الوحدة 3
الإنشاءات الهندسية

مشروع STEM


الوحدة 3 مشروع STEM

هل تعلم؟

اكتُشفت النسبة الذهبية، 2 : $(1 + \sqrt{5})$، في الرياضيات منذ ما يقرب من 2400 عام. المستطيل الذي تكون النسبة بين أطوال أضلاعه النسبة الذهبية يسمّى مستطيلًا ذهبيًا.

$(1 + \sqrt{5}) : 2$

الباب الرئيسي لقصر تاج محل، الموجود في مدينة آغرا بالهند، على شكل مستطيل ذهبي.

مهمّتك: تصميم جهاز لوحي

تشهد سوق الأجهزة اللوحية نموًّا متسارعًا، حيث يُشحن أكثر من 38 مليون جهاز لوحي حول العالم كل ثلاثة أشهر. حيث تجاوز الشحن السنوي 189 مليون جهاز لوحي بحلول عام 2019. في هذا المشروع، ستعمل على تصميم جهاز لوحي مستعملًا النسبة الذهبية في تصميمك.

88 الوحدة 3 مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعلم الطلاب كيفية إنشاء مستطيل ذهبي، ويقررون كيف يستعملون مستطيلًا ذهبيًا في تصميم جهاز لوحي وشاشة رقمية.

قد يرغب بعض الطلاب في البحث عن أمثلة أخرى للمستطيلات الذهبية أو عن استعمال النسبة الذهبية في الفن. قد يواجه طلاب آخرون صعوبات في التعامل مع المقدار الجبري $\frac{x}{1} = \frac{1}{(x-1)}$. حاول تركيز النقاش على القيمة الدقيقة للنسبة الذهبية وليس على قيمتها التقريبية 1.618

تقديم المشروع

قدّم المشروع بمناقشة الأنواع المختلفة من الشاشات الرقمية التي يراها الطلاب في حياتهم اليومية. اعرض على الطلاب مستطيلًا ذهبيًا واطلب منهم مقارنته بالمستطيلات الأخرى.

يمكن استعمال الأسئلة أدناه لتوجيه النقاش.

س: ما هي أنواع الشاشات الرقمية التي تراها في يوم واحد ؟ ما الذي يجعلها مختلفة عن بعضها بعضًا غير قياساتها ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : شاشات الهواتف الذكية، شاشات الكمبيوتر، شاشات أجهزة التلفاز؛ هذه الشاشات عبارة عن مستطيلات مختلفة الشكل.]

س: من بين الشاشات الرقمية التي تشاهدها باستمرار، أيّ منها مريحة أكثر للنظر ؟ ما سبب ذلك في رأيك ؟
[قد تتنوع الإجابات. من المتوقع أن يتحدث بعض الطلاب عن قياسات الشاشات الرقمية؛ ابحث عن الطلاب الذين يقدّمون أسبابًا أخرى.]

س: ماذا تعرف عن المستطيل الذهبي ؟
[قد تتنوع الإجابات. ابحث عن الطلاب الذين يتحدثون عن النسب.]

اطلب من الطلاب قراءة المهمة التي سيطلب منهم إنجازها.

إنهاء المشروع

شجّع الطلاب المهتمين بمعرفة المزيد عن المستطيل الذهبي على التفكير في المعادلة $\frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$، عندما $a = 1$. ما قيمة b ؟

قد ترغب في تخصيص يوم يتشارك فيه الطلاب أفكارهم عن الأجهزة اللوحية والشاشات الرقمية. شجّع الطلاب على شرح عملية إنجاز المشروع والنتائج التي توصّلوا إليها.

الإنشاءات الهندسية

مقدمة الوحدة

الوحدة
3

الإنشاءات الهندسية

السؤال الأساس

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 3-1 قياس القطع المستقيمة والزوايا
- 3-2 الإنشاءات الهندسية الأساسية
- 3-3 نقطة المنتصف والمسافة
- 3-4 الاستدلال الاستقرائي
- 3-5 كتابة البراهين

- 3-1 Measuring Segments and Angles
- 3-2 Basic Constructions
- 3-3 Midpoint and Distance
- 3-4 Inductive Reasoning
- 3-5 Writing Proofs

مصطلحات الوحدة

- النقاط المتسامتة
- مستقيم
- مستوى
- نقطة
- مسلّمة
- إنشاء هندسي
- منصّف عمودي
- منصّف الزاوية
- نقطة المنتصف
- تخمين
- مثال مضاد
- استدلال استقرائي
- فقرة برهانية
- برهان
- نظرية
- برهان في جدول من عمودين

Topic Vocabulary

- collinear points
- line
- plane
- point
- postulate
- construction
- perpendicular bisector
- angle bisector
- midpoint
- conjecture
- counterexample
- inductive reasoning
- paragraph proof
- proof
- theorem
- two-column proof

الوحدة 3

السؤال الأساس للوحدة

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 135 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

الدرس 3-1

قياس القطع المستقيمة والزوايا

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✔ توضيح تعريفي الزاوية والقطعة المستقيمة بدقة باستعمال مصطلحات بديهية مثل: النقطة، والمستقيم، والمستوى.
- ✔ استعمال القيمة المطلقة ومسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.
- ✔ استعمال مسلّمة المنقلة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا.
- ✔ تحديد القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة.

الفهم الأساس

مجموع أطوال جميع أجزاء قطعة مستقيمة يساوي طول هذه القطعة المستقيمة.
مجموع قياسي زاويتين صغيرتين تكوّنان زاوية كبيرة يساوي قياس نفس الزاوية الكبيرة.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- فهم أن القيمة المطلقة لعدد تساوي المسافة التي يبعدها عن الصفر على خط الأعداد.
- تصنيف الزوايا وفقًا لقياساتها.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تعريف الزاوية والقطعة المستقيمة بدقة.
- إيجاد طول قطعة مستقيمة أو جزء من قطعة مستقيمة باستعمال القيمة المطلقة أو مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.
- إيجاد قياس زاوية باستعمال المنقلة أو مسلّمة جمع قياسات الزوايا.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- إيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- إثبات نظريات هندسية تتضمّن قياسات زوايا وأطوال قطع مستقيمة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب كيفية إيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا، ويفسرون الرموز التي تمثل التطابق.
- يستعمل الطلاب المسلّمات والجبر لإيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **عدد غير نسبي** | *irrational number*
- **عدد نسبي** | *rational number*
- **عدد حقيقي** | *real number*

المصطلحات الجديدة

- **نقاط متسامتة** | *collinear points*
- **مستقيم** | *line*
- **مستوى** | *plane*
- **نقطة** | *point*
- **مسلّمة** | *postulate*

نشاط المصطلحات

ذكّر الطلاب بأن الأعداد النسبية هي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$، وأن الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اطلب من الطلاب تصنيف الأعداد التالية إلى نسبي أو غير نسبي، وتوضيح تبريراتهم المنطقية لهذا التصنيف.

1. 8 [نسبي]
2. $-\frac{3}{2}$ [نسبي]
3. $\sqrt{18}$ [غير نسبي]
4. π [غير نسبي]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.1 يدرك التعريفات الدقيقة للزاوية والدائرة والمستقيمات المتوازية والمتعامدة والقطعة المستقيمة بناءً على البديهيات (النقطة، المستقيم، المستوى) والمسافة على الخط المستقيم والمسافة حول قوس الدائرة.

معايير ممارسات الرياضيات

فكّر في المسائل وثابر في حلها

يوضح الطلاب مدى تطابق المعادلات والمخططات التي تتضمّن أطوال قطع مستقيمة أو قياسات زوايا.

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يفكّر الطلاب في الوحدات ومعنى الكميات عند إيجاد طول قطعة مستقيمة أو قياس زاوية.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يجد الطلاب طول قطعة مستقيمة باستعمال طرق مختلفة، ويقارنون بين هذه الطرق لتحديد الطريقة الأفضل.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن موقعي النقطتين A و B على خط الأعداد ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : تقع النقطة A إلى يسار 0؛ بينما تقع النقطة B إلى يمين 0]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل المسافة بين A و B هي نفس المسافة بين B و A ؟ وضّح إجابتك.

[نعم؛ إحداثيات النقطتين A و B ثابتة، لذا فإن المسافة بينهما هي نفسها بغضّ النظر عن نقطة "البداية".]

س: كم تبعد النقطة A عن 0 ؟ وكم تبعد النقطة B عن 0 ؟ كيف يمكنك استعمال هاتين المسافتين لإيجاد المسافة الإجمالية بين A و B ؟ هل يمكن استعمال هذه الطريقة دائمًا لإيجاد المسافة بين نقطتين ؟

[3 وحدات؛ 5 وحدات؛ أوجد ناتج جمع هاتين المسافتين؛ تُستعمل هذه الطريقة فقط عندما يكون إحداثيا النقطتين متعاكسين.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: إذا كانت نقطة ثالثة C تبعد $3\frac{3}{4}$ وحدات عن كل من A أو B. ما الإحداثيات الممكنة للنقطة C ؟ ما المسافات الممكنة بين A و C ؟ وما المسافات الممكنة بين B و C ؟

[الإحداثيات الممكنة للنقطة C: $-6\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 8\frac{3}{4}$؛ المسافات الممكنة بين A و C: $3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4}, 11\frac{3}{4}$؛ المسافات الممكنة بين B و C: $3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4}, 11\frac{3}{4}$]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما المعايير التي استعملتها لتحديد الطريقة التي تفضلها لإيجاد المسافات ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : اختر طريقة لا تستغرق وقتًا طويلًا مثل عدّ الوحدات، وطريقة يمكن استعمالها دائمًا. على سبيل المثال، أوجد في هذه الحالة المسافة بين كل من النقطتين و 0، ثم اجمع المسافتين.]

كتاب الطالب، صفحة 89

3-1
قياس القطع المستقيمة والزوايا
Measuring Segments and Angles

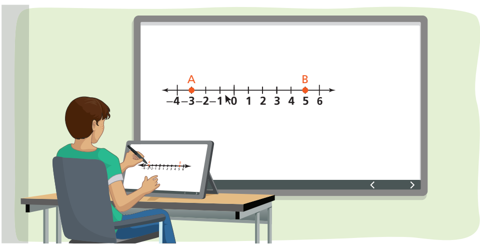
أستطيع... استعمال خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها.

معيار الدرس
9.4.1

المصطلحات
- النقاط المتسامتة collinear points
- مستقيم line
- مستوى plane
- نقطة point
- مسلّمة postulate

استكشف وبرّر منطقيًّا

حدّد معلم الرياضيات نقطتين على خط الأعداد.



A. عدّد بعضًا من الطرق لإيجاد المسافة بين النقطتين A و B.

B. **ابنِ الحجج الرياضية** ما الطريقة الأفضل لإيجاد المسافة بين هاتين النقطتين ؟ وضّح إجابتك.

السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. ابدأ من النقطة A، أو -3، ثم عدّ علامات التجزئة حتى تصل إلى النقطة B، أو 5، أو أوجد الفرق بين الإحداثيين 5 و -3

B. أوجد الفرق بين الإحداثيين. إذا كان الفرق موجبًا، فهو يمثّل المسافة بين النقطتين. إذا كان الفرق سالبًا، فإن القيمة المطلقة لهذا الفرق تمثّل المسافة بين النقطتين لأن المسافة لا يمكن أن تكون سالبة. وهذه هي الطريقة الأفضل لأن بالإمكان استعمالها دائمًا بغض النظر عن نوع الإحداثيات.

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عمّم ما الطريقة التي يمكنك تطبيقها لإيجاد المسافة بين أي عددين على خط الأعداد ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : المسافة بين أي عددين على خط الأعداد هي القيمة المطلقة للفرق بينهما.]

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

سيتعلم الطلاب كيفية إيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا باستعمال العمليات على الأعداد، والأدوات الهندسية مثل المسطرة والمنقلة، والمسلّمات بما في ذلك مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا.

المفهوم المصطلحات غير المعرَّفة

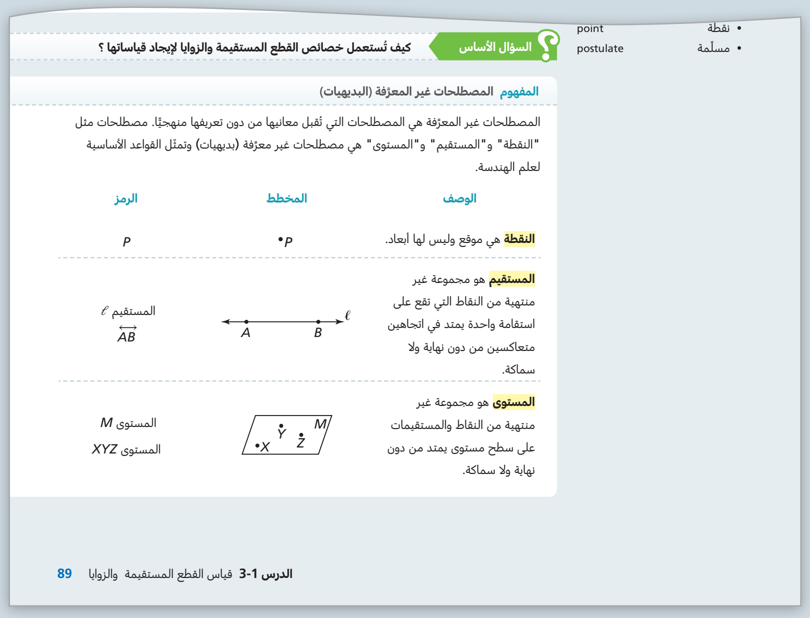
طرح أسئلة هادفة

س: في رأيك، لماذا تعدّ "النقطة" و"المستقيم" و"المستوى" مصطلحات غير معرَّفة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنها الأفكار الأساسية التي تُستعمل في تعريف كل الأشكال الهندسية الأخرى.]

س: انظر إلى المستقيم ℓ الذي يمر بالنقطتين A و B. هل تعتقد أن A و B هما النقطتان الوحيدتان على المستقيم ℓ ؟ وضّح إجابتك.
[كلا؛ ينص تعريف المستقيم على أنه يتكوّن من مجموعة غير منتهية من النقاط التي تقع على استقامة واحدة.]

س: في رأيك، ما طول المستقيم ℓ ؟ وضّح إجابتك.
[لا يمكن قياسه؛ لأن المستقيم يمتد في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية.]

س: اذكر بعض الأشياء التي نستعملها من واقع الحياة ويمكن استعمالها لتمثيل المستوى. ما الفرق بين هذه الأشياء وبين المستوى ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : ورقة، جدار؛ أبعاد الورقة والجدار منتهية، في حين يمتد المستوى من دون نهاية.]



• نقطة point
• مسلّمة postulate

السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟

المفهوم المصطلحات غير المعرَّفة (البديهيات)

المصطلحات غير المعرَّفة هي المصطلحات التي تُقبل معانيها من دون تعريفها منهجيًا. مصطلحات مثل "النقطة" و"المستقيم" و"المستوى" هي مصطلحات غير معرَّفة (بديهيات) وتمثّل القواعد الأساسية لعلم الهندسة.

الوصف	المخطط	الرمز
النقطة هي موقع وليس لها أبعاد.	$\bullet P$	P
المستقيم هو مجموعة غير منتهية من النقاط التي تقع على استقامة واحدة يمتد في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية ولا سماكة.	A B ℓ	المستقيم ℓ $\overleftrightarrow{AB}$
المستوى هو مجموعة غير منتهية من النقاط والمستقيمات على سطح مستوى يمتد من دون نهاية ولا سماكة.	M X Y Z	المستوى M المستوى XYZ

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 89

مثال 1 إيجاد أطوال قطع مستقيمة

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: قارن بين القطعة المستقيمة والشعاع في فقرة المفهوم.
[للقطعة المستقيمة نقطتا نهاية، بينما للشعاع نقطة بداية واحدة ويمتد إلى ما نهايةٍ في الاتجاه الآخر.]

س: قارن بين الشعاعين المتعاكسين والمستقيم.
[الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان متمايزان يتشاركان نفس نقطة البداية ويكوّنان مستقيمًا؛ ويتكوّن المستقيم من عدد لا متناهٍ من النقاط على استقامة واحدة في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية.]

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين الشعاعين المتعاكسين والزاوية ؟
[في الحالتين يتشارك الشعاعان نفس نقطة البداية، لكن الشعاعين المتعاكسين يكونان متسامتين، بينما الشعاعان اللذان يكوّنان زاوية لا يكونان متسامتين بالضرورة.]

س: في المثال 1، لماذا يجب أن يكون طول القطعة المستقيمة عددًا موجبًا؟
[الطول مسافة، والمسافة عدد حقيقي موجب دائمًا.]

س: لإيجاد طول $\overline{CD}$، تعدّ وحدات الطول بين C و D. هل يهم إذا قمت بعدّ الوحدات في الاتجاه السالب أو الموجب ؟ وضّح إجابتك.
[كلا؛ عدد وحدات الطول هو نفسه بغض النظر عن اتجاه العدّ.]

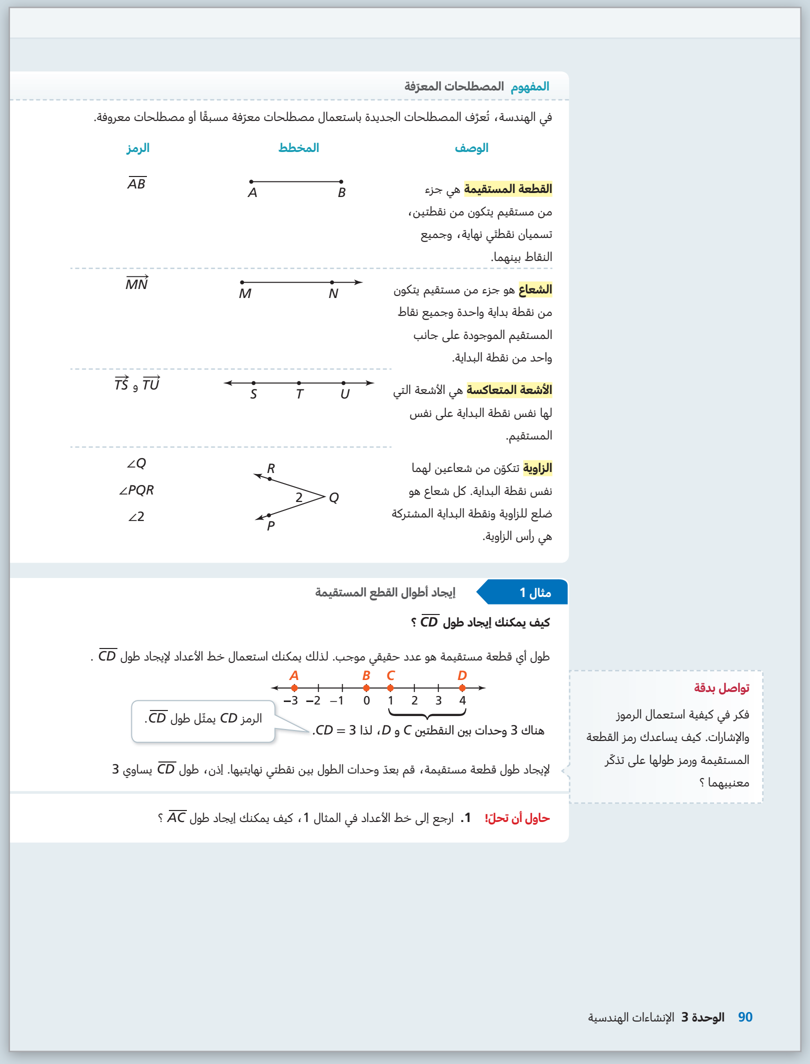
حاول أن تحلّ! الإجابات

1. قم بعدّ وحدات الطول بين النقطتين A و C؛ $AC = 4$.

بناء الطلاقة الاجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ماذا تلاحظ بشأن إحداثي النقطة A ؟ هل يؤثر ذلك في طريقة إيجاد طول $\overline{AC}$ ؟ وضّح إجابتك.
[إحداثي النقطة A عدد سالب. كلا، يمكنك عدّ وحدات الطول بين نقطتَي النهاية بغض النظر عن إحداثيي النقطتين.]

س: في رأيك، ما الفرق بين طول $\overline{AC}$ وطول $\overline{CD}$ ؟ وضّح إجابتك.
[يجب أن تكون القطعة المستقيمة AC أطول لأن عدد وحدات الطول بين A و C يبدو أكثر من عددها بين C و D.]



المفهوم المصطلحات المعرّفة

في الهندسة، تُعرَّف المصطلحات الجديدة باستعمال مصطلحات معرّفة مسبقًا أو مصطلحات معروفة.

الوصف	المخطط	الرمز
القطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم يتكون من نقطتين، تسميان نقطتَي نهاية، وجميع النقاط بينهما.	A B	$\overline{AB}$
الشعاع هو جزء من مستقيم يتكون من نقطة بداية واحدة وجميع نقاط المستقيم الموجودة على جانب واحد من نقطة البداية.	M N	$\overrightarrow{MN}$
الأشعة المتعاكسة هي الأشعة التي لها نفس نقطة البداية على نفس المستقيم.	S T U	$\overrightarrow{TS}$ و $\overrightarrow{TU}$
الزاوية تتكوّن من شعاعين لهما نفس نقطة البداية. كل شعاع هو ضلع للزاوية ونقطة البداية المشتركة هي رأس الزاوية.	R 2 Q P	$\angle Q$ $\angle PQR$ $\angle 2$

مثال 1 إيجاد أطوال القطع المستقيمة

كيف يمكنك إيجاد طول $\overline{CD}$ ؟

طول أي قطعة مستقيمة هو عدد حقيقي موجب. لذلك يمكنك استعمال خط الأعداد لإيجاد طول $\overline{CD}$.

هناك 3 وحدات بين النقطتين C و D، لذا $CD = 3$.

الرمز CD يمثّل طول $\overline{CD}$.

لإيجاد طول قطعة مستقيمة، قم بعدّ وحدات الطول بين نقطتي نهايتيها. إذن، طول $\overline{CD}$ يساوي 3

تواصل بدقة

فكر في كيفية استعمال الرموز والإشارات. كيف يساعدك رمز القطعة المستقيمة ورمز طولها على تذكّر معنييهما ؟

حاول أن تحلّ! **1.** ارجع إلى خط الأعداد في المثال 1، كيف يمكنك إيجاد طول $\overline{AC}$ ؟

90 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 في فقرة "حاول أن تحلّ!"، قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في التعامل مع الأعداد السالبة. وضح لهم أن عليهم عدّ الوحدات بين العددين السالبين كما لو أنهما عددان موجبان.

اطلب من الطلاب التدرّب على ذلك من خلال عرض الشكل في المثال 1، ولكن قم بتضمين النقطة K عند -2 والنقطة L عند -1

س: أوجد KD.
[6]

س: أوجد AL.
[2]

س: أوجد KB.
[2]

مثال 2 إيجاد طول قطعة مستقيمة

طرح أسئلة هادفة

س: صف كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين على خط أعداد جبريًا.
[حدّد إحداثي النقطتين، ثم اطرح أحد الإحداثيين من الإحداثي الآخر. القيمة المطلقة لناتج الطرح هي المسافة بين النقطتين.]

س: المطلوب في المثال 2 هو إيجاد KL. ماذا يمثل KL، وكيف يمكنك إيجاده ؟
[KL هو عدد يمثل طول $\overline{KL}$؛ أوجد المسافة بين النقطتين K و L.]

س: هل بإمكانك استعمال المقدار $|12 - 16|$ لإيجاد KL ؟ وضّح إجابتك.
[نعم، لأن $4 = |-4| = |12 - 16|$]

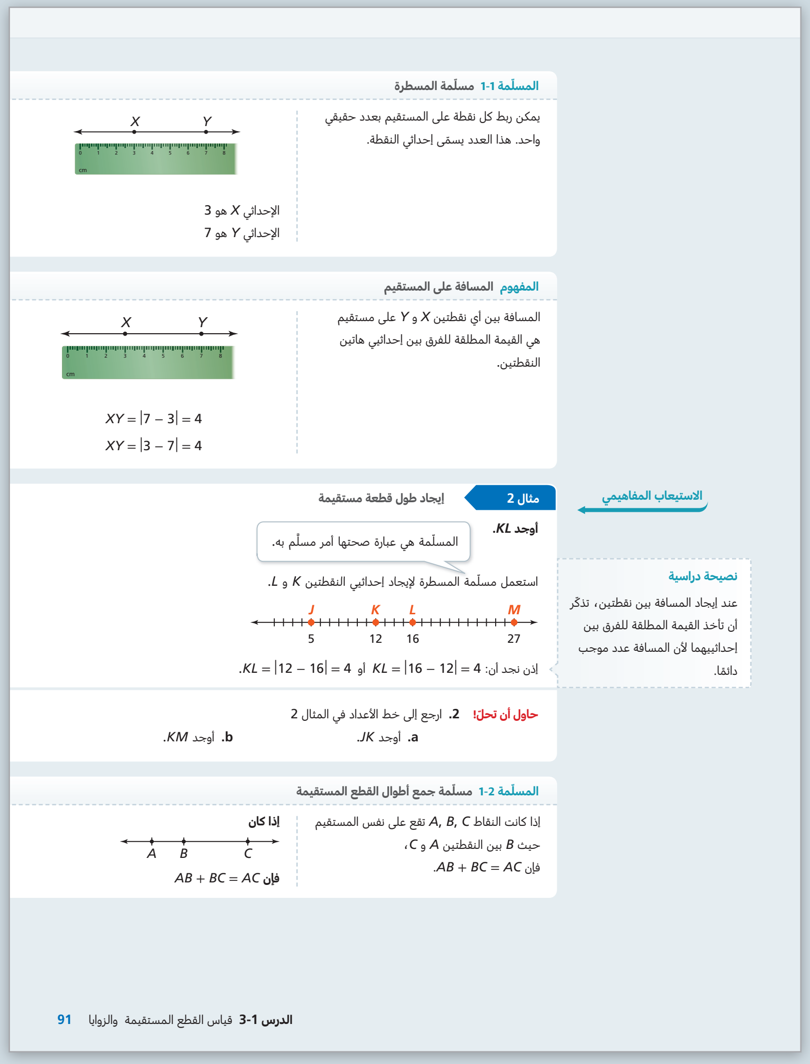
حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** 7 **b.** 15

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: هل يهم الترتيب الذي يُطرح فيه الإحداثيان ؟ وضّح إجابتك.
[كلا، بما أن المسافة هي القيمة المطلقة لناتج الطرح، ستكون المسافة قيمة غير سالبة بغض النظر عن ترتيب عملية الطرح.]

س: في أي ترتيب ستطرح الإحداثيين لإيجاد JK ؟ ولإيجاد KM ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لإيجاد JK، اطرح 5 من 12؛ لإيجاد KM، اطرح 12 من 27؛ إذا طرحت الإحداثي الأصغر من الإحداثي الأكبر يصبح إيجاد طول القطعة المستقيمة أسهل لأن الفرق بين الإحداثيين لا يكون عددًا سالبًا في هذه الحالة.]



المسلّمة 1-1 مسلّمة المسطرة

يمكن ربط كل نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد. هذا العدد يسمّى إحداثي النقطة.

الإحداثي X هو 3
الإحداثي Y هو 7

المفهوم المسافة على المستقيم

المسافة بين أي نقطتين X و Y على مستقيم هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي هاتين النقطتين.

$XY = |7 - 3| = 4$
$XY = |3 - 7| = 4$

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 إيجاد طول قطعة مستقيمة

أوجد KL.

المسلّمة هي عبارة صحتها أمر مسلّم به.

استعمل مسلّمة المسطرة لإيجاد إحداثيي النقطتين K و L.

إذن نجد أن: $KL = |16 - 12| = 4$ أو $KL = |12 - 16| = 4$.

نصيحة دراسية
عند إيجاد المسافة بين نقطتين، تذكّر أن تأخذ القيمة المطلقة للفرق بين إحداثييهما لأن المسافة عدد موجب دائمًا.

حاول أن تحلّ! **2.** ارجع إلى خط الأعداد في المثال 2
a. أوجد JK. **b.** أوجد KM.

المسلّمة 1-2 مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

إذا كانت النقاط A, B, C تقع على نفس المستقيم حيث B بين النقطتين A و C، فإن $AB + BC = AC$.

إذا كان
فإن $AB + BC = AC$

الدرس 3-1 قياس القطع المستقيمة والزوايا 91

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب استكشاف هذا المثال الأكثر صعوبةً، والذي يتضمن إيجاد طول قطعة مستقيمة.

تقع النقطة A على خط الأعداد عند -5 والنقطة B عند 7، ما إحداثي النقطة C التي تقع عند $\frac{3}{4}$ المسافة بين A و B ؟

س: ما الذي تحتاج إلى معرفته لتتمكّن من إيجاد إحداثي النقطة C ؟ ما طول $\overline{AB}$ ؟ وضّح إجابتك.
[طول $\overline{AB}$ ؛ 12؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $12 = |-12| = |-5 - 7|$]

س: ما $\frac{3}{4}$ العدد 12؟ وضّح إجابتك.
[9؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $12\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{36}{4} = 9$]

س: كيف يمكنك إيجاد إحداثي النقطة C ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : أوجد إحداثي النقطة التي تقع بين A و B وتبعد 9 وحدات عن A.]

مثال 3 استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

بناء المهارة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: كيف تعرف أن النقاط F و G و H متسامتة؟
[بما أن F و G و H تقع على نفس المستقيم، فهي متسامتة وفق تعريف النقاط المتسامتة.]

س: ما المعلومة المعطاة عن GH ؟ كيف يمكنك استعمال هذه المعلومة لإيجاد FH ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $GH = 16$ و $GH = 2x + 2$ ؛ ساوِ بين هذين المقدارين وحُل المساواة لإيجاد قيمة x.]

س: في الخطوة 2، كيف تعرف أن بإمكانك استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة لإيجاد FH ؟
[لأن النقاط F و G و H متسامتة، وتقع النقطة G بين النقطتين F و H.]

س: في الخطوة 2، كيف نتجت $5x + 1$ عن $FG + GH$ ؟ ماذا تمثل المعادلة $5x + 1$ ؟
[نتجت عنها لأن $FG = 3x - 1$ و $GH = 2x + 2$ ؛ تجميع الحدود المتشابهة يعطي المقدار الجبري $5x + 1$، الذي يمثّل FH.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. 4 **b.** $JK = 12$; $KL = 13$

عادات التفكير استعمل مع المثالين 1 و 3

ابن الحجج الرياضية تقول جميلة : أيًا تكن القطعة المستقيمة AB على خط الأعداد، فإن $AB = BA$. هل تتفق معها ؟ وضّح إجابتك.

[جميلة على صواب، إذا كان x_A و x_B إحداثيَي A و B، فإن $AB = |x_B - x_A|$ و $BA = |x_A - x_B| = |-(x_A - x_B)| = |x_B - x_A| = AB$. إذن $AB = BA$.]

مثال 4 استعمال مسلّمة المنقلة لقياس زاوية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: أي شعاعين يكوّنان $\angle BEC$ ؟
[$\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{EB}$]

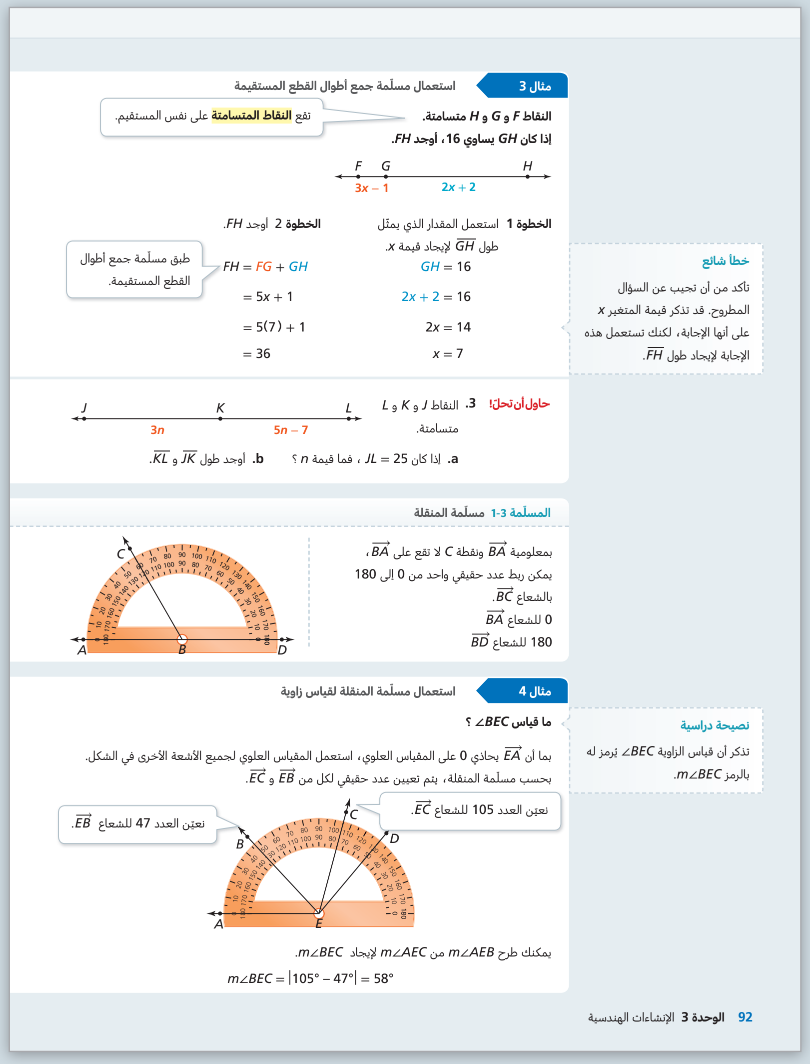
س: أي عدد على المنقلة معيّن للشعاع $\overrightarrow{EB}$ وأي عدد معيّن للشعاع $\overrightarrow{EC}$ ؟
[47؛ 105؛ $\overrightarrow{EB}$ يحاذي كل من 47 و 133، ولكن بما أن $\overrightarrow{EA}$ يحاذي 0 ويقع 0 في الأعلى، استعمل الأعداد العلوية التي تحاذي $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$، أي 47 و 105.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. 105° **b.** 83°

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 4 عند قياس زاوية، قد يقوم الطلاب بمحاذاة أحد الشعاعين مع الحافة السفلية للمنقلة. إذا حدث ذلك، وضّح أن الفتحة الصغيرة في مركز المنقلة يجب وضعها على رأس الزاوية وأن "نهاية" الشعاع يجب أن يكون بمحاذاة 0، اعرض ذلك باستعمال منقلة كبيرة على السبورة.



مثال 5 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا لحلّ المسائل

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: انظر إلى مخطط مسلّمة جمع قياسات الزوايا. ماذا يعني أن النقطة D "داخل" $\angle ABC$ ؟

[تقع النقطة D بين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$]

س: أعد صياغة مسلّمة جمع قياسات الزوايا بأسلوبك الخاص.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إذا قسم شعاع زاوية إلى زاويتين أصغر منها، فإن ناتج جمع قياسي الزاويتين الصغيرتين يساوي قياس الزاوية الكبيرة.]

س: في مثال 5، انظر إلى المخطط في فقرة "صُغ". ماذا تمثل قيمة x ؟ ماذا تمثل قيمة y ؟

[قياس الزاوية التي يكوّنها الكرسي وكاشف الضوء والسجادة؛ قياس الزاوية التي يكوّنها الباب وكاشف الضوء والطاولة ؟]

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان بإمكان المصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي ؟ الطاولة ؟ وضّح إجابتك.

[أوجد قيمة x؛ إذا كان $x \leq 25°$ ، يمكن للمصمم إضاءة الكرسي. أوجد قيمة y؛ إذا كان $y \leq 25°$، يمكن للمصمم إضاءة الطاولة.]

س: كيف تعرف أن المعادلات في فقرة "احسب" صحيحة ؟

[باستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. نعم، لأن $x = 24°$ و $y = 17°$ ، وكلاهما أقل من $25°$

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذه المسألة والمسألة في مثال 5 ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كل شيء في المسألتين متماثل باستثناء قياس زاوية الشعاع.]

س: ما المعادلة التي يمكنك استعمالها لتحديد ما إذا كان بإمكان المصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي ؟ الطاولة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $x + 33 = 57; y + 57 = 74$]

س: ماذا يجب أن تكون قيمة كل من x و y ليتمكن المصمم من استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي والطاولة ؟

[$x \leq 25°$؛ $y \leq 25°$]


تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! **4.** ارجع إلى الشكل في المثال 4

a. أوجد $m\angle AEC$.   **b.** أوجد $m\angle BED$.

المسلّمة 1-4 مسلّمة جمع قياسات الزوايا

إذا كانت النقطة D تقع داخل $\angle ABC$ فإن مجموع قياس الزاويتين الصغيرتين المتشكلتين ($\angle ABD$ و $\angle DBC$) يساوي قياس الزاوية الكبيرة $\angle ABC$

بمعنى: إذا كانت النقطة D تقع داخل $\angle ABC$، فإن $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$.

إذا كان

فإن $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$

تطبيق

مثال 5 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا في حلّ المسائل

يقوم مصمّم إضاءة بوضع اللمسات الأخيرة على خطة الإضاءة لعمل مسرحي قادم. يمكن لكاشف الضوء أن يدور بزاوية قياسها 25° إلى اليسار أو اليمين من نقطة البداية الموضحة. يكوّن شعاع الضوء الصادر عن كاشف الضوء زاوية قياسها 22°

هل يمكن للمصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة كل الأشياء الموجودة على خشبة المسرح ؟

صُغ ▶ ارسم مخططًا لتمثيل الزاوية التي يكوّنها شعاع الضوء، والزوايا التي قياساتها معطاة، والزوايا التي قياساتها مجهولة.

استعمل مسلّمة جمع قياسات الزوايا لإيجاد قياسَي الزاويتين التي يجب أن يدور بهما الضوء إلى اليسار واليمين لإضاءة الكرسي والطاولة.

احسب ▶ اكتب معادلات وحلّها لإيجاد قيمة كل من x و y.

$y + 57 = 74$ $x + 22 = 57$

$y = 17$ $x = 35$

فسّر ▶ إذن، يمكن لكاشف الضوء الدوران بزاوية قياسها 25° إلى اليمين أو اليسار، لذا يستطيع المصمّم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الطاولة، لكن لا يمكنه إضاءة الكرسي.

حاول أن تحلّ! **5.** بالرجوع إلى المثال 5، هل يمكن لمصمم الإضاءة استعمال كاشف ضوء بزاوية شعاع قياسها 33° بحيث يدور كاشف الضوء بزاوية قياسها 25° إلى اليسار واليمين لإضاءة كل الأشياء الموجودة على خشبة المسرح ؟

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 93

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثال 5

الاستماع مستوى 1 ارسم المخطط على السبورة من دون قياسات الزوايا. اطلب من الطلاب نسخ هذا المخطط في دفاترهم. ثم اطلب منهم إضافة قياسات الزاوية المناسبة عندما توضح شفهيًا ما تمثله 22° و 57° و 74° و $x°$ و $y°$.

س: كيف يمكنك توضيح أن قياس زاوية شعاع كاشف الضوء يساوي 22° ؟

[ضع علامة القوس في الزاوية الوسطى واكتب بجانبها 22°]

س: كيف يمكنك توضيح أن قياس الزاوية التي تكوّنها الطاولة وكاشف الضوء والكرسي يساوي 74° ؟

[ضع علامة قوس كبيرة تمتد عبر الزوايا الثلاث واكتب بجانب الزاوية 74°]

القراءة مستوى 2 اكتب كلمة "يدور" على السبورة. اطلب من الطلاب قراءة المطلوب في المثال لكن مع إزالة كلمة يدور. اطلب منهم استعمال أدلة من السياق لتحديد معنى كلمة "يدور". وضّح لهم أن الدوران عبارة عن حركة تؤدي إلى تغيير قياسات الزاوية.

س: ما الكلمة أو الكلمات الأخرى التي يمكن استبدالها بكلمة "يدور" ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يتحرك أو يستدير]

س: لماذا قد تستعمل المصطلح "يدور" في مثال يتعلق بالزوايا ؟

[تقيس الزوايا مقدار دوران جسم أو شكل بين شعاعين، وليس المسافة بين الشعاعين.]

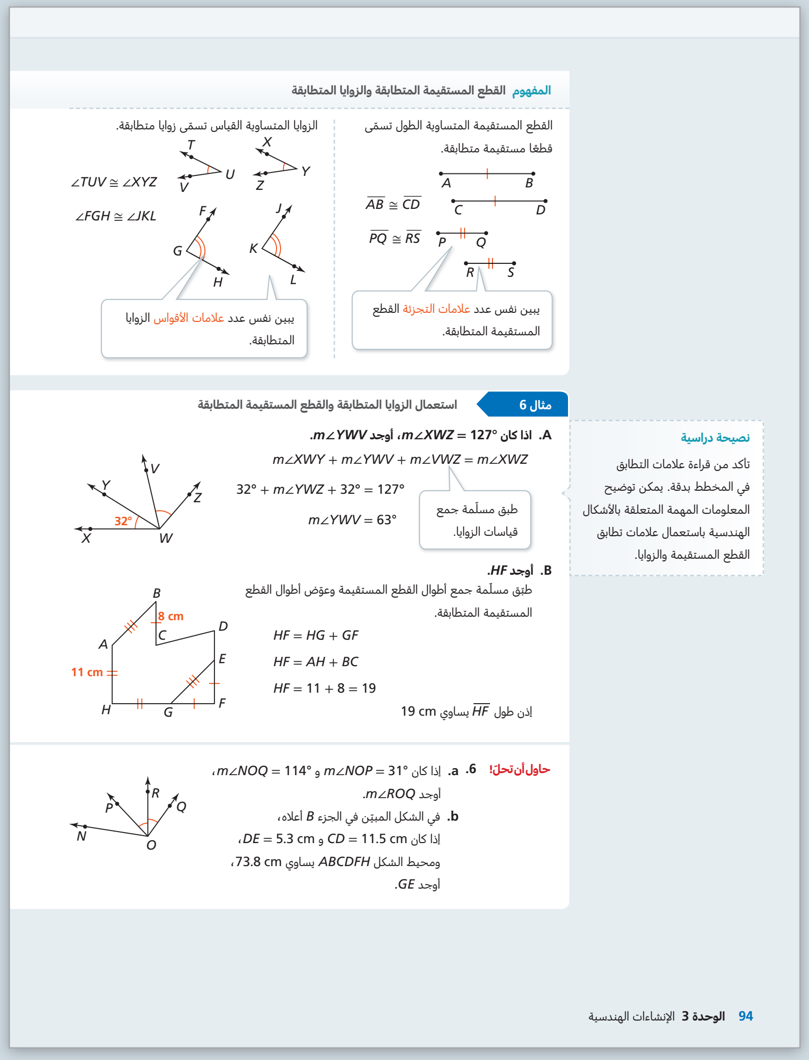
الكتابة مستوى 3 اطلب من الطلاب كتابة توضيح للمعادلات المكتوبة في فقرة "احسب" من المثال وتوضيح كيف تدعم الإجابات.

س: لماذا استعملنا المعادلة $x + 22 = 57$ ؟

[x هو قياس زاوية دوران كاشف الضوء لإضاءة الكرسي. يبين لك حل هذه المعادلة درجة دوران شعاع الضوء المطلوبة لإضاءة الكرسي.]

س: كيف تؤكد النتيجة $y = 17$ أن كاشف الضوء يمكن أن يضيء الطاولة ؟

[يمكن أن يدور كاشف الضوء بمقدار 25° ليضيء الطاولة، التي تبعد بمقدار زاوية دوران قياسها 17° فقط.]


المفهوم القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

القطع المستقيمة المتساوية الطول تسمّى قطعًا مستقيمة متطابقة.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

يبين نفس عدد علامات التجزئة القطع المستقيمة المتطابقة.

الزوايا المتساوية القياس تسمّى زوايا متطابقة.

$\angle TUV \cong \angle XYZ$

$\angle FGH \cong \angle JKL$

يبين نفس عدد علامات الأقواس الزوايا المتطابقة.

مثال 6 استعمال الزوايا المتطابقة والقطع المستقيمة المتطابقة

A. اذا كان $m\angle XWZ = 127°$، أوجد $m\angle YWV$.

$m\angle XWY + m\angle YWV + m\angle VWZ = m\angle XWZ$

$32° + m\angle YWZ + 32° = 127°$

$m\angle YWV = 63°$

طبق مسلّمة جمع قياسات الزوايا.

B. أوجد HF.

طبّق مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة وعوّض أطوال القطع المستقيمة المتطابقة.

$HF = HG + GF$

$HF = AH + BC$

$HF = 11 + 8 = 19$

إذن طول $\overline{HF}$ يساوي 19 cm

نصيحة دراسية

تأكد من قراءة علامات التطابق في المخطط بدقة. يمكن توضيح المعلومات المهمة المتعلقة بالأشكال الهندسية باستعمال علامات تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

حاول أن تحلّ! 6. a. إذا كان $m\angle NOP = 31°$ و $m\angle NOQ = 114°$، أوجد $m\angle ROQ$.

b. في الشكل المبيّن في الجزء B أعلاه، إذا كان $CD = 11.5$ cm و $DE = 5.3$ cm، ومحيط الشكل $ABCDFH$ يساوي 73.8 cm، أوجد GE.

94 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مثال 6 استعمال الزوايا المتطابقة والقطع المستقيمة المتطابقة

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تصف الفرق بين التطابق والمساواة ؟
[التطابق يصف الأشكال الهندسية، بينما المساواة تصف المقادير العددية.]

س: يرد في فقرة "المفهوم" أن، $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$. ما عبارة المساواة التي تنتج عن عبارة التطابق هذه ؟
[$PQ = RS$]

س: ما عبارة المساواة التي تنتج عن $\angle FGH \cong \angle JKL$ ؟
[$m\angle FGH = m\angle JKL$]

س: انظر إلى المخطط في المثال 6، إلى ماذا تشير علامات الأقواس ؟ وضّح إجابتك.
[لكل من $\angle XWY$ و $\angle VWZ$ علامة قوس واحدة، وبالتالي هما متطابقتان.]

س: ما قياس الزاوية $\angle VWZ$ ؟ وضّح إجابتك.
[$32°$؛ $\angle VWZ \cong \angle XWY$، إذن $m\angle VWZ = m\angle XWY = 32°$]

س: كيف يمكن معرفة أن بإمكانك استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا لإيجاد $\angle YWV$ ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لأن النقطتين Y وV تقعان داخل $\angle XWZ$]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. a. 41.5° b. 11 cm

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما المعادلة التي تربط بين $m\angle NOQ$ و $m\angle NOP$ و $m\angle POQ$ ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $m\angle NOP + m\angle POQ = m\angle NOQ$]

عادات التفكير

استعمل مع **الأمثلة 4 و 5 و 6**

استعمل الأدوات المناسبة إذا كانت النقطة M تقع داخل $\angle ABC$، فهل من المفيد استعمال مخطط لمعرفة ما إذا كانت $m\angle ABM = m\angle ABC$ ؟ وضّح إجابتك.

[نعم؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : من خلال رسم مخطط، يمكنك أن تلاحظ بسهولة أن $m\angle ABM > 0$ و $m\angle MBC > 0$. استنادًا إلى مسلّمة جمع قياسات الزوايا $m\angle ABC = m\angle ABM + m\angle MBC$، إذن $m\angle ABC \neq m\angle ABM$.]

ملخص المفهوم قياس القطع المستقيمة والزوايا

س: انظر إلى النقاط على خط الأعداد. ما عدد الأعداد الحقيقية التي رُبطت بها كل من النقاط J و K و L ؟ هل هذا ينطبق على أي نقطة على خط الأعداد ؟ وضّح إجابتك.

[كل نقطة من النقاط J و K و L ترتبط بعدد حقيقي واحد؛ نعم، وفق مسلّمة المسطرة، تُربط كل نقطة بعدد حقيقي واحد.]

س: انظر إلى الأشعة التي تكوّن الزوايا. ما عدد الأعداد الحقيقية على المنقلة التي تحاذي كل شعاع ؟ ما عدد قياسات كل زاوية ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كل شعاع يحاذي عددين حقيقيين، لكنك تستعمل أحدهما فقط لإيجاد قياس الزاوية. كل زاوية لها قياس واحد فقط.]

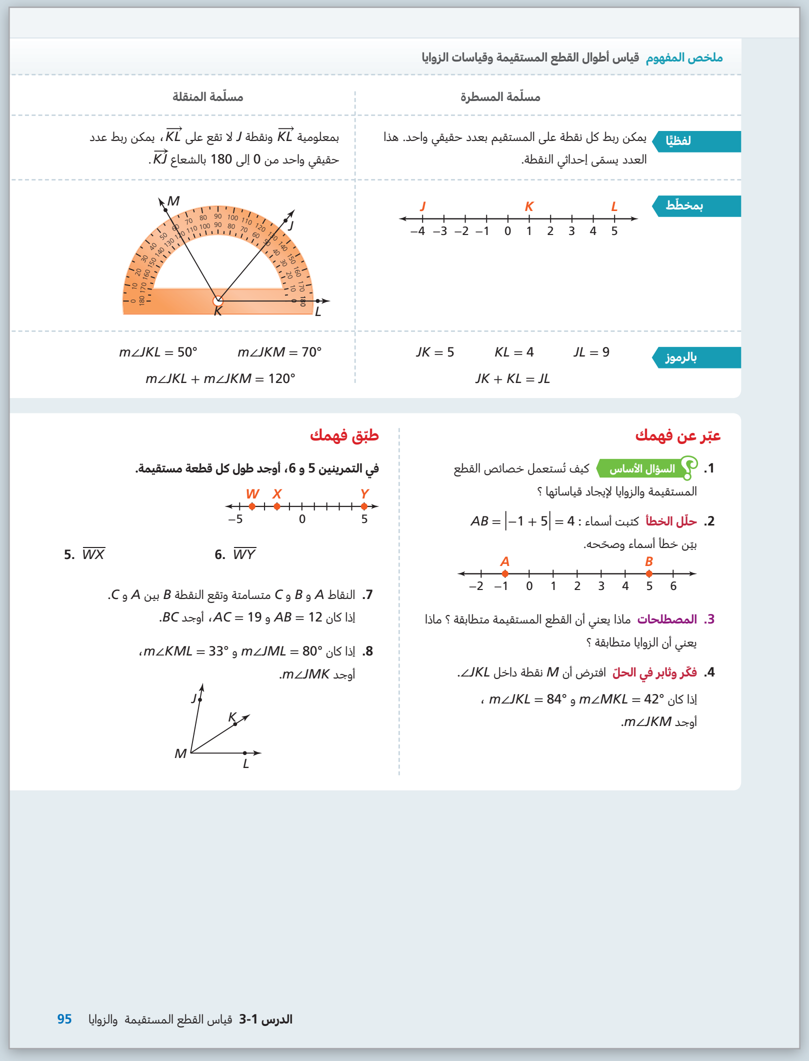
س: انظر إلى الصف الأخير في الجدول. ما أوجه الشبه والاختلاف بين مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : الشبه : ناتج جمع قياسات الأجزاء الصغيرة يساوي قياس الجزء الكبير. الاختلاف : لاستعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة يجب أن يكون هناك ثلاث نقاط متسامتة، وأن تقع إحدى هذه النقاط بين نقطتي النهاية؛ لاستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا، يجب أن تكون هناك نقطة داخل الزاوية.]

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 5 بما أن إحداثيي W و X عددان سالبان، فقد يعتقد الطلاب أن طول القطعة المستقيمة بينهما يجب أن يكون سالبًا أيضًا. ذكّر الطلاب أن الطول يكون دائمًا عددًا حقيقيًا موجبًا. وضّح لهم أن عليهم الحصول على النتيجة نفسها، وأنها يجب أن تكون موجبة، سواء أكانوا يعدّون وحدات الطول أم يستعملون القيمة المطلقة لإيجاد مسافة.



ملخص المفهوم قياس أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

	مسلّمة المسطرة	مسلّمة المنقلة
لفظيًا	يمكن ربط كل نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد. هذا العدد يسمى إحداثي النقطة.	بمعلومية $\overrightarrow{KL}$ ونقطة J لا تقع على $\overrightarrow{KL}$، يمكن ربط عدد حقيقي واحد من 0 إلى 180 بالشعاع $\overrightarrow{KJ}$.
بمخطط		
بالرموز	$JK = 5$ $KL = 4$ $JL = 9$ $JK + KL = JL$	$m\angle JKL = 50°$ $m\angle JKM = 70°$ $m\angle JKL + m\angle JKM = 120°$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟
2. حلل الخطأ كتبت أسماء : $AB = |-1 + 5| = 4$ بيّن خطأ أسماء وصحّحه.
3. المصطلحات ماذا يعني أن القطع المستقيمة متطابقة ؟ ماذا يعني أن الزوايا متطابقة ؟
4. فكّر وثابر في الحل افترض أن M نقطة داخل $\angle JKL$. إذا كان $m\angle MKL = 42°$ و $m\angle JKL = 84°$، أوجد $m\angle JKM$.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد طول كل قطعة مستقيمة.

5. $\overline{WX}$ 6. $\overline{WY}$

7. النقاط A و B و C متسامتة وتقع النقطة B بين A و C. إذا كان $AB = 12$ و $AC = 19$، أوجد BC.
8. إذا كان $m\angle JML = 80°$ و $m\angle KML = 33°$، أوجد $m\angle JMK$.

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 95

الإجابات

1. تربط مسلمة المسطرة أي نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد فقط على خط الأعداد. القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي نقطتين على مستقيم هي طول القطعة المستقيمة التي تربط هاتين النقطتين. تربط مسلّمة المنقلة عددًا حقيقيًا واحدًا بقياس الزاوية المتكوّنة من شعاع ونقطة لا تقع على الشعاع.

2. وجدت أسماء ناتج جمع الإحداثيين بدلًا من ناتج طرحهما.

3. تكون القطع المستقيمة متطابقة إذا كان لها نفس الطول. تكون الزوايا متطابقة إذا كان لها نفس القياس.

4. 42°

5. 2 وحدة طول

6. 9 وحدات طول

7. 7 وحدات طول

8. 47°

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-27, 30-41	9-20, 23-41

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1, 2	16-21	1
	9, 39	2
	36	3
3	22-25	2
	10, 11, 35, 37	3
4, 5	26, 27, 28	2
	13	3
6	32, 34	1
	12, 15, 29-31, 33, 40	2
	14, 38, 41	4

تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

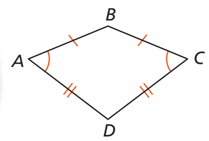
.9 برّر منطقيًّا إحداثي النقطة M على خط الأعداد هو 11، إذا كان $MN = 12$، فما الإحداثيات الممكنة للنقطة N على خط الأعداد ؟

.10 ابنِ الحجج الرياضية كيف يمكنك استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة لإثبات $AE = AB + BC + CD + DE$ ؟

.11 مهارات التفكير العليا إذا كانت النقاط C و D و E تقع على نفس المستقيم وكان $CD = 20$ و $CE = 32$، فما الأطوال الممكنة للقطعة المستقيمة DE ؟

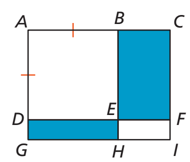
.12 حلّل الخطأ كتب بدر المعادلات أدناه عن الشكل الهندسي المبيّن. وضّح الأخطاء التي وقع فيها بدر.

$\overline{AB} = \overline{BC}$
$\overline{AD} = \overline{DC}$
$\angle A = \angle C$

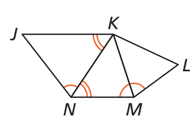


.13 فكّر وثابر في الحل تقع النقطة Y داخل $\angle XWZ$. إذا علمت أن $\overrightarrow{WX}$ و $\overrightarrow{WZ}$ شعاعان متعاكسان، و $m\angle XWY = 4\,(m\angle YWZ)$، فما $m\angle YWZ$ ؟

.14 روابط في الرياضيات مساحة $ABED$ تساوي 49 وحدة مربعة. إذا كان AG يساوي 9 وحدات و AC يساوي 10 وحدات، فما الكسر الذي يمثّل المنطقة المظللة من مساحة $ACIG$ ؟ اكتب الإجابة في أبسط صيغة ممكنة.

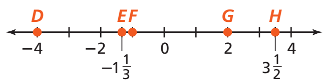


.15 ابحث عن العلاقات في المخطط المجاور، $m\angle LMN = 116°$، $m\angle JKM = 122°$ و $m\angle JNM = 103°$. أوجد $m\,\angle NKM$.



تدرّب

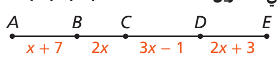
في التمارين 16-21، أوجد طول كل قطعة مستقيمة. انظر المثالين 1 و 2



16. $\overline{DF}$ 17. $\overline{DE}$ 18. $\overline{FG}$

19. $\overline{FH}$ 20. $\overline{GH}$ 21. $\overline{EH}$

في التمارين 22-25، النقاط A, B, C, D, E متسامتة. انظر المثال 3



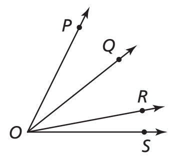
.22 إذا كان $AC = 16$، أوجد قيمة x.

.23 أوجد AB.

.24 أوجد BD.

.25 أوجد CE.

في التمارين 26-28، استعمل الشكل المبيّن أدناه. انظر المثالين 4 و 5

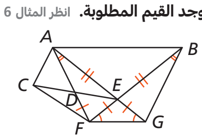


.26 إذا كان $m\angle POQ = 24°$ و $m\angle POR = 59°$، أوجد $m\angle QOR$.

.27 إذا كان $m\angle POQ = 19°$ و $m\angle QOR = 31°$ و $m\angle ROS = 15°$، أوجد $m\angle POS$.

.28 إذا كان $m\angle QOS = 46°$، و $m\angle POR = 61°$، و $m\angle POQ = 28°$، أوجد $m\angle ROS$.

في التمارين 29-34، افترض أن $EG = 3$ و $EB = 8$ و $AF = 7$ و $m\angle EBG = 19°$ و $m\angle EGF = 28°$ و $m\angle CAE = 51°$. أوجد القيم المطلوبة. انظر المثال 6



29. EF 30. AG 31. AD

32. $m\angle EFG$ 33. $m\angle CAF$ 34. DF

.35 النقاط P, Q, R, S متسامتة. تقع النقطة Q بين P و R ، والنقطة R بين Q و S ، و $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$. إذا كان $PS = 18$ و $PR = 15$، أوجد QR.

الإجابات

.9 -1 أو 23

.10 استنادًا إلى مسلّمة القطع المستقيمة، $AE = AC + CE$ و $AC = AB + BC$، و $CE = CD + DE$، بالتعويض نجد أن $AE = AB + BC + CD + DE$.

.11 12 أو 52

.12 استعمل بدر رمز المساواة حيث كان عليه استعمال رمز التطابق. القطع المستقيمة والزوايا متطابقة، لكن أطوالها وقياساتها متساوية.

13. 36°

.14 $\frac{7}{18}$ وحدة طول

15. 77°

.16 3 وحدات طول

.17 $2\frac{2}{3}$ وحدة طول

.18 3 وحدات طول

.19 $4\frac{1}{2}$ وحدة طول

.20 $1\frac{1}{2}$ وحدة طول

.21 $4\frac{5}{6}$ وحدة طول

.22 3 وحدات طول

.23 10 وحدات طول

.24 14 وحدة طول

.25 17 وحدة طول

26. 35°

27. 65°

28. 13°

.29 3 وحدات طول

.30 11 وحدة طول

.31 4 وحدات طول

32. 28°

33. 32°

.34 3 وحدات طول

.35 12 وحدة طول

الإجابات

.36 المدينة B؛ بما أن المسافة إلى المدينة D هي 26 mi، فإن نصف هذه المسافة تساوي 13 mi، و أقرب مدينة إلى 13 mi هي المدينة B.

.37 نعم؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: وفقًا للخطة سيكون ارتفاع المبنى 185 ft، وهو أقل من الارتفاع الأقصى المسموح به.

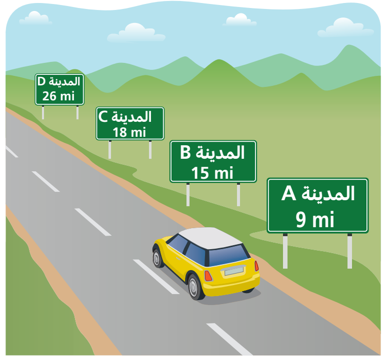
.38 3؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة:
بما أن $234 - 52 - 68 = 114$، فإن الطول الإجمالي للقطع المستقيمة الأربع مع علامات التجزئة يساوي 114 ft، توجد قطعتان مستقيمتان بعلامة تجزئة واحدة وضلعان بعلامتي تجزئة، وطول الشارع يساوي ناتج جمع طول قطعة مستقيمة بعلامة تجزئة واحدة وطول قطعة مستقيمة بعلامتي تجزئة.
إذن، الطول الإجمالي للشارع يساوي نصف 114 ft أو 57 ft
$57 \div 20 \approx 60 \div 20 = 3$

.41 يجب أن تتضمن خطة الطابق التي يضعها الطلاب أربع غرف وجدارين متساويين في الطول وزاويتين متساويتين في القياس، كما يجب أن توضح معادلاتهم الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة.

تدرّب وحُل مسائل

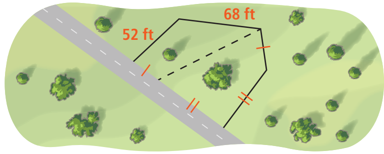
طبّق

.36 **فكّر وثابر في الحلّ** يقود جابر سيارته إلى المدينة D لزيارة صديقه. إذا أراد التوقف لتناول الغداء عندما يكون في منتصف الطريق، في أي مدينة يجب أن يتوقف ؟ وضّح إجابتك.



.37 **برّر منطقيًا** يتعين على لجنة التخطيط في إحدى المدن أن تحدد ما إذا كانت ستوافق على تشييد مبنى جديد أم لا. تريد الشركة المعنيّة بتشييد المبنى أن تبني في منطقة من المدينة، ويبلغ الارتفاع الأقصى المسموح به للمبنى 310 ft
توضّح المخططات أن ارتفاع الطابق الأول من المبنى يبلغ 20 ft وأن ارتفاع كل من الطوابق الخمسة عشر التالية يبلغ 11 ft، بما في ذلك المساحة اللازمة للأنظمة الكهربائية وأنظمة الصرف الصحي والأنظمة الأخرى بين كل طابقين. إذا كان مخطط البناء يتطابق مع كل شروط التنظيم المُدني، فهل على لجنة التخطيط الموافقة على مخطط البناء ؟ وضّح إجابتك.

.38 **برّر منطقيًا** تريد لجنة التخطيط في بلدية إحدى المدن زرع شجرة كل 20 ft على طول أحد شوارع المدينة. إذا كان محيط قطعة الأرض المخصصة لذلك 234 ft، فما عدد الأشجار التي يمكن زرعها ؟ وضّح إجابتك.



تدرّب على اختبار

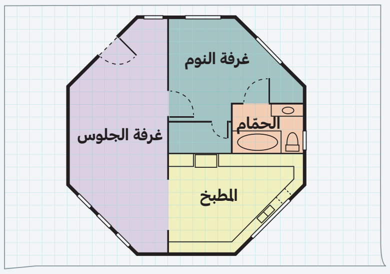
.39 في المخطط المبيّن أدناه، $FH = 2FG$ و $GH = HI$ و $FI = IK$.
أي من العبارات التالية يجب أن تكون صحيحة ؟
اختر كل ما ينطبق.

Ⓐ $FG = HI$ Ⓑ $HI = IJ$
Ⓒ $IK = 3FG$ Ⓓ $FH = GI$
Ⓔ $HJ = JK$ Ⓕ $HK = 2GI$

.40 **اختبار SAT/ACT** تقع النقطة C داخل $\angle ABD$، و $\angle ABC \cong \angle CBD$. إذا كان $m\angle ABC = \left(\frac{5}{2}x + 18\right)$ و $m\angle CBD = (4x)$، فما $m\angle ABD$ ؟

Ⓐ 12 Ⓑ 36 Ⓒ 48 Ⓓ 72 Ⓔ 96

.41 **مهمة إدائية** يقع المعهد الأمريكي للمهندسين المعماريين في مبنى تاريخي ثماني الشكل يسمّى "أوكتاجون" في العاصمة واشنطن. حيث كانت المنازل ذات الثمانية أضلاع شائعة في الولايات المتحدة في منتصف القرن التاسع عشر.



الجزء A صمم مخططًا تراه مناسبًا لطابق واحد في منزل ثماني الشكل. يجب أن يتضمن المخطط أربع غرف على الأقل وجدارين متساويَي الطول وزاويتين متساويتَي القياس. ارسم مخطط الطابق باستعمال المقياس 1 cm = 1 m. اكتب قياسات زوايا الجدران وأطوال الجدران في مخططك، واستعمل العلامات المناسبة لتمثيل الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة. سمِّ كل نقاط تقاطع الجدران في المخطط.

الجزء B اكتب معادلات توضّح الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة في المخطط الذي رسمته.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 3-2
الإنشاءات الهندسية الأساسية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ إنشاء نسخ من قطع مستقيمة وزوايا.

✔ إنشاء قطع مستقيمة ومنصّفات عمودية لقطع مستقيمة ومنصّفات زوايا.

✔ تطبيق الإنشاءات الهندسية على مسائل تتضمن أجزاء من قطع مستقيمة وأجزاء من زوايا.

الفهم الأساس

الإنشاءات الهندسية هي أشكال هندسية تنشأ فقط باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار. تعتبر الإنشاءات الهندسية من الأدوات المفيدة في الهندسة.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- تعلم المصطلحات الأساسية المتعلقة بالمستقيمات والأشعة والقطع المستقيمة والزوايا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إنشاء مستقيمات وأشعة وقطع مستقيمة وزوايا.
- قياس ونسخ قطع مستقيمة وزوايا باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة.
- إنشاء منصّفات زوايا ومنصّفات عمودية لقطع مستقيمة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال الإنشاءات الهندسية للتحقق من النظريات الهندسية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب أنه يمكن التحقق من الخصائص الهندسية باستعمال الأساليب التقليدية للإنشاء الهندسي.
- ينمّي الطلاب مهارة في الإنشاءات الهندسية الأساسية لقياس الزوايا وإيجاد الأطوال.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **متوازي** | *parallel*
- **متعامد** | *perpendicular*

المصطلحات الجديدة

- **إنشاء هندسي** | *construction*
- **منصّف عمودي** | *perpendicular bisector*
- **منصّف الزاوية** | *angle bisector*

نشاط المصطلحات

راجع مفهومي التنصيف والتعامد عبر كتابة أحرف الأبجدية الإنجليزية بالصيغة التاجية (أحرف كبيرة منفصلة)، واترك فراغًا بين الأحرف. بعدها، اطلب من الطلاب كتابة أحرف الأبجدية الإنجليزية على ورقة.

اطلب من الطلاب تحويط الأحرف التي تحتوي على خطوط متعامدة، مثل E و F و H و ... إلخ. استنبط من الطلاب تعريفًا غير رسمي للتعامد.

اطلب من الطلاب تمييز أحرف تتضمن قطعًا مستقيمة منصّفة، مثل A و B و E و ... إلخ. استنبط من الطلاب تعريفًا غير رسمي للتنصيف. إذا سمح لك الوقت، كرر النشاط بتمييز القطع المستقيمة المتوازية الموجودة في الأحرف.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.2 يستعمل الأدوات الهندسية لإنشاء:

- قطعة مستقيمة تطابق قطعة مستقيمة معطاة.
- زاوية تطابق زاوية معطاة.
- منصّفات الزوايا والمنصفات العمودية.

معايير ممارسات الرياضيات

ابن الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب التعريفات للتحقق من إنشاءاتهم الهندسية.

استعمل الأدوات المناسبة استراتيجيًا

ينمّي الطلاب مهارة في تكوين إنشاءات هندسية أساسية باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة، ويطبقون ذلك في حل المسائل.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يختبر الطلاب نسخ أشكال هندسية بسيطة مكونة من دوائر وقطع مستقيمة باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة، هذا يهيّئ الطلاب لتعلم الإنشاءات الهندسية الأساسية.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: كيف يمكنك وصف هذا الرسم ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الرسم هو سبع دوائر مرتبة في شكل يشبه السداسي.]

س: هل يهم كم تكون الدائرة التي ترسمها كبيرة ؟ هل يمكنك مطابقة المخطط بالضبط ؟
[لا تتطلب المسألة المطابقة المضبوطة، ولكن يمكن ضبط الفرجار بطول نصف قطر إحدى الدوائر.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

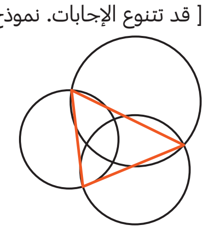
دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الترتيب الذي ستستعمله لرسم الدوائر ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : سأرسم الدائرة المركزية أولًا ثم الدوائر الخارجية.]

س: بعد أن ترسم الدائرة الأولى، كيف تختار أين ستضع رأس الفرجار لرسم الدائرة الثانية ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : سأضع رأس الفرجار عند إحدى نقاط تقاطع المستقيم الأفقي المار بمركز الدائرة مع الدائرة المركزية.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل يمكنك إنشاء رسم مكون من ثلاث دوائر تشكل تقاطعاتها مثلثًا ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تحقق من أن دوائر الطلاب تشكل مثلثًا.]



بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل تقاطعت الدائرة الأخيرة التي رسمتها مع الدوائر الأخرى كما في الرسم المعطى بالضبط ؟ إن لم يكن كذلك، هل تعرف لماذا ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلّا. يمكن لفتحة الفرجار أن تكون قد تغيرت قليلًا حينما رسمت، أو لم أضع رأس الفرجار على نقطة تقاطع الدائرتين بالضبط.]

س: لماذا الدقة مهمة عند رسم الأشكال الهندسية ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : إنها مهمة لأن أخطاء صغيرة قد تؤدي إلى أخطاء كبيرة.]

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

تواصل بدقة ما المصطلحات أو المفاهيم الرياضية التي يمكنك استعمالها لوصف رسمك ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكنك استعمال مصطلحات مثل نقطة تقاطع ومتناظر وسداسي.]

كتاب الطالب، صفحة 98


3-2
الإنشاءات الهندسية الأساسية
Basic Constructions

أستطيع... استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء أشكال هندسية أساسية.

معيار الدرس
9.4.2

المصطلحات
- إنشاء هندسي construction
- منصّف عمودي perpendicular bisector

استكشف وبرّر منطقيًّا

استعمل فرجارًا لإنشاء رسم باستعمال الدوائر فقط، كالرسم المبيّن في الشكل المجاور.

A. ما التعليمات التي يمكنك إعطاؤها لطالب آخر كي يتمكن من إنشاء نسخة مطابقة لرسمك ؟

B. **فكّر وثابر في الحل** استعمل مسطرة لرسم قطع مستقيمة تربط بين النقاط المتتالية التي تتقاطع عندها الدوائر. هل لأيّ من القطع التي رسمتها نفس طول قطعة أخرى ؟ إذا كان الأمر كذلك، ما السبب في رأيك ؟

السؤال الأساس كيف تُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟

نموذج من أعمال الطلاب

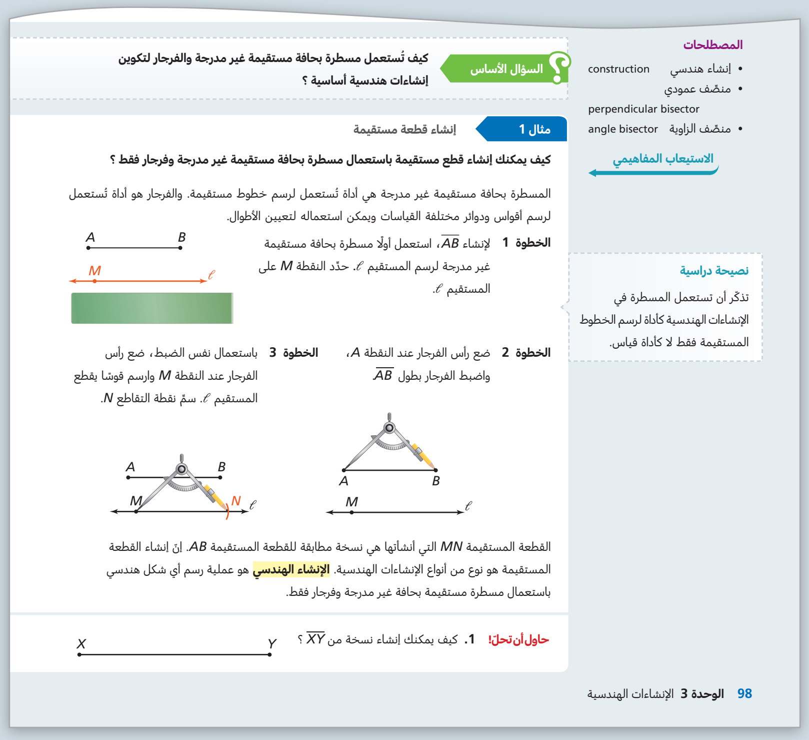
A. ارسم دائرة باستعمال الفرجار. دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار على الدائرة التي رسمتها وارسم دائرة ثانية. ضع رأس الفرجار على إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين وارسم دائرة ثالثة. كرر ذلك حتى تحصل على سبع دوائر مرتبة في الشكل الصحيح.

B. تبدو القطع المستقيمة الستّ بنفس الطول لأن فتحة الفرجار في كل مرة تساوي نصف قطر الدائرة المركزية.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على الإنشاءات التقليدية. سيتعلم الطلاب أنه تم اختبار الأفكار الهندسية لقرون مضت عبر إنشاء أشكال هندسية باستعمال الفرجار ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة فقط. بعدها، سيستعمل الطلاب مبادئ الإنشاء التقليدية لحل مسائل من واقع الحياة ومسائل رياضية.


المصطلحات
- إنشاء هندسي construction
- منصّف عمودي perpendicular bisector
- منصّف الزاوية angle bisector

الاستيعاب المفاهيمي

السؤال الأساس كيف تُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟

مثال 1 إنشاء قطعة مستقيمة

كيف يمكنك إنشاء قطع مستقيمة باستعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار فقط ؟

المسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة هي أداة تُستعمل لرسم خطوط مستقيمة. والفرجار هو أداة تُستعمل لرسم أقواس ودوائر مختلفة القياسات ويمكن استعماله لتعيين الأطوال.

الخطوة 1 لإنشاء $\overline{AB}$، استعمل أولًا مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم المستقيم ℓ. حدّد النقطة M على المستقيم ℓ.

الخطوة 2 ضع رأس الفرجار عند النقطة A، واضبط الفرجار بطول $\overline{AB}$

الخطوة 3 باستعمال نفس الضبط، ضع رأس الفرجار عند النقطة M وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ. سمِّ نقطة التقاطع N.

القطعة المستقيمة MN التي أنشأتها هي نسخة مطابقة للقطعة المستقيمة AB. إنّ إنشاء القطعة المستقيمة هو نوع من أنواع الإنشاءات الهندسية. **الإنشاء الهندسي** هو عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

نصيحة دراسية
تذكّر أن تستعمل المسطرة في الإنشاءات الهندسية كأداة لرسم الخطوط المستقيمة فقط لا كأداة قياس.

حاول أن تحلّ! **1.** كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\overline{XY}$ ؟

X Y

98 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مثال 1 إنشاء قطعة مستقيمة

طرح أسئلة هادفة

س: كم قطعة مستقيمة يمكنك أن ترسم بين النقطتين A و B ؟
[قطعة مستقيمة واحدة فقط، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين، والقطعة المستقيمة هي جزء من هذا المستقيم.]

س: كيف يمكنك إنشاء قطعة مستقيمة طولها ضعف طول القطعة المستقيمة المعطاة ؟
[عيّن طول القطعة المستقيمة مرتين على المستقيم.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1.

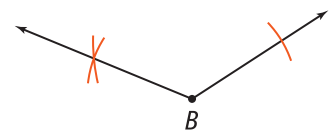

مثال 2 إنشاء زاوية متطابقة

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن النقطتين B و C مقارنة بالنقطة A ؟
[تقع النقطتان على نفس المسافة من النقطة A.]

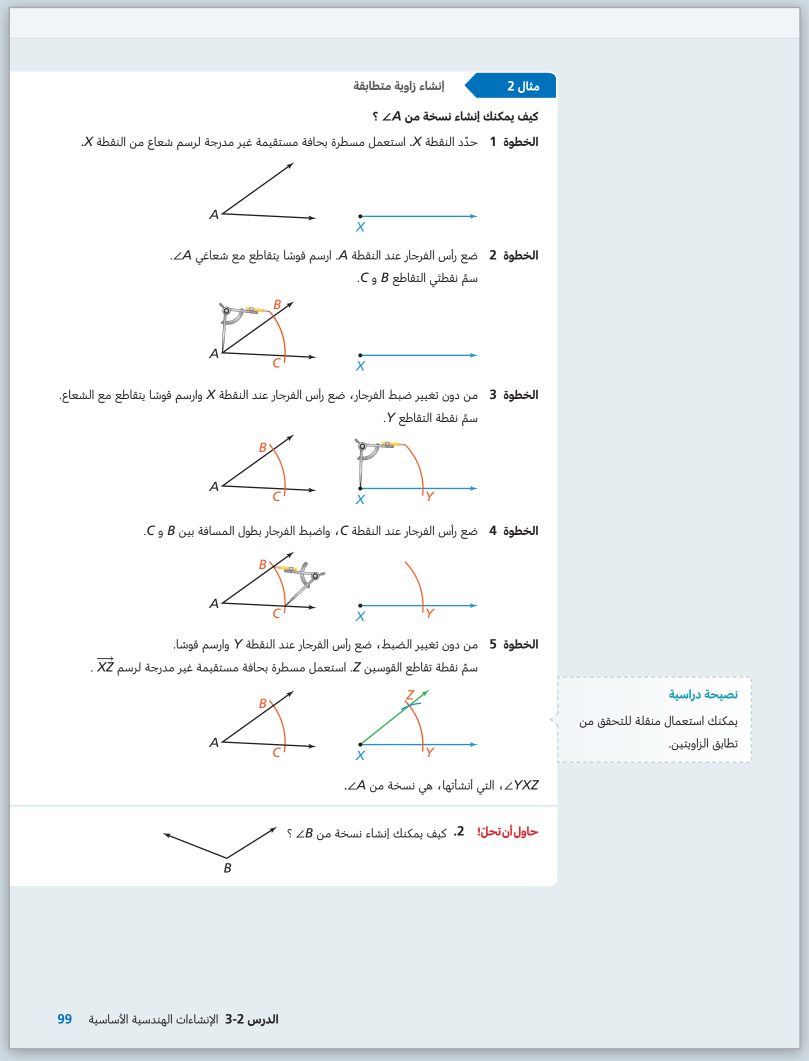
س: كيف يمكنك إنشاء زاوية قياسها ضعف قياس $\angle A$ ؟
[أنشئ زاوية أخرى، على الشعاع الذي أنشأته مستعملًا نفس نقطة النهاية وهي النقطة A.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2.


استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تبدأ إنشاء نسخة عن زاوية ؟
[ارسم شعاعًا يكون أحد شعاعي الزاوية المنسوخة.]


مثال 2 إنشاء زاوية متطابقة

كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\angle A$ ؟

الخطوة 1 حدِّد النقطة X. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم شعاع من النقطة X.

الخطوة 2 ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ارسم قوسًا يتقاطع مع شعاعَي $\angle A$. سمِّ نقطتَي التقاطع B و C.

الخطوة 3 من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة X وارسم قوسًا يتقاطع مع الشعاع. سمِّ نقطة التقاطع Y.

الخطوة 4 ضع رأس الفرجار عند النقطة C، واضبط الفرجار بطول المسافة بين B و C.

الخطوة 5 من دون تغيير الضبط، ضع رأس الفرجار عند النقطة Y وارسم قوسًا. سمِّ نقطة تقاطع القوسين Z. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم $\overrightarrow{XZ}$.

$\angle YXZ$، التي أنشأتها، هي نسخة من $\angle A$.

نصيحة دراسية
يمكنك استعمال منقلة للتحقق من تطابق الزاويتين.

حاول أن تحلّ! **2.** كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\angle B$ ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 99

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

ابن الحجج الرياضية يقول بلال إن نسخة قطعة مستقيمة أو نسخة زاوية تكون مطابقة دائمًا للأصل، حتى لو كان اتجاه النسخة مختلفًا عن الاتجاه الأصلي. ابن حجة لدعم أو دحض ما يقوله بلال ؟

[ما يقوله بلال صحيح. يمكنك استعمال تحويلات التطابق لتطابق النسخة مع الأصل.]

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثال 2**

القراءة **مستوى 3** اطلب من الطلاب قراءة الخطوتين 2 و 3، اللّتين تطلبان من الطلاب رسم قوس يقطع شعاعين. بعدها استنبط إجابة عن المقصود بكلمة تقاطع. اطلب من الطلاب مقارنة إجاباتهم مع التعريف "مجموعة النقاط المشتركة بين شكلين أو أكثر".

س: في رأيك، ما معنى الحصول على نقاط مشتركة ؟
[النقاط المشتركة بين الشكلين تعني نقاط التقاطع بين الشكلين.]

س: ما عدد نقاط التقاطع بين شعاع وقوس يقطعه ؟
[نقطة واحدة فقط]

مثال 3 إنشاء منصّف عمودي

طرح أسئلة هادفة

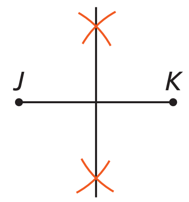
س: هل من الممكن ضبط الفرجار بطريقة غير صحيحة لتنفيذ الخطوة 1 ؟ وضّح إجابتك.
[نعم؛ يمكنك ضبط فرجار بفتحة صغيرة جدًّا، مما يؤدي الى عدم تقاطع القوسين الثانيين مع القوسين الأوليين.]

س: كيف يمكنك تغيير هذا الإنشاء لإنشاء مستقيم متعامد مع القطعة المستقيمة ولكن غير منصّف لها ؟
[اضبط الفرجار بفتحة ثابتة وابدأ الإنشاء عبر رسم قوسين أعلى وأسفل المستقيم من أي نقطتين على المستقيم.]

س: كيف يمكنك إنشاء مستقيم متعامد مع مستقيم ما ويمر بنقطة محددة على المستقيم ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل الفرجار لتعيين مسافتين متساويتين على المستقيم في جهتي النقطة، ثم أنشئ منصّفًا عموديًا باستعمال هاتين النقطتين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3.

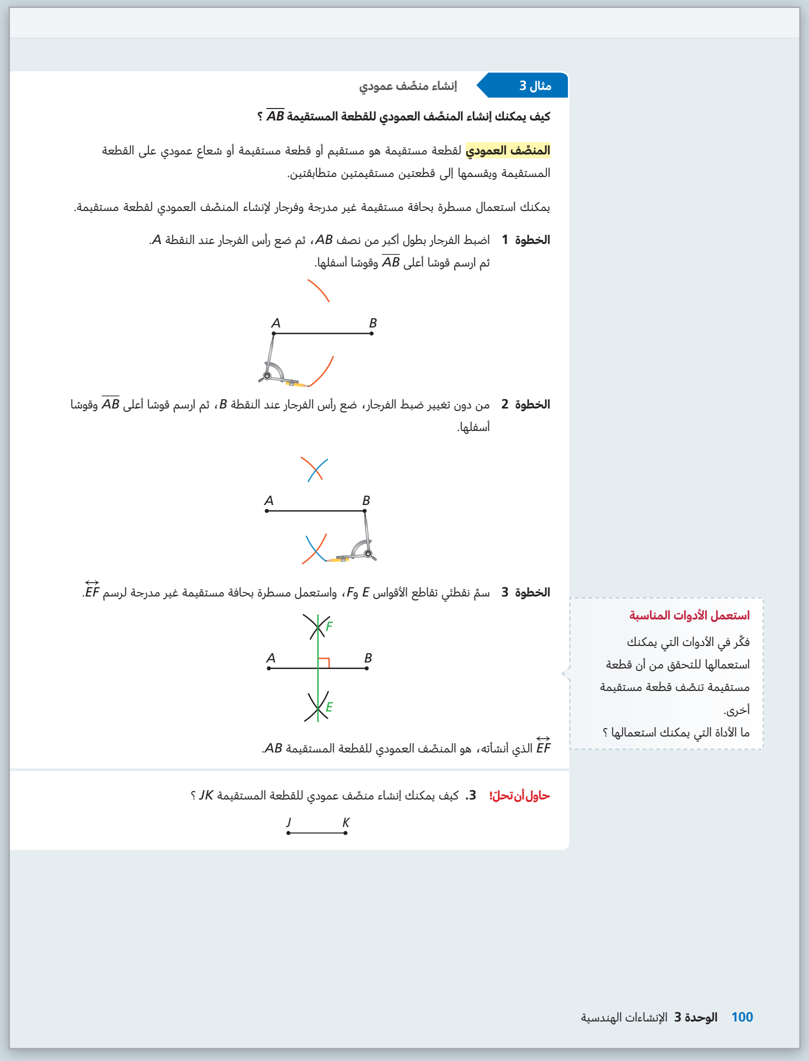


استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تتحقق من أن المستقيم الذي أنشأته ينصف القطعة المستقيمة الأصلية ؟
[يمكنك وضع سن الفرجار عند نقطة التقاطع واستعماله لتتحقق ما إذا كانت المسافتان إلى النقطتين A و B متساويتين أم لا.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 قد يغير الطلاب ضبط الفرجار للحصول على أقواس متقاطعة إن لم تتقاطع الأقواس في المحاولة الأولى. ذكر الطلاب أنه يجب عدم تغيير ضبط الفرجار. اطلب من الطلاب تعيين نقطة منتصف القطعة المستقيمة، ثم ضبط الفرجار لأقل من نصف طول القطعة المستقيمة ومحاولة إيجاد التقاطع. بعدها اطلب منهم ضبط الفرجار لأكثر من نصف طول القطعة المستقيمة وإيجاد التقاطع. استنبط الخلاصة أنه يجب ضبط الفرجار لأكثر من نصف طول القطعة المستقيمة.



مثال 3 إنشاء منصِّف عمودي

كيف يمكنك إنشاء المنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؟

المنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة هو مستقيم أو قطعة مستقيمة أو شعاع عمودي على القطعة المستقيمة ويقسمها إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

يمكنك استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء المنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة.

الخطوة 1 اضبط الفرجار بطول أكبر من نصف AB، ثم ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ثم ارسم قوسًا أعلى $\overline{AB}$ وقوسًا أسفلها.

الخطوة 2 من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة B، ثم ارسم قوسًا أعلى $\overline{AB}$ وقوسًا أسفلها.

الخطوة 3 سمِّ نقطتَي تقاطع الأقواس E وF، واستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم $\overleftrightarrow{EF}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ الذي أنشأته، هو المنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة AB.

استعمل الأدوات المناسبة
فكِّر في الأدوات التي يمكنك استعمالها للتحقق من أن قطعة مستقيمة تنصِّف قطعة مستقيمة أخرى.
ما الأداة التي يمكنك استعمالها ؟

حاول أن تحلّ! 3. كيف يمكنك إنشاء منصِّف عمودي للقطعة المستقيمة JK ؟

مثال 4 إنشاء منصّف زاوية

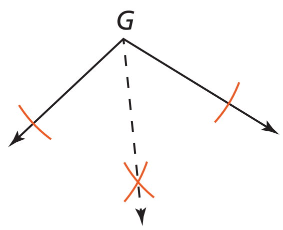
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

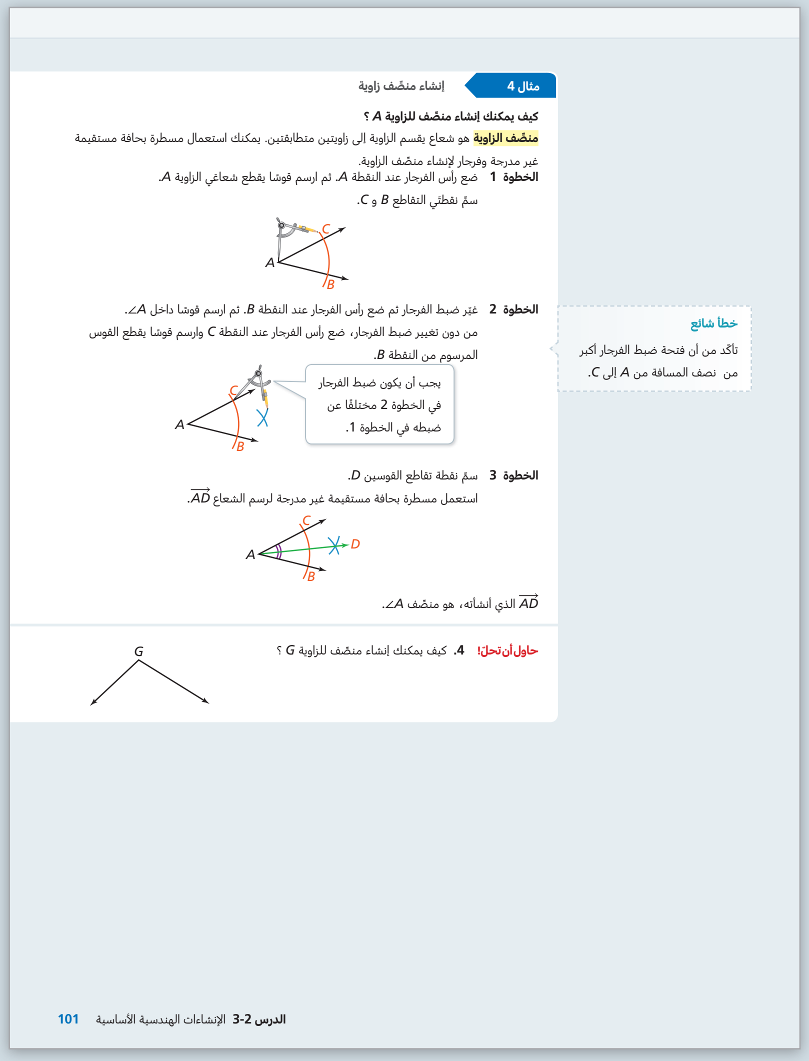
س: هل من الضروري إعادة ضبط الفرجار عند إنشاء منصف زاوية ؟ لماذا يُفضل أن تزيد فتحة الفرجار ؟
[كلّا؛ ولكن رسم أقواس أطول قد يجعل عملية الإنشاء أكثر دقة.]

س: ماذا تتوقع إذا كررت إنشاء منصّف نفس الزاوية باستعمال ضوابط أخرى للفرجار ؟
[سترسم نفس القطعة المستقيمة المنصِّفة للزاوية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4.




مثال 4 إنشاء منصّف زاوية

كيف يمكنك إنشاء منصّف للزاوية A ؟

منصّف الزاوية هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. يمكنك استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء منصّف الزاوية.

الخطوة 1 ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ثم ارسم قوسًا يقطع شعاعَي الزاوية A. سمِّ نقطتَي التقاطع B و C.

الخطوة 2 غيّر ضبط الفرجار ثم ضع رأس الفرجار عند النقطة B. ثم ارسم قوسًا داخل $\angle A$. من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة C وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B.

يجب أن يكون ضبط الفرجار في الخطوة 2 مختلفًا عن ضبطه في الخطوة 1.

الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين D. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم الشعاع $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD}$ الذي أنشأته، هو منصّف $\angle A$.

خطأ شائع
تأكّد من أن فتحة ضبط الفرجار أكبر من نصف المسافة من A إلى C.

حاول أن تحلّ! **4.** كيف يمكنك إنشاء منصّف للزاوية G ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 101

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تختار كم ستفتح الفرجار لتقوم برسم القوس الأول ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن ضبط الفرجار عند أي طول بحيث يقطع القوس شعاعي الزاوية.]

س: هل من الأفضل تكبير فتحة الفرجار عند رسم القوس الأول ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : نعم، كلما كانت فتحة الفرجار أكبر، كان إنشاء المنصّف أدق.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب تنصيف زاوية مستقيمة لمقارنة الخطوات مع إنشاء المنصف العمودي.

- اطلب من الطلاب رسم زاوية مستقيمة ولتكن $\angle A$ على قطعة ورق.

س: أنشئ منصّف الزاوية المستقيمة $\angle A$.
[تحقق أن الطلاب قد رسموا منصّف زاوية.]

س: ماذا تلاحظ حول الشعاع الذي أنشأته ؟
[إنه متعامد مع المستقيم الذي يكوّن الزاوية المستقيمة A.]

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا الإنشاء وإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة ؟
[الشعاع الذي تم إنشاؤه متعامد مع القطعة المستقيمة، تمامًا مثل المستقيم الذي تم إنشاؤه عند إنشاء منصّف الزاوية. الشعاع الذي تم إنشاؤه متعامد مع المستقيم عند نقطة ما، بدلًا من نقطة المنتصف بين نقطتين.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب تنفيذ خطواتهم الخاصة لإكمال الإنشاء والتحقق منها.

- اطلب من الطلاب تبادل الأدوار في إخبارك عن كيفية إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة على السبورة. يجب على الطلاب إنشاء قائمة بالخطوات التي ينفذونها على ورقة.
- إذا أعطى أحد الطلاب خطوة غير صحيحة، استنبط الخطوة الصحيحة ولكن اطلب من الطلاب أن يسجلوا ملاحظاتهم ذاكرين سبب عدم صحتها.

س: هل أي من الخطوات التي كتبتها غير صحيحة ؟ إذا كان الأمر كذلك، اكتب سبب عدم صحتها.
[راجع عمل الطلاب.]

س: اتبع قائمة الخطوات التي كتبتها لإنشاء المنصف العمودي لقطعة مستقيمة.
[راجع عمل الطلاب.]

س: هل قائمة الخطوات التي كتبتها مكتملة ؟ راجع قائمة الخطوات التي كتبتها وأضف إليها أو صحح كل ما كتبته بطريقة مختلفة عند تكوين الإنشاء الهندسي.
[راجع عمل الطلاب.]

- كرر الخطوات أعلاه لإنشاء منصّف زاوية.

مثال 5 استعمال الإنشاءات الهندسية


تطبيق

مثال 5 استعمال الإنشاءات الهندسية

يريد نحّات وضع منحوتته الجديدة في رواق المتحف بحيث تحاذي منتصف نافذة الواجهة ومنتصف المدخل في الوقت نفسه. أين ينبغي وضع المنحوتة ؟

ضع: إذا تمت محاذاة المنحوتة مع منتصف نافذة الواجهة، فستقع على منصف زاوية نافذة الواجهة. وإذا تمت محاذاتها مع منتصف المدخل، فستقع على المنصف العمودي للمدخل.

احسب: أنشئ منصف زاوية نافذة الواجهة والمنصف العمودي للمدخل.

فسّر: إذن، ينبغي وضع المنحوتة عند نقطة تقاطع منصف زاوية نافذة الواجهة والمنصف العمودي لمدخل المتحف.

حاول أن تحلّ! 5. أين ينبغي وضع المنحوتة إذا أراد النحّات محاذاتها مع منتصف مدخل المتحف ومنتصف شباك التذاكر ؟

102 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

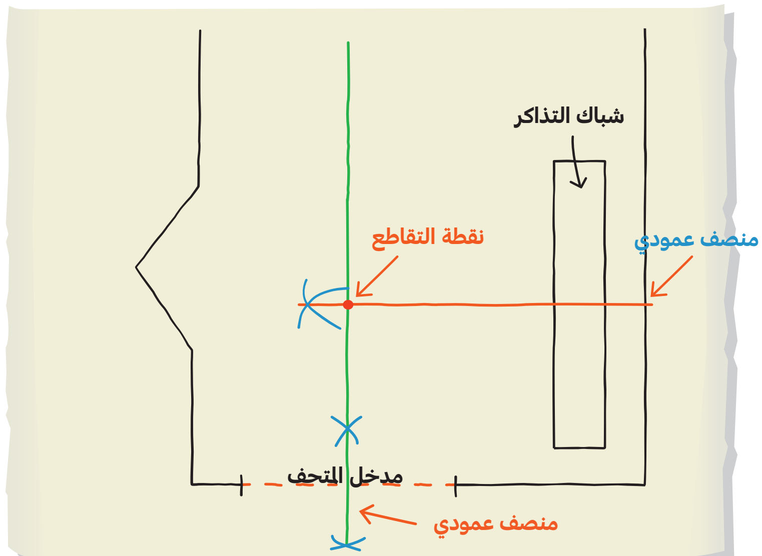
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: باعتقادك، ما المقصود بالمحاذاة عند المنتصف ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: المحاذاة عند المنتصف لشكلين هي عندما يحاذي منتصف الشكل الأول منتصف الشكل الآخر.]

س: هل يمكنك إنشاء المنصّف العمودي لفتحة نافذة الواجهة بدلًا من إنشاء منصّف الزاوية المتكوِّنة من النافذتين ؟ وضّح إجابتك.
[نعم؛ نموذج إجابة: سيقع المنصّف العمودي لفتحة نافذة الواجهة على نفس الخط مع منصّف زاوية الواجهة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. يجب وضع المنحوتة على نقطة تقاطع المنصّف العمودي لمدخل المتحف والمنصّف العمودي لشباك التذاكر.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تنوي تحديد الموقع المطلوب للمنحوتة ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يجب أن تبقى المنحوتة موجودة على المنصّف العمودي لمدخل المتحف، ولكن يجب أن تكون أيضًا على المنصّف العمودي لشباك التذاكر.]

س: لو كان لمخطط رواق المتحف مقياس يبين القياسات بالأقدام، كيف يمكنك قياس المسافة بين المنحوتة ونافذة الواجهة ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اضبط الفرجار للمسافة بين المنحوتة والنافذة، ثم قارن ضبط الفرجار للمقياس على المخطط.]

استعمل مع **الأمثلة 3 و 4 و 5**

عادات التفكير

ابحث عن العلاقات ما وجه الشبه بين إنشاء منصّف قطعة مستقيمة ومنصّف زاوية ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلا الإنشاءين يتطلب إيجاد نقطتين تبعدان المسافة نفسها عن نقطة معطاة للتمكن من تحديد المستقيم المطلوب.]

ملخص المفهوم الإنشاءات الهندسية

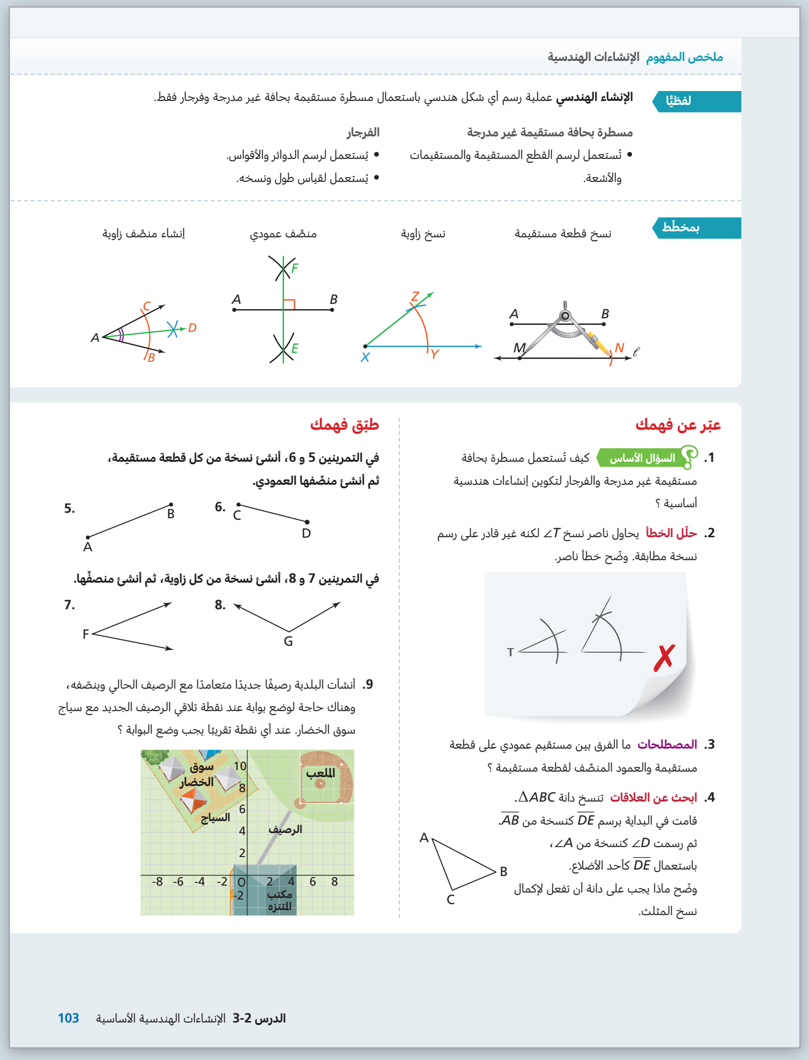
س: ما هي الإنشاءات الهندسية ؟
[تتم عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.]

س: ما الهدف من استعمال المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة في الإنشاءات ؟ وما الهدف من استعمال الفرجار؟
[تستعمل المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة لرسم المستقيمات والقطع المستقيمة والأشعة. يستعمل الفرجار للقياس ولرسم الدوائر ولتعيين النقاط.]

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمارين من 5 إلى 8 في حال كانت إنشاءات الطلاب الهندسية غير دقيقة، ذكرهم بضرورة الانتباه لعدم تحريك رأس الفرجار خلال عملية الإنشاء. اطلب منهم التحقق من أن الفرجارات لديهم لا تنزلق، واطلب منهم المحاولة مرة أخرى.


ملخص المفهوم الإنشاءات الهندسية

لفظيًا **الإنشاء الهندسي** عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة
- تُستعمل لرسم القطع المستقيمة والمستقيمات والأشعة.

الفرجار
- يُستعمل لرسم الدوائر والأقواس.
- يُستعمل لقياس طول ونسخه.

بمخطط: نسخ قطعة مستقيمة، نسخ زاوية، منصّف عمودي، إنشاء منصّف زاوية

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟
2. حلل الخطأ يحاول ناصر نسخ $\angle T$ لكنه غير قادر على رسم نسخة مطابقة. وضّح خطأ ناصر.
3. المصطلحات ما الفرق بين مستقيم عمودي على قطعة مستقيمة والعمود المنصّف لقطعة مستقيمة ؟
4. ابحث عن العلاقات تنسخ دانة $\triangle ABC$. قامت في البداية برسم $\overline{DE}$ كنسخة من $\overline{AB}$. ثم رسمت $\angle D$ كنسخة من $\angle A$، باستعمال $\overline{DE}$ كأحد الأضلاع. وضّح ماذا يجب على دانة أن تفعل لإكمال نسخ المثلث.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أنشئ نسخة من كل قطعة مستقيمة، ثم أنشئ منصّفها العمودي.

في التمرينين 7 و 8، أنشئ نسخة من كل زاوية، ثم أنشئ منصّفها.

9. أنشأت البلدية رصيفًا جديدًا متعامدًا مع الرصيف الحالي وينصّفه، وهناك حاجة لوضع بوابة عند نقطة تلاقي الرصيف الجديد مع سياج سوق الخضار. عند أي نقطة تقريبًا يجب وضع البوابة ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 103

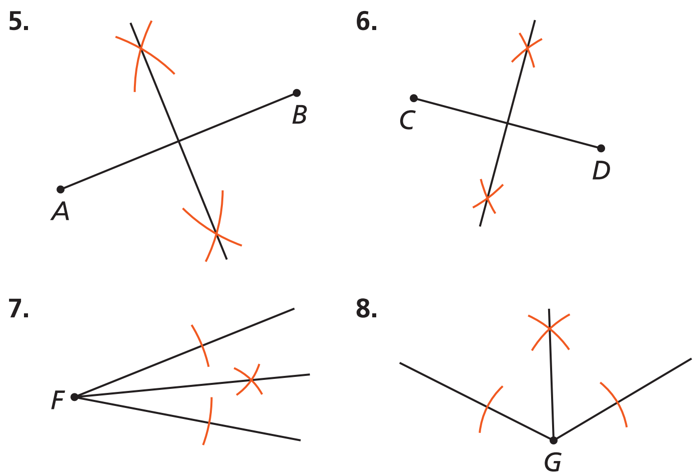
الإجابات

1. تستعمل المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة لرسم المستقيمات والقطع المستقيمة. يستعمل الفرجار لرسم الأقواس وقياس المسافات وتعيين الأطوال المتطابقة. باستعمال هاتين الأداتين، يمكنك نسخ وتنصيف الزوايا والقطع المستقيمة.

2. لم يستعمل ناصر الفرجار لقياس المسافة بين نقطة تقاطع القوس مع أحد ضلعي الزاوية T ونقطة تقاطعها مع الضلع الآخر.

3. يمكن لمستقيم عمودي على قطعة مستقيمة أن يقطعها عند أية نقطة عليها. يقطع المنصّف العمودي القطعة المستقيمة عند النقطة التي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.

4. عليها أن تنسخ $\overline{AC}$ باستعمال D كأحد الطرفين واستعمال ضلع $\angle D$ غير $\overline{DE}$. ثم تقوم بتسمية النقطة الأخرى F، لتصل بين E و F.



9. عند النقطة $(-2 , 6)$ تقريبًا.

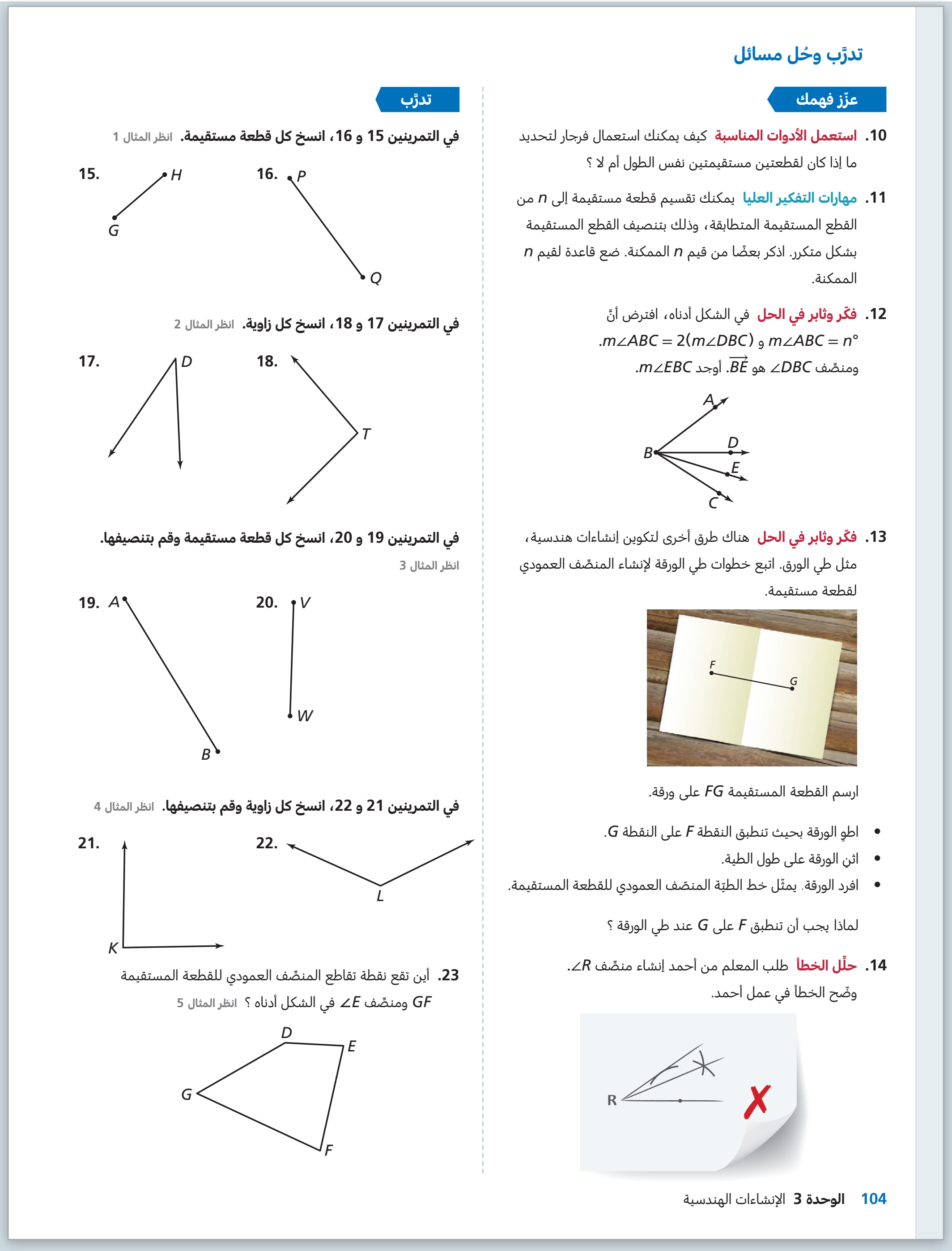
تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-19, 21-25	10-14, 16-29

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 16	1
	10	2
2	17, 18	1
3	19, 20	1
	28	2
	11, 25	3
4	21, 22	1
	27	2
	12, 14	3
5	23, 26	2
	13, 24	3
	29	4



تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

.10 **استعمل الأدوات المناسبة** كيف يمكنك استعمال فرجار لتحديد ما إذا كان لقطعتين مستقيمتين نفس الطول أم لا ؟

.11 **مهارات التفكير العليا** يمكنك تقسيم قطعة مستقيمة إلى n من القطع المستقيمة المتطابقة، وذلك بتنصيف القطع المستقيمة بشكل متكرر. اذكر بعضًا من قيم n الممكنة. ضع قاعدة لقيم n الممكنة.

.12 **فكّر وثابر في الحل** في الشكل أدناه، افترض أنّ $m\angle ABC = n°$ و $m\angle ABC = 2(m\angle DBC)$. ومنصّف $\angle DBC$ هو $\overrightarrow{BE}$. أوجد $m\angle EBC$.

.13 **فكّر وثابر في الحل** هناك طرق أخرى لتكوين إنشاءات هندسية، مثل طي الورق. اتبع خطوات طي الورقة لإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.

ارسم القطعة المستقيمة FG على ورقة.

- اطوِ الورقة بحيث تنطبق النقطة F على النقطة G.
- اثنِ الورقة على طول الطية.
- افرد الورقة. يمثّل خط الطيّة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة.

لماذا يجب أن تنطبق F على G عند طي الورقة ؟

.14 **حلِّل الخطأ** طلب المعلم من أحمد إنشاء منصِّف $\angle R$. وضّح الخطأ في عمل أحمد.

تدرّب

في التمرينين 15 و 16، انسخ كل قطعة مستقيمة. انظر المثال 1

في التمرينين 17 و 18، انسخ كل زاوية. انظر المثال 2

في التمرينين 19 و 20، انسخ كل قطعة مستقيمة وقم بتنصيفها. انظر المثال 3

في التمرينين 21 و 22، انسخ كل زاوية وقم بتنصيفها. انظر المثال 4

.23 أين تقع نقطة تقاطع المنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة GF ومنصِّف $\angle E$ في الشكل أدناه ؟ انظر المثال 5

104 **الوحدة 3** الإنشاءات الهندسية

الإجابات

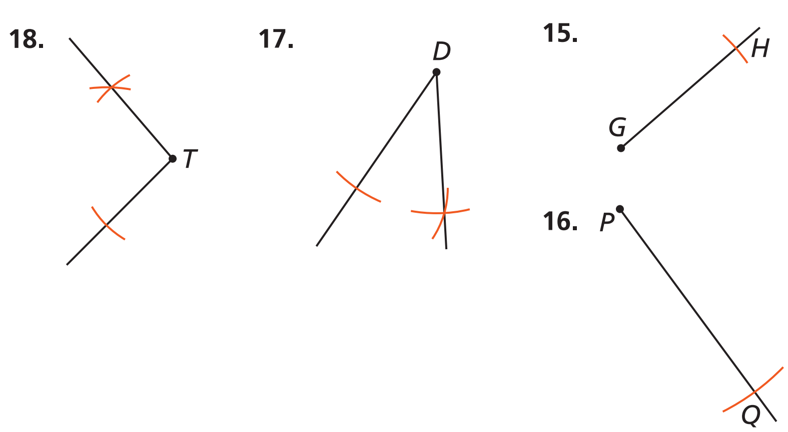
.10 افتح الفرجار بطول إحدى القطعتين المستقيمتين. ضع سن الفرجار، دون تغيير ضبطه، عند أحد طرفي القطعة المستقيمة الثانية وتحقق مما إذا كان قلم الفرجار يرسم قوسا يمر بالطرف الآخر للقطعة المستقيمة.

.11 نموذج إجابة: 2, 4, 8, 16؛ قوى العدد 2

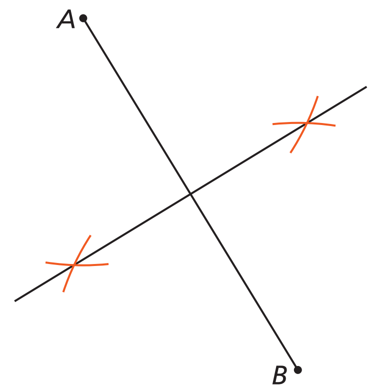
12. $\frac{n}{4}$

.13 راجع عمل الطلاب. عند محاذاة F و G، يجب أن يكون للقطعة المستقيمة من F إلى المكان حيث يقطع خط طي الورقة القطعة المستقيمة نفس طول القطعة المستقيمة من G إلى المكان حيث يقطع خط طي الورقة القطعة المستقيمة.
عند المحاذاة، يجب أن يكون خط الطي متعامدًا مع القطعة المستقيمة.

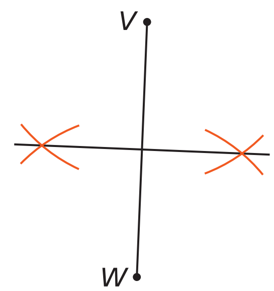
.14 رسم أحمد قوسا من أحد ضلعي الزاوية إلى الضلع الآخر. كان يجب عليه رسم قوس حول الزاوية من R واستعمال نقطتي تقاطع هذا القوس مع ضلعي الزاوية كمركزين للقوسين اللذين سيرسمهما ليتقاطعا عند النقطة التي تستعمل مع النقطة R لرسم منصّف الزاوية.



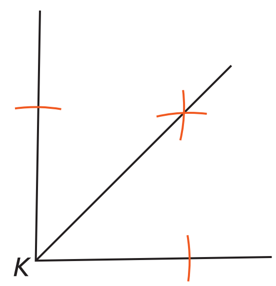
19.



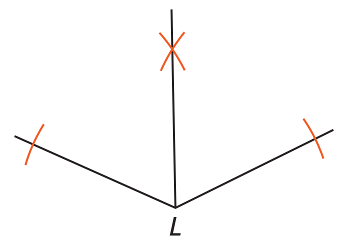
20.



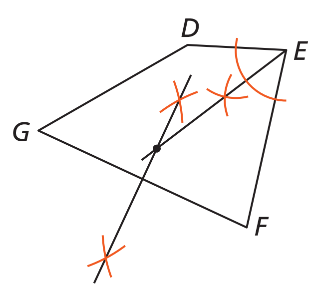
21.



22.

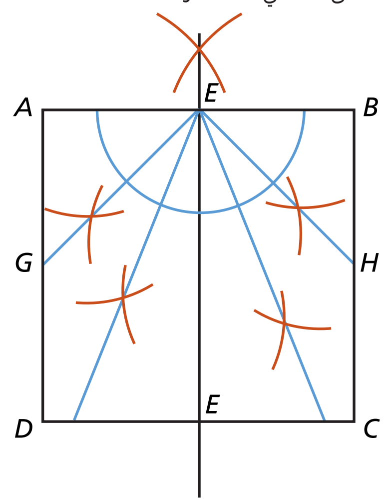


23.



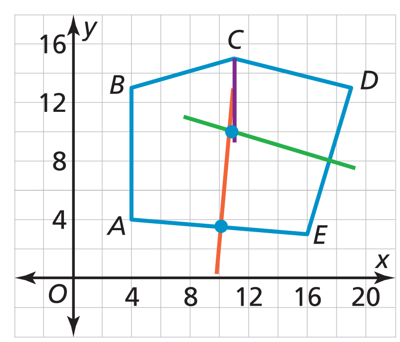
الإجابات

.24 أنشئ المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$. لتكن E نقطة منتصف $\overline{AB}$ و F نقطة تقاطع المنصّف العمودي و $\overline{DC}$. أنشئ منصّفي $\angle AEF$ و $\angle BEF$. لتكن G و H النقطتين حيث يتقاطع منصّفا الزاويتين مع ضلعين من أضلاع المربع. أنشئ منصّفي $\angle GEF$ و $\angle HEF$.



.25 العرض 22.5 m والطول 30 m، المساحة $675 m^2$؛ يمثل (x) العرض ويمثل $(1.5x)$ الطول. $5x = 300$، أي $x = 60$. بعدا الصالة الرياضية هما 60 m في 90 m، تم تنصيف العرض، أي أن طول كل قسم هو 30 m، تم تنصيف الطول للحصول على 45 m، ثم تنصيفه مرة أخرى للحصول على 22.5 m

.26 (10 , 11) تقريبًا.

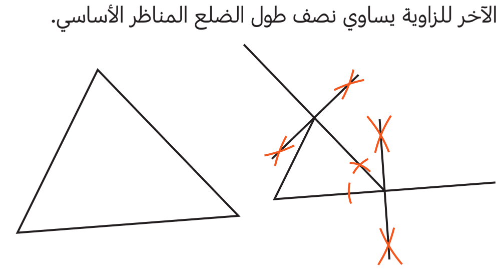


27. $m\angle NPM = 2(m\angle QPM)$

28. C

.29 **الجزء A** نموذج إجابة:

الجزء B راجع عمل الطلاب. نصّف ضلعًا أصليًا. بعدها انسخ قطعة مستقيمة طولها نصف الطول المعطى. بعد ذلك، انسخ زاوية مجاورة. ثم تأكد من أن الضلع الآخر للزاوية يساوي نصف طول الضلع المناظر الأساسي.



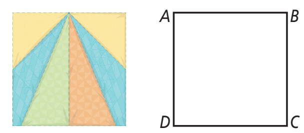
كرر حتى يتم نسخ كل الأضلاع والزوايا.

الجزء C انسخ قطعة مستقيمة طولها مساوٍ لطول أحد أضلاع المثلث. ارسم مستقيمًا يمر بالقطعة المستقيمة المنسوخة، ثم انسخ القطعة المستقيمة مرة أخرى بحيث يكون أحد طرفي القطعة الجديدة طرفًا للقطعة المستقيمة القديمة. انسخ زاوية مجاورة. ثم انسخ الزاوية المجاورة الأخرى. عيّن نقطة تقاطع ضلعي الزاويتين.

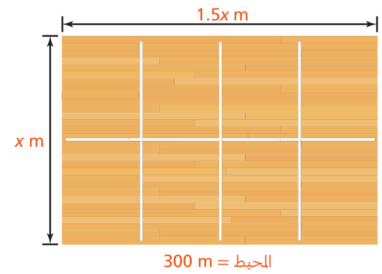
تدرّب وحُل مسائل

طبّق

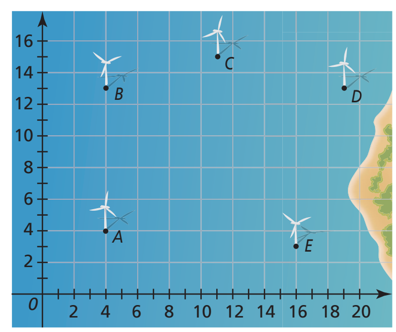
.24 **تواصل بدقة** اللحاف مكون من قطعة مربعة مصممة كما في الشكل الموضح أدناه. يمكن إنشاء التصميم في المربع باستعمال الأعمدة المنصِّفة ومنصِّفات الزوايا فقط. اكتب تعليمات لإنشاء النمط في المربع $ABCD$. قد تجد أنه من المفيد تحديد بعض النقاط الإضافية.



.25 **روابط في الرياضيات** قُسّمت الصالة الرياضية في إحدى المدارس لإقامة معرض فني عن طريق تنصيف عرضها وطولها. ثم نُصِّف كل من نصفي طولها لتكوين 8 أقسام. ما أبعاد ومساحة كل قسم ؟



.26 **نمذج** يريد مهندس وضع توربين رياح سادس بالقرب من تقاطعات منصِّف $\angle BCD$ مع المنصِّفين العموديين للقطعتين المستقيمتين AE و ED. ما الموقع الممكن للتوربين السادس ؟



تدرّب على اختبار

.27 منصِّف $\angle NPM$ هو $\overrightarrow{PQ}$. اكتب معادلة تصف العلاقة بين $m\angle NPM$ و $m\angle QPM$.

.28 **اختبار SAT/ACT** المنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة DC هو $\overline{AB}$، والمنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة AB هو $\overline{DC}$. تتقاطع $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ عند النقطة E. أي المعادلات أدناه صحيحة ؟

Ⓐ $AB = CD$

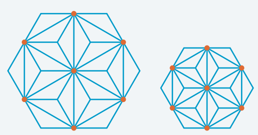
Ⓑ $CE = CD$

Ⓒ $DE = CE$

Ⓓ $AE = DE$

Ⓔ $EB = CD$

.29 **مهمة أدائية** يمكن أن يكون تصغير الصور أو تكبيرها مفيدًا عندما تحتاج إلى نسخة أصغر أو أكبر لصورة أو لتمثيل بياني لتقرير ما أو لملصق.



الجزء A استعمل فرجارًا ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم مضلع له 3 أضلاع على الأقل.

الجزء B اصنع نسخة مصغَّرة للشكل طول كل ضلع فيها يساوي نصف طول الضلع المناظر له في الشكل الأصلي.

أولًا، حدِّد أحد الأضلاع، ونصِّفه، ثم انسخ أحد النصفين.

ثم انسخ الزوايا المتجاورة. كرِّر العملية إلى أن تحصل على نسخة مصغَّرة من الشكل.

الجزء C فكِّر في كيفية مضاعفة طول قطعة مستقيمة. اصنع نسخة مكبَّرة للشكل طول كل ضلع فيها يساوي ضعف طول الضلع المناظر له في الشكل الأصلي. صِف كيف أنشأت الشكل المكبَّر.

الخطوة 4 التقويم والتمايز

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 3-3
نقطة المنتصف والمسافة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ استعمال قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

✔ استعمال قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

الفهم الأساس

يستعمل قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ويستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي. يمكن تعديل قانون نقطة المنتصف ليُستعمل في تقسيم قطعة مستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين باستعمال أي نسبة من الأطوال.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- نسخ قطع مستقيمة باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار.
- إنشاء منصفات عمودية لإيجاد نقاط منتصف قطع مستقيمة.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إيجاد نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتين.
- استعمال أطوال ونقاط منتصف قطع مستقيمة لحل المسائل.
- تقسيم قطع مستقيمة بنسبة معلومة لإيجاد إحداثيي نقطة تقع بين نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.

لاحقًا في هذا الصف، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال قانون نقطة المنتصف وقانون المسافة بين نقطتين لوصف تحويلات هندسية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يربط الطلاب المعرفة السابقة حول نظرية فيثاغورس لإنشاء قانوني المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف.
- يطبق الطلاب قوانين لإيجاد المسافات بين النقاط وتعيين أي جزء من المسافة على القطعة المستقيمة.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **نظرية فيثاغورس** | *Pythagorean Theorem*

المصطلحات الجديدة

- **نقطة المنتصف** | *midpoint*

نشاط المصطلحات

راجع نظرية فيثاغورس للطلاب. استنبط، إن أمكن، إجابة بأن اسم النظرية يعود إلى رياضي وفيلسوف يوناني. اطلب من أحد الطلاب رسم مثلث قائم الزاوية على السبورة وتسمية الوتر والساقين. ثم تسمية طولي الساقين a و b وطول الوتر c.
بعدها، اطلب من الطلاب كتابة قاعدة فيثاغورس، ووصف كيفية إيجاد طول الوتر بمعلومية إحداثيات نقطتي طرفيه.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.4 يوجد بمعلومية إحداثيات النقطتين A و B:

- طول القطعة المستقيمة AB.
- إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة AB.
- إحداثيا النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة بنسبة معلومة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يمثل الطلاب سيناريوهات من واقع الحياة باستعمال نقاط في المستوى الإحداثي كمواقع.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن علاقات المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي ويستعملونها في حل المسائل.

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يعيّن الطلاب نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي، وذلك يساعدهم على إنشاء قانوني المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف في هذا الدرس بشكل منهجي.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: كيف يمكن لهدى إيجاد النقطة الصحيحة لتعليق الصورة باستعمال شريط قياس ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : ضع إشارة قريبة من وسط الحائط. أوجد القياس بين هذه الإشارة وإحدى الزاويتين. قس نفس المسافة من الزاوية الثانية وضع إشارة ثانية. ضع الصورة بين الإشارتين.]

س: كيف تجد نقطة موجودة بالضبط بين نقطتين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : احسب مسافات متساوية من النقطتين إلى الأعلى وإلى الأسفل، ومن النقطتين إلى اليمين وإلى اليسار على مربعات الشبكة.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل يمكنك إيجاد موقع المصباح عبر إيجاد الإحداثيين x و y بطريقة منفصلة ؟

[نعم، يمكنك استعمال شبكة المربعات لإيجاد الإحداثي الذي يقع في منتصف المسافة الأفقية بين النقطتين C و D والإحداثي الذي يقع في منتصف المسافة الرأسية بين النقطتين C و D.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: أين يمكنك تعليق مصباح في السقف بحيث يكون في مركز الغرفة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عند $(6.5, 5.25)$؛ بإهمال زاوية الغرفة يجب أن يوضع المصباح بين الحائطين الأيسر والأيمن، بحيث يكون الإحداثي x مساويًا للعدد 6.5 وبين الحائطين الأمامي والخلفي، بحيث يكون الإحداثي y مساويًا للعدد 5.25]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: أوجد متوسط إحداثيي x للنقطتين A و B. كيف تقارن ذلك مع الإحداثي x للموقع الذي يجب تعليق الصورة فيه ؟

[له نفس الإحداثي x.]

س: أوجد متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y للنقطتين C و D. كيف تقارن ذلك مع إحداثيي الموقع الذي يجب وضع المصباح فيه ؟

[له نفس الإحداثيات.]

استعمل مع **نمذج وناقش**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة ما الأدوات التي استعملتها لمساعدتك على الإجابة عن الأسئلة ؟ ما المفيد من استعمال تلك الأدوات ؟

[شبكة الإحداثيات؛ كانت مفيدة لأنك تستطيع عد مربعات الشبكة لإيجاد الأطوال ونقاط المنتصف.]

كتاب الطالب، صفحة 106


3-3
نقطة المنتصف والمسافة
Midpoint and Distance

أستطيع... استعمال قانون نقطة المنتصف وقانون المسافة بين نقطتين لحل المسائل.

معيار الدرس
9.4.4

المصطلحات
• نقطة المنتصف midpoint

نمذج وناقش

تريد هدى إعادة ترتيب غرفة المعيشة في منزلها وترسم مخططًا لأرضية الغرفة ليساعدها على معرفة أماكن الأشياء.

A. تريد هدى تعليق صورة في وسط الجدار الخلفي. كيف يمكنها إيجاد النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين A و B ؟

B. تواصل بدقة تريد هدى وضع مصباح في منتصف المسافة بين الكرسيين الواقعين عند النقطتين C و D. كيف يمكنك إيجاد النقطة التي يجب وضع المصباح فيها ؟

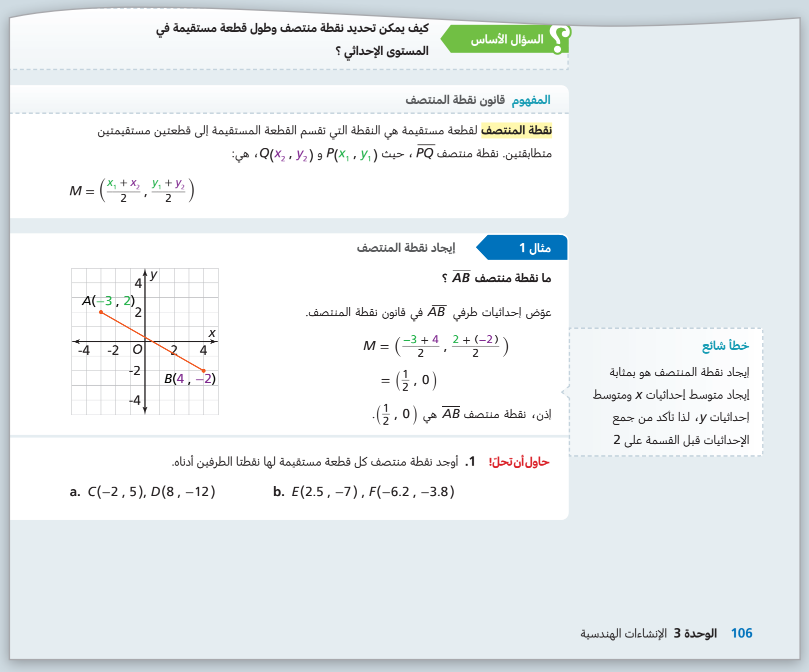
السؤال الأساس كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. عددت المربعات بين النقطة A والنقطة B، ثم قسمت عدد المربعات على 2، وأضفته إلى الإحداثي x للنقطة A. أي إن نقطة المنتصف هي $(6.5 , 10)$.

B. رسمت قطعة مستقيمة بين النقطة C والنقطة D وحددت منتصفها. ثم وجدت الإحداثي الذي يقع أفقيًا في الوسط بين C و D على الشبكة والإحداثي الذي يقع رأسيًا في المنتصف بين C و D على الشبكة. أي إن نقطة المنتصف هي $(10 , 7)$

تقديم السؤال الأساس


السؤال الأساس كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

المفهوم قانون نقطة المنتصف

نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة هي النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين. نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، حيث $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$، هي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 1 إيجاد نقطة المنتصف

ما نقطة منتصف $\overline{AB}$ ؟

عوّض إحداثيات طرفي $\overline{AB}$ في قانون نقطة المنتصف.

$$M = \left(\frac{-3 + 4}{2} , \frac{2 + (-2)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} , 0\right)$$

إذن، نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $\left(\frac{1}{2} , 0\right)$.

خطأ شائع

إيجاد نقطة المنتصف هو بمثابة إيجاد متوسط إحداثيات x ومتوسط إحداثيات y، لذا تأكد من جمع الإحداثيات قبل القسمة على 2

حاول أن تحلّ! **1.** أوجد نقطة منتصف كل قطعة مستقيمة لها نقطتا الطرفين أدناه.

a. $C(-2 , 5), D(8 , -12)$ **b.** $E(2.5 , -7) , F(-6.2 , -3.8)$

106 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

يتعلم الطلاب تعريف نقطة المنتصف. يفهم الطلاب أن أطوال ونقاط منتصف القطع المستقيمة هي مفاهيم مهمة في الهندسة وتستعمل لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 1 إيجاد نقطة المنتصف

طرح أسئلة هادفة

س: في قانون نقطة المنتصف، علامَ تدل الأرقام المستعملة في الرموز السفلية ؟

[تدل الأرقام السفلية الموضوعة على الرموز في القانون على ما إذا كان الإحداثي يمثل إحداثي النقطة الأولى (P) أو النقطة الثانية (Q).]

س: في قانون نقطة المنتصف، هل يهم أي من النقطتين A أو B يتم اختيارها واعتبارها النقطة الأولى ؟

[كلّا، للقطعة المستقيمة نفس الطول بغض النظر عن نقطة الطرف المختار للنقطة الأولى، أي إن القانون دائمًا يعطي نفس النتيجة بغض النظر عن كيفية اختيار النقطتين.]

س: تعلمت سابقًا كيفية إيجاد الوسط الحسابي لمجموعة أعداد. ما العلاقة بين نقطة المنتصف والوسط الحسابي ؟

[إحداثيا نقطة المنتصف هما الوسط الحسابي لإحداثيي نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. $(3, -3.5)$ **b.** $(-1.85 , -5.4)$

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 2**)

الكتابة مستوى 2 اطلب من الطلاب كتابة الاختلاف بين المسافة الرأسية والمسافة الأفقية والمسافة كما يرونها في هذا المثال.

س: ما الإحداثيات المستعملة لحساب المسافة الرأسية ؟ لماذا ؟

[يُستعمل في المسافة الرأسية الإحداثي y. ذلك لأن الإحداثيين y يستعملان في قياس المسافات من المحور x إلى الأعلى وإلى الأسفل، أي المسافة الموجودة في الاتجاه الرأسي.]

س: لماذا تم استعمال المصطلحين أفقي ورأسي ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يوضح المصطلحان الإحداثي الذي يجب استعماله وساق مثلث قائم الزاوية الذي يجب استعماله.]

التحدث مستوى 3 بعد قراءة المثال، اطلب من الطلاب مشاركة بعض التعريفات لكلمة "تقسيم". يمكن للطلاب الدفاع عن تعريفاتهم باستعمال مفاتيح من المثال. إذا لزم الأمر، اطلب منهم تعيين النقطة $(9 , 5)$ لمساعدتهم على توضيح فهمهم للموضوع.

س: ما المقصود بالعبارة "تقسيم قطعة مستقيمة" ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تعني تجزئة قطعة مستقيمة إلى أجزاء.]

س: في المثال، ما الذي ساعدك على تعريف التقسيم ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : رؤية أن النقطة $(9 , 5)$ هي جزء من القطعة المستقيمة.]

مثال 2 تقسيم قطعة مستقيمة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا من المهم جمع كسر المسافة الرأسية والمسافة الأفقية إلى إحداثيي أحد الطرفين دون الآخر ؟

[لو جمعت المسافتين إلى B، لوجدت عندها النقطة التي تقع عند المسافة المعطاة من B إلى A وليس العكس.]

س: فكّر في العلاقة بين خطوط الأعداد والمحورين x و y. كيف يمكنك الربط بين تقسيم قطعة مستقيمة على خط أعداد أفقي أو رأسي وتقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي مبني على تقسيم مزدوج على خط أفقي وخط رأسي.]

س: لو طُلب منك إيجاد النقطة التي تقع عند مسافة معيّنة من B على القطعة المستقيمة AB، هل كنت ستجمع أم تطرح كسر المسافة الرأسية والمسافة الأفقية ؟

[بما أن اتجاه تقسيم القطعة المستقيمة من B إلى A، تعتبر B نقطة البداية. بما أن كلًا من إحداثيَي B أكبر من الإحداثي المناظر له للنقطة A فإننا نطرح المسافة الأفقية من الإحداثي x للنقطة B ونطرح المسافة الرأسية من الإحداثي y للنقطة B.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $(10 , 6.5)$

b. $(5 , -1)$

المسافة الأفقية من B إلى A هي 8

المسافة الرأسية من B إلى A هي 12

بما أن إحداثيَي نقطة البداية B أكبر من إحداثيَي نقطة النهاية A

$x_A < x_B$ و $y_A < y_B$ فإن إحداثيَي النقطة التي تقع على $\frac{4}{5}$ المسافة من B هما:

$(x_B - 8 , y_B - 12)$ أي $(5 , -1)$

مثال 3 اشتقاق قانون المسافة بين نقطتين

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا استعمل المثال النقطتين P و Q دون تحديد إحداثياتهما ؟

[عند استعمال المتغيرات فقط، يمكن إيجاد قانون للمسافة بين نقطتين بدلًا من إيجاد قيمة محددة للمسافة.]

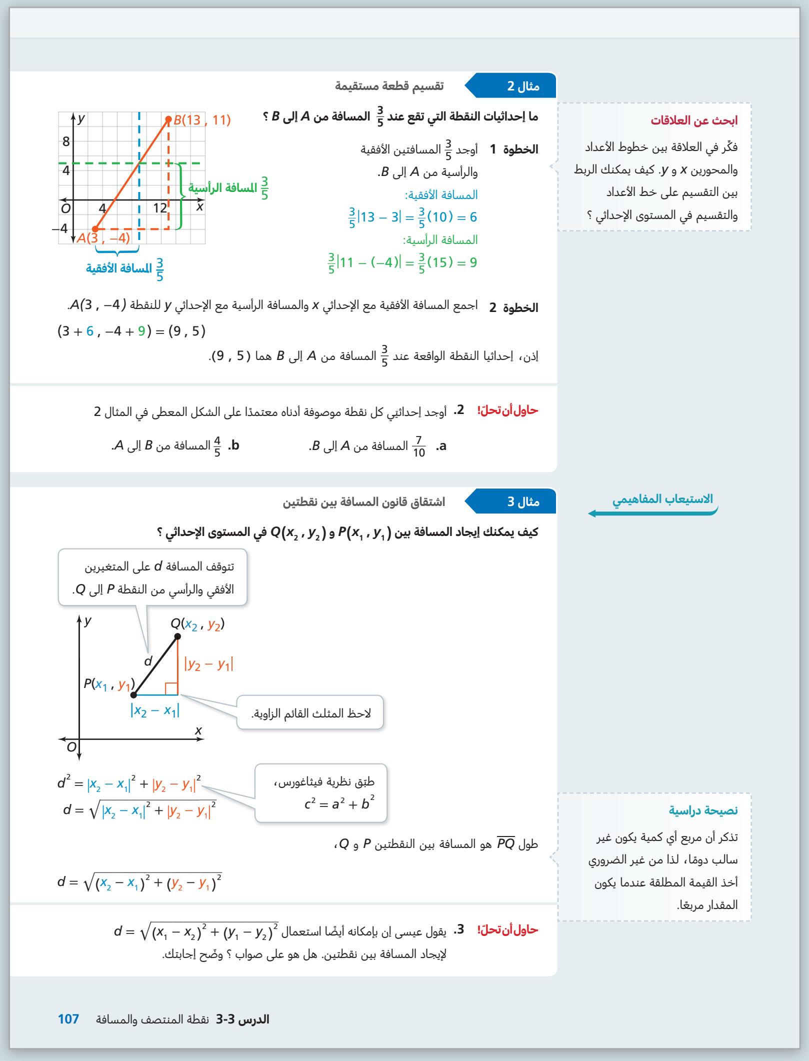
حاول أن تحلّ! الإجابات

3. نعم؛ قد تتنوع الإجابات.

4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: لوجود مربع الفرق بين الإحداثيات، أي إنه لا يهم الترتيب المعتمد في الطرح.

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 3 قد يحاول الطلاب إيجاد الفرق بين إحداثيي كل نقطة بدلًا من الفرق بين إحداثيي x والفرق بين إحداثيي y. أخبر الطلاب أنه عند إيجاد $|x_2 - x_1|$، فإنهم يجدون المسافة الأفقية، وعند إيجاد $|y_2 - y_1|$، فإنهم يجدون المسافة الرأسية.



مثال 2 تقسيم قطعة مستقيمة

ما إحداثيات النقطة التي تقع عند $\frac{3}{5}$ المسافة من A إلى B ؟

الخطوة 1 أوجد $\frac{3}{5}$ المسافتين الأفقية والرأسية من A إلى B.

المسافة الأفقية:

$\frac{3}{5}|13 - 3| = \frac{3}{5}(10) = 6$

المسافة الرأسية:

$\frac{3}{5}|11 - (-4)| = \frac{3}{5}(15) = 9$

الخطوة 2 اجمع المسافة الأفقية مع الإحداثي x والمسافة الرأسية مع الإحداثي y للنقطة $A(3 , -4)$.

$(3 + 6 , -4 + 9) = (9 , 5)$

إذن، إحداثيا النقطة الواقعة عند $\frac{3}{5}$ المسافة من A إلى B هما $(9 , 5)$.

ابحث عن العلاقات

فكّر في العلاقة بين خطوط الأعداد والمحورين x و y. كيف يمكنك الربط بين التقسيم على خط الأعداد والتقسيم في المستوى الإحداثي ؟

حاول أن تحلّ! **2.** أوجد إحداثيَي كل نقطة موصوفة أدناه معتمدًا على الشكل المعطى في المثال 2

a. $\frac{7}{10}$ المسافة من A إلى B.　**b.** $\frac{4}{5}$ المسافة من B إلى A.

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 3 اشتقاق قانون المسافة بين نقطتين

كيف يمكنك إيجاد المسافة بين $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ في المستوى الإحداثي ؟

$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$

طول $\overline{PQ}$ هو المسافة بين النقطتين P و Q،

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نصيحة دراسية

تذكر أن مربع أي كمية يكون غير سالب دومًا، لذا من غير الضروري أخذ القيمة المطلقة عندما يكون المقدار مربعًا.

حاول أن تحلّ! **3.** يقول عيسى إن بإمكانه أيضًا استعمال $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ لإيجاد المسافة بين نقطتين. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

107 الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

فكّر وثابر في الحل هل يوجد قانون رياضي لإيجاد إحداثيات النقطة R التي تقع عند الجزء الذي يمثل قيمة الكسر q من المسافة بين النقطتين $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان أي من إحداثيَي نقطة البداية أصغر (أكبر) من الإحداثي المناظر له لنقطة النهاية، نجمع المسافة إلى إحداثي نقطة البداية (أو نطرحها منه).

على سبيل المثال، إذا كان المطلوب إيجاد النقطة R التي تقع عند قيمة الكسر q من المسافة PQ من Q، تكون Q نقطة البداية. وإذا كان x_2 أصغر من x_1، و y_2 أكبر من y_1، نجمع المسافة الأفقية إلى x_2، ونطرح المسافة الرأسية من y_2.]

مثال 4 إيجاد المسافة بين نقطتين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما وجه الشبه بين قانون المسافة بين نقطتين ونظرية فيثاغورس ؟
[في النظريتين، مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.]

س: المطلوب في المسألة إيجاد المسافة الكلية. كم طولًا يجب أن تحسب باستعمال قانون المسافة ؟
[2 ؛ المسافة من رامي الكرة إلى ضارب الكرة، ثم من ضارب الكرة إلى مدافع الوسط. المسافة الكلية تساوي مجموع المسافتين.]

س: هل ستكون المسافة نفسها إذا حولت وحدات الشبكة إلى أقدام قبل حساب المسافتين ؟
[نعم، يمكنك احتساب المسافة إما بالوحدات ثم تحويلها إلى أقدام، أو التحويل إلى أقدام أولًا ثم احتساب المسافة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. 100.6 قدم.

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

فكّر وثابر في الحل كيف تربط بين قانون المسافة بين نقطتين ونظرية فيثاغورس ؟

[قانون المسافة بين نقطتين يستعمل المسافتين الأفقية والرأسية بين نقطتين كطولي ساقين في مثلث قائم الزاوية.]

المفهوم قانون المسافة بين نقطتين

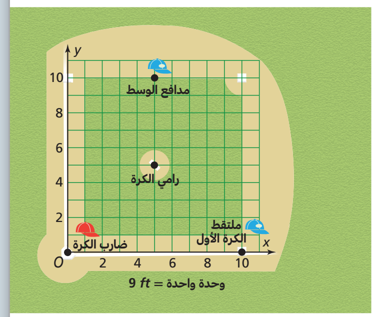
قانون المسافة d بين نقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ هو:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تطبيق

مثال 4 إيجاد المسافة بين نقطتين

قام رامي الكرة برمي كرة إلى ضارب الكرة، الذي ضربها بدوره لتصل إلى مدافع الوسط. إذا سارت الكرة في خط مستقيم بين كل منهم، ما المسافة الكلية التي قطعتها الكرة ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



صُغ ◀ مثّل رامي الكرة عند النقطة $P(5, 5)$، وضارب الكرة عند النقطة $B(0, 0)$، ومدافع الوسط عند النقطة $S(5, 10)$.

احسب ◀ استعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد كل مسافة.

استعمل قانون المسافة بين نقطتين مع النقطتين $P(5, 5)$ و $B(0, 0)$.

$$d(\text{من رامي الكرة إلى ضارب الكرة}) = \sqrt{(0-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} \approx 7.1$$

استعمل قانون المسافة بين نقطتين مع النقطتين $B(0, 0)$ و $S(5, 10)$.

$$d(\text{من ضارب الكرة إلى مدافع الوسط}) = \sqrt{(5-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} \approx 11.2$$

فسّر ◀ إذن، المسافة الكلية التي قطعتها الكرة هي $7.1 + 11.2 = 18.3$ وحدة تقريبًا، أو $(18.3)(9) = 164.7$ ft تقريبًا.

حاول أن تحلّ! **4.** ما المسافة التي يجب على مدافع الوسط أن يرمي عبرها الكرة لتصل إلى ملتقط الكرة الأول ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.

108 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب التحقق من نتائج قانون المسافة بين نقطتين بنشاط حركي.

- اطلب من الطلاب الوقوف في مساحة مفتوحة، ووضع قطعة صغيرة من الشريط اللاصق على الأرض حيث يقفون.
- وجه الطلاب للتقدم 4 خطوات إلى اليمين ووضع قطعة أخرى من الشريط على الأرض. بعدها وجه الطلاب للسير 3 خطوات إلى الأمام ووضع قطعة أخرى من الشريط على الأرض.

س: في رأيك، كم خطوة عليك سيرها للعودة إلى القطعة الأولى من الشريط ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : 5]

- اطلب من الطلاب عد خطوات العودة إلى القطعة الأولى من الشريط.

س: كيف تقارن بين عدد الخطوات والتقدير الذي قمت فيه ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تقريبًا متساويان.]

س: كيف يمكنك حساب عدد خطوات العودة ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل قانون المسافة بين نقطتين.]

- اطلب من الطلاب تكرار النشاط مع مثلث أطوال أضلاعه 5 و 12 و 13 لتأكيد القانون.

ملخص المفهوم نقطة المنتصف والمسافة

س: كيف يستعمل قانون نقطة المنتصف لتعيين نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[يجد قانون نقطة المنتصف متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y لنقطتي طرفي القطعة المستقيمة، أي نقطة المنتصف.]

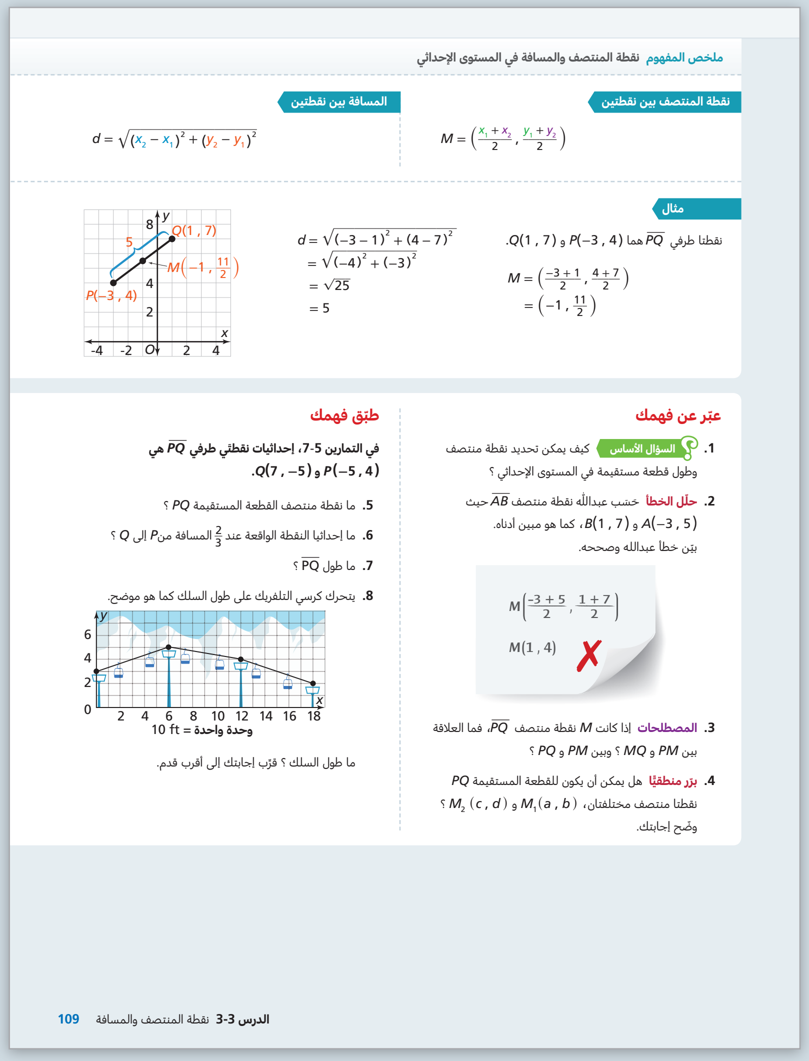
س: كيف يُستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[يتمثل قانون المسافة بين نقطتين في اعتبار المسافة الأفقية والمسافة الرأسية كطولي ساقين في مثلث قائم الزاوية، ثم يتم إيجاد طول وتره الذي يساوي المسافة المطلوبة بين النقطتين.]

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد يجد الطلاب صعوبات في تحديد نقطة الطرف التي سيضيفون إليها، أو يطرحون منها، قيمة الكسر الذي يدل على جزء من المسافتين الأفقية والرأسية. أخبر الطلاب أن "من P إلى Q" تعني أن نقطة البداية هي P فيضاف جزء المسافة إلى إحداثيي P أو يطرح منه.



ملخص المفهوم نقطة المنتصف والمسافة في المستوى الإحداثي

نقطة المنتصف بين نقطتين

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال

نقطتا طرفي $\overline{PQ}$ هما $P(-3, 4)$ و $Q(1, 7)$.

$$M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$$

$$d = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟
2. حلّل الخطأ حَسَب عبدالله نقطة منتصف $\overline{AB}$ حيث $A(-3, 5)$ و $B(1, 7)$، كما هو مبين أدناه. بيّن خطأ عبدالله وصححه.

$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$

$M(1, 4)$ ✗

3. المصطلحات إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{PQ}$، فما العلاقة بين PM و MQ ؟ وبين PM و PQ ؟
4. برّر منطقيًا هل يمكن أن يكون للقطعة المستقيمة PQ نقطتا منتصف مختلفتان، $M_1(a, b)$ و $M_2(c, d)$ ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمارين 5-7، إحداثيات نقطتي طرفي $\overline{PQ}$ هي $P(-5, 4)$ و $Q(7, -5)$.

5. ما نقطة منتصف القطعة المستقيمة PQ ؟
6. ما إحداثيا النقطة الواقعة عند $\frac{2}{3}$ المسافة من P إلى Q ؟
7. ما طول $\overline{PQ}$ ؟
8. يتحرك كرسي التلفريك على طول السلك كما هو موضح.

ما طول السلك ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب قدم.

الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة 109

الإجابات

1. يتم تحديد نقطة المنتصف عبر تطبيق قانون نقطة المنتصف على إحداثيات نقطتي طرفي القطعة المستقيمة. يتم تحديد طول قطعة مستقيمة عبر تطبيق قانون المسافة بين نقطتين على إحداثيات نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.

2. حسب عبدالله متوسط إحداثيي x و y لكل نقطة بدلًا من حساب متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y للنقطتين.

3. $PM = MQ$; $PQ = 2PM$.

4. كلا؛ إذا كان كل من (a, b) و (c, d) نقطتي منتصف، فإن $a = \frac{x_1 + x_2}{2} = c$ و $d = \frac{y_1 + y_2}{2} = b$، وبالتالي $a = c$ و $b = d$.

5. $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$$

6. $(3, -2)$

المسافة الأفقية من P إلى Q هي 8

المسافة الرأسية من P إلى Q هي 6

بما أن $x_P < x_Q$ و $y_P > y_Q$

فإن إحداثيي النقطة التي تقع على بعد $\frac{2}{3}$ المسافة من P هما: $(x_P + 8, y_P - 6)$ أي $(3, -2)$

7. 15

8. 187 ft

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-21 , 23-28	9-16 , 18-28

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	10, 17, 18 ,19	1
	11, 26	2
2	15, 16	1
	9	2
	12, 14 ,23	3
3	27	2
	13	4
4	20, 21, 22, 24, 25	3
	28	4

تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

9. **استعمل البنية** تقع النقطة K عند $\frac{1}{n}$ المسافة من النقطة $J(4 , -5)$ إلى النقطة $L(0 , -7)$.

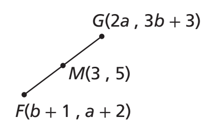
a. ما إحداثيّا K إذا كانت $n = 4$ ؟

b. ما صيغة إيجاد إحداثيي K لأي n ؟

10. صِف خطأ الطالب عند إيجاده نقطة منتصف $\overline{CD}$ حيث $C(-4 , 5)$ و $D(-1 , -4)$ وصحّح هذا الخطأ.

$$\left(\frac{-4-(-1)}{2}, \frac{5-(-4)}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

11. **روابط في الرياضيات** النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{FG}$.
هل يمكنك إيجاد قيمة a ؟ وضّح إجابتك.



12. **برّر منطقيًّا** افترض أن إحدى نقطتي طرف $\overline{PQ}$ هي $P(0 , 0)$.

a. إذا كانت $(5 , 2)$ نقطة منتصف $\overline{PQ}$، فما إحداثيا النقطة Q ؟

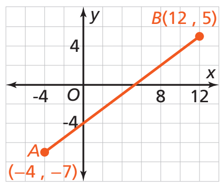
b. كيف يمكنك إيجاد Q إذا كانت النقطة $(5 , 2)$ تقع عند $\frac{1}{4}$ المسافة من P إلى Q ؟

13. **مهارات التفكير العليا** يبلغ طول $\overline{PQ}$ 17 وحدة، حيث $P(-4 , 7)$. إذا كان الإحداثيان x و y للنقطة Q أكبر من الإحداثيين x و y للنقطة P، فما إحداثيات القيم المحتملة للنقطة Q، إذا كانت هذه القيم تنتمي إلى الأعداد الصحيحة ؟ وضّح إجابتك.

14. **فكّر وثابر في الحل** افترض أن $\overline{PQ}$ لها نقطة طرف $P(a , b)$ ونقطة المنتصف $M(c , d)$. اكتب مقدارًا يمثّل PM . استعمل المقدار الذي يمثّل PM لإيجاد مقدار يمثّل PQ.

تدرّب

في التمرينين 15 و 16، أوجد إحداثيي النقطة المعطاة على $\overline{AB}$ انظر المثال 2



15. النقطة الواقعة عند $\frac{3}{10}$ المسافة من A إلى B.

16. النقطة الواقعة عند $\frac{1}{4}$ المسافة من B إلى A.

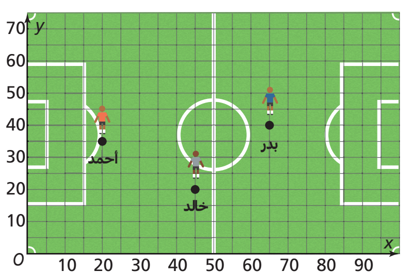
في التمارين 17-19 ، أوجد نقطة منتصف $\overline{PQ}$ انظر المثال 1

17. $P(3 , 5), Q(-2 , 13)$

18. $P(-2 , 2.5), Q(1.4 , 4)$

19. $P\left(4\frac{1}{3} , 3\frac{1}{6}\right), Q\left(-2\frac{1}{5} , 3\frac{2}{3}\right)$

في التمارين 20-22، يلعب بدر وأحمد وخالد كرة القدم. ويسجل نظام تتبع الحركة مواقعهم. يبلغ طول ضلع المربع في الشبكة 5 m انظر المثالين 3 و 4



20. أوجد المسافة بين أحمد وخالد. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

21. أيهما أقرب إلى بدر، أحمد أم خالد ؟ وضّح إجابتك.

22. تقع كرة القدم عند النقطة $(35 , 60)$. أيّ اللاعبين الثلاثة أقرب إلى الكرة ؟

110 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الإجابات

9. a. $\left(5 , -\frac{9}{2}\right)$

b. $K\left(4 - \frac{1}{n}|0-4| , -5 - \frac{1}{n}|-7+5|\right)$
$= K\left(4 - \frac{4}{n} , -5 - \frac{2}{n}\right)$

10. عند حساب إحداثيي نقطة المنتصف، لم يجمع الطالب إحداثيي x وإحداثيي y. الإجابة الصحيحة هي $M\left(-\frac{5}{2} , \frac{1}{2}\right)$ أو $M\left(\frac{-4+(-1)}{2} , \frac{5+(-4)}{2}\right)$.

11. $a = 2$. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اكتب نظام معادلات في متغيرين وأوجد قيمة a.
$\frac{a+3b+5}{2} = 5$ و $\frac{2a+b+1}{2} = 3$. إذن، $a = 2$.

12. a. $(4 , 10)$

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : أوجد النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة 4 أمثال المسافة التي تبعدها النقطة المعطاة عن نقطة الأصل، $Q(8 , 20)$.

13. $(4 , 22)$ و $(11, 15)$؛ باستعمال ثلاثية فيثاغورس 8 و 15 و 17، حيث يمثّل العدد 17 المسافة بين النقطتين P و Q ويمثل العدد 8 المسافة الأفقية و 15 المسافة الرأسية. اجمع 8 مع -4 واجمع 15 مع 7 للحصول على $(4 , 22)$، ثم بدّل 8 و 15 للحصول على $(11 , 15)$.

14. $PM = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$
$PQ = 2PM = 2\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

15. $(0.8 , -3.4)$

16. $(8 , 2)$

17. $\left(\frac{1}{2} , 9\right)$

18. $(-0.3 , 3.25)$

19. $\left(1\frac{1}{15} , 3\frac{5}{12}\right)$

20. 29.2 m

21. خالد؛ يبعد أحمد حوالي 45 مترًا ويبعد خالد حوالي 28 مترًا.

22. أحمد هو الأقرب، حيث يبعد حوالي 29.2 مترًا. بدر أبعد من أحمد، حيث يبعد حوالي 36.0 مترًا. خالد هو الأبعد، حيث يبعد حوالي 41.2 مترًا.

الإجابات

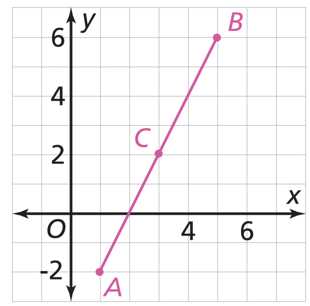
23. $\left(\frac{19}{3}, 5\right)$؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

$$(1, 9) + \frac{2}{3}\left[(9, 3) - (1, 9)\right]$$
$$= (1, 9) + \frac{2}{3}(8, -6) = \left(\frac{19}{3}, 5\right)$$

24. $29.15\ mi^2$ تقريبًا.

25. نعم؛ تساوي المسافة $\sqrt{40^2 + 44^2} \approx 59.5\ m$

26. مثّل بيانيًا $A(1, -2)$ و $B(5, 6)$ و $C(3, 2)$، كما في الشكل أدناه:



27. D

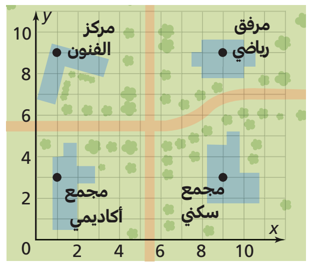
28. **الجزء A** في الشارع 3، يقطع المسار مسافة حوالي 6.71 وحدات. في الحي المركزي، يقطع المسار مسافة حوالي 5.66 وحدات. المسافة الكلية تساوي 12.37 أو 3.10 أميال.

الجزء B تقاطع الشارع 2 مع الشارع 3

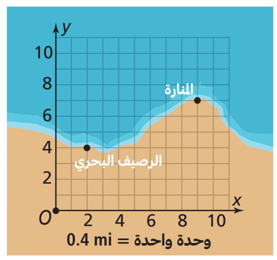
الجزء C $(8, 1)$ و $(4, 2)$.

طبّق

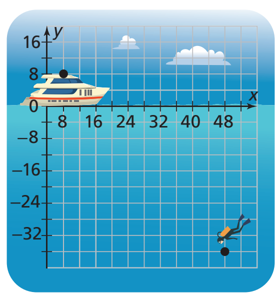
23. **نمذج** تبني إحدى الجامعات مركزًا طلابيًا جديدًا يقع عند ثلثي المسافة من مركز الفنون إلى المجمع السكني. أوجد إحداثيي المركز الجديد. وضّح إجابتك.



24. **روابط في الرياضيات** تلقي منارة حزمة دائرية من الضوء تصل إلى الرصيف البحري. ما المساحة التي يغطيها ضوء المنارة ؟



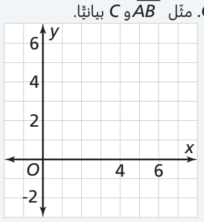
25. **فكّر وثابر في الحل** يحاول قبطان سفينة الاتصال بغواص في عمق البحر.



إذا كان المدى الأقصى لإمكانية التواصل 60 مترًا، فهل سيتمكن القبطان من الاتصال بالغواص تبعًا لموقعيهما الحاليين ؟ وضّح إجابتك.

تدرّب على اختبار

26. للقطعة المستقيمة AB نقطة نهاية $A(1, -2)$ ونقطة منتصف $C(3, 2)$. مثّل $\overline{AB}$ و C بيانيًا.



27. **اختبار SAT/ACT** للقطعة المستقيمة RS نقطة نهاية $R(6, -4)$ وطول مقداره 17 وحدة، أيٌ مما يلي لا يمكن أن يكون إحداثيي S ؟

Ⓐ $(14, 11)$

Ⓑ $(6, 13)$

Ⓒ $(-9, -12)$

Ⓓ $(23, 13)$

Ⓔ $(23, -4)$

28. **مهمة أدائية** يجب أن يبدأ وينتهي مسار موكب استعراضي عند التقاطعين المبينين على الخريطة. تشترط البلدية ألا تتجاوز المسافة الكلية للمسار 3 أميال.

المسار المقترح موضح أدناه.

الجزء A لماذا لا يحقق المسار المقترح الشرط ؟

الجزء B بافتراض أن الطرق المستعملة للمسار هي نفس هذه الطرق ونقطة النهاية هي نفسها، في أي تقاطع يمكن أن يبدأ الموكب الاستعراضي بحيث تكون المسافة الكلية أقرب ما يمكن إلى 3 mi ؟

الجزء C تريد البلدية تثبيت كاميرات مراقبة في منتصف كل طريق في مسار الموكب الاستعراضي. باستعمال إجابتك من الجزء B، ما إحداثيات مواقع هذه الكاميرات ؟

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

الدرس 3-4
الاستدلال الاستقرائي

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط وإجراء التوقعات استنادًا على بيانات.

✔ استعمال الاستدلال الاستقرائي لتقديم دليل على صحة التخمينات أو إعطاء مثال مضاد لدحضها.

الفهم الأساس

يمكن استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط، وتقديم دليل على صحة التخمينات أو لدحضها، وإجراء توقعات.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من :

- استعمال الأنماط لتحديد التسلسلات العددية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط وإجراء التوقعات.
- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتقديم دليل يثبت صحة التخمينات.
- استعمال أمثلة مضادة لدحض التخمينات.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال التبرير المنطقي لكتابة برهان وإثبات نظريات.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يستعمل الطلاب الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط في الملاحظات ويفهمون حدود وضوابط وشروط الاستدلال الاستقرائي.
- يستعمل الطلاب الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط في تطبيقات من واقع الحياة وتطبيقات رياضية وإجراء توقعات استنادًا إلى هذه الأنماط.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **متتالية** | *sequence*

المصطلحات الجديدة

- **تخمين** | *conjecture*
- **مثال مضاد** | *counterexample*
- **الاستدلال الاستقرائي** | *inductive reasoning*

نشاط المصطلحات

اكتب متتالية أعداد بسيطة على السبورة، مثل : ...,2, 4, 6, 8، راجع المصطلحين "متتالية" و"حد". اطلب من الطلاب تحديد حدود المتتالية وترقيمها. ثم اطلب منهم تقديم وصف لفظي للمتتالية. اطرح تحديًا أمام الطلاب لإيجاد قاعدة تسمح بإيجاد حد من حدود المتتالية باستعمال رقمه. كرر هذا النشاط مرة أو مرتين باستعمال متتالية أكثر صعوبة، مثل : ....,1, 4, 9, 16، أو متتالية فيبوناتشي.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على مفاهيم مرتبطة بهذا المعيار :

9.5.1 بناء تعاميم رياضية واختبارها باستخدام الاستدلال الاستقرائي أو نفي التعميم الرياضي باستخدام المثال المضاد.

معايير ممارسات الرياضيات

انقد التبريرات المنطقية للآخرين

يستعمل الطلاب سلسلة منطقية من العبارات لإثبات صحة التخمينات أو لدحضها.

ابحث عن الاتساق في التبرير المنطقي المتكرر وعبّر عنه

يحدد الطلاب العمليات الحسابية المتكررة لتحديد أنماط وقواعد للمتتاليات، ويبحثون عن قواعد عامة لتعريفها.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب متتالية مرتبطة بتقسيم مساحة دائرة باستعمال الأوتار لإيجاد نمط تمهيدًا لاستعمال الاستدلال الاستقرائي لتمييز الأنماط والمتتاليات.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: بالإضافة إلى عدد النقاط أو عدد المناطق، ما الذي يمكنك عدّه في كل شكل من المتتالية ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : قم بعدّ الأوتار المرسومة أو المناطق التي يحدها جزء من محيط الدائرة.]

س: هل تعتقد أن عدد المناطق قد يتغير بتغيير مواقع النقاط على الدائرة ؟ ماذا يحدث إذا كانت النقاط الثلاث في الشكل الثالث تكوّن مثلثًا متطابق الأضلاع ؟
[كلا؛ يبقى عدد المناطق نفسه وإحداها على شكل مثلث متطابق الأضلاع.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الذي يمكنك فعله لتنظيم بياناتك ؟ ما المعلومات التي يساعدك ذلك على جمعها ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنشاء جدول؛ حساب الفروق والنسب.]

س: هل تعتقد أن النمط الذي حددته يمكن تطبيقه على أي عدد من النقاط ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : النمط الذي حددته يمكن تطبيقه على نقطة واحدة إلى 5 نقاط؛ يجب أن يكون قابلًا للتطبيق على عدد أكبر من النقاط.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: خمّن عدد المناطق إذا كان عدد النقاط 6 نقاط. ارسم شكلًا باستعمال دائرة و 6 نقاط. هل كان تخمينك صحيحًا ؟
[كلا، قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلا. توقّعت أن يكون عدد المناطق الناتجة عن 6 نقاط هو 32 منطقة، لكن تبيّن أنها 31 منطقة فقط.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

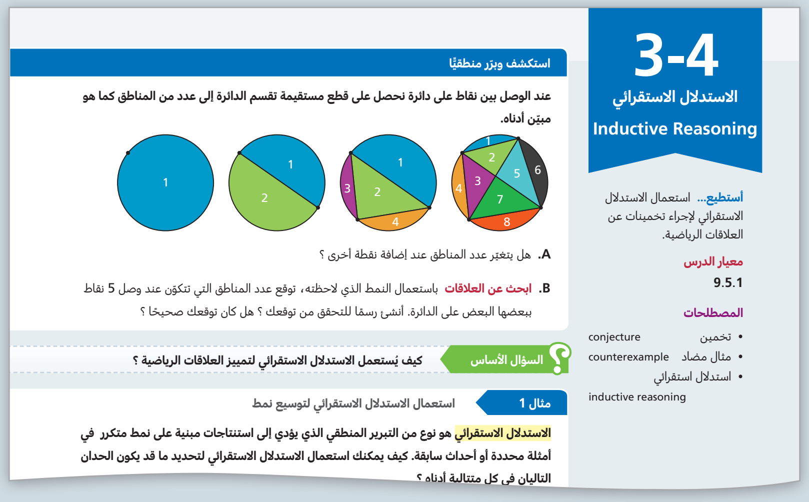
س: لماذا قد يكون من المفيد تحديد الملاحظات لنمط متتالية ؟
[يمكنك توقع البيانات التالية.]

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عمّم هل ملاحظة نمط يعدّ دائمًا إثباتًا لوجود علاقة ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كلا، النمط دليل على وجود علاقة لكنه لا يثبتها.]

كتاب الطالب، صفحة 112



3-4 الاستدلال الاستقرائي Inductive Reasoning

أستطيع... استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمينات عن العلاقات الرياضية.

معيار الدرس 9.5.1

المصطلحات
- تخمين conjecture
- مثال مضاد counterexample
- استدلال استقرائي inductive reasoning

استكشف وبرّر منطقيًّا

عند الوصل بين نقاط على دائرة نحصل على قطع مستقيمة تقسم الدائرة إلى عدد من المناطق كما هو مبيّن أدناه.

A. هل يتغيّر عدد المناطق عند إضافة نقطة أخرى ؟

B. **ابحث عن العلاقات** باستعمال النمط الذي لاحظته، توقع عدد المناطق التي تتكوّن عند وصل 5 نقاط ببعضها البعض على الدائرة. أنشئ رسمًا للتحقق من توقعك ؟ هل كان توقعك صحيحًا ؟

السؤال الأساس كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

الاستدلال الاستقرائي هو نوع من التبرير المنطقي الذي يؤدي إلى استنتاجات مبنية على نمط متكرر في أمثلة محددة أو أحداث سابقة. كيف يمكنك استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد ما قد يكون الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. يتضاعف عدد المناطق كلما أُضيفت نقطة جديدة إلى الدائرة.

B. خمّنت أن يكون عدد المناطق التي تتكوّن عند وصل 5 نقاط بعضها ببعض على الدائرة 16 منطقة، وكان تخميني صحيحًا.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب بمفهوم الاستدلال الاستقرائي. سيتعلم الطلاب أنه من خلال ملاحظة عدد من الأمثلة، قد يصبح النمط واضحًا. القاعدة التي تصف النمط، أو التخمين، تؤيدها أدلة مستقاة من الملاحظات. قواعد كهذه، على الرغم من أنها غير مبرهنة، إلا أنها مفيدة لإجراء التوقعات.

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

طرح أسئلة هادفة

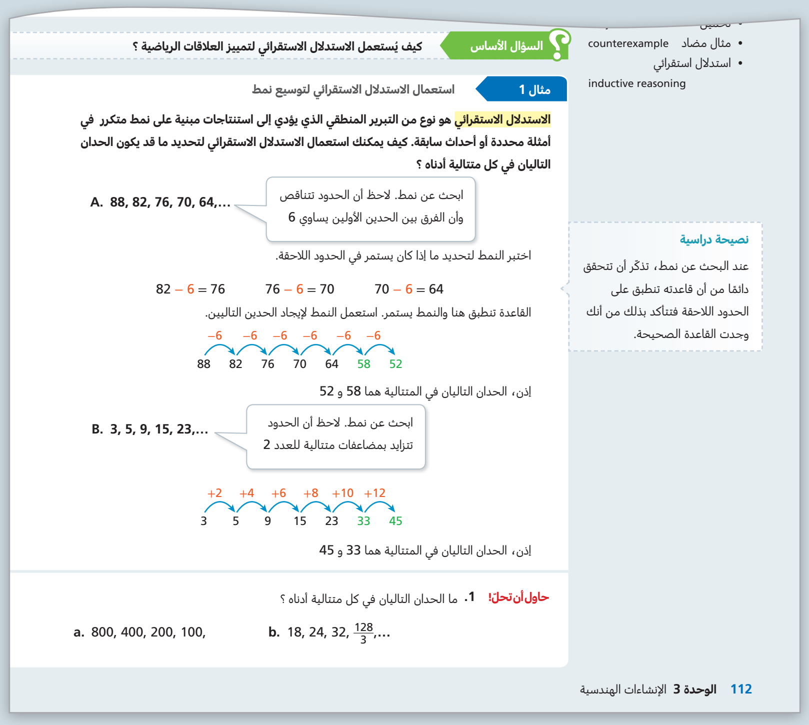
س: تذكر من الجبر أن الأعداد في الجزء A تُعبّر عن تسلسل عددي (number sequence). ما هو التسلسل العددي ؟
[التسلسل العددي هو مجموعة من الأعداد التي تتبع نمطًا.]

س: يقارن الجزء A والجزء B بين الحدود المتتالية باستعمال الجمع أو الطرح. هل الجمع والطرح هما الطريقتان الوحيدتان الممكنتان لمقارنة الحدود المتتالية ؟
[كلا؛ يجب البحث عن نمط.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. 50, 25

   b. $\frac{512}{9}, \frac{2\,048}{27}$



- مثال مضاد counterexample
- استدلال استقرائي inductive reasoning

السؤال الأساس كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

الاستدلال الاستقرائي هو نوع من التبرير المنطقي الذي يؤدي إلى استنتاجات مبنية على نمط متكرر في أمثلة محددة أو أحداث سابقة. كيف يمكنك استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد ما قد يكون الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

A. 88, 82, 76, 70, 64,...

ابحث عن نمط. لاحظ أن الحدود تتناقص وأن الفرق بين الحدين الأولين يساوي 6

اختبر النمط لتحديد ما إذا كان يستمر في الحدود اللاحقة.

$82 - 6 = 76 \qquad 76 - 6 = 70 \qquad 70 - 6 = 64$

القاعدة تنطبق هنا والنمط يستمر. استعمل النمط لإيجاد الحدين التاليين.

$88 \xrightarrow{-6} 82 \xrightarrow{-6} 76 \xrightarrow{-6} 70 \xrightarrow{-6} 64 \xrightarrow{-6} 58 \xrightarrow{-6} 52$

إذن، الحدان التاليان في المتتالية هما 58 و 52

B. 3, 5, 9, 15, 23,...

ابحث عن نمط. لاحظ أن الحدود تتزايد بمضاعفات متتالية للعدد 2

$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+6} 15 \xrightarrow{+8} 23 \xrightarrow{+10} 33 \xrightarrow{+12} 45$

إذن، الحدان التاليان في المتتالية هما 33 و 45

نصيحة دراسية
عند البحث عن نمط، تذكّر أن تتحقق دائمًا من أن قاعدته تنطبق على الحدود اللاحقة فتتأكد بذلك من أنك وجدت القاعدة الصحيحة.

حاول أن تحلّ! 1. ما الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

a. 800, 400, 200, 100, b. $18, 24, 32, \frac{128}{3},...$

112 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مثال 2 استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما الذي يمكن أن يساعدك على إيجاد نمط بين رتبة الحد وعدد صفوف وأعمدة النقاط ؟
[قارن بين رتبة الحد وعدد الصفوف أو الأعمدة.]

س: اطرح مربع رتبة الحد من إجمالي عدد النقاط. هل يدعم ذلك التخمين في المثال 2 ؟
[نعم. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : بعد طرح مربع رتبة الحد، عدد النقاط المتبقية يساوي رتبة الحد.]

س: ما الملاحظات التي تدعم التخمين الذي يشير إلى أن عدد النقاط المضافة إلى كل حد هو ضعف رتبة الحد ؟
[عدد النقاط في الحد الذي رتبته 2 أكثر من عددها في الحد الذي رتبته 1 بمقدار 4 نقاط، ما يؤكد صحة التخمين؛ عدد النقاط في الحد الذي رتبته 3 أكثر من عددها في الحد الذي رتبته بمقدار 6 نقاط، ما يؤكد صحة التخمين أيضًا، وهكذا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** 29, 41
   b. $n^2 + n - 1$

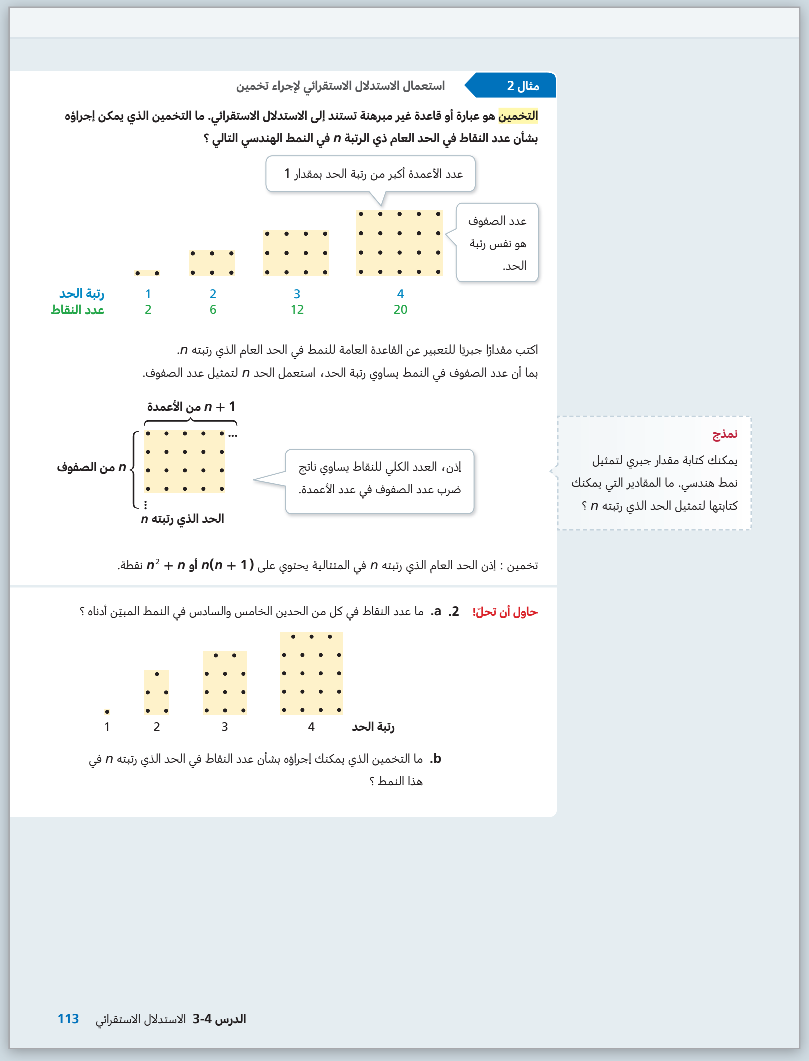
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما العناصر المتكررة التي تلاحظها في النمط ؟
[يوجد مربع عدد نقاطه $n \times n$، والصف العلوي يتضمن $n - 1$ نقطة.]

عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 1 و 2 و 3**

ابحث عن العلاقات ما الطرق التي يمكنك استعمالها لإيجاد الأنماط في الأعداد المكتوبة في متتالية أو في جدول ؟ ما الطرق التي يمكنك استعمالها لإيجاد أنماط من نقاط أو أنماط بصرية أخرى ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : أبحث عن نسبة ثابتة أو فرق ثابت بين الحدود، أو عن نمط في النسبة أو الفرق، أو أقارن كل عدد بمربع رتبة الحد.]


مثال 2 استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمين

التخمين هو عبارة أو قاعدة غير مبرهنة تستند إلى الاستدلال الاستقرائي. ما التخمين الذي يمكن إجراؤه بشأن عدد النقاط في الحد العام ذي الرتبة n في النمط الهندسي التالي ؟

رتبة الحد	1	2	3	4
عدد النقاط	2	6	12	20

اكتب مقدارًا جبريًا للتعبير عن القاعدة العامة للنمط في الحد العام الذي رتبته n.
بما أن عدد الصفوف في النمط يساوي رتبة الحد، استعمل الحد n لتمثيل عدد الصفوف.

نمذج
يمكنك كتابة مقدار جبري لتمثيل نمط هندسي. ما المقادير التي يمكنك كتابتها لتمثيل الحد الذي رتبته n ؟

تخمين : إذن الحد العام الذي رتبته n في المتتالية يحتوي على $n(n + 1)$ أو $n^2 + n$ نقطة.

حاول أن تحلّ! 2. **a.** ما عدد النقاط في كل من الحدين الخامس والسادس في النمط المبيّن أدناه ؟

b. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن عدد النقاط في الحد الذي رتبته n في هذا النمط ؟

الدرس 3-4 الاستدلال الاستقرائي 113

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثال 2**

الاستماع **مستوى 1** أعطِ الطلاب نسخًا من المثال 2، ثم اطلب منهم تحديد المصطلحين "صف" و"عمود" أو وضع خط تحتهما في المثال. ثم ساعدهم على قراءة المثال بهدف تحديد هذين المصطلحين. اطلب منهم رسم صورة يبيّنون فيها فهمهم لهذين المصطلحين.

س: ما معنى "صف" ؟
[مجموعة من الأشياء مرتبة على استقامة أفقية واحدة]

س: كيف يمكنك توضيح معنى "عمود" في صورة ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكنك رسم أسهم رأسية جنبًا إلى جنب.]

التحدث **مستوى 2** اطلب من الطلاب أن يتشاركوا أمثلة على استعمال المصطلح "حدّ".

س: ما الطرق الأخرى التي يمكنك من خلالها استعمال كلمة "حدّ" خارج صف الرياضيات ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن استعمالها لوصف الحدود بين البلدان.]

س: ماذا تعني كلمة "حدّ" في هذا المثال ؟
[كل قيمة أو عنصر في نمط مستمر.]

مثال 3 استعمال التخمين لإجراء توقع

طرح أسئلة هادفة

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا الموقف والموقف الوارد في المثال 1 ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : في الحالتين، أول ما يجب القيام به هو تحديد نمط. في المثال 3، الأعداد تمثّل بيانات من واقع الحياة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. 28 أو 29

مثال 4 إيجاد مثال مضاد لإثبات خطأ تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا إثبات خطأ تخمين أسهل من إثبات صحته ؟
[لإثبات صحة تخمين، يجب أن يكون صحيحًا في كل الحالات الممكنة، في حين يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات خطئه.]

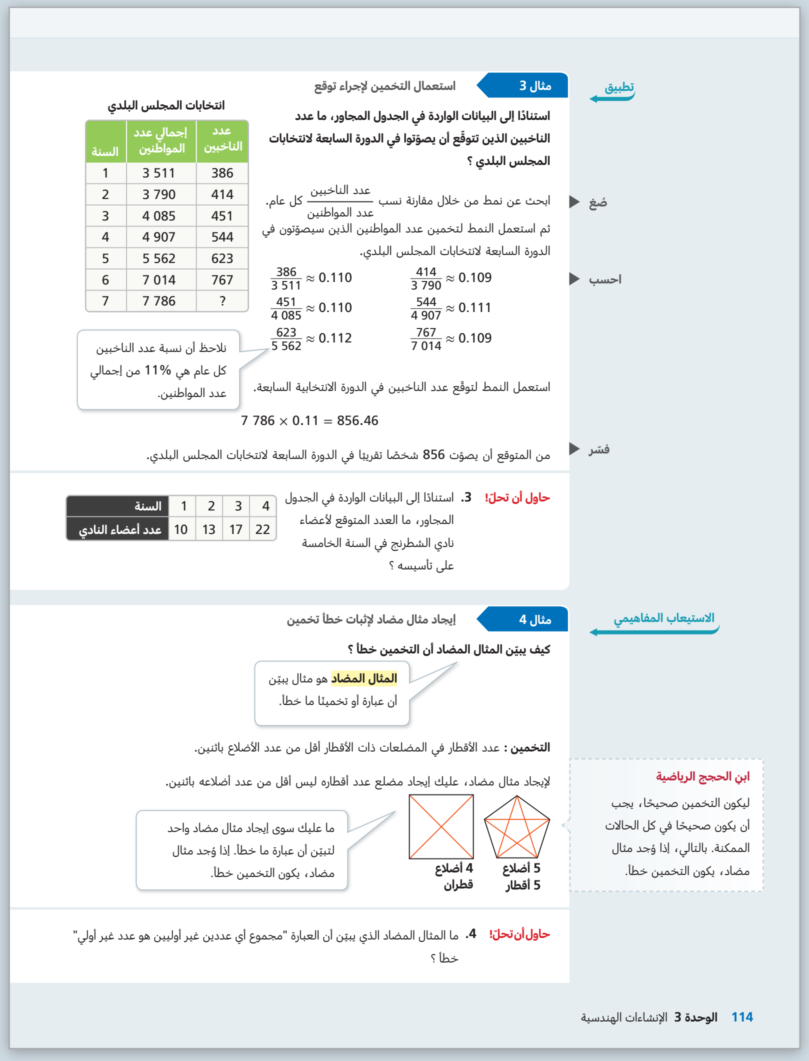
س: هل هناك مثال مضاد آخر لدحض هذا التخمين ؟
[ثُماني عدد أضلاعه 8 و عدد أقطاره 20]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : 4 و 9 عددان غير أوليين، لكن 13 = 9 + 4، و 13 عدد أولي.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الطريقة التي استعملتها لإيجاد مثال مضاد ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : وضعت قائمة بالأعداد غير الأولية القليلة الأولى ثم جمعت أزواجًا منها حتى وجدت ناتج جمع أولي.]



تطبيق

مثال 3 استعمال التخمين لإجراء توقع

استنادًا إلى البيانات الواردة في الجدول المجاور، ما عدد الناخبين الذين تتوقّع أن يصوّتوا في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي ؟

انتخابات المجلس البلدي

السنة	إجمالي عدد المواطنين	عدد الناخبين
1	3 511	386
2	3 790	414
3	4 085	451
4	4 907	544
5	5 562	623
6	7 014	767
7	7 786	?

صُغ ◀ ابحث عن نمط من خلال مقارنة نسب $\frac{\text{عدد الناخبين}}{\text{عدد المواطنين}}$ كل عام. ثم استعمل النمط لتخمين عدد المواطنين الذين سيصوّتون في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي.

احسب ◀

$\frac{386}{3\,511} \approx 0.110$ $\frac{414}{3\,790} \approx 0.109$

$\frac{451}{4\,085} \approx 0.110$ $\frac{544}{4\,907} \approx 0.111$

$\frac{623}{5\,562} \approx 0.112$ $\frac{767}{7\,014} \approx 0.109$

نلاحظ أن نسبة عدد الناخبين كل عام هي 11% من إجمالي عدد المواطنين.

استعمل النمط لتوقّع عدد الناخبين في الدورة الانتخابية السابعة.

$7\,786 \times 0.11 = 856.46$

فسّر ◀ من المتوقع أن يصوّت 856 شخصًا تقريبًا في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي.

حاول أن تحلّ! **3.** استنادًا إلى البيانات الواردة في الجدول المجاور، ما العدد المتوقع لأعضاء نادي الشطرنج في السنة الخامسة على تأسيسه ؟

السنة	1	2	3	4
عدد أعضاء النادي	10	13	17	22

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 4 إيجاد مثال مضاد لإثبات خطأ تخمين

كيف يبيّن المثال المضاد أن التخمين خطأ ؟

المثال المضاد هو مثال يبيّن أن عبارة أو تخمينًا ما خطأ.

التخمين : عدد الأقطار في المضلعات ذات الأقطار أقل من عدد الأضلاع باثنين.

لإيجاد مثال مضاد، عليك إيجاد مضلع عدد أقطاره ليس أقل من عدد أضلاعه باثنين.

5 أضلاع 5 أقطار

4 أضلاع قطران

ما عليك سوى إيجاد مثال مضاد واحد لتبيّن أن عبارة ما خطأ. إذا وُجد مثال مضاد، يكون التخمين خطأ.

ابن الحجج الرياضية

ليكون التخمين صحيحًا، يجب أن يكون صحيحًا في كل الحالات الممكنة. بالتالي، إذا وُجد مثال مضاد، يكون التخمين خطأ.

حاول أن تحلّ! **4.** ما المثال المضاد الذي يبيّن أن العبارة "مجموع أي عددين غير أوليين هو عدد غير أولي" خطأ ؟

114 **الوحدة 3** الإنشاءات الهندسية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب جمع البيانات وتمييز نمط، ثم اطلب منهم إجراء توقع.

- اطلب من الطلاب رسم مثلث مختلف الأضلاع، ورباعي غير منتظم، ومضلع غير منتظم. ثم اطلب منهم قياس الزوايا الداخلية في كل شكل وحساب مجموعها.

اسألهم عن النتائج التي توصلوا إليها. استنبط نتيجة متوسطة لكل شكل.

س: ما القيمة التي وجدتها لمجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث ؟ للرباعي ؟ للخماسي ؟
[180°, 360°, 540°]

س: هل تكوّن هذه البيانات نمطًا ؟ في حال كانت الإجابة نعم، ما هو هذا النمط ؟
[نعم؛ $180(n-2)°$، حيث n عدد أضلاع المضلع.]

س: خمّن مجموع الزوايا الداخلية للسداسي.
[720°]

س: تحقق من التخمين الذي وضعته عن $n = 6$ باستعمال الرسم والقياس. هل تخمينك صحيح ؟
[نعم، للسداسي زوايا داخلية يساوي مجموع قياساتها 720°]

س: ضع تخمينك صياغة واضحة.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : مجموع الزوايا الداخلية لشكل هندسي عدد أضلاعه n هو $180(n-2)°$]

مثال 5 اختبار تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: هل يمكنك التفكير في مثال مضاد آخر لهذا التخمين ؟
[نعم؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : خماسي أطوال أضلاعه 5 ,4 ,4 ,4 ,4]

س: هل من الممكن اختبار الجزء B فقط من خلال دراسة الأمثلة ؟
[كلا؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : أيًّا يكن العدد الذي تختبره، يمكنك دائمًا إضافة العدد 9 والحصول على عدد آخر لاختباره. من المستحيل اختبار كل الأعداد.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. **a.** مثال مضاد : عندما $n = 0$، فإن $0^2 = 0$، وهو ليس موجبًا ولا سالبًا.
b. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $3\ 016 \div 4 = 754$؛ $5\ 108 \div 4 = 1\ 277$؛ $7\ 712 \div 4 = 1\ 928$ ؛ $11\ 328 \div 4 = 2\ 832$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك اختبار كل الحالات المطلوبة في الجزء b ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : العدد 100 قابل للقسمة على 4، وبالتالي جميع مضاعفات العدد 100 قابلة للقسمة على 4، وكل عدد صحيح أكبر من 100 هو من مضاعفات العدد 100 يضاف إليه آخر رقمين. إذن، تحتاج فقط إلى اختبار الأعداد 0 و 4 و 8 والأعداد المكونة من رقمين حيث ناتج جمعهما قابل للقسمة على 4]

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 5 يسهل أن نغفل أمثلة قد تكون أمثلة مضادة. تأكد من فهمك لعناصر المجموعة. حاول اختبار الحالات غير المألوفة بالإضافة إلى الحالات البسيطة.

عادات التفكير
استعمل مع **المثالين 4 و 5**

ابن الحجج الرياضية يقول فهد إن إثبات صحة تخمين لا يتطلب سوى مثال واحد يؤكد صحته. هل تتفق معه ؟

[فهد ليس على صواب. بغضّ النظر عن عدد الملاحظات المتطابقة التي تؤكد صحة تخمين، لا يمكنه إثبات صحته إلا من خلال اختبار جميع الحالات الممكنة.]


مثال 5 اختبار تخمين

اختبر كل تخمين أدناه من خلال أمثلة إضافية أو أوجد مثالًا مضادًا لدحض التخمين.

A. كل مضلع له أربعة أضلاع متطابقة هو مربع.

المربع له أربعة أضلاع متطابقة وأربع زوايا قائمة.

فكّر : هل يمكن رسم مضلع بأربعة أضلاع متطابقة من دون أن تكون له أربع زوايا قائمة؟

هذا المعيّن له أربعة أضلاع متطابقة وليست له أي زوايا قائمة.

يوجد مثال مضاد، إذن التخمين خطأ.

B. إذا كان عدد ما من مضاعفات العدد 9، يجب أن يكون ناتج جمع أرقامه أيضًا من مضاعفات العدد 9

لاختبار هذا التخمين، اكتب قائمة ببعضٍ من مضاعفات العدد 9 ثم أوجد ناتج جمع أرقام كلٍّ من هذه المضاعفات.

مضاعفات العدد 9	ناتج جمع الأرقام
$9 \times 12 = 108$	$1 + 0 + 8 = 9$
$9 \times 313 = 2\ 817$	$2 + 8 + 1 + 7 = 18$
$9 \times 1\ 105 = 9\ 945$	$9 + 9 + 4 + 5 = 27$

نواتج الجمع 9 و 18 و 27 هي من مضاعفات العدد 9

إذن، التخمين صحيح للحالات المختبرة الثلاث.

خطأ شائع
قد تعتقد أن إيجاد أمثلة تؤكد صحة التخمين يبيّن أن التخمين صحيح. تذكّر أنّ عليك أن تبيّن أن التخمين صحيح في كل الحالات، وليس في بعض الحالات فقط.

حاول أن تحلّ! **5.** اختبر كل تخمين أدناه من خلال أمثلة إضافية أو أوجد مثالًا مضادًا لدحضه.
a. بالنسبة لكل عدد صحيح n، قيمة n^2 موجبة.
b. إذا كان الرقمان الأخيران في عدد يقبلان القسمة على 4، فإن هذا العدد يقبل القسمة على 4

الدرس 3-4 الاستدلال الاستقرائي 115

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 5 اطلب من الطلاب كتابة تخمينات، وإجراء توقعات، وإيجاد أمثلة مضادة.
اكتب العبارة التالية على السبورة: "كل النمور التي رأيتها في حياتي برتقالية اللون ومخططة بخطوط سود"، ثم اسأل الطلاب:

س: ما التخمين الذي يمكنك وضعه، وما التوقع الذي يمكنك إجراؤه بخصوص هذه العبارة ؟
[كل النمور برتقالية اللون ومخططة بخطوط سود؛ والنمر التالي الذي يراه معلمي سيكون برتقالي اللون ومخططًا بخطوط سود.]

س: ما الملاحظة التي قد تدحض التخمين الذي وضعته ؟
[مشاهدة نمر واحد ليس برتقالي اللون وليس مخططًا بخطوط سود.]

- اطلب من الطلاب كتابة عبارات مماثلة مستمدة من تجربتهم الخاصة.

س: ما التخمين الذي يمكنك تكوينه من هذه العبارة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إذا أنجزت الواجب المنزلي سأحصل على علامة جيدة.]

س: هل يمكنك إجراء توقع من التخمين الذي وضعته ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : سأحصل على علامة جيدة.]

س: صف مثالًا مضادًا للتخمين الذي وضعته.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : طالب ينجز كل الواجبات المنزلية لكنه يحصل على علامة متدنية.]

ملخص المفهوم الاستدلال الاستقرائي

س: كيف تؤدي سلسلة من الملاحظات إلى التوصل إلى تخمين ؟
[إذا كان من الممكن تمييز نمط من الملاحظات، فيمكن اعتماده كتخمين.]

س: هل وجود نمط يثبت صحة التخمين ؟
[كلا، إنه مجرد دليل يدعم التخمين.]

س: ما الذي يمكن أن يدحض التخمين ؟
[مثال مضاد واحد]

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد لا يختبر الطلاب 0 أو 1 كحالات للتخمين، أو قد يختبرون الأعداد الزوجية فقط بعد اختبار العدد 1، ذكّر الطلاب بأن الأعداد الصحيحة تشمل الصفر والأعداد السالبة أيضًا.

الإجابات

1. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : من خلال ملاحظة الحالات أو الأنماط، يمكن وضع قاعدة عامة يمكن تطبيقها على كل الحالات أو استعمالها لتوقع النتائج.

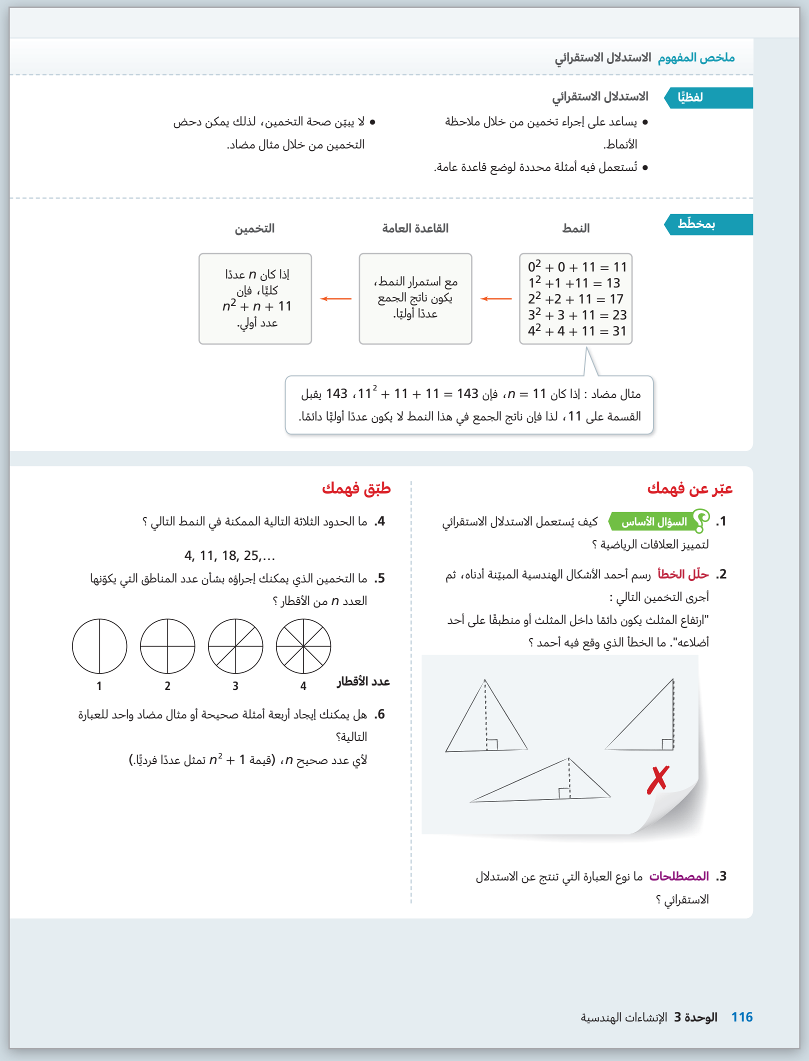
2. لكل مثلث 3 ارتفاعات، لكن أحمد وجد ارتفاعًا واحدًا فقط لكل مثلث. لو أنه وجد كل الارتفاعات الثلاثة في المثلث المنفرج الزاوية، لاكتشف أن الارتفاعين الآخرين يقعان خارج المثلث.

3. تخمين

4. 32, 39, 46

5. $2n$

6. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : المثال المضاد : إذا كان $n = 3$ فإن $3^2 + 1 = 10$، والعدد 10 زوجي.


ملخص المفهوم الاستدلال الاستقرائي

لفظيًا — الاستدلال الاستقرائي
- يساعد على إجراء تخمين من خلال ملاحظة الأنماط.
- تُستعمل فيه أمثلة محددة لوضع قاعدة عامة.
- لا يبيّن صحة التخمين، لذلك يمكن دحض التخمين من خلال مثال مضاد.

بمخطّط

النمط:
$0^2 + 0 + 11 = 11$
$1^2 + 1 + 11 = 13$
$2^2 + 2 + 11 = 17$
$3^2 + 3 + 11 = 23$
$4^2 + 4 + 11 = 31$

القاعدة العامة: مع استمرار النمط، يكون ناتج الجمع عددًا أوليًا.

التخمين: إذا كان n عددًا كليًا، فإن $n^2 + n + 11$ عدد أولي.

مثال مضاد : إذا كان $n = 11$، فإن $11^2 + 11 + 11 = 143$، 143 يقبل القسمة على 11، لذا فإن ناتج الجمع في هذا النمط لا يكون عددًا أوليًا دائمًا.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟
2. حلّل الخطأ رسم أحمد الأشكال الهندسية المبيّنة أدناه، ثم أجرى التخمين التالي : "ارتفاع المثلث يكون دائمًا داخل المثلث أو منطبقًا على أحد أضلاعه". ما الخطأ الذي وقع فيه أحمد ؟
3. المصطلحات ما نوع العبارة التي تنتج عن الاستدلال الاستقرائي ؟

طبّق فهمك

4. ما الحدود الثلاثة التالية الممكنة في النمط التالي ؟
4, 11, 18, 25,...
5. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن عدد المناطق التي يكوّنها العدد n من الأقطار ؟
عدد الأقطار 1 2 3 4
6. هل يمكنك إيجاد أربعة أمثلة صحيحة أو مثال مضاد واحد للعبارة التالية؟
لأي عدد صحيح n، (قيمة $n^2 + 1$ تمثل عددًا فرديًا.)

116 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
7-23	7-23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	10, 11	1
2	7, 12, 21, 22	2
3	13, 14	2
	17, 19	3
4	15	2
	9, 23	4
5	20	1
	16	2
	8, 18	3

الإجابات

7. كتبت هند تخمينًا. لقد برهنت أنها صحيحة لقيم n العشرين الأولى، لكنها لم تثبت صحة عبارتها لكل قيم n.

8. أعطت سارة مثالًا صحيحًا واحدًا فقط، وهذا لا يكفي لإثبات صحة تخمين. في الواقع، عبارة سارة ليست صحيحة، ويمكن دحضها بالمثال المضاد التالي : الزوايا المتقابلة بالرأس تتشارك نفس الرأس لكنها ليست متجاورة.

9. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لإثبات أو دحض هذه العبارة، سأنظر إلى كل عدد أولي يقع بين 608 7 و 620 7 لأبيّن ما إذا كان أوليًا أم غير أولي. إذا كان أي من هذه الأعداد أوليًا، هناك مثال مضاد إذن والعبارة خطأ. في حال عدم وجود أي عدد أولي بين هذين العددين، فإن العبارة صحيحة لأن هناك عددًا منتهيًا من الحالات وجميعها خضعت للاختبار.

10. 53, 41, 29

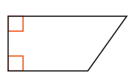
11. $\frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}$

12. عدد المثلثات هو $n - 2$.

13. في كل عام، يحصل 65% تقريبًا من طلاب المرحلة الثانوية على رخصة قيادة.

14. يجب أن تكون الإجابات بين 264 و 270

15. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة :



16. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : العددان 8 و 0 نسبيان، لكن ناتج قسمة $8 \div 0$ ليس عددًا نسبيًا. هذا مثال مضاد، إذن العبارة خطأ.

تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

7. **روابط في الرياضيات** لاحظت هند أن كل مربع من المربعات الكاملة العشرين الأولى هو إما من مضاعفات العدد 5، وإما أصغر من أحد مضاعفات العدد 5 بمقدار 1، وإما أكبر من أحد مضاعفات العدد 5 بمقدار 1

1	4	9	16	25
36	49	64	81	100
121	144	169	196	225
256	289	324	361	400

وكتبت العبارة التالية :

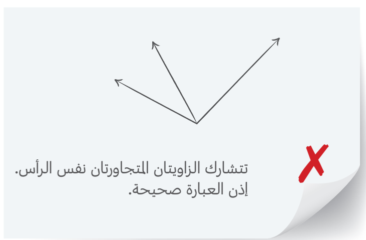
"إذا كان n عددًا طبيعيًا، يمكن كتابة n^2 في الصورة $5k$ أو في الصورة $5k - 1$ أو في الصورة $5k + 1$، حيث k عدد كلي."

ما نوع العبارة التي كتبتها هند ؟ هل برهنت أن عبارتها صحيحة لكل قيم n ؟ وضّح إجابتك.

8. **حلّل الخطأ** اختبرت سارة التخمين التالي كما هو مبيّن أدناه.

"إذا تشاركت زاويتان نفس الرأس، تكون الزاويتان متجاورتين."

ما الخطأ الذي وقعت فيه سارة ؟



9. **مهارات التفكير العليا** فكّر في التخمين التالي.

"لا توجد أعداد أولية بين العددين 608 7 و 620 7."

كيف يمكنك إثبات أن هذه العبارة صحيحة أم خطأ ؟ هل تبقى هذه العبارة تخمينًا إن لم تجد مثالًا مضادًا يدحضها ؟ وضّح إجابتك.

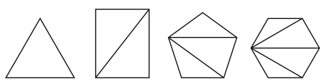
تدرّب

في التمرينين 10 و 11، ما الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتاليتين التاليتين ؟ انظر المثال 1

10. 101, 89, 77, 65,…

11. $9, 6, 4, \frac{8}{3},\dots$

12. لاحظ النمط في الأشكال الهندسية التالية. هل يمكنك كتابة تخمين بشأن عدد المثلثات التي تتكوّن من وصل أحد رؤوس مضلع عدد أضلاعه n بكل من رؤوسه الأخرى ؟ انظر المثال 2



في التمرينين 13 و 14، يبيّن الجدول أدناه عدد طلاب السنة الثالثة في إحدى الجامعات وعدد الطلاب الحائزين رخصة قيادة سيارة من بينهم. انظر المثال 3

السنة	2014	2015	2016	2017
عدد طلاب السنة الثالثة	341	367	309	382
عدد الطلاب الحائزين رخصة	222	240	199	246

13. ما النمط الذي يمكنك إيجاده بين عدد طلاب السنة الجامعية الثالثة وعدد الطلاب الحائزين رخصة قيادة سيارة ؟

14. في عام 2018، كان عدد طلاب السنة الثالثة في هذه الجامعة 413 طالبًا. ما عدد الطلاب الذين تعتقد أن لديهم رخصة قيادة سيارة من بين طلاب السنة الجامعية الثالثة في عام 2018 ؟

15. هل يمكنك إيجاد مثال مضاد للعبارة التالية ؟ انظر المثال 4

"لا يمكن أن يكون لشبه المنحرف أكثر من زاوية قائمة واحدة."

16. أثبت صحة التخمين التالي بأربعة أمثلة أو ادحضه بمثال مضاد. انظر المثال 5

"ناتج قسمة أي عددين نسبيين هو عدد نسبي."

الإجابات

17. a. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : البيانات المتعلقة بالمجموعات الأربع متقاربة جدًا. في كل التجارب الأربع، 20% إلى 23% من الأشخاص قالوا إنهم تجابوا مع الدواء. لذلك فإن التخمين المعقول هو أن احتمال تأثير هذا الدواء على الشفاء من الفيروس يتراوح بين 20% و23%

b. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : سيفيد بين 200 و 230 شخصًا أنهم باتوا بصحة أفضل.

18. يمكن أن يبدأ راشد بالبحث عن كل الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام بحيث يكون الرقمان الأول والثالث متساويين ومجموعهما يساوي الثاني. يمكنه بعد ذلك أن يحدد ما إذا كان كل عدد يقسم على 11

$121\ (1 + 1 = 2) : 121 \div 11 = 11;$

$242\ (2 + 2 = 4) : 242 \div 11 = 22;$

$363\ (3 + 3 = 6) : 363 \div 11 = 33;$

$484\ (4 + 4 = 8) : 484 \div 11 = 44$

بما أن $5 + 5 = 10$ ، فلم تعد هناك أعداد أخرى مكونة من ثلاثة أرقام تتلاءم مع هذا الوصف. وبما أن العبارة تبيّن أنها صحيحة في جميع الحالات الممكنة، إذن العبارة صحيحة.

19. $3 = 2 + 1$؛ $7 = 4 + 3$؛ $13 = 6 + 7$؛ $21 = 8 + 13$؛ النمط هو إضافة مضاعفات متتالية للعدد 2، يحتوي تصميم من 6 دوائر على $31 = 10 + 21$ ، أي 31 منطقة منفصلة.

20. D

21. B

23. الجزء A قد تختلف الإجابات. نموذج تخمينات : إذا تم التصويت على الاقتراح 3، فمن المرجح أن ينجح. إذا كانت الدراسة المسحية تمثل السكان، فمن المرجح أن ينجح الاقتراح. نموذج توضيح : في دراسة مسحية تشمل 300 شخص، فإن نصف هذا العدد هو 150 شخصًا. وبما أن أكثر من 150 شخصًا صوتوا للاقتراح 3، فمن المرجح أن ينجح.

الجزء B قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : 4 000 تقريبًا

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

17. نمذج يبيّن الجدول أدناه بيانات أربع تجارب متطابقة لدواء جديد يساعد على معالجة مرضى فيروس كوفيد-19

المجموعة	عدد المشاركين في التجربة	عدد الذين تجاوبوا مع الدواء
A	250	55
B	170	35
C	210	48
D	190	40

a. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن فعالية هذا الدواء ؟

b. إذا شملت التجربة التالية 1000 شخص، ما التوقع المنطقي لنتيجة التجربة التالية ؟

18. فكّر وثابر في الحل أجرى راشد التخمين التالي. "الرقمان الأول والثالث في عدد من ثلاثة أرقام هما نفس الرقم. إذا كان الرقم الثاني يساوي مجموع الرقمين الأول والثالث، يجب أن يكون هذا العدد قابلًا للقسمة على 11" كيف يمكنه تحديد ما إذا كان هذا التخمين صحيحًا أم لا ؟

19. عمّم يريد أحد المصممين معرفة عدد المناطق التي تتكوّن من تداخل الدوائر بطريقة معينة. هل يمكنه إيجاد قاعدة تصف كيف يتزايد عدد المناطق عندما يضيف المصمم دائرة أخرى إلى التصميم ؟ كم منطقة تنشأ في تصميم مكوّن من 6 دوائر ؟

تدرّب على اختبار

20. فكّر في التخمين التالي: "أي عدد يقبل القسمة على 2، يقبل القسمة على 4 أيضًا." هل يعدّ كل عدد في الجدول أدناه مثالًا مضادًا للتخمين ؟ اختر نعم أم لا.

	نعم	لا
12	❑	☑
19	❑	☑
22	☑	❑
28	❑	☑
30	☑	❑

21. اختبار SAT/ACT ما العدد التالي في المتتالية التالية ؟

1, 2, 2, 4, 8, 32,...

Ⓐ 64 Ⓑ 84 Ⓒ 106 Ⓓ 256

22. اختبار SAT/ACT ما عدد النقاط في الحد الذي رتبته n في المتتالية التالية ؟

Ⓐ $n + 2$ Ⓑ $2n + 1$

Ⓒ $n^2 + 2$ Ⓓ $n + 3$

23. مهمة أدائية يوضّح التمثيل البياني أدناه بيانات من دراسة مسحية شملت 300 ناخبًا تم اختيارهم عشوائيًا حول مدى تأييدهم للاقتراح رقم 3

الجزء A أجر تخمينًا حول احتمال الموافقة على الاقتراح 3 ثم وضّح تبريرك المنطقي.

الجزء B إذا أدلى 7500 شخصًا بصوته في الانتخابات التالية، ما عدد الأشخاص الذين من المتوقع أن يصوتوا لصالح الاقتراح رقم 3 ؟

118 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الخطوة 4 | التقويم والتمايز

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 5-3

كتابة البراهين

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ استعمال التبرير المنطقي لإثبات نظريات هندسية تتعلق بالمستقيمات والزوايا.

الفهم الأساس

تبرير عبارات البراهين باستعمال التعريفات والمسلّمات والنظريات والخصائص.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من :

- استعمال الاستدلال الاستقرائي للتوصل إلى استنتاجات بناء على نمط من الأمثلة أو الأحداث.
- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتبرير مجموعة من الحقائق منطقيًا بهدف التوصل إلى استنتاج.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- كتابة برهان في جدول من عمودين وفقرات برهانية لنظريات عن المستقيمات والزوايا، بما في ذلك إثبات أن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال البرهان لإثبات نظريات تتعلق بالمثلثات وزوايا المضلع.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة و الاستيعاب المفاهيمي.

- يستعمل الطلاب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، ونظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، ونظرية الزوايا المتتامة المتطابقة، ونظرية الأزواج الخطية بشكل صحيح ومناسب.
- يستعمل الطلاب التبرير المنطقي وما تعلموه سابقًا عن الخصائص والتعريفات والنظريات لإثبات نظريات تتعلق بالمستقيمات والزوايا.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **خاصية القسمة للمساواة** | *Division Property of Equality*
- **خاصية الضرب للمساواة** | *Multiplication Property of Equality*

المصطلحات الجديدة

- **زوج خطي** | *linear pair*
- **فقرة برهانية** | *paragraph proof*
- **برهان** | *proof*
- **نظرية** | *theorem*
- **برهان في جدول من عمودين** | *two-column proof*

نشاط المصطلحات

ذكّر الطلاب بخصائص الأعداد الحقيقية، ثم اطلب منهم مطابقة كل معادلة بالخاصية التي يمكن استعمالها لحلّ المعادلة.

1. $5 = x + 7$ [D]	**A.** خاصية الجمع للمساواة
2. $y - 12 = 23$ [A]	**B.** خاصية القسمة للمساواة
3. $8z = 64$ [B]	**C.** خاصية الضرب للمساواة
4. $\frac{W}{3} = 48$ [C]	**D.** خاصية الطرح للمساواة

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يركّز الطلاب على هذا المعيار :

9.5.2 بناء حجة رياضية بكتابة جمل رياضية متسلسلة منطقيًا مبينًا التبريرات الرياضية.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يعرف الطلاب تعريفات ومسلّمات ونظريات وخصائص الأعداد الحقيقية ويستعملونها بسهولة لإثبات نظريات هندسية.

ابن الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب الافتراضات والتعريفات والنظريات المبرهنة سابقًا في بناء حجج رياضية منطقية يكتبونها في جدول من عمودين أو على شكل فقرات برهانية.

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب التبرير المنطقي لتبرير كل خطوة من خطوات الحل الجبري تمهيدًا لاستعمال التبرير المنطقي في البراهين الهندسية.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ في حل هاشم ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تخلّص هاشم من الأقواس ثم عزل المتغير.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: استعمل هاشم خاصية التوزيع لتبرير الخطوة الثانية. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم؛ ضرب العدد 6 في كل من 14 و x ثم جمع نواتج الجمع.]

س: استعمل هاشم خاصية الضرب للمساواة لتبرير الخطوة الرابعة. هل هو على صواب ؟

[نعم؛ ضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{6}$]

س: هل الترتيب الذي استعمله هاشم لحلّ المعادلة صحيح ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم؛ لقد استعمل العمليات العكسية لعزل المتغير بشكل صحيح.]

س: كيف يمكنك التحقق من أن حل المعادلة هو $x = 4$ ؟

[عوّض 4 عن x في المعادلة الأصلية، وبسّط، ثم تحقق مما إذا كان ذلك يجعل المعادلة صحيحة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب معادلة أخرى متعددة الخطوات يمكن حلها بأكثر من طريقة. حُل المعادلة بطريقتين مختلفتين على الأقل، وبرّر كل خطوة من خطوات الحل.

[تحقق من معادلات الطلاب وحلولهم.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما بعض التبريرات الأخرى التي قد تستعملها عند حل معادلة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : خاصية الجمع للمساواة.]

س: في رأيك، ما فائدة تبرير كل خطوة من خطوات الحل ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنها تساعد على توضيح طريقة تفكيرك، وعلى تفسير تبريراتك المنطقية.]

عادات التفكير استعمل مع **انقد واشرح**

استعمل البنية ما الأفكار التي تعلمتها سابقًا وكانت مفيدة في تقييم طريقة حل هاشم للمعادلة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كيفية حلّ المعادلات المتعددة الخطوات؛ خصائص الأعداد الحقيقية.]

كتاب الطالب، صفحة 119

3-5
كتابة البراهين
Writing Proofs

أستطيع... استعمال التبرير المنطقي لإثبات النظريات.

معيار الدرس
9.5.2

المصطلحات
- فقرة برهانية paragraph proof
- برهان proof
- نظرية theorem
- برهان في جدول من عمودين two-column proof

انقد واشرح

حلّ هاشم المعادلة التالية لإيجاد قيمة x وكتب تبريرًا لكل خطوة من خطوات الحل.

المعطيات	$6(14 + x) = 108$
خاصية التوزيع	$84 + 6x = 108$
خاصية الطرح للمساواة	$6x = 108 - 84$
بسّط	$6x = 24$
خاصية الضرب للمساواة	$x = 4$

A. **فكّر وثابر في الحل** هل تبريرات هاشم لكل الخطوات صحيحة ؟ إن لم تكن كذلك، ما الذي قد تغيّر في خطوات الحل ؟ وضّح إجابتك.

B. هل يمكنك تبرير سلسلة أخرى من الخطوات التي تعطي نفس قيمة x ؟

السؤال الأساس كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟

النظرية 3-1 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة. **إذا كان**

نموذج من أعمال الطلاب

A. نعم؛ تبريرات هاشم صحيحة. كان بإمكانه أيضًا استعمال خاصية القسمة للمساواة في الخطوة الرابعة لو أنه قسم طرفي المعادلة على 6 بدلًا من ضربهما في كسر.

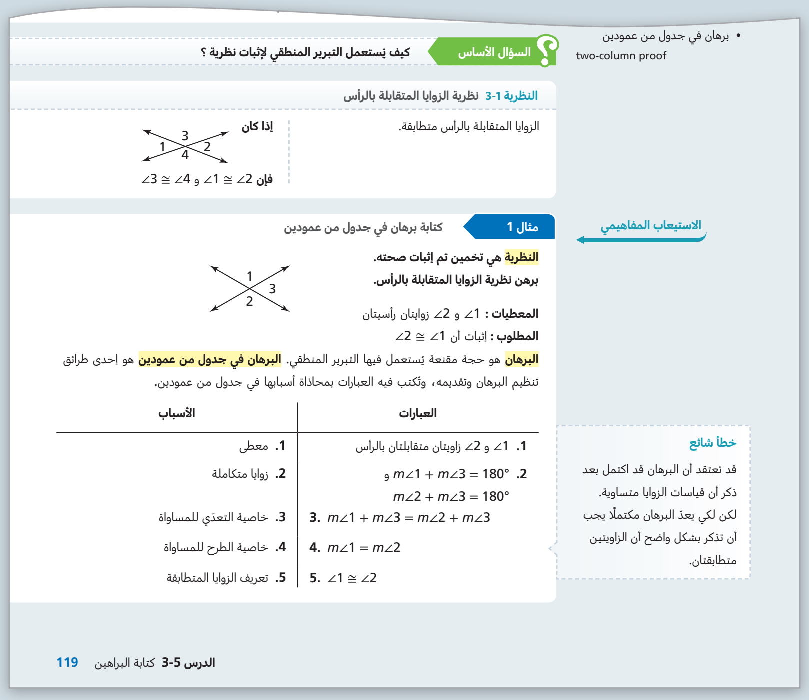
B.

معطى	$6(14 + x) = 108$
خاصية القسمة للمساواة	$14 + x = 18$
خاصية الطرح للمساواة	$x = 4$

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

سيتعلم الطلاب أن التبرير المنطقي هو الخطوات المستعملة لتبرير حقائق معطاة منطقيًا بهدف التوصل إلى استنتاج. استعمل هاشم في فقرة "انقد واشرح" التبرير المنطقي لتفسير كل خطوة من خطوات الحل الجبري للمعادلة. في هذا الدرس، سيستعمل الطلاب التبرير المنطقي ليساعدهم على التوصل إلى استنتاجات هندسية.


• برهان في جدول من عمودين
two-column proof

السؤال الأساس كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟

النظرية 3-1 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

إذا كان

فإن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 كتابة برهان في جدول من عمودين

النظرية هي تخمين تم إثبات صحته.

برهن نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زوايتان رأسيتان

المطلوب : إثبات أن $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان هو حجة مقنعة يُستعمل فيها التبرير المنطقي. **البرهان في جدول من عمودين** هو إحدى طرائق تنظيم البرهان وتقديمه، وتُكتب فيه العبارات بمحاذاة أسبابها في جدول من عمودين.

العبارات	الأسباب
1. $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متقابلتان بالرأس	1. معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2. زوايا متكاملة
3. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. خاصية التعدّي للمساواة
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. خاصية الطرح للمساواة
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. تعريف الزوايا المتطابقة

خطأ شائع

قد تعتقد أن البرهان قد اكتمل بعد ذكر أن قياسات الزوايا متساوية. لكن لكي يعدّ البرهان مكتملًا يجب أن تذكر بشكل واضح أن الزاويتين متطابقتان.

الدرس 3-5 كتابة البراهين 119

مثال 1 كتابة برهان في جدول من عمودين

بناء الطلاقة الاجرائية إنطلاقًا من الاستيعاب المفاهيمي

س: هل تعتقد أن ترتيب العبارات والأسباب مهم ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم، يجب أن يكون تسلسل العبارات منطقيًا.]

س: كيف تبيّن العبارة الأخيرة في البرهان عدم الحاجة إلى مزيد من العبارات ؟

[العبارة الأخيرة تتضمّن المطلوب إثباته.]

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

.1

العبارات	الأسباب
.1 $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle CBE$	.1 معطى
2. $\angle CBD \cong \angle EBD$	.2 تعريف منصف الزاوية
3. $\angle ABC \cong \angle FBE$	.3 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
.4 $m\angle ABC = m\angle FBE$ و $m\angle CBD = m\angle EBD$	.4 تعريف الزوايا المتطابقة
5. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$ $m\angle FBD = m\angle FBE + m\angle EBD$	.5 مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6. $m\angle ABD = m\angle FBE + m\angle EBD$	.6 تعويض خاصية المساواة
7. $m\angle ABD = m\angle FBD$	.7 مسلمة جمع قياسات الزوايا
8. $\angle ABD \cong \angle FBD$	.8 تعريف الزوايا المتطابقة

استعمل مع **المثال 1**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة ما الذي تعرفه وليس مذكورًا في نص المسألة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $\angle ABC \cong \angle FBE$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس، ووفق النظرية 1-3، الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.]

مثال 2 تطبيق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

استعمل التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما الذي تحاول إيجاده في هذا الموقف ؟ كيف يمكن تمثيل ذلك في المخطط ؟

[قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع أبعد شعاعي ضوء عند خروجهما من بؤرة العدسة، أي $x°$، أو $m\angle EDF$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

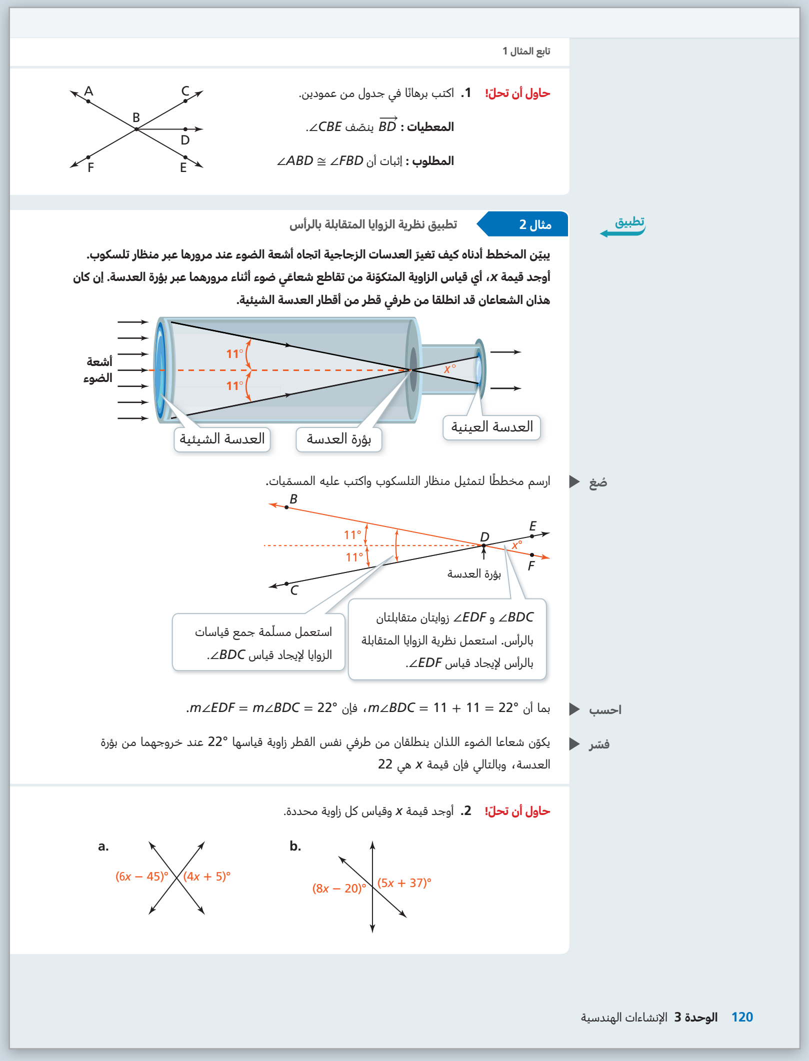
2. a. $x = 25$; 105°; 105° b. $x = 19$; 132°; 132°

استعمل مع **المثال 2**

عادات التفكير

تواصل بدقة ما الخطوات التي يمكنك تنفيذها للتحقق من صحة الحلّين ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : عوّض قيمة x في كل مقدار، وتأكد من أن قياسي الزاويتين متساويان.]


تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! .1 اكتب برهانًا في جدول من عمودين.

المعطيات : $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle CBE$.

المطلوب : إثبات أن $\angle ABD \cong \angle FBD$

مثال 2 تطبيق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

تطبيق

يبيّن المخطط أدناه كيف تغيّر العدسات الزجاجية اتجاه أشعة الضوء عند مرورها عبر منظار تلسكوب. أوجد قيمة x، أي قياس الزاوية المتكوّنة من تقاطع شعاعي ضوء أثناء مرورهما عبر بؤرة العدسة، إن كان هذان الشعاعان قد انطلقا من طرفي قطر من أقطار العدسة الشيئية.

ضع ارسم مخططًا لتمثيل منظار التلسكوب واكتب عليه المسقيات.

احسب بما أن $m\angle BDC = 11 + 11 = 22°$، فإن $m\angle EDF = m\angle BDC = 22°$.

فسّر يكوّن شعاعا الضوء اللذان ينطلقان من طرفي نفس القطر زاوية قياسها 22° عند خروجهما من بؤرة العدسة، وبالتالي فإن قيمة x هي 22

حاول أن تحلّ! .2 أوجد قيمة x وقياس كل زاوية محددة.

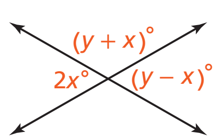
120 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 2 قد يجد العديد من الطلاب القيمة الصحيحة للمتغير ولكنهم قد ينسون إيجاد قياسات الزوايا المحددة. عندما يكمل الطلاب الجزأين (a) و (b)، اطلب منهم إعادة قراءة المسألة، ثم اسألهم عن المطلوب إيجاده.

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب المتقدمين حل المسألة التالية التي تُستعمل فيها نفس المفاهيم المستعملة في المثال 2، لكنها تتطلب من الطلاب كتابة وحل معادلات أكثر تعقيدًا.



- أوجد قيمة المتغيرين وقياسات الزوايا المحددة.

س: ما أنواع الزوايا التي تلاحظها في المخطط ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : زوايا متقابلة بالرأس وزوايا متكاملة.]

س: ماذا تعرف عن قياسات الزوايا المتقابلة بالرأس ؟ وعن قياسات الزوايا المتكاملة ؟

[الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية القياس؛ مجموع الزوايا المتكاملة يساوي 180°]

- اطلب من الطلاب استعمال هذه المعلومة لكتابة نظام معادلات.

س: ما المعادلة التي ستحلها أولاً ؟ وضح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $(y + x) + (y - x) = 180$؛ يمكن حلّها بسهولة من خلال إيجاد قيمة y.]

- اطلب من الطلاب إكمال حل نظام المعادلات. احرص على أن يجدوا قياسات كل الزوايا المطلوبة.

مثال 3 كتابة فقرة برهانية

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: إذا واجهت صعوبة في فهم نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، يمكنك استعمال قياسات زوايا محددة لفهم النظرية باستعمال رسم توضيحي. أي مجموعة من قياسات الزوايا تتناسب مع النظرية ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : افترض أن $m\angle 1 = 30°$ و $m\angle 2 = 150°$ و $m\angle 3 = 30°$.
$\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان مع $\angle 2$، إذن $\angle 1 \cong \angle 3$]

س: هل المثال الذي قدمته يثبت نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة ؟
[كلا، البرهان يبيّن أن النظرية صحيحة في جميع الحالات، لا في حالة واحدة فقط.]

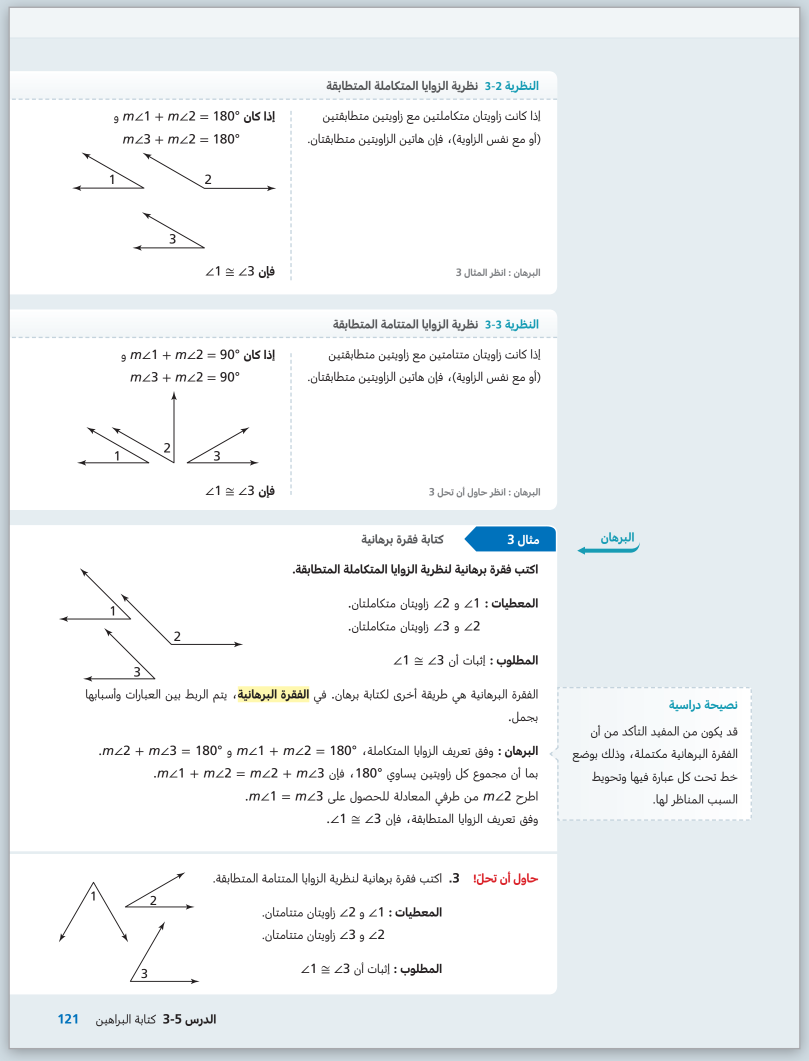
س: في البرهان، أي خاصية تسمح لك باستنتاج أن $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$ ؟
[خاصية التعدي للمساواة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. وفق تعريف الزوايا المتتامة، $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$.
بالتعويض، $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.
اطرح $m\angle 2$ من طرفَي المعادلة للحصول على $m\angle 1 = m\angle 3$،
وفق تعريف الزوايا المتطابقة، $\angle 3 \cong \angle 1$.

تعزيز التبرير المنطقي

س: في رأيك، ما الفرق بين برهان نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة، وبرهان نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : البرهانان متماثلان، باستثناء أن "متكاملة" تصبح "متتامة" و"°180" تصبح "°90".]



النظرية 3-2 نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة

إذا كانت زاويتان متكاملتين مع زاويتين متطابقتين (أو مع نفس الزاوية)، فإن هاتين الزاويتين متطابقتان.

إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 180°$

فإن $\angle 3 \cong \angle 1$

البرهان : انظر المثال 3

النظرية 3-3 نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة

إذا كانت زاويتان متتامتين مع زاويتين متطابقتين (أو مع نفس الزاوية)، فإن هاتين الزاويتين متطابقتان.

إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 90°$

فإن $\angle 3 \cong \angle 1$

البرهان : انظر حاول أن تحل 3

مثال 3 كتابة فقرة برهانية

البرهان

اكتب فقرة برهانية لنظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متكاملتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle 3 \cong \angle 1$

الفقرة البرهانية هي طريقة أخرى لكتابة برهان. في **الفقرة البرهانية**، يتم الربط بين العبارات وأسبابها بجمل.

البرهان : وفق تعريف الزوايا المتكاملة، $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$.
بما أن مجموع كل زاويتين يساوي $180°$، فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.
اطرح $m\angle 2$ من طرفي المعادلة للحصول على $m\angle 1 = m\angle 3$.
وفق تعريف الزوايا المتطابقة، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

نصيحة دراسية
قد يكون من المفيد التأكد من أن الفقرة البرهانية مكتملة، وذلك بوضع خط تحت كل عبارة فيها وتحويط السبب المناظر لها.

حاول أن تحلّ! **3.** اكتب فقرة برهانية لنظرية الزوايا المتتامة المتطابقة.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متتامتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle 3 \cong \angle 1$

الدرس 3-5 كتابة البراهين 121

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 ناقش الطلاب في أوجه الشبه والاختلاف بين البرهان في جدول من عمودين والفقرة البرهانية، ثم اطلب منهم إعادة كتابة كل جملة في صورة برهان في جدول من عمودين، وتحديد الجزء الذي يمثّل العبارة والجزء الذي يمثّل السبب من كل جملة. ثم اطلب منهم كتابة فقرة برهانية من البرهان الذي كتبوه في جدول من عمودين.

س: ما وجه المقارنة بين الفقرة البرهانية التي كتبتها والبرهان في المثال ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : البرهان الذي كتبته يحتوي على الأفكار في نفس الترتيب، لكني استعملت بعض المصطلحات المختلفة. لا تزال كل جملة تتضمن العبارة والسبب، بالتالي لا يزال البرهان صحيحًا.]

مثال 4 كتابة برهان باستعمال نظرية

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما التعريفات التي قد تساعدك على إثبات النظرية 3-4 ؟

[تعريف الزاوية القائمة وتعريف الزوايا المتطابقة.]

س: ما الطريقة الأخرى التي يمكنك من خلالها كتابة نظرية الأزواج الخطية ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : إذا كانت زاويتان تشكلان زوجًا خطيًا، فإنهما متكاملتان.]

س: كيف تفسر خاصية التعدي للمساواة العبارة 3 ؟

[$m\angle 1 = 150°$ و $m\angle 2 = m\angle 1$ إذن $m\angle 2 = 150°$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4.

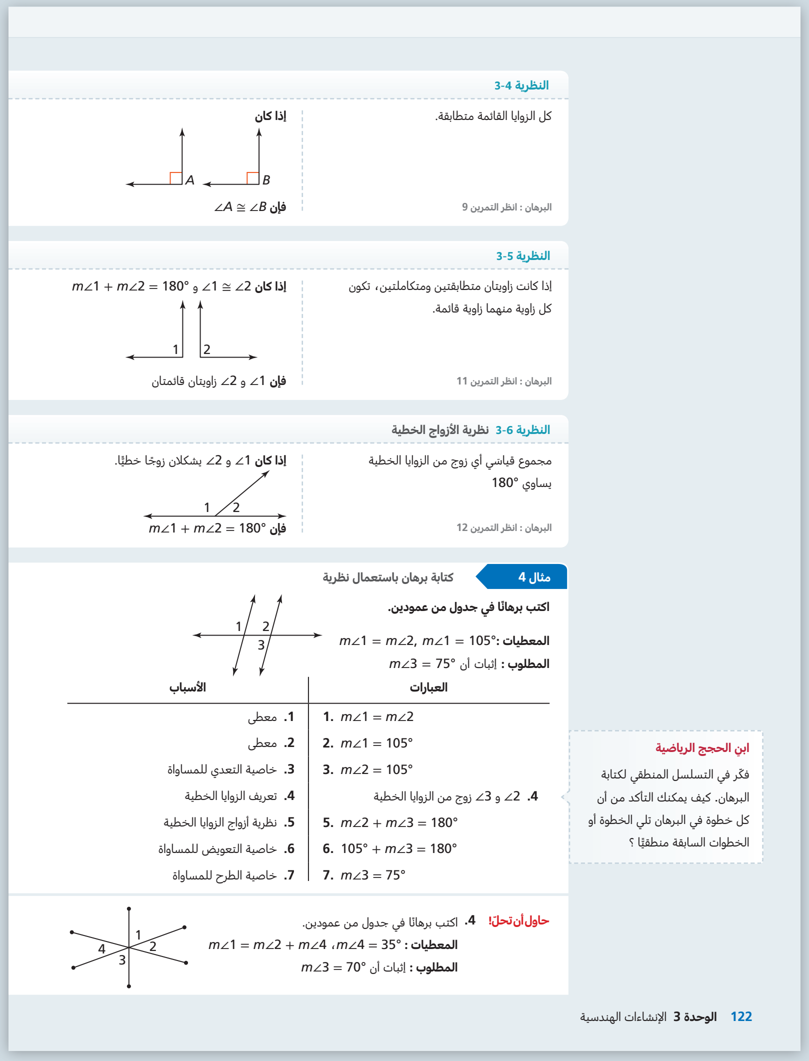
العبارات	الأسباب
1. $m\angle 4 = 35°$	1. معطى
2. $\angle 4 \cong \angle 2$	2. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
3. $m\angle 4 = m\angle 2$	3. تعريف الزوايا المتطابقة
4. $m\angle 2 = 35°$	4. خاصية التعدي للمساواة
5. $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$	5. معطى
6. $m\angle 1 = 35° + 35°$	6. خاصية التعويض للمساواة
7. $m\angle 1 = 70°$	7. تبسيط
8. $\angle 1 \cong \angle 3$	8. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
9. $m\angle 1 = m\angle 3$	9. تعريف الزوايا المتطابقة
10. $m\angle 3 = 70°$	10. خاصية التعدي للمساواة

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

برّر منطقيًا ما الخصائص أو النظريات أو التعريفات التي استعملتها لإثبات أن $m\angle 3 = 70°$ ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، وتعريف الزوايا المتطابقة، وخاصية التعويض للمساواة.]



النظرية 3-4

كل الزوايا القائمة متطابقة.

البرهان : انظر التمرين 9

إذا كان

فإن $\angle A \cong \angle B$

النظرية 3-5

إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين، تكون كل زاوية منهما زاوية قائمة.

البرهان : انظر التمرين 11

إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ و $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

فإن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان

النظرية 3-6 نظرية الأزواج الخطية

مجموع قياسي أي زوج من الزوايا الخطية يساوي 180°

البرهان : انظر التمرين 12

إذا كان $\angle 1$ و $\angle 2$ يشكلان زوجًا خطيًا.

فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

مثال 4 كتابة برهان باستعمال نظرية

اكتب برهانًا في جدول من عمودين.

المعطيات : $m\angle 1 = m\angle 2,\ m\angle 1 = 105°$

المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 75°$

العبارات	الأسباب
1. $m\angle 1 = m\angle 2$	1. معطى
2. $m\angle 1 = 105°$	2. معطى
3. $m\angle 2 = 105°$	3. خاصية التعدي للمساواة
4. $\angle 2$ و $\angle 3$ زوج من الزوايا الخطية	4. تعريف الزوايا الخطية
5. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	5. نظرية أزواج الزوايا الخطية
6. $105° + m\angle 3 = 180°$	6. خاصية التعويض للمساواة
7. $m\angle 3 = 75°$	7. خاصية الطرح للمساواة

ابنِ الحجج الرياضية

فكّر في التسلسل المنطقي لكتابة البرهان. كيف يمكنك التأكد من أن كل خطوة في البرهان تلي الخطوة أو الخطوات السابقة منطقيًا ؟

حاول أن تحلّ! 4. اكتب برهانًا في جدول من عمودين.

المعطيات : $m\angle 4 = 35°$، $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$

المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 70°$

122 **الوحدة 3** الإنشاءات الهندسية

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 4**)

الكتابة مستوى 2 اطلب من الطلاب كتابة تفسير يوضح لماذا يبرّر كل سبب العبارة المناظرة له.

س: كيف تفسر نظرية الأزواج الخطية العبارة 5 ؟

[$\angle 2$ و $\angle 3$ يشكلان زوجًا خطيًا، لذا وفق نظرية الأزواج الخطية، مجموعهما يساوي 180°]

س: كيف تفسر خاصية الطرح للمساواة العبارة 7 ؟

[للانتقال من العبارة 6 إلى العبارة 7، يجب طرح 105° من طرفي المعادلة.]

القراءة مستوى 3 بعد قراءة المثال، اطلب من الطلاب أن يجدوا موقع كل جزء من نص المسألة في البرهان، ثم اطلب منهم توضيح لماذا يعدّ موقع كل عبارة في البرهان منطقيًا.

س: لماذا $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 1 = 105°$ هما أول عبارتين في البرهان ؟

[إنهما تمثلان المعلومات المعطاة، ومن الجيد استهلال البرهان بالمعطيات.]

س: ما الجزء غير الوارد في البرهان من نص المسألة؟ وضح إجابتك.

[كلمة "إثبات" غير مذكورة في البرهان لأنها، خلافًا لكلمة "معطى"، ليست السبب الذي يربط العبارة 6 بالعبارة 7.]

ملخص المفهوم كتابة البراهين

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين البرهان في جدول من عمودين والفقرة البرهانية ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كلاهما يستعمل نفس المعلومات والتبريرات للوصول إلى نفس الاستنتاج. في البرهان المكتوب في جدول من عمودين، تُكتب العبارات في العمود الأيمن والأسباب في العمود الأيسر. الفقرة البرهانية تُصاغ في جمل.]

س: ما هي إيجابيات كل نوع من هذين النوعين من البراهين؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يسهل فهم البرهان المكتوب في جدول من عمودين بسبب تصميمه. الفقرة البرهانية حوارية أكثر لكنها قد تحتل مساحة أصغر.]

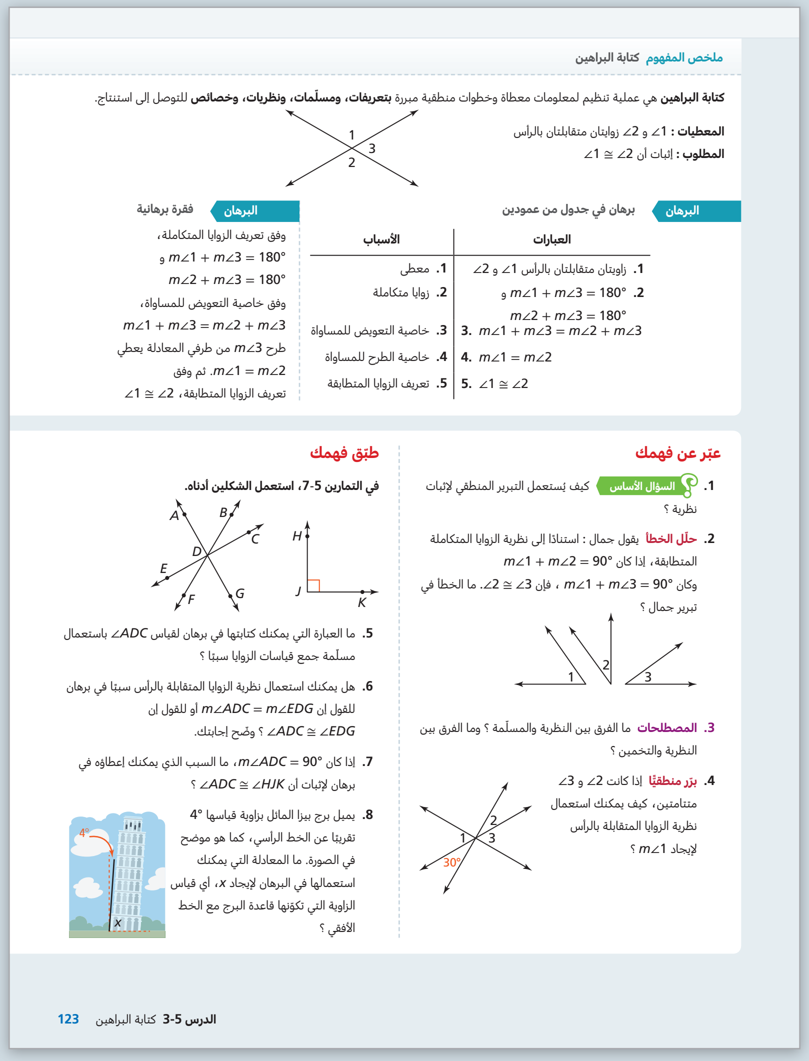
عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 2 لم يميز جمال بين الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة. ساعد الطلاب على ابتكار وسيلة تساعدهم على تذكّر الفرق بين هذين النوعين من الزوايا. على سبيل المثال، يأتي حرف التاء في "تام" قبل حرف الكاف في "كامل" في الأبجدية، والعدد 90 يأتي قبل العدد 180 في العد.

الإجابات

1. يبدأ البرهان بعبارة معطاة تليها سلسلة من الخطوات التي يُستعمل فيها التبرير المنطقي لتوضيح سبب صحة تخمين ما.
2. كان على جمال استعمال نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة.
3. المسلّمة هي عبارة نسلّم بصحتها من دون برهان، أما النظرية فهي عبارة رياضية أو منطقية تحتاج لإثبات، أما التخمين فيعرّف على أنه استنتاج نتوصل إليه من خلال الاستدلال الاستقرائي، والنظرية هي تخمين تم إثبات صحته.
4. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : بما أن $\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متتامتان، فإن $\angle 1$ والزاوية التي قياسها $30°$ زاويتان متتامتان وفق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، وبالتالي مجموع قياسيهما يساوي $90°$، إذن $m\angle 1 = 90° - 30° = 60°$.
5. $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$
6. $\angle ADC \cong \angle EDG$؛ تنصّ نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس على أن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة، ولا تقول إن قياساتها متساوية.
7. جميع الزوايا القائمة متطابقة.
8. $x° + 4° = 90°$



ملخص المفهوم كتابة البراهين

كتابة البراهين هي عملية تنظيم لمعلومات معطاة وخطوات منطقية مبررة **بتعريفات، ومسلّمات، ونظريات، وخصائص** للتوصل إلى استنتاج.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زوايتان متقابلتان بالرأس

المطلوب : إثبات أن $\angle 2 \cong \angle 1$

البرهان برهان في جدول من عمودين

العبارات	الأسباب
1. زاويتان متقابلتان بالرأس $\angle 1$ و $\angle 2$	1. معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2. زوايا متكاملة
3. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. خاصية التعويض للمساواة
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. خاصية الطرح للمساواة
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. تعريف الزوايا المتطابقة

البرهان فقرة برهانية

وفق تعريف الزوايا المتكاملة، $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ وفق خاصية التعويض للمساواة، $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$ طرح $m\angle 3$ من طرفي المعادلة يعطي $m\angle 1 = m\angle 2$. ثم وفق تعريف الزوايا المتطابقة، $\angle 2 \cong \angle 1$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟
2. **حلّل الخطأ** يقول جمال : استنادًا إلى نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ وكان $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$. ما الخطأ في تبرير جمال ؟
3. **المصطلحات** ما الفرق بين النظرية والمسلّمة ؟ وما الفرق بين النظرية والتخمين ؟
4. **برّر منطقيًّا** إذا كانت $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتين، كيف يمكنك استعمال نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس لإيجاد $m\angle 1$ ؟

طبّق فهمك

في التمارين 5-7، استعمل الشكلين أدناه.

5. ما العبارة التي يمكنك كتابتها في برهان لقياس $\angle ADC$ باستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا سببًا ؟
6. هل يمكنك استعمال نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس سببًا في برهان للقول إن $m\angle ADC = m\angle EDG$ أو للقول إن $\angle ADC \cong \angle EDG$ ؟ وضّح إجابتك.
7. إذا كان $m\angle ADC = 90°$، ما السبب الذي يمكنك إعطاؤه في برهان لإثبات أن $\angle ADC \cong \angle HJK$ ؟
8. يميل برج بيزا المائل بزاوية قياسها $4°$ تقريبًا عن الخط الرأسي، كما هو موضح في الصورة. ما المعادلة التي يمكنك استعمالها في البرهان لإيجاد x، أي قياس الزاوية التي تكوّنها قاعدة البرج مع الخط الأفقي ؟

الدرس 5-3 كتابة البراهين 123

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-26	9-26

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1,2	10, 14-17, 22	2
3	25	2
	1, 3, 18	3
4	9, 23, 24, 26	2
	11, 12, 19, 20	3
	21	4

الإجابات

.9 .2 تعريف الزوايا القائمة؛ .3 خاصية التعويض للمساواة؛ .4 تعريف الزوايا المتطابقة.

.10 استعمل خالد تعريف الزوايا المتتامة في حين كان عليه استعمال تعريف الزوايا المتكاملة.

.11 بما أن $\angle M$ و $\angle N$ متطابقتان، فإن $m\angle M = m\angle N$ وفق تعريف الزوايا المتطابقة. وبما أن $\angle M$ و $\angle N$ زاويتان متكاملتان، فإن $m\angle M + m\angle N = 180°$. عوّض $m\angle M$ عن $m\angle N$ للحصول على $m\angle M + m\angle M = 180°$ أو $2m\angle M = 180°$. استعمل خاصية القسمة للحصول على $m\angle M = 90°$. عوّض $m\angle N$ عن $m\angle M$ للحصول على $m\angle N = 90°$. إذن، وفق تعريف الزوايا القائمة، $\angle M$ و$\angle N$ زاويتان قائمتان.

.12

العبارات	الأسباب
.1 $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان خطيتان.	.1 معطى
2. $m\angle ABC + m\angle CBD = 180°$	.2 نظرية الأزواج الخطية
.3 $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متكاملتان.	.3 تعريف الزوايا المتكاملة

.13 بما أن $\angle VZX$ و $\angle WZY$ زاويتان قائمتان، فإن $\angle VZW$ و $\angle WZX$ زاويتان متتامتان و $\angle XZY$ و $\angle WZX$ زاويتان متتامتان. إذن، وفق نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، $\angle XZY \cong \angle VZW$.

14. $x = 42; 84°; 84°$

15. $x = 22; 109°; 109°$

16. $x = 55; 118°; 118°$

17. $x = 25; 125°; 125°$

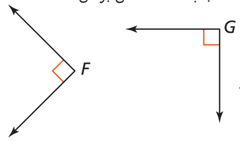
تدرَّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

.9 **ابنِ الحجج الرياضية** اكتب الأسباب الناقصة من برهان النظرية 3-4

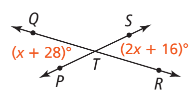
المعطيات : $\angle F$ و $\angle G$ زاويتان قائمتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle F \cong \angle G$



العبارات	الأسباب
.1 $\angle F$ و $\angle G$ زاويتان قائمتان	.1 معطيات
.2 $m\angle F = 90°$ و $m\angle G = 90°$	
3. $m\angle F = m\angle G$	
4. $\angle F \cong \angle G$	

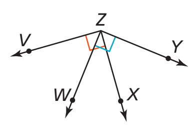
.10 **حلّل الخطأ** استعمل خالد نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس وتعريف الزوايا المتتامة لاستنتاج أن $m\angle PTR = 50°$ في الشكل المبيّن أدناه. ما الخطأ الذي وقع فيه خالد ؟



.11 **ابنِ الحجج الرياضية** اكتب فقرة برهانية للنظرية 3-5 بمعلومية أن $\angle N$ و $\angle M$ زاويتان متطابقتان ومتكاملتان، برهن أن $\angle N$ و $\angle M$ زاويتان قائمتان.

.12 **ابنِ الحجج الرياضية** اكتب برهانًا في جدول من عمودين للنظرية 3-6، بمعلومية أن $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان خطيتان، برهن أن $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متكاملتان.

.13 **مهارات التفكير العليا** وضّح كيف تنطبق نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة على الشكل أدناه.

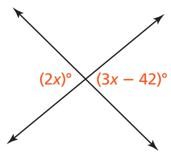


تدرَّب

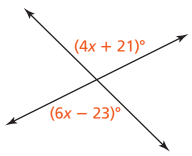
في التمارين 14-17، أوجد قيمة المتغيّر وقياس الزاوية المحددة.

انظر المثالين 1 و 2

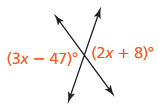
14.



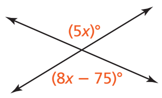
15.



16.



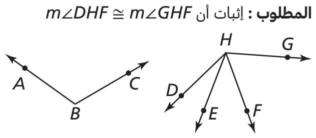
17.



.18 اكتب فقرة برهانية. انظر المثال 3

المعطيات : $m\angle ABC = 114°$ ؛ $m\angle DHE = 25°$ ؛ $m\angle EHF = 41°$ ؛ $\angle ABC$ و $\angle GHF$ زاويتان متكاملتان.

المطلوب : إثبات أن $m\angle DHF \cong m\angle GHF$



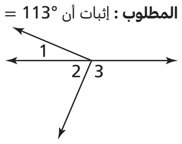
في التمرينين 19 و 20، اكتب برهانًا في جدول من عمودين للعبارة.

انظر المثال 4

.19 **المعطيات :** $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.

$m\angle 1 = 23°$

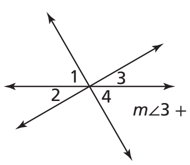
المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 113°$



.20 **المعطيات :** $m\angle 2 = 30°$

$m\angle 1 = 2m\angle 2$

المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$



124 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

.18 وفق مسلّمة جمع قياسات الزوايا، $m\angle DHF = 25° + 41°$، التي تُبسَّط إلى $m\angle DHF = 66°$. وفق تعريف الزوايا المتكاملة $\angle GHF$ و $\angle ABC$ زاويتان متكاملتان. بما أن $\angle GHF$ و $\angle ABC$ زاويتان متكاملتان، فإن $\angle DHF \cong \angle GHF$ وفق نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة.

.19

العبارات	الأسباب
1. $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.	**.1** معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	**.2** تعريف الزوايا المتتامة
3. $m\angle 1 = 23°$	**.3** معطى
4. $23° + m\angle 2 = 90°$	**.4** بالتعويض
5. $m\angle 2 = 67°$	**.5** خاصية الطرح للمساواة
6. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**.6** نظرية الأزواج الخطية
7. $67° + m\angle 3 = 180°$	**.7** بالتعويض
8. $m\angle 3 = 113°$	**.8** خاصية الطرح للمساواة

.20

العبارات	الأسباب
1. $m\angle 2 = 30°$	**.1** معطى
2. $m\angle 1 = 2m\angle 2$	**.2** معطى
3. $m\angle 1 = 2(30°)$	**.3** بالتعويض
4. $m\angle 1 = 60°$	**.4** بالتبسيط
5. $m\angle 3 = 30°$	**.5** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6. $m\angle 4 = 60°$	**.6** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
7. $m\angle 3 + m\angle 4 = 30° + m\angle 4$	**.7** خاصية الجمع للمساواة
8. $m\angle 3 + m\angle 4 = 30° + 60°$	**.8** بالتعويض
9. $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$	**.9** بالتبسيط

الإجابات

21. القسم A : 97.2°، القسم B : 82.8°،
القسم D : 64.8°، القسم F : 46.8°
وفق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومسلّمة جمع قياسات الزوايا، قياس زاوية القسم C يساوي $97.2° - 64.8° = 32.4°$،
وفق نظرية الزوايا المتكاملة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا، قياس زاوية القسم E :
$180° - (32.4° + 64.8° + 46.8°) = 36°$، نسبة القسم C هي 9% ونسبة القسم E هي 10%، لإيجاد النسب المئوية اضرب قياس الدرجة في 100 واقسمه على 360°

22. $m\angle 2 = 50°, m\angle 4 = 85°, m\angle 5 = 50°, m\angle 6 = 45°$

23. **a.** $\angle 2 \cong \angle 1$، النظرية 3-4
b. $\angle 4 \cong \angle 3$؛ نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

24. صحيحة دائمًا
غير صحيحة أبدًا
صحيحة أحيانًا
صحيحة أحيانًا
صحيحة دائمًا
صحيحة أحيانًا

25. A

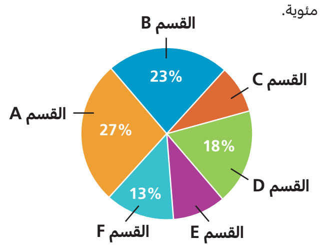
26. **الجزء A** من الزاوية العلوية باتجاه حركة عقارب الساعة، قياسات الزوايا هي:
96° و 51° و 33° و 96° و 51° و 33°
الجزء B قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

العبارات	الأسباب
1. $m\angle AGB = 33°$ و $m\angle AGF = 51°$	**1.** معطى
2. $m\angle CGD = 51°$	**2.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
3. $m\angle DGE = 33°$	**3.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

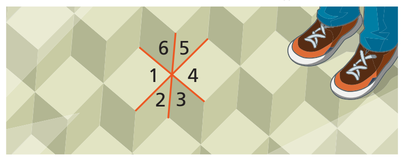
تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

21. **روابط في الرياضيات** يبين التمثيل البياني أدناه النسب المئوية للمبيعات التي حققتها الأقسام المختلفة في شركة خلال سنة واحدة. ما قياس الزاوية التي تكوّنها القطع المستقيمة لكل قسم ؟ ما النسب المئوية الناقصة ؟ وضّح كيف تمكنت من إيجاد كل نسبة مئوية.

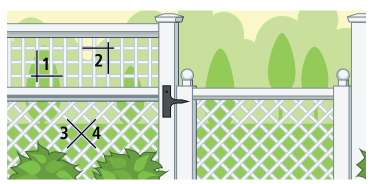


22. **استعمل البنية** صُمّم نوع من بلاط الأرضيات للإيهام بأن الأرضية ثلاثية الأبعاد. بمعلومية أن $\angle m1 = 85°$ و $\angle m3 = 45°$، ما قياسات بقية الزوايا ؟



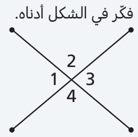
23. **برّر منطقيًّا** فكّر في الزوايا المبيّنة على شبكة بوابة الحديقة. باستعمال النظريات الواردة في هذا الدرس، ما الذي يمكنك أن تستنتجه من كل عبارة من العبارات التالية ؟ اذكر النظرية التي طبقتها للوصول إلى استنتاجك.

a. $m\angle 1 = 90°$ و $m\angle 2 = 90°$
b. $\angle 3$ و $\angle 4$ زوايتان متقابلتان بالراس.



تدرَّب على اختبار

24. فكّر في الشكل أدناه.



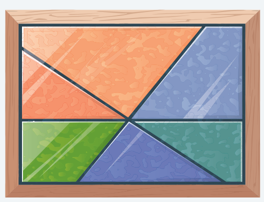
صنّف كل عبارة من العبارات التالية على أنها "صحيحة دائمًا" أو "صحيحة أحيانًا" أو "غير صحيحة أبدًا".

- $m\angle 1 + m\angle 4 = 180°$
- $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$
- $m\angle 2 + m\angle 4 = 180°$
- $\angle 2 \cong \angle 3$
- $\angle 2 \cong \angle 4$
- $m\angle 3 = m\angle 4$

25. **اختبار SAT/ACT** بمعلومية أن $\angle ABC$ و $\angle DEF$ متكاملتان وأن $\angle ABC$ و $\angle GHJ$ متكاملتان، ماذا يمكنك أن تستنتج عن الزوايا ؟

Ⓐ $m\angle DEF \cong m\angle GHJ$
Ⓑ $m\angle DEF + m\angle GHJ = 90°$
Ⓒ $m\angle DEF + m\angle GHJ = 180°$
Ⓓ $m\angle ABC \cong m\angle DEF$ و $m\angle ABC \cong m\angle GHJ$

26. **مهمة أدائية** يبيّن الشكل مستقيمات تقسم نافذة ملونة إلى عدة أجزاء.



الجزء A انسخ الشكل على ورقة.
ثم رقّم كل زاوية من الزوايا الداخلية المشتركة بنفس الرأس.
استعمل منقلة لقياس زاويتين من الزوايا الداخلية في الشكل.
أوجد قياسات الزوايا الأخرى باستعمال قياسَي هاتين الزاويتين.

الجزء B اختر زاويتين من الزوايا الداخلية لم تقسهما بالمنقلة. كيف يمكنك معرفة قياسَي هاتين الزاويتين ؟ اكتب برهانًا في جدول من عمودين لتوضّح كيف تعلم أن قياسهما صحيح.

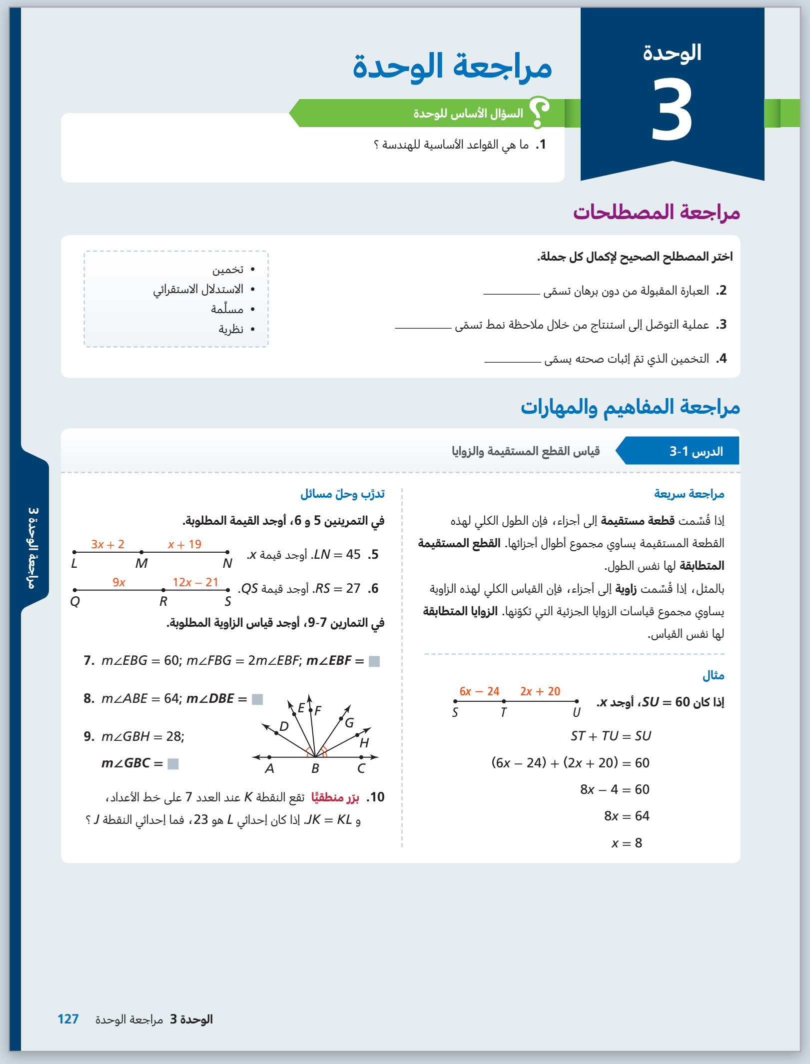
إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

الوحدة 3
الإنشاءات الهندسية

مراجعة الوحدة


الوحدة
3
مراجعة الوحدة
السؤال الأساس للوحدة
.1 ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

مراجعة المصطلحات
اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- تخمين
- الاستدلال الاستقرائي
- مسلّمة
- نظرية

.2 العبارة المقبولة من دون برهان تسمّى ________
.3 عملية التوصّل إلى استنتاج من خلال ملاحظة نمط تسمّى ________
.4 التخمين الذي تم إثبات صحته يسمّى ________

مراجعة المفاهيم والمهارات
الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا

مراجعة سريعة

إذا قُسّمت **قطعة مستقيمة** إلى أجزاء، فإن الطول الكلي لهذه القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطوال أجزائها. **القطع المستقيمة المتطابقة** لها نفس الطول.
بالمثل، إذا قُسّمت **زاوية** إلى أجزاء، فإن القياس الكلي لهذه الزاوية يساوي مجموع قياسات الزوايا الجزئية التي تكوّنها. **الزوايا المتطابقة** لها نفس القياس.

مثال

إذا كان $SU = 60$، أوجد x.

$ST + TU = SU$

$(6x - 24) + (2x + 20) = 60$

$8x - 4 = 60$

$8x = 64$

$x = 8$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 5 و 6، أوجد القيمة المطلوبة.

.5 $LN = 45$. أوجد قيمة x.
.6 $RS = 27$. أوجد قيمة QS.

في التمارين 7-9، أوجد قياس الزاوية المطلوبة.

7. $m\angle EBG = 60$; $m\angle FBG = 2m\angle EBF$; $m\angle EBF =$ ■
8. $m\angle ABE = 64$; $m\angle DBE =$ ■
9. $m\angle GBH = 28$; $m\angle GBC =$ ■

.10 **برّر منطقيًا** تقع النقطة K عند العدد 7 على خط الأعداد، و $JK = KL$. إذا كان إحداثي L هو 23، فما إحداثي النقطة J ؟

127 مراجعة الوحدة **الوحدة 3**

تقديم السؤال الأساس

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

فيما يجيب الطلاب عن السؤال الأساس كتابةً، شجّعهم على تضمين إجاباتهم أمثلة تدعمها. ابحث عن المعلومات التالية في إجابات الطلاب.

- إذا قُسّمت قطعة مستقيمة إلى أجزاء، فإن الطول الكلي لهذه القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطوال أجزائها. القطع المستقيمة المتطابقة لها نفس الطول. وإذا قُسّمت زاوية إلى أجزاء، فإن قياس هذه الزاوية يساوي مجموع قياسات الزوايا التي قُسّمت إليها. الزوايا المتطابقة لها نفس القياس.
- الإنشاء الهندسي هو عملية رسم الأشكال الهندسية باستعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار فقط. تشمل الإنشاءات الهندسية نسخ الزوايا والقطع المستقيمة، وقياسها، وتجزئتها.
  عند رسم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي، يُستعمل قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة، ويُستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طولها.
- يشمل الاستدلال الاستقرائي إجراء تخمين من خلال تحديد نمط في متتالية من خلال الملاحظة. يُبنى التخمين على دليل، لكنه لا يكفي لإثبات صحة استنتاج. يمكن دحض التخمين بمثال مضاد واحد.
- الجملة الشرطية هي جملة بالصيغة "إذا...، فإن..." وتربط بين الفرضية والاستنتاج للجملة الشرطية وللجملة الإيجابية المعاكسة نفس القيمة الفعلية دائمًا.
- يستعمل البرهان الاستدلال الاستنباطي لتوضيح سبب صحة عبارة. العبارة المبرهنة تسمى نظرية.

الإجابات

.2 مسلّمة

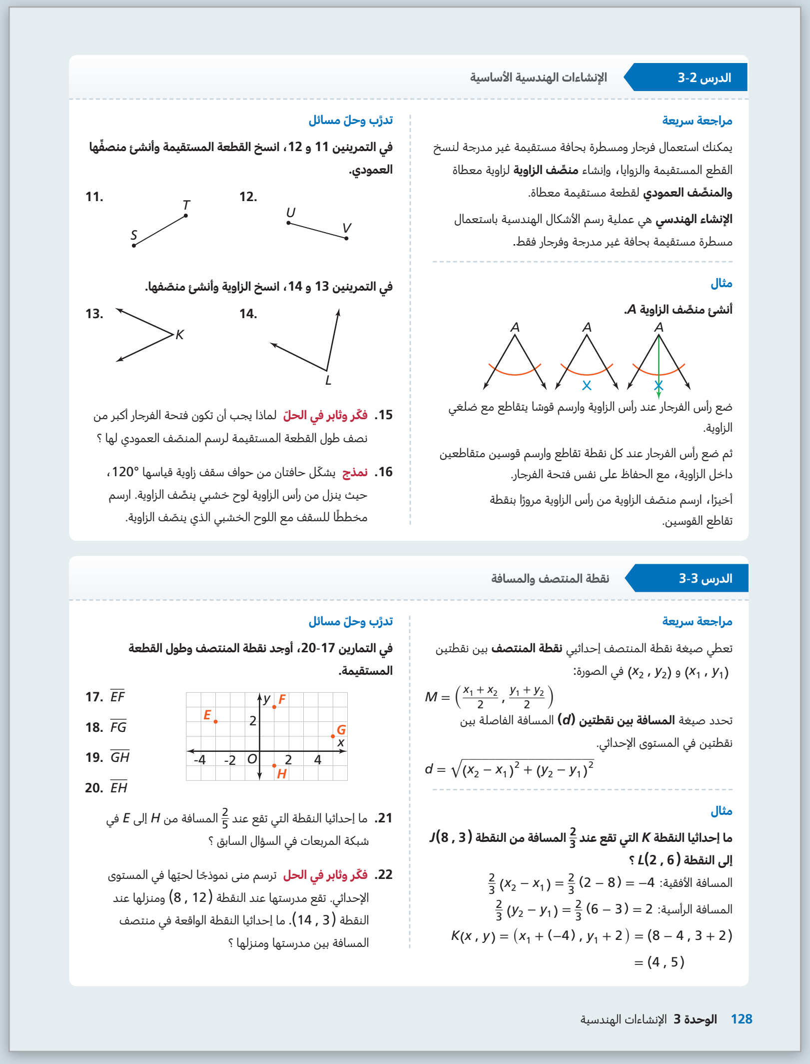
.3 الاستدلال الاستقرائي

.4 نظرية

.5 6 وحدات

.6 63 وحدة

7. 20°
8. 32°
9. 56°
10. −9



الدرس 3-2 الإنشاءات الهندسية الأساسية

مراجعة سريعة

يمكنك استعمال فرجار ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لنسخ القطع المستقيمة والزوايا، وإنشاء **منصِّف الزاوية** لزاوية معطاة **والمنصِّف العمودي** لقطعة مستقيمة معطاة.

الإنشاء الهندسي هي عملية رسم الأشكال الهندسية باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

مثال

أنشئ منصِّف الزاوية A.

ضع رأس الفرجار عند رأس الزاوية وارسم قوسًا يتقاطع مع ضلعَي الزاوية.

ثم ضع رأس الفرجار عند كل نقطة تقاطع وارسم قوسين متقاطعين داخل الزاوية، مع الحفاظ على نفس فتحة الفرجار.

أخيرًا، ارسم منصّف الزاوية من رأس الزاوية مرورًا بنقطة تقاطع القوسين.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 11 و 12، انسخ القطعة المستقيمة وأنشئ منصفَّها العمودي.

11. 12.

في التمرينين 13 و 14، انسخ الزاوية وأنشئ منصّفها.

13. 14.

15. **فكّر وثابر في الحلّ** لماذا يجب أن تكون فتحة الفرجار أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة لرسم المنصّف العمودي لها ؟

16. **نمذج** يشكّل حافتان من حواف سقف زاوية قياسها $120°$، حيث ينزل من رأس الزاوية لوح خشبي ينصّف الزاوية. ارسم مخططًا للسقف مع اللوح الخشبي الذي ينصّف الزاوية.

الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة

مراجعة سريعة

تعطي صيغة نقطة المنتصف إحداثي **نقطة المنتصف** بين نقطتين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) في الصورة:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

تحدد صيغة **المسافة بين نقطتين (d)** المسافة الفاصلة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال

ما إحداثيا النقطة K التي تقع عند $\frac{2}{3}$ المسافة من النقطة $J(8 , 3)$ إلى النقطة $L(2 , 6)$ ؟

المسافة الأفقية: $\frac{2}{3}(x_2 - x_1) = \frac{2}{3}(2 - 8) = -4$

المسافة الرأسية: $\frac{2}{3}(y_2 - y_1) = \frac{2}{3}(6 - 3) = 2$

$$K(x , y) = (x_1 + (-4) , y_1 + 2) = (8 - 4 , 3 + 2) = (4 , 5)$$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 17-20، أوجد نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة.

17. $\overline{EF}$

18. $\overline{FG}$

19. $\overline{GH}$

20. $\overline{EH}$

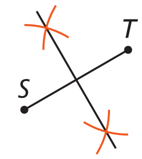
21. ما إحداثيا النقطة التي تقع عند $\frac{2}{5}$ المسافة من H إلى E في شبكة المربعات في السؤال السابق ؟

22. **فكّر وثابر في الحل** ترسم منى نموذجًا لحيّها في المستوى الإحداثي. تقع مدرستها عند النقطة $(8 , 12)$ ومنزلها عند النقطة $(14 , 3)$. ما إحداثيا النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين مدرستها ومنزلها ؟

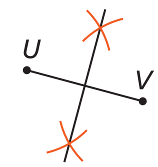
128 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الإجابات

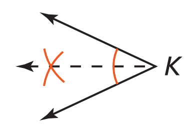
.11



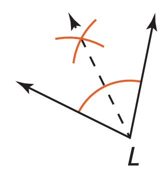
.12



.13

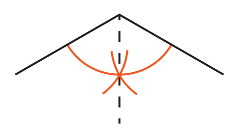


.14



.15 لن يتقاطع القوسان إذا كانت فتحة الفرجار أصغر من نصف طول القطعة المستقيمة.

.16



17. $\left(-1 , \frac{5}{2}\right)$; $\sqrt{17}$

18. $(3 , 2)$; $2\sqrt{5}$

19. $(3 , 0)$; $2\sqrt{5}$

20. $\left(-1 , \frac{1}{2}\right)$; 5

21. $\left(-\frac{3}{5} , \frac{1}{5}\right)$

22. $\left(11 , 7\frac{1}{2}\right)$

مراجعة الوحدة

الإجابات

23. 720, 5040

24. 15, 18

25. 27, 35

26. 37, 41

.27 مثال مضاد: المثلث القائم الزاوية.

.28 2 و 14؛ 4 و 16؛ 6 و 18؛ 8 و 20

.29 العبارة الصحيحة يجب أن تكون صحيحة في جميع الحالات، لذا فإن مثالًا مضادًا واحدًا يدحضها يكفي لإثبات عدم صحة عبارة. بينما المثال يثبت صحة العبارة في حالة واحدة فقط، لكنها قد لا تكون صحيحة في حالات أخرى.

30. 17.50$

31. $x = 28$; 78°; 78°

32. $x = 37$; 106°; 106°

.33

العبارات	الأسباب
1. $m\angle TUV = 90°$	**.1** مسلمة
2. $m\angle TUW + m\angle WUV = m\angle TUV$	**.2** جمع قياسات الزوايا
3. $y° + 42° = 90°$	**.3** خاصية الإبدال
4. $y° = 48°$	**.4** خاصية الطرح
5. $4x = y$	**.5** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6. $4x = 48$	**.6** خاصية الإبدال