستعمال المستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير قيمة أحد متغيرين بمعرفة قيمة الآخر.

المصطلحات شكل الانتشار، الارتباط الموجب، الارتباط السالب، المستقيم الأفضل لمطابقة.

مسألة اليوم



ادّعى راكان أنّه كلما زاد طول الشخص زادت المسافة بين طرفي ذراعيه عند مدّهما على استقامة كما في الشكل المجاور. كيف اتّحقّق من صحّة ادّعاؤه؟

يتعيّن علينا في كثير من المواقف الحياتية استكشاف العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ووصف هذه العلاقة. ومن الأمثلة على ذلك:

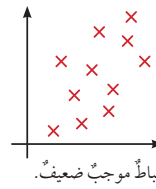
- درجات الحرارة وكميات الثلوج (الآيس كريم) المباعة.
- طول الإنسان ومعدّل نبضات قلبه.
- تحصيل الطلبة في الرياضيات وتحصيلهم في العلوم.

شكل الانتشار (scatter graph) هو تمثيل بياني يوضّح العلاقة (إن وجدت) بين مجموعتين من البيانات، وتظهر فيه نقاط تمثّل بيانات المجموعتين بوصفها أزواجًا مرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي؛ إذ تمثّل بيانات المتغير x على المحور الأفقي الموجب، وتمثّل بيانات المتغير y على المحور الرأسي الموجب.

الارتباط (correlation) هو وصف العلاقة بين مجموعتي البيانات. وقد يكون **الارتباط موجبًا** (positive correlation)، أو **سالبًا** (negative)، أو قويًا، أو ضعيفًا، كما في أشكال الانتشار الآتية:



ارتباط موجب قوي.



ارتباط موجب ضعيف.



ارتباط سالب قوي.

أتعلّم

ألاحظ عدم وجود حاجة إلى الأجزاء السالبة من المحاور في المستوى الإحداثي؛ لأنّ النقاط التي تمثّل شكل الانتشار موجبة.

إرشادات:

- يمكنك تصميم لوح متنقل للمستوى الإحداثي باستعمال لوحة من الكرتون الأبيض، ثم ترسم عليها محورين متعامدين فوق شبكة من المربعات الصغيرة المتطابقة التي سبق رسمها على اللوحة، ثم تُقسّم المحاور إلى وحدات، طول كل منها 10 مربعات صغيرة على الشبكة، ثم تُغلّف اللوحة بلاصق شفاف؛ ليسهل الكتابة عليها بأقلام اللوح.
- يمكنك تصميم لوح متنقل إضافي ترسم عليه فقط الربع الأول من المستوى الإحداثي؛ ليسهل على الطلبة تعيين نقاط شكل الانتشار.
- حث الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني في الحصص اللاحقة.

- وجّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم).
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على متغيرين آخرين من المسألة يمكن الادّعاء بوجود علاقة بينهما، ثم صياغة ادّعاء مرتبط بالعلاقة بين المتغيرين.
- من الإجابات المُحتملة:
- كلّما زاد طول الذراع زاد طول الساق.
- كلّما زاد طول الشخص نقص محيط الرأس.
- كلّما زاد طول الشخص زادت كتلة الجسم.
- استمع لإجابات الطلبة، ثم ناقشهم فيها.
- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن المسألة، ثم استمع لبعض الإجابات من دون تقديم تغذية راجعة لها.

- اكتب على اللوح الأمثلة الثلاثة التي وردت في كتاب الطالب، وبيّن العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ثم اسأل الطلبة بعد كل مثال:
- « ما العلاقة المُتوقّعة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية؟
- بعد كل إجابة تستمع لها، اسأل الطالب:
- « لماذا تعتقد ذلك؟
- « كيف يمكنك التحقق من ذلك؟
- استمع لإجابات بعض الطلبة، وشارك آخرين في التعليق على إجابات زملاء بسؤالهم:
- « ما رأيك في إجابة زميلك؟
- إجابة مُحتملة للمثال الأول:
- كلّما زادت درجات الحرارة زادت الكميات المباعة من المشروبات، أو:
- لا توجد علاقة بين درجات الحرارة والكميات المباعة من المشروبات.
- وضح للطلبة مفهوم شكل الانتشار (scatter graph)، وكيف يساعد التمثيل بشكل الانتشار على فهم العلاقة بين مجموعتي البيانات التي يمثلها، وتحديد هذه العلاقة، وبخاصة عندما تتجمّع نقاطه كأنها حول مستقيم. بعد ذلك ارسم على اللوح ثلاثة أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في كتاب الطالب، مُوضّحاً مفهوم الارتباط (correlation)، ومتى يوصف بأنه موجب (positive) أو سالب (negative)، وقوي أو ضعيف، مستعيناً بأشكال الانتشار التي رسمتها.
- ارسم على اللوح شكل انتشار مشابه لما ورد في كتاب الطالب (علامات الرياضيات، الزمن المستغرق لجري مسافة 800 m)، مُوضّحاً للطلبة سبب وصف الارتباط - في هذه الحالة - بأنه ضعيف، أو القول بعدم وجود ارتباط خطي.
- أخبر الطلبة أن التركيز في هذا الدرس سيكون على أشكال الانتشار التي تُوضّح ارتباطاً خطياً.

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، ثم ارسـم على اللوح أشكال انتشار مشابهة لتلك الواردة في فرعي المثال، مُركِّزاً على رسم مستقيم ميله سالب (في الفرع 1)، وتجمّع نقاط شكل الانتشار على طرفيه بالتساوي (ما أمكن).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: شكل الانتشار (scatter graph)، والارتباط الموجب (positive correlation)، والارتباط السالب (negative correlation)، والمستقيم الأفضل مطابقة (line of best fit).

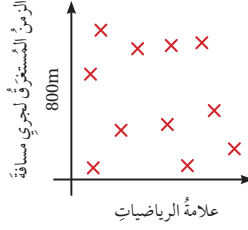
إرشادات:

- إذا توافر في الصف جهاز عرض رأسي، فاستعمله لعرض أشكال الانتشار التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيراً للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.
- عند مناقشة الطلبة في إجاباتهم عن سؤال المثال الإضافي، ركّز على تبرير الإجابة، لا على الإجابة تحديداً؛ إذ ستختلف كل إجابة تبعاً لتبريرها.

التقويم التكويني:

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي).
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

من الملاحظ أنّه كلما كان الارتباط موجباً قوياً تجمّعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله موجب، وأنّه كلما كان الارتباط سالباً قوياً تجمّعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله سالب.



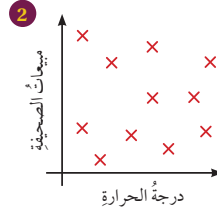
أما إذا كان الارتباط ضعيفاً (أو لا يوجد ارتباط)، فإنّ النقاط في شكل الانتشار تكون متناثرة ومتباعدة كما في شكل الانتشار المجاور، الذي يُظهر العلاقة بين تحصيل مجموعة من الطلبة في مادة الرياضيات والزمن الذي استغرقه كل منهم في الجري مسافة 800 m.

مثال 1

هل يوجد ارتباط بين بيانات المُتغيّرين المُمثّلين في كلّ من شكلي الانتشار الآتيين؟ في حالة وجود ارتباط بينهما، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟



يُظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين سعر الإيجار وكميته المباعة. وبناءً على توزيع النقاط في هذا الشكل، فإنّ كمية الإيجار المباعة كانت قليلة عندما كان سعره مرتفعاً، والعكس صحيح. وهذا يشير إلى وجود ارتباط سالب؛ ولأنّ نقاط شكل الانتشار متقاربة، فهو قوي.

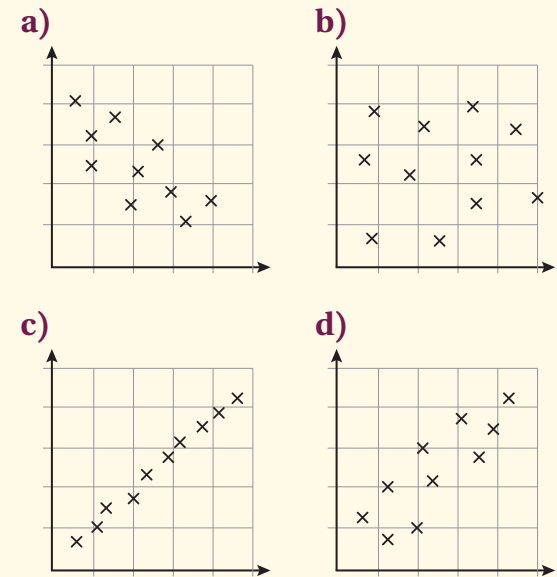


يُظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين درجة الحرارة ومبيعات إحدى الصحف. ومن الملاحظ أنّه لا يوجد ارتباط أو علاقة واضحة بين درجات الحرارة ومبيعات الصحيفة؛ لأنّ نقاط شكل الانتشار متباعدة.



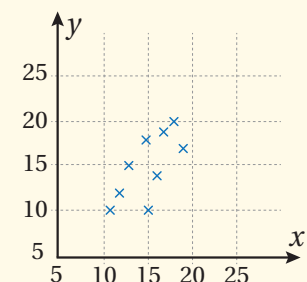
يُزرع في دول العالم المختلفة نحو 300 نوع من الإجاص.

- أي أشكال الانتشار الآتية يصف العلاقة بين راتب الموظف ومساحة الشقة التي يستأجرها؟ برّر إجابتك.



مثال 2

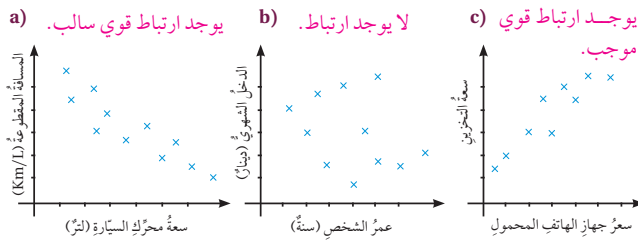
- وضّح للطلبة أنه لرسم شكل الانتشار ودراسة العلاقة بين مجموعتي بيانات، توضع قيم إحدى المجموعتين على المحور الأفقي (المتغير x)، وتوضع قيم المجموعة الأخرى على المحور الرأسي (المتغير y)، ثم يُدرّج المحوران لتعيين أكبر القيم في بيانات المجموعتين، مُبيناً أن التركيز فقط على الجزء الموجب من كل محور، ثم ناقشهم في سبب ذلك.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، ثم أخبرهم - عند تدرّج المحاور - أن التدرّج 5, 10, 15, 20, ... مناسب؛ لأنه يتيح تعيين أكبر قيمة لزمان الاستحمام x ، وهي 19 min، وأكبر قيمة لكمية المياه المستهلكة y ، وهي 20 L، ثم وضّح لهم سبب وصف الارتباط بأنه موجب وقوي.
- أخبر الطلبة أنه يمكن البدء بالنقطة (5, 5) بوصفها نقطة تقاطع المحورين - كما يظهر في التمثيل الآتي - بدلاً من البدء بنقطة الأصل (0, 0)، من دون أن يؤثر ذلك في صحة شكل الانتشار.



يُعدّ مُعدّل استهلاك السيارة للوقود أحد أهم العوامل المُحفّزة لشراؤها؛ لذا تحرص مصانع السيارات دائماً على ابتكار أساليب تكنولوجية للحدّ من استهلاك الوقود.

أتتحقّق من فهمي

هل يوجد ارتباط بين بيانات المُتغيّرين المُمثّلين في كلّ شكل من أشكال الانتشار الآتية؟ في حالة وجود ارتباط بينها، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟



عند تمثيل مجموعتين من البيانات بمُتغيّرين مثل (x) و (y) ، يُمكنني تمثيل شكل الانتشار يدوياً، أو باستعمال برمجية جيو جبرا، وذلك بتعيين نقاط شكل الانتشار بوصفها أزواجاً مُرتّبة (x, y) ؛ لأنّهم من وصف الارتباط (إن وُجد).

مثال 2

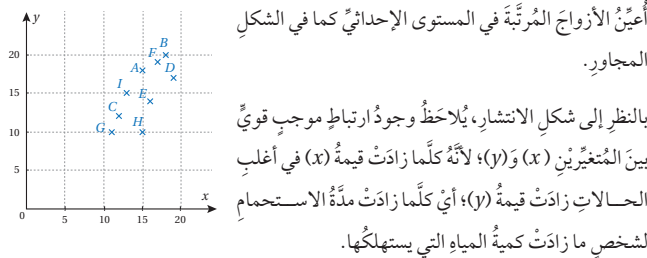
أُمثّل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثمّ أصف الارتباط بين المُتغيّرين (x) و (y) :



يعاني الأردنُّ شحاً في الموارد المائية؛ فحصة الفرد من المياه أقلّ من 100 m³ سنوياً. ولهذا، فإنّ عدم الإسراف في استهلاك المياه هو واجب ديني ووطني.

مُدّة الاستحمام (x) بالدقائق للشخص، وكمية المياه المُستهلكة (y) باللتر.

الشخص	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15



أُعينُ الأزواج المُرتّبة في المستوى الإحداثي كما في الشكل المجاور. بالنظر إلى شكل الانتشار، يلاحظ وجود ارتباط موجب قوي بين المُتغيّرين (x) و (y) ؛ لأنّه كلّما زادت قيمة (x) في أغلب الحالات زادت قيمة (y) ؛ أي كلّما زادت مدّة الاستحمام لشخص ما زادت كمية المياه التي يستهلكها.

إرشاد: استراتيجية التعلم بالأقران:

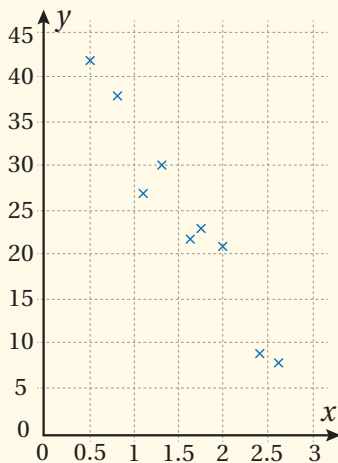
قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تدريج المحورين عند رسم شكل الانتشار؛ لذا وُزَّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إليهم حل المثال الإضافي؛ لتأكيد أهمية تدريج المحورين بصورة مناسبة لقيم مجموعتي البيانات، ثم وُزَّع الطلبة الذين أتقنوا تدريج المحورين بصورة مناسبة على بقية المجموعات ليساعدوا زملاءهم.

مثال إضافي

• دوّن عَمَر في الجدول الآتي الزمن بالساعات، والسرعة المتوسطة بالكيلومتر لكل ساعة، في أثناء قيادته السيارة في عدد من الرحلات التي قام بها. مثل البيانات في شكل انتشار، ثم صِف الارتباط بين المتغيرين x, y :

رقم الرحلة	الزمن x (h)	السرعة y (km/h)
1	0.5	42
2	0.8	38
3	1.1	27
4	1.3	30
5	1.6	22
6	1.75	23
7	2	21
8	2.4	9
9	2.6	8

الحل:



الارتباط سالب قوي.

أتحقق من فهمي

أمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثم أصِف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

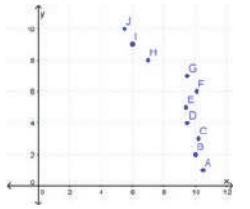
السيارة	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
السيارة x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

المستقيم الأفضل مطابقة (line of best fit) هو مستقيم يمرُّ بأكثر عدد من نقاط شكل الانتشار، بحيث يكون عدد النقاط التي لا يمرُّ بها متساوياً (تقريباً) على جهتيه، وتكون أقصر المسافات بينه وبين النقاط التي لا يمرُّ بها متساوية (تقريباً).
يُستعمل المستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين في شكل الانتشار ذي الارتباط القوي بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

إرشاد

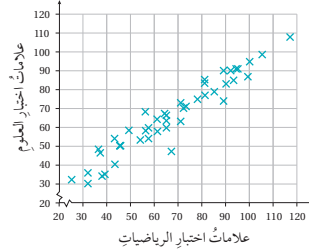
يُرسَم المستقيم الأفضل مطابقة بالنظر عامة. ولرسوبه، يُفضَّل استعمال مسطرة شفافة.

أتحقق من فهمي 2

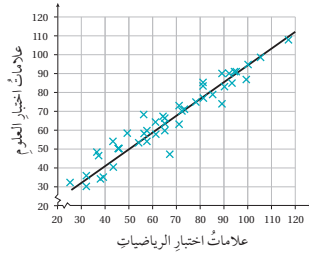


يوجد ارتباط قوي سالب بين x و y ؛ إذ تمثل x سعر السيارة بالآلاف الدنانير، وتمثل y عمرها بالسنوات.

مثال 3



اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثل علامات اختبار الرياضيات وعلامات اختبار العلوم لمجموعة من الطلبة، أجب عن الأسئلة الآتية:



1 أرسم المستقيم الأفضل لمطابقة للبيانات المُمثَّلة في شكل الانتشار.

أرسم المستقيم الأفضل لمطابقة باستعمال المسطرة كما في الشكل المجاور.

ألاحظ أنَّ الارتباط بين المتغيرين موجب وقوي.

- وضح للطلبة مفهوم المستقيم الأفضل مطابقة، وأكد عند رسمه يدوياً ضرورة مراعاة مروره وسط معظم نقاط شكل الانتشار، بحيث تتوزع النقاط التي لا تقع عليه بشكل متساوٍ (تقريباً) على جهتيه، من حيث عددها، وبُعد كل منها عنه، مُبيناً أنه يستفاد من رسم المستقيم الأفضل مطابقة بدقة في إعطاء تقدير دقيق لقيمة أحد المتغيرين إذا عُلِمَت قيمة المتغير الآخر.

- عند مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، ارسم على لوح متنقل شكل الانتشار المعطى لعلامات الرياضيات وعلامات العلوم سلفاً، مُبيناً كيفية ضبط المسطرة الشفافة عند رسم المستقيم الأفضل مطابقة بحيث يتوسط نقاط شكل الانتشار.

- أخبر الطلبة أنه يستفاد من معادلة المستقيم الأفضل مطابقة في الحصول على تقدير أكثر دقة لعلامة الطالب الغائب عن اختبار العلوم، بتعويض x علامته في الرياضيات مكان x أي:

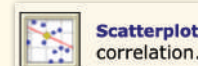
$$y = 0.88(75) + 6.36 = 72$$

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة تصفح الموقع الإلكتروني:

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

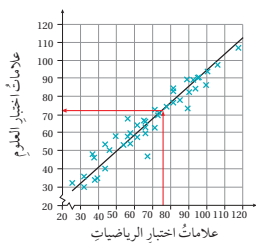
الذي تتوافر فيه الأداة التفاعلية



مجال Data Analysis & Probability ؛ لتعيين نقاط شكل الانتشار

على المستوى الإحصائي، ورسم المستقيم الأفضل مطابقة لها، وتحديد معادلته.

- 2 • علامته طالب في اختبار الرياضيات 75، لكنه غاب عن اختبار العلوم بسبب مرضه. أستخدم المستقيم الأفضل مطابقة الذي رسمته لتقدير علامته المحتملة في مادة العلوم.



أقدر علامة هذا الطالب في مادة العلوم برسم مستقيم رأسي، بدءاً بالعلامة 75 على المحور الأفقي حتى يلتقي بالمستقيم الأفضل مطابقة. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيماً أفقياً، وصولاً إلى المحور الرأسي، فأقدر علامته بنحو 72 كما في الشكل المجاور.

- 3 • أجد معادلة المستقيم الأفضل مطابقة.

يمكن إيجاد معادلة المستقيم إذا عُلِمَت إحداثيات أي نقطتين يمر بهما، ولكن (53, 53) و (95, 90):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين

$$y - 53 = \frac{90 - 53}{95 - 53} (x - 53)$$

بتعويض إحداثيات النقطتين

$$y = 0.88x + 6.36$$

بالتبسيط

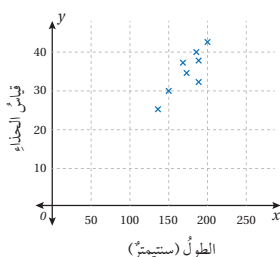
أنحقق من فهمي

اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثّل الطول (x) بالسنتيمتر، وقياس الحذاء (y) لمجموعة من الأشخاص، أجب عما يأتي:

(a) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

(b) أقدّر قياس الحذاء لشخص طوله 190 cm

38 تقريباً.



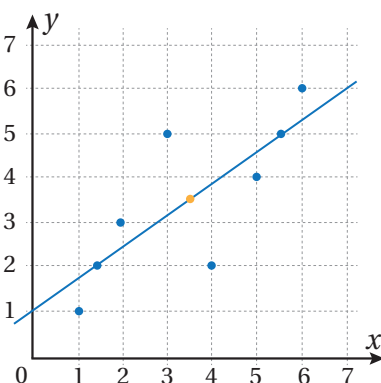
إرشاد

بما أنه يمكن رسم أكثر من مستقيم، واختيار أي نقطتين يمر بهما المستقيم (يختلف هذا الاختيار من شخص إلى آخر)، فإن معادلة المستقيم قد تختلف تبعاً للنقطتين المختارتين.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في رسم المستقيم الأفضل مطابقة يدوياً، فيرسمون مستقيماً يمر بأكثر عدد من نقاط شكل الانتشار؛ لذا أخبرهم أن ذلك قد لا يكون صحيحاً، مؤكداً أن المستقيم يجب أن يتوسط نقاط شكل الانتشار، بحيث تنتشر النقاط على جهتيه بالتساوي (تقريباً)، وأنه ليس شرطاً أن يمر بأكثر عدد منها.

يمكنك الاستعانة بالرسم الآتي:



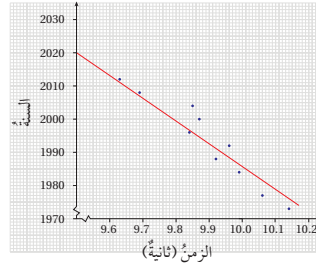
- عند مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، ارسم شكل الانتشار المعطى على لوح متنقل، مؤكِّداً لهم ضرورة استعمال المستقيم الأفضل مطابقة لنقاط شكل الانتشار ضمن المجال والمدى لتلك النقاط؛ لأن الخروج عنها يؤدي إلى تقديرات مُضللة وغير منطقية. وكذلك ركِّز على أهمية إعطاء مبرر للإجابة.

المفاهيم العابرة:

- عزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن واحد من أشهر علماء القرن العشرين، هو البريطاني فيشر (Ronald Fisher) الذي كان له فضل كبير في تطوير علم الإحصاء بصيغته الحديثة، وعمل على تطبيقه في عديد من المجالات والعلوم، مثل: الزراعة، والوراثة، والاقتصاد، فضلاً عن وضعه أسس تصميم التجارب وتحليلها.
- وجَّه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوفرة عن ثلاثة علماء اشتهروا بإسهاماتهم في علم الاحصاء، ثم كتابة مقالة عنهم، مُذكرًا إياهم بضرورة توثيق مصادر معلوماتهم.

من المحاذير التي يجب التنبيه لها، استعمال شكل الانتشار لعمل استنتاجات؛ فشكل الانتشار يكون مفيداً فقط ضمن مدى القيم المعطاة. أمّا في حال الخروج عن هذا المدى فقد تكون الاستنتاجات مُضللة، أو غير منطقية.

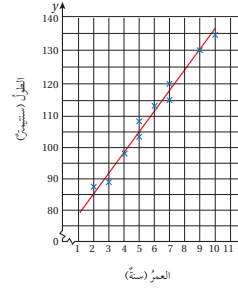
مثال 4



يُمثِّل شكل الانتشار المجاور الأزمنة المُدَوَّنة لصاحب المركز الأول في سباق 100 m للرجال في عدد من دورات الألعاب الأولمبية. استعمل المستقيم الأفضل مطابقة المُعطى في الشكل لتقدير الزمن الذي سيُحقِّقه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2020م.

هل يُمكن تقدير الزمن الذي سيُحقِّقه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2038م؟

إذا استعملت المستقيم الأفضل مطابقة، فأقدر الزمن المُستغرق لقطع مسافة السباق بنحو 9.5 ثواني في دورة عام 2020م، ولكن هذا التقدير لا ينطبق على الدورات الأولمبية التالية الخارجة عن مدى القيم المعطاة؛ فوفقاً لهذا التقدير، يُتوقع استمرار انخفاض الزمن المُستغرق لقطع مسافة السباق إلى 9 ثوان، و8.5 ثوان، و8 ثوان، ...، وهكذا حتى الوصول إلى دورة لن يحتاج فيها المتسابقون إلى أي زمن لقطع مسافة السباق التي طولها 100 m، وهذا غير منطقي.



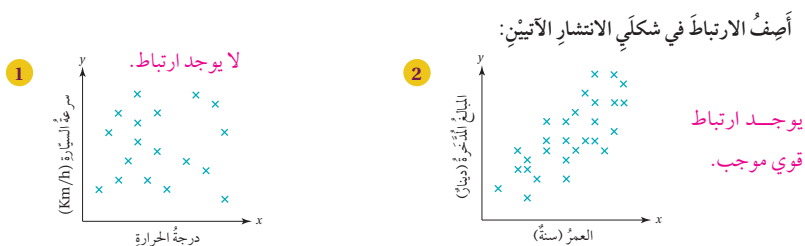
أتحقق من فهمي
استعمل المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل المجاور لتقدير طول طفل عمره 8 سنوات. هل يُمكن استعمال هذا الشكل لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؟ أبرِّر إجابتي.



الألعاب الأولمبية:
حدث رياضي دولي يُنظَّم كل سنتين في السنوات الزوجية، بتناوب الألعاب الصيفية والألعاب الشتوية.

طول الشخص الذي عمره 8 سنوات هو 124 cm تقريباً.
لا يمكن استعمال شكل الانتشار لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؛ لأن هذا العمر يقع خارج مجال قيم العمر الممثلة فيه.

أَتَدْرِبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ



3 ماذا أَسْتَتِجُ مِنْ شَكْلِي الْإِنْتِشَارِ السَّابِقَيْنِ؟ أَبْرُرُ إجابتي. انظر الهامش

يُمَثِّلُ الْجَدُولُ الْآتِي الْعُمُرَ وَالطَّوْلَ وَالْكَتْلَةَ لِسَبْعِ لَاعِبَاتٍ مِنْ فَرِيقِ كُرَةِ الطَّاوِرَةِ فِي إِحْدَى الْمَدَارِسِ:

اسم اللاعب	وفاء	هند	عائشة	هدى	تغريد	إبتسام	سميرة
العمر (سنة)	14	15	11	11	12	15	13
الطول (سنتيمتر)	169	168	154	158	162	165	161
الكتلة (كيلوغرام)	40	42	35	32	37	42	41

أرسم أشكال الانتشار، ثم أصف الارتباط لكل منها: انظر ملحق الإجابات

4 العمر مقابل الطول. 5 الطول مقابل الكتلة. 6 العمر مقابل الكتلة.

تجربة علمية: يُبَيِّنُ الْجَدُولُ الْآتِي الْمَسَافَةَ بِالسَّنْتِمِترِ، وَالسَّرْعَةَ بِالسَّنْتِمِترِ لِكُلِّ ثَانِيَةٍ، عِنْدَ دَحْرَجَةِ كُرَةٍ عَلَى سَطْحٍ طَاولَةٍ، بَدَأَ بِنَقْطَةٍ مُحَدَّدَةٍ:

المسافة (cm)	10	20	30	40	50	60	70	80
السَّرعَة (cm/s)	18	16	13	10	7	5	3	0

7 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول. انظر ملحق الإجابات

8 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات. انظر ملحق الإجابات

9 أقدّر سرعة الكرة لحظة قطعها مسافة 5 cm من نقطة انطلاقها. 19 cm/s تقريباً.

10 أقدّر المسافة التي قطعها الكرة من نقطة انطلاقها عندما كانت سرعتها 12 cm/s 33 cm تقريباً.

إجابات (أَتَدْرِبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ):

- 3 في شكل الانتشار الذي يظهر في السؤال 1، يمكن القول أنه لا يوجد ارتباط واضح بين سرعة السيارة ودرجة حرارة الجو؛ لأن نقاط شكل الانتشار متناثرة أو متباعدة.
- في شكل الانتشار الذي يظهر في السؤال 2، يمكن القول أنه كلما زاد عمر الشخص زادت قيمة مدخراته؛ لأن نقاط شكل الانتشار تتجمع حول مستقيم ميله موجب.

- وجّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم شاركهم في حل الأسئلة الآتية على اللوح: 4, 5, 6, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23
- وزّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل الأسئلة الآتية: 1, 2, 3, 14, 15, 16
- تجوّل بين الطلبة مُرْشِدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقَدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختَر طالبًا تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في المنزل جميع المسائل الواردة في الصفحة الخامسة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطلّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

- وجه الطلبة -ضمن مجموعات ثنائية- إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، مُذكرًا إيَّاهم بكتابة مُبرّر للإجابة التي يتوصّلون إليها، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبررات زملائهم.

5 الإثراء

- المستقيم الأفضل مطابقة هو من أهم نتائج موضوع إحصائي يُعرّف بتحليل الانحدار (regression analysis)؛ إذ تُستعمل طريقة (least squares method) لتحديد مستقيم يتوسط نقاط شكل الانتشار، ويكون مجموع مربعات بُعد كل نقطة عنه أقل ما يمكن، وتُعرف معادلته باسم معادلة الانحدار. ويُعزى الفضل في اكتشاف هذه الطريقة إلى العالم جاوس (Carl Friedrich Gauss) عام 1975م.
- وجه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن موضوع الانحدار وعلاقته بمعامل الارتباط بيرسون، ثم كتابة تقرير عن ذلك، مُرفقًا بمنجزات مشروع الوحدة؛ ليُعرّض مع المشروع.
- ذكّر الطلبة بضوابط التقرير العلمي ومعاييرها، التي أهمها: وجود صفحة لعنوان التقرير وأسماء المُعدّين، وفهرس للعناوين الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (1) و(2) من خطوات المشروع.
- وجه الطلبة إلى تضمين عرض مشروع الوحدة مُلخصًا للتقرير.

لحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس، أجمع بيانات من 10 طلبة عشوائيًا، ثم أدوّنوها في الجدول الآتي، ثم أجيب عن الأسئلة التي تلي: (11, 12, 13) تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول الطالب										
المسافة بين طرفي ذراعيه (cm)										

- 11 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.
12 أصف الارتباط بين المتغيرين.
13 هل ادّعاء فاطمة صحيح؟ أبرّر إجابتي.

أطوال: يُبين الجدول الآتي أطوال 20 أبا وأبنائهم الذين تبلغ أعمارهم 20 سنة بالسنتمتر:

طول الأب	178	186	164	152	169	174	183	147	162	153
طول الابن	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
طول الأب	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175
طول الابن	152	160	150	156	164	170	154	160	167	172

(14, 15, 16) انظر ملحق الإجابات

إرشاد

يمكن تمثيل طول الأب على المحور الأفقي بتدرج يتراوح بين 140 cm و 200 cm، وتمثيل طول الابن على المحور الرأسي بتدرج يتراوح بين 140 cm و 200 cm أيضًا.

- 14 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.
15 هل صحيح أن الأب الطويل ابنه طويل؟ أبرّر إجابتي.
16 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

في دراسة مسحية لمُعَلِّم عن عدد ساعات ممارسة الرياضة ومشاهدة التلفاز أسبوعيًا شملت 20 طالبًا في أحد الصفوف التي يُدرّسها، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي: (17, 18) انظر ملحق الإجابات

عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	3	5	15	11	0	9	7	6	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	18	26	24	16	19	27	12	13	17	14
عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	10	7	6	7	3	1	2	0	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	22	16	18	22	12	28	18	20	25	13

- 17 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.
18 إذا كان أحد الطلبة من الصف نفسه يُشاهد التلفاز مدة 8 ساعات أسبوعيًا، فهل يمكن تقدير عدد الساعات التي يمارس فيها الرياضة أسبوعيًا؟ أبرّر إجابتي.

سيارة أجرة: يُبين الجدول الآتي المسافات المقطوعة بالكيلومتر والمُدَّة الزمنية المُستغرَقة بالدقائق لـ 10 رحلات قام بها سائق سيارة أجرة في أحد الأيام:

(19, 20) انظر ملحق الإجابات

المسافة (km)	الزمن (min)
5.4	10
8.8	16
5.8	11
3.9	8
2.9	15
4.8	9
6.6	13
5.2	11
3.8	17
1.6	3

19 أرسِّم شكل الانتشار لبيانات الجدول، بوضع الزمن على المحور الأفقي.

20 أرسِّم المستقيم الأفضل مطابقة، ثمَّ أجد معادلته.

21 إذا استغرقت إحدى الرحلات 5 دقائق، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقديرها لهذه الرحلة؟ **3.4 km تقريباً.**

22 ما الزمن الذي يمكن تقديره لرحلة قطع فيها السائق مسافة 4 km؟ **7.5 min تقريباً.**

23 إذا استغرقت إحدى الرحلات ساعة كاملة، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقديرها لهذه الرحلة؟ أبرِّز إجابتي.

لا يمكن تقدير المسافة المقطوعة؛ لأن مدَّة ساعة (60 دقيقة) تقع خارج مجال

القيم التي يُظهرها شكل الانتشار.

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: يُبين الجدول الآتي علامات 10 طالبات في اختبَارِي الرياضيات والجغرافيا. إذا كانت إحدى الطالبات مريضة

عند تقديمها اختبار الجغرافيا، فمن هي؟ أبرِّز إجابتي.

انظر ملحق الإجابات

الاسم	إيمان	باسمة	تهاني	دعاء	رقية	سارة	سعاد	علياء	فداء	منى
علامات اختبار الرياضيات	145	155	142	167	167	151	145	152	163	168
علامات اختبار الجغرافيا	175	173	158	168	168	181	173	166	180	156

25 أكتشف الخطأ: بالعودة إلى الجدول في السؤال السابق، لم تتقدَّم سمية لاختبار الجغرافيا، وقد أحرزت علامة 75

في اختبار الرياضيات. قدَّرت سمية أنها ستحصل على علامة 80 في اختبار الجغرافيا لو أنها قدَّمته. هل تقدير سمية

منطقي؟ أبرِّز إجابتي. **تقدير سمية غير منطقي؛ لأن علامتها في اختبار الرياضيات تقع خارج مدى القيم**

التي يُظهرها شكل الانتشار الذي يبدو فيه الارتباط موجباً وضعيفاً.

26 مسألة مفتوحة: اختار مُتغيَّرين، ثمَّ أنشئ جدولاً أنظِّم فيه بعض قيمهما، ثمَّ استعمله للتنبؤ بالقيمة الحقيقية لأحد

المتغيَّرين باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة إذا علِّمت قيمة المتغيَّر الآخر. **تعتمد الإجابة على اختيار الطلبة.**

27 أكتب: لماذا يوصف الارتباط بأنه موجب في شكل الانتشار الذي يُمثل مبيعات أحد المحال من المثلجات على

مدار أشهر السنة؟ هل يعني ذلك أن أحد المتغيَّرين (مبيعات المثلجات، أو أشهر السنة) سبب للآخر؟ أبرِّز إجابتي.

إجابة مُحتملة: بما أن درجات الحرارة عامة تزداد مع التقدُّم في أشهر السنة (من شهر 1 إلى شهر 9)، فإنه يُتوقَّع ازدياد مبيعات

المثلجات تبعاً لذلك. ولكن، لا يمكن القول إن ارتفاع درجات الحرارة سيؤدي إلى ارتفاع مبيعات المثلجات، أو العكس؛ إذ

يُؤثر في ارتفاع مبيعات المثلجات عوامل أخرى، مثل: السعر، والجودة، وقوانين العرض والطلب.

التعلم القبلي:

- تعيين النقاط على المستوى الإحداثي باستعمال برمجية جيوجبرا.

إرشادات للمعلم

يمكنك تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسوب في مختبر مدرستك، وتحديثها باستمرار، مُستعملًا الرابط الإلكتروني: <https://www.geogebra.org/download>

1 التهيئة

- توجّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في مدرستك.
- وزّع الطلبة إلى مجموعات بحسب عدد الأجهزة المتوفرة في المختبر.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- عرّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية، مثل كيفية تعيين النقاط.

2 التدريس

- وضح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق خطوات النشاط على التوالي، وتجوّل بينهم مُرشِّدًا ومُساعدًا ومُوجِّهًا، وتأكد أن كل فرد في المجموعة قد تمكّن من تنفيذ النشاط.
- وجّه الطلبة إلى استعمال شريط الإدخال (Input) عند الحاجة إلى تعيين نقطة ذات إحداثيات تتضمّن كسورًا؛ سعيًا للدقة في تعيين النقاط.
- بعد تنفيذ أفراد المجموعات الخطوة الثانية بصورة صحيحة، اطلب إليهم عرض هامش (Algebra)؛ للتحقق من إحداثيات النقاط على شكل الانتشار، وملاحظة معادلة المستقيم الأفضل مطابقةً.

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا لرسم المستقيم الأفضل مطابقةً لنقاط شكل الانتشار.

نشاط 1

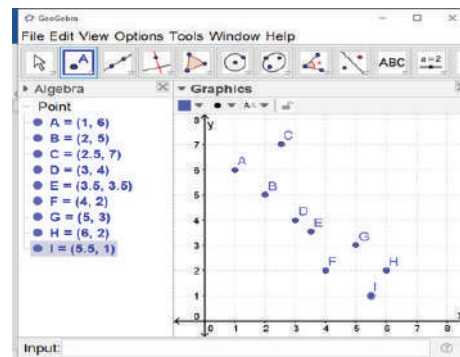
أرسم المستقيم الأفضل مطابقةً للبيانات الواردة في الجدول الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	3	2	3.5	4	5	6	7	8

لرسم المستقيم الأفضل مطابقةً، اتّبِع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أعيّن النقاط في المستوى الإحداثي.

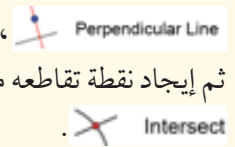
أختارُ أيقونة **A** من شريط الأدوات، ثم أنقرُ عند موقع كل زوج مُرتّب في المستوى البياني، لتظهر النقاط كما في الشكل الآتي:



يُمكن أيضًا تعيين النقاط بإدخال كل منها في شريط الإدخال باستعمال لوحة المفاتيح في صورة: $A = (x, y)$.

- وضح للطلبة كيفية تقدير قيمة متغير باستعمال المستقيم الأفضل مطابقةً في برمجية جيوجبرا:

« هندسيًا: باختيار أداة إنشاء عمود على مستقيم من نقطة مُحدّدة، واستعمالها لرسم عمود على أحد المحورين، ثم إيجاد نقطة تقاطعه مع المستقيم الأفضل مطابقةً باستعمال الأداة



« جبريًا: بالتعويض في معادلة المستقيم.

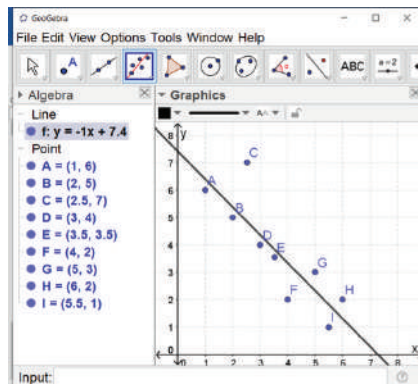
إرشاد: إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فاستعمله لعرض صور من كتاب الطالب عن معمل برمجية جيوجبرا.

الخطوة 2: أرسم المستقيم الأفضل مطابقةً.

أختارُ أيقونة **Best Fit Line** من شريط الأدوات، ثم أُحدِّدُ جميعَ النقاط التي عَيَّنْتُها في المستوى الإحداثي، بوضع المؤشِّر في أيِّ مكانٍ بعيداً عن النقاط، ثمَّ الضَّغْطُ باستمرارٍ على الزرِّ الأيسر لفأرة الحاسوب، معَ السحبِ لشمول جميعِ النقاط، عندئذٍ سيظهرُ المستقيمُ الأفضلُ مطابقةً، وتظهرُ معادلتهُ إلى يسارِ الشاشة كما في الشكل الآتي:

إرشاد

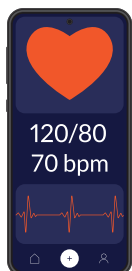
لإظهار هامش (Algebra)، أختارُ (Algebra) من قائمة العرض (View).



أُتدرب

1 أُحلُّ الأسئلة (8, 9, 10, 16) في الدرس السابق باستعمال برمجية جيو جبرا، ثمَّ أقارنُ الحلَّ بحلِّي اليدوي.

انظر رسوم الطلبة.



2 تحوي الهواتف المحمولة تطبيقاً يُستعملُ لرصد مُعدَّلِ نبضات القلب. أُستعملُ هذا التطبيقُ لرصد مُعدَّلِ نبضات القلب لـ 10 أشخاص على الأقل، ثمَّ أقيس طول كلِّ منهم، ثمَّ أرسمُ شكلَ الانتشارِ والمستقيمَ الأفضلَ مطابقةً باستعمال برمجية جيو جبرا. انظر رسوم الطلبة.

- اطلب إلى الطلبة تحديد كلِّ من ميل المستقيم الأفضل مطابقةً، ومقطعيه من المحاورين الإحداثيين، بعد حل كل سؤال من أسئلة الدرس يتطلَّب رسم المستقيم.
- اطلب إلى الطلبة مقارنة الإجابات بعضها ببعض، وحفز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- وضَّح للطلبة أنه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجية جيو جبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجية جيو جبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معاً، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.

تعليمات المشروع:

- أخبر الطلبة أنه يمكنهم الاستفادة من برمجية جيو جبرا لتنفيذ الخطوات اللاحقة في المشروع.

- اطلب إلى الطلبة تلخيص المهارات والأفكار التي تعلموها، ثم استمع لبعض ما كتبوه.

فكرة الدرس

تعرفُ الربيعيات والمئينات، وإيجادها للبيانات المُبوَّبة في جداول تكرارية باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

المصطلحات

المنحنى التكراري التراكمي.

مسألة اليوم

يُبين الجدول المجاور رواتب الموظفين في إحدى الشركات. ما عدد الموظفين الذين تزيد رواتبهم على 520 ديناراً؟

فئات الرواتب	عدد الموظفين
$349 < x \leq 399$	8
$399 < x \leq 449$	12
$449 < x \leq 499$	15
$499 < x \leq 549$	9
$549 < x \leq 599$	6

يُمثل المنحنى التكراري التراكمي (cumulative frequency graph) للبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات العلاقة بين التكرار التراكمي للفئات في التوزيع التكراري والحدود الفعلية العليا للفئات.

مثال 1

يُبين الجدول التكراري المجاور الزمن الذي يستغرقه طلبة الصف العاشر في الوصول إلى المدرسة. أرسِّم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

الزمن (دقيقة)	التكرار (عدد الطلبة)
$0 < x \leq 5$	2
$5 < x \leq 10$	9
$10 < x \leq 15$	9
$15 < x \leq 20$	8
$20 < x \leq 25$	3
$25 < x \leq 30$	1

الحدود العليا للفئات	التكرار التراكمي
0	0
5	$0 + 2 = 2$
10	$2 + 9 = 11$
15	$2 + 9 + 9 = 20$
20	$2 + 9 + 9 + 8 = 28$
25	$2 + 9 + 9 + 8 + 3 = 31$
30	$2 + 9 + 9 + 8 + 3 + 1 = 32$

الخطوة 1: أنشئ جدول التكرار التراكمي بإضافة عمود التكرار التراكمي كما في الجدول المجاور، وإضافة الحد العلوي لفئة سابقة للفئة الأولى وتكرارها المقابل يكون صفراً.

إرشاد

للتسهيل، يُمكن الاكتفاء بوضع الحدود العليا للفئات على المحور الأفقي، والتكرار التراكمي على المحور الرأسي؛ ذلك أنَّ المطلوب تقدير القيم لمُتغيَّرات منفصلة أحياناً، من مثل: عدد الأهداف المُسجَّلة، وعدد الرسائل.

نتائج الدرس

- يرسم المنحنى التكراري التراكمي يدوياً، وباستعمال أدوات التكنولوجيا.
- يُقدَّر الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 ، والمدى الربيعي، والمئينات للجدول التكرارية ذات الفئات، ويُفسر معنى كل منها ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- يجد الرتبة المئينية لقيمة من بيانات التوزيع.

التعلم القبلي:

- تعيين النقاط على المستوى الإحداثي.
- رسم منحنى متصل يمر بمجموعة من النقاط على المستوى الإحداثي يدوياً.

التهيئة

1

- ارسم مستوى إحداثياً على اللوح المتقل، أو على اللوح العادي باستعمال المسطرة.
- مستعيناً بالجدول الآتي، مثل الاقتران $f(x) = x^2, x \geq 0$ ؛ لتوضيح كيفية تعيين النقاط على المستوى، ثم توصيلها معاً بمنحنى متصل يمر بها.

x	0	0.5	1	1.5	2
$y = f(x)$	0	0.25	1	2.25	4

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
« كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أقل من 400 دينار؟ 8 موظفين.
« كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من 499 ديناراً؟ 15 موظفاً.
« كم عدد الموظفين الذين رواتبهم أكثر من 349 ديناراً؟ 50 موظفاً.
« كم عدد الموظفين الذين رواتبهم 460 ديناراً؟ إجابة مُحتملة: لا يمكن معرفة ذلك من الجدول.
- استمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.
- أخبر الطلبة أن ما سيتعلمونه في هذا الدرس سيساعدهم على الإجابة عن الأسئلة السابقة، وبخاصة تلك التي لم يتمكنوا من تحديد إجابتها من الجدول.

التدريس

3

- وضح للطلبة مفهوم المنحنى التكراري التراكمي، ثم ارسم على اللوح الشكل العام لهذا المنحنى، مشيراً إلى أنه يتخذ تقريباً شكل الحرف (S).
- ذكّر الطلبة - من الجدول الوارد في بند (مسألة اليوم) - بالحدود العليا للفئات وحدودها الدنيا، والحدود الفعلية العليا للفئات وحدودها الفعلية الدنيا.
- وضح للطلبة كيفية تحديد التكرار التراكمي على الجدول الوارد في بند (مسألة اليوم).

مثال 1

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، متّبعا الخطوات الموصوفة لحله.
- عند تنفيذ الخطوة الأولى المُتعلّقة بإنشاء جدول التكرار التراكمي، أكّد للطلبة أهمية إضافة فئة سابقة افتراضية، يكون حدها الأعلى هو الحد الأدنى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى، ويكون التكرار المقابل لها صفراً؛ لبدء المنحنى التراكمي عند رسمه من المحور الأفقي x .
- عند تنفيذ الخطوة الثانية المُتعلّقة برسم المنحنى التكراري التراكمي، أكّد للطلبة ما ورد في بند (إرشاد) في الصفحة 119 من كتاب الطالب، من أنه يُكتفى - بُغية التسهيل - بوضع الحدود العليا على المحور الأفقي x بدلاً من الحدود الفعلية العليا.

تعزيز اللغة ودعمها:

- كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: المنحنى التكراري التراكمي (cumulative frequency curve).

إرشادات:

- نبّه الطلبة إلى أن بداية المنحنى التكراري التراكمي يجب أن تكون على المحور الأفقي x ، وأن المنحنى قد يبدأ بنقطة الأصل عندما يكون الحد الأدنى للفئة الأولى في الجدول الأصلي المعطى صفراً (يمكنك تقديم المثال الإضافي لتوضيح ذلك).
- إذا توافر جهاز حاسوب وجهاز عرض في الصف، فاستعملهما لعرض الجداول والمنحنيات التكرارية التراكمية التي ورد ذكرها في الدرس؛ توفيراً للوقت الذي يستغرقه رسمها على اللوح.

التقويم التكويني:

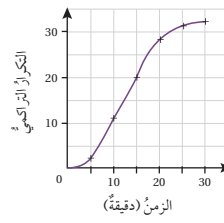
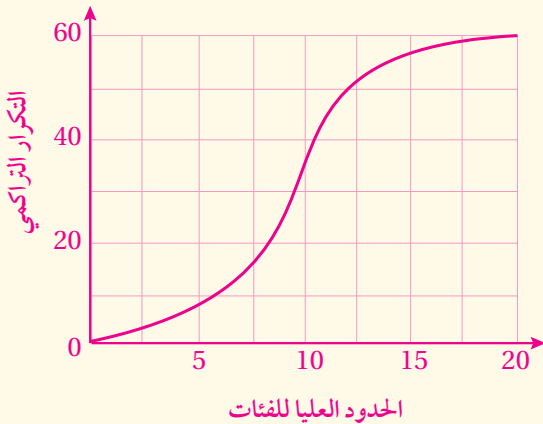
- وجه الطلبة إلى حل التدريب في بند (تحقق من فهمي).
- تجوّل بين الطلبة مُرشداً، ومُساعداً، ومُوجّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال إضافي

- ارسم المنحنى التكراري التراكمي لبيانات الجدول الآتي:

الفئة	$0 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 15$	$15 < x \leq 20$
التكرار	8	27	21	4

الحل:



الخطوة 2: أرسم المنحنى التكراري التراكمي.

أرسم منحنى يُمثّل العلاقة بين الحدود العليا لفئات الزمن بالدقائق (المُتغيّر x) والتكرار التراكمي (المُتغيّر y)، التي تُمثّلها الأزواج المُرتّبة الآتية:

$(0, 0)$, $(5, 2)$, $(10, 11)$, $(15, 20)$, $(20, 28)$, $(25, 31)$, $(30, 32)$

أنتحق من فهمي

طقس: يُبين الجدول التكراري المجاور درجات الحرارة في محافظة المفرق في أحد أشهر فصل الربيع. أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

انظر ملحق الإجابات

تعرفتُ سابقاً الربيعيات؛ وهي ثلاث قيم تُقسّم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية. وهذه القيم هي: الربيع الأدنى (Q_1)؛ وهو وسيط النصف الأدنى من البيانات، والربيع الأوسط (Q_2)؛ وهو وسيط البيانات كلها، والربيع الأعلى (Q_3)؛ وهو وسيط النصف الأعلى من البيانات. تعرّف أيضاً المدى الربيعي؛ وهو مدى البيانات التي تقع بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

1 1 3 3 3 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9

الربيع الأدنى Q_1 الوسيط Q_2 الربيع الأعلى Q_3

المدى الربيعي
 $IQR = Q_3 - Q_1$
 $= 8 - 3 = 5$

يُمكن أيضاً تقدير الوسيط والمدى الربيعي للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

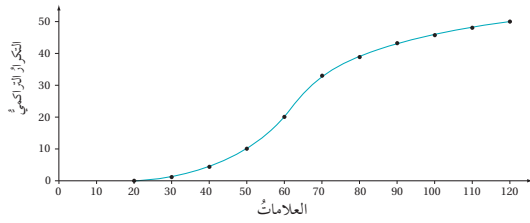
محافظة المفرق هي ثاني أكبر محافظات المملكة الأردنية الهاشمية من حيث المساحة، وثاني أقل المحافظات من حيث الكثافة السكانية، وتقع في الشمال الشرقي للمملكة.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

مثال 2

يُبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور علامات 50 طالبًا في اختبار اللغة العربية:

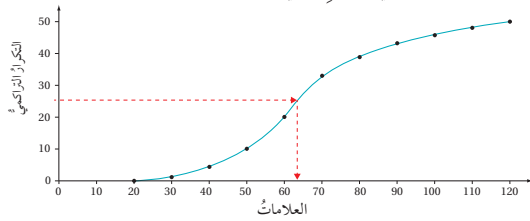


1. أقدّر وسيط البيانات.

الخطوة 1: أجد رتبة الوسيط.

بما أن عدد الطلبة 50 طالبًا، فإن رتبة الوسيط هي: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

الخطوة 2: أرسم مستقيمًا أفقيًا بدءًا بالتكرار التراكمي 25 حتى يتقاطع مع المنحنى التكراري التراكمي. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيمًا رأسيًا حتى يتقاطع مع المحور الأفقي (العلامات) كما في الشكل الآتي.



إذن، قيمة الوسيط هي العلامة 64 تقريبًا.

2. أجد المدى الربيعي.

الخطوة 1: أجد رتبة الربع الأدنى، ورتبة الربع الأعلى.

رتبة الربع الأدنى هي: $0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$ ، ورتبة الربع الأعلى

هي: $0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$

الخطوة 2: أقدّر قيمتي الربعين: الأدنى والأعلى، برسم المستقيمتين الأفقيتين والرأسيتين على المنحنى التكراري التراكمي كما في الفرع السابق.

أتذكر

المتين 50 هو الوسيط
 Q_2 نفسه، والمتين 25
هو الربع الأدنى Q_1
نفسه، والمتين 75 هو
الربع الأعلى Q_3 نفسه.

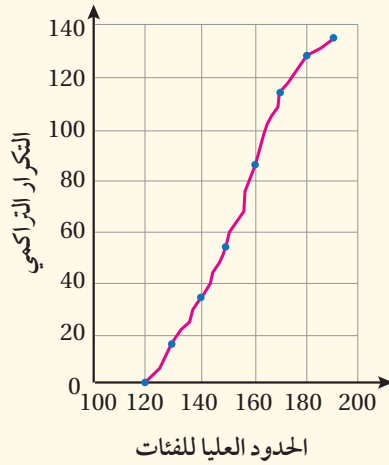
- ذكر الطلبة بتعريف الربعات الثلاثة: Q_1 , Q_2 , Q_3 ، وتعريف المدى الربيعي، وكيفية إيجادها للقيم المفردة، وذكرهم أيضًا بتعريف المتين، وكيفية تمثيل توزيع البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال. وتوفرًا للوقت؛ يُفضّل رسم المنحنى التكراري المعطى في المثال سلفًا، أو الاستعانة بجهاز العرض (إن توافر).
- عند تقدير الوسيط Q_2 في الفرع الأول، ركّز على تطبيق خطوتي الحل كما ورد ذكرهما في المثال، واستعمال المسطرة عند رسم المستقيمتين الأفقية والرأسيّة، واستعمال قلم ذي لون مختلف لرسمها بشكل متقطع، مُبينًا أنه (الوسيط Q_2) القيمة التي تقسم البيانات إلى نصفين، بحيث يقع ما نسبته 50% من القيم فوق الوسيط، ويقع ما نسبته 50% من القيم تحته.
- وضّح للطلبة كيفية تقدير الربعين بخطوات مماثلة لتقدير الوسيط، مُبينًا أن المدى الربيعي هو المدى الذي يقع ضمنه ما نسبته 50% من القيم (أي بين Q_1 و Q_3).
- أخبر الطلبة أنه يمكن رسم تمثيل آخر يوضح كيف توزعت البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.

مثال إضافي

- سُجِّلَت أعداد الطلبة في 135 مدرسة ابتدائية بإحدى محافظات المملكة، وقد توزَّعت المدارس كما في الجدول الآتي:
- ارسم المنحنى التكراري التراكمي، مُقدِّراً منه قيمة الوسيط، والمدى الربيعي.

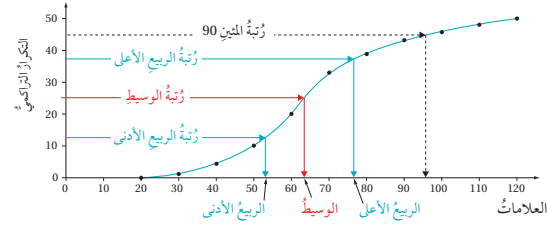
أعداد الطلبة	التكرار
$120 < x \leq 130$	15
$130 < x \leq 140$	18
$140 < x \leq 150$	20
$150 < x \leq 160$	32
$160 < x \leq 170$	28
$170 < x \leq 180$	15
$180 < x \leq 190$	7

الحل:



الوسيط: 155 تقريباً.

المدى الربيعي: 26 تقريباً.

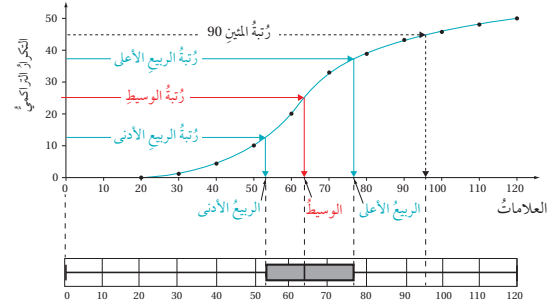


ألاحظ من التمثيل البياني أن قيمة الربيع الأدنى هي العلامة 53 تقريباً، وأن قيمة الربيع الأعلى هي العلامة 77 تقريباً.

وعليه، فإن قيمة المدى الربيعي:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

ألاحظ أيضاً أنه يمكن استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتمثيل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين كما في الشكل الآتي.



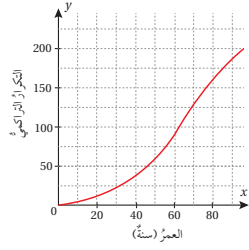
3 أجد المئين 90، ثم أفسر معناه.

الخطوة 1: أحدد رتبة المئين 90

$$رتبة المئين 90 هي: 90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45$$

الخطوة 2: أقدّر قيمة المئين 90 برسم المستقيمات الأفقية والرأسية على المنحنى التكراري التراكمي كما في الفرع السابق.

الأحط من التمثيل البياني أن قيمة المئين 90 هي العلامة 96 تقريباً، كما في الشكل الموجود في الفرع 2، وأن هذه القيمة تعني أن 90% من الطلبة أحرزوا علامات أقل من العلامة 96، أو أن 10% من الطلبة أحرزوا علامات أكثر من العلامة 96 في هذا الاختبار.



أنتحقق من فهمي انظر ملحق الإجابات

يُبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور أعمار 200 عضو في جمعية ثقافية:

(a) أقدّر وسيط البيانات.

(b) أجد المدى الربيعي.

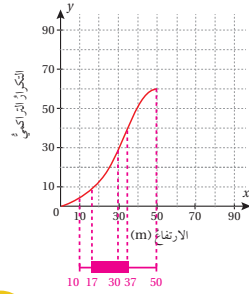
(c) أجد المئين 85، ثم أفسّر معناه.

أتدرب وأحل المسائل

عدد الأهداف	عدد الطلبة
$0 \leq x \leq 5$	3
$5 < x \leq 10$	17
$10 < x \leq 15$	12
$15 < x \leq 20$	9
$20 < x \leq 25$	5
$25 < x \leq 30$	4

كرة قدم: يُبين الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجّلها طلبة المرحلة الثانوية في دوري كرة القدم المدرسي:

- أرسم المنحنى التكراري التراكمي. انظر ملحق الإجابات.
- أقدّر المئين 85، ثم أفسّر معناه. 23 تقريباً.
- أقدّر عدد الطلبة الذين سجّلوا 18 هدفاً على الأقل. 12 تقريباً.



يُبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور ارتفاع عدد من المباني في مدينة عمّان:

- أقدّر وسيط البيانات. $Q_2 = 30$
- أجد المدى الربيعي. $IQR = Q_3 - Q_1 = 37 - 17 = 20$
- أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.
- أجد المئين 80، ثم أفسّر معناه. 37 تقريباً.

- ناقش الطلبة في حل الأسئلة (8-17).
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-6) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعداً، ومُوجّهاً، وقدّم لهم التغذية الراجعة.
- أخبر الطلبة أنه يمكنهم استعمال برمجية جيو جبرا للتحقق من صحة إجابات أسئلة الدرس؛ سواء أكان ذلك في المنزل، أو باستعمال تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالباً تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

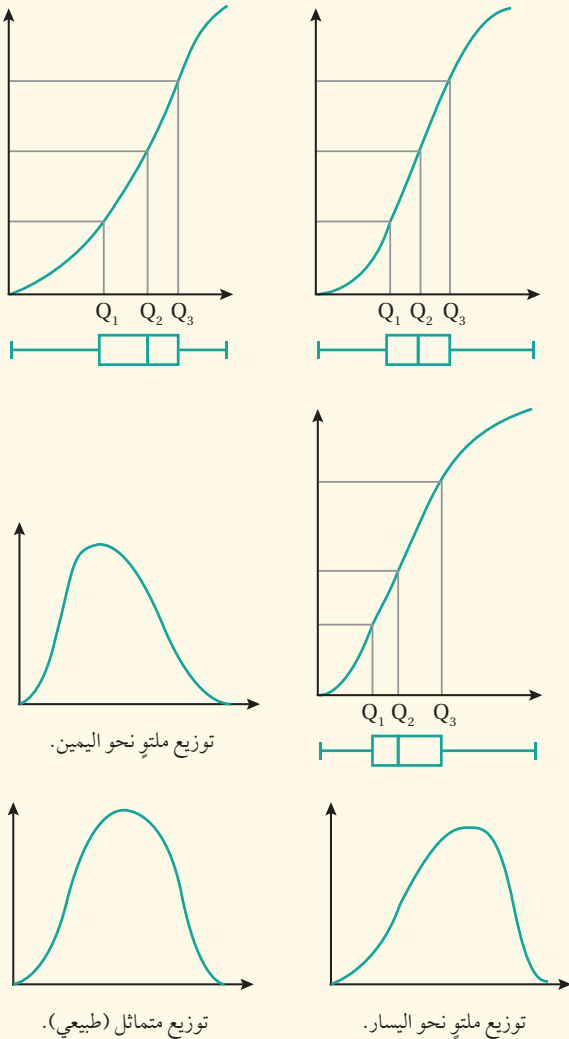
- وجّه الطلبة (ضمن مجموعات ثنائية) إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، مُذكِّراً إيّاهم بكتابة مُبرّر للإجابة التي يتوصلون إليها، وامنحهم وقتاً كافياً لنقد مُبررات زملائهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في المنزل جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، اطلّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

5 الإثراء

- وضح للطلبة كيف ترتبط ثلاث طرائق لتمثيل البيانات (المنحنى التكراري التراكمي، الصندوق ذي العارضتين، المنحنى التكراري) بثلاث طرائق من أشهر أنواع التوزيعات، كما في الجدول الآتي:



عدد المتسابقين	مجموع النقاط (x)
9	$1 \leq x \leq 20$
13	$21 \leq x \leq 40$
23	$41 \leq x \leq 60$
15	$61 \leq x \leq 80$
11	$81 \leq x \leq 100$
7	$101 \leq x \leq 120$
2	$121 \leq x \leq 140$

اللاعب: يُبين الجدول المجاور نتائج 80 متسابقاً في لعبة رمي السهام:

- 8 أرسم المنحنى التكراري التراكمي. **انظر ملحق الإجابات**
- 9 أجد قيمة كل من الوسيط، والمدى الربيعي. **انظر ملحق الإجابات**
- 10 أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين. **انظر ملحق الإجابات**
- 11 إذا حصل المتسابق الذي مجموع نقاطه أكثر من 90 على جائزة، فما نسبة المتسابقين الذين سيحصلون على جائزة؟ $\approx 18\%$

طُلب إلى 30 طالباً، و 50 معلماً رفع أيديهم لحظة تقدير انقضاء دقيقة واحدة بعد إعطاء إشارة البدء، وقد نُظمت النتائج في الجدولين الآتيين:

عدد المعلمين	فئات الزمن (x) ثانية
1	$10 < x \leq 20$
2	$20 < x \leq 30$
2	$30 < x \leq 40$
9	$40 < x \leq 50$
17	$50 < x \leq 60$
13	$60 < x \leq 70$
3	$70 < x \leq 80$
2	$80 < x \leq 90$
1	$90 < x \leq 100$

عدد الطلبة	فئات الزمن (x) ثانية
1	$20 < x \leq 30$
3	$30 < x \leq 40$
6	$40 < x \leq 50$
12	$50 < x \leq 60$
3	$60 < x \leq 70$
3	$70 < x \leq 80$
2	$80 < x \leq 90$

- 12 أرسم المنحنى التكراري التراكمي لكل جدول. **انظر ملحق الإجابات**
 - 13 أجد الوسيط والمدى الربيعي لكل جدول. **انظر ملحق الإجابات**
 - 14 أي الفريقين كان أفضل في تقدير مدة الدقيقة: الطلبة أم المعلمون؟ أبرر إجابتي.
- المعلمون أفضل في تقدير مدة الدقيقة؛ لأن قيمة الوسيط لزمن المعلمين (56 sec) أقرب إلى الدقيقة الواحدة (60 sec).

عدد الطلبة	المعدل التراكمي (x)
3	$1 < x \leq 1.5$
7	$1.5 < x \leq 2$
25	$2 < x \leq 2.5$
38	$2.5 < x \leq 3$
24	$3 < x \leq 3.5$
11	$3.5 < x \leq 4$

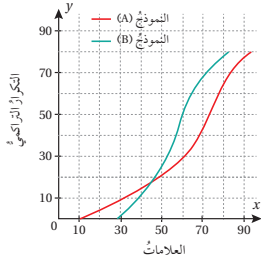
جامعات: يُبين الجدول المجاور مُعدلات عيّنة من طلبة كلية الهندسة في الجامعة الأردنية:

15 أرسّم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات. انظر ملحق الإجابات

16 أجد الوسيط والمدى الربيعي للبيانات. انظر ملحق الإجابات

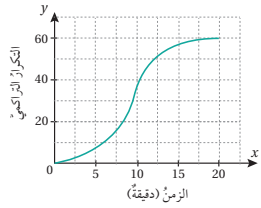
17 إذا كان الطلبة الذين تزيد مُعدلاتهم التراكمية على 3.4 قد حصلوا على منحة، فكم طالباً في هذه العيّنة لم يحصل على منحة؟ ≈ 95

مهارات التفكير العليا



18 تبرّر: طلب مُعلّم الرياضيات إلى طلبة الصف العاشر الإجابة عن أسئلة اختبار من نموذجين A و B، ثم رسم المنحنى التكراري التراكمي لنتائج الطلبة كما في الشكل المجاور. أي النموذجين كان أصعب: A أم B؟ أبرّر إجابتي.

انظر ملحق الإجابات



19 تحدّد: يُبين الشكل المجاور المنحنى التكراري التراكمي للمدة الزمنية التي استغرقتها 60 كالمّة هاتفية أُجريت في أحد الأيام مع مُقدّم برنامج حواري في إحدى المحطات الإذاعية. استعمل هذا التمثيل لتقدير النسبة المئوية للمكالمات التي استغرقت 10 دقائق على الأقل. $\approx 33\%$

20 مسألة مفتوحة: أجمع بياناتي الخاصة بـ 30 مشاهدة، ثم أنظّمها في جدول تكراري، ثم أجد كلاً من الوسيط، والمدى الربيعي لها. تعتمد الإجابة على البيانات التي يجمعها الطلبة.

تعليمات المشروع:

- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، ونبّههم على ضرورة استعمال برمجية جيو جبرا لرسم أشكال الانتشار في الخطوة 3

الختام

6

- اطلب إلى الطلبة - في نهاية الدرس - تلخيص ما تعلموه بعباراتهم الخاصة، ثم استمع لبعض ما كتبه.
- اطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو موضوع أو فكرة يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمك الورقة.
- اطّلع على الأوراق، ثم خطّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

أخطاء مفاهيمية:

عند حل السؤال 19 في بند (مهارات التفكير العليا)، قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد المقصود من عبارة (10 دقائق على الأقل)، فيعتقدون أنها تعني كل قيمة أقل من 10؛ لذا وضّح لهم أنها تعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تزيد على 10، أمّا عبارة (10 على الأكثر) فتعني جميع القيم التي تساوي 10، أو تقل عن 10

مقاييس التشتت للجدول التكرارية ذات الفئات Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.

فكرة اليوم

مسألة اليوم

عدد العمال	فئات الأجور
6	$70 \leq x < 75$
8	$75 \leq x < 80$
4	$80 \leq x < 85$
2	$85 \leq x \leq 90$

يعمل في مصنع للأثاث المنزلي 20 عاملاً، يتوزعون وفق
الأجر الأسبوعي لأقرب دينار كما في الجدول المجاور.
في أثناء زيارة مندوب وزارة العمل الذي يتابع أحوال
العمال في المصانع، أفاد المدير المالي للمصنع بأن
الانحراف المعياري لأجور العاملين هو 4.72 تقريباً.
كيف يمكن التحقق من صحة ما أفاد به المدير المالي؟

تعرفت سابقاً مقاييس التشتت التي تصف تباعد البيانات عن بعضها. ومن هذه المقاييس
التباين؛ وهو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، وقد أوجدته
باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

حيث:

$\bar{x}$: الوسط الحسابي للبيانات.

n : عدد البيانات.

تعرفت أيضاً الانحراف المعياري σ ؛ وهو الجذر التربيعي للتباين.
لنراجع كيفية حساب هذين المقياسين في المثال الآتي.

رموز رياضية

- يرمز إلى الانحراف المعياري بالرمز σ ، وهو حرف يوناني، ويُقرأ: سيجما.
- الرمز $\sum$ حرف يوناني يدل على المجموع، ويُقرأ أيضاً: سيجما.

أذكر

المدى من مقاييس التشتت، وهو يساوي أكبر القيم مطروحة منها أصغر القيم بالنسبة إلى البيانات المفردة، ويُعدّ الأقل دقة في التعبير عن تشتت البيانات أو تباعدها.

مثال 1

أجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية: 4, 7, 1, 3, 0, 3

1 التباين σ^2 :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} \\ &= \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3 \end{aligned}$$

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي.

صيغة الوسط الحسابي

بالتعويض، والتبسيط

نتائج الدرس

- يوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- يختار الصيغة التي يُفضلها لحساب التباين.
- يوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات الممثلة بمدرج تكراري.

التعلم القبلي:

- إيجاد المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المفردة.
- إيجاد المدى، والتباين، والانحراف المعياري للبيانات المنظمة في جداول تكرارية.

التهيئة

1

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
- « ما مقاييس النزعة المركزية التي سبق لكم تعلمها؟ الوسط، والوسيط، والمنوال.
- « لماذا سُميت مقاييس النزعة المركزية بهذا الاسم؟ لأنها تصف القيمة المركزية للبيانات.
- « ما مقاييس التشتت التي سبق لكم تعلمها؟ المدى، والتباين، والانحراف المعياري.
- « لماذا سُميت مقاييس النزعة المركزية بهذا الاسم؟ لأنها تصف تباعد البيانات بعضها عن بعض، أو تصف تشتتها.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد الوسط الحسابي لكل ممّا يأتي:

(a) أوزان خمسة أطفال بالكيلوغرام:

23, 27, 28, 21, 26 kg

(b) أعمار 20 طالباً موزعة كما يأتي:

العمر (سنة)	13	14	15	16
العدد	2	6	8	4

14.7 سنة.

x	(x - $\bar{x}$)	(x - $\bar{x}$) ²
4	4 - 3 = 1	1
7	7 - 3 = 4	16
1	1 - 3 = -2	4
3	3 - 3 = 0	0
0	0 - 3 = -3	9
3	3 - 3 = 0	0
المجموع		30

الخطوة 2: أنشئ جدولاً أحسب فيه انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي، فضلاً عن حساب مربعات الفروق.

الخطوة 3: أعوِّض القيم التي توصلت إليها من الجدول بصيغة التباين.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{30}{6} = 5$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، التباين هو 5

2 الانحراف المعياري σ :

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين: $\sigma = \sqrt{5}$

$$\sigma^2 \approx 17.14, \sigma \approx 4.14$$

أتحقق من فهمي

أجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية:

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغم من أن الجداول التكرارية ذات الفئات لا تظهر فيها القيم الحقيقية للبيانات، فإنه يمكن استعمالها لتقدير التباين والانحراف المعياري للبيانات؛ إذ يمكن النظر إلى جميع قيم البيانات في فئة معينة على أساس أن كلًا منها ممثلة بقيمة منتصف الفئة (مركز الفئة) x .

مفهوم أساسي

• لتقدير الوسط الحسابي للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستعمل الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f}$$

حيث:

x : مركز الفئة. f : تكرار الفئة.

• لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستعمل الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum ((x - \bar{x})^2 \times f)}{\sum f}$$

• لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين.

أتذكر

مجموع انحرافات المشاهدات أو القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا.

• وجه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:

« ما معدل الأجر الأسبوعي للعمال الذين تُصنَّف أجورهم ضمن الفئة الأولى في الجدول؟ 72.5 دينارًا.

« ما المجموع التقريبي لأجور العمال الأسبوعية في الفئتين الأولى والثانية؟ 1055 دينارًا.

« كيف يمكن تقدير الوسط الحسابي لأجور كل العاملين في المصنع؟ بجمع نواتج ضرب مراكز الفئات في عدد العمال ضمن كل فئة، وقسمة المجموع على عدد العمال جميعًا.

« كيف عرف المدير المالي قيمة الانحراف المعياري لأجور العاملين في المصنع؟ حسبها بطريقة ما.

• استمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

إرشادات:

• المثال الأول هو مراجعة للتعلم السابق؛ لذا استعمله لتذكير الطلبة بصيغة التباين المستعملة في حالة البيانات المفردة، واحرص على تنفيذ خطوات الحل الثلاث كما وردت في الفرع الأول؛ نظرًا إلى تكرار استعمال هذه الخطوات عند تقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكراري ذي فئات.

• وضح للطلبة أن تقدير التباين يتطلب أولاً إيجاد مجموع التكرارات $\sum f$ ، ثم تدوين المجموع في خانة أسفل العمود، ثم إضافة الأعمدة الخمسة المبيّنة في حل المثال.

معلومة

في ما يخص البيانات المنظمة في الجداول ذات الفئات، يكون المدى مساويًا لقيمة الحد الأعلى الفعلي للفئة العليا مطروحًا منها قيمة الحد الأدنى الفعلي للفئة الدنيا.

- اكتب الصيغ التي ورد ذكرها في بند (مفهوم أساسي) داخل إطار في الزاوية اليمنى العليا من اللوح، ثم اشرحها.

مثال 2

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، واحرص على تنظيم الإجابة وفق خطوات متسلسلة وواضحة.
- وضح للطلبة قيم المجاميع التي تضمّن الجدول، وعوّض في الصيغ الرياضية، بكتابتها بلون مختلف، أو تظليل خاناتها.
- وجّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: مقاييس التشبّت (measures of variaton)، والمدى (range)، والتباين (variance)، والانحراف المعياري (standard deviation).

التقويم التكويني: ✓

- وجّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (تحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال 2

عدد الحُفَاط	فئات العمر
15	6 - 8
10	9 - 11
25	12 - 14

حفظ القرآن الكريم: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لخمسين طالباً يحفظون 5 أجزاء من القرآن الكريم بحسب أعمارهم لأقرب سنة. أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

لتقدير التباين، أنشئ جدولاً جديداً يحوي الأعمدة المُطلَلة عناوينها على النحو الآتي:

فئات العمر	f	x	x × f	x - $\bar{x}$	(x - $\bar{x}$) ²	(x - $\bar{x}$) ² × f
6 - 8	15	7	105	-3.6	12.96	194.4
9 - 11	10	10	100	-0.6	0.36	3.6
12 - 14	25	13	325	2.4	5.76	144
المجموع	50		530			342

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

بالنعويض في صيغة المتوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \frac{\sum ((x - \bar{x})^2 \times f)}{\sum f}$$

صيغة التباين

$$= \frac{342}{50}$$

بالنعويض

$$= 6.84$$

بالتبسيط

لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma \approx 2.62$$

أتحقق من فهمي

عدد الأشخاص	فئات العمر (سنة)
100	18 ≤ x < 28
52	28 ≤ x < 38
26	38 ≤ x < 48
18	48 ≤ x < 58
4	58 ≤ x ≤ 68

يُبين الجدول المجاور توزيعاً لـ 200 سائق وفق أعمارهم، ممن تسببوا في حوادث مرورية خطيرة في إحدى المدن على مدار أسبوع. أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

$$\sigma^2 \approx 115.31, \sigma \approx 10.74$$

توجد صيغة أخرى لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، من دون حاجة إلى حساب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وهذه الصيغة هي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f}$$

مثال 3: من الحياة



معلومة

في شهر تشرين الثاني من عام 1971م، تمكّن راي توملينسون (مُخترع البريد الإلكتروني) من إرسال أول رسالة إلكترونية وصلت إلى العنوان المُرسَل إليه مباشرة.

بريد إلكتروني: دَوِّنَتْ سُمِّيَّةُ عددَ رسائل البريد الإلكتروني اليومية التي وصلتها في 40 يوماً، ونظّمت بياناتها في الجدول التكراري المجاور. أقدّر التباين لهذه البيانات.

عدد الأيام	عدد الرسائل
6	10 - 14
5	15 - 19
12	20 - 24
9	25 - 29
8	30 - 34

لتقدير التباين، أنشئ جدولاً جديداً يحوي الأعمدة المُطلَّلة عناوينها على النحو الآتي:

عدد الرسائل	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
10 - 14	6	12	144	72	864
15 - 19	5	17	289	85	1445
20 - 24	12	22	484	264	5808
25 - 29	9	27	729	243	6561
30 - 34	8	32	1024	256	8192
المجموع	40			920	22870

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23 \quad \text{بالتعويض في صيغة الوسط الحسابي}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f} \quad \text{الصيغة الثانية لحساب التباين}$$

$$= \frac{22870 - 21160}{40} \quad \text{بالتعويض}$$

$$\approx 43 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

أحل مسألة (حفظ القرآن الكريم) التي وردت في المثال 2 باستعمال الصيغة الثانية لتقدير الانحراف المعياري، ثم أقرن قيمة الانحراف المعياري التي أتوصل إليها بالقيمة التي سبق حسابها. انظر ملحق الإجابات.

يُمكنني أيضاً تقدير مقاييس التشتت للبيانات المُمثَّلة بمُدْرَج تكراري، عن طريق إعادة تنظيمها في جدول ذي فئات وتكرار.

- وضح للطلبة أنه يمكن تقدير التباين باستعمال صيغة أخرى لا تعتمد على حساب فروق مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وأن بعضهم قد يجد هذه الصيغة أسهل من الصيغة الأولى.
- أخبر الطلبة أن قيمة التباين الناتجة هي نفسها في كلتا الصيغتين، وأن اختلاف القيمة أحياناً في الصيغتين سببه تقريب القيم في أثناء الحسابات.
- اكتب صيغتي تقدير التباين في أعلى اللوح، موضّحاً الفروق بينهما.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، مُبيّناً أن الإجابة تتطلب إضافة أربعة أعمدة جديدة إلى الجدول الأصلي.
- وضح للطلبة مُسمّيات الأعمدة الأربعة: $x, x^2, f \times x, f \times x^2$ ، مُحدّداً الأعمدة الثلاثة التي يتعيّن إيجاد مجموع القيم في خاناتها، وكيفية التعويض في الصيغة الرياضية لتقدير التباين.
- وجّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة حيثما لزم ذلك.

المفاهيم العابرة:

- عند حل المثال الثالث، أدر حواراً مع الطلبة - في دقيقتين - عن مُخترع البريد الإلكتروني (راي توملينسون)، ثم اسألهم:
 - « كيف أسهم هذا الاختراع في خدمة البشرية؟ »
 - « أيكم فكّر أن يكون مُخترعاً أو مُبدعاً؟ »
- أخبر الطلبة أن الأفكار الإبداعية لا تقاس بحجمها. فمُخترع قلم الرصاص، ومُخترع الممحاة، ومُخترع جهاز الحاسوب؛ جميعهم أصحاب أفكار إبداعية.
- حفّز الطلبة على تقدير جهود العلماء وأصحاب الأفكار الإبداعية.

مثال 4

• أخبر الطلبة أن المُدرّج التكراري هو طريقة لعرض البيانات الكبيرة، وتلخيصها، وتمثيلها، وأنه يمكن التحويل بسهولة بين المُدرّج التكراري والجدول التكراري ذي الفئات.

• وضح للطلبة كيف يمكن إنشاء جدول تكراري ذي فئات من المُدرّج المعطى في المثال، ثم اسألهم:

« كيف نصف توزيع البيانات المُمثّلة بهذا المُدرّج التكراري؟ توزيع ملتوٍ نحو اليسار.

« هل الوسيط Q_2 في هذا التوزيع أقرب إلى الربع الأدنى Q_1 أم إلى الربع الأعلى Q_3 ؟ أقرب إلى الربع الأعلى Q_3 .

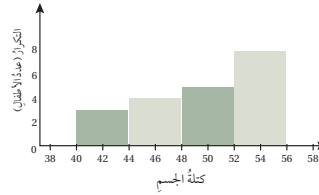
• ناقش الطلبة في حل هذا المثال.

تنويع التعليم:

• أخبر الطلبة أن بعض الآلات الحاسبة العلمية تمتاز بخاصية إدخال الفئات والتكرارات، وإجراء الحسابات اللازمة لتقدير التباين والانحراف المعياري.

• إذا توافر لدى بعض الطلبة مثل هذه الآلات، فاطلب إليهم استعمالها لتقدير التباين والانحراف المعياري، ثم اطلب إلي أحدهم شرح تعليمات الاستعمال، وتطبيقها أمام زملاء في الصف.

مثال 4



كتلة الجسم: يُبيّن التمثيل بالمُدرّج التكراري المجاور توزيعاً لمجموعة أطفال من سن 10 سنوات وفَقَ كتل أجسامهم مُقَرَّبَةً إلى أقرب كيلوغرام. أَقَدَّرُ التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

1 التباين: أعيدُ تنظيم البيانات في جدول ذي فئات وتكرارٍ على النحو الآتي:

الفئة (الكتلة x)	f	x	$x \times f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \times f$
$40 \leq x < 44$	3	42	126	-7.6	57.76	173.28
$44 \leq x < 48$	4	46	184	-3.6	12.96	51.84
$48 \leq x < 52$	5	50	250	0.4	0.16	0.8
$52 \leq x \leq 56$	8	54	432	4.4	19.36	154.88
المجموع	20		992			380.8

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$

صيغة الوسط الحسابي

$$= \frac{992}{20} = 49.6$$

بالتعويض، والتبسيط

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f}$$

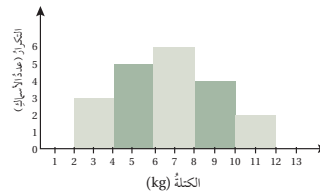
الصيغة الأولى لحساب التباين

$$= \frac{380.8}{20} = 19.04$$

بالتعويض، والتبسيط

2 الانحراف المعياري:

لتقدير الانحراف المعياري، أجدُ الجذر التربيعي للتباين: $\sigma \approx 4.36$



صيد بحري: يُبيّن التمثيل بالمُدرّج التكراري المجاور توزيعاً لكتل مجموعة من الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في مدينة العقبة. أَقَدَّرُ التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات. انظر ملحق الإجابات

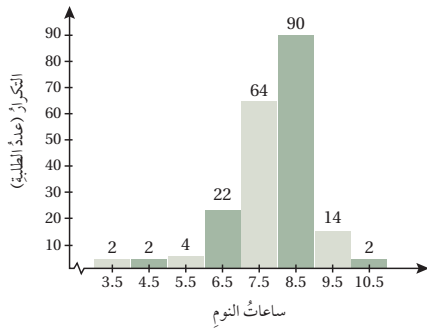


يحوي خليج العقبة ما يزيد على 500 نوع من الأسماك من أصل 1400 نوع تعيش في مياه البحر الأحمر.

عدد الطلبة	الفئات (عدد الكلمات في الدقيقة)
8	26 – 30
12	31 – 35
10	36 – 40
7	41 – 45
3	46 – 50

عدد الشقق	الفئات (المساحة m^2)
2	$80 \leq x < 100$
5	$100 \leq x < 120$
7	$120 \leq x < 140$
6	$140 \leq x < 160$
3	$160 \leq x \leq 180$

فريق الأسود	فريق النور	الطول (x)
2	3	$170 \leq x < 178$
3	1	$179 \leq x < 187$
3	4	$188 \leq x < 196$
2	2	$197 \leq x \leq 205$



طباعاً: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لأربعين طالباً في الصف العاشر بحسب عدد الكلمات التي يستطيعون طباعتها في جهاز الحاسوب في دقيقة واحدة:

1 أُقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات. $\bar{x} = 36.125$

2 أُقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات. $\sigma^2 \approx 35.86, \sigma \approx 5.99$

شقق سكنية: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لـ 23 شقة سكنية – بحسب مساحتها – بنتها إحدى شركات الإسكان عام 2020م:

3 أُقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات. $\bar{x} = 132.61$

4 أُقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات بطريقتين مختلفتين.

انظر ملحق الإجابات

كرة سلة: يُبين الجدول المجاور توزيع اللاعبين في فريقين لكرة السلة وفق أطوالهم بالسنتيمتر:

5 أُقدّر التباين لأطوال اللاعبين في كل فريق. انظر ملحق الإجابات

6 أي الفريقين أكثر تجانساً من حيث أطوال اللاعبين؟ أبرّر إجابتي. أطوال لاعبي فريق الأسود أكثر تجانساً؛ لأن تباينها أقل من تباين

أطوال فريق النور.

ساعات النوم: يُبين التمثيل بالمدّج التكراري المجاور توزيعاً لـ 200 طالب بحسب ساعات نومهم:

7 أُقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات. $\bar{x} = 7.9$

8 أُقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات. $\sigma^2 \approx 1.1, \sigma \approx 1.05$

9 أصبّ توزيع هذه البيانات. التوزيع ملتوٍ نحو اليسار.

- ناقش الطلبة في حل الأسئلة (5–17)
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1, 2, 3, 4, 11) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- تجوّل بين الطلبة مُرشّداً، ومُساعداً، ومُوجِّهاً، وقُدّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختَر طالباً تمكّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- وجه الطلبة (ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة) إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، وذكر كل مجموعة بكتابة مبرر للإجابة التي توصلوا لها، وامنح طلبة الصف وقتاً كافياً لنقد مبررات زملائهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في المنزل جميع المسائل الواردة في الصفحة السابعة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدّداً لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصّة بحسب ما يُقدّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضاً إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطّلع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إرشاد:

عند حل السؤال 15 في بند (مهارات التفكير العليا)، ذكّر الطلبة بالمفكوك:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تعمد كتب الإحصاء كتابة صيغتي تقدير التباين بتحديد مؤشر (index) الذي يُرمز إليه بالحرف (i)، ويكتب أسفل رمز المجموع $\sum$ ، ويتخذ هذا المؤشر القيم: $1, 2, 3, \dots, n$ حيث n عدد صحيح غير سالب.

وجه الطلبة إلى البحث في مصادر المعرفة المتوفرة عن أهمية هذا المؤشر، ومجالات استعماله.

أخبر الطلبة أن كتب الإحصاء تحتوي أيضًا على صيغ أخرى تُستعمل لتقدير التباين والانحراف المعياري، ثم اطلب إليهم البحث عن هذه الصيغ، وكتابة تقرير عنها يتضمن أمثلة على تطبيق الصيغ الجديدة.

ذكر الطلبة بضوابط التقرير العلمي ومعايره، التي أهمها: وجود صفحة لعنوان التقرير وأسماء المُعدِّين، وفهرس للعناوين الفرعية، ومراعاة الدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.

أخبر الطلبة أنه يمكنهم عرض ملخص للتقرير في أثناء الحصة المُخصَّصة لعرض مشروع الوحدة.

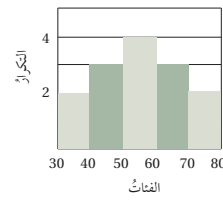
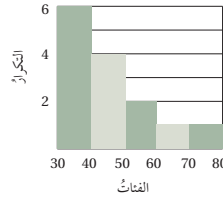
تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوتين (4) و(5) من خطوات المشروع.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزودهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

اطلب إلى الطلبة -في نهاية الدرس- تلخيص ما تعلموه بعباراتهم الخاصة، ثم استمع لبعض ما كتبه.

اطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو موضوع أو فكرة يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمك الورقة.

اطلع على الأوراق، ثم خطط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.



10 أقرن بين قيمتي التباين للبيانات المُمثلة في الشكلين المجاورين، مُفسِّراً سبب الاختلاف بينهما.

انظر ملحق الإجابات

11 عمل: أخل المسألة الواردة في بداية الدرس.

انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

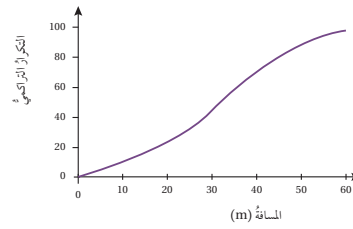
12 مسألة مفتوحة: أنظّم البيانات الآتية في جدول تكراري (أختار طولاً مناسباً للفترات)، ثم أقدّر قيمتي الوسط الحسابي والتباين، مُستعملاً آلة حاسبة لإيجاد القيمة الدقيقة لكل منهما، ثم أقرن قيمتهما الدقيقة بالقيم التقديرية.

القيم الدقيقة هي:
 $\bar{x} = 11.48$

15	14	14	14	13	12	11	11	11	11
10	11	13	16	10	9	15	12	9	10
7	14	13	14	8	9	8	11	13	13
15	12	9	10	9	9	16	16	12	10
11	11	12	15	6	10	10	10	11	9

13 تبرير: في السؤال (12)، ما تأثير أطوال فترات الجدول التكراري الذي أنشأته في القيمة التقديرية للتباين؟ أبرّر إجابتي.

انظر ملحق الإجابات



14 تبرير: هل يمكن تقدير التباين للبيانات المُمثلة في المنحنى التكراري التراكمي المجاور؟ أبرّر إجابتي.

انظر ملحق الإجابات

15 تبرير: أكتب تبريراً لكل من الخطوات الجبرية الآتية:

$$\begin{aligned}\sum (x - \bar{x})^2 &= \sum x^2 - 2\bar{x} \sum x + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\end{aligned}$$

انظر ملحق الإجابات

16 أكتب: أي صيغتي التباين أفضل استعمالاً؟ لماذا؟ تعتمد الإجابة على اختيار الطلبة.

الدرس
4

احتمالات الحوادث المتنافية

Probability of Mutually Exclusive Events

حساب احتمالات الحوادث المتنافية، وغير المتنافية، ومُتَمِّم الحوادث.

الحدث البسيط، الحادث المُركَّب، الحادثان المتنافيان، مُتَمِّم الحوادث.



استورد تاجرٌ شحنةً من السكر في باخرتين. إذا كان احتمال وصول الباخرة الأولى في موعدها 60%، واحتمال وصول الباخرة الثانية في موعدها 50%، واحتمال وصولهما معاً 30%، فما احتمال وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها؟

يُسمَّى الحادث الواحد (مثل وصول الباخرة الأولى في موعدها) **الحادث البسيط** (simple event)، أما **الحادث المُركَّب** (compound event) فيتكوّن من حادثين بسيطين أو أكثر، مثل وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها.

إذا كان (A) و (B) حادثين في تجربة عشوائية، فإنهما يُسمَّيان **حادثين متنافيين** (mutually exclusive)؛ إذا تعذّر وقوعهما معاً في الوقت نفسه. ويُقصد بالمتنافيين عدم وجود عناصر مشتركة بينهما.

أتعلّم

يُطلق على الحادثين المتنافيين أيضاً اسم الحادثين المنفصلين.

مثال 1

أحدّد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا في ما يأتي، مُبرِّراً إجابتي:

1 التجربة هي لعبة كرة القدم. الحادث الأول هو الفوز في المباراة، والحادث الثاني هو الخسارة.

الحادثان متنافيان؛ لأنه لا يمكن الفوز والخسارة في الوقت نفسه.

2 التجربة هي إلقاء حجرٍ نردٍ منتظم. الحادثان هما الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أقل من 3

الحادثان غير متنافيين؛ نظرًا إلى وجود عنصرٍ مشتركٍ بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3 في الوقت نفسه.

أتدكّر

الحادثان (A) و (B) و $(A \text{ أو } B)$ كلاهما مُركَّب؛ لأنه يتكوّن من حادثين بسيطين.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

نتائج الدرس

- يحدد إذا كان الحادثان متنافيين أو غير متنافيين.
- يجد احتمالات حوادث متنافية وحوادث غير متنافية ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- يمثل التجارب العشوائية بأشكال فن، ويستعملها لإيجاد الاحتمالات.
- يجد احتمال الحادث المتمم.

التعلم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسيطة وعناصر فضاء العينة في تجربة عشوائية.
- إيجاد تقاطع مجموعتين، واتحادهما، ومتممة مجموعة.
- إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

التهيئة

1

- اكتب على اللوح المثال الآتي لتوضيح مجموعة من المفاهيم المتعلقة بالاحتمال:

« في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، إذا كان A يعني ظهور عدد أقل من 3، و B يعني ظهور عدد أكبر من 5، و C يعني ظهور عدد أكبر من 6، و D يعني ظهور عدد أقل من 7، فماذا تُسمّى هذه التجربة؟ **تجربة عشوائية.**

- اعرض حجر نرد منتظمًا أمام الطلبة، مُوضِّحًا لهم خصائصه (يمكنك الاستعانة بصورة حجر النرد الظاهرة في المثال الثاني إذا لم يتوافر حجر نرد حقيقي).

- ذكّر الطلبة بمفهوم فضاء العينة (sample space)، ورمزه Ω (أوميغا)، وتعريفه: مجموعة النواتج الممكنة جميعها لتجربة عشوائية. ذكّرهم أيضًا بمفهوم الحادث البسيط (simple event)، وبعنصره التي تنتمي إلى فئة واحدة، مثل: فئة العدد الأولي، وفئة العدد الفردي، وليس بالضرورة الحادث الذي فيه عنصر واحد.

« ماذا تعني Ω في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة؟ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ »

« ماذا يُسمَّى كلٌّ من A ، و B ، و C ، و D ؟ يُسمَّى حادثًا بسيطًا. »

« ما عناصر كلٍّ من A ، و B ، و C ، و D ؟ $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{6\}$ ، $C = \{\} = \emptyset$ ، $D = \Omega$ »

« ما عناصر كلٍّ من $A \cap B$ ، و $A \cup B$ ، و $\bar{A}$ ؟ $A \cup B = \{1, 2, 6\}$ ، $A \cap B = \emptyset$ ، $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ »

• ذكّر الطلبة بمفهوم الاحتمال (probability)، وكيفية إيجاد احتمال كلٍّ من الحوادث المعطاة، مُبيّنًا أن الحادث الذي احتمالته 0 يُسمَّى مستحيلًا، وأن الحادث الذي احتمالته 1 يُسمَّى أكيدًا، وأن احتمال أيِّ حادث يجب أن يقع ضمن الفترة $[0, 1]$.

الاستكشاف

2

• وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:

« حوّل احتمال حادث وصول الباخرة الأولى في موعددها إلى كسر. $\frac{3}{5} = 0.6$ »

« ماذا يُسمَّى حادث وصول الباخرة الأولى في موعددها؟ يُسمَّى حادثًا بسيطًا. »

« ماذا يُسمَّى حادث وصول الباخرتين معًا؟ يُسمَّى حادثًا مُركَّبًا؛ لأنه يتكوّن من حادثين بسيطين. »

• استمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

✓ **إرشاد:** أخبر الطلبة أن حجر النرد المنتظم مكعب يظهر على كل وجه من وجوهه رقم (أو نقاط تدل على أحد الأرقام من 1 إلى 6)، ويكون مجموع كل رقمين على وجهين متقابلين 7؛ فالوجه الذي يحمل الرقم 2 مثلاً يقابل الوجه الذي يحمل الرقم 5.

التدريس

3

• وضح للطلبة مفهوم الحادثين المتنافيين (mutually exclusive)، مُبيّنًا أنهما يُسمَّيان أيضًا الحادثين المنفصلين.

• عُدّ إلى المثال الذي قدّمته في بند (التهيئة)، ثم اسأل الطلبة:

« ماذا يُسمَّى حادث ظهور عدد أقل من 3 وأكبر من 5؟ يُسمَّى حادثًا مُركَّبًا. »

« كيف يُكتَب هذا الحادث بالرموز؟ A and B ، أو $A \cap B$. »

• أخبر الطلبة أنه يمكن تسمية هذا الحادث برمز جديد مثل E ، علمًا بأن $E = A \cap B$.

• أخبر الطلبة أن $A \cap B = \emptyset$ ؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بين A و B ، وأنه يتعدّد وقوع الحادثين معًا؛ لذا فهما حادثان متنافيان: $P(E) = P(A \cap B) = 0$.

- اطلب إلى أحد الطلبة قراءة النصوص في فرعي المثال، ثم بين لهم كيف يمكن تمييز الحادتين المتنافيين من الحادتين غير المتنافيين.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال.
- عند توضيح الفرع الأول، اذكر مثالاً حياتياً على نتائج بعض المباريات في كرة القدم من الدوري المحلي أو غيره.
- استعن بحجر نرد حقيقي عند توضيح الفرع الثاني من المثال.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: الحادث البسيط (simple event) والحادث المركّب (compound event)، والحادتين المتنافيين (mutually exclusive)، والحادث المتمم (complement event).

التقويم التكويني:

- اطلب إلى الطلبة - ضمن مجموعات - حل التدريب في بند (أنحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

التدريس:

- وضح للطلبة دلالة أداة الربط (و: and)، و(أو: or)، ورمز كل منهما: $\cap$ ، $\cup$ (على الترتيب).
- بين للطلبة أن ورود أدوات الربط في نص السؤال له دلالات محدّدة. فمثلاً، ورود تركيب (على الأقل) في السؤال يدل على $\cup$ ، أو على أداة الربط (أو: or).
- وضح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، واحرص على تقديمه بالكلمات والرموز؛ للإفادة من ذلك في عرض تمثيلات رياضية متكافئة للفكرة الواحدة.

أنحقق من فهمي

- أحدّد إذا كان الحادّان متنافيين أم لا في ما يأتي، مُبرّراً إجابتي:
- (a) التجربة هي سحب بطاقة واحدة عشوائياً من سلة فيها 5 بطاقات حمراء، و3 بطاقات خضراء. الحادث الأول سحب بطاقة حمراء، والحادث الثاني سحب بطاقة خضراء.
- (b) التجربة هي لقاء حجر نرد منتظم. الحادّان هما الحصول على عدد فرديّ أو عدد زوجيّ عند لقاء حجر النرد.

تعرّفْتُ سابقاً أن تقاطع حادّتين في تجربة عشوائية يعني وقوعهما معاً، ويُستدلّ على ذلك من أداة الربط (و: and) أو الرمز $\cap$ ، وأن اتحاد حادّتين يعني وقوع أحدهما على الأقل، ويُستدلّ على ذلك من أداة الربط (أو: or) أو الرمز $\cup$. فإذا كان (A) و (B) حادّتين متنافيين، فإنّ احتمال وقوعهما معاً $P(A \cap B)$ يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل $P(A \cup B)$ يساوي مجموع احتماليّ وقوعهما.

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادّتين متنافيين في تجربة عشوائية، فإنّ احتمال وقوعهما معاً يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتماليّ وقوعهما.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادّتين متنافيين، فإنّ:
 $P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$
 $P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

أتعلّم

الحرف (P) هو اختصار لكلمة (Probability) التي تعني الاحتمال.

أتدبّر

لأيّ تجربة عشوائية، احتمال وقوع الحادث البسيط E يساوي عدد عناصر هذا الحادث $n(E)$ مقسوماً على عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega)$ أي:
 $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

مثال 2

في تجربة لقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، أجد ما يأتي:

- 1 احتمال ظهور العدد 1، وظهور عدد زوجيّ.

أفترض أنّ (A) هو حادث ظهور العدد 1، و (B) هو حادث ظهور

عدد زوجيّ. إذن، $A = \{1\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$

بما أنّ $\{1\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$ ، فإنّ (A) و (B) حادّان متنافيان. إذن، احتمال وقوعهما

معاً هو صفراً. وبالرموز: $P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$



- استعن بحجر نرد حقيقي عند مناقشة الطلبة في حل فرعي هذا المثال.
- اكتب الإجابة من اليسار إلى اليمين، وبالرموز الإنجليزية، ثم اقرأها، مُحَفِّزًا الطلبة على عمل ذلك بصورة صحيحة.
- حَفِّز الطلبة على وضع خط - بقلم ألوان- تحت النص الذي يدل على الحادث المراد إيجاد احتماله؛ لأنه يساعدهم على التعبير عن الاحتمال المطلوب بالرموز، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة.
- وجّه الطلبة إلى الحرص دائما على كتابة الناتج النهائي في أبسط صورة.

2 احتمال ظهور العدد 1، أو ظهور عدد زوجي.
بما أنَّ (A) و (B) حادثان متنافيان، فإنَّ احتمال وقوع (A) أو (B) (وقوع أحدهما على الأقل) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما. وبالرموز:
صيغة احتمال حادثين متنافيين
 $P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 $= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$ بإيجاد احتمالات كلٍّ من الحادثين، والتعويض
 $= \frac{2}{3}$ بالجمع، ثم التبسيط

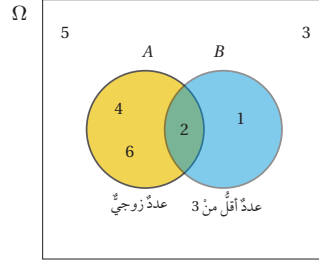
أتحقق من فهمي انظر ملحق الإجابات

في تجربة اختيار عدد عشوائيٍّ من بين الأعداد: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8، أجد:

- (a) احتمال اختيار عدد أولي، ويقبل القسمة على 4
(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد يقبل القسمة على 4

لاحظتُ في المثال 1 أنَّ حادثي الحصول على عدد زوجيٍّ أو عدد أقل من 3 عند إلقاء حجر نرد منتظم هما غير متنافيين؛ نظرًا إلى وجود عنصرٍ مشتركٍ بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجيٍّ، وأقل من 3، فكيف أجد احتمال وقوع أحدهما على الأقل؟

إذا كان (A) حادث الحصول على عدد زوجيٍّ، و (B) حادث الحصول على عدد أقل من 3، في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإنه يمكن تمثيل هذين الحادثين باستعمال أشكالٍ فن كما يأتي:



عند حساب احتمال كلِّ حادثٍ على حدة، أجد أنَّ:

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

أتذكر

لأيِّ حادثٍ (A) في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما Ω ، فإنَّ:
 $0 \leq P(A) \leq 1$

رموز رياضية

يُستعمل الحرف اليوناني Ω للدلالة على فضاء العينة للتجربة العشوائية، ويُقرأ: أوميغا.

- قبل البدء بحل السؤال في هذا المثال، عُدْ إلى الفرع الثاني من المثال الأول، ووضِّح للطلبة - باستعمال أشكال فن - كيف يظهر الحادثنان، وسبب عدِّهما حادثنين غير متنافيين.
- وضِّح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، واحرص على تقديمه بالكلمات والرموز.

إرشادات:

- احرص دائماً على تقديم المفاهيم باستعمال تمثيلات رياضية مُتعدِّدة؛ ليتمكَّن معظم الطلبة من فهمها؛ ذلك أنهم يتفاوتون في طرائق تعلمهم؛ فمنهم البصري، ومنهم اللفظي، ومنهم غير ذلك.
- استعمل صندوقاً يحوي بطاقات مرقمة من 1 إلى 15 لتمثيل التجربة في المثال الثالث بصورة حسية وواقعية.
- اكتب عناصر كلٍّ من الحادثن M و F في صورة مجموعات قبل تمثيلهما بشكل فن، مُبيِّناً أنهما غير متنافيين؛ نظراً إلى وجود عناصر مشتركة بينهما ضمن منطقة التقاطع.
- اطلب إلى الطلبة تمثيل حوادث التجارب العشوائية بشكل فن؛ لأن ذلك يساعدهم على تحديد المطلوب، وإيجاد الاحتمال بصورة صحيحة.
- أخبر الطلبة أنه يمكن حساب احتمال وقوع أحد الحادثن على الأقل من شكل فن من دون استعمال القانون: $P(F \cup M)$.

عند إيجاد احتمال وقوع أحد الحادثن على الأقل، وجمع هذين الاحتمالين، فإنَّ احتمال العدد 2 سيتكرَّر؛ لأنَّه موجودٌ في الحادثن (موجودٌ في منطقة التقاطع بين الحادثنين)، ولذلك يجب طرحه من مجموع الاحتمالين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادثنين غير متنافيين في تجربة عشوائية، فإنَّ احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتماليهما، مطروحاً منه احتمال وقوع (A) و (B) معاً.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثنين غير متنافيين، فإنَّ:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 3

يحتوي صندوقٌ على 15 بطاقة مرقمة من 1 إلى 15، إذا سُحِبَتْ بطاقة عشوائياً، فأجد احتمال الحادثن الآتيين:

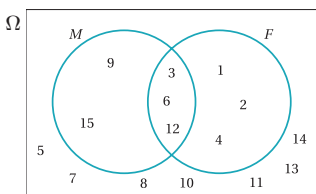
1 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، ومن عوامل العدد 12

أفترض أنَّ (M) هو حادث اختيار عدد من مضاعفات العدد 3، و (F) هو حادث اختيار عدد من عوامل العدد 12

أداة الوصل (و) في السؤال تشير إلى أنَّ المطلوب هو تقاطع الحادثن (M) و (F) .

يُمكِنُ استعمال أشكال فن لتحديد عدد العناصر المشتركة بين الحادثن كما في الشكل المجاور:

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F) \\ = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$



• اكتب على اللوح السؤال الآتي:

« في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، إذا كان A حادث ظهور العدد 5، فما احتمال عدم ظهور العدد 5؟ »

« مثل التجربة بشكل فن، مُبيّنًا للطلبة أن مجموعة العناصر التي تقع خارج A تنتمي إلى مجموعة تُسمى متمم الحادث (A complement event)، ويُرمز إليها بالرمز $\bar{A}$ ، وأن المطلوب في السؤال أعلاه هو $P(\bar{A})$ ، وأنه باستعمال شكل فن فإن:

$$P(\bar{A}) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

• جِدْ $1 - P(\bar{A})$ ، ثم اسأل الطلبة:

« ماذا تلاحظون؟ تساوي ناتجي $P(\bar{A})$ و $1 - P(\bar{A})$ »

• وضح للطلبة التعميم الوارد في بند (مفهوم أساسي)، بعد كتابته داخل إطار في إحدى زوايا اللوح العليا، واحرص على تقديمه بالكلمات والرموز؛ للإفادة من ذلك في عرض تمثيلات رياضية متكافئة للفكرة الواحدة.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة عند تحديد عناصر متمم الحادث A مثلاً، فيكتبون العناصر خارج الحوادث المُمثلة بشكل فن، ويُهملون العناصر المكتوبة في الحادث B خارج منطقة التقاطع (إن وُجدت)؛ لذا اطلب إليهم تظليل المنطقة خارج الحادث A وداخل فضاء العينة Ω ؛ لمساعدتهم على تحديد عناصر متمم الحادث A بسهولة.

2 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، أو من عوامل العدد 12

أداة الوصل (أز) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو اتحاد الحادثين غير المتنافيين (M) و (F) اللذين سُميا في الفرع السابق. وهذا يعني احتمال وقوع أحدهما على الأقل (احتمال اتحادهما):

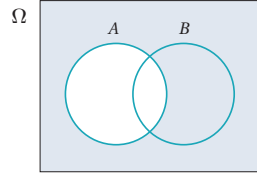
$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) \\ = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

أنظر ملحق الإجابات

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، أجد:

(a) احتمال اختيار عدد أولي، ومن عوامل العدد 10

(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد من عوامل العدد 10



يحتوي الحادث المُمتم ($A \cup B$ complement event) للحادث (A) ، لأي تجربة عشوائية، على جميع عناصر فضاء العينة غير الموجودة في الحادث (A) ، ويُرمز إليه بالرمز $\bar{A}$.

تُمثل المنطقة الزرقاء في شكل فن المجاور ($\bar{A}$) بوصفها جزءاً من فضاء العينة. فمثلاً، عند إلقاء حجر نرد، إذا كان الحادث (A) هو الحصول على العدد 5، فإن:

$$A = \{5\}, \quad \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

لذا، فإن:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مفهوم أساسي

بالكلمات: احتمال وقوع مُتممة الحادث (A) هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث (A) .

بالرموز: لأي حادث (A) في تجربة عشوائية، فإن:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

رموز رياضية

لأي تجربة عشوائية، فإن $\bar{A}$ يعني عدم وقوع الحادث A .

أندكّر

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

• ناقش الطلبة في حل هذا المثال.

• يمكنك رسم شكل تقريبي لصندوق فيه مجموعة ساعات كما في المثال، واستعمال الحرف B : ساعة سوداء، و Z : ساعة زرقاء، و R : ساعة حمراء داخل الصندوق، ووضع عدد الساعات من كل لون بجانب الحرف المناسب.

• اكتب الفرض: A : حادث الحصول على ساعة حمراء، ثم اكتب المطلوب: $P(\bar{A})$ ، مُحَفِّزًا الطلبة على اتباع ذلك.

• ذكّر الطلبة بكيفية طرح كسر من عدد صحيح، وكتابة الناتج النهائي في أبسط صورة.

• اكتب مبررات لخطوات الحل، وحفّز الطلبة على عمل ذلك.

4 التدريب

- ناقش الطلبة في حل الأسئلة (4-7)، و (12-21).
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (3-1)، و (8-11)، و 22 بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- تجوّل بين الطلبة مُرَشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقُدِّم لهم التغذية الراجعة.

مثال 4

جوائز: نالتْ خلودُ جائزةَ الطالبةِ المثاليةِ في الصفِّ العاشرِ، وتُلبِّبُ إليها أن تسحبَ جائزةَها عشوائيًا من صندوقٍ يحتوي على 9 ساعاتٍ سوداء، و 5 ساعاتٍ زرقاء، و 8 ساعاتٍ حمراء. ما احتمالُ عدم اختيارِ خلودَ ساعةَ حمراء؟

إذا كانَ (A) هوَ حادثُ الحصولِ على ساعةٍ حمراء، فإنَّ المطلوبُ هوَ $P(\bar{A})$:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{8}{22} \\ &= \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \end{aligned}$$

احتمالُ المُتممَةِ

بالتعويض

بالتبسيط

أنتحقق من فهمي  انظر ملحق الإجابات

سحبَ هيثمُ كرةَ عشوائيًا من كيسٍ يحتوي على كراتٍ مُتماثلةٍ؛ واحدةٍ منها صفراء، و 3 كراتٍ حمراء، و 12 كرةَ خضراء. ما احتمالُ عدم سحبِ هيثمَ كرةَ خضراء؟

رموز رياضية

تُستعملُ أحيانًا كلمة (فقط) في الاحتمالات، مثل قولنا: احتمال وقوع الحادث A فقط، وتعني احتمال وقوع الحادث A ، وعدم وقوع أيِّ حوادثٍ أخرى مع A في الوقتِ نفسه. وبالرموز:

$$P(A \text{ and not } B) = P(A \cap \bar{B})$$

أُتدرب وأحل المسائل



أُحدِّدُ إذا كانَ الحادثانِ متنافيين أم لا لكلِّ تجربةٍ عشوائيةٍ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

- 1 ظهور العدد 3، أو ظهور عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدةً. **الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.**
- 2 ظهور أحد عوامل العدد 12، أو ظهور عدد أولي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدةً. **الحادثان غير متنافيين؛ لأن 2 و 3 عناصر مشتركة بينهما.**
- 3 ظهور عددين مجموعهما 8 أو 12 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرةً واحدةً. **الحادثان متنافيان؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.**

في تجربة اختيار بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًا من 20 بطاقةً مُتماثلةً، كُتبَ على كلِّ منها عددٌ من 1 إلى 20، أُجِدُ:

- 4 احتمال اختيار عددٍ من مضاعفات العدد 7، ومن مضاعفات العدد 5 **انظر ملحق الإجابات**
- 5 احتمال اختيار عددٍ من مضاعفات العدد 7، أو من مضاعفات العدد 5 **انظر ملحق الإجابات**
- 6 احتمال اختيار عددٍ فرديٍّ، وقبَل القسمة على 4 **انظر ملحق الإجابات**
- 7 احتمال اختيار عددٍ فرديٍّ، أو يقبل القسمة على 4 **انظر ملحق الإجابات**

تنويع التعليم (التعلم بالأقران):

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط أو دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (أُتدرب وأحل المسائل)، فوزّع طلبة الصف إلى مجموعات ثلاثية، تضم كلَّ منها طالبًا من ذوي المستوى فوق المتوسط، وطالبين ممّن واجهوا صعوبة في الحل، ثم قدّم تغذية راجعة لهم.

- وجه الطلبة -ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة- إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، وذكر كل مجموعة بكتابة مبرر للإجابة التي توصلوا لها، وامنح طلبة الصف وقتًا كافيًا لنقد مبررات زملائهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في المنزل جميع المسائل الواردة في الصفحة الثامنة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، اطلِّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

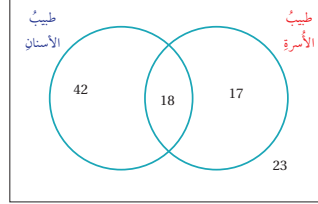
تنبيه:

وجَّه الطلبة إلى تعديل السؤالين 1 و2 في الصفحة 28 من كتاب التمارين، بتغيير العدد 5 إلى العدد 3 في نهاية السؤالين: (يقبل القسمة على 3).

مجموعة من الكرات المُتمائلة، مُرقَّمة من 1 إلى 21، وموضوعة داخل صندوق. إذا اختيرت كرة من الصندوق عشوائيًا، فأجد مُستعملًا أشكال فن:



- 8 احتمال أن تحمل الكرة عددًا زوجيًا. (8-11) انظر ملحق الإجابات
- 9 احتمال أن تحمل الكرة عددًا من مضاعفات العدد 3
- 10 احتمال أن تحمل الكرة عددًا زوجيًا، ومن مضاعفات العدد 3
- 11 احتمال أن تحمل الكرة عددًا زوجيًا، أو من مضاعفات العدد 3



(12-17) انظر ملحق الإجابات

- طب: في دراسة طبية شملت 100 شخص، زار بعضهم طبيب الأسرة أو طبيب الأسنان في أحد الأسابيع كما هو مبين في شكل فن المجاور. إذا اختير أحدُهم عشوائيًا، فأجد احتمال كلِّ حادثٍ ممَّا يأتي:
- 12 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان.
- 13 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسرة.
- 14 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان، وطبيب الأسرة.
- 15 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان، أو طبيب الأسرة.
- 16 عدم زيارة الشخص طبيب الأسنان.
- 17 عدم زيارة الشخص طبيب الأسرة.

رياضة: سُئل 60 رياضيًا إذا كانوا يمارسون لعبة كرة القدم أو كرة السلة، وقد توزَّعوا وفق إجاباتهم كما في الجدول الآتي:

عدد الرياضيين:	كرة القدم، وكرة السلة	كرة القدم فقط	كرة السلة فقط	عدم ممارسة أيٍّ من اللعبتين
	12	30	8	10

(18-21) انظر ملحق الإجابات

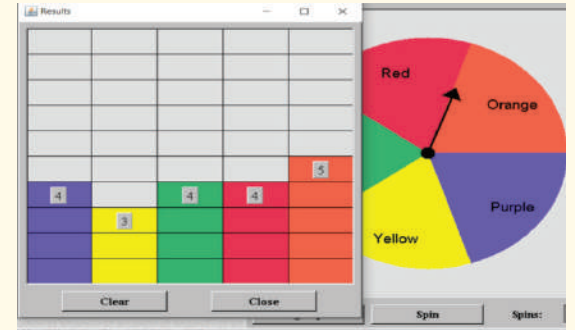


- إذا اختير رياضيٌّ منهم عشوائيًا، فأستعمل أشكال فن لإيجاد:
- 18 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبتي كرة القدم وكرة السلة.
- 19 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.
- 20 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبة كرة السلة، ولا يمارسون لعبة كرة القدم.
- 21 احتمال أن يكون ممَّن لا يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

- يحوي الموقع الإلكتروني:

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

أداة تفاعلية على شكل قرص مُتعدد الألوان، يحوي مؤشراً وقطاعات ملونة، ويمكن تدويره بالضغط على زر (Spin): n من المرات، ثم عرض سجل يحوي نتائج تدوير المؤشر في صورة تمثيل بياني بالأعمدة، بالضغط على زر (Record Results)، ثم إيجاد احتمالات الحوادث نظرياً (مثل احتمال توقف المؤشر على اللون الأحمر)، ومقارنة الاحتمال النظري بالاحتمال التجريبي كما يظهر في الصورتين الآتيتين.



تشير الصورة الأخرى أعلاه إلى نتائج تدوير المؤشر 20 مرة.

- وجّه الطلبة إلى تصفّح هذا الموقع بإشرافك، مبيّناً لهم كيفية استعمال الأداة فيه، ومذكّراً إياهم بمفهوم الاحتمال التجريبي.
- أخبر الطلبة أن الأداة تتيح أيضاً التحكم في عدد القطاعات وألوانها بالضغط على خيار (Change Spinner).

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (6) من خطوات المشروع.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

22 تجارة: أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس. 80%

مهارات التفكير العليا



23 تحدّد: يوجد في أحد المصانع 40 عاملاً، منهم 24 عاملاً يُفضّلون شرب الشاي وقت الاستراحة، و12 عاملاً يُفضّلون شرب القهوة ولا يُفضّلون شرب الشاي فيها، و14 عاملاً يُفضّلون شرب الشاي ولا يُفضّلون شرب القهوة فيها. إذا اختير أحد عمال المصنع عشوائياً، فما احتمال أن يكون ممّن يُفضّلون شرب الشاي وشرب القهوة؟ **انظر ملحق الإجابات**

24 أيّها لا ينتمي: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة عشوائياً، كُتِبَت الحوادث الآتية على بطاقات. أجد البطاقة المختلفة، مُبرّراً إجابتي.



ظهور عدد يقبل القسمة على 3

ظهور عدد زوجي

ظهور عدد أقل من 5

ظهور عدد زوجي، وهو أكبر من 2

ظهور عدد زوجي، وهو أكبر من 2؛ لأنه حادث مُركّب، أمّا بقية البطاقات فيظهر على كلّ منها حادث بسيط.

25 تبرير: قال هاني: إن احتمال فوز فريقه المُفضّل هو 0.3، فردّ عليه يزيد قائلاً: إذن، احتمال خسارة الفريق هو 0.7، هل قول يزيد صحيح؟ أبرّر إجابتي.

غير صحيح؛ نظراً إلى وجود احتمال لتعادل الفريقين.

26 مسألة مفتوحة: أصفّ موقفين من حياتي اليومية، أحدهما يتضمن حدثين متنافيين، والآخر يتضمن حدثين غير متنافيين، مبيّناً كيف حدّث ذلك. **ستتوقع إجابات الطلبة.**

140

الختام

6

- اطلب إلى الطلبة -في نهاية الدرس- تلخيص ما تعلموه بعباراتهم الخاصة، ثم استمع لبعض ما كتبوه.
- اطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو موضوع أو فكرة يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمك الورقة.
- اطلّع على الأوراق، ثم خطّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة Probability of Independent and Dependent Events

فكرة الدرس

تمييز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، وحساب احتمالاتها.

المصطلحات

الحوادث المستقلة، الحوادث غير المستقلة، الاحتمال المشروط، جداول الاتجاهين.

مسألة اليوم

تحتوي السنة على 365 يوماً؛ لذا، فإن احتمال أن يكون الأول من شهر أيلول يوم ميلاد شخص هو $\frac{1}{365}$ تقريباً. إذا اختير شخص عشوائياً، فما احتمال أن يكون يوم ميلادهما في الأول من الشهر نفسه؟



لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) **مستقلين** (independent) إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يؤثر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين في تجربة عشوائية، فإن احتمال وقوعهما معاً هو حاصل ضرب احتمال وقوع كل منهما.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أتعلم

تُستعمل عملية الضرب عند حساب احتمالات الحوادث التي تقع تباعاً. يمكن تعميم قانون حساب احتمال وقوع حادثين مستقلين معاً لأكثر من حادثين مستقلين.

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد منتزعتين عشوائياً معاً مرة واحدة، أجد احتمال ظهور العدد 6 على حجر النرد والصورة على قطعة النقد.

أفترض أن (A) هو حادث ظهور العدد 6 على حجر النرد، و (B) هو حادث ظهور الصورة على قطعة النقد. ألاحظ أن وقوع الحادث (A) أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الحادث (B) أو عدم وقوعه. إذن، (A) و (B) حادثان مستقلان، وإن:

$$\begin{aligned} P(A \text{ and } B) &= P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

نتائج الدرس



- يحدد إذا كان الحادثان مستقلين أو غير مستقلين.
- يجد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة ضمن مواقف حياتية متنوعة.
- يمثل التجارب العشوائية بالشجرة الاحتمالية، ويستعملها لإيجاد الاحتمالات.
- يجد احتمالات الحوادث المشروطة ضمن مواقف حياتية متنوعة.

التعلم القبلي:

- كتابة عناصر الحوادث البسيطة وعناصر فضاء العينة في تجربة عشوائية.
- إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة والحوادث المركبة.

التهيئة

1

- ذكّر الطلبة بمفهوم الحادث ومفهوم فضاء العينة في تجربة عشوائية.
 - ذكّر الطلبة بمفهوم الحادثين المتنافيين، ومفهوم الحادثين غير المتنافيين.
 - أحضر حجر نرد وقطعة نقد، ثم ألقهما معاً على سطح الطاولة، ثم اسأل الطلبة عن احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد، واحتمال ظهور الصورة على قطعة النقد.
 - اسأل الطلبة:
- « هل يتأثر احتمال ظهور العدد 5 على حجر النرد بظهور الصورة على قطعة النقد؟ لا.
- « هل يتأثر احتمال ظهور الكتابة على قطعة النقد بظهور العدد 5 على حجر النرد؟ لا.
- « صفّ هذين الحادثين. استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

تنبيه:

وجّه الطلبة إلى تعديل الاحتمال في سؤال بند (مسألة اليوم)

في كتبهم ليصبح $\frac{1}{365}$ بدلاً من $\frac{30}{365}$.

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:

« ما الحادث الأول في هذا الموقف؟ أن يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص ما.

« ما الحادث الثاني في هذا الموقف؟ أن يكون الأول من شهر أيلول هو يوم ميلاد شخص آخر.

« ما عدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ غير مُحدّد في هذا الموقف.

« هل يتأثر الاحتمال بعدد الأشخاص الذين سنختار الشخصين من بينهم؟ نعم.

- استمع لبعض إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لها.

- وضح للطلبة مفهوم الحادثين المستقلين (Independent)، مُبيّنًا أن احتمال وقوع أيٍّ منهما لا يُؤثر في وقوع الحادث الآخر، أو عدم وقوعه، ولا يتأثر بذلك.

- عدّ إلى المثال الذي قدّمته في بند (التهيئة)، ثم اسأل الطلبة:

« هل يمكن القول إن الحادثين مستقلان وفق هذا المفهوم؟ نعم.

- « كيف نجد احتمال وقوع حادثين مستقلين معًا؟ استمع لبعض إجابات الطلبة، ثم الفت انتباههم إلى ما ورد في بند (مفهوم أساسي).

- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، مُبيّنًا أن الحادثين مستقلان، وكيف يُكتَب المطلوب بالرموز.
- لتوضيح أن الحادثين مستقلان، استعمل حجر نرد وقطعة نقد، وألقهما مرّات عدّة على سطح الطاولة.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجّع الطلبة على استعمالها، مثل: الحادثين المستقلين (independent events)، والحادثين غير المستقلين (dependent events)، والاحتمال المشروط (conditional probability)، وجداول الاتجاهين (two – way tables).

التقويم التكويني: ✓

- اطلب إلى الطلبة حل التدريب في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجة.

التدريس:

- وُضح للطلبة مفهوم الحادّين غير المستقلين، مُستعملًا صندوقًا فيه كرتان لونهما أبيض، وكرتان لونهما أسود، واسحب الكرة الأولى (لتكن بيضاء)، ثم اسألهم:

« ما قيمة الاحتمال؟ $\frac{1}{2}$ »

- ضع الكرة البيضاء المسحوبة خارج الصندوق، ثم اعرض محتوى الصندوق أمام الطلبة، مُبينًا أن احتمال سحب كرة ثانية بيضاء أو كرة ثانية سوداء يتأثر بنتيجة السحب الأول (ما لم تُرجع الكرة الأولى المسحوبة إلى الصندوق)؛ ما يعني أن الحادّين (سحب كرة أولى بيضاء) و (سحب كرة ثانية بيضاء) من دون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق، هما غير مستقلين. بعد ذلك وُضح لهم كيف ينقص عدد عناصر فضاء العينة في هذه التجربة.

- اسأل الطلبة:

« ما احتمال سحب كرة ثانية بيضاء في هذه الحالة؟ $\frac{1}{3}$ »

مثال 2

- استعمل صندوقًا يحوي كرات متماثلة ملونة أو بطاقات ملونة عند مناقشة الطلبة في حل فروع هذا المثال.
- برّر الإجابة للفروع الثلاثة في هذا المثال.
- اسأل الطلبة عن عدد الكرات المتبقية في الصندوق بعد السحب الأول في حالتي السحب من دون إرجاع، والسحب مع الإرجاع، مُبينًا أن السحب مع الإرجاع يؤدي إلى حوادث مستقلة، وأن السحب من دون إرجاع يؤدي إلى حوادث غير مستقلة.

إرشاد:

أثبتت عديد من الدراسات التربوية أن تقريب المفاهيم المُجرّدة عن طريق التمثيلات الحسية يساعد الطلبة على استيعاب هذه المفاهيم بفاعلية أكثر من تقديمها بصورة مُجرّدة فقط.

أتتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجرّي نرد منتظمين عشوائيًا معًا مرّة واحدة، أجد احتمال ظهور عددٍ فردٍ على حجر النرد الأول وعددٍ أكبر من 4 على حجر النرد الثاني. انظر ملحق الإجابات

لأيّ تجربة عشوائية، يكون الحادّان (A) و (B) غير مستقلين (dependent) إذا أثر وقوع أحدهما في احتمال وقوع الآخر.

مثال 2



- 1 سحب كرتين على التوالي عشوائيًا من كيس فيه كرات مُتماثلة مختلفة الألوان، علمًا بأن سحب الكرة الثانية كان بعد إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس. إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الكيس يعني أنّه يُمكن إعادة سحبها، أو سحب غيرها، فنكون فرص سحبها وغيرها من الكرات متكافئة؛ أي إنّ نتيجة سحبها لا تؤثر في نتيجة سحب أيّ كرة أخرى؛ فالحادّان مستقلان.
- 2 سحب كرتين على التوالي عشوائيًا من كيس فيه كرات مُتماثلة، وعدم إرجاع أيّ منهما إلى الكيس. عدم إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الكيس يعني نقص عدد الكرات المُتبقية فيه، وهذا يعني أنّ احتمال سحب الكرة الثانية سيتأثر بنتيجة الكرة المسحوبة أولاً؛ فالحادّان غير مستقلين.
- 3 سحب كرة عشوائيًا من كيس فيه كرات مُتماثلة حمراء وصفراء، ثم سحب كرة عشوائيًا من كيس آخر فيه كرات مُتماثلة حمراء وصفراء. نتيجة سحب الكرة من الكيس الأول لا تؤثر في نتيجة سحب كرة من الكيس الثاني؛ فالحادّان مستقلان.

أتتحقق من فهمي

- أحدّد إذا كان الحادّان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:
- (a) اختيار قطعة حلوى حمراء عشوائيًا وأكلها، ثم اختيار قطعة حلوى حمراء أخرى عشوائيًا من كيس يحوي 10 قطع حلوى حمراء و 25 قطعة حلوى زرقاء، جميعها مُتماثلة. غير مستقلين.
 - (b) ظهور العدد 5 على حجرّي نرد ألقيا معًا مرّة واحدة عشوائيًا. مستقلان.
 - (c) سحب كرة حمراء عشوائيًا من كيس فيه كرات مُتماثلة، 4 منها حمراء و 3 صفراء، ثم إعادتها إلى الكيس، ثم سحب كرة حمراء أخرى عشوائيًا. مستقلان.

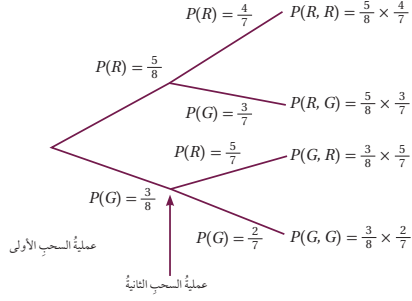
يساعد استعمال الشجرة الاحتمالية على حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مثال 3

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و 3 كرات خضراء (G)، جميعها مُتماثلة. سُحِبَت كرة من الكيس عشوائيًا، ثُمَّ كُتِبَ لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثُمَّ سُحِبَت كرة أخرى عشوائيًا، ثُمَّ كُتِبَ لونها. أجد احتمال كل من الحوادث التالية باستعمال الشجرة الاحتمالية:



ألاحظ من التمثيل بالشجرة الاحتمالية الآتي كيف تتأثر عملية السحب الثانية بنتيجة عملية السحب الأولى عند عدم إرجاع الكرة المسحوبة:



1 سحب كرتين خضراوين.

بعد عملية السحب الأولى يقل عدد الكرات في الكيس بمقدار كرة خضراء

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

2 سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكررة حمراء في المرة الثانية.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالة واحدة فقط من الحالات الأربع التي تظهر في الشجرة الاحتمالية

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

3 سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالتين، هما: الكرة الأولى حمراء، والثانية خضراء، أو الكرة الأولى خضراء، والثانية حمراء

$$P(G \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

لغة الرياضيات

العبارات الآتية متكافئة:

- سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.
- سحب كرتين مختلفتي اللون.
- سحب كرتين، إحداهما حمراء، والأخرى خضراء.
- سحب كرة من كل لون.

إرشادات:

- وضح للطلبة أن رمز الشرط (|) يُقرأ: بشرط وقوع الحادث، أو يُقرأ: علمًا بأن الحادث قد وقع.
- ساعد الطلبة على التمييز في القراءة بين: $P(A | B)$ و $P(B | A)$ ، مُبيّنًا لهم الحادث الذي وقع أولاً في كل حالة.

التدريس:

- اكتب في إطار عند الزاوية اليسرى العليا من اللوح صيغة الاحتمال المشروط.
- ناقش الطلبة في حل المثال الرابع، مُستعملًا حجر نرد لتوضيح عناصر الفرضيات المعطاة، ثم اكتب المطلوب بالرموز.
- عند التعويض في صيغة الاحتمال المشروط، وضح للطلبة كيفية تبسيط قسمة كسر على كسر، بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب الكسر المقسوم عليه، وعمل الاختصارات اللازمة لكتابة الكسر الناتج في أبسط صورة.

أتحقق من فهمي

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R)، و 8 قطع حلوى خضراء (G)، جميعها مُتماثلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًا وأكلها، ثم اختار قطعة أخرى عشوائيًا ليأكلها. أجد احتمال كل من الحادثين الآتيين باستعمال الشجرة الاحتمالية:

(a) اختيار الطفل قطعة حلوى مُتماثلة للون. **انظر ملحق الإجابات**

(b) اختيار الطفل قطعة حلوى مختلفة للون. **انظر ملحق الإجابات**

الأحظ في المثال السابق أن احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكرة حمراء في المرة الثانية يساوي احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى ومضروبًا في احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية، علمًا بأن كرة خضراء سُحبت في المرة الأولى.

مفهوم أساسي

بالكلمات: احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معًا يساوي احتمال وقوع الحادث الأول مضروبًا في احتمال وقوع الحادث الثاني بعد وقوع الحادث الأول.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين غير مستقلين في تجربة عشوائية ما، فإن:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B | A)$$

يُقرأ الرمز $P(B | A)$: احتمال وقوع الحادث (B) شرط وقوع الحادث (A) ؛ لذا يُسمى **الاحتمال المشروط** (conditional probability)، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة الآتية:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مثال 4

ألقي حجر نرد منتظم عشوائيًا مرة واحدة. ما احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجيًا؟

في هذه التجربة العشوائية، فضاء العينة هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كان (A) هو حادث ظهور العدد 6، و (B) هو حادث ظهور عدد زوجي، فإن:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة عند قسمة كسر على كسر، بعمل اختصارات بين بسط الكسر العلوي ومقام الكسر السفلي، أو بين مقام الكسر العلوي وبسط الكسر السفلي؛ لذا أخبرهم أن الاختصار يجب أن يقتصر على البسط مع البسط، والمقام مع المقام، ثم بين لهم صحة هذا الإجراء بتحويل القسمة إلى ضرب، وقلب المقسوم عليه، ثم الاختصار أو الضرب.



مثال 5: من الحياة

- وضح للطلبة المقصود بجداول الاتجاهين، برسم شكل الجدول على اللوح، مبيّنًا أن هذه الجداول تُستعمل لعرض مجموعتين من البيانات تجمععهما بعض الخصائص.
- ناقش الطلبة في حل هذا المثال، موضحًا المطلوب بالرموز.
- سمّ الحوادث برموز مناسبة.
- وضح للطلبة كيف يتوصل إلى الناتج النهائي للمطلوب بالعودة إلى الجدول، وتظليل خانة العدد 8، وخانة العدد 129، وبيان دلالة كل منهما؛ إذ يدل العدد 8 على الحالات (عناصر العينة) في مجموعة التقاطع، ويدل العدد 129 على حالات الحادث الذي يلي رمز الشرط (|).
- اكتب مبررات لخطوات الحل، وحفّز الطلبة على عمل ذلك.

الوحدة 8

$P(A | B)$ تعني احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجيًا:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

الاحتمال المشروط

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

بالتبسيط

أنتحق من فهمي

ألقي حجر نرد منتظم عشوائيًا مرة واحدة. ما احتمال ظهور عدد أكبر من 3 إذا كان العدد الظاهر زوجيًا؟
انظر ملحق الإجابات

في كثير من الأحيان، تعرض البيانات لفتتين من الأشياء باستعمال ما يُسمى جداول الاتجاهين (two-ways tables)، وهي جداول تتيح إيجاد الاحتمال المشروط على نحو سهل.

مثال 5: من الحياة

ورقية	غير ورقية	
7	94	السبت:
8	121	الأحد:

تدوير: يُبين الجدول المجاور كتل النفايات التي جُمعت بالأطنان في يومين من إحدى المدن. إذا سُجبت عينة عشوائية منها قبل البدء بإعادة تدويرها، فما احتمال أن تكون العينة ورقية، علمًا بأنها جُمعت يوم الأحد؟

ورقية	غير ورقية	المجموع
7	94	101
8	121	129
15	215	230

السبت: الأحد: المجموع:

إذا كان (A) هو حادث سحب عينة من الورق، و(B) هو حادث سحب عينة أخرى جُمعت يوم الأحد، فما قيمة $P(A | B)$ ؟

الخطوة 1: أكمل جدول الاتجاهين بإيجاد المجاميع.

الخطوة 2: أجد احتمالات الحوادث اللازمة لحساب الاحتمال المشروط.

بالنظر إلى جدول الاتجاهين، أجد كلاً من: $P(A)$ ، و $P(B)$ ، و $P(A \cap B)$:

$$P(A) = \frac{15}{230}$$

كتلة الورق التي جُمعت في اليومين 15 طنًا، وكتلة جميع النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طنًا

$$P(B) = \frac{129}{230}$$

كتلة النفايات التي جُمعت يوم الأحد 129 طنًا، وكتلة النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طنًا



تُسهّل عملية تدوير النفايات في المحافظة على البيئة بصورة كبيرة. فمثلًا، إعادة تدوير طن واحد من الورق قد تحول دون قطع 17 شجرة.

إرشادات:

- ارسم على اللوح جدولاً كبيراً مُشابهاً للجدول الوارد في بند (ملخص المفاهيم)، ثم اكتب فيه عناوين الأعمدة الثلاثة، ثم نوع الحوادث الواحد تلو الآخر. بعد ذلك اطلب إلى أحد الطلبة كتابة وصف مناسب له، ثم اطلب إلى آخر كتابة القانون أو الصيغة الرياضية التي تُستعمل لحساب احتمال الحادث.
- اطلب إلى آخرين فعل ذلك حتى الانتهاء من جميع أنواع الحوادث التي وردت في الوحدة.

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

كتلة النفايات الورقية التي جُمِعت يوم الأحد 8 أطنان، وكتلة جميع النفايات التي جُمِعت 230 طناً

الخطوة 3: أَعُوْضْ قيمَ الاحتمالات بصيغة الاحتمال المشروط.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

صيغة الاحتمال المشروط

بالتعويض والتبسيط

إذن، احتمال أن تكون العبئة ورقية، وأنها جُمِعت يوم الأحد هو $\frac{8}{129}$

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{94}{101}$$

أتحقق من فهمي

إذا سُحِبَت عبئة عشوائية، فما احتمال أن تكون غير ورقية، علماً بأنها جُمِعت يوم السبت؟

ملحوظة

يُمكن إيجاد ناتج الاحتمال المشروط بسهولة من جدول الاتجاهين مباشرة.

مُلَخَّصُ المفاهيم

نوعُ الحوادث	الوصفُ	القانونُ
المتنافيان	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة.	$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
غير المتنافيين	يوجد بينهما عناصر مشتركة.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
المُتتامان	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة، واتحادهما معاً يُمثل فضاء العبئة.	$P(A) + P(\bar{A}) = 1$
المستقلان	وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
غير المستقلين	وقوع أحدهما يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$
المشروطة	وجود معلومة إضافية عن وقوع أحدهما.	$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$

كرات زجاجية: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، وكرتين صفراوين (Y)، جميعها مُتمائِلة. سُحِبَتْ كرة من الكيس عشوائيًا، ثم كُتِبَ لونها، ثم أُعيدت إلى الكيس، ثم سُحِبَتْ كرة أخرى عشوائيًا، ثم كُتِبَ لونها:

1 ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية صفراء؟ **انظر ملحق الإجابات**

2 ما احتمال أن تكون الكرتان خضراوين؟ **انظر ملحق الإجابات**

أُحْدِثُ إِذَا كَانَ الْحَادِثَانِ مُسْتَقْلِلَيْنِ أَوْ غَيْرَ مُسْتَقْلِلَيْنِ فِي كُلِّ مِنَ التَّجَارِبِ الْعَشَوَائِيَّةِ الْآتِيَةِ:

3 سحب كرة زرقاء عشوائيًا من صندوق، والحصول على العدد 5 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة. **مستقلان.**

4 اختيار طالب من مواليد شهر 10 عشوائيًا ليخرج من غرفة الصف، ثم اختيار طالب آخر عشوائيًا من مواليد شهر 5 ليلحق به. **غير مستقلين.**

5 الحصول على عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وعدد يقبل القسمة على 2 عند إلقاء حجر نرد آخر منتظم. **مستقلان.**

6 إصابة صيادين الهدف الذي أطلق كل منهما طلقة واحدة نحوه عشوائيًا. **مستقلان.**

7 سحب بطاقة عشوائيًا تحمل العدد 6 من مجموعة بطاقات مُتمائِلة تحمل الأرقام من 1 إلى 10، ثم إعادتها، ثم سحب بطاقة أخرى عشوائيًا تحمل عددًا زوجيًا. **مستقلان.**

أَقْلَامُ حَبْرٍ: فِي عِلْبَةٍ قَلَمَا حَبْرٍ أَحْمَرٌ، وَثَلَاثَةُ أَقْلَامٍ حَبْرٍ أَزْرَقَ، جَمِيعُهَا مُتَمَائِلَةٌ. اخْتَارَ سَالِمٌ مِنْهَا قَلَمَيْنِ عَشَوَائِيًّا عَلَى التَّوَالِي مِنْ دُونِ إِرْجَاعٍ. أَجِدْ احْتِمَالَ كُلِّ مِنَ الْحَوَادِثِ الْآتِيَةِ بِاسْتِعْمَالِ الشَّجَرَةِ الْاحْتِمَالِيَّةِ:

8 اختيار قلمي حبر أحمر. **انظر ملحق الإجابات**

9 اختيار قلمي حبر أزرق. **انظر ملحق الإجابات**

10 اختيار قلم حبر من كل لون. **انظر ملحق الإجابات**

سِيَّاقَةُ سِيَّارَاتٍ: يَخْضَعُ مُتَدَرِّبٌ عَلَى سِيَّاقَةِ السِّيَّارَاتِ لاختبار يتكوّن من جزأين: نظري، وعملي.

احتمال نجاح المُتَدَرِّبِ فِي الْجُزْءِ النَّظَرِيِّ 90%، وَإِذَا نَجَحَ فِيهِ، فَإِنَّ احْتِمَالَ نَجَاحِهِ فِي الْجُزْءِ الْعَمَلِيِّ 80%، أَمَّا إِذَا رَسَبَ فِي الْجُزْءِ النَّظَرِيِّ، فَإِنَّ احْتِمَالَ رَسُوْبِهِ فِي الْجُزْءِ الْعَمَلِيِّ 40%:

11 أجد احتمال نجاح المُتَدَرِّبِ فِي كِلَا الْاِخْتِبَارَيْنِ. **انظر ملحق الإجابات**

12 أجد احتمال نجاح المُتَدَرِّبِ فِي أَحَدِ الْاِخْتِبَارَيْنِ، وَرَسُوْبِهِ فِي الْاِخْتِبَارِ الْآخَرِ. **انظر ملحق الإجابات**

- ناقش الطلبة في حل الأسئلة (1-7)، و(11-20).
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (8-10)، و(21-27) بعد توزيعهم إلى مجموعات.
- تجوّل بين الطلبة مُرشِّدًا، ومُساعدًا، ومُوجِّهًا، وقَدِّم لهم التغذية الراجعة.

تنويع التعليم (التعلم بالأقران):

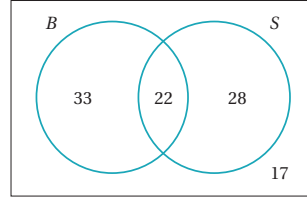
إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط أو دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة الواردة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فوزّع طلبة الصف إلى مجموعات ثلاثية، تضم كل منها طالبًا من ذوي المستوى فوق المتوسط، وطالبين ممّن واجهوا صعوبة في الحل، ثم قدّم تغذية راجعة لهم.



- وجه الطلبة - ضمن مجموعات ثنائية- إلى حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، مُذكرًا إيَّاهم بكتابة مُبرِّر للإجابة التي يتوصلون إليها، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبررات زملائهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في المنزل جميع المسائل الواردة في الصفحة التاسعة والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدِّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- في اليوم التالي، اطلِّع على حلول الطلبة، وناقشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.



سُئل 100 شخص عن وجود أخٍ لهم أو أخت، وقد توزَّعوا وفق إجاباتهم كما في شكل فنِّ المجاور، حيث:

B : الأشخاص الذين لكلٍّ منهم أخ.

S : الأشخاص الذين لكلٍّ منهم أخت.

إذا اختيرَ أحدُ هؤلاء الأشخاص عشوائيًا، فما احتمال:

13 أن يكون له أخ؟ **انظر ملحق الإجابات**

14 أن يكون له أخ، علمًا بأن له أختًا؟ **انظر ملحق الإجابات**

15 أن يكون له أخت، علمًا بأن له أخًا؟ **انظر ملحق الإجابات**

لديّ خبرةً سابقةً			
لا	نعم		
27	54	نعم	لديّ شهادةً جامعيّةً
4	5	لا	

وظائف: يُبين الجدول المجاور أعداد المتقدمين لوظيفة

في إحدى الشركات، ومؤهلاتهم العلمية، وخبراتهم السابقة.

إذا اختيرَ أحد المتقدمين للوظيفة عشوائيًا، فما احتمال:

16 أن يكون لديه خبرة سابقة، علمًا بأن لديه شهادة جامعية؟ **انظر ملحق الإجابات**

17 ألا يكون لديه شهادة جامعية، علمًا بأن لديه خبرة سابقة؟ **انظر ملحق الإجابات**

إشارات مرور: تمرُّ عادةً في رحلة عودتها من العمل بشارع رئيسٍ عليه إشارتان ضوئيتان. إذا كان احتمال أن تصل الإشارة الأولى، وتجتازها وهي مضاءة باللون الأخضر G هو 0.3، وإذا كانت مضاءة بالأحمر R ، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.8، أما إذا كانت الإشارة الأولى مضاءة بالأخضر، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.4

أستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية:

18 احتمال وصولها كلاً من الإشارتين وهما مضاءتان بالأحمر. **انظر ملحق الإجابات**

19 احتمال وصولها كلاً من الإشارتين وهما مضاءتان بالأخضر. **انظر ملحق الإجابات**

20 احتمال وصولها إحدى الإشارتين وهي مضاءة بالأخضر، ووصولها الإشارة الأخرى وهي مضاءة بالأحمر.

انظر ملحق الإجابات

الاستقراء العددي:

- أخبر الطلبة أن التخمين أو الاستنتاج المبني على ملاحظات ضمن أمثلة عددية يُسمّى الاستقراء العددي، وأن التخمين أو الاستنتاج الذي يُتوصّل إليه صحيح (لكنه بحاجة إلى برهان رياضي ليُقال عنه: تعميم صحيح) ما لم يوجد مثال يُناقض ذلك.
- عند حل الطلبة السؤال 29 في بند (مهارات التفكير العليا)، اطلب إليهم ملء الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

$P(A) =$	$P(B) =$	$P(A \cap B) =$	$P(A B) =$	$P(B A) =$
0.60	0.50	0.20	0.40	0.33

- وجّه الطلبة إلى افتراض قيم عددية لاحتمالات كل من A , B , $A \cap B$ (الأعمدة المُظَلَّلة باللون الأزرق)، ثم حساب الاحتمال المشروط في الحالتين (الأعمدة المُظَلَّلة باللون الأخضر) عند إكمال الجدول كما في المثال المعطى.
- أخبر الطلبة أن احتمال تقاطع حادثين لا يمكن أن يكون أكبر من احتمال أيٍّ منهما.
- وجه الطلبة إلى الاستمرار في وضع الفرضيات للقيم العددية لاحتمالات كل من A , B , $A \cap B$ ، والتوصّل إلى نواتج متساوية عند حساب الاحتمال المشروط في الحالتين، ثم التوصّل إلى تخمين أو استنتاج معين اعتمادًا على ذلك.

أرصاد جوية: أفادت مذبغة النشرة الجوية أنّ احتمال تساقط الثلوج يوم الإثنين هي 25%، وأنها ترتفع إلى 90% يوم الثلاثاء. أستخدم التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمال:



21 تساقط الثلوج يوم الثلاثاء، وعدم تساقطها يوم الإثنين. انظر ملحق الإجابات

22 عدم تساقط الثلوج في كلا اليومين. انظر ملحق الإجابات

23 تساقط الثلوج في أحد اليومين على الأقل. انظر ملحق الإجابات

صيد: أطلق صياد طليقة واحدة على هدف، وأطلق آخر طليقة واحدة على الهدف نفسه. إذا كان احتمال إصابة الأول للهدف 70%، واحتمال إصابة الثاني للهدف 60%، فأجد احتمال:

24 إصابة كلا الصيادين الهدف. 0.42

25 عدم إصابتهما الهدف. 0.12

26 إصابة الصياد الثاني الهدف، علمًا بأنّ الصياد الأول أصاب الهدف. 0.60

27 عدم إصابة الصياد الثاني الهدف، علمًا بأنّ الصياد الأول لم يُصب الهدف. 0.40

مهارات التفكير العليا

28 تبرير: إذا كان (A) و (B) حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، فما قيمة $P(A|B)$ ؟ أبرر إجابتني.

انظر ملحق الإجابات

29 تبرير: قالت تماضر: إنّه لأيّ حادثين (A) و (B) في فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية ما، فإن:

$$P(A|B) = P(B|A)$$

هل قول تماضر صحيح؟ أبرر إجابتني. انظر ملحق الإجابات

30 تحد: يحتوي كيس على n من الكرات المتماثلة مختلفة الألوان. إذا كان احتمال سحب كرة حمراء ثم سحب كرة خضراء من دون إرجاع 2.4% تقريبًا، فما قيمة n ؟

$$n = 7$$

31 مسألة مفتوحة: أذكر مثالاً على حادثين مستقلين، ومثالاً آخر على حادثين غير مستقلين، مُبيّنًا كيف أجد احتمال وقوع الحادثين معًا في كل مثال. ستتنوع إجابات الطلبة.

بطاقة خروج:

- اطلب إلى الطلبة - في نهاية الدرس - تلخيص ما تعلموه بعباراتهم الخاصة، ثم استمع لبعض ما كتبوه.
- اطلب إلى كل طالب اختيار موضوع أو فكرة من الدرس أتقنها، وكتابة سؤال عنها في ورقة تحمل اسمه، أو موضوع أو فكرة يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانها، وكتابة سؤال عنها، ثم تسليمك الورقة.
- اطلع على الأوراق، ثم خطّط لمعالجة جوانب الضعف التي رصدتها في أوراق الطلبة.

تعليمات المشروع

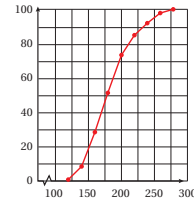
- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (7) من المشروع.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

التقويم الختامي:

- وزّع الطلبة إلى مجموعات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل أسئلة اختبار نهاية الوحدة (1-25) في حصتين.
- وجّه الطلبة إلى استعمال الأدوات اللازمة للحل، مثل: قلم الرصاص، والمسطرة الشفافة، وورق الرسم البياني، والآلة الحاسبة، وأحجار النرد، والبطاقات الملونة.
- تجوّل بين الطلبة مُرشِّداً، ومُساعدًا، ومُوجِّهاً، وقدم لهم التغذية الراجعة.
- ناقش الطلبة في حل بعض المسائل، وبخاصة تلك التي واجهوا صعوبة في حلها.

اختبار نهاية الوحدة

4 رسائل بريدية: يُبين الشكل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لكتلة 100 رسالة (بالغرام) مُسجَّلة لدى أحد مكاتب البريد. قيمة الربع الأعلى لكتل الرسائل هي:



- a) 160 b) 200
c) 210 d) 230

5 في الجدول الآتي، إذا كان مجموع مُربعات انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي في التكرار المقابل لها هو 324، فإن قيمة التباين هي:

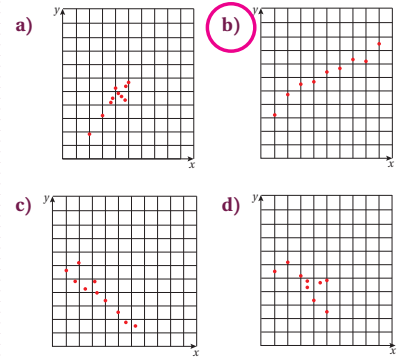
التكرار	الفئات
7	$5 \leq x < 10$
12	$10 \leq x < 15$
6	$15 \leq x < 20$

- a) 13.50 b) 12.96
c) 3.67 d) 3.60

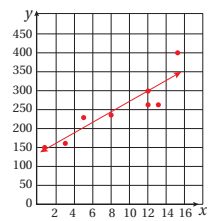
6 حجران نرد: أُلقيَ حجران نرد منتظمين، أحدهما أحمر، والآخر أزرق عشوائياً مرة واحدة. احتمال ظهور عدد أولي على حجر النرد الأحمر، وعدد أقل من 3 على حجر النرد الأزرق هو:

- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$
c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

1 أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:
شكل الانتشار الذي يُظهر الارتباط الموجب الأقوى بين (x) و (y) هو:



2 باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل الآتي، تقدير قيمة y عندما $x = 7$ هو:



- a) 150 b) 175
c) 200 d) 225

3 قيمة المدى الربيعي للقيم: 11، 5، 10، 8، 7، 10، 15، 12، 9، 6، 7، 4 هي:

- a) 5 b) 6
c) 9 d) 11

تدريب على الاختبارات الدولية

- عرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأهميتها المبيّنة في الفقرة الآتية، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) بصورة فردية، ثم ناقشهم في إجاباتهم.

- يتقدّم طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطالب (PISA) في مجالات القراءة والرياضيات والعلوم. وفي ما يخصّ الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية - بحسب هذا البرنامج - يُعبّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبؤ بها.

- تسعى هذه البرامج والدراسات لمساعدة صانعي القرارات ورسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتقييم النجاحات أو الإخفاقات. وقد شارك الأردن بانتظام في هذه البرامج والدراسات ودوراتها منذ مطلع تسعينيات القرن العشرين الميلادي.

- شمل اختبار الرياضيات في دورة عام 2012م المحتويات الفرعية الآتية:

الكميات، والتغير والعلاقات، والأشكال والفراغات، والإحصاء والاحتمالات.

- وقد توزّعت فقرات الاختبار البالغ عددها (110) فقرة على النحو المبيّن في الجدول الآتي:

المحتوى	عدد الفقرات
الكميات:	29
التغير والعلاقات:	29
الأشكال والفراغات:	27
الإحصاء والاحتمالات:	25
المجموع:	110

اختبار نهاية الوحدة

انظر ملحق الإجابات

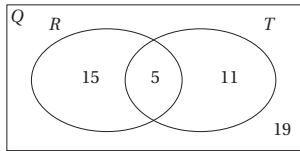
- 10 قيمة المئين 80 لكتل البيض، مُفسّراً دلالة.
- 11 عدد البيض الذي تزيد كتلته على 65g بيضة. 125
- 12 يُمثّل الجدول الآتي كمية الأمطار في إحدى مناطق المملكة على مدار 20 عاماً لأقرب مليمتر:

عدد السنوات	كمية الأمطار
$199 \leq x < 249$	2
$249 \leq x < 299$	3
$299 \leq x < 349$	6
$349 \leq x < 399$	3
$399 \leq x < 449$	4
$449 \leq x \leq 499$	2

أجد التباين والانحراف المعياري لكمية الأمطار.

انظر ملحق الإجابات

- سيارات: يُبيّن شكل فُن الآتي عدد السيارات الحمراء R، وعدد السيارات ذات البابين T، وعدد سيارات أخرى في أحد مواقف السيارات Q:



إذا اختيرت سيارة عشوائياً، فما احتمال:

- 13 أن تكون حمراء، وذات بابين؟ انظر ملحق الإجابات
- 14 ألا تكون حمراء، ولها بابان؟ انظر ملحق الإجابات
- 15 إذا اختيرت سيارة، وكانت ذات بابين، فما احتمال ألا تكون حمراء؟ انظر ملحق الإجابات
- 16 إذا اختيرت سيارتان، الواحدة تلو الأخرى عشوائياً، فما احتمال أن يكون لونهما أحمر؟ انظر ملحق الإجابات

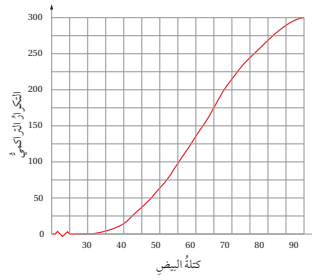
- 7 كرات: في صندوق 7 كرات حمراء، و3 كرات خضراء، جميعها متماثلة. إذا سُحِبَتْ منه كرتان عشوائياً على التوالي من دون إرجاع، فإن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه هو:

- a) $\frac{29}{50}$
- b) $\frac{24}{45}$
- c) $\frac{21}{45}$
- d) $\frac{1}{15}$

- زراعة: دَوّن مهندس زراعي كتلة 300 بيضة بالغرام كما في الجدول الآتي:

الكرات	كتلة البيضة (x)
15	$30 < x \leq 40$
48	$40 < x \leq 50$
72	$50 < x \leq 60$
81	$60 < x \leq 70$
54	$70 < x \leq 80$
30	$80 < x \leq 90$

يُبيّن التمثيل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لهذا الجدول:



أستعمل المنحنى التكراري التراكمي لإيجاد:

- 8 قيمة الوسيط لكتل البيض، مُفسّراً دلالة.
- 9 قيمة المدى الربيعي لكتل البيض، مُفسّراً دلالة.

انظر ملحق الإجابات

- وتوزّعت فقرات الاختبار - بحسب مستويات المعرفة - على النحو المبيّن في الجدول الآتي:

عدد الفقرات	المستوى المعرفي
51	الصياغة:
32	التوظيف:
27	التفسير:
110	المجموع:

- يتعيّن عليك عزيزي المعلم تشجيع الطلبة على حل مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في دراسات التقييم وبرامجه الدولية بجدية، وتوعية الطلبة وأولياء الأمور بأهميتها، فضلاً عن تضمين امتحاناتك المدرسية نماذج مماثلة لهذه الأسئلة.

المصدر: الدليل الإرشادي لمعلّمي الرياضيات (PISA 2013)، المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، عمان، الأردن.

تدريب على الاختبارات الدولية

لون العينين: يُبيّن الجدول الآتي احتمال أن يكون الشخص في مجتمع ما ذا عينين زرقاوين، أو بُنيّتين، أو خضراوين:

لون العينين	خضراوان	بُنيّان	زرقاوان
الاحتمال	0.1	0.5	0.4

إذا اختير شخصان عشوائيًا، فما احتمال:

23 أن تكون عينا كلّ منهما زرقاوين؟ 0.16

24 أن تكون عينا كلّ منهما مختلفتي اللون؟ 0.58

أقلام ملونة: يحتوي صندوق على 3 أقلام حمراء R ، وقلمين زرقاوين B ، و 4 أقلام خضراء G . اختارت شيما قلمين عشوائيًا من الصندوق على التوالي، ومن دون إرجاع. ما احتمال:

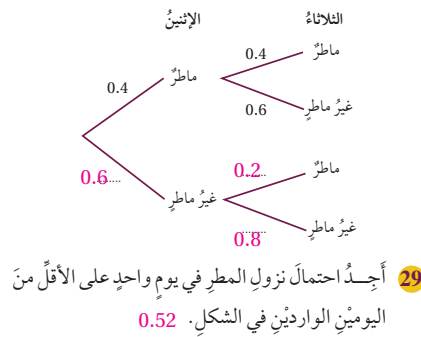
25 أن يكون لون القلمين أحمر؟ $\frac{1}{12}$

26 أن يكون للقلمين اللون نفسه؟ $\frac{5}{18}$

27 أن يكون لون أحد القلمين فقط أخضر؟ $\frac{5}{9}$

أمطار: إذا نزل المطر اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.4. وإذا لم ينزل اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.2. نزل المطر يوم الأحد:

28 أكمل الفراغ في الشكل الآتي:



كرات ملونة: يحتوي كيس على كرتين سوداوين، وكرة بيضاء. إذا كانت جميع الكرات مُتمائلة، وسحب مصعب كرة عشوائيًا، ثم كتب لونها، ثم أعادها إلى الكيس، ثم سحب أخرى عشوائيًا، ثم كتب لونها، فأستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد الاحتمالات الآتية:

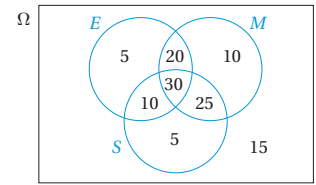
17 الكرتان المسحوبتان بيضاوان.

18 الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون.

19 إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل لونها أسود.

انظر ملحق الإجابات

تقدّم 120 طالبًا لاختبارات في اللغة الإنجليزية (E)، والرياضيات (M)، والعلوم (S)، وقد توزّعوا وفق نجاحهم في هذه الاختبارات كما في شكل فنّ الآتي:



إذا اختير أحد هؤلاء الطلبة عشوائيًا، فما احتمال:

20 أن يكون ناجحًا في العلوم، علمًا بأنّه ناجح في الرياضيات؟

$$P(S|M) = \frac{11}{17}$$

21 أن يكون ناجحًا في اللغة الإنجليزية، علمًا بأنّه ناجح في الرياضيات؟

$$P(E|M) = \frac{10}{17}$$

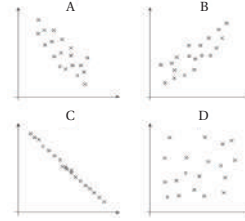
22 ألا يكون ناجحًا في العلوم، علمًا بأنّه ليس ناجحًا في الرياضيات؟

$$P(\bar{S} | \bar{M}) = \frac{4}{7}$$

الدرس 1

أشكال الانتشار

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات



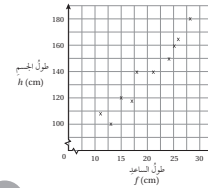
مستعيناً بالأشكال المجاورة، أكتب في الفراغ الآتي رمز شكل الانتشار المناسب:

- يدل شكل الانتشار على عدم وجود ارتباط بين المتغيرين.
- يدل شكل الانتشار على وجود ارتباط موجب بين المتغيرين.
- يدل شكل الانتشار على وجود ارتباط سالب وقوي بين المتغيرين.

يُبين الجدول المجاور الكتل والأطوال لـ 12 طالبة في الصف السابع:

الاسم	الكتلة (kg)	الطول (cm)
مريم	41	123
شيماء	48	125
ناتسي	47.5	127
خلود	52	128
أسيل	49.5	129
لانا	55	129
يقيف	55	133
لورا	55.5	135
هيا	61	137
بيان	65.5	140
ياسمين	60	143
تمارا	68	145

- أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول، واصفاً الارتباط بين الكتلة والطول.
- أرسم المستقيم الأفضل لمطابقة للبيانات الممثلة في شكل الانتشار.
- صفاء إحدى طالبات الصف السابع، وطولها 132 cm. استعمل المستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير كتلتها.
- انتقلت طالبة في الصف السابع من مدرسة أخرى إلى مدرسة هؤلاء الطالبات. أقدّر طول الطالبة الجديدة، علماً بأن كتلتها 45 kg.

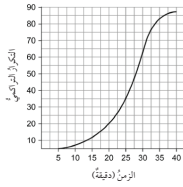


- يُمثل شكل الانتشار المجاور العلاقة بين طول الساعد f بالسنتيمتر، وطول الجسم h بالسنتيمتر لعشرة أشخاص:
- أصف الارتباط بين طول الجسم وطول الساعد.
- أرسم المستقيم الأفضل لمطابقة، ثم أكتب معادلته.
- استعمل المستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير طول شخص، طول ساعده 27 cm.

25

الدرس 2

المنحنى التكراري التراكمي



سُجّل الزمن الذي استغرقته سيارة الإسعاف لنقل مريض من مكانه إلى المستشفى في عدد من الحالات. مستعيناً بالمنحنى التكراري التراكمي المجاور الذي يُمثل البيانات المُمثلة بذلك:

- أقدّر وسيط البيانات.
- أجد المدى الربيعي.
- أجد المئين 40، مُفسّراً معناه.
- منكّلت مُعلّمة اللغة الإنجليزية علامات الطالبات في اختبار الإملاء باستعمال منحنى تكراري تراكمي، ثم عرضته أمام الطالبات، قائلة إن 77% منهن نجحن في الاختبار. هل يُمكن للطالبات تقدير علامة النجاح في هذا الاختبار؟ أبتّر إجابتي.

نشر موقع إخباري 177 خبراً في أحد الأيام. وقد رصد القارئون على الموقع عدد الأشخاص الذين قرؤوا كل خبر، ثم نظموا البيانات في الجدول التكراري المجاور:

التكرار (عدد الأخبار)	المتن (عدد القراء)
6	$0 \leq x < 50$
9	$50 \leq x < 100$
15	$100 \leq x < 150$
25	$150 \leq x < 200$
31	$200 \leq x < 250$
37	$250 \leq x < 300$
32	$300 \leq x < 350$
17	$350 \leq x < 400$
5	$400 \leq x \leq 450$

- أكتب جدول التكرار التراكمي.
- أرسم المنحنى التكراري التراكمي.
- أقدّر وسيط البيانات، والمدى الربيعي.
- إذا قُرّ القارئون على هذا الموقع حذف الأخبار التي قرأها أقل من 60 شخصاً، فما عدد الأخبار التي سحّذت؟

خضعت مجموعتان لاختبار حساب ذهني. وقد رُصد عدد الإجابات الصحيحة لكل مجموعة في الجدول الآتي:

عدد الإجابات الصحيحة	$0 \leq x < 4$	$4 \leq x < 8$	$8 \leq x < 12$	$12 \leq x < 16$	$16 \leq x < 20$
A: الفتيان	5	9	23	28	17
B: الفتيات	6	10	19	25	22

- أرسم المنحنى التكراري التراكمي لكل من الفتيان والفتيات على ورقة الرسم البياني نفسها.
- أقدّر وسيط البيانات، والمدى الربيعي لكل منهما.
- أي المجموعتين أداؤها أفضل في الاختبار؟ أبتّر إجابتي.

26

الدرس 3

مقاييس التشبُّث للجدول التكراري ذات الفئات

الوحدة 8: الإحصاء والاحتمالات

يُبين الجدول التكراري الآتي توزيعاً لأطوال بعض النباتات على مدار أسبوع في تجربة زراعية:

الطول (cm)	f	(x)	$f \cdot x$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$f \times (x - \bar{x})^2$
$25 \leq t < 29$	2					
$30 \leq t < 34$	4					
$35 \leq t < 39$	7					
$40 \leq t < 44$	10					
$45 \leq t < 49$	8					
$50 \leq t < 54$	6					
$55 \leq t \leq 59$	3					
المجموع						

- أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول.
- أقدّر تكلّماً من الوسط الحسابي، والتباين.

التكرار	الزمن (min)
4	$0 \leq t < 5$
9	$5 \leq t < 10$
20	$10 \leq t < 15$
7	$15 \leq t < 20$
5	$20 \leq t \leq 25$

يُبين الجدول المجاور توزيع مدّة الانتظار t بالدقيقة لعدد من مُراجعي دائرة حكومية من لحظة أخذ المُراجع بطاقة المراجعة إلى لحظة استدعائه من الموظف المعني:

- أقدّر الوسط الحسابي.
- أقدّر التباين، والانحراف المعياري.

- مسألة مفتوحة: أجمع بيانات لـ 20 مشاهدة، وأنظّمها في جدول تكراري ذي فئات، ثم أقدّر الوسط الحسابي والتباين.

27

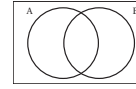
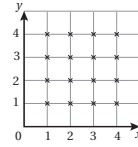
الدرس 4

احتمالات الحوادث المتنافية

فسي تجربة اختيار عدد عشوائي من بين الأعداد: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10، إذا كان (A) حادث اختيار عدد أكبر من 4، و (B) حادث اختيار عدد يقبل القسمة على 3 من دون باقي، فأجد:

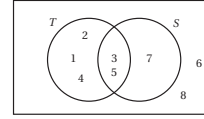
- 1 احتمال اختيار عدد أقل من 4، ويقبل القسمة على 3
- 2 احتمال اختيار عدد أقل من 4، أو يقبل القسمة على 3

يُبين التمثيل البياني المجاور فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية. إذا كان (A) يُمثل التقاط الواقعة على المستقيم $y = 5 - x$ ، وكان (B) يُمثل التقاط الواقعة على المستقيم $y = x - 5$ ، أمثل التجربة في شكل فن المجاور.



- 3 إذا اختيرت نقطة عشوائية، فما احتمال أن تقع على كلا المستقيمين: $x = 3$ و $y = 5 - x$ ؟

يُبين شكل فن المجاور عدد عناصر الحادثين (T) و (S) في تجربة عشوائية. استعمل الشكل لإيجاد احتمال كل من الحوادث الآتية:



- 5 $P(T)$
- 6 $P(\bar{T})$
- 7 $P(S \cap T)$
- 8 $P(S \cup T)$

سُيَلِّت 516 مهندسة كهربائية وميكانيكية عن المبحث المُفَضَّل لكلٍ منهما عندما كُنَّ في الصف العاشر، وقد نُظِّمَتْ إجابتهنَّ في الجدول المجاور.

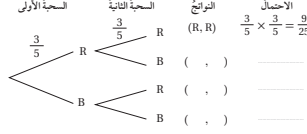
المجموع	الرياضيات	المعلوم	المبحث المُفَضَّل
175	85	90	مهندسة كهربائية:
171	80	91	مهندسة ميكانيكية:
170	89	81	مهندسة ميكانيكية:
516	254	262	المجموع:

- 9 اختيار مهندسة كهربائية تُفَضَّل مبحث العلوم؟
- 10 اختيار مهندسة ميكانيكية تُفَضَّل مبحث الرياضيات؟
- 11 اختيار مهندسة ميكانيكية، أو مهندسة تُفَضَّل مبحث الرياضيات؟
- 12 اختيار مهندسة لا تُفَضَّل مبحث الرياضيات، لكنها ليست مهندسة ميكانيكية؟

الدرس 5

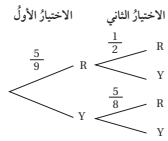
احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

يحتوي كيس على 3 كرات زجاجية حمراء (R)، وكرتين زجاجيتين زرقاوين (B)، علماً بأن جميع الكرات مُتماثلة. إذا سُجِّت من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع:



- 1 أكمل الشجرة الاحتمالية المجاورة.
- 2 أجد احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه.
- 3 أجد احتمال أن تكون واحدة على الأقل من الكرات المسحوبة حمراء اللون.
- 4 أجد احتمال ألا تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.

يحتوي كيس على 5 حبات حلوى بنكهة النعناع (R)، و4 حبات أخرى بنكهة الكراميل (Y)، علماً بأن جميع الحبات مُتماثلة. اختار طفل من الكيس حبة حلوى عشوائية وأكلها، ثم اختار حبة أخرى عشوائية وأكلها:



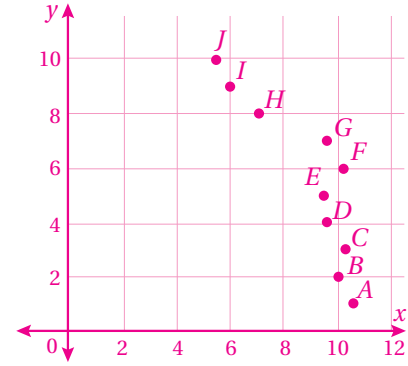
- 5 أكمل الشجرة الاحتمالية المجاورة.
- 6 ما احتمال أن يكون الطفل قد أكل حبتَي حلوى بنكهة الكراميل؟
- 7 مسا احتمال أن يكون الطفل قد أكل حبة حلوى بنكهة النعناع في المرة الثانية، علماً بأنه أكل حبة بنكهة الكراميل في المرة الأولى؟

إذا كان $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cup B) = 0.8$ ، فأجد:

- 8 $P(A \cap B)$
- 9 $P(B | A)$
- 10 $P(A | B)$

- 11 ألقى حجر نرد منتظم عشوائياً مرتين متتاليتين، وجميع الرقمان الظاهران على الوجه العلوي. أجد احتمال أن يكون المجموع 8 إذا ظهر الرقم 5 مرة واحدة على الأقل.

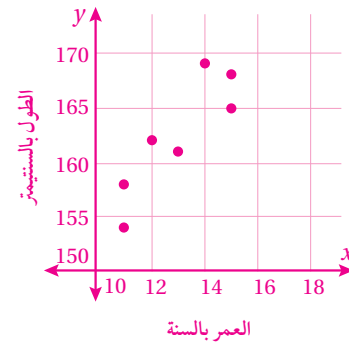
الدرس 1 (أتحقق من فهمي 2):



يوجد ارتباط قوي سالب بين x و y ؛ إذ تمثل x سعر السيارة بآلاف الدنانير، وتمثل y عمرها بالسنوات.

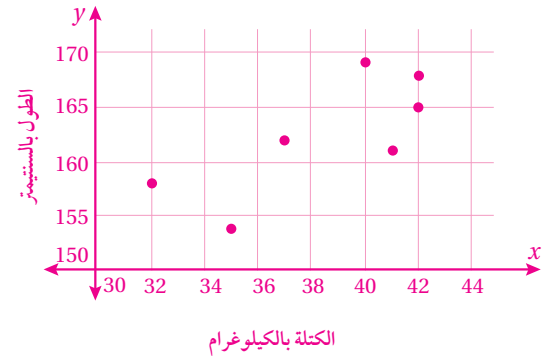
الدرس 1:

4)



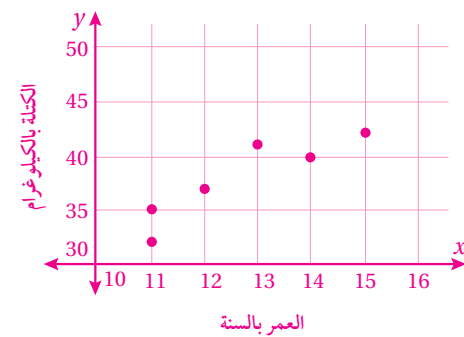
يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعب وطولها.

5)



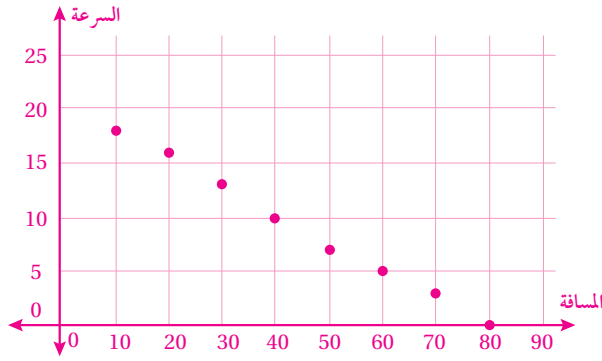
يوجد ارتباط ضعيف موجب بين طول اللاعب وكتلة جسمها.

6)

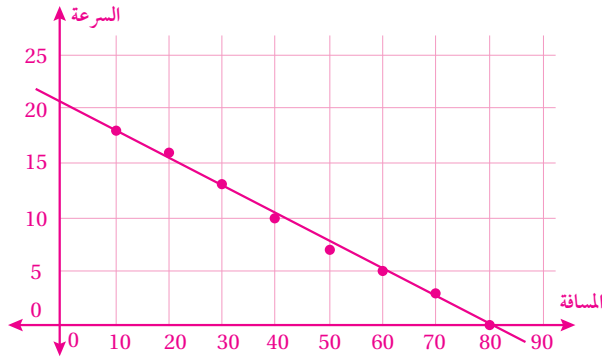


يوجد ارتباط قوي موجب بين عمر اللاعب وكتلة جسمها.

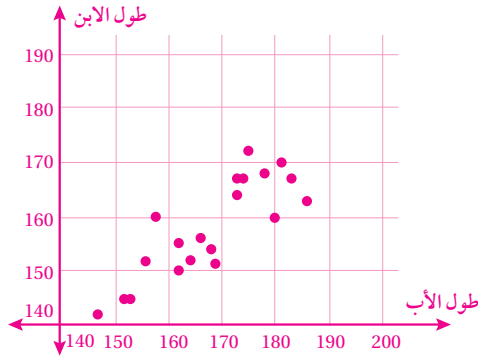
7)



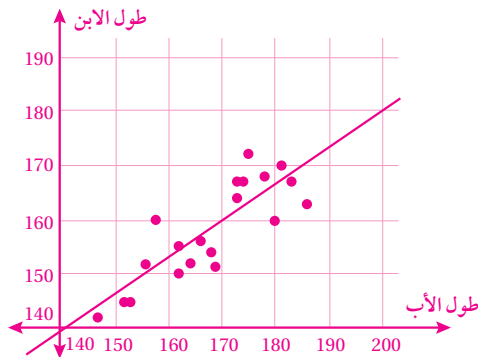
8)



14)



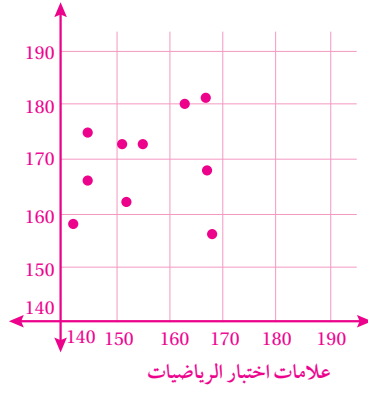
16)



معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

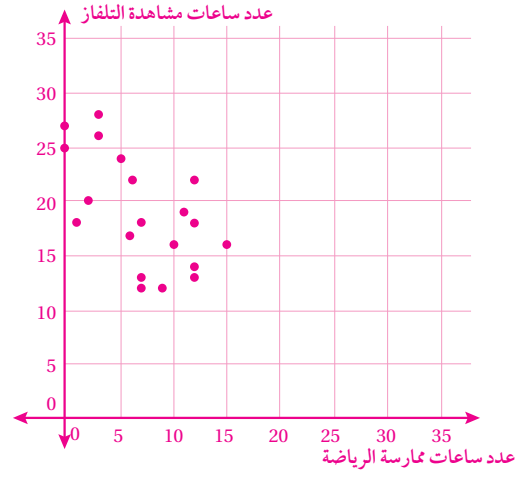
$$y = 0.68x + 43.2$$

24) علامات اختبار الجغرافيا

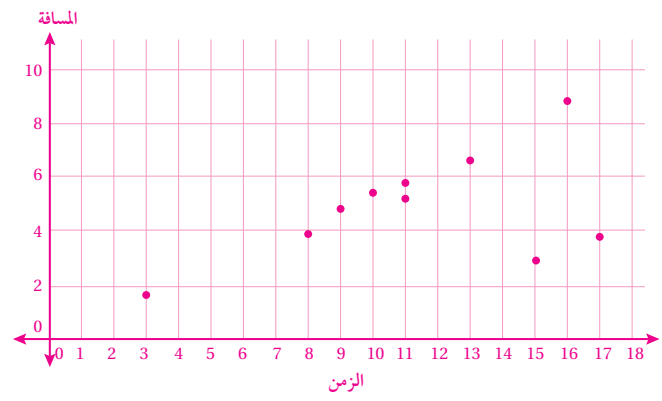


منى؛ فبناءً على شكل الانتشار، تبدو النقطة التي تُمثّل درجاتها في الاختبارين بعيدة عن بقية النقاط، وهي الوحيدة التي كانت علامتها في اختبار الجغرافيا أقل من علامة اختبار الرياضيات؛ إذ يُلاحظ أن علامة اختبار الجغرافيا كانت أكبر من علامة اختبار الرياضيات لبقية الطالبات. ولأن علامتها في الرياضيات هي العليا، وعلامتها في الجغرافيا هي الدنيا.

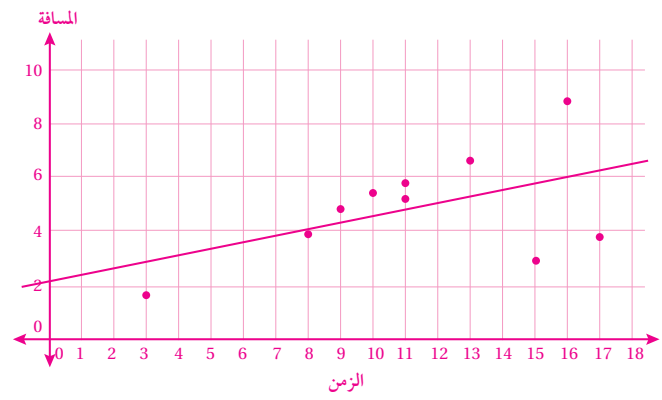
17)



19)



20)



معادلة المستقيم الأفضل مطابقة هي:

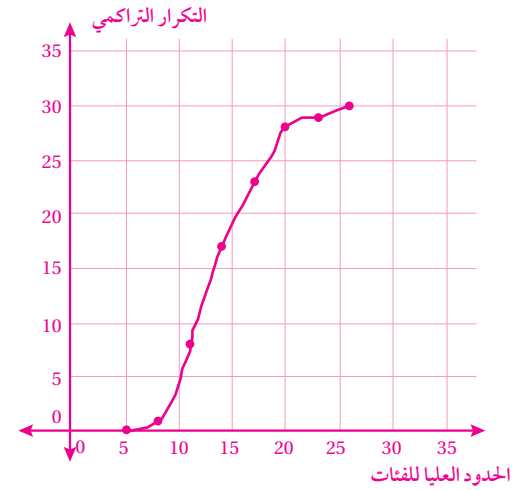
$$y = 0.24x + 2.2$$

الدرس 2 (أتحقق من فهمي 1):

– أنشئ جدول التكرار التراكمي كما يظهر جانباً.

الحدود العليا للفئات x	التكرار التراكمي y
5	0
8	1
11	8
14	17
17	23
20	28
23	29
26	30

- (8) – أعيّن النقطتين (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينهما بمنحنى متصل كما في الشكل الآتي.



الدرس 2 (أتحقق من فهمي 2):

(a) رتبة الوسيط هي: $50\% \times 200 = 100$

الوسيط $Q_2 = 63$ تقريباً.

(b) رتبة Q_1 هي: $25\% \times 200 = 50$

إذن، $Q_1 \approx 45$

رتبة Q_2 هي: $75\% \times 200 = 150$

إذن، $Q_2 \approx 80$

المدى الربيعي هو: $IQR = Q_3 - Q_1$

$= 80 - 45$

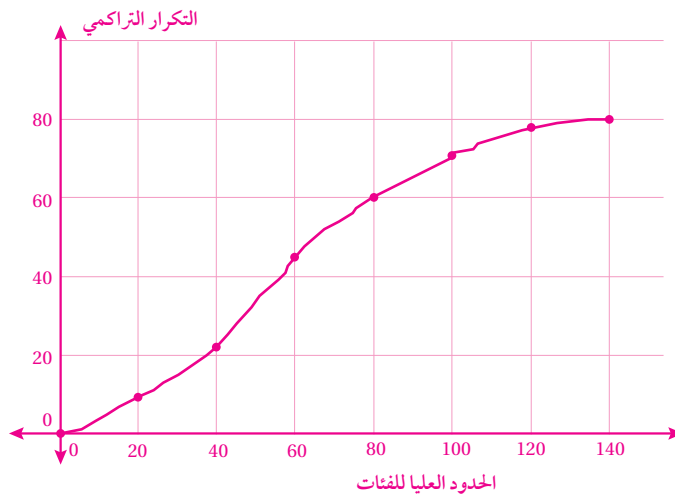
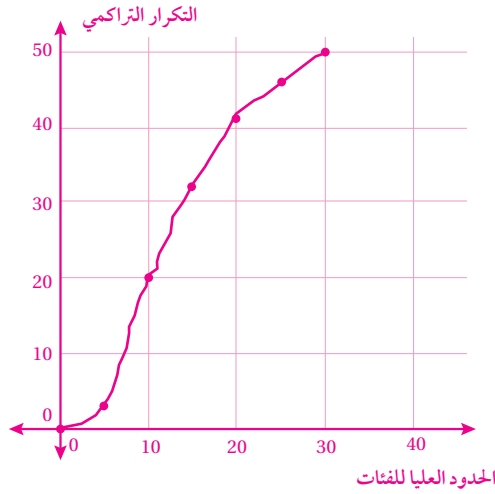
$= 35$

(c) $85\% \times 200 = 170$

إذن، المئين 85 يساوي 88 تقريباً.

الدرس 2:

(1)



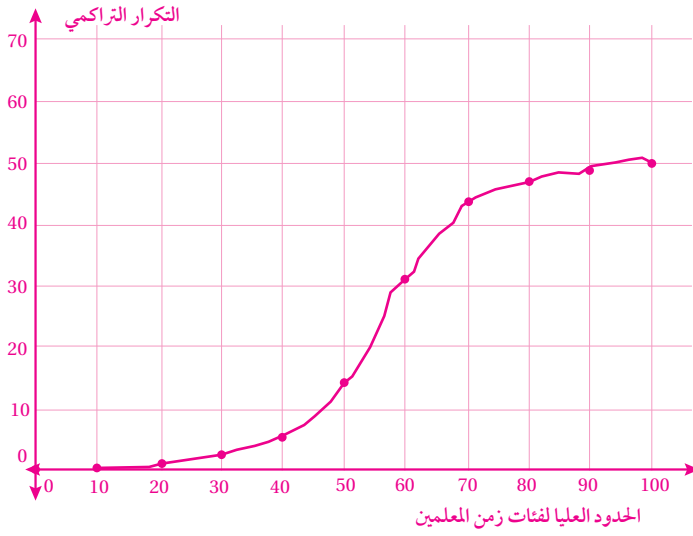
(9) الوسيط: $Q_2 \approx 56$

$IQR = Q_3 - Q_1$

$= 80 - 37$

$= 43$

(15)



(16)

الوسيط: $Q_2 \approx 2.8$

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 \\ &= 3.2 - 2.4 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

(18)

(النموذج A)

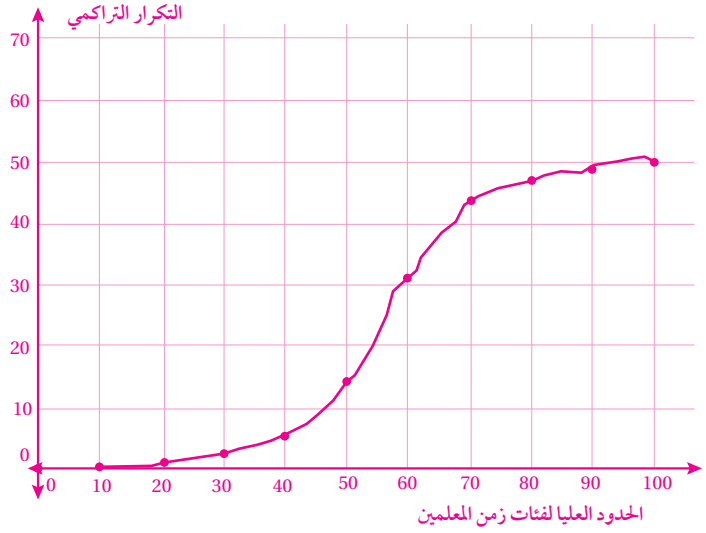
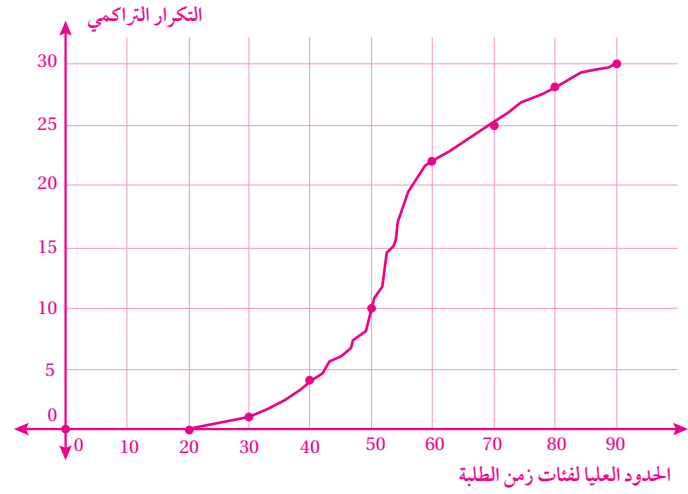
الوسيط: $Q_2 \approx 68$ $IQR \approx 28$

(النموذج B)

الوسيط: $Q_2 \approx 57$ $IQR \approx 18$

بما أن قيمتي الوسيط والمدى الربيعي للنموذج B أقل من قيمتي الوسيط والمدى الربيعي (على الترتيب) للنموذج A، فإن النموذج B هو الأصعب.

(12)



(13)

(للطلبة) الوسيط: $Q_2 \approx 54$

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 \\ &= 60 - 44 \\ &= 16 \end{aligned}$$

(للمعلمين) الوسيط: $Q_2 \approx 56$

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 \\ &= 65 - 48 \\ &= 17 \end{aligned}$$

الدرس 3 (أتحقق من فهمي 3):

فئات العمر	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
6-8	15	7	49	105	735
9-11	10	10	100	100	1000
12-14	25	13	169	325	4225
المجموع	50			530	5960

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f} \\ &= \frac{5960 - (50)(10.6)^2}{50} \\ &= 6.84\end{aligned}$$

$\sigma = \sqrt{6.84} \approx 2.62$ ، وهي القيمة نفسها التي سبق حسابها باستعمال الصيغة الأولى.

الدرس 3 (أتحقق من فهمي 4):

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
3	3	9	9	27
5	5	25	25	125
7	6	49	42	294
9	4	81	36	324
11	2	121	22	242
المجموع	20		134	1012

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{134}{20} = 6.7$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f} \\ &= \frac{1012 - (20)(6.7)^2}{20} \\ &= 5.71\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{5.71} \approx 2.39$$

الدرس 3:

(4) الطريقة الأولى:

x	f	$x \times f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \times f$
90	2	180	-42.61	1815.6121	3631.2242
110	5	550	-22.61	511.2121	2556.0605
130	7	910	-2.61	6.8121	47.6847
150	6	900	17.39	302.4121	1814.4726
170	3	510	37.39	1398.0121	4194.0363
المجموع	23	3050			12243.4783

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f} \\ &= \frac{12243.4783}{23} \approx 532 \\ \sigma &= \sqrt{532} \approx 23.07\end{aligned}$$

الطريقة الثانية:

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
90	2	8100	180	16200
110	5	12100	550	60500
130	7	16900	910	118300
150	6	22500	900	135000
170	3	28900	510	86700
المجموع	23		3050	416700

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{3050}{23} \approx 132.61$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f} \\ &= \frac{416700 - (23)(132.61)^2}{23} \\ &\approx 532\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{532} \approx 23.07$$

(14) نعم، يمكن تقدير التباين؛ لأن حدود الفئات معطاة، ويمكن تحديد التكرار المقابل لكل فئة بطرح التكرار التراكمي السابق من التكرار التراكمي اللاحق والمقابل للحدود العليا للفئات، ثم إنشاء الجدول على النحو الآتي:

التكرار	الفئات
$10 - 0 = 10$	$0 < x \leq 10$
$22 - 10 = 12$	$10 < x \leq 20$
$44 - 22 = 22$	$20 < x \leq 30$
$70 - 44 = 26$	$30 < x \leq 40$
$88 - 70 = 18$	$40 < x \leq 50$
$100 - 88 = 12$	$50 < x \leq 60$

$$15) \quad \sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - 2\bar{x} \sum x + n\bar{x}^2$$

مفكوك تربيع القوس، وتوزيع المجموع، وأن $\sum \bar{x}^2 = n\bar{x}^2$

$$= \sum x^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$$

لأن $\sum x = n \times \bar{x}$

$$= \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

بإخراج $\bar{x}^2$ عاملاً مشتركاً، فإن:

$$n \times \bar{x}^2 = n \left(\frac{\sum x}{n} \right) \left(\frac{\sum x}{n} \right) = \frac{(\sum x)^2}{n}$$

الدرس 4 (أنحقق من فهمي 2):

ليكن الحادث A: اختيار عدد أولي، والحادث B: اختيار عدد يقبل القسمة على 4

إذن، $B = \{4, 8\}$ ، $A \cap B = \emptyset$ ، $A = \{2, 3, 5, 7\}$

أي إن الحادثين A, B متنافيان.

a) $P(A \cap B) = 0$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(5) فريق النسور: $\bar{x} = 187.5$

$$\sigma^2 = 10125$$

فريق الأسود: $\bar{x} = 187.5$

$$\sigma^2 = 85.05$$

(10) الشكل الأيمن: $\sigma^2 \approx 157.14$ ، والشكل الأيسر: $\sigma^2 \approx 149.88$ ، والاختلاف بينهما مرده إلى اختلاف شكل توزيع البيانات؛ ففي الشكل الأيمن تبدو البيانات موزعة طبيعياً، أما في الشكل الأيسر فتوزيع البيانات ملتوٍ نحو اليمين.

(11) أنشئ جدولاً على النحو الآتي:

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
72.5	6	5256.25	435	31537.5
77.5	8	5625	620	48050
82.5	4	6806.25	330	27225
87.5	2	7656.25	175	15312.5
المجموع	20		1560	122125

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{1560}{20} = 78$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f}$$

$$= \frac{122125 - (20)(78)^2}{20}$$

$$= 22.25$$

$$\sigma = \sqrt{22.25} \approx 4.72$$

إذن، قول المدير المالي صحيح.

(13) ستختلف قيمة التباين عن القيمة الدقيقة عند تقديرها بعد تنظيم البيانات في جداول ذات فئات وتكرارات بحسب طول الفئة المُحددة. وكلما زاد طول الفئة قلَّ عدد الفئات في الجدول، وقلَّت الدقة في تقدير التباين.

الدرس 4 (أتحقق من فهمي 3):

ليكن الحادث A: اختيار عدد أولي، والحادث B: اختيار عدد من عوامل 10

إذن، $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$

أي إن الحادثين A, B غير متنافيين.

$$a) P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

الدرس 4 (أتحقق من فهمي 4):

ليكن الحادث A: سحب كرة خضراء.

إذن، المطلوب هو: $P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) = P(A) \\ = 1 - \frac{12}{16}$$

الدرس 4:

(4) A: عدد من مضاعفات 7

B: عدد من مضاعفات 5

إذن،

$$A = \{7, 14\}, B = \{5, 10, 15, 20\}, A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$5) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{4}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(6) C: عدد فردي.

D: عدد يقبل القسمة على 4

إذن،

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\},$$

$$D = \{4, 8, 12, 16, 20\}, C \cap D = \emptyset$$

$$P(C \cap D) = 0$$

$$7) P(C \cup D) = P(C) + P(D)$$

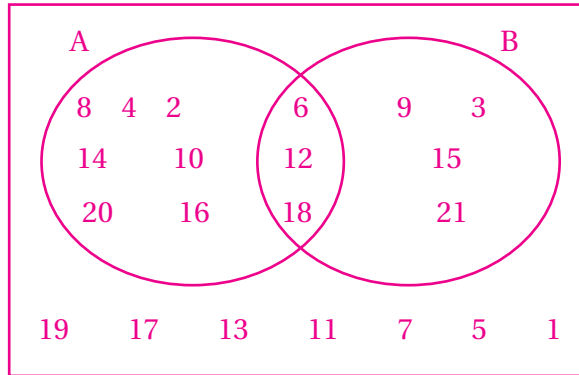
$$= \frac{10}{20} + \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

(8)

A: عدد زوجي.

B: عدد من مضاعفات 3

إذن،



$$P(A) = \frac{10}{21}$$

$$9) P(B) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$10) P(A \cap B) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$11) P(A \cup B) = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

A: شخص زار طبيب الأسنان.

B: شخص زار طبيب الأسرة.

إذن،

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$13) P(B) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$14) P(A \cap B) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

$$15) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{60}{100} + \frac{35}{100} - \frac{18}{100} = \frac{77}{100}$$

$$16) P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\ = 1 - \frac{60}{100} \\ = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

(12)

الدرس 5 (أتحقق من فهمي 1):

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

الدرس 5 (أتحقق من فهمي 3):

a) $P(R \cap R) + P(G \cap G)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{43}{91}$$

b) $P(R \cap G) + P(G \cap R)$

$$= \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} = \frac{48}{91}$$

الدرس 5 (أتحقق من فهمي 4):

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{4, 5, 6\},$$

$$B = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \{4, 6\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

الدرس 5:

1) $P(R \cap Y) = P(R) \times P(Y)$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

2) $P(G \cap G) = P(G) \times P(G)$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

8) $P(R \cap R) = P(R) \times P(R|R)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

9) $P(B \cap B) = P(B) \times P(B|B)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

17) $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

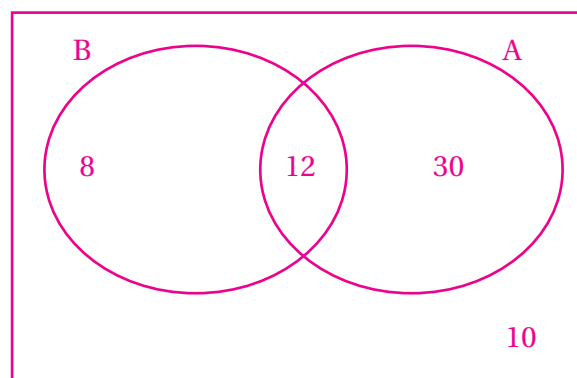
$$= 1 - \frac{35}{100}$$

$$= \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$$

(18) A : لاعب يمارس كرة القدم.

B : لاعب يمارس كرة السلة.

إذن،



$$P(A \cap B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

19) $P(A \cap \bar{B}) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

20) $P(\bar{A} \cap B) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

21) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

(23) A : يُفَضِّلون شرب الشاي.

B : يُفَضِّلون شرب القهوة.

إذن، $P(A \cap B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} 18) \quad P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1) \times P(R_2 | R_1) \\ &= 0.7 \times 0.8 = 0.56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19) \quad P(G_1 \cap G_2) &= P(G_1) \times P(G_2 | G_1) \\ &= 0.3 \times 0.6 = 0.18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20) \quad P(R \cup G) &= P(R) \times P(G | R) + P(G) \times P(R | G) \\ &= 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4 = 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21) \quad P(T) &= 90\%, P(M) = 25\% \\ P(T \cap \bar{M}) &= P(T) \times P(\bar{M}) \\ &= 0.90 \times 0.75 = 0.675 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22) \quad P(\bar{M} \cap \bar{T}) &= P(\bar{M}) \times P(\bar{T}) \\ &= 0.75 \times 0.1 = 0.075 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23) \quad P(M \cup T) &= P(M) + P(T) - P(M \cap T) \\ &= 0.25 + 0.9 - 0.25 \times 0.9 = 0.925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = 0 \text{ و } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ لأن } P(A|B) = 0 \quad (28) \\ \text{شرط أن } P(B) \neq 0 \end{aligned}$$

$$(29) \quad \text{غير صحيح؛ لأن } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ و } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ولا يكونان متساويين إلا إذا كان $P(A) = P(B)$ ، وكلاهما لا يساوي صفرًا.

اختبار الوحدة:

$$(8) \quad Q_2 = 62 \text{ g، وهذا يعني أن } 50\% \text{ من البيض (أي 150 بيضة) كتلة كل منها أكثر من } 62 \text{ g}$$

$$(9) \quad IQR = Q_3 - Q_1 = 72 - 52 = 20 \text{، وهذا يعني أن } 50\% \text{ من البيض (أي 150 بيضة) كتلة كل منها تقع بين } 52 \text{ g و } 72 \text{ g}$$

$$(10) \quad \text{المئين 80 يساوي } 79 \text{ g، وهذا يعني أن } 80\% \text{ من البيض (أي 240 بيضة) كتلة كل منها أقل من } 79 \text{ g، أو أن } 20\% \text{ من البيض (أي 60 بيضة) كتلة كل منها تزيد على } 79 \text{ g}$$

$$10) \quad P(R \cap B) + P(B|R)$$

$$\begin{aligned} &P(R) \times P(B|R) + P(B) \times P(R|B) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(11) A: ناجح في الجزء النظري.

B: ناجح في الجزء العملي.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{إذن،}$$

$$= \frac{90}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{72}{100}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}) + P(B) \times P(\bar{A}) \\ &= \frac{90}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{24}{100} \end{aligned}$$

$$13) \quad P(B) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$$

$$14) \quad P(S) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, P(B \cap S) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$$

$$\begin{aligned} 15) \quad P(B|S) &= \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{1}{2}} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25} \\ P(S|B) &= \frac{P(B \cap S)}{P(B)} = \frac{\frac{22}{100}}{\frac{11}{20}} = \frac{22}{55} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(16) A: لديه خبرة سابقة.

B: لديه شهادة جامعية.

إذن،

$$P(A) = \frac{59}{90}, P(B) = \frac{81}{90}, P(A \cap B) = \frac{54}{90}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{54}{90}}{\frac{81}{90}} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

$$17) \quad P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{\frac{5}{90}}{\frac{59}{90}} = \frac{5}{59}$$

x	f	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
224	2	50176	448	100352
274	3	75076	822	225228
324	6	104976	1944	629856
374	3	139876	1122	419628
424	4	179776	1696	719104
474	2	224676	948	449352
المجموع	20		6980	2543520

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{6980}{20} = 349$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f}$$

$$= \frac{2543520 - (20)(349)^2}{20}$$

$$= 5375$$

$$\sigma = \sqrt{5375} \approx 73.31$$

$$13) \quad P(R \cap T) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

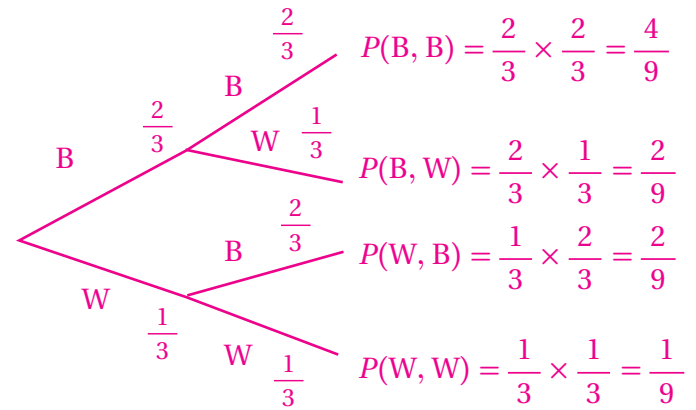
$$14) \quad P(\bar{R} \cap T) = \frac{11}{50}$$

$$15) \quad P(\bar{R} | T) = \frac{11}{16} = \frac{1}{10}$$

$$16) \quad P(R_1 \cap R_2) = \frac{38}{245}$$

$$17) \quad P(W_1 \cap W_2) = \frac{1}{9}$$

$$18) \quad P(B \cap W) + P(W \cap B) = \frac{4}{9}$$



$$19) \quad P(B \cap W) + P(W \cap B) + P(B \cap B)$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$