الوحدة 2

الدوال والعمليات عليها

أحد المبادئ الأساسية في الاقتصاد هو أنّ قيمة المال ليست ثابتة، وإنما هي دالة بدلالة الزمن. ولأن الثروات تتحقق أو تزول من قبل أناس يحاولون استشراف مستقبل قيمة المال، فإنه يتم إيلاء الكثير من العناية للقياسات الكمية كمؤشر أسعار المستهلك، والذي يمثّل قياسًا أساسيًّا للتضخم في مختلف القطاعات الاقتصادية.

فيما يلي، ستتم دراسة الدوال وتمثيلاتها البيانية والعمليات عليها وكيفية الإستفادة منها في مختلف المجالات ولاسيما الاقتصادية منها.

2.1 الدوال وخصائصها Functions and Their Properties

ما ستتعلّمه

- تعريف الدالة ورمزها
- المجال والمدى
- الاتصال هندسيًا
- التزايد والتناقص
- القيم القصوى المحلية
- التناظر
- خطوط التقارب

... ولماذا

تشكّل الدوال وتمثيلاتها البيانية أساسًا لفهم الرياضيات والتطبيقات التي يمكن أن تستعملها في حياتك اليومية أو أثناء دراستك.

معيار الدرس

11A.3.1

المصطلحات

- المجال الضمني implied domain
- المجال المناسب relevant domain
- القيمة العظمى المحلية local maximum
- القيمة الصغرى المحلية local minimum
- دالة زوجية even function
- دالة فردية odd function
- خط تقارب أفقي horizontal asymptote
- خط تقارب رأسي vertical asymptote

الهدف

سيتمكّن الطلاب من تمثيل الدوال باستعمال جدول وجبريًا وبيانيًا. سيتمكنون كذلك من تحديد المجال والمدى للدوال ودراسة خصائصها كالقيم القصوى والتناظر وخطوط التقارب.

دليل الدرس

1. تعريف الدالة وصيغتها، المجال والمدى، الاتصال هندسيًا
2. الدوال المتزايدة والمتناقصة، القيم القصوى المحلية
3. التناظر، خطوط التقارب

تحفيز

أسأل الطلاب لماذا يكون مهمًا أن نستطيع تحديد متى يكون التمثيل البياني لدالة ما على الحاسبة معقولًا.

تعريف الدالة ورمزها

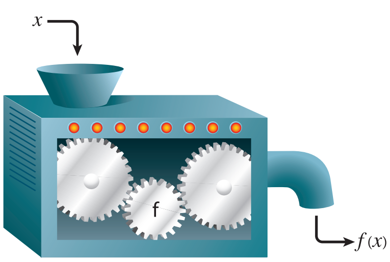
في الرياضيات وتطبيقاتها الكثير من الأمثلة على صيغ تربط متغيرات عددية بعضها ببعض، واستعمال مفهوم الدالة ورمزها هو أفضل ما يمكن للتعبير عن العلاقات بين هذه المتغيرات. فمفهوم الدالة هو بالفعل مفهوم بسيط، ولو لم يكن كذلك لكان استُبدل عبر الزمن بما هو أبسط منه. في ما يلي تعريف الدالة.

تعريف الدالة

الدالة من المجموعة D إلى المجموعة R قاعدة تعيّن لكل عنصر من D عنصرًا واحدًا فقط من R.

تُسمى مجموعة المدخلات D **مجال** الدالة، بينما تُسمى مجموعة المخرجات R **مدى** الدالة.

هناك طرق متعددة لفهم مبدأ الدوال. إحدى هذه الطرق هي النظر إلى الدالة كأنها آلة (الشكل 2.1.1) نُدخل فيها قيمًا (x) من المجال فتحولها الآلة (الدالة f هنا) إلى قيم (y) في المدى.

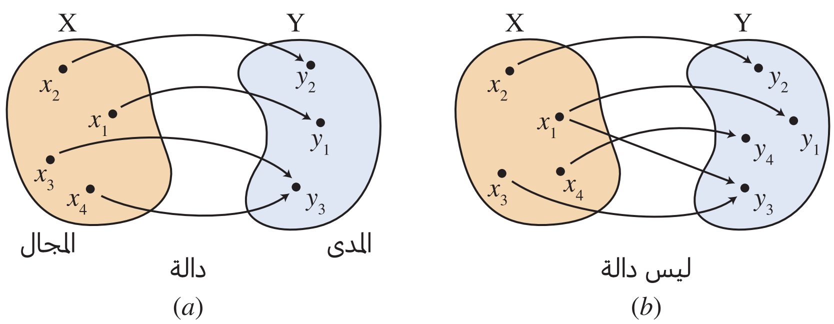


الشكل 2.1.1

للتعبير عن أن y تنتج عن تطبيق الدالة f على القيمة x، نستعمل رمز الدالة الذي اعتمده أويلر $y = f(x)$، الذي يُقرأ: **"y يساوي f لـ x"** أو **"قيمة f عند x"**.

يُسمى x **متغيرًا مستقلًا**، ويسمى y **متغيرًا تابعًا**.

يمكن أيضًا النظر إلى الدالة كأنها مخطط بين عناصر المجال والمدى. يمثّل الشكل $2.1.2(a)$ دالة تعيّن لكل عنصر من المجال X عنصرًا واحدًا وواحدًا فقط من المدى Y. أما الشكل $2.1.2(b)$ فهو لا يمثّل دالة لأنّ العنصر x_1 لا يرتبط بعنصر واحد وواحد فقط في Y.



الشكل 2.1.2 يوضّح الشكل (a) أن المخطط من X إلى Y يُمثّل دالة، فيما المخطط الموضّح في الشكل (b) من X إلى Y ليس دالة.

إن ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد وواحد فقط في المدى مبدأ أساسي في دراسة الدوال فإذا أُعطينا بعض المعلومات عن الدالة، مثلًا $f(2) = 8$، فإن ذلك يمنع من القول أن $f(2) = 4$ لأنه يناقض ما نعرفه عن هذه الدالة. لذلك لا يمكن أن تُعرّف دالة بصيغة قابلة لِلَّبس كصيغة $f(x) = 3x \pm 2$ على سبيل المثال.

مثال 1 تعريف دالة

هل الصيغة $y = x^2$ تعرّف y على أنها دالة للمتغير x؟ برّر إجابتك.

الحل

نعم، y هي دالة للمتغير x، يمكن أن نكتب هذه الصيغة باستعمال رمز الدالة $f(x) = x^2$ عندما نعطي قيمًا للمتغيّر x في الدالة فإن القيمة المخرجة هي قيمة وحيدة تساوي مربع x وليس هناك أي لبس في فهم ما هو مربع x.

حاول أن تحل التمرين 2

تمثيل الدوال بيانيًّا طريقة أخرى مفيدة لدراسة الدوال. يتكوّن التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ من مجموعة جميع النقاط $(x, f(x))$ حيث x عنصر من مجال f. لتكوين هذه الأزواج المرتّبة التي تبيّن منحنى الدالة $y = f(x)$، نُوائم قيم المجال الواقعة على المحور x مع قيم المدى المناظرة لها على المحور y.

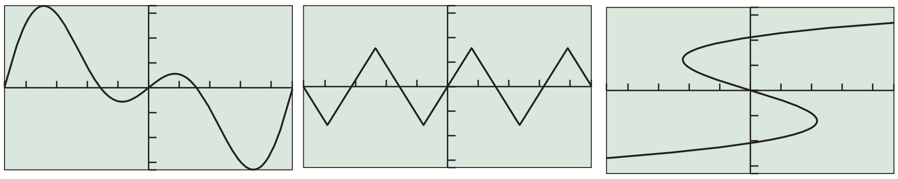
اختبار الخط الرأسي

يمثّل المنحنى (وهو مجموعة نقاط (x, y)) في المستوى الإحداثي xy منحنى لدالة فقط إذا تقاطع مع أي خط رأسي بنقطة واحدة على الأكثر.

من الواضح أن إختبار الخط الرأسي يختبر فيما إذا كان التمثيل البياني يعتبر تمثيلًا بيانيًا لدالة أم لا، كما سنرى في المثال التالي:

مثال 2 تمييز التمثيل البياني للدوال

أي من التمثيلات البيانية الثلاثة أدناه ليس تمثيلًا بيانيًّا لدالة؟ كيف يمكنك تحديد ذلك؟



(A) (B) (C)

الحل

(A) لا يوجد خط رأسي يتقاطع مع المنحنى البياني في أكثر من نقطة واحدة لذا فالتمثيل هو تمثيلّ بيانيّ لدالّة.

(B) لا يوجد خط رأسي يتقاطع مع المنحنى البياني في أكثر من نقطة واحدة لذا فالتمثيل هو تمثيلّ بيانيّ لدالّة.

(تابع)

لمحة تاريخية

يعود مصطلح الدالة بشكل عام إلى جوتفريد ليبنز (1646–1716)، أحد روّاد حساب التفاضل والتكامل. وكان اهتمامه بوضع الأسس الواضحة للتعبير عن الدوال وعملياتها من أهم مساهماته في التقدم العلمي، وهذا ما يفسر أننا ما زلنا نستعمل اسس التعبير هذه عند دراسة الرياضيات حتى اليوم. ومن المُلفت، أن ليونارد أويلر (1707-1783)، وليس ليبنز، هو من أدخل الرمز المعروف $f(x)$.

سؤال للتفكر

س: حدّد المتغير المستقل والمتغير التابع في الصيغة $y = x^2$.

نموذج إجابة:

x هو المتغير المستقل و y هو المتغير التابع.

ملاحظة تعليمية

التعود على مفهوم الدالة مهم للغاية للاستعداد لدراسة التحليل الرياضي. يمكّن الرسم البياني على الحاسبة الطلاب من إحراز فهم غير مسبوق لمفهوم الدوال.

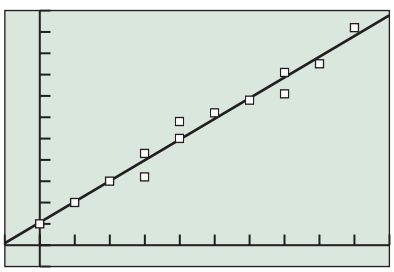
تنبيه

يحتاج الطلاب الذين لم يتعرفوا بعد على مفهوم الدوال إلى مزيد من الوقت في هذا القسم. من المفيد تذكير الطلاب أن قيمة y تعتمد على قيمة x.

تنبيه

عند الانتقال من النموذج العددي إلى النموذج الجبري، نستعمل غالبًا دالة لتقريب أزواج البيانات التي تخالف تعريفنا للدالة.

في الشكل 2.1.3 نرى أن العديد من أزواج نقاط البيانات تفشل في اختبار الخط الرأسي لكن يتم تقريبها بدرجة جيدة باستعمال دالة خطية.



الشكل 2.1.3

التمثيل في (C) ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة، لأنه يوجد ثلاث نقاط مختلفة على المنحنى البياني الإحداثي x لها 0، إذن المنحنى البياني لا يعيّن قيمة واحدة محددة عندما $x = 0$.
(في الواقع، نلاحظ أنه يوجد أعداد كثيرة بين -2 و 2، يعيّن لها التمثيل البياني قيمًا متعددة).

حاول أن تحل التمرين 4

المجال والمدى

غالبًا ما تعرّف الدالة جبريًا من خلال صيغة صريحة بدلالة قيم المتغير في المجال. غير أن هذه الصيغة تعبر عن الموقف الحياتي بصورة كاملة بدون تحديد دقيق للمجال الفعلي للدالة.

مثلًا، يمكننا تعريف حجم كرة بدلالة نصف قطرها باستعمال الصيغة:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

هذه الصيغة معرّفة لجميع الأعداد الحقيقية، لكن دالة الحجم غير معرّفة لقيم المتغير r السالبة. لذا، إذا كان غرضنا دراسة دالة الحجم، فعلينا أن نحصر مجالها بقيم المتغير r الموجبة.

توافق بشأن المجال

عمومًا، المجال الفعلي للدالة هو مجال صيغتها الجبرية، ويسمّى **المجال الضمني**.
وبالنسبة إلى النماذج، سنستعمل مجالاً يناسب الموقف، ويسمّى **المجال المناسب**.

مثال 3 إيجاد مجال دالة

أوجد مجال كل دالة:

A. $f(x) = \sqrt{x+3}$

B. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

C. $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ **إذا كانت $A(s)$ مساحة مثلث متطابق الأضلاع، و s طول كل ضلع.**

الحل

حل جبريًا

A. لا يمكن للمجذور أن يكون سالبًا.
نكتب إذن: $x + 3 \geq 0$ ونحل لنجد $x \geq -3$.
إذن مجال الدالة هو $[-3, \infty[$.

(تابع)

سؤال للتفكر

س: هل يمكن أن يكون في التمثيل البياني لدالة نقطتان لهما نفس الإحداثي x؟
نموذج إجابة:
كلا، لأن صيغة الدالة تعطي لكل قيمة x قيمة y واحدة.

نشاط المصطلحات

قم بإعداد الطلاب لفهم المجال والمدى من خلال مراجعة المصطلحات: "فترة"، "متباينة"، "أعلى"، "أدنى". بيّن أن تحديد المجال والمدى يعتمد على وصف يستعمل المتباينات أو الفترات، وأن رمز الفترة يعبّر عن مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تقع بين عددين يمثّلان حدّي الفترة. دع الطلاب يميزون بين المجال والمدى.

حدّد مجال ومدى كل من الدوال:

a. $f(x) = 3x + 7$
b. $g(x) = x^2 + 1$
c. $k(x) = 5x - 3$
d. $h(x) = 2x^2 - 5$

نموذج إجابة:

a. المجال $]-\infty, \infty[$
المدى $]-\infty, \infty[$

b. المجال $]-\infty, \infty[$
المدى $[1, \infty[$

c. المجال $]-\infty, \infty[$
المدى $]-\infty, \infty[$

d. المجال $]-\infty, \infty[$
المدى $[-5, \infty[$

تعلّم تعاوني

ربما يجد بعض الطلاب صعوبة في استيعاب مفهومَي المجال والمدى. أوجد فرصة تسمح بمناقشة وتسجيل المجال والمدى لعدد من الدوال، وذلك من خلال عمل الطلاب ضمن مجموعات، وهذا ما يمكّنهم من مساعدة بعضهم البعض ويعطيهم دفعًا في فهم الأنشطة الاستكشافية.

الجذر الزوجي

أي مجذور للجذر الزوجي لا يمكن أن يكون سالبًا أبدًا.

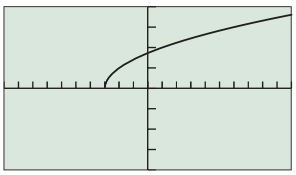
B. لا يمكن للمجذور في البسط أن يكون سالبًا، إذن $x \geq 0$.
كذلك لا يمكن أن يساوي مقام الكسر صفرًا، إذن $x \neq 5$.
هكذا يكون مجال الدالة هو الفترة $[0, \infty[$ ما عدا العدد 5،
وهو ما يمكن كتابته على شكل اتحاد مجموعتين: $[0, 5[\cup]5, \infty[$.

C. مجال الصيغة الجبرية هو $]-\infty, \infty[$ غير أن النمذجة تمنع من إعطاء s قيمًا سالبة.
إذن، مجال A هو الفترة $[0, \infty[$.

تحقق بيانيًّا

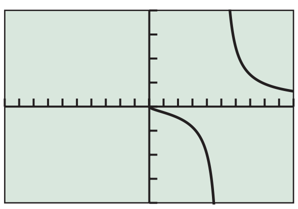
يمكننا دعم إجاباتنا في (A) و (B) بالتمثيل البياني، إذ يجب ألا ترسم الآلة الحاسبة (أو برامج الرسم الالكتروني) نقاطًا حيث لا تكون الدالة معرّفة.

A. نلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x+3}$ (الشكل a) يبيّن فقط النقاط حيث $x \geq -3$ كما هو متوقع.



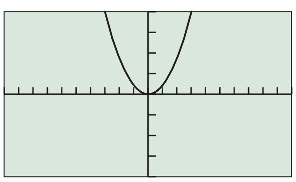
$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$
(a)

B. التمثيل البياني للدالة $y = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$ (الشكل b) يبيّن فقط النقاط حيث $x \geq 0$ و $x \neq 5$ كما هو متوقع.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$
(b)

C. التمثيل البياني للدالة $y = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$ (الشكل c) يبيّن المجال غير المحدود للصيغة الجبرية للدالة: كل الأعداد الحقيقية.
لا وسيلة لجعل الآلة الحاسبة تبيّن أن s هو طول ضلع المثلث ويفترض لذلك أن يكون عددًا موجبًا.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$
(c)

حاول أن تحل التمرين 7

عادةً، يكون إيجاد المدى لدالة مهمة أكثر صعوبة من إيجاد المجال لهذه الدالة، وذلك على الرغم من أن الأمور تبدو متشابهة من وجهة النظر البيانية: لإيجاد المجال علينا أن نحدد القيم على المحور x التي يقابلها نقاط على منحنى الدالة ولإيجاد المدى علينا أن نحدد القيم على المحور y التي يقابلها نقاط على منحنى الدالة. يمكننا استعمال المعالجة الجبرية والبيانية معًا لإنتاج مقاربة مهمة كي نحدد المدى للدالة، كما في المثال 4

إرشاد

الرمز "$\cup$" ، يُقرأ "اتحاد" ويعني أن عناصر المجموعتين تندمج معًا لتشكيل مجموعة واحدة.

سؤال للتفكر

س: من دون إيجاد المجال، هل ينتمي العدد -7 إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ ؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن تعويض x بالعدد -7 يؤدي إلى مجذور سالب لجذر زوجي وهذا غير مقبول.

ملاحظة تعليمية

قد يكون من الضروري مراجعة رمز الاتحاد حين تكون المجموعات على شكل فترات.

تنبيه

قد تُظهر بعض الآلات الحاسبة خطًا رأسيًا غير متوقع يمر بالمحور x عند $x = a$ عندما لا تكون a في مجال الدالة. يمثل هذا الخط، الذي يجب ألا يكون موجودًا، شكلاً آخر من أشكال الخلل في برنامج التمثيل البياني على الآلة الحاسبة، وبتجاهله، نلاحظ أن a ليس في المجال، كما هو متوقع.

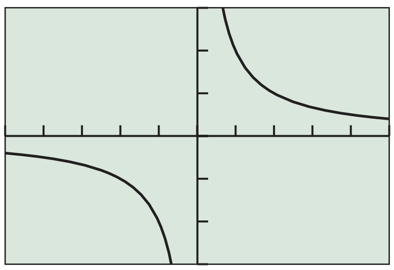
مثال 4 إيجاد مدى دالة

أوجد مدى الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$

الحل

حل بيانيًا

التمثيل البياني للدالة $y = \frac{2}{x}$ مبيّن في الشكل أدناه.



$[-5, 5]$ في $[-3, 3]$

من الواضح أن $x = 0$ غير موجود في مجال الدالة (لأنه كما هو متوقع لا يمكن لمقام الكسر أن يساوي صفرًا).
من الواضح أيضًا أن مدى الدالة هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 0

تأكد جبريًا

يمكن أن نؤكد أن 0 ليس في مدى الدالة باستعمال المعادلة $\frac{2}{x} = 0$

$$\frac{2}{x} = 0$$

$$2 = 0 \times x$$

$$2 = 0$$

بما أن $2 = 0$ لا يمكن أن تصح أبدًا، فإن المعادلة $\frac{2}{x} = 0$ لا يمكن أن تصح أبدًا. إذن $y = 0$ ليس في مدى الدالة.
كيف يمكننا من جهة أخرى أن نتأكد من أن كل الأعداد الحقيقية الأخرى موجودة في مدى الدالة؟
ليكن $k \neq 0$ أي عدد حقيقي آخر. حل المعادلة $\frac{2}{x} = k$.

$$\frac{2}{x} = k$$

$$2 = k \times x$$

$$x = \frac{2}{k}$$

كما تلاحظ، لا مشكلة في احتساب قيمة x في هذه الحالة. وعليه 0 هو العدد الوحيد غير الموجود في المدى.
إذن، المدى هو $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

حاول أن تحل التمرين 11

سؤال للتفكر

س: هل يمكننا القول إن أي عدد لا ينتمي إلى مجال الدالة لا يمكن أن يكون في مداها؟
نموذج إجابة:
كلا، فالعدد 4 لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x - 5}$، لكنه موجود في مداها لأن $f(21) = \sqrt{21 - 5} = \sqrt{16} = 4$.

رمز الدالة

عادة لا يستعمل برنامج التمثيل البياني رمز الدالة. لذا يتم إدخال الدالة $f(x) = x^2 + 1$ في صورة $y_1 = x^2 + 1$. في بعض برامج التمثيل البياني، يمكن إيجاد قيمة f عند $x = 3$ عن طريق إدخال $y_1\,(3)$ على الشاشة الرئيسية. في برامج أخرى، $y_1\,(3)$ يعني $y_1 \times 3$.

ملاحظة تعليمية

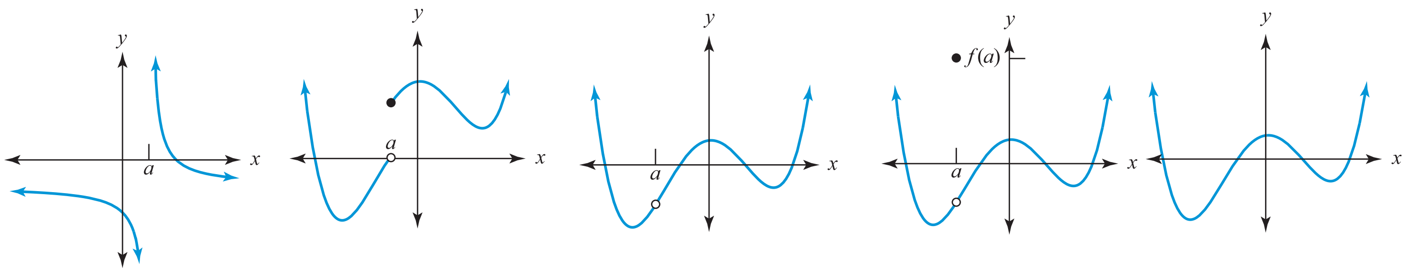
تمكّن الحاسبة البيانية الحديثة من خلال التمثيل البياني للدوال من التعرف على الكثير من الظواهر العلمية التي يمكن نمذجتها باستعمال الدوال، وهذا مهم لأن الطلاب سوف يجدون أنفسهم مضطرين لتمثيل الدوال التي تمثّل بعض الظواهر بيانيًا.

نشاط تمثيلي

ارسم منحنى دالة يكون مجالها $[-5, -1] \cup [2, 4[$ ومداها $[-4, -1] \cup [1, \infty[$.

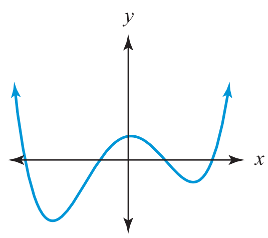
الاتصال هندسيًّا

أحد أهم خواص الدوال التي تنمذج سلوكًا من واقع الحياة هو أنها متصلة. من الناحية البيانية، تكون الدالة متصلة عند نقطة إذا لم يكن في تمثيلها البياني انفصال عند هذه النقطة. يمكننا توضيح هذا المفهوم ببعض التمثيلات البيانية.



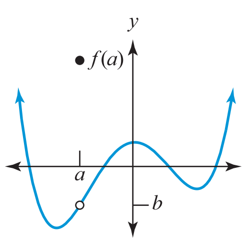
للنظر إلى هذه المنحنيات كل على حدة:

التمثيل البياني المجاور متصل عند جميع النقاط. لاحظ أن التمثيل البياني ليس به انقطاع.



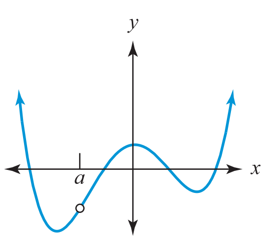
متصلة لكل قيم x

التمثيل البياني المجاور متصل في كل مكان ما عدا "الفجوة" عند $x = a$. ويسمى هذا "**عدم اتصال قابل للإزالة**" لأنه يمكن إعادة اتصال المنحنى من خلال إعادة تعريف الدالة $f(x)$ عند $x = a$ على النحو $f(a) = b$ وذلك لسد الفجوة.



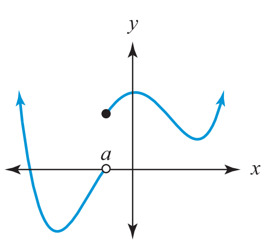
عدم اتصال قابل للإزالة

التمثيل البياني المجاور أيضًا هو من حالات عدم الاتصال القابل للإزالة عند $x = a$.
بل أكثر من ذلك، الشكل يبيّن أن $f(x)$ غير معرّفة عند $x = a$.
غير أننا مع ذلك يمكننا استعادة الاتصال من خلال إعادة تعريف الدالة $f(x)$ عند $x = a$ بطريقة مناسبة.



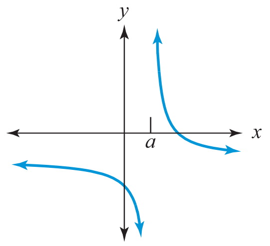
عدم اتصال قابل للإزالة

الشكل المجاور، مثال على عدم اتصال غير قابل للإزالة.
لأنه يوجد أكثر من مجرد فجوة عند $x = a$، يوجد قفزة في قيم الدالة تجعل من المستحيل سد الفراغ بنقطة واحدة $(a, f(a))$، بغض النظر عن مقدار محاولاتنا لإعادة تعريف الدالة $f(a)$.
يعرّف هذا النوع من عدم الاتصال على أنه "**عدم اتصال قفزي**".



عدم اتصال قفزي

يمثّل الشكل المجاور بيانيًّا دالة تُظهر "**عدم اتصال لانهائي**" عند $x = a$، و هو بالتأكيد غير قابل للإزالة.
لأنه يوجد أكثر من مجرد فجوة عند $x = a$، بل إن الدالة على يمين ويسار a تتجهة إلى موجب مالانهاية وسالب مالانهاية ومن المستحيل سد الفراغ بنقطة واحدة.

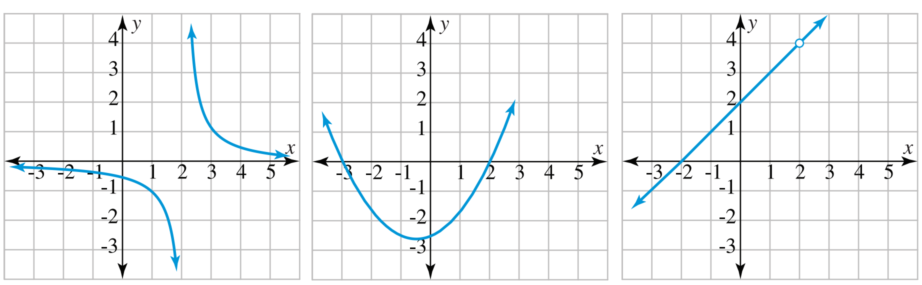


عدم اتصال لانهائي

المفهوم الهندسي البسيط لتمثيل بياني غير منقطع عند نقطة معيّنة يصبح مفهومًا أكثر صعوبة إذا ما أردنا التعبير عنه بلغة جبرية. مفتاح الفكرة هو ما تقدمه الصور من أننا نريد بالاتصال أن تسير النقطة $(x, f(x))$ من أية جهة لتعبر النقطة $(a , f(a))$ من غير أن تفقدها. نقول إنّ $f(x)$ تقترب من $f(a)$ كلما اقتربت x من a.
يعكس رمز "النهاية" هذا السلوك البياني للدالة بشكل طبيعي وسيستعمل هذا الرمز لاحقا لوصف سلوك الدالة بدءًا من تعريف الاتصال.

مثال 5 تحديد نقاط عدم الاتصال

حدد ما إذا كان كل منحنى يمثّل دالة غير متصلة عند النقطة $x = 2$.
حدد نوع عدم الاتصال.


A B C

الحل

A. الدالة الممثّلة في الشكل A غير معرّفة عند $x = 2$، ومن ثم تكون غير متصلة عند هذه النقطة. وعدم الاتصال هنا لانهائي.

B. الدالة الممثلة في الشكل B هي دالة تربيعية تمثيلها البياني عبارة عن قطع مكافئ، وهو تمثيل بياني ليس به إنقطاعات في مجال الدالة الذي يضم جميع الأعداد الحقيقية.
إذن، الدالة متصلة عند جميع قيم x.

C. الدالة الممثلة في الشكل C غير معرّفة عند $x = 2$ ولذا لا يمكن أن تكون متصلة هناك. التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني للمستقيم $y = x + 2$ في ما عدا وجود فجوة عند موضع النقطة $(2, 4)$. وهذا عدم اتصال قابل للإزالة.

حاول أن تحل التمرين 12

ملاحظة تعليمية

لا حاجة هنا إلى فهم دقيق لمفهوم النهايات، فالغاية من إدخال هذا المفهوم هنا هي فقط إيضاح معنى الاتصال هندسيًّا.

الاستخدام المحدود للنهايات

رغم أنّ مفهوم "النهاية" سهل الفهم، إلا أنه من الممكن إيجاد صعوبة في فهم التعريف الجبري للنهاية وهو تعريف ستتم معالجته لاحقًا.

سؤال للتفكر

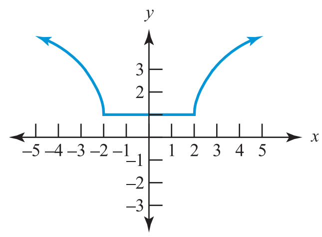
س: ما معنى إزالة عدم الاتصال؟
نموذج إجابة:
فقط عندما يكون الاتصال متمثلًا بفجوة هي عبارة عن نقطة، تكون إزالة عدم الاتصال ممكنة وذلك بإضافة هذه النقطة. في الرسم البياني C، تضاف النقطة $(2, 4)$ إلى المنحنى، فنحصل على دالة تتطابق مع المنحنى في جميع النقاط وتزيد عليه فتصبح معرّفة عند $x = 2$ وهي تساوي 4

ملاحظة تعليمية

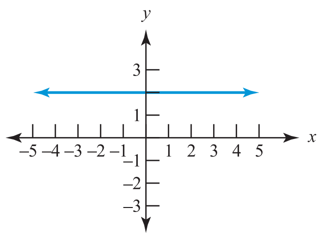
في الفرع C من مثال 5 نستعمل دائرة صغيرة لإبراز الفجوة عند $x = 2$. في بعض الحاسبات البيانية قد لا تكون هذه الفجوة واضحة وذلك يعتمد على نوع الحاسبة وقياسات نافذة العرض.

التزايد والتناقص

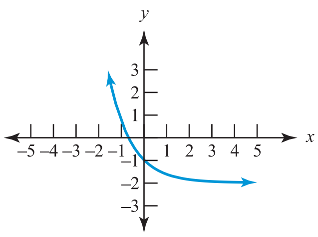
هناك مفهوم آخر للدوال يسهل فهمه بيانيًا وهو خاصية التزايد أو التناقص أو الثبات في فترة ما. نبين هذا المفهوم من خلال بعض التمثيلات البيانية:



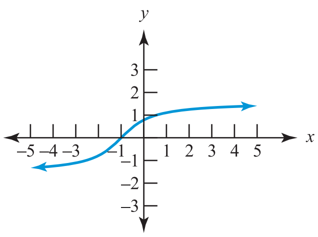
متناقصة على $]-\infty, -2]$
ثابتة على $[-2, 2]$
متزايدة على $[2, \infty[$



ثابتة



متناقصة



متزايدة

مرة أخرى، يسهل إيضاح هذه الفكرة بيانيًا، حيث تكون الدالة متزايدة كلما زادت قيمة $f(x)$ بزيادة x، وتكون الدالة متناقصة كلما قلّت قيمة $f(x)$ بزيادة x، لكن كيف يمكننا تحديد هذه الخواص للدوال جبريًّا؟ يساعد الاستكشاف 1 على التمهيد للتعريف الجبري.

القائمة Δ على الآلة الحاسبة

قد تساعدك الآلة الحاسبة في الأعداد الواردة في الاستكشاف 1، إذ تتضمن بعض الآلات الحاسبة عملية "القائمة Δ" التي تحسب التغيرات أثناء تحركك إلى أسفل في إحدى القوائم. على سبيل المثال، يخزّن الأمر "$\Delta List$ (L1)→L3" الفروق من L1 إلى L3. لاحظ أن $\Delta List$ (L1) دائمًا أقصر بإدخال واحد من L1 نفسها.

توسيع الاستكشاف

كوّن جدولًا يبيّن قيم الدالة $f(x) = x^2$. حدّد قيم x حيث تكون الدالة متزايدة وحدّد قيم x حيث تكون متناقصة.

نشاط استكشافي 1 البيانات المتزايدة والمتناقصة والثابتة

1. في جداول البيانات العددية الثلاثة الموضحة أدناه، أي منها ينمذج دالة (a) متزايدة، (b) متناقصة، (c) ثابتة؟

X	Y3
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
3	4
7	10

X	Y2
−2	3
−1	1
0	0
1	−2
3	−6
7	−12

X	Y1
−2	12
−1	12
0	12
1	12
3	12
7	12

2. كوّن قائمة $\Delta Y1$، التغيّر في قيم Y1 أثناء انتقالك من أعلى إلى أسفل القائمة. أثناء الانتقال من $Y1 = a$ إلى $Y1 = b$، يكون التغيّر $\Delta Y1 = b - a$.
كرّر الأمر مع قيم Y2 وY3.

يتغيّر X من	Δ X	ΔY1	يتغيّر X من	ΔX	ΔY2	يتغيّر X من	ΔX	ΔY3
−2 إلى −1	1		−2 إلى −1	1		−2 إلى −1	1	
−1 إلى 0	1		−1 إلى 0	1		−1 إلى 0	1	
0 إلى 1	1		0 إلى 1	1		0 إلى 1	1	
1 إلى 3	2		1 إلى 3	2		1 إلى 3	2	
3 إلى 7	4		3 إلى 7	4		3 إلى 7	4	

3. ما الذي ينطبق على نواتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ لدالة متزايدة؟ لدالة متناقصة؟ لدالة ثابتة؟

4. أين رأيت ناتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ سابقًا؟ هل يعزز هذا إجاباتك في الجزء 3؟

سيساعدك تحليل نواتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ في الاستكشاف على فهم التعريف التالي.

تعريف الدالة المتزايدة، المتناقصة والثابتة على فترة

تكون الدالة f **متزايدة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى تغيّر موجب في $f(x)$، لأي نقطتين في الفترة.

تكون الدالة f **متناقصة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى تغيّر سالب في $f(x)$، لأي نقطتين في الفترة.

تكون الدالة f **ثابتة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى عدم تغيّر $f(x)$، لأي نقطتين في الفترة.

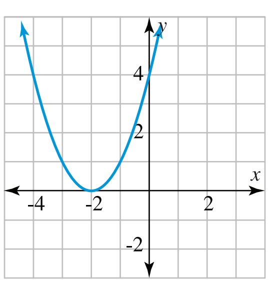
ملاحظة تعليمية

ينبغي أن يفهم الطلاب أنه إذا كانت الدالة f متزايدة على فترة معينة، يكون $f(x_1) < f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$ في الفترة. هذا يعني أن أي مستقيم يصل بين نقطتين على منحنى الدالة هو ذو ميل موجب. ينبغي أن يفهم الطلاب أيضًا أنه إذا كانت الدالة f متناقصة على فترة معينة، يكون $f(x_1) > f(x_2)$ لكل $x_1 > x_2$ في الفترة. هذا يعني أن أي مستقيم يصل بين نقطتين على منحنى الدالة هو ذو ميل سالب.

مثال 6 تحديد فترات التزايد والتناقص لدالة

حدد لكل دالة الفترات التي تتزايد فيها والفترات التي تتناقص فيها.

A. $f(x) = (x+2)^2$



ملاحظات على الأمثلة

اشرح كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة بتعريف الدالة المتزايدة على فترة والمتناقصة على فترة.

(تابع)

سؤال للتفكر

س: الدالة g متناقصة في الفترة $[0, 1[$ وكذلك في الفترة $]1, \infty[$. هل يمكن القول إنها متناقصة في الفترة $[0, 1[\cup]1, \infty[$؟

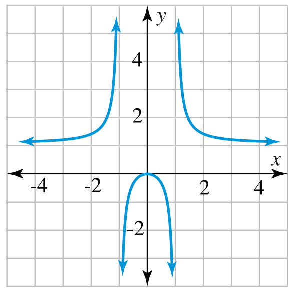
نموذج إجابة:

كلا، يكفي أن نلاحظ مثلًا أن $g(0) < g(2)$.

إرشاد

لاحظ أننا قمنا بتضمين -2 في الفترتين. لا تقلق من أن يؤدي ذلك إلى بعض التناقضات حول ما يحدث عند -2، لأننا نتحدث فقط عن الدوال المتزايدة والمتناقصة في الفترات، و -2 هي نقطة فحسب.

B. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$



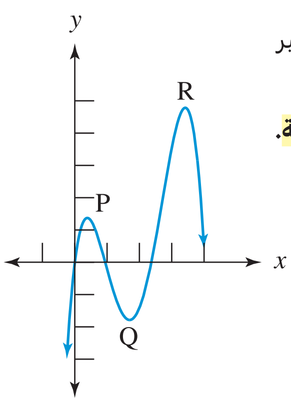
الحل

A. نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن الدالة f تتناقص في الفترة $]-\infty, -2]$ وتتزايد في الفترة $[-2, \infty[$.

B. نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن الدالة g تتزايد في الفترة $]-\infty, -1[$ وتتزايد مرة أخرى في $]-1, 0]$، وتتناقص في $[0, 1[$، وتتناقص مرة أخرى في $]1, \infty[$.
(الفترات مفتوحة عند -1 و 1، لأن الدالة غير معرّفة عند هاتين القيمتين).

حاول أن تحل التمرين 14

القيم القصوى المحلية



تتميز الكثير من التمثيلات البيانية بوجود قمم وقيعان عندما تتغير من التزايد إلى التناقص والعكس. يمكن تصنيف كل من القيم القصوى المحلية إلى **قيمة عظمى محلية** أو **قيمة صغرى محلية**. ويمكن رؤية الفرق بسهولة بيانيًا.

يوضح الشكل المجاور تمثيلًا بيانيًا به ثلاث قيم قصوى محلية: قيمتان عظميان محليتان عند النقطتين P و R وقيمة صغرى محلية عند Q.

هذا مفهوم آخر من مفاهيم الدوال الذي رؤيته بيانيًا أسهل من وصفه جبريًا. لاحظ أن قيمة عظمى محلية ليست بالضرورة القيمة العظمى للدالة في مجالها الكلي، إنما هي أكبر قيمة للدالة في فترة معيّنة.

كذلك فقيمة صغرى محلية ليست بالضرورة القيمة الصغرى للدالة في مجالها الكلي، إنما هي أصغر قيمة للدالة في فترة معيّنة.

لقد سبق وذكرنا أن أفضل طريقة لدراسة سلوك التزايد والتناقص تتضمن حساب التفاضل والتكامل، وليس من الغريب أن ينطبق نفس الشيء على القيم القصوى المحلية. سنكتفي بشكل عام في هذا المقرر بتحديد القيم القصوى المحلية من خلال التمثيل البياني، على الرغم من أنه يمكن أحيانًا إجراء التأكد الجبري عند معرفة المزيد عن دوال معيّنة.

القيم القصوى المحلية

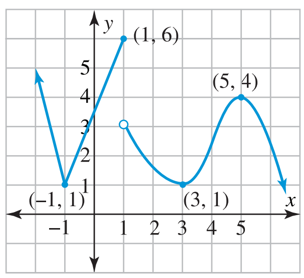
القيمة العظمى المحلية للدالة f هي قيمة $f(c)$ التي تكون أكبر من أو تساوي جميع قيم المدى للدالة f في فترة مفتوحة تتضمن c.

القيمة الصغرى المحلية للدالة f هي قيمة $f(c)$ التي تكون أصغر من أو تساوي جميع قيم المدى للدالة f في فترة مفتوحة تتضمن c.

يُطلق على القيم القصوى المحلية أيضًا اسم **القيم القصوى النسبية**.

مثال 7 تحديد القيم القصوى المحلية

وضّح ما إذا كانت كل نقطة محددة تعرّف قيمة صغرى محلية أم قيمة عظمى محلية أم لا تعرف أيًا منهما. وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها.



الحل

عند النقطة $(-1, 1)$ للدالة قيمة صغرى محلية هي $y = 1$ وكذلك عند النقطة $(3, 1)$ وهي $y = 1$.

عند النقطة $(1, 6)$ للدالة قيمة عظمى محلية هي $y = 6$ وكذلك عند النقطة $(5, 4)$ وهي $y = 4$.

الدالة متناقصة في الفترات $]-\infty, -1]$ و $[1, 3]$ و $[5, \infty[$.

الدالة متزايدة في الفترات $[-1, 1]$ و $[3, 5]$.

حاول أن تحل التمرين 18

استعمال برنامج التمثيل البياني لإيجاد القيم القصوى المحلية

معظم برامج التمثيل البياني الحديثة تتضمن وظائف البحث عن ''القيم العظمى'' و''الصغرى'' التي تحدد القيم القصوى المحلية وذلك عن طريق البحث عن تغيرات الإشارة في Δy. ليس من السهل العثور على القيم القصوى المحلية من خلال تكبيرها، لأن التمثيلات البيانية تتمدد وتخفي السلوك الذي تبحث عنه. إذا استعملت هذه الطريقة، فحافظ على تضييق النافذة الرأسية للحفاظ على بعض الانحناء في التمثيل البياني.

سؤال للتفكر

س: هل تُعتبر القيم العظمى المحلية أكبر قيم للدالة على مجالها؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن الدالة تتزايد إلى ما لانهاية من الجهة اليسرى (كلما تناقص الإحداثي x).

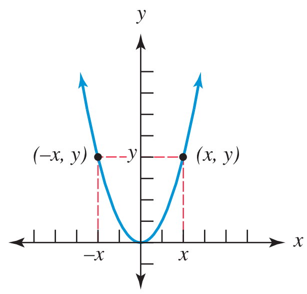
التناظر

من حيث المفهوم البياني، تحمل كلمة "التناظر" في الرياضيات نفس المعنى الذي تدل عليه في الفن: حيث تبدو الصورة (التمثيل البياني في هذه الحالة) "متماثلة" عند رؤيتها بأكثر من طريقة. والمثير في التناظر الرياضي أنه يمكن تمييزه عدديًا وجبريًا أيضًا. سندرس ثلاثة أنواع خاصة من التناظر، يمكن التعرف على كل منها بسهولة من تمثيل بياني أو جدول قيم أو صيغة جبرية، بمجرد معرفة ما نبحث عنه. ونظرًا إلى أننا نريد التركيز في هذا القسم على الروابط بين النماذج الثلاثة (البيانية والعددية والجبرية)، سنشرح التناظرات المتنوعة في النماذج الثلاثة جنبًا إلى جنب.

التناظر بالنسبة إلى المحور y

مثال: $f(x) = x^2$

بيانيًا



عدديًا

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
1	1
2	4
3	9

جبريًا

لجميع قيم x الموجودة في مجال الدالة f ،

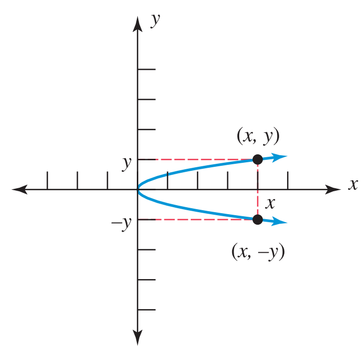
$$f(-x) = f(x)$$

الدالة التي تحقق هذه الخاصية (على سبيل المثال x^n، حيث n عدد زوجي) هي **دالة زوجية**.

التناظر بالنسبة إلى المحور x

مثال: $x = y^2$

بيانيًا



عدديًا

x	y
9	−3
4	−2
1	−1
1	1
4	2
9	3

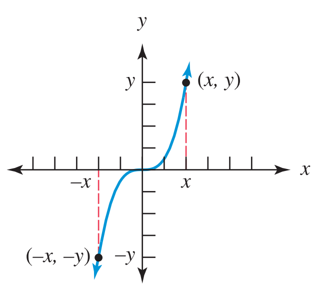
جبريًا

التمثيلات البيانية التي بها هذا النوع من التناظر ليست دوالًا (باستثناء الدالة الصفرية)، لكن يمكن أن نقول إن النقطة $(x, -y)$ موجودة على التمثيل البياني متى وجدت النقطة (x, y) على التمثيل البياني.

التناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل

مثال: $f(x) = x^3$

بيانيًا



عدديًا

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
1	1
2	8
3	27

جبريًا

لجميع قيم x الموجودة في مجال الدالة f،

$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة التي تحقق هذه الخاصية (على سبيل المثال x^n، حيث n عدد فردي) هي **دالة فردية**.

مثال 8 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

حدد ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست أيًّا منهما.

A. $f(x) = x^2 - 3$

B. $g(x) = x^2 - 2x - 2$

C. $h(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

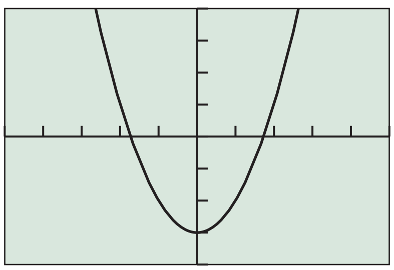
الحل

.A حل جبريًّا

نجد $f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$
$$= f(x)$$

بما أن $f(-x) = f(x)$ صحيحة لجميع قيم x، إذن الدالة f زوجية.



[−5, 5] في [− 4, 4]

تحقق بيانيًّا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور. ويبدو بشكل واضح تناظر الرسم البياني حول المحور y إذن، الدالة زوجية.

.B حل جبريًّا

نجد $g(-x)$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 2$$
$$= x^2 + 2x - 2$$

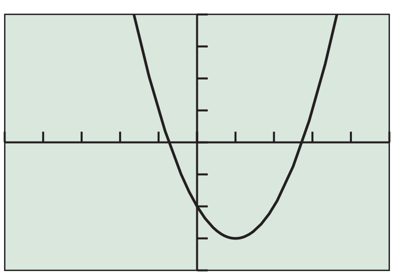
بمقارنة الدالة $g(-x)$ مع الدالة $g(x) = x^2 - 2x - 2$ نجد أنّ $g(-x) \neq g(x)$ لذا نستنتج أن الدالة $g(x)$ ليست زوجية.

وبمقارنة الدالة $g(-x)$ مع الدالة $-g(x) = -x^2 + 2x + 2$ نجد أنّ $g(-x) \neq -g(x)$ لذا نستنتج أن الدالة $g(x)$ ليست فردية.

إذن، الدالة $g(x)$ ليست زوجية ولا فردية.

تحقق بيانيًّا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور وهو غير متناظر لا بالنسبة للمحور y ولا بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، الدالة ليست زوجية ولا فردية.



[−5, 5] في [− 4, 4]

(تابع)

تنبيه

قد لا ينتبه بعض الطلاب إلى أن الدالة يمكن أن لا تكون فردية ولا زوجية. اضرب لهم مثلًا دالة مثل $f(x) = x^3 - x^2$ لا تكون زوجية ولا فردية.

سؤال للتفكر

س: ما الفرق بين استعمال مصطلحي "فردي" و "زوجي" للدوال واستعمالهما للأعداد؟

نموذج إجابة:

الأعداد إما فردية وإما زوجية، في حين كثير من الدوال لا تكون فردية ولا زوجية. الدالة g هي مثال على ذلك.

ملاحظة تعليمية

يمكننا استعمال سلك معدني ممدد على طول منحنى الدالة لنتبين معنى تناظر الدالة الفردية. إذا دار السلك (المتخذ شكل المنحنى) حول نقطة الأصل بزاوية $180°$، فإنه سيعود ويتطابق مع منحنى الدالة من جديد.

C. حل جبريًّا

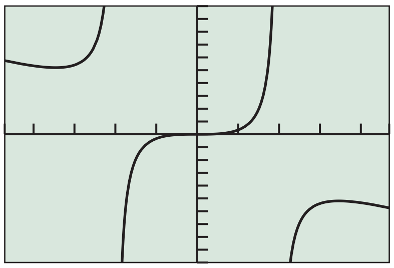
نجد $h(-x)$

$$h(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = \frac{-x^3}{4-x^2}$$
$$= -h(x)$$

بما أن $h(-x) = -h(x)$ صحيحة لجميع قيم x ما عدا ± 2، (غير الموجودة في مجال h) إذن الدالة h فردية.

تحقق بيانيًّا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور ويبدو بشكل واضح تناظره حول نقطة الأصل. إذن، الدالة h فردية.



$[-10, 10]$ في $[-4.7, 4.7]$

حاول أن تحل التمرين 25

خطوط التقارب

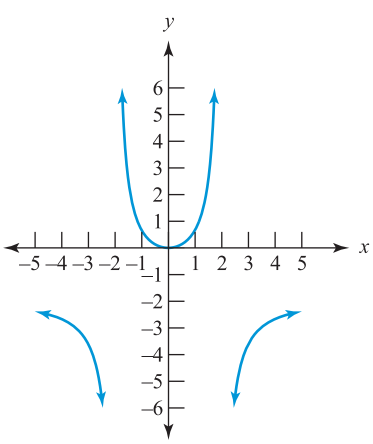
في الشكل المجاور $2.1.4a$ ادرس التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{2x^2}{4-x^2}$$

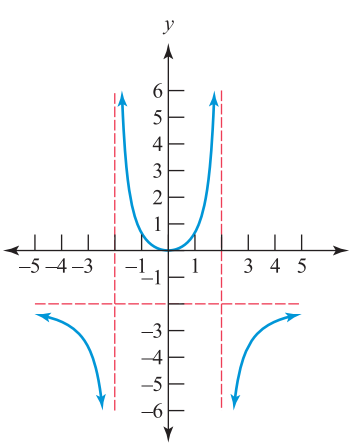
يبدو أن التمثيل البياني يتمدد إلى اليمين واليسار، ويقترب من الخط الأفقي $y = -2$. نُطلق على هذا الخط اسم **خط تقارب أفقي**.

بنفس الطريقة، يبدو أن التمثيل البياني يتمدد إلى الأعلى وإلى الاسفل، ويقترب من الخطين الرأسيين $x = -2$ و $x = 2$. نُطلق على كل خط من هذه الخطوط **خط تقارب رأسي**.

إذا وضعنا خطوط التقارب على الشكل المجاور في صورة خطوط متقطعة، يمكنك رؤية أنها تكوّن نوعًا من النماذج التي تصف سلوك التمثيل البياني للدالة كما هو موضّح في الشكل المجاور (b).



(a)



(b)

الشكل 2.1.4 التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2x^2}{4-x^2}$ وخطوط التقارب الممثّلة بخطوط متقطّعة.

خطوط التقارب الأفقية والرأسية

الخط المستقيم $y = b$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$، إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من b عند إقتراب قيم x من $+\infty$ أو $-\infty$.

الخط المستقيم $x = a$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$، إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من $+\infty$ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من a من أي اتجاه.

مثال 9 تحديد خطوط التقارب للتمثيل البياني

حدّد خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية للتمثيل البياني للدالة $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

الحل

ناتج القسمة $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ غير معرّف عند $x = -1$ و $x = 2$ ، مما يجعلهما موقعين ممكنين لخطوط تقارب رأسية. يبين التمثيل البياني في الشكل 2.1.5 توضيحًا لخطوط التقارب الرأسية لكل من $x = -1$ و $x = 2$.

بالنسبة إلى قيم x الكبيرة، يكون البسط (وهو عدد كبير) عددًا صغيرًا بالمقارنة مع المقام (هو ناتج ضرب عددين كبيرين)، مما يشير إلى أنه كلما زادت قيمة x تقترب قيمة y اكثر فأكثر من الصفر يدل هذا على وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.

يبين التمثيل البياني في الشكل المجاور توضيحًا لوجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$ عندما قيم x تقترب من ∞. يشير نفس المنطق إلى أنه كلما اقتربت قيم x من سالب مالانهاية فإن قيم y تقترب من الصفر مما يشير إلى وجود نفس خط التقارب الأفقي عندما قيم x تقترب من $-\infty$. مرة أخرى، يوفر التمثيل البياني دعمًا لهذا.

حاول أن تحل التمرين 30

بشكل عام يكون للتمثيل البياني للدالة النسبية $f(x)$

$$= \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

خط تقارب أفقي معادلته

$$\begin{cases} y = 0 \;, & n < m \\ y = \dfrac{a_n}{b_m} \;, & n = m \end{cases}$$

ولا يوجد خط تقارب أفقي للدالة عندما تكون $n > m$

ويكون للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند كل صفر من أصفار المقام بعد كتابة الكسر في أبسط صورة.

أسئلة للتفكر

س: ما أقصى عدد لخطوط التقارب الأفقي للدالة؟ لماذا؟

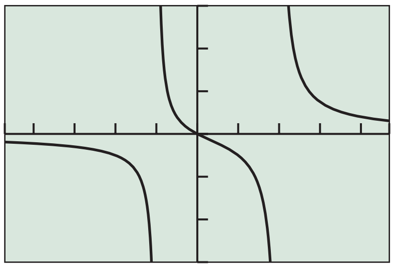
نموذج إجابة:

إثنان، لأن الدالة يمكن أن يكون لها خط تقارب أفقي فقط عندما تقترب قيمة x من سالب مالانهاية أو موجب مالانهاية.

س: متى يكون للدالة خط تقارب أفقي واحد؟

نموذج إجابة:

عند اقتراب $f(x)$ من نفس القيمة L، عندما تقترب قيمة x من سالب مالانهاية أو موجب مالانهاية.



[−4.7, 4.7] في [−3, 3]

الشكل 2.1.5

ملاحظات على التمارين

التمارين 5-12، تركز على المجال والمدى، واتصال الدالة.

التمارين 13-22، تركز على التزايد والتناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

التمارين 36-40، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5, 9, 12, 15, 19, 25, 31

مراجعة سريعة 2.1

في التمارين 1-4، حل المعادلة أو المتباينة.

1. $x^2 - 16 = 0$ $x = \pm 4$

2. $x - 10 < 0$ $x < 10$

3. $9 - x^2 = 0$ $x = \pm 3$

4. $5 - x \le 0$ $x \geqslant 5$

في التمارين 5-10، أوجد جبريًّا جميع قيم x التي تجعل المقدار الجبري غير معرف. ادعم إجابتك بالتمثيل البياني.

5. $\frac{x}{x-16}$ $x = 16$

6. $\frac{x}{x^2-16}$ $x = \pm 4$

7. $\sqrt{x-16}$ $x < 16$

8. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ $x = \pm 1$

9. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$ $x < -2$ أو $x \geq 3$

10. $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ $x = \pm 2$

الدرس 2.1 التمارين

في التمارين 1-3، حدد ما إذا كانت الصيغة تحدد y كدالة للمتغير x. إذا لم تكن كذلك، اشرح السبب.

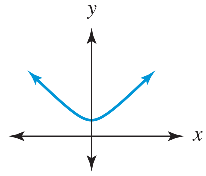
1. $y = \sqrt{x-4}$ دالة

2. $x = 2y^2$ ليست دالة: $x = 8 \Rightarrow y = \pm 2$

3. $x = 2 - y$ دالة

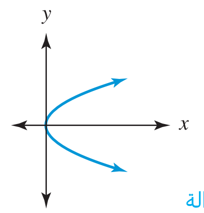
4. استعمل اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى يُعد تمثيلًا بيانيًّا لدالة.

a.



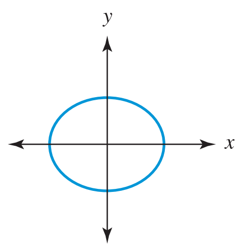
دالة

b.



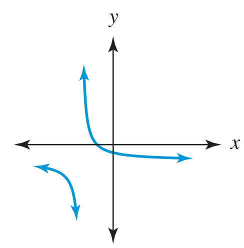
ليست دالة

c.



ليست دالة

d.



دالة

في التمارين 5–8، أوجد جبريًّا مجال الدالة.

5. $f(x) = \frac{3x-1}{(x+3)(x-1)}$ $]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, \infty[$

6. $g(x) = \frac{x}{x^2-5x}$ $]-\infty, 0[\cup]0, 5[\cup]5, \infty[$

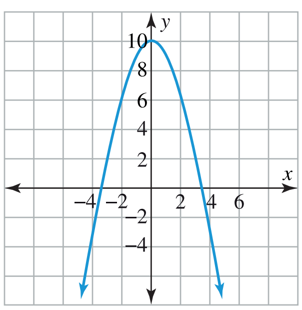
7. $h(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x+1)(x^2+1)}$ $]-\infty, -1[\cup]-1, 4]$

8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x-3}$ $]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, \infty[$

في التمارين 9-11، استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد مدى الدالة.

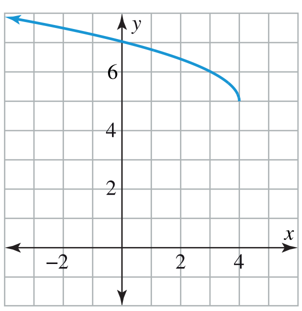
9. $f(x) = 10 - x^2$

$]-\infty, 10]$



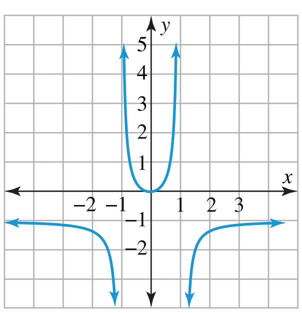
10. $g(x) = 5 + \sqrt{4-x}$

$[5, \infty[$



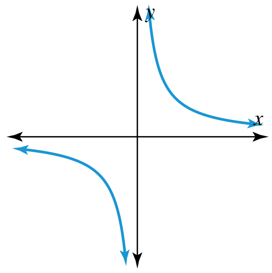
11. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

$]-\infty, -1[\cup [0, \infty[$



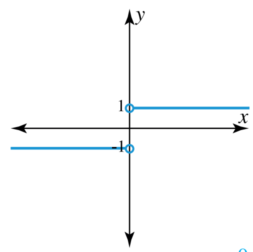
12. حدد ما إذا كان لكل دالّة نقطة عدم اتصال عند $x = 0$.
في حالة وجود عدم اتصال، حدد نوعه.

a. $g(x) = \frac{3}{x}$



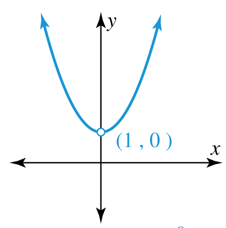
عدم اتصال لانهائي عند $x = 0$

b. $f(x) = \frac{|x|}{x}$



عدم اتصال قفزي عند $x = 0$

c. $h(x) = \frac{x^3 + x}{x}$

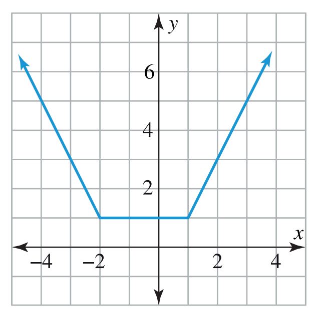


عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 0$

في التمارين 13–16، استعمل التمثيل البياني لتحديد فترات التزايد والتناقص والثبات للدالة.

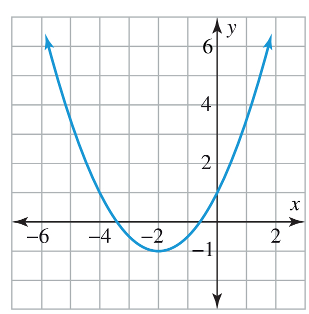
13. $g(x) = |x + 2| + |x - 1| - 2$

الدالة متناقصة في الفترة $]-\infty, -2]$، وثابتة في الفترة $[-2, 1]$، ومتزايدة في الفترة $[1, \infty[$.



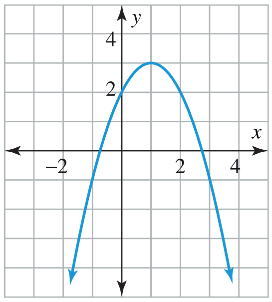
14. $h(x) = 0.5(x + 2)^2 - 1$

الدالة متناقصة في الفترة $]-\infty, -2]$، ومتزايدة في $[-2, \infty[$.



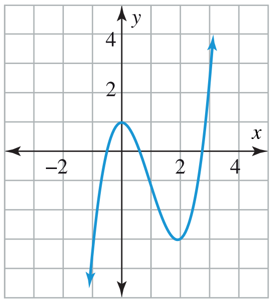
15. $g(x) = 3 - (x - 1)^2$

الدالة متزايدة في الفترة $]-\infty, 1]$، ومتناقصة في الفترة $[1, \infty[$.



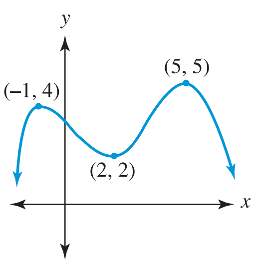
16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الدالة متزايدة في الفترتين $]-\infty, 0]$ و $[2, \infty[$، ومتناقصة في الفترة $[0, 2]$.

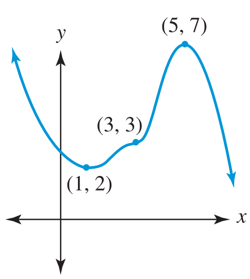


في التمرينين 17 و 18، وضّح ما إذا كانت كل نقطة محددة تعرّف قيمة صغرى محلية أم قيمة عظمى محلية أو لا تعرف أيًا منهما، وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها.

17.



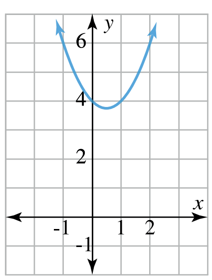
18.



في التمارين 19 –22، استعمل التمثيل البياني لكل دالة لإيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية وقيم x التي توجد عندها بشكل تقريبي.

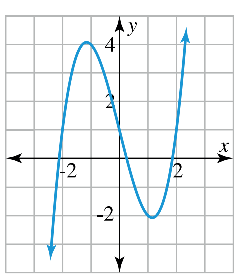
19. $f(x) = 4 - x + x^2$

قيمة صغرى محلية تساوي 3.8 تقريبًا عند: $x = 0.5$



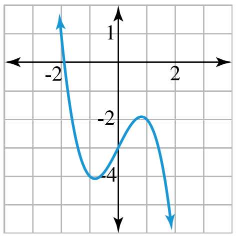
20. $g(x) = x^3 - 4x + 1$

- قيمة صغرى محلية تساوي -2 تقريبًا عند: $x \approx 1.2$
- قيمة عظمى محلية تساوي 4 تقريبًا عند: $x \approx -1.3$



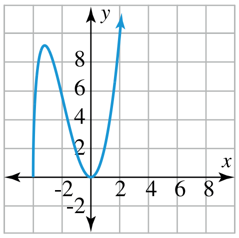
21. $h(x) = -x^3 + 2x - 3$

- قيمة صغرى محلية تساوي -4 تقريبًا عند: $x \approx -0.9$
- قيمة عظمى محلية تساوي -2 تقريبًا، عند: $x \approx 0.8$



22. $h(x) = x^2\sqrt{x+4}$

- قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند: $x = 0$
- قيمة عظمى محلية تساوي 9 تقريبًا، عند: $x \approx -3.2$



في التمارين 23–28، حدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم ليست أيًا منهما.

23. $f(x) = 2x^4$ زوجية

24. $g(x) = x^3$ فردية

25. $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ زوجية

26. $g(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$ زوجية

27. $f(x) = 2x^3 - 3x$ فردية

28. $f(x) = x^3 + 0.04x^2 + 3$ ليست زوجية ولا فردية

في التمارين 29–32، استعمل طريقة من اختيارك لإيجاد جميع خطوط التقارب الأفقية والرأسية للدالة.

29. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ خط تقارب رأسي $x = 1$، خط تقارب أفقي $y = 1$.

30. $q(x) = \dfrac{x-1}{x}$ خط تقارب رأسي $x = 0$، خط تقارب أفقي $y = 1$.

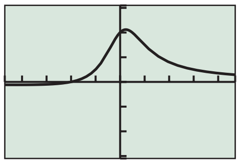
31. $g(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$ خط تقارب رأسي $x = 3$، خط تقارب أفقي $y = -1$.

32. $q(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ لا يوجد خطوط تقارب رأسية، خط تقارب أفقي $y = 0$.

في التمرينين 33 و 34، صِل الدالة بالتمثيل البياني المناسب عن طريق دراسة خطوط التقارب. التمثيلان البيانيان موضحان في نفس نافذة العرض.

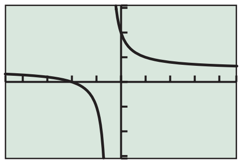
33. $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ *b*

34. $y = \dfrac{x+2}{2x^2+1}$ *a*



$[-4.7, 4.7]$ في $[-3.1, 3.1]$

(a)



$[-4.7, 4.7]$ في $[-3.1, 3.1]$

(b)

.35 **الكتابة للتعلم** وضّح سبب أنه لا يمكن أن يكون للتمثيل البياني أكثر من خطّي تقارب أفقيين.

أسئلة اختبار معيارية

.36 **صواب أم خطأ** التمثيل البياني للدالة f معرّف لمجموعة جميع النقاط $(x, f(x))$، حيث x موجودة في مجال f. برّر إجابتك.

.37 **صواب أم خطأ** العلاقة التي تكون متناظرة بالنسبة إلى المحور x لا يمكن أن تكون دالة. برّر إجابتك.

.38 **اختيار من متعدد** أي دالة مما يلي متصلة؟ B

.A عدد الطلاب الملتحقين بمدرسة معينة كدالة للزمن.

.B درجة الحرارة في الهواء الطلق كدالة للزمن.

.C تكلفة البريد كدالة لوزن الخطاب.

.D سعر السهم كدالة للزمن.

.E عدد عبوات العصير المبيعة في ملعب كرة القدم كدالة لدرجة الحرارة الخارجية.

39. اختيار من متعدد أي مما يلي دالة غير متصلة؟ C

A. الارتفاع الذي توجد عليه كدالة للزمن أثناء الطيران من الدوحة إلى بيروت.

B. زمن السفر من مدينة الوكرة إلى مدينة الشمال كدالة لسرعة القيادة.

C. عدد الكرات التي يمكن استيعابها بالكامل في صندوق معيّن كدالة لنصف قطر الكرات.

D. مساحة الدائرة كدالة لنصف القطر.

E. وزن طفل كدالة للزمن بعد الولادة.

40. اختيار من متعدد أي مما يلي دالة متناقصة؟ C

A. درجة الحرارة في الهواء الطلق كدالة للزمن.

B. مؤشر داو جونز الصناعي كدالة للزمن.

C. ضغط الهواء في الغلاف الجوي للأرض كدالة للارتفاع.

D. سكان العالم منذ 1 900 كدالة للزمن.

E. ضغط المياه في المحيط كدالة للعمق.

استكشاف

41. نشاط جماعي ارسم (يدويًا) التمثيل البياني للدالة f التي مجالها جميع الأعداد الحقيقية والتي تحقق جميع الشروط التالية:

a. f متصلة لجميع قيم x.

b. f متزايدة في الفترة $]-\infty, 0]$ وفي الفترة $[3, 5]$.

c. f متناقصة في الفترة $[0, 3]$ وفي الفترة $[5, \infty[$.

d. $f(0) = f(5) = 2$.

e. $f(3) = 0$.

42. نشاط جماعي كوّن مع زملائك في الصف مجموعات من اثنين أو ثلاثة. ارسم التمثيل البياني لدالة، لكن لا تظهره لزملائك في المجموعة. باستعمال لغة الدوال (كما في التمرين السابق)، صف الدالة التي رسمتها تمامًا. تبادل الأوصاف مع زملائك الآخرين في المجموعة ولاحظ ما إذا كان بإمكان كل منكم رسم التمثيل البياني الذي رسمه الآخرون.

توسيع الأفكار

43. الكتابة للتعلم الدالة المتصلة f مجالها جميع الأعداد الحقيقية. إذا كان $f(-1) = 5$ و $f(1) = -5$، وضح لماذا يجب أن يكون للدالة f صفرًا واحدًا على الأقل في الفترة $[-1, 1]$. يمكن تعميم هذا كخاصية للدوال المتصلة تُعرف باسم "نظرية القيمة الوسطية".

44. إثبات نظرية أثبت أن التمثيل البياني لكل دالة فردية مجالها جميع الأعداد الحقيقية يجب أن يمر بنقطة الأصل.

45. إيجاد المدى مثّل بيانيًا الدالة $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

a. ما خط التقارب الأفقي الظاهر للتمثيل البياني؟

b. بناءً على التمثيل البياني الذي رسمته، حدد المدى الظاهر للدالة f.

c. أثبت جبريًّا أن $-1 \leq \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} < 1.5$ لجميع قيم x ومن ثَم أكّد تخمينك في الجزء (b).

إجابات أسئلة التمارين 2.1

17. عظمى محلية: $(-1, 4)$، صغرى محلية: $(2, 2)$، عظمى محلية: $(5, 5)$.
الدالة متزايدة في $]-\infty, -1]$ ومتناقصة في $[-1, 2]$ ومتزايدة في $[2, 5]$ ومتناقصة في $[5, \infty[$

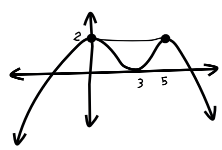
18. صغرى محلية: $(1, 2)$، ليست قيمة قصوى: $(3, 3)$، عظمى محلية: $(5, 7)$.
الدالة متناقصة في $]-\infty, 1]$ و متزايدة في $[1, 5]$ و متناقصة في $[5, \infty[$

35. لأن خط التقارب الأفقي الأول تحدده قيمة $\lim_{x\to\infty} f(x)$ إن وجدت، وخط التقارب الثاني تحدده قيمة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ إن وجدت.

36. صواب، لأن لكل قيمة من قيم x في مجال الدالة f هناك قيمة للدالة تساوي $f(x)$ إذن التمثيل البياني للدالة f معرّف لمجموعة النقاط $(x, f(x))$.

37. صواب، لأن اختبار الخط الرأسي يعطي نقطتين على المنحنى لهما نفس الإحداثي x.

41.



43. منحنى الدالة هو خط يصل النقطة $(-1, 5)$ بالنقطة $(1, -5)$. وبالتالي سيقطع هذا الخط المحور x هذا يعني جبريًّا أن للدالة صفر في الفترة $[-1, 1]$.

44. لدينا: $f(-x) = -f(x)$

عوّض $x = 0$ $f(-0) = -f(0)$

$f(0) = -f(0)$

$2f(0) = 0$

$f(0) = 0$

45. ارسم بالحاسبة.

a. $y = \frac{3}{2}$

b. $\left[-1, \frac{3}{2}\right[$

c. $\frac{3x^2-1}{2x^2+1} - (-1) = \frac{3x^2-1}{2x^2+1} + 1 = \frac{5x^2}{2x^2+1} \geq 0$

إذن، $\frac{3x^2-1}{2x^2+1} \geq -1$

$\frac{3x^2-1}{2x^2+1} - \frac{3}{2} = \frac{6x^2-2-6x^2-3}{2(2x^2+1)} < 0$

إذن، $\frac{3x^2-1}{2x^2+1} < \frac{3}{2}$

إذن، $-1 \leq \frac{3x^2-1}{2x^2+1} < \frac{3}{2}$ ، أي أن $-1 \leq f(x) < \frac{3}{2}$
و هذه النتيجة تؤكد مدى الدالة f في الفرع b.

2.2 العمليات على الدوال Operations on Functions

ما ستتعلّمه

- دمج الدوال جبريًا
- تركيب الدوال

... ولماذا

أغلب الدوال التي ستقابلها في حساب التفاضل والتكامل وفي واقع الحياة يمكن إنشاؤها بدمج أو بتعديل دوال أخرى.

معايير الدرس

11A.4.1
11A.4.3

المصطلحات

- تركيب الدوال composition of functions

الهدف

سوف يتمكن الطلاب من بناء دوال جديدة من خلال إجراء العمليات على الدوال الأساسية، الجمع والطرح والضرب والقسمة، وكذلك من خلال تركيب الدوال.

دليل الدرس

1. دمج الدوال جبريًا
2. تركيب الدوال

إرشاد

الرمز "∩"، يُقرأ "تقاطع" ويشير إلى مجموعة العناصر المشتركة (المتشابهة) في المجموعتين.

تحفيز

أسأل الطلاب: إذا كان لدى شخص ما حساب مصرفي فائدته منمذجة بالدالة $f(t) = 250t$ وحساب آخر فائدته منمذجة بالدالة $g(t) = 420t$. كيف يمكن كتابة الدالة التي تعطي قيمة الفائدة الإجمالية لكلا الحسابين؟

نموذج إجابة:

$h(t) = 670t$.

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب أن يراجعوا مفهوم التعويض لكي يستعدوا لفهم تركيب الدوال.

بداية، أطلب منهم أن يناقشوا كيف يمكن أن يبيّن التعويض ما إذا كان عدد ما هو حل للمعادلة. (عوّض المتغير وانظر إذا كانت النتيجة صحيحة.)

ثم قم بمساعدة الطلاب على تطوير مفهوم التعويض من خلال إعطائهم الدالة $f(x) = (x+1)^2$ ليقوموا بشرح كيف يمكن تعويض ما يلي:

1. $3a$
2. $r + s$

نموذج إجابة:

1. $f(3a) = (3a+1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$
2. $f(r+s) = (r+s+1)^2$
$= r^2 + s^2 + 2rs + 2r + 2s + 1$

دمج الدوال جبريًّا

للدوال عمليات جبرية تعتمد على نفس العمليات التي نطبّقها على الأعداد الحقيقية (الجمع والطرح والضرب والقسمة). إحدى طرق تكوين دوال جديدة هي تطبيق تلك العمليات باستعمال التعريفات التالية.

تعريف جمع الدوال وطرحها وضربها وقسمتها

افترض أن f و g دالتان لهما مجالان متقاطعان. إذن لكل قيم x في التقاطع، تتحدد العمليات الجبرية لكل من الدالتين f و g وفق القواعد الآتية:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

الضرب: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

القسمة: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ g(x) \neq 0$

في كل حالة، يتكون مجال الدالة الجديدة من كل الأعداد التي تنتمي في الوقت نفسه إلى مجال f ومجال g، أي إنّ مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالَي الدالتين.
ووفق ما ذُكر، تُستثنى أصفار المقام من مجال ناتج القسمة.

علامة "+" في العبارة "$(f+g)(x)$" يشير إلى عملية جديدة تمامًا تُسمى جمع الدوال. فهو يكوّن دالة جديدة، $f+g$، من الدوال المعطاة f و g. ومثل أي دالة، تتحدد $f+g$ بما تفعله، فهي تربط قيمة x من المجال، بقيمة $f(x) + g(x)$ من المدى.

لاحظ أن علامة "+" في "$f(x) + g(x)$" تمثّل العملية المعروفة لجمع الأعداد الحقيقية.

إذن، مع قيام نفس الرمز بأدوار مختلفة على كل جانب من إشارة المساواة، تضم التعريفات أعلاه تفاصيل أكثر مما يبدو للوهلة الأولى. لحسن الحظ، فإن هذه التعريفات سهلة التطبيق.

مثال 1 تعريف دوال جديدة جبريًّا

افترض أن $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$.

أوجد صيغًا للدوال التالية وحدّد مجال كل منها.

A. $f + g$

B. $f - g$

C. $f \times g$

D. $\frac{f}{g}$

E. $g \times g$

الحل

نحدد في البداية أن مجال f هو كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن مجال g هو $[-1, \infty[$.

يتداخل هذان المجالان، ويكون التقاطع هو $\mathbb{R} \cap [-1, \infty[\; = [-1, \infty[$

إذن:

A. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

B. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

C. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^2\sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

D. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

ومجالها $]-1, \infty[$.

لاحظ أن الفترة مفتوحة عند -1 لان وجود المقدار $x + 1$ في المقام يعني أنه غير معرّف عند $x = -1$

E. $(g \times g)(x) = g(x) \times g(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

ومجالها $[-1, \infty[$

لاحظ أنه يمكننا التعبير عن $(g \times g)(x)$ بشكل أبسط في الصورة $(g \times g)(x) = x + 1$ غير أن التبسيط لن يُغير من حقيقة أن مجال $g \times g$ هو $[-1, \infty[$ (وفق التعريف).

في ظروف أخرى، من الممكن أن يكون مجال الدالة $h(x) = x + 1$ كل الأعداد الحقيقية، لكن في هذه الحالة هذا غير ممكن، فهي ناتج ضرب دالتين لكل منهما مجالاً مقيدًا.

حاول أن تحل التمرين 3

أسئلة للتفكر

س: كيف ندمج دالتين في إطار الجمع أو الطرح؟

نموذج إجابة:

ندمج الحدود المشابهة في كلتا الدالتين.

س: ما الرمز الجديد المستعمل في المثال للتعبير عن جمع، طرح، ضرب، وقسمة الدالتين وماذا يعني؟

نموذج إجابة:

$(f+g)(x)$ تعني $f(x) + g(x)$

$(f-g)(x)$ تعني $f(x) - g(x)$

$(f \times g)(x)$ تعني $f(x) \times g(x)$

$\frac{f}{g}(x)$ تعني $\frac{f(x)}{g(x)}$

س: كيف يمكن أن يكون مجال الدالة g مختلفًا عن مجال الدالة $\frac{f}{g}$؟

نموذج إجابة:

يمكن أن يكون في مجال الدالة g قيم تساوي الدالة عندها الصفر. غير أن هذه القيم لا يمكن أن تنتمي إلى مجال الدالة $\frac{f}{g}$

س: كيف يمكن إيجاد مجال الدالة $\frac{f}{g}$؟

نموذج إجابة:

أولًا نحدّد ناتج تقاطع مجالي f و g، ثم نحذف منه القيم التي تساوي الصفر عند الدالة g.

س: هل يمكن استنتاج قاعدة عامة لإيجاد المجال من هذا المثال؟

نموذج إجابة:

مجال الدالة، الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة دالتين، هو ناتج تقاطع مجالّي الدالتين باستثناء أصفار الدالة المقسوم عليها في حال القسمة.

تنبيه

يعتقد بعض الطلاب أن شكل الدالة الناتجة من إجراء عملية جبرية على دالتين يكفي لمعرفة مجالها، وهذا غير صحيح. يكفي أن نلاحظ أن شكل الدالة $(g \times g)(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x + 1$ يشير إلى أن مجالها هو كل الأعداد الحقيقية، مع أن مجالها هو الفترة $[-1, \infty[$.

للطلاب سريعي الإنجاز

اطلب من الطلاب إيجاد مجالات نواتج القسمة التالية حيث

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$g(x) = x^2 - 1$

$h(x) = x^2 + 4x + 3$

a. $\frac{f}{g+h}$

نموذج إجابة:

$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 4x + 2}$، المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq -1$.

يمكن أن تعطي العمليات على الدوال مقادير جديدة ذات دلالة كما سترى في المثال التالي.

مثال 2 ضرب الدّوال

تنتج شركة نوعًا جديدًا من الهواتف الذكيّة بالسعر x لكل هاتف، بالريال القطري.

إذا علمت أن الطلب d، بالوحدات المبيعة، هو $d(x) = 5\ 000 - 40x$، أي أن $d(x)$ هو عدد الهواتف المطلوبة للبيع في فترة محددة.

ما هي إيرادات الشركة المتوقّعة من مبيع الهواتف الذكية بدلالة السعر x؟

الحل

إيرادات الشركة ستكون مساوية لناتج ضرب الطلب في سعر الهاتف الواحد.

الطلب × السعر = الإيرادات

الطلب هو الدالة $d(x)$ ، السعر هو الدالة $p(x)$.

ضرب الدالتين هو ضرب $d(x)$ × $p(x)$ = $(p \times d)(x)$

صيغة دالّة السعر $p(x) = x$ ومجالها $x \geq 0$ لأن سعر الهاتف الواحد لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.

صيغة دالّة الطلب $d(x) = 5\ 000 - 40x$ ومجالها $x \leq 125$ ذلك لأن الطلب لايمكن أن يكون عددًا سالبًا،

أي أن

$$5\ 000 - 40x \geq 0$$
$$-40x \geq -5\ 000$$
$$x \leq 125$$

صيغة دالّة الإيرادات R هي $\mathrm{R}(x) = x(5\ 000 - 40x)$ ومجالها هو تقاطع مجالي الدالتين p و d، أي $0 \leq x \leq 125$

$$\mathrm{R}(x) = x\,(5\ 000 - 40x)$$
$$= 5\ 000x - 40x^2$$

إذن، الإيرادات التي ستحققها الشركة بدلالة سعر الهاتف تتمثّل بالدالة $\mathrm{R}(x) = 5\ 000x - 40x^2$ ، حيث $0 \leq x \leq 125$

حاول أن تحل التمرين 8

للطلاب سريعي الإنجاز

b. $\frac{f-g}{g}$

نموذج إجابة:

$\frac{2x-2}{x^2-1}$، المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq 1$ و $x \neq -1$.

c. $\frac{h-g}{g-f}$

نموذج إجابة:

$\frac{2x+2}{-x+1}$، المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq 1$

أسئلة للتفكر

س: كيف تجد أصفار كل مقام؟

نموذج إجابة:

حُل معادلة المقام يساوي الصفر.

س: كيف تؤثر أصفار المقام على مجال الدالة؟

نموذج إجابة:

تُستثنى أصفار المقام من مجال الدالة.

ارشاد

يمكن استعمال خاصيتي التوزيع والإبدال لجمع وضرب الدوال لأن هذه العمليات ترتكز على جمع وضرب الأعداد الحقيقية.

أسئلة للتفكر

س: كيف يشتمل حل هذا المثال على ضرب الدوال؟

نموذج إجابة:

في المثال ثلاث دوال: الطلب، السعر، والإيرادات. إذا كان سعر كل هاتف هو x وعدد الهواتف المباعة هو d، يكون $d.x$ هو إيراد الشركة.

س: كيف نضرب دالتين؟

نموذج إجابة:

نضرب كل حد من الدالة الأولى بكل حد من الدالة الثانية، ثم ندمج الحدود المشابهة.

س: بالنسبة لدالة الطلب $d(x)$ ودالة الثمن $p(x)$، هل $p(x) \times d(x)$ يساوي $d(x) \times p(x)$؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن الضرب له الخاصية الإبدالية.

تركيب الدوال

لا يصعب معرفة أن الدالة $\sqrt{\frac{1}{x}}$ تتكوّن من الدالتين الأساسيتين $\frac{1}{x}$ و $\sqrt{x}$ ، لكن هذه الدالة غير ناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة هاتين الدالتين الأساسيتين، وإنما تنتج عن اندماج الدالتين ببساطة بوضعهما وفق الترتيب التالي:
دالة المقلوب أولًا، ثم دالة الجذر التربيعي.
عملية دمج الدوال هذه، التي ليس لها نظير في جبر الأعداد الحقيقية، تُسمى **تركيب الدوال**.

تركيب الدوال

افترض أن f و g دالتان، وأن مجال الدالة f يتقاطع مع مدى الدالة g
يُشار إلى تركيب f بعد g ، بالرمز $f \circ g$، ويتحدد بالقاعدة:

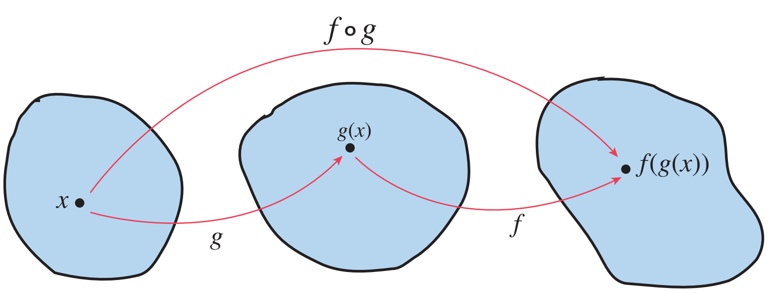
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من كل قيم x التي في مجال g والتي تعيّن قيم $g(x)$ في مجال f (انظر الشكل 2.2.1).

يرمز إلى تركيب g بعد f بالرمز $g \circ f$، ويعرف بصورة مشابهة لطريقة تعريف $f \circ g$.

ملاحظة تعليمية

تذكر أن تربط ما بين $f \circ g$ و $f(g(x))$ وتشارك في نطق "f بعد g" أو "f عند g عند x" مع الطلاب.



الشكل 2.2.1 في التركيب $f \circ g$ ، يتم تطبيق g أولًا و f تاليًا، وذلك بعكس الترتيب الذي نقرأ به الرموز.

يمكن تطبيق دالة على دالة أخرى لإيجاد صيغة دالة جديدة كليًّا، كما سترى في المثال التالي.

سؤال للتفكر

س: ما الفرق بين $f(x) \times g(x)$ و $f(g(x))$؟

نموذج إجابة:

$f(x) \times g(x)$ هو حاصل الضرب بين القيمتين $f(x)$ و $g(x)$، أما $f(g(x))$ فهي قيمة الدالة f عند القيمة $g(x)$ كمتغير للدالة f.

مثال 3 تطبيق دالة على دالة أخرى

لتكن الدّالتان $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 1$

A. أوجد قيمة $f(g(3))$

B. أوجد صيغة $f(g(x))$

الحل

A. طبق صيغة g $\quad g(3) = 3 + 1 = 4$

طبّق صيغة f على النتيجة $\quad f(g(3)) = f(4)$

استعمل صيغة f $\quad = 4^2$

بسّط $\quad = 16$

إذن، $f(g(3)) = 16$

B. طبّق صيغة g $\quad g(x) = x + 1$

طبّق صيغة f على النتيجة $\quad f(g(x)) = f(x + 1)$

استعمل صيغة f $\quad = (x + 1)^2$

استعمل مفكوك $(a + b)^2$ $\quad = x^2 + 2x + 1$

إذن، $f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$

حاول أن تحل التمرين 13

يوضّح المثال الآتي أن المجال يختلف عند تركيب دالتين بترتيبين مختلفين.

سؤال للتفكر

س: إذا كان $g \circ f$ معرّفًا، فهل هذا يعني أن $f \circ g$ معرّف؟

نموذج إجابة:

كلا، مثلًا: $f(x) = x^2 - 4$، $g(x) = \sqrt{x}$ و $g \circ f$ معرّف لأن $g(x)$ تنتمي إلى مجال f، بينما $g \circ f$ غير معرّفة لأن $f(x)$ لا تنتمي دائمًا إلى مجال g:

$g \circ f(1) = \sqrt{1^2 - 4} = \sqrt{-3}$ وهو غير ممكن.

مثال 4 إيجاد مجال تركيب دالتين

لتكن الدّالتان $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد مجال كل مما يلي:

A. $(g \circ f)(x)$

B. $(f \circ g)(x)$

(تابع)

سؤال للتفكر

س: إذا كان مجال f هو $]-\infty, \infty[$ ومداها $]-1, 1[$، ومجال g هو $]-1, 1[$ ومداها $]-\infty, \infty[$، فما مجال $f \circ g$؟ وما مجال $g \circ f$؟

نموذج إجابة:

مجال $f \circ g$ هو $]-1, 1[$

مجال $g \circ f$ هو $]-\infty, \infty[$

عادات التفكير

لتكن $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)$ و $g(x) = 3x + 2$. أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$. هل هما متطابقتان؟ إذا كانتا كذلك، فهل هذا دليل على أن تركيب الدوال عملية لها الخاصية الإبدالية؟

نموذج إجابة:

$f(g(x)) = x$، $g(f(x)) = x$. في هذه الحالة $f \circ g = g \circ f$. لكن مثلًا واحدًا لا يكفي ليكون دليلًا على أن تركيب الدوال عملية لها الخاصية الإبدالية.

الحل

A. اتبع الخطوات التالية لإيجاد مجال $(g \circ f)$

الخطوة 1 أوجد مجال $f(x)$

مجال الدالة $f(x) = x^2 - 1$ هو كل الأعداد الحقيقية، أي $D_f =]-\infty, \infty[$

الخطوة 2 أوجد مجال $g(x)$

مجال الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هو كل الأعداد الحقيقية غير السالبة، أي $D_g = [0, \infty[$

الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة f حيث $f(x)$ تنتمي إلى مجال $g(x)$، مما يعني أن نستثني قيم x في مجال الدالة f حيث $f(x)$ لا تنتمي إلى مجال g. تمثّل المجموعة الناتجة مجال $g \circ f$.
بما أن مجال الدالة g هو $D_g = [0, \infty[$، فإن $f(x)$ تنتمي إلى مجال g عندما تكون $f(x) \geq 0$ أي $x^2 - 1 \geq 0$

لدراسة إشارة $x^2 - 1$، ابدأ بإيجاد جذورها:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -1$$

تكون إشارة $x^2 - 1$ مطابقة لإشارة معامل x^2، خارج الفترة التي يحدّها جذرا $x^2 - 1$
إذن، $x^2 - 1 \geq 0$ لكل x في $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

إذن، مجال $(g \circ f)$ هو $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.

B. لإيجاد مجال $(f \circ g)$، اتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1 أوجد مجال $g(x)$

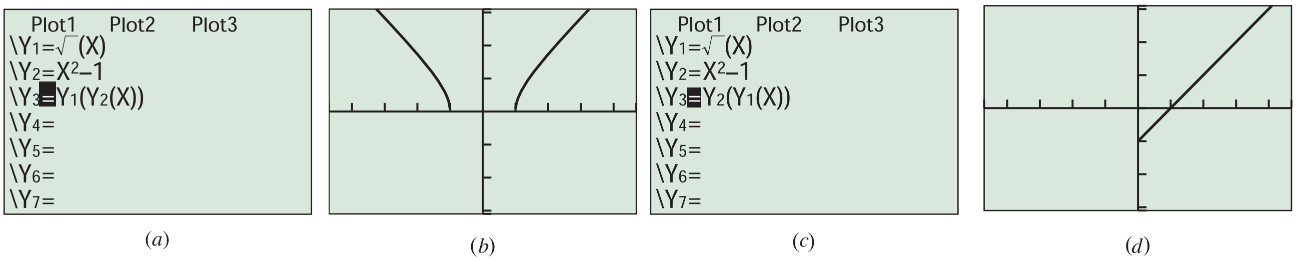
مجال الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هو كل الأعداد الحقيقية غير السالبة، أي $D_g = [0, \infty[$

الخطوة 2 أوجد مجال f

مجال الدالة $f(x) = x^2 - 1$ هو كل الأعداد الحقيقية، أي $D_f =]-\infty, \infty[$

الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ تنتمي إلى مجال f، مما يعني أن نستثني قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ لا تنتمي إلى مجال f. تمثّل المجموعة الناتجة مجال $f \circ g$.
بما أن مجال الدالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن جميع قيم $g(x)$ تنتمي إلى مجال الدالة f.
بما أن قيم $g(x)$ معرّفة في المجال $[0, \infty[$، فإن مجال $(f \circ g)$ هو $[0, \infty[$.

حاول أن تحل التمرين 20



الشكل 2.2.2

في أغلب الحالات تكون $f \circ g$ و $g \circ f$ دالتين مختلفتين (أي أن، ”تركيب الدوال لا يكون إبداليًا“).

مثال 5 تركيب الدوال

لتكن الدّالتان $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2}{3x-2}$.

أوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ وحدّد مجال كل منهما وتحقق من أن الدالتين $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ ليستا متماثلتين.

الحل

أوجد $(f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{3x-2}\right) = \frac{3x-2}{-3x+4}$$

أوجد $(g \circ f)(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-2}{-2x+5}$$

أوجد مجال $f \circ g$:

الخطوة 1 أوجد مجال الدالة g.

مجال الدالة $g(x) = \frac{2}{3x-2}$ هو $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, \infty\right[$

الخطوة 2 أوجد مجال الدالة f.

مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$ هو $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ تنتمي إلى مجال f.

قيم x في مجال الدالة g يجب أن لا تساوي $\frac{2}{3}$، أي $x \neq \frac{2}{3}$.

بما أن مجال الدالة f هو $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ أي $x \neq 1$، فإن $g(x)$ تنتمي إلى مجال الدالة f عندما تكون $g(x) \neq 1$، أي $\frac{2}{3x-2} \neq 1$

$$3x - 2 \neq 2$$

$$x \neq \frac{4}{3}$$

وهكذا فإن قيم x التي يجب أن نستثنيها من مجال $(f \circ g)$ هي:

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{4}{3}$$

(تابع)

ملاحظة على المثال

ذكّر الطلاب أولًا بأنه لكي تتساوى دالتان يجب أن يكون لهما نفس المجال، وتكون قيمتا الدالتين متساويتين لكل قيمة من قيم x في المجال المشترك.

أسئلة للتفكر

س: ما الطريقة التي تتبعها لإيجاد $(f \circ g)(x)$؟

نموذج إجابة:

نعوض قيمة $g(x)$ مكان المتغير x في الدالة $f(x)$، ثم نطبق العمليات التي تشتمل عليها الدالة f لإيجاد النتيجة.

س: أوجد $(f \circ g)(0)$ و $(g \circ f)(0)$. هل هناك تناقض مع الحل في المثال؟

نموذج إجابة:

$(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0) = 1$. لا يوجد تناقض لأن $f \circ g \neq g \circ f$ لا تعني أنهما غير متساويتين عند كل قيم x.

إذن، مجال $f \circ g$ هو $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{4}{3}, \infty\right[$

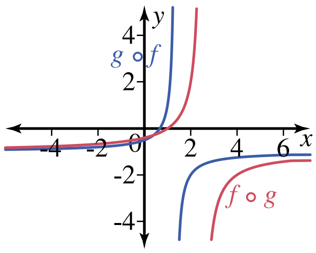
اتبع الطريقة ذاتها لإيجاد مجال $g \circ f$:

مجال $g \circ f$ هو $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$

نلاحظ أن $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

تكفي ملاحظة أن مجالَي الدالتين مختلفان لكي نستنتج أن الدالتين ليستا متماثلتين.

حاول أن تحل التمرين 25



يمكننا أيضًا أن ندرس التمثيلين البيانيين للدالتين $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ في مثال 5 في المستوى الإحداثي المجاور. كما نرى، فإن التمثيلين ليسا متطابقين، كما أن مجالَي الدالتين مختلفان.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 5) ساعد الطلاب في التركيز على بعض الأفكار من خلال مناقشة السؤالين التاليين.

1. ماذا تعني $f(g(x))$؟
أوجد قيمة $g(x)$ على شكل قيمة عددية أو على شكل عبارة، ثم قم بإيجاد قيمة f لهذه القيمة أو لهذه العبارة.

2. ماذا تعني $g(f(x))$؟
أوجد قيمة $f(x)$ على شكل قيمة عددية أو على شكل عبارة، ثم قم بإيجاد قيمة g لهذه القيمة أو لهذه العبارة.

نشاط استكشافي 1 تمارين على التركيب

يمكن تركيب إحدى دوال f التي في القائمة B مع إحدى دوال g التي في القائمة C لإنتاج كل من الدوال الأساسية التي في القائمة A.

هل يمكنك مطابقة القوائم بالطريقة المناسبة دون حاسبة التمثيل البياني؟ إذا كنت تواجه صعوبة، فجرب الأمر باستعمال حاسبة التمثيل البياني.

A	B	C
$f \circ g$	f	g
x	$\sqrt{x}$	$\frac{x+3}{2}$
x^2	$\lvert 2x+4 \rvert$	$x^{0.6}$
$\lvert x \rvert$	$2x-3$	$\frac{(x-2)(x+2)}{2}$
x^3	x^5	x^2

في المثال السابق، جرى تركيب دالتين لتكوين دوال جديدة. أحيانًا نحتاج إلى عكس العملية. أي قد نبدأ بدالة h ونقوم بتفكيكها لإيجاد الدوال التي تركيبها يُنتج h.

مثال 6 تفكيك الدوال

لكل دالة h، أوجد دالتين g و f بحيث $h(x) = f(g(x))$، بشرط أن لا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

A. $h(x) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 4$

B. $h(x) = \sqrt{x^3+1}$

الحل

A. يمكننا ملاحظة أن الدالة h تكون تربيعية في $x + 1$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 3x + 4$ وأن $g(x) = x + 1$.

فإن:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 4$$

B. يمكننا ملاحظة أن الدالة h عبارة عن الجذر التربيعي للدالة $x^3 + 1$.

افترض أن $f(x) = \sqrt{x}$ وأن $g(x) = x^3 + 1$.

فإن:

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(x^3+1\right) = \sqrt{x^3+1}$$

حاول أن تحل التمرين 26

غالبًا ما يوجد أكثر من طريقة واحدة لتفكيك دالة ما. على سبيل المثال، من الطرق البديلة لتفكيك $h(x) = \sqrt{x^3+1}$ في المثال 6B، هو أن نفترض $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^3$.
إذن، $h(x) = f(g(x)) = f\left(x^3\right) = \sqrt{x^3+1}$.

سؤال للتفكر

س: هل يمكن تفكيك الدالة $h(x)$ بطريقة أخرى؟

نموذج إجابة:

نعم، يمكننا كتابة الدالة $h(x)$ في (A):

$h(x) = [(x+2)-1]^2 - 3[(x+2)-1] + 4$

وبالتالي، $h(x) = f \circ g$ حيث $g(x) = x + 2$

و $f(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 4$

$= x^2 - 5x + 8$

يمكن استعمال تركيب الدوال لاختيار المناسب من العروض بعد نمذجتها على شكل دوال.

مثال 7 النمذجة باستعمال تركيب الدوال

يعلن متجر "الثوب الأنيق" عن حسومات عبر وسائل التواصل الاجتماعي. يسمح المتجر لعملائه بالإفادة من حسومات متعدّدة، ليس عليهم سوى إخبار أمين الصندوق بالترتيب الذي يرغبون به لتطبيق الحسومات المبينة في الصورة: خصم QR 5 من المبلغ، وخصم 10% من الثمن. في زيارتك القادمة للمتجر، ما ترتيب الحسومات الذي ينبغي لك أن تطلبه؟

الحل

اكتب دوالًا لنمذجة الحسومات، مفترضًا أنّ x يمثّل قيمة المشتريات.

الخصم الأول يمكن تمثيله بالدالة f ذات الصيغة:

$$f(x) = x - 5$$

الخصم الثاني يمكن تمثيله بالدالة g ذات الصيغة:

$$g(x) = x - 0.1x$$

$$= 0.9x$$

بتطبيق الخصم الأول ثمّ الثاني، تكون قد طبّقت الدالة $g \circ f$ وصيغتها:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(x - 5)$$
$$= 0.9\,(x - 5)$$
$$= 0.9x - 4.5$$

بتطبيق الخصم الثاني ثمّ الأول، تكون قد طبّقت الدالة $f \circ g$ وصيغتها:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(0.9x)$$
$$= 0.9x - 5$$

إذن، بما أنّ $0.9x - 5 < 0.9x - 4.5$ فإنّ الترتيب الثاني سيكون الأمثل.

حاول أن تحل التمرين 31

سؤال للتفكر

س: كيف يؤثر الترتيب في الحسم؟

نموذج إجابة:

في حالة الحسم بنسبة مئوية، تزداد قيمة الحسم كلما ازدادت قيمة المشتريات. أما الحسم بمقدار QR 5 فهو ثابت بغض النظر عن قيمة المشتريات. بالتالي تكون قيمة الحسم أكبر قبل حسم QR 5 من المبلغ.

ملاحظة تعليمية

تساعد النمذجة على حل المشكلة. فإذا قمنا بنمذجة التنزيلات من خلال الدوال، سيتبيّن للزبائن تسلسل الدوال في التركيب الذي يؤدي إلى نوع التنزيلات الأفضل.

متابعة

أسأل: إذا كانت f و g دالتين متعاكستين، وكانت $f(3) = 7$ ، أوجد $g(3)$ و $g(7)$ إذا كان هذا ممكنًا ($g(7) = 3$).

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-7، إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة للدوال.

التمارين 12-25، توجد تركيب الدوال.

التمارين 36-40، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 3, 5, 7, 14, 18

مراجعة سريعة 2.2

في التمارين 1–7، أوجد مجال الدالة وعبّر عنه برمز الفترة.

1. $g(x) = 2$ $]-\infty, \infty[$

2. $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ $]-\infty, -3[\cup]-3, \infty[$

3. $f(t) = \frac{t+5}{t^2+1}$ $]-\infty, \infty[$

4. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$

5. $f(t) = \sqrt{5-t}$ $]-\infty, 5]$

6. $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ $[-1, 1]$

7. $g(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ $]\frac{1}{2}, \infty[$

الدرس 2.2 التمارين

في التمارين 1–3، أوجد صيغًا للدوال $f + g$ و $f - g$ و $f \times g$.
واذكر مجال كل منها.

1. $g(x) = x^2$ $\quad f(x) = 2x - 1$

2. $g(x) = 3 - x$ $\quad f(x) = (x-1)^2$

3. $g(x) = x + 3$ $\quad f(x) = \sqrt{x+5}$

في التمارين 4–7، أوجد صيغًا للدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$.
واذكر مجال كل منها.

4. $g(x) = x^2$ $\quad f(x) = \sqrt{x+3}$

5. $g(x) = \sqrt{x+4}$ $\quad f(x) = \sqrt{x-2}$

6. $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad f(x) = x^2$

7. $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ $\quad f(x) = x^3$

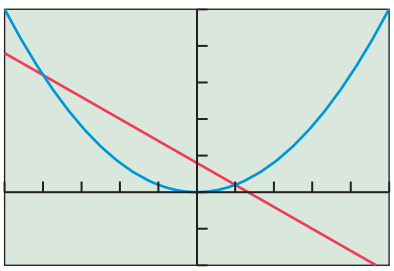
8. افترض أن الطلب، d، بالوحدات المبيعة، على نوع من القمصان لشركة بالسعر x، بالريال القطري، هو $d(x) = 2\ 670 - 16x$

a. إذا كانت السعر × الطلب = الإيرادات، اكتب قاعدة الدالة $R(x)$ التي تمثل الإيرادات المتوقعة للشركة من مبيعات نوع من القمصان. ثم اذكر مجال هذه الدالة.

b. إذا كان السعر QR 160، فكم تبلغ الإيرادات التي ستحققها الشركة؟

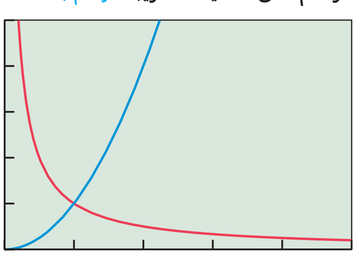
9. افترض أن الطلب، d، على منتج كلفته x، بالريال القطري يمكن نمذجته بالدالة: $d(x) = -0.25x^2 + 1\ 000$.
أما السعر، p، لمبيع ذلك المنتج فهو معطى بالدالة
$P(x) = x + 16$
أوجد دالة الإيرادات $R(x)$.

10. التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 4 - 3x$ مبينتان أدناه في نافذة العرض $[-5, 5]$ في $[-10, 25]$. ارسم التمثيل البياني للفرق $(f - g)(x)$ بإضافة إحداثيات y مباشرة من التمثيلات البيانية. ثم مثّل الفرق بيانيًا على حاسبتك وانظر كم كان تمثيلك قريبًا. ارسم باستعمال الحاسبة



$[-5, 5]$ في $[-10, 25]$

11. التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مبينتان أدناه في نافذة العرض $[0, 5]$ في $[0, 5]$.
ارسم التمثيل البياني للمجموع $(f + g)(x)$ بإضافة إحداثيات y مباشرة من التمثيلات البيانية. ثم مثّل المجموع بيانيًا على حاسبتك وانظر كم كان تمثيلك قريبًا. ارسم باستعمال الحاسبة



$[0, 5]$ في $[0, 5]$

M02_MTH02_TE11_QTR_AR_ADV.indb 80 21/06/2021 2:42:53 PM

في التمرينين 12 و 13 لتكن الدالتان: $f(x) = 4x - 5$
و $g(x) = -7x$

12. **a.** أوجد قيمة $f(g(3))$

b. أوجد صيغة $f(g(x))$

13. **a.** أوجد قيمة $g(f(2))$

b. أوجد صيغة $g(f(x))$

في التمارين 14-17، أوجد $(f \circ g)(3)$ و $(g \circ f)(-2)$.

14. $g(x) = x + 1$ $\quad f(x) = 2x - 3$

15. $g(x) = 2x - 3$ $\quad f(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad f(x) = x^2 + 4$

17. $g(x) = 9 - x^2$ $\quad f(x) = \frac{x}{x+1}$

في التمارين 18–25، أوجد $f(g(x))$ و $g(f(x))$ومجال كل منهما.

18. $g(x) = x - 1$ $\quad f(x) = 3x + 2$

19. $g(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad f(x) = x^2 - 1$

20. $g(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad f(x) = x^2 - 2$

21. $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x-1}$

22. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad f(x) = x^2$

23. $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$ $\quad f(x) = x^3$

24. $g(x) = \frac{1}{3x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2x}$

25. $g(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x+1}$

في التمارين 26–30، أوجد$g(x)$ و $f(x)$ بحيث يمكن وصف الدالة في الصورة $y = f(g(x))$ بشرط أن لا تكون أي منهما الدالة المحايدة (قد يوجد أكثر من حل ممكن).

26. $y = \sqrt{x^2 - 5x}$

27. $y = (x^3 + 1)^2$

28. $y = |3x - 2|$

29. $y = \frac{1}{x^3 - 5x + 3}$

30. $y = (x - 3)^5 + 2$

31. يقدم متجر سلع رياضية تخفيضات صيفية على ألواح التزلج. جاسم مهتم بلوح تزلج يبلغ سعره في العادة QR 1 600. يقدم المتجر خصمًا فوريًا قدره QR 200، بالإضافة إلى خصم بنسبة 10% ما الترتيب الذي ينبغي أن يعتمد في تطبيق هذه العروض الخاصة على سعر لوح التزلج حتى يتحقق لجاسم الإفادة المثلى؟ وضِّح إجابتك.

32. ينال كل عضو في برنامج مكافآت متجر للألعاب خصماً مقداره 20% على قيمة مشترياته. تخضع جميع المبيعات في المتجر إلى ضريبة بيع مقدارها 6%
اكتب دالة لنمذجة الخصم ودالة لنمذجة ضريبة المبيع ثم اوجد صيغة الدالة التي تعطي السعر النهائي الذي يدفعه عضو في برنامج المكافآت.

33. **بالونات الرصد الجوي** يتمدد بالون رصد جوي كروي أثناء ارتفاعه بشكل ملحوظ بفعل انخفاض الضغط الجوي.

افترض أن طول نصف القطر r يزيد بالمعدل 0.03 in /s وأن $r = 48$ in عندما يكون الزمن $t = 0$.
أوجد معادلة تنمذج الحجم V للبالون عندما يكون الزمن t وأوجد الحجم عندما $t = 300\ s$.

34. **كرة الثلج** يخزّن جلال كمية من كرات الثلج طول قطر كل منها 4 in في ثلاجة، وهو غير مدرك أن ميزة إزالة الثلج الذاتية في الثلاجة ستفقد كل كرة ثلج 1 in^3 من حجمها كل 40 يومًا. تذكر بلال ما خزّنه بعد سنة واحدة (افترض أنها تساوي 360 يومًا) وذهب لاستعادتها. كم كان طول قطر الواحدة منها عندئذٍ؟

35. **التصوير بالقمر الصناعي** تلتقط كاميرا قمر صناعي صورة مستطيلة الشكل. إنّ أبعاد أصغر منطقة يمكن تصويرها على شكل مستطيل هي 5 km في 7 km، عند تصغير لقطة الكاميرا، يزيد الطول l والعرض w للمستطيل بمعدل

2km /s، كم يستغرق الأمر لتصبح المساحة المصوَّرة على الأقل 5 أمثال أصغر منطقة يمكن تصويرها؟

أسئلة اختبار معيارية

.36 صواب أم خطأ يتكون مجال دالة ناتج القسمة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ من كل الأعداد التي تنتمي إلى كل من مجال الدالة f ومجال الدالة g. برّر إجابتك. خطأ، ما عدا أصفار g

.37 صواب أم خطأ يتكون مجال دالة ناتج الضرب $(f \times g)(x)$ من كل الأعداد التي تنتمي إما إلى مجال الدالة f أو إلى مجال الدالة g. برّر إجابتك. خطأ، المجال هو المشترك بينهما

.38 اختيار من متعدد افترض أن f و g دالتان يتكوّن مجال كل منهما من كل الأعداد الحقيقية.
أي العبارات الآتية ليست بالضرورة صوابًا؟ C

A. $(f+g)(x) = (g+f)(x)$

B. $(f \times g)(x) = (g \times f)(x)$

C. $f(g(x)) = g(f(x))$

D. $(f - g)(x) = -(g - f)(x)$

E. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

.39 اختيار من متعدد إذا كانت $f(x) = x - 7$ و $g(x) = \sqrt{4-x}$ فما مجال الدالة $\frac{f}{g}$؟ A

A. $]-\infty, 4[$

B. $]-\infty, 4]$

C. $]4, \infty[$

D. $[4, \infty[$

E. $]4, 7[\cup]7, \infty[$

.40 اختيار من متعدد إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ فإن $(f \circ f)(x)$ تساوي: E

A. $2x^2 + 2$

B. $2x^2 + 1$

C. $x^4 + 1$

D. $x^4 + 2x^2 + 1$

E. $x^4 + 2x^2 + 2$

استكشاف

.41 المطابقة بين ثلاثة قوائم وفّق كل دالة من f مع دالة من g ومجال من D بحيث $(f \circ g)(x) = x^2$ مع المجال D.

f	g	D
$(x^2+2)^2$	$\sqrt{2-x}$	$x \neq 0$
$(x^2-2)^2$	$x+1$	$x \neq 1$
$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{1}{x-1}$	$[2, \infty[$
$x^2 - 2x + 1$	$\sqrt{x-2}$	$]-\infty, 2]$
$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$	$\frac{x+1}{x}$	$]-\infty, \infty[$

.42 كن بارعًا في g افترض أن $f(x) = x^2 + 1$.
أوجد دالة g حيث يكون:

a. $(f \times g)(x) = x^4 - 1$

b. $(f+g)(x) = 3x^2$

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$

d. $f(g(x)) = 9x^4 + 1$

e. $g(f(x)) = 9x^4 + 1$

توسيع الأفكار

.43 تحديد العنصر المحايد العنصر المحايد لعملية على الدوال هو عبارة عن دالة إذا أجريت العملية عليها وعلى دالة معطاة f تعطي نفس الدالة f.
أوجد الدوال المحايدة للعمليات الآتية:

a. جمع الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:
$(f+g)(x) = (g+f)(x) = f(x)$

b. ضرب الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:
$(f \times g)(x) = (g \times f)(x) = f(x)$

c. تركيب الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:
$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = f(x)$

.44 هل تركيب الدوال تجميعيٌّ؟ سبق وعرفت أن تركيب الدوال ليس إبداليًّا، أي إن، $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.
لكن هل تركيب الدوال تجميعيٌّ؟
أي، هل $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$؟
وضّح إجابتك. نعم

إجابات أسئلة التمارين 2.2

1. $(g+f)(x) = x^2 + 2x - 1,\ ]-\infty, \infty[$
$(g-f)(x) = x^2 - 2x + 1,\ ]-\infty, \infty[$
$(g \times f)(x) = 2x^3 - x^2,\ ]-\infty, \infty[$

2. $(g+f)(x) = x^2 - 3x + 4,\ ]-\infty, \infty[$
$(g-f)(x) = -x^2 + x + 2,\ ]-\infty, \infty[$
$(g \times f)(x) = (3-x)(x-1)^2,\ ]-\infty, \infty[$

3. $(g+f)(x) = x + 3 + \sqrt{x+5},\ ]-5, \infty[$
$(g-f)(x) = x + 3 - \sqrt{x+5},\ ]-5, \infty[$
$(g \times f)(x) = (x+3)\sqrt{x+5},\ ]-5, \infty[$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2}\ ,\ ]-3, 0[\cup]0, \infty[$
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\ ,\ ]-3, \infty[$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}}\ ,\ [2, \infty[$
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}}\ ,\ ]2, \infty[$

6. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ ]-1, 1[$
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\ ,\ [-1, 0[\cup]0, 1]$

7. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^3}}\ ,\ ]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}\ ,\ ]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

8. a. $R(x) = 2\,670x - 16x^2 \quad]0, 166.88]$

b. QR 17 600

9. $R(x) = (x+16)(-0.25x^2 + 1\,000)$

12. a. -89

b. $-28x - 5$

13. a. -21

b. $-28x + 35$

14. $(f \circ g)(3) = 5, \quad (g \circ f)(-2) = -6$

15. $(f \circ g)(3) = 8, \quad (g \circ f)(-2) = 3$

16. $(f \circ g)(3) = 8, \quad (g \circ f)(-2) = 3$

17. $(f \circ g)(3) = 0, \quad (g \circ f)(-2) = 5$

18. $(f \circ g)(x) = 3x - 1, \quad]-\infty, \infty[$
$(g \circ f)(x) = 3x + 1, \quad]-\infty, \infty[$

19. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1\ ,\ ]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-2}\ ,\ ]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \infty[$

20. $(f \circ g)(x) = x - 1\ ,\ [-1, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2-1}\ ,\ ]-\infty, -1[\cup [1, \infty[$

21. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}\ ,\ [0, 1[\cup]1, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\ ,\ ]1, \infty[$

22. $(f \circ g)(x) = 1 - x^2\ ,\ [-1, 1]$
$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-x^4}\ ,\ [-1, 1]$

23. $(f \circ g)(x) = 1 - x^3\ ,\ ]-\infty, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{1-x^9}\ ,\ ]-\infty, \infty[$

24. $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2}\ ,\ ]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \frac{2x}{3}\ ,\ ]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

25. $(f \circ g)(x) = \frac{x-1}{x}\ ,\ ]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$
$(g \circ f)(x) = \frac{-x-1}{x}\ ,\ ]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, \infty[$

26. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = x^2 - 5x$

27. $f(x) = x^2\ ,\ g(x) = x^3 + 1$

28. $f(x) = |x|\ ,\ g(x) = 3x - 2$

29. $f(x) = \frac{1}{x}\ ,\ g(x) = x^3 - 5x + 3$

30. $f(x) = x^5 + 2\ ,\ g(x) = x - 3$

31. دالة خصم QR 200 هي: $f(x) = x - 200$.
دالة خصم 10% هي: $g(x) = x - 0.1\,x = 0.9\,x$
بتطبيق الخصم الأول ثم الثاني نحصل على
$(g \circ f)(1\,600) = 0.9\,(1\,600 - 200) = 0.9 \times 1\,400 = 1\,260$
بتطبيق الخصم الثاني ثم الأول نحصل على
$(f \circ g)(1\,600) = 0.9 \times 1\,600 - 200 = 1\,440 - 200 = 1\,240$
إذن الخيار الثاني هو الأفضل.

32. $f(x) = x - 0.2x = 0.8x\ ,\ g(x) = x + 0.06x = 1.06x$
دالة السعر النهائي هي: $(f \circ g)(x) = 0.8 \times 1.06x = 0.84x$

33. $r(t) = 0.02t + 48$
$V(t) = \frac{4}{3}\pi(0.03t + 48)^3$
$V(300) = \frac{4}{3}\pi(57)^3 \approx 775\,734.6\ \text{in}^3$

34. طول القطر 4
تفقد الكرة من حجمها في السنة (360 يوم) $9\ \text{in}^3$
حجمها الأصلي $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 \approx 33.51\ \text{in}^3$
حجمها الجديد $V' = V - 9 = 24.51$
$V' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \Rightarrow r'^3 = \frac{3V'}{4\pi} = 5.85$
إذن، طول القطر الجديد هو $2r' \approx 3.6\ \text{in}$

35. $(2t + 5)(2t + 7) \geq 5(5 \times 7)$
$4t^2 + 24t - 140 \geq 0$
$t \geq 3.6\ \text{s}$

41. $f(x) = (x^2 + 2)^2,\ g(x) = \sqrt{x - 2},\ D = [2, \infty[$

$f(x) = (x^2 - 2)^2,\ g(x) = \sqrt{2 - x},\ D =]-\infty, 2]$

$f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2},\ g(x) = \frac{x + 1}{x},\ D : x \neq 0$

$f(x) = x^2 - 2x + 1,\ g(x) = x + 1,\ D =]-\infty, \infty[$

$f(x) = \left(\frac{x + 1}{x}\right)^2,\ g(x) = \frac{1}{x - 1},\ D : x \neq 1$

42. **a.** $g(x) = x^2 - 1$

b. $g(x) = 2x^2 - 1$

c. $g(x) = x^2 + 1$

d. $g(x) = 3x^2$

e. $g(x) = 9(x - 1)^2 + 1$

43. **a.** $g(x) = 0$

b. $g(x) = 1$

c. $g(x) = x$

2.3 الدوال العكسية Inverse Functions

ما ستتعلّمه
- العلاقة العكسية
- الدالة العكسية
- الدالة العكسية على مجال محدد

... ولماذا
يمكن فهم بعض الدوال بالشكل الأفضل على أنها معكوس للدوال التي نعرفها بالفعل، ولإيجاد القيم المدخلة لدالة ما بمعرفة القيم المخرجة.

معيار الدرس
11A.4.2

المصطلحات
- العلاقة العكسية inverse relation
- انعكاس reflection
- الدالة العكسية inverse function

الهدف
سوف يتمكن الطلاب من إيجاد العلاقات العكسية للعلاقات والدوال العكسية للدوال.

دليل الدرس
1. العلاقة العكسية
2. الدالة العكسية
3. الدالة العكسية على مجال محدّد

تحفيز
أسأل الطلاب: كيف ترتبط الدالتان $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ إحداهما بالأخرى؟

نموذج إجابة:

$y = f(x)$ إذا وفقط إذا $x = g(y)$.

أسئلة للتفكر
س: كيف يؤدي تبديل القيم في جدول إلى تحديد العلاقة العكسية؟

نموذج إجابة:

في العلاقة الأصلية، يمثّل العمود x المتغير المستقل ويمثل العمود y المتغير التابع. عندما نقوم بتبديل القيم تنتقل قيم المتغير التابع إلى مكان المتغير المستقل وبالعكس، فنحصل على العلاقة العكسية.

س: في أي حالة تكون العلاقة العكسية دالة، ومتى لا تكون العلاقة نفسها دالة؟

نموذج إجابة:

يمكن للعلاقة العكسية أن تكون دالة إذا كانت كل قيمة من قيم المتغير التابع تظهر مرة واحدة في العلاقة عدا ذلك لا تكون العلاقة العكسية دالة.

العلاقة العكسية

ماذا يحدث عندما نعكس إحداثيات كل الأزواج المرتبة في العلاقة؟ من الواضح أننا نحصل على علاقة أخرى، لأنه ثمّة مجموعة أخرى من الأزواج المرتبة، لكن هل تحمل أي تشابه مع العلاقة الأصلية؟ إذا كانت العلاقة الأصلية عبارة عن دالة، فهل ستكون العلاقة الجديدة دالة أيضًا؟

تذكّر أن العلاقة هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة (x, y)، حيث x هو المتغير المستقل و y هو المتغير التابع. تتكوّن **العلاقة العكسية** عندما تنعكس أدوار المتغير المستقل والمتغير التابع.

فلو أخذنا العلاقة الموضحة في الجدول أدناه:

x	y
−2	1
−1	4
0	3
1	1

ستكون العلاقة العكسية ممثلة بالجدول التالي:

x	y
1	−2
4	−1
3	0
1	1

لاحظ أنّ العلاقة الأصليّة هي دالة لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى في حين أنّ العلاقة العكسية ليست دالّة، لأن العدد 1 من المجال ارتبط بالعنصرين −2 و 1 من المدى.

العلاقة العكسية
الزوج المرتب (a, b) ينتمي للعلاقة R إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (b, a) ينتمي **للعلاقة العكسية**. والتي يرمز لها بالرمز R^{-1}

أي أنّ: $(b, a) \in R^{-1} \iff (a, b) \in R$

لاحظ أن مجال العلاقة العكسية هو مدى العلاقة الأصلية، كذلك إنّ مدى العلاقة العكسية هو مجال العلاقة الأصلية.

مثال 1 إيجاد معادلة علاقة عكسيّة

لتكن $f(x) = x^2$

A. كيف يمكنك التعبير عن العلاقة العكسية للدالة f جبريًّا؟

B. كيف ترتبط تمثيلات $y = x^2$ و $y = \pm\sqrt{x}$ البيانية؟

الحل

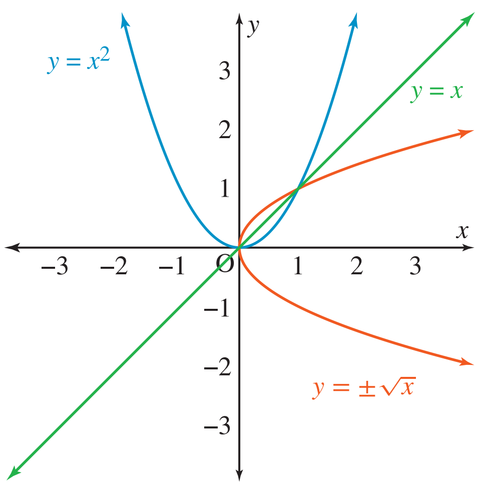
A. $f(x) = x^2 \rightarrow y = x^2$

بدّل أدوار x و y $\quad x = y^2$

حلّ لإيجاد y $\quad y = \pm\sqrt{x}$

إذن، يمكن التعبير عن معكوس الدالة f جبريًّا بالمعادلة $y = \pm\sqrt{x}$

B. مثّل بيانيًّا كل من العلاقتين $y = x^2$ و $y = \pm\sqrt{x}$، ماذا تلاحظ؟



بما أنّ مدى الدالة f هو $y \geq 0$ فإن مجال معكوس الدالة هو $x \geq 0$.
نلاحظ أنّ التمثيل البياني لمعكوس الدالة f هو انعكاس التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$ حول المستقيم $y = x$.

حاول أن تحل التمرين 1

نشاط المصطلحات

أطلب من الطلاب أن يفكروا في ما يفهمونه حول "العكس" عندما يتعلق الأمر بالعمليات العكسية. استفد من هذا الفهم لتقدم لهم مصطلحي "العلاقات العكسية" و "الدوال العكسية".

اربط كل زوج بالمصطلح الذي يدل عليه.

الجمع (+)، الطرح (−)	علاقات عكسية
$f(x) = x + 8$ ، $f(x) = x - 8$	عمليات عكسية
$(4, 6)$ ، $(6, 4)$	دوال عكسية

أسئلة للتفكير

س: لماذا تُكتب العلاقة العكسية للدالة $f(x) = x^2$ باستعمال ±؟ هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟

نموذج إجابة:

يتضمن مجال الدالة $f(x) = x^2$ أعدادًا سالبة وأعدادًا موجبة، وبالتالي إذا أهملنا ± فإن الأعداد السالبة في المجال لن تظهر في العلاقة العكسية.

لا تمثّل هذه العلاقة دالة لأن هناك أكثر من قيمة للمتغير التابع y عند كل قيمة للمتغير x.

س: كيف يمكن أن نؤكد من خلال التمثيل البياني أن معكوس الدالة ليس بدالة؟

نموذج إجابة:

يبيّن التمثيل البياني للعلاقة العكسية أكثر من قيمة لـ y مقابل كل قيمة لـ x، وهذا يعني أنها ليست دالة.

س: كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x + 1$ بالتمثيل البياني لدالتها العكسية $y = \frac{x-1}{2}$؟

نموذج إجابة:

التمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس التمثيل البياني للدالة f حول المستقيم $y = x$.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 1): اجعل الطلاب يستكشفون كيفية إيجاد العلاقات العكسية لدوال بدرجات أعلى. اكتب معادلة تمثّل معكوس كل دالة. هل المعكوس دالة؟

1. $f(x) = x^4 - 2$
$y = \pm\sqrt[4]{x+2}$, لا.

2. $g(x) = x^5 + 5$
$y = \sqrt[5]{x-5}$, نعم.

3. $h(x) = x^6$
$y = \pm\sqrt[6]{x}$, لا.

إيجاد العلاقة العكسية جبريًّا في المثال 1 كان سهلًا نسبيًّا، لكن ذلك لا ينطبق على الكثير من الحالات.
أما إيجاد التمثيل البياني للعلاقة العكسية، فهو أكثر سهولة، وذلك باستعمال الخاصية التالية:

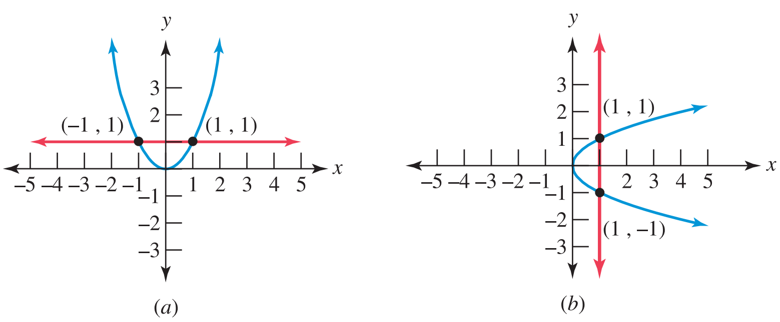
مبدأ الانعكاس العكسي

النقطتان $(a\ ,\ b)$ و $(b\ ,\ a)$ في المستوى الإحداثي متناظرتان بالنسبة إلى الخط $y = x$.
كل من النقطتين $(a\ ,\ b)$ و $(b\ ,\ a)$ تمثل **انعكاسًا** للأخرى حول الخط $y = x$.

ملاحظة تعليمية

قد يحتاج بعض الطلاب أن يلتفت إلى أنه عند البحث عن العلاقة العكسية من المهم أن ننظر إلى تحول النقاط، وذلك من خلال التنبه إلى أن (a, b) ينتمي إلى العلاقة وأن (b, a) ينتمي إلى العلاقة العكسية، وهذا مهم لفهم العلاقة العكسية.

سيكون اهتمامنا منصبًّا على العلاقات العكسية التي تشكّل دوالًا. يثبت اختبار الخط الرأسي أن التمثيل البياني للمعكوس الوارد في الشكل $2.3.1(b)$ ليس دالة، لأنه تم ربط قيمتين مختلفتين للمتغير y مع نفس القيمة للمتغير x. هذه نتيجة مباشرة لحقيقة أن في العلاقة الأصلية في الشكل $2.3.1(a)$ ارتبطت قيمتين مختلفتين للمتغير x مع نفس القيمة للمتغير y.



الشكل 2.3.1 يكافىء اختبار الخط الرأسي للعلاقة العكسية في (b) اختبار الخط الأفقي للعلاقة الأصلية في (a).

التمثيل البياني للمعكوس يفشل في اختبار الخط الرأسي عند فشل التمثيل البياني الأصلي في اختبار الخط الأفقي. هذا يعطينا اختبارًا للعلاقات التي تكون معكوساتها دوالًا.

اختبار الخط الأفقي

إن معكوس علاقة هو دالة إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يقطع التمثيل البياني للعلاقة الأصلية في نقطة واحدة على الأكثر.

سؤال للتفكر

س: هل هناك علاقة بين اختبار الخط الرأسي واختبار الخط الأفقي؟

نموذج إجابة:

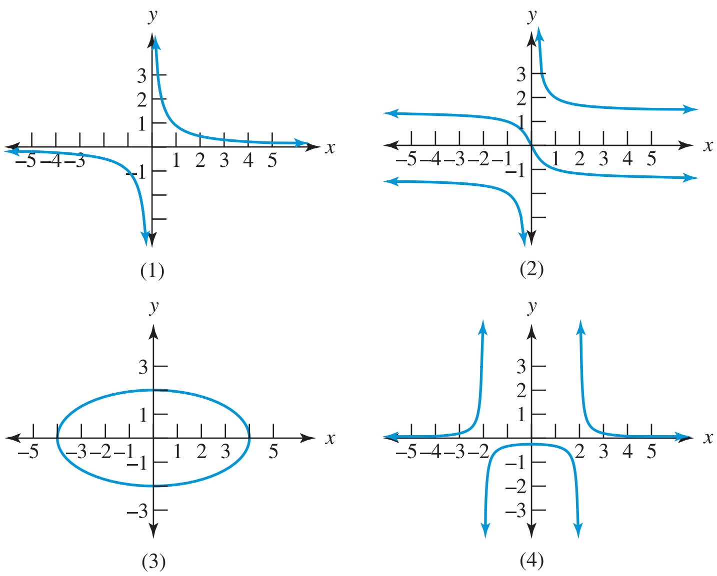
كلا، فالمنحنى قد يجتاز الاختبارين أو يفشل في أحدهما أو كليهما.

مثال 2 **تطبيق اختبار الخط الأفقي**

أي من التمثيلات البيانية (1) - (4) في الشكل أدناه هي تمثيلات بيانية لـ

A. علاقات عبارة عن دوال؟

B. علاقات لها معكوسات عبارة عن دوال؟



الحل

A. التمثيلان البيانيان (1) و (4) هما تمثيلان بيانيان لدالتين لأنهما يجتازان اختبار الخط الرأسي.

التمثيلان البيانيان (2) و (3) ليسا تمثيلين بيانيين لدالتين لأنهما يفشلان في اختبار الخط الرأسي.

B. التمثيلان البيانيان (1) و (2) تمثيلان بيانيان لعلاقتين معكوساهما دالتان لأنهما يجتازان اختبار الخط الأفقي.

يفشل التمثيلان البيانيان (3) و (4) في اختبار الخط الأفقي، لذا فإن علاقتيهما العكسيتين ليستا دالتين.

حاول أن تحل التمرين 2

الدالة العكسية

إنّ الدالة التي يكون معكوسها دالة أيضًا، يجتاز تمثيلها البياني اختباري الخط الرأسي والخط الأفقي (مثل التمثيل البياني في الرسم (1) من المثال 2). هذه الدالة هي دالة **واحد لواحد**، لأن كل قيمة من قيم x ترتبط مع قيمة وحيدة من قيم y وكل قيمة من قيم y ترتبط بقيمة وحيدة من قيم x.

إذا كانت العلاقة العكسية للدالة f، هي أيضًا دالة، فإنّها يُطلق عليها اسم **الدالة العكسية** للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$.

الدالة العكسية

إذا كانت f دالة واحد إلى واحد مجالها D ومداها R، فإن الدالة العكسية للدالة f، التي يشار إليها بالرمز f^{-1}، هي دالة مجالها R ومداها D معرّفة من خلال

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad f(a) = b$$

مثال 3 إيجاد دالة عكسية جبريًا

A. **أوجد معادلة $f^{-1}(x)$ إذا كان $f(x) = -\sqrt[3]{4x}$**

B. **أوجد معادلة $f^{-1}(x)$ إذا كان $f(x) = \frac{x}{x+1}$**

الحل

A. يوضح التمثيل البياني للدالة f الوارد في الشكل 2.3.2 أنّ f هي دالة واحد لواحد، وهي تحقق المعادلة $y = -\sqrt[3]{4x}$، إذًا فالدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تحقق المعادلة $x = -\sqrt[3]{4y}$ (بتبديل x و y).

إذا حللنا هذه المعادلة الأخيرة لإيجاد قيمة y، فسنحصل على صيغة $f^{-1}(x)$.

$x = -\sqrt[3]{4y}$	
$x^3 = -4y$	قم بالتكعيب
$y = \frac{-x^3}{4}$	اقسم على -4

إذن، $f^{-1}(x) = \frac{-x^3}{4}$

B. يوضح التمثيل البياني للدالة f الوارد في الشكل 2.3.3 أن f هي دالة واحد لواحد. الدالة الأصلية تحقق المعادلة $y = \frac{x}{x+1}$. إذا كانت f حقًا دالة واحد لواحد، فإن الدالة العكسية f^{-1} تحقق المعادلة $x = \frac{y}{y+1}$ (لاحظ أننا فقط نبدّل x و y).

إذا حللنا هذه المعادلة الجديدة لإيجاد قيمة y، فستكون لدينا صيغة لـ $f^{-1}(x)$:

$x = \frac{y}{y+1}$	
$x(y+1) = y$	اضرب في $(y+1)$
$xy + x = y$	خاصية التوزيع
$xy - y = -x$	افصل حدود y
$y(x-1) = -x$	حلّل بإخراج y عاملًا مشتركًا
$y = \frac{-x}{x-1}$	اقسم على $x - 1$
$y = \frac{x}{1-x}$	اضرب البسط والمقام في -1

إذن، $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$

حاول أن تحل التمرين 6

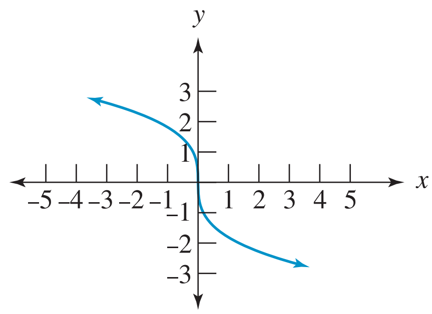
تنبيه بشأن صيغة الدالة

يقرأ الرمز f^{-1} "معكوس f" ويجب عدم الخلط بينه وبين مقلوب f. إذا كانت f دالة، فإن الرمز f^{-1} يمكن أن يعني فقط معكوس f. يجب كتابة مقلوب f في الصورة $\frac{1}{f}$.

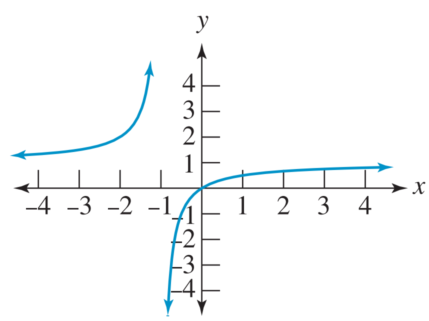
عادات التفكير

فكّر بالصيغة $f(x) = 2x + 1$ على شكل طريق للأعداد. ابدأ بـ x، اضرب بـ 2، واجمع 1 كيف يمكنك وصف طريق النتيجة رجوعًا إلى x؟

نموذج إجابة: ابدأ بـ $f(x)$، إطرح 1، ثم اقسم الناتج على 2



الشكل 2.3.2



الشكل 2.3.3

سؤال للتفكر

س: إذا استبدلنا الدالة $f(x) = \sqrt[3]{4x}$ في المثال بالدالة $g(x) = -\sqrt{4x}$ فهل يبقى معكوسها دالة؟

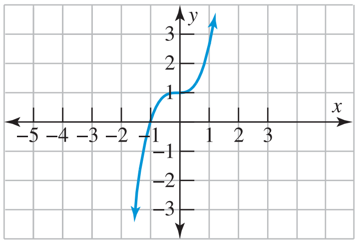
نموذج إجابة:

نعم، لأن g هي دالة واحد لواحد في مجالها.

من الممكن استعمال التمثيل البياني للدالة f لإنشاء رسم بياني للدالة f^{-1} دون إجراء أي عمليات جبرية، وذلك بفضل مبدأ الانعكاس العكسي للعلاقات.

مثال 4 إيجاد دالة عكسية بيانيًّا

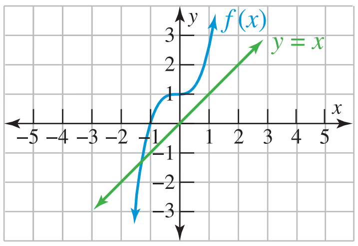
في الشكل أدناه، حدّد ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد. إذا كانت كذلك، ارسم التمثيل البياني لمعكوسها.



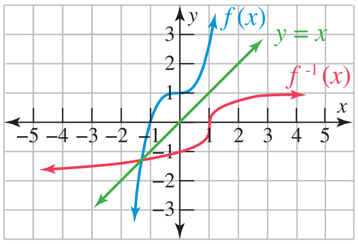
التمثيل البياني للدالة f

الحل

بما أن التمثيل البياني للدالة f يجتاز اختبار الخط الأفقي، فإن f دالة واحد لواحد. لا يلزمنا إيجاد صيغة لـ $f^{-1}(x)$. كل ما يلزمنا هو إيجاد انعكاس التمثيل البياني المعطى حول الخط $y = x$. ويمكن القيام بذلك هندسيًّا. تخيل مرآة على طول الخط $y = x$ وارسم انعكاسًا للتمثيل البياني المعطى في المرآة.



المرآة $y = x$



الانعكاس

حاول أن تحل التمرين 7

ملاحظة تعليمية

يحتاج بعض الطلاب إلى التذكير أنه لفهم معكوس علاقة ما علينا النظر إلى ما يحصل للنقاط. كيف تتحول النقاط (a, b) إلى النقاط (b, a) في معكوسها.

طريقة أخرى

ثمّة طريقة أخرى لتصور هذه العملية وهي تخيل رسم التمثيل البياني على لوح زجاجي كبير. تخيل دورانًا للوح الزجاجي حول الخط $y = x$ بحيث يتبدل موقع المحور x الموجب مع موقع المحور y الموجب. (يجب تدوير الجزء الخلفي من اللوح الزجاجي إلى الجزء الأمامي ليحدث هذا). عندئذٍ يصبح التمثيل البياني للدالة f هو التمثيل البياني لـ f^{-1}.

إرشاد

للمساعدة في الرسم نحدد نقاطًا على الرسم البياني المعطى ثم نرسم انعكاس تلك النقاط عبر المرآة ($y = x$).

سؤال للتفكر

س: كيف نثبت أن النقطتين $A(a, b)$ و $B(b, a)$ متناظرتان عبر المحور $y = x$؟

نموذج إجابة:

نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ هي $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$ وتنتمي إلى المحور $y = x$.

ميل المستقيم (AB) هو $\frac{a-b}{b-a} = -1$ وهذا يعني أن الزاوية بين (AB) والمستقيم $y = x$ (حيث ميله 1) قائمة، وهذا يعني أن B تتناظر مع A حول المستقيم $y = x$.

تذكير

إذا كان ناتج ضرب ميلي مستقيمين يساوي -1 يكون هذان المستقيمان متعامدين.

ثمّة ارتباط طبيعي بين المعكوسات وتركيب الدوال يعطي تصورًا أوضح للعمل الفعلي للمعكوس: إنه "يلغي" عمل الدالة الأصلية. وهذا يؤدي إلى القاعدة الآتية:

قاعدة التركيب العكسي

الدالة f هي دالة واحد لواحد ودالتها العكسية هي الدالة g إذا وفقط إذا كانت

لجميع قيم x في مجال الدالة g: $f(g(x)) = x$

ولجميع قيم x في مجال الدالة f: $g(f(x)) = x$

مثال 5 التحقق من الدوال العكسية

A. أثبت جبريًّا أن $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دالتان متعاكستان.

B. هل الدالتان $f(x) = x^2 + 5$ و $g(x) = \sqrt{x} - 5$ متعاكستان؟ برّر إجابتك.

الحل

A. نستعمل قاعدة التركيب العكسي

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x-1}\right) = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$g(f(x)) = g\left(x^3+1\right) = \sqrt[3]{\left(x^3+1\right) - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

بما أن هذه المعادلات صحيحة لجميع قيم x ، فإن قاعدة التركيب العكسي تضمن أن f و g كل منهما معكوس للآخر.

لا يتعين عليك فعل الكثير لإيجاد دعم بياني لهذا التحقق الجبري، لأن التمثيلين البيانيين لهاتين الدالتين موضّحان في المثال 4

B. نستعمل قاعدة التركيب العكسي

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 5)$$
$$= (\sqrt{x} - 5)^2 + 5$$
$$= x - 10\sqrt{x} + 25 + 5$$
$$= x - 10\sqrt{x} + 30$$

$$g(f(x)) = g\left(x^2 + 5\right)$$
$$= \sqrt{x^2 + 5} - 5$$

بما أنّ $f(g(x)) \neq g(f(x))$، وأيًّا من $f(g(x))$ أو $g(f(x))$ لا يساوي x، فإنّ الدالتين ليستا متعاكستين.

حاول أن تحل التمرين 17

أسئلة للتفكر

س: هل الترتيب في تركيب الدوال مهم عند التحقق من أن إحداهما هي معكوس الأخرى؟

نموذج إجابة:

كلا، علينا فقط أن نبسط قيمة $f(g(x))$ أو $g(f(x))$ بغض النظر عن ترتيبهما.

س: كيف يرتبط تركيب الدالة ومعكوسها بمنحنى الدالة بالنسبة لمنحنى معكوسها؟

نموذج إجابة:

تركيب الدالة ومعكوسها يساوي x ومنحنى معكوس الدالة هو انعكاس منحنى الدالة حول المستقيم $y = x$.

س: كيف يمكن مقارنة معكوس الدوال مع العمليات العكسية؟

نموذج إجابة:

عندما نجمع عددًا مع نظيره الجمعي، يكون الناتج 0، وهو العنصر المحايد لعملية الجمع. وعندما نضرب عددًا بمقلوبه نحصل على 1، وهو العنصر المحايد للضرب. وكذلك عندما نركّب دالة مع معكوسها، نحصل على x وهي دالة التطابق التي هي أيضًا الدالة المحايدة لعملية تركيب الدوال.

سؤال للتفكر

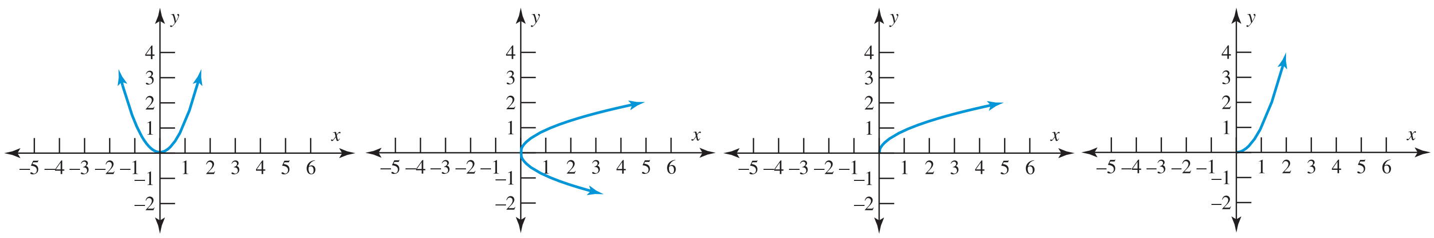
س: هل يمكن أن تكون الدالة متعاكسة مع نفسها؟

نموذج إجابة:

نعم، على سبيل المثال: $f(x) = \frac{1}{x}$ متعاكسة مع نفسها، $f \circ f(x) = x$.

الدالة العكسية على مجال محدد

بعض الدوال مهمة جدًا لدرجة أننا بحاجة إلى دراسة معكوساتها حتى لو لم تكن دوال واحد لواحد. من الأمثلة الجيدة على ذلك دالة الجذر التربيعي، التي هي "معكوس" للدالة التربيعية. غير أنها ليست معكوسًا للدالة التربيعية بأكملها، لأن القطع المكافئ الكامل يفشل في اختبار الخط الأفقي. يبيّن الشكل 2.3.4 أن الدالة $y = \sqrt{x}$ هي الدالة العكسية للدالة $y = x^2$ على مجال محدد هو $x \geq 0$.



التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ (ليست دالة واحد إلى واحد) | العلاقة المعكوسة للدالة $y = x^2$ (ليست دالة) | التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ (دالة) | التمثيل البياني للدالة التي معكوسها $y = \sqrt{x}$

الشكل 2.3.4 ليس للدالة $y = x^2$ دالة عكسية. ولكن الدالة $y = \sqrt{x}$ هي دالة عكسية للدالة $y = x^2$ على المجال المحدد $[0, \infty[$.

أخذ المجالات في الحسبان يضيف تحسينًا إلى الطريقة الجبرية لإيجاد المعكوس الواردة في المثال 3، والتي نلخصها الآن كما يلي:

كيف نجد الدالة المعكوسة جبريًا

بمعرفة صيغة الدالة f، تابع كما يلي لإيجاد صيغة للدالة f^{-1}.

1. قرّر أنه توجد دالة f^{-1} من خلال التحقق من أن f دالة واحد لواحد. اذكر أي قيود على مجال f. (لاحظ أنه قد يكون من الضروري فرض قيود للحصول على نسخة واحد لواحد من الدالة f).
2. بدِّل x و y في الصيغة $y = f(x)$
3. حل لإيجاد y لتحصل على الصيغة $y = f^{-1}(x)$. اذكر أي قيود على مجال f^{-1}.

أسئلة للتفكر

س: هل يجب أن نقيّد مجال أي دالة للحصول على دالة عكسية؟

نموذج إجابة:

كلا، نقوم بذلك فقط إذا كان للدالة نفس القيمة لأكثر من قيمة للمتغير x.

س: كيف يمكن أن نقيّد مجال الدالة $f(x) = x^2$ للحصول على دالة عكسية؟

نموذج إجابة:

إذا اقتصرنا على المجال $x \geq 0$،

تكون الدالة العكسية $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

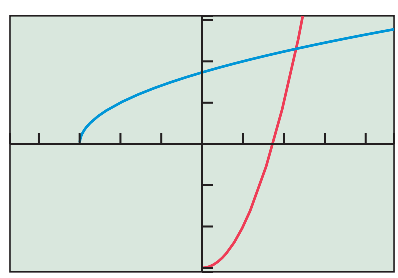
مثال 6 إيجاد دالة عكسية جبريًا

أثبت أن $f(x) = \sqrt{x+3}$ لها دالة عكسية وأوجد قاعدة لـ $f^{-1}(x)$.
اذكر أي قيود على مجالي f و f^{-1}.

الحل

التمثيل البياني للدالة f يجتاز اختبار الخط الأفقي، إذن لها دالة عكسية (الشكل 2.3.5).

لاحظ أن f لها المجال $]-3, \infty[$ والمدى $[0, \infty[$.



$[-4.7, 4.7]$ في $[-3.1, 3.1]$

الشكل 2.3.5

(تابع)

لإيجاد f^{-1} نكتب:

$y = \sqrt{x+3}$ حيث $y \ge 0\,,\, x \ge -3$

بدِّل x و y — $x = \sqrt{y+3}$ حيث $x \ge 0\,,\, y \ge -3$

قم بالتربيع — $x^2 = y + 3$ حيث $x \ge 0\,,\, y \ge -3$

حل لإيجاد y — $y = x^2 - 3$ حيث $x \ge 0\,,\, y \ge -3$

إذن $f^{-1}(x) = x^2 - 3$، $x \ge 0$.

يبيّن الشكل 2.3.5 الدالتين.

لاحظ قيد المجال $x \ge 0$ المفروض على القطع المكافئ $y = x^2 - 3$.

حاول أن تحل التمرين 22

يمكننا استعمال مفهوم الدالة العكسية في معالجة مسائل واقعية.

مثال 7 إعادة كتابة الصّيغة

فنان نحتٍ يصنع مجسمًا من الجليد لكوكب الأرض لأحد المعارض. وقد صنع قالبًا يسع 4.5 L من الجليد. كم سيساوي نصف قطر مجسم الجليد إذا ملأ القالب بأكمله؟

الحل

لحساب حجم الشكل الكروي

باستعمال الصيغة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

أعد كتابة الصيغة لإيجاد طول نصف القطر.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V$$

$$\pi r^3 = \frac{3}{4}V$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi}V$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

بما أن اللتر هو وحدة قياس السعة، أو الحجم، فيمكن التعبير عنه باستعمال وحدات الطول المكعبة. عندما تحسب الجذر التكعيبي لمقدار يتضمن الحجم بوحدات الطول المكعبة، فإن وحدات الناتج ستكون الوحدات الصحيحة لوصف الطول.

اللتر الواحد يساوي $1\ 000\ \text{cm}^3$، إذن 4.5 L تساوي $4\ 500\ \text{cm}^3$

(تابع)

سؤال للتفكير

س: متى يكون للدالة ومعكوسها المجال نفسه؟

نموذج إجابة:

إذا كان مجال الدالة ومداها متماثلين.

عادات التفكير

يقول حمد إن الدالتين $f(x) = (x-2)^2 + 5$ و $g(x) = \sqrt{x-5} + 2$ متعاكستان. يقول كرم أنهما متعاكستان فقط في جزء محدود من المجال. أي منهما محق؟ اشرح.

نموذج إجابة:

كرم هو المحق. الدالتان متعاكستان إذا اقتصر مجال f على $x \ge 2$

سؤال للتفكير

س: كيف يمكن أن تتحقق من أنك قد كتبت قاعدة r بصيغة سليمة؟

نموذج إجابة:

عوّض صيغة r في القاعدة الأصلية، ثم بسّط، يجب أن تحصل ببساطة على V.

س: كيف تكون العلاقة بين القاعدة الأصلية والمستنتجة مشابهة للعلاقة بين الدالة ومعكوسها؟

نموذج إجابة:

عندما نعوّض القاعدة المستنتجة في القاعدة الأولى نحصل على القيمة الأصلية، وهو ما يحصل عندما نركّب الدالة مع معكوسها.

عادات التفكير

س: ما هو المتغير التابع في القاعدة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

وما هو المتغير التابع في القاعدة $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$؟

نموذج إجابة:

r, V.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 7) لدى بعض الطلاب صعوبات في استنتاج القاعدة العكسية للعلاقات الخطية. دع الطلاب يحاولون حل ما يلي:

1. أعد كتابة $a + 2b = 6$ للحصول على b.

$b = \frac{6-a}{2}$

2. أعد كتابة $3x - y = -5$ للحصول على y.

$y = 3x + 5$

3. أعد كتابة $m = 4n - 7$ للحصول على n.

$n = \frac{m+7}{4}$

متابعة

اسأل: إذا كانت f و g دالتين متعاكستين، وكانت $f(3) = 7$، أوجد $g(3)$ و $g(7)$ إذا كان هذا ممكنًا. ($g(7) = 3$).

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-6، تبين العلاقة العكسية والدوال العكسية.

التمارين 7-10، تركز على اختبار الخط الأفقي وإيجاد الدالة العكسية بيانيًا.

التمارين 28-31، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5, 11, 14, 19, 24, 27

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

عوّض بالعدد 4 500 عن V $\qquad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \times 4\,500}$

$$\approx 10.2$$

إعادة كتابة المعادلة لتوضيح r بدلالة V يشبه إيجاد المعكوس. وفي الواقع، أنت تبدل أدوار المتغير التابع والمتغير المستقل. ففي المعادلة الأصلية $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، يمكنك ملاحظة كيف أن قيمة V تعتمد على قيمة r، وفي المعادلة الناتجة $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$، يمكنك ملاحظة كيف يمكن تحديد قيمة r بواسطة قيمة معينة للحجم V وكيف أنها تعتمد على هذه القيمة.

سيكون نصف قطر قالب مجسم الجليد 10.2 cm تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 25

مراجعة سريعة 2.3

في التمارين 1-10، حل المعادلة لإيجاد y.

1. $x = 3y - 6$ $\quad y = \frac{1}{3}x + 2$

2. $x = 0.5y + 1$ $\quad y = 2x - 2$

3. $x = y^2 + 4$ $\quad y = \pm\sqrt{x - 4}$

4. $x = y^2 - 6$ $\quad y = \pm\sqrt{x + 6}$

5. $x = \frac{y-2}{y+3}$ $\quad y = \frac{3x+2}{1-x}$

6. $x = \frac{3y-1}{y+2}$ $\quad y = \frac{2x+1}{3-x}$

7. $x = \frac{2y+1}{y-4}$ $\quad y = \frac{4x+1}{x-2}$

8. $x = \frac{4y+3}{3y-1}$ $\quad y = \frac{x+3}{3x-4}$

9. $x = \sqrt{y+3}\,,\ y \geq -3$ $\quad y = x^2 - 3,\ x \geq 0$

10. $x = \sqrt{y-2}\,,\ y \geq 2$ $\quad y = x^2 + 2,\ x \geq 0$

الدرس 2.3 التمارين

.1 لتكن $f(x) = (x + 1)^2$

.a كيف يمكنك إيجاد العلاقة العكسية للدالة f جبريًا؟

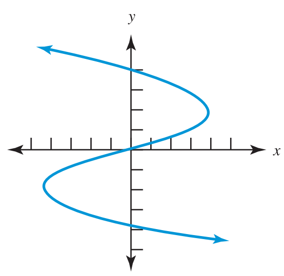
.b كيف ترتبط تمثيلات $y = (x + 1)^2$ و $y = \pm\sqrt{x} - 1$ البيانية؟

.2 أي من التمثيلات البيانية (a), (b), (c), (d) أدناه هي تمثيلات بيانية لـ :

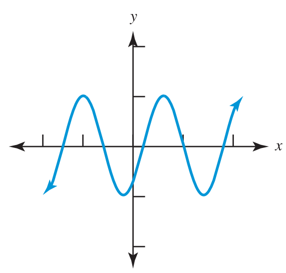
.i علاقات عبارة عن دوال؟

.ii علاقات لها معكوسات عبارة عن دوال؟

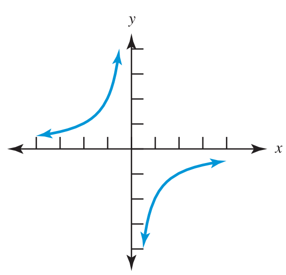
a.



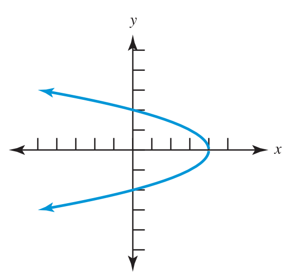
b.



c.



d.



في التمارين 3-6، أوجد صيغة $f^{-1}(x)$.

3. $f(x) = 3x - 6$

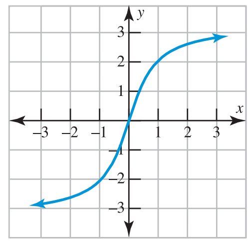
4. $f(x) = 2x + 5$

5. $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$

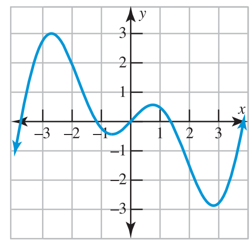
6. $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$

في التمارين 7-10، حدّد ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد. إذا كانت كذلك، ارسم التمثيل البياني لمعكوسها.

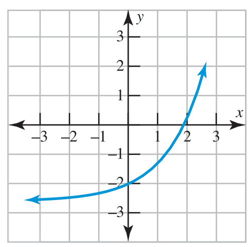
7.



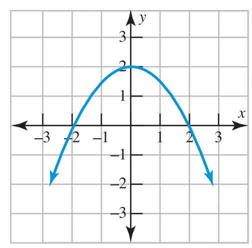
8.



9.



10.



في التّمارين 11-18، بيّن ما إذا كانت f و g دالتين متعاكستين.

11. $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = \frac{x + 2}{3}$ متعاكستان

12. $f(x) = \frac{x + 3}{4},\ g(x) = 4x - 3$ متعاكستان

13. $f(x) = x^3 + 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ متعاكستان

14. $f(x) = \frac{7}{x},\ g(x) = \frac{7}{x}$ متعاكستان

15. $f(x) = \frac{x + 1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x - 1}$ متعاكستان

16. $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2},\ g(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$ متعاكستان

17. $f(x) = 2x - 9,\ g(x) = \frac{1}{2}x + 9$ غير متعاكستين

18. $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{3}},\ g(x) = 3x^2 - 4$ غير متعاكستين

في التمارين 19-24، أوجد صيغة $f^{-1}(x)$. اذكر أي قيود على مجالي f و f^{-1}.

19. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

20. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

21. $f(x) = x^3$

22. $f(x) = \sqrt{x^3 + 5}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$

24. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

.25 اشترى مدير مطعم مخاريط للآيس كريم. أوجد صيغة لطول نصف القطر، r، لمخروط بدلالة حجمه، V. ثم أوجد طول نصف قطر مخروط إذا كان حجمه يساوي $290\pi\ cm^3$ وارتفاعه يساوي 15 cm

.26 تحويل العملات في مايو من عام 2013 كان سعر الصرف لتحويل الدولار الأمريكي (x) إلى يورو (y)، $y = 0.76x$.

a. كم المبلغ باليورو الذي تحصل عليه نظير 100$ أمريكي؟

b. ما الدالة العكسية وما التحويل الذي تمثله؟

c. في ربيع عام 2013، تناول سائح غداءً فخمًا في منطقة بروفنس في فرنسا، حيث طلب من قائمة ذات سعر ثابت يبلغ 48 يورو. كم كان ذلك المبلغ يساوي بالدولار الأمريكي؟

.27 تحويل درجة الحرارة صيغة تحويل درجة الحرارة المئوية (x) إلى درجة الحرارة بالكلفن هي $k(x) = x + 273.16$. وصيغة تحويل درجة الحرارة بالفهرنهايت (x) إلى درجة الحرارة المئوية هي $c(x) = \left(\frac{5}{9}\right)(x - 32)$

a. أوجد صيغة لـ $c^{-1}(x)$. ما الغرض من استعمال هذه الصيغة؟

b. أوجد $(k \circ c)(x)$. ما الغرض من استعمال هذه الصيغة؟

أسئلة اختبار معيارية

.28 صواب أم خطأ إذا كانت f هي دالة واحد لواحد، مجالها D ومداها R، إذن f^{-1} هي دالة واحد لواحد، مجالها R و مداها D. برّر إجابتك.

.29 صواب أم خطأ $f \circ f^{-1}$ هي الدالة المحايدة. برّر إجابتك.

.30 اختيار من متعدد أي دالة مما يلي هي معكوس الدالة $f(x) = 3x - 2$؟ C

A. $g(x) = \frac{x}{3} + 2$

B. $g(x) = 2 - 3x$

C. $g(x) = \frac{x+2}{3}$

D. $g(x) = \frac{x-3}{2}$

E. $g(x) = \frac{x-2}{3}$

.31 اختيار من متعدد أي دالة مما يلي هي معكوس الدالة $f(x) = x^3 + 1$؟ A

A. $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

B. $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

C. $g(x) = x^3 - 1$

D. $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

E. $g(x) = 1 - x^3$

استكشاف

.32 خصائص الدوال التي ترثها معكوسات الدوال هناك بعض خصائص الدوال التي ترثها دوال المعكوس (حين تكون موجودة) تلقائيًا، والبعض الآخر الذي لا ترثه. لنفترض أن لدى f دالة المعكوس f^{-1}. ناقش جبريًا أو بيانيًا (ليس برهانًا نظاميًا دقيقًا) لتبرهن أن كل الخصائص التالية للدالة f هي أيضًا خصائص للدالة f^{-1}.

a. f متصلة.

b. f هي دالة واحد لواحد.

c. f هي دالة فردية (بيانيًا، متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل).

d. f متزايدة.

.33 خصائص الدوال التي لا ترثها معكوسات الدوال هناك بعض خصائص الدوال التي لا ترثها بالضرورة دوال المعكوس، حتى لو كانت موجودة. لنفترض أن لدى f دالة المعكوس f^{-1}. لكل من الخصائص التالية، أعط مثالًا لتبين أنه يمكن أن يكون للدالة f هذه الخاصية دون أن تكون أيضًا للدالة f^{-1}.

a. f لها خط تقارب أفقي.

b. f لها مجال هو كل الأعداد الحقيقية.

c. f لها عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 5$.

توسيع الأفكار

.34 مقياس «*Baylor*» لمعدل العلامات الدالة المستخدمة لتحويل معدل العلامات المدرسية وفق مقياس "*Baylor*" لتصبح معدلات من 4، هي:

$$y = \left(\frac{3^{1.7}}{30}(x - 65)\right)^{\frac{1}{1.7}} + 1$$

مجال هذه الدالة هو [65, 100]. أي علامة تحت 65 سوف تحول تلقائيًا إلى صفر.

a. أوجد معكوس هذه الدالة جبريًا. ماذا يمكن أن تكون وظيفة هذه الدالة؟

b. هل هناك شروط تحدد مجال معكوس الدالة؟

c. تحقق من خلال الآلة الحاسبة من أن الدالة التي وجدت في (a) هي فعلًا معكوس الدالة المعطاة أولًا.

.35 نشاط جماعي (تابع للتمرين السابق) يسمى العدد 1.7 الذي يظهر في مكانين في قاعدة المقياس السابق عامل المقياس (k). يمكن تغيير قيمة k بحيث يتغير منحنى الدالة فيما تبقى النقاط (65.1) و (95.4) ثابتة وحيث اعتُقد أن العلامة الأدنى 65 ينبغي أن تصبح 1 على المقياس الجديد بينما العلامة 95 ينبغي أن تصبح 4 على هذا المقياس. اختار المجلس الأكاديمي $k = 1.7$ بوصفه العامل الذي ينتج المقياس الأكثر إنصافًا، وذلك بعد تجريب عدة قيم أخرى. حاول أن تعطي k قيمًا بين 1 و 2، وأوجد نوع المنحنى حين يكون $k = 1$.
هل توافق مقياس "*Baylor*" أن $k = 1.7$ هو الأكثر إنصافًا؟

إجابات أسئلة التمارين 2.3

.1 a. $y = \pm\sqrt{x} - 1$

b. متناظران حول المحور $y = x$

2. i. b, c

ii. a, c, d

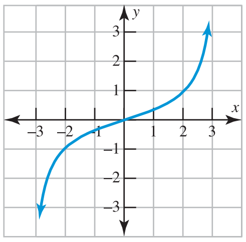
3. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 2$

4. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

5. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}$

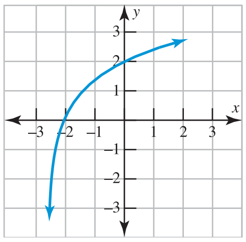
6. $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

.7 واحد لواحد، متناظر حول $y = x$.



.8 ليست واحد لواحد

.9 واحد لواحد، متناظر حول $y = x$.



.10 ليست واحد لواحد

.19 $f^{-1}(x) = x^2 + 3$، مجال f هو $[3, \infty[$ ، مجال f^{-1} هو $[0, \infty[$.

.20 $f^{-1}(x) = x^2 - 2$، مجال f هو $[-2, \infty[$ ، مجال f^{-1} هو $[0, \infty[$.

.21 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$، مجال f هو $]-\infty, \infty[$، مجال f^{-1} هو $]-\infty, \infty[$.

.22 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$، مجال f هو $[-\sqrt[3]{5}, \infty[$، مجال f^{-1} هو $[0, \infty[$.

.23 $f^{-1}(x) = x^3 - 5$، مجال f هو $]-\infty, \infty[$، مجال f^{-1} هو $]-\infty, \infty[$.

.24 $f^{-1}(x) = x^3 + 2$، مجال f هو $]-\infty, \infty[$، مجال f^{-1} هو $]-\infty, \infty[$.

25. $r(V) = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$, $r \approx 7.6$ cm

26. a. 76 يورو

b. $f^{-1}(x) = \frac{x}{0.76}$ تحويل اليورو إلى دولار

c. 63.16 دولار

.27 a. تحويل الدرجة المئوية إلى فهرنهايت: $C^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$

b. تحويل الفهرنهايت إلى كلفن: $k \circ C(x) = \frac{9}{5}(x - 32) + 273.16$

.28 صواب، لأن كل قيمة y في المدى يقابلها قيمة واحدة x في المجال بحيث $f(x) = y$ وهذا يعرف دالة واحد لواحد هي f^{-1}.

.29 صواب، لأن $f \circ f^{-1}(x) = x$

.32 a. f^{-1} متصلة لأنها تتناظر مع f.

b. f^{-1} واحد لواحد لأنها تتناظر مع f.

c. f^{-1} دالة فردية لأنها متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل.

d. لتكن $x_1 < x_2$، إذا كان $f^{-1}(x_1) \ge f^{-1}(x_2)$، فإن $f(f^{-1}(x_1)) \ge f(f^{-1}(x_2))$، إذن $x_1 \ge x_2$ لأن f متزايدة.
إذن، $f^{-1}(x_1) \le f^{-1}(x_2)$

.33 سوف نتعرف فيما بعد على الدالة $f(x) = 2^x$ التي يبيّن تمثيلها البياني أنها دالة واحد لواحد وأن مجالها كل الأعداد الحقيقية ومداها هو $]0, \infty[$.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ إذن، للدالة f خط تقارب أفقي وليس لها خط تقارب رأسي. وبما أن f^{-1} تتناظر معها حول المحور $y = x$، فإن لها خط تقارب رأسي وليس لها خط تقارب أفقي.

b. مجال f هو كل الأعداد الحقيقية، ومداها هو $]0, \infty[$، إذن مجال معكوسها هو $]0, \infty[$.

c. لنفترض أن نقطة عدم الاتصال للدالة هي $(5, 3)$، إذن نقطة عدم الاتصال للدالة f^{-1} هي $(3, 5)$. إذن f^{-1} لها عدم اتصال عند $x = 3$ وليس عند $x = 5$.

.34 a. تحويل المعدلات من مقياس *Baylor* (من 4) إلى معدل العلامات المدرسية المئوية (من مئة).
$y = \frac{30}{3^{1.7}}(x - 1)^{1.7} + 65$

b. نعم، $x \in [1, 4.28]$.

c. مثّل تركيب الدالتين بيانيًا باستعمال حاسبة بيانية وتحقق من أنها $y = x$ على $[65, 100]$ أو $[1, 4.28]$ حسب الترتيب.

.35 تكون الدالة خطية عندما $k = 1$. تختلف الآراء حول أفضل قيمة للمتغير k.

2.4 تحويلات التمثيلات البيانية للدوال — Graphical Transformation

ما ستتعلّمه

- التحويلات الهندسية
- الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية
- الانعكاس حول المحورين
- التمدد والتضيّق الرأسي والأفقي
- تركيب التحويلات الهندسية

... ولماذا

إن دراسة التحويلات الهندسية تساعد على فهم العلاقات بين التمثيلات البيانية المتشابهة في بعض الجوانب لكنها ليست متماثلة كليًا.

معايير الدرس

11A.6.1

11A.6.2

المصطلحات

- التحويلات الهندسية transformations
- الإزاحة الرأسية vertical translation
- الإزاحة الأفقية horizontal translation
- انعكاس حول المحور x reflection about the x-axis
- انعكاس حول المحور y reflection about the y-axis
- التمدّد والتضيق الأفقي horizontal stretch and shrink
- التمدّد والتضيق الرأسي vertical stretch and shrink

الهدف

سوف يتمكن الطلاب من تمثيل الدوال تحت تأثير إزاحات، وانعكاسات، وتمددات، وتضيقات الدوال جبريًا وبيانيًا.

دليل الدرس

1. الإزاحات الأفقية والرأسية
2. الانعكاس حول أحد المحورين
3. التضيق والتمدد الأفقي
4. تركيب التحويلات الهندسية

تحفيز

اسأل الطلاب: ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $y = (x - 2)^2$ والتمثيل البياني للدالة $y = x^2$؟

نموذج إجابة:

إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين

التحويلات الهندسية

الدوال التالية كلها مختلفة:

$$y = x^2$$

$$y = (x - 3)^2$$

$$y = 1 - x^2$$

$$y = x^2 - 4x + 5$$

على الرغم من اختلاف التمثيلات البيانية لهذه الدوال، إلا أنها جميعها تتماثل في الشكل والقياس: أي أن الشكل نفسه مرسوم في مواقع مختلفة.

إن تغيير المقدار الجبري للدالة يؤدي إلى تغيير في شكل وموقع وأبعاد منحناها (تمثيلها البياني)، وهذا يؤكد حتمًا الربط بين المقدار الجبري للدالة ومنحناها.

سوف نربط في هذا الدرس بين التمثيلات البيانية (المنحنيات) لعدة دوال باستخدام مفهوم **التحويلات الهندسية**. تُمثّل التحويلات الهندسية دوالًا تربط كل نقطة بنقطة أخرى من خلال العمل على تغيير الإحداثيين x و y بطريقة محددة.

التحويلات القياسية هي التحويلات التي تغيّر مواقع التمثيلات البيانية مع الإبقاء على أشكالها، وأبعادها كالإزاحة والانعكاس وتركيب التحويلين.

أما **التحويلات غير القياسية** فهي التحويلات التي تؤثر في أشكال التمثيلات كالتمدد والتضيّق.

الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية

الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة $y = f(x)$ هي نقل لمنحنى الدالة في المستوى الإحداثي إلى الأعلى أو الأسفل.

الإزاحة الأفقية تنقل منحنى الدالة في المستوى الإحداثي إلى اليمين أو اليسار.

نشاط استكشافي 1 الإزاحة

1. مثّل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي مستعملًا البرمجيات.

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = y_1(x) + 3 = x^2 + 3$$

$$y_3 = y_1(x) - 2 = x^2 - 2$$

$$y_4 = y_1(x) + 1 = x^2 + 1$$

$$y_5 = y_1(x) - 4 = x^2 - 4$$

أوجد تأثير الأعداد $+3$ و $+1$ و -2 و -4 على التمثيلات البيانية.

2. مثّل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي مستعملًا البرمجيات.

$$y_1 = x^2$$
$$y_2 = y_1(x+3) = (x+3)^2$$
$$y_3 = y_1(x-2) = (x-2)^2$$
$$y_4 = y_1(x+1) = (x+1)^2$$
$$y_5 = y_1(x-4) = (x-4)^2$$

أوجد تأثير الأعداد $+3$ و -2 و $+1$ و -4 في التمثيلات البيانية.

3. أعد ما قمت به في 1 و 2 على الدوال: $y_1 = x^3$, $y_1 = |x|$, $y_1 = \sqrt{x}$

هل تتوافق ملاحظاتك الحالية مع ملاحظاتك السابقة؟

نلاحظ عمومًا أن تعويض $x - c$ عن x، حيث $c > 0$، في الدالة يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى اليمين، وأن تعويض $x + c$ عن x، حيث $c > 0$، يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى اليسار.

كذلك تعويض $y - c$ عن y، حيث $c > 0$، في الدالة يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى الأعلى، وتعويض $y + c$ عن y، حيث $c > 0$، يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى الأسفل.

نستخلص مما سبق القواعد التالية:

إزاحة الدوال

ليكن $c > 0$

فيما يلي الدوال التي تنشأ عن الإزاحة الأفقية أو الرأسية للدالة $y = f(x)$

الإزاحة الأفقية

إزاحة إلى اليسار بمقدار c وحدة	$y = f(x+c)$
إزاحة إلى اليمين بمقدار c وحدة	$y = f(x-c)$

الإزاحة الرأسية

إزاحة إلى الأعلى بمقدار c وحدة	$y = f(x) + c$
إزاحة إلى الأسفل بمقدار c وحدة	$y = f(x) - c$

مثال 1 الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية

بيّن كيف يمكن تحويل منحنى الدالة $f(x) = |x|$ إلى منحنى كلٍّ من الدوال التالية:

A. $y = |x| - 4$

B. $y = |x+2|$

(تابع)

تحفيز

س: هل تؤدي إزاحة القطع المكافىء إلى تغير في شكله؟

نموذج إجابة:

كلا، تنقل الإزاحة القطع المكافىء إلى موقع جديد، وهذا ما يحافظ على شكله.

نشاط المصطلحات

دع الطلاب يمثّلون بيانيًا الدالة $y_1 = x^2$ والدالة $y_2 = (x-1)^2$ و الدالة $y_3 = x^2 - 1$.

اسألهم أن يبحثوا عن الكلمة التي تعبر عن الرابط بين هذه التمثيلات البيانية. بعد وصولهم بمساعدتك إلى مصطلح الإزاحة، أدخل لهم بنفس الطريقة مصطلحي التمدد والتضيق.

توسيع الاستكشاف

مثّل بيانيًا الدوال $y_1 = x^2$، $y_2 = (x+3)^2 - 2$، $y_3 = (x-1)^2 + 4$ و $y_4 = (x+1)^2 - 3$. ما هو أثر الثوابت التي يتم جمعها أو طرحها مع المتغير x أو y؟

ملاحظة تعليمية

الأدوات المستعملة للتمثيل البياني هي أدوات مهمة جدًا في إبراز التحويلات على الدوال الأصلية كالدالة $y = x^2$.

سؤال للتفكر

س: هل يمكننا الربط بين التحويلات وتركيب الدوال؟

نموذج إجابة:

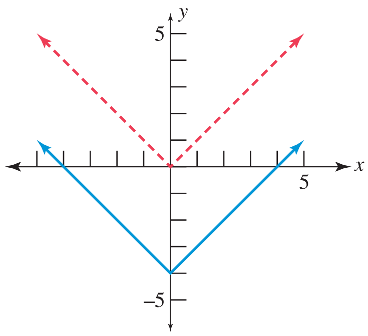
نعم، يمكننا أن نكتب مثلًا $f(g(x)) = f(x+3)$ إذا كانت $g(x) = x + 3$، فيكون التركيب $f \circ g$ مكافئًا لإزاحة التمثيل البياني للدالة f أفقيًا بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.

الحل

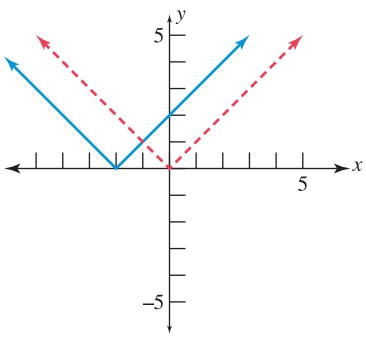
A. المعادلة في الصورة $y = f(x) - 4$
إذن، التحويل هو إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات. انظر الشكل 2.4.1

B. المعادلة في الصورة $y = f(x + 2)$ إذن، التحويل هو إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين.
انظر الشكل 2.4.2

حاول أن تحل التمرين 1



الشكل 2.4.1 $y = |x| - 4$



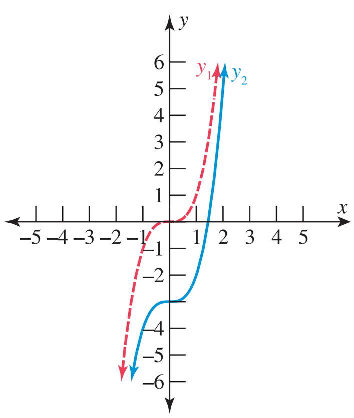
الشكل 2.4.2 $y = |x+2|$

إذا كنا نعرف الدالة الأصلية ومقدار واتجاه الإزاحة يمكننا كتابة دالة المنحنى المُزاح.

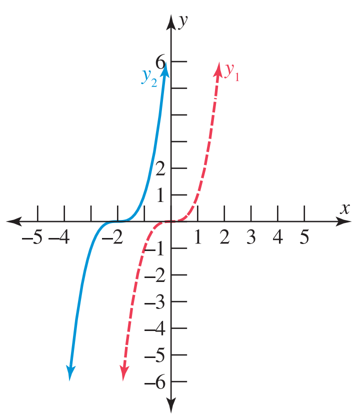
مثال 2 إزاحة الدالة

يبيّن كل تمثيل من التمثيلات البيانية في الشكل أدناه، المنحنى للدالة $y_1 = x^3$ مع إزاحته أفقيًّا أو رأسيًّا y_2. أوجد الدالة y_2.

A.



B.



(تابع)

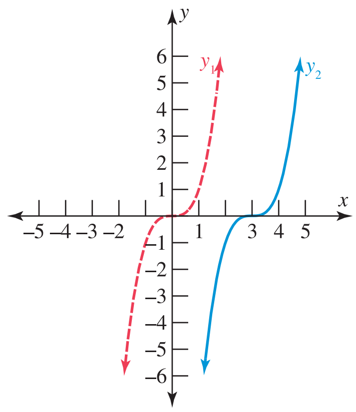
سؤال للتفكر

س: يبيّن الرسم البياني في كل من (B) و (C) أن أي مستقيم أفقي يقطع التمثيلين البيانيين للدالتين y_1 و y_2 في نقطتين هما دائما على مسافة ثابتة. فهل يوحي الرسم البياني في كل من (A) و (D) نفس الأمر بالنسبة للمستقيمات الرأسية؟

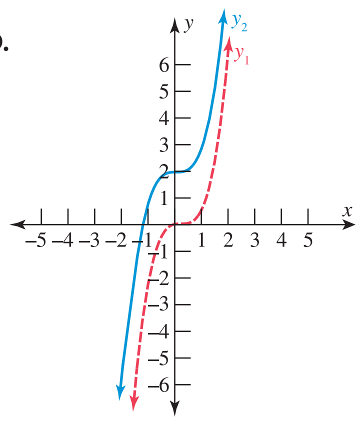
نموذج إجابة:

لا يوحي الرسم البياني بذلك مع أنه صحيح أيضًا، فأي مستقيم رأسي يقطع التمثيل البياني لكلتا الدالتين في نقطتين هما على مسافة ثابتة، غير أن تمثيل ذلك غير واضح.

C.



D.



الحل

A. y_2 هي إزاحة رأسية بمقدار ثلاث وحدات إلى الأسفل للدالة y_1، إذن:

$$y_2 = y_1 - 3$$
$$y_2 = x^3 - 3$$

B. y_2 هي إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليسار للدالة y_1، إذن:

$$y_2 = (x + 2)^3$$

C. y_2 هي إزاحة أفقية بمقدار ثلاث وحدات إلى اليمين للدالة y_1، إذن:

$$y_2 = (x - 3)^3$$

D. y_2 هي إزاحة رأسية بمقدار وحدتان إلى الأعلى للدالة y_1، إذن:

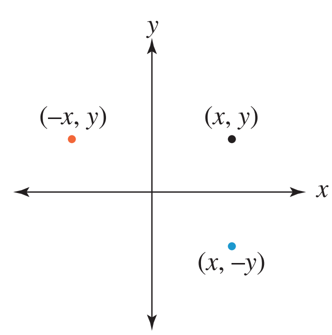
$$y_2 = x^3 + 2$$

حاول أن تحل التمرين 6

الانعكاس حول المحورين

النقطة $(2, -3)$ هي انعكاس للنقطة $(2, 3)$ حول المحور x، والعكس صحيح.
كذلك النقطة $(-2, 3)$ هي انعكاس للنقطة $(2, 3)$ حول المحور y.
بشكل عام، النقطتان (x, y) و $(x, -y)$ كلّ منهما **انعكاس حول المحور x** للأخرى،
وكذلك النقطتان (x, y) و $(-x, y)$ كلّ منهما **انعكاس حول المحور y** للأخرى.
إذ إنّ نقطتين (أو منحنيين) متماثلتين حول محور ما يمثلان انعكاسًا بعضهما لبعض حول هذا المحور.

يبين الشكل 2.4.3 أن الانعكاس حول المحور x يحصل عندما يتم تعويض $-y$ بـ y، والانعكاس حول المحور y يتم عندما يتم تعويض $-x$ بـ x



الشكل 2.4.3 النقطة (x, y) وانعكاساتها حول المحورين x و y

انعكاسات الدوال

الدوال التالية انعكاسات للدالة $y = f(x)$:

حول المحور x

$$y = -f(x)$$

حول المحور y

$$y = f(-x)$$

مثال 3 إيجاد معادلات انعكاسات الدوال

أوجد معادلة انعكاس الدالة $f(x) = \frac{5x-9}{x^2+3}$ حول كل من المحورين.

الحل

حل جبريًا

حول المحور x:

$$y = -f(x)$$
$$= -\frac{5x-9}{x^2+3}$$
$$= \frac{9-5x}{x^2+3}$$

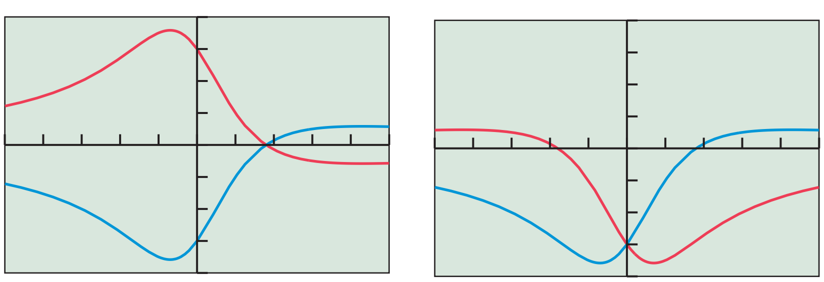
حول المحور y:

$$y = f(-x)$$
$$= \frac{5(-x)-9}{(-x)^2+3}$$
$$= \frac{-5x-9}{x^2+3}$$

تأكّد بيانيًا

يؤكد الحل البياني الظاهر في الشكل 2.4.4 الحل الجبري.

يؤكد التمثيل البياني من خلال برمجيات التمثيل النتيجة الحاصلة.



$[-5, 5]$ في $[-4, 4]$
(a)

$[-5, 5]$ في $[-4, 4]$
(b)

الشكل 2.4.4 انعكاس الدالة $f(x) = \frac{5x-9}{x^2+3}$ (a) حول المحور x و (b) حول المحور y.

حاول أن تحل التمرين 10

إشارة تعليمية

لتصوير التحويلات والانعكاسات يمكننا أن نستعمل سلكًا ممددًا على طول منحنى الدالة في شبكة إحداثية رُسمت على اللوح.

نقطة الأصل

الدالة $y = -f(-x)$ هي انعكاس للدالة $f(x)$ حول نقطة الأصل. لاحظ أن الانعكاس حول نقطة الأصل هو عبارة عن انعكاسين متتالين: حول المحور x ثم حول المحور y أو بالعكس.

سؤال للتفكر

س: كيف يمكنك أن تصف تأثير الانعكاس حول المحور x على الإحداثيات وعلى المعادلة؟

نموذج إجابة:

تضرب القيم y في الدالة الأصل بالعدد -1

س: كيف يمكنك أن تصف تأثير الانعكاس حول المحور y على الإحداثيات وعلى المعادلة؟

نموذج إجابة:

تضرب القيم x في الدالة الأصل بالعدد -1

س: ما الفرق بين $g(x) = -f(x)$ و $g(x) = f(-x)$؟

نموذج إجابة:

عندما يكون $g(x) = -f(x)$ فإن منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى الدالة f حول المحور x. عندما يكون $g(x) = f(-x)$ فإن منحنى الدالة g هو انعكاس لمحنى الدالة f عبر المحور y.

س: متى يكون انعكاس الدالة f حول المحور y هو نفس الدالة f؟

نموذج إجابة:

عندما تكون الدالة زوجية: $f(-x) = f(x)$

خطأ شائع

يعتقد بعض الطلاب خطأ أن النقاط $(x, f(x))$ على منحنى الدالة f تتناظر دائمًا مع النقاط $(-x, f(-x))$ حول المحور y، وهذا غير صحيح لأنه لا علاقة بالضرورة بين $f(x)$ و $f(-x)$.

التمدد والتضيّق الرأسي والأفقي

يحصل التمدد والتضيّق للدالة $y = f(x)$ عند ضرب x أو y في ثابت معيّن، النشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط استكشافي 2 التمدد والتضيّق

1. مثّل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

$$y_1 = x^2$$
$$y_2 = 2y_1(x) = 2x^2$$
$$y_3 = 1.5y_1(x) = 1.5x^2$$
$$y_4 = 0.5y_1(x) = 0.5x^2$$
$$y_5 = 0.25y_1(x) = 0.25x^2$$

أوجد تأثير الاعداد 2 و 1.5 و 0.5 و 0.25 على التمثيلات البيانية.

2. مثّل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

$$y_1 = x^2$$
$$y_2 = y_1(1.5x) = (1.5x)^2$$
$$y_3 = y_1(2x) = (2x)^2$$
$$y_4 = y_1(0.5x) = (0.5x)^2$$
$$y_5 = y_1(0.25x) = (0.25x)^2$$

أوجد تأثير الاعداد 1.5 و 2 و 0.5 و 0.25 على التمثيلات البيانية.

عمومًا، نلاحظ أن تعويض $\frac{x}{c}$ عن x أو تعويض $\frac{y}{c}$ عن y، حيث $c > 0$، يؤدي إلى تغير في شكل منحنى الدالة $y = f(x)$.

يتمدد هذا المنحنى أو يتضيّق، رأسيًا أو أفقيًا، تبعًا لقيمة c، مع العلم أنه في حالة التمدد أو التضيّق الرأسي لا تظهر $\frac{y}{c}$ بهذه الصورة بل تظهر بصورة y على الطرف الأول من المساواة ويظهر المعامل c مضروبًا بالدالة $f(x)$ على الطرف الثاني من المساواة.

عادات التفكير

س: (مع المثال 3) كيف يؤثر الانعكاس حول المحور x على نقاط التقاطع x ونقاط التقاطع y؟

نموذج إجابة:

نقاط التقاطع x تبقى في مكانها لأنها على محور التناظر أما نقاط التقاطع y المنعكسة فهي تناظر نقاط التقاطع y للدالة الأصلية حول المحور x.

إشارة تعليمية

في النشاطين الاستكشافيين 1 و 2، ضع الحاسبة على التطبيق الذي يسمح برؤية التمثيلات البيانية تباعًا، بحسب ترتيب إدخال الدوال.

توسيع الاستكشاف

مثّل بيانيًا الدوال $y_1 = x^2$، $y_2 = 5\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2$، $y_3 = \frac{1}{2}(5x)^2$. ما الأثر الذي يحدثه ضرب الثوابت بالمتغير x والمتغير y؟

سؤال للتفكر

س: كيف يمكن التمييز بيانيًا بين التمدد الأفقي والتمدد الرأسي؟

نموذج إجابة:

نلاحظ في التمدد الأفقي أن الدالة تتمدد أكثر باتجاه المحور x، وأن نقاط التقاطع مع المحور x تتباعد أكثر عن المحور y، وأن نقاط القيم القصوى المحلية تتحرك أفقيًا لكنها تحافظ على قيمتها. أما في التمدد الرأسي فإن حركة الدالة تكون في اتجاه المحور y حيث تبقى نقاط التقاطع مع المحور x كما هي لكن القيم القصوى تتباعد أكثر عن المحور x. كما هو واضح في التمثيل البياني.

يمكننا استخلاص القواعد التالية:

تمدد وتضيّق الدوال

ليكن $c > 0$:

فيما يلي الدوال التي تنشأ عن التمدد والتضيّق للدالة: $y = f(x)$.

التمدد والتضيّق الأفقي

$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$
- تمدد أفقي بالمعامل c، إذا كان $c > 1$.
- وتضيّق أفقي بالمعامل c، إذا كان $c < 1$.

التمدد والتضيّق الرأسي

$y = cf(x)$
- تمدد رأسي بالمعامل c، إذا كان $c > 1$.
- وتضيّق رأسي بالمعامل c، إذا كان $c < 1$.

مثال 4 إيجاد معادلات للتضيّق والتمدد للدالة

ليكن $y_1 = f(x) = x^3 - 16x$ وليكن C_1 المنحنى لهذه الدالة.
أوجد معادلة المنحنى C_2 الناشىء عن التحويلات غير القياسية التالية:

A. C_2 هو التمدد الرأسي للمنحنى C_1 بمعامل مقداره 3

B. C_2 هو التضيّق الأفقي للمنحنى C_1 بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$

الحل

A.

معادلة C_2 هي:

$$y_2 = 3f(x)$$
$$= 3\left(x^3 - 16x\right)$$
$$= 3x^3 - 48x$$

B.

معادلة C_2 هي:

$$y_2 = f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= f(2x)$$
$$= (2x)^3 - 16(2x)$$
$$= 8x^3 - 32x$$

انظر الشكل 2.4.5، يؤكد التمثيل البياني للدوال y_1 و y_2 النتيجة الحاصلة في كل حالة.

حاول أن تحل التمرين 13

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) لمزيد من الدعم، دع الطلاب يتدربون على كتابة جدول لإيجاد النقاط التي يمر بها منحنى الدالة f إذا كان المجال $[-5, 5]$. استعمل الدالة $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ لكتابة جدول يصف المجال والمدى للدالة الجديدة.

س: حدد المجال والمدى للدالة h.

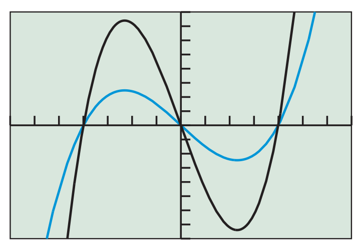
نموذج إجابة:

مجال h هو نفس مجال f، أما مداها، فهو $[-22.5, 22.5]$

س: كيف يؤثر التحويل على نقاط منحنى الدالة h مقارنة مع نقاط منحنى f؟

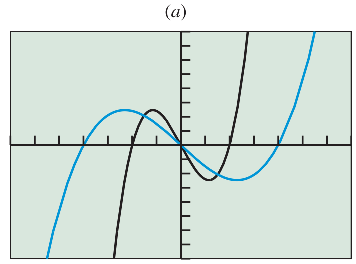
نموذج إجابة:

تقع كل نقطة على منحنى الدالة h عند نصف المسافة ما بين النقطة التي تقابلها على منحنى الدالة f والمحور x.



$[-7, 7]$ في $[-80, 80]$

(a)



$[-7, 7]$ في $[-80, 80]$

(b)

الشكل 2.4.5 التمثيل البياني للدالة $y_1 = f(x) = x^3 - 16x$ حيث (a) تمدد رأسي و (b) تضيّق أفقي.

تركيب التحويلات الهندسية

يمكن أن يطرأ على دالة ما تحويلات متتالية، الواحدة تلوَ الأخرى.
مثلًا، إن تتالي التحويلات الهندسية التالية: تمدد، تضيّق، أو انعكاس ينتج عنه تركيب لتحويلات هندسية. إن تغيير ترتيب هذه التحويلات قد يؤدي إلى نتائج مختلفة.

مثال 5 التحويلات المتتالية

تتالت على منحنى الدالة $y = x^2$ التحويلات التالية:

- **إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين.**
- **تمدد رأسي بمعامل مقداره 3**
- **إزاحة رأسية بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى.**

A. أوجد معادلة المنحنى الناتج عن كل هذه التحويلات.

B. اعكس ترتيب التحويلات، ثم أجب عن السؤال السابق. ماذا تلاحظ؟

الحل

A. إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين $y_1 = (x-2)^2$

تمدد رأسي للدالة y_1 بمعامل مقداره 3 $y_2 = 3(x-2)^2$

إزاحة رأسية للدالة y_2 بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى $y_3 = 3(x-2)^2 + 5$

إذن، الدالة الناتجة هي $y_3 = 3(x-2)^2 + 5$

$= 3(x^2 - 4x + 4) + 5$

$= 3x^2 - 12x + 17$

B. إزاحة رأسية للدالة y بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى $y_1 = x^2 + 5$

تمدد رأسي للدالة y_1 بمعامل مقداره 3 $y_2 = 3(x^2 + 5)$

$= 3x^2 + 15$

إزاحة أفقية للدالة y_2 بمقدار وحدتين إلى اليمين $y_3 = 3(x-2)^2 + 15$

$= 3(x^2 - 4x + 4) + 15$

$= 3x^2 - 12x + 27$

نلاحظ أن تبديل التحويلات يغير الدالة النهائية إذا كان بين التحويلات تمدد أو تضيّق.

حاول أن تحل التمرين 19

سؤال للتفكر

س: هل يتغير تركيب تحويلات من نفس النوع عند تغيير الترتيب؟
نموذج إجابة:
كلا، فإذا كانت التحويلات كلها من نفس النوع، أي كلها إزاحات أو تضيقات أو تمددات، فإن تغير الترتيب لا يحدث أي فرق.

عادات التفكير

بعد إزاحة $f(x) = |x|$ 3 وحدات إلى اليمين، ثم وحدتين إلى الأسفل، وتمددها رأسيًا بمعامل مقداره 4، أوجد صيغة الدالة g التي نحصل عليها.
نموذج إجابة:
$g(x) = 4|x-3| - 8$

تنبيه

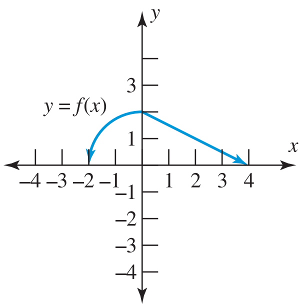
نبه الطلاب إلى خطورة عدم الانتباه إلى ترتيب التحويلات، لأن اختلاف الترتيب يؤدي إلى نتائج مختلفة.

أسئلة للتفكر

س: كيف نميز بين التحويل الرأسي والتحويل الأفقي من خلال الصيغة؟
نموذج إجابة:
عندما نكتب $af(x) + k$ فإن a تشير إلى تمدد أو تضيق رأسي، بينما تشير k إلى إزاحة رأسية. عندما نكتب $f[b(x-h)]$ فإن b تشير إلى تمدد أو تضيق أفقي، بينما تشير h إلى إزاحة أفقية.
س: لماذا يمكنك أن تقارن شكل منحنى $g(x)$، الذي هو تحول الدالة $f(x)$، بمنحناها الأصلي بمجرد النظر إلى صيغة g؟ إشرح.
نموذج إجابة:
لأن شكل المنحنى يبقى على حاله إذا كانت صيغة g تشير إلى إزاحات فقط من دون أي تمدد أو تضيق.

مثال 6 تحويل الدالة هندسيًّا

التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ مبيّن أدناه في الشكل. أوجد التمثيل البياني للدالة $y = 2f(x+1) - 3$ باعتماد عدد من التحويلات المتتالية.



الحل

يمكن الحصول على منحنى الدالة $y = 2f(x+1) - 3$ من منحنى الدالة $y = f(x)$ بعد إجراء التحويلات التالية على التوالي:

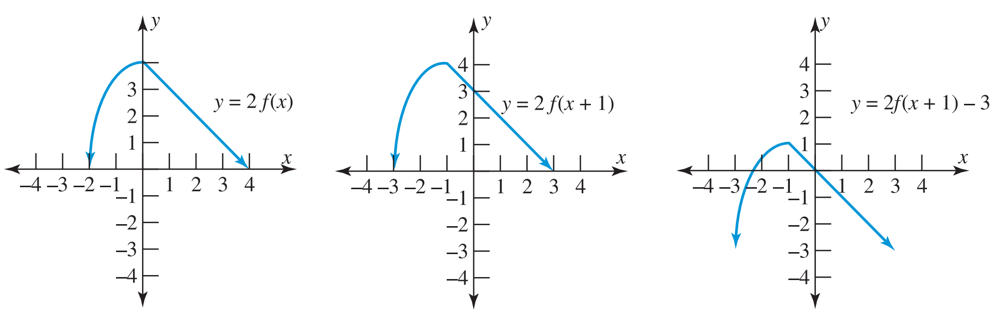
(a) تمدد رأسي بمعامل مقداره 2 ينتج $y = 2f(x)$

(b) إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار تنتج عنها $y = 2f(x+1)$

(c) إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل تنتج عنها $y = 2f(x+1) - 3$

(يمكن تغيير ترتيب التحويلين الأولين من دون أن يطرأ تغير على التمثيل البياني الناتج).

حاول أن تحل التمرين 26



تمدد رأسي بمعامل 2
(a)

إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار
(b)

إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل
(c)

الشكل 2.4.6 تحويل التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = 2f(x+1) - 3$

سؤال للتفكر

س: ماذا يحدث إذا أجرينا التحويلات وفق الترتيب (c) ثم (b) ثم (a)؟

نموذج إجابة:

سنحصل على $y = 2f(x+1) - 6$ وهو مختلف عن المطلوب في المثال 6.

عادات التفكر

هل تمدد الدالة رأسيًّا بمعامل قيمته اثنان، ثم إزاحته رأسيًا 3 وحدات إلى الأسفل يعطي نفس التحويل فيما لو كانت الإزاحة الرأسية 3 وحدات إلى الأسفل أولًا، ثم التمدد الرأسي بمعامل مقداره اثنان؟ إشرح.

نموذج إجابة:

لا، هنالك اختلاف:

الحالة الأولى تعطي $2f(x) - 3$

الحالة الثانية تعطي $2f(x) - 6$

متابعة

ناقش كيف ترتبط التمثيلات البيانية للدوال الزوجية والفردية والانعكاس حول المحور y ونقطة الأصل.

نموذج إجابة:

يتكوّن التمثيل البياني لدالة زوجية من جزأين كلٌّ منهما انعكاس للآخر حول المحور y. ويتكوّن التمثيل البياني لدالة فردية من جزأين كلٌّ منهما انعكاس للآخر حول نقطة الأصل.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-8، تعطي الطلاب الفرصة لاختبار تخميناتهم حول التحويلات الهندسية.

التمارين 9-24، تشتمل على عدة أنواع من التحويلات. ينبغي أن يتنبه الطلاب لمسألة التبديل في ترتيب التحويلات وأثره على النتيجة النهائية.

التمارين 31-34، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين: 2, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 22, 24

مراجعة سريعة 2.4

في التمارين 1-6، اكتب العبارات المعطاة على صورة مربع لثنائي الحدين.

1. $x^2 + 2x + 1$ $(x+1)^2$

2. $x^2 - 6x + 9$ $(x-3)^2$

3. $x^2 + 12x + 36$ $(x+6)^2$

4. $4x^2 + 4x + 1$ $(2x+1)^2$

5. $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$

6. $4x^2 - 20x + 25$ $(2x-5)^2$

الدرس 2.4 التمارين

.1 صِف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = x^2 + 5.2$

b. $y = x^2 - 3$

c. $y = (x+4)^2$

d. $y = (x-3)^2$

.2 صِف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = -\sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{x-5}$

c. $y = \sqrt{-x}$

d. $y = \sqrt{3-x}$

.3 صِف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^3$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = 2x^3$

b. $y = (2x)^3$

c. $y = (0.2x)^3$

d. $y = \frac{1}{2}x^3$

.4 صِف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = (100+x)^2$

b. $y = x^2 - 100$

c. $y = (x-1)^2 + 3$

d. $y = (x+50)^2 - 279$

.5 صِف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g.

a. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

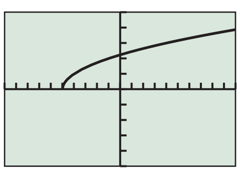
b. $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = -(x+3)^2$

c. $f(x) = (x-2)^3$, $g(x) = (x+2)^3$

d. $f(x) = |2x|$, $g(x) = 4|x|$

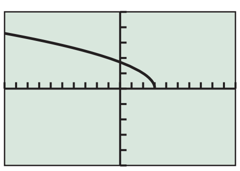
في التمارين 6-8، يمثّل كل رسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ بعد إجراء تحويل على الدالة $y = \sqrt{x}$. اكتب معادلة للدالة f.

6.



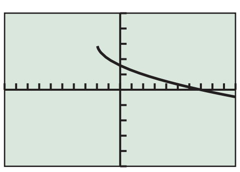
[–10, 10] في [–5, 5]

7.



[–10, 10] في [–5, 5]

8.



[–10, 10] في [–5, 5]

في التمارين 9-12، أوجد معادلة انعكاس الدالة f.

a. حول المحور x.

b. حول المحور y.

9. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

10. $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 4$

11. $f(x) = \sqrt[3]{8x}$

12. $f(x) = 3|x+5|$

في التمارين 13-16، أوجد لكل دالة f معادلة المنحنى الناشيء عن التحويلات غير القياسية التالية:

a. إجراء تمدد رأسي بمعامل مقداره 2

b. إجراء تضيّق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$

13. $f(x) = x^3 - 4x$

14. $f(x) = |x+2|$

15. $f(x) = x^2 + x - 2$

16. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

في التمارين 17-20، نحصل على التمثيل البياني G بعد إجراء التحويلات المطلوبة على y. اكتب معادلة تمثيلها البياني G.

17. $y = x^2$: تمدد رأسي بمعامل مقداره 3، ثم إزاحة إلى اليمين بمقدار 4 وحدات.

18. $y = x^2$: إزاحة إلى اليمين بمقدار 4 وحدات، ثم تمدد رأسي بمعامل مقداره 3

19. $y = |x|$: إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين، ثم تمدد رأسي بمعامل مقداره 2، وأخيرًا إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات.

20. $y = |x|$: إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين، ثم تضيّق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$، وأخيرًا إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات.

في التمارين 21-24، أوجد معادلة دالّة أساسية وسلسلة من التحويلات التي قد تحوّل الدالة الأساسية إلى الدالة المعطاة.

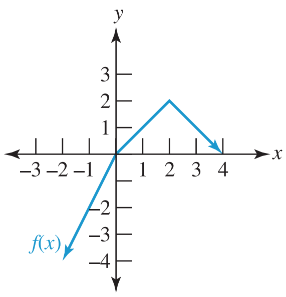
21. $y = 2(x-3)^2 - 4$

22. $y = -3\sqrt{x+1}$

23. $y = (3x)^2 - 4$

24. $y = -2|x+4| + 1$

في التمارين 25-28، ارسم التمثيل البياني للدالة انطلاقًا من الدالة f الممثلة في الرسم أدناه.



25. $y = 2 + 3f(x+1)$

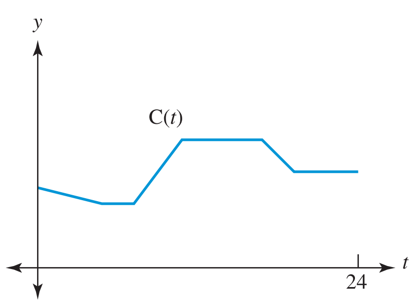
26. $y = -f(x+1) + 1$

27. $y = f(2x)$

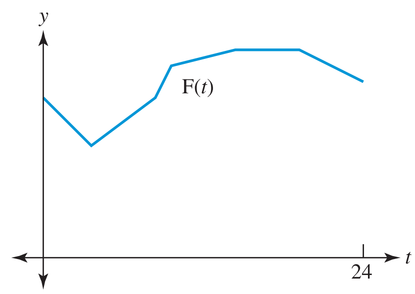
28. $y = 2f(x-1) + 2$

29. درجة مئوية مقابل فهرنهايت يشير التمثيل البياني أدناه إلى درجة الحرارة بالدرجة المئوية في مدينة الخور لمدة 24 ساعة. صِف التحويلات التي تحوّل هذا التمثيل البياني إلى تمثيل بياني يشير إلى درجة الحرارة بالفهرنهايت.

(إرشاد: $F(t) = \frac{9}{5}C(t) + 32$)



30. فهرينهايت مقابل درجة مئوية يشير التمثيل البياني إلى درجة الحرارة بالفاهرينهايت في مدينة مسيعيد لمدة 24 ساعة. صِف التحويلات التي تحوّل هذا التمثيل البياني إلى تمثيل بياني يشير إلى درجة الحرارة بالدرجة المئوية. (إرشاد: $F(t) = \frac{9}{5}C(t) + 32$)



أسئلة اختبار معيارية

31. صواب أم خطأ تمثّل الدالة $y = f(x + 3)$ إزاحة للدالة $y = f(x)$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين. برّر إجابتك.

32. صواب أم خطأ تمثّل الدالة $y = f(x) - 4$ إزاحة للدالة $y = f(x)$ بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل. برّر إجابتك.

33. اختيار من متعدد لتكن الدالة f. أيّ الخيارات التالية يمثّل تحويلًا للدالة بإجراء إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى، ثم إجراء انعكاس حول المحور y؟ A

A. $y = f(-x) + 2$

B. $y = 2 - f(x)$

C. $y = f(2 - x)$

D. $y = -f(x - 2)$

E. $y = f(x) - 2$

34. اختيار من متعدد لتكن الدالة f. أي الخيارات التالية يمثّل تحويلًا للدالة بإجراء انعكاس حول المحور x، ثم إجراء تضيّق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$؟ E

A. $y = -2f(x)$

B. $y = -\frac{f(x)}{2}$

C. $y = f(-2x)$

D. $y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$

E. $y = -f(2x)$

استكشاف

35. الكتابة للتعلم مثّل بيانيًا بعض الأمثلة على تحويل الدوال لتقتنع بأنّ إجراء تحويل مركّب من انعكاس وإزاحة يعطي نتيجة مختلفة عن إجراء نفس التحويلين ولكن بترتيب معاكس للتحويل الأول. اشرح كيفية حصول هذا الاختلاف.

36. الكتابة للتعلم مثّل بيانيًا بعض الأمثلة لتقتنع بأن التمددات والتضيقات الرأسية لا تؤثر في نقاط تقاطع التمثيل مع المحور x. برّر إجابتك.

توسيع الأفكار

37. الحركة المالية العالمية يشير الجدول أدناه إلى أسعار أسهمٍ بالدولار، ساعة الإغلاق، لإحدى الشركات العالمية، في أول يوم تداول من كل شهر خلال سنة كاملة.

سعر السهم	الشهر
32.61	1
33.73	2
36.00	3
37.12	4
36.35	5
38.29	6
39.57	7
36.63	8
37.40	9
36.66	10
37.65	11
37.39	12

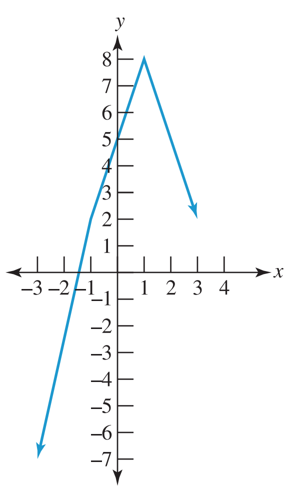
a. مثّل بيانيًا السعر (y) حسب الشهر (x)، بتعيين النقاط في المستوى الإحداثي، ثم صل بينها لتشكيل تمثيل متصل.

b. اشرح ماهية التحويلات التي يجب أن تجريها على هذا التمثيل البياني للحصول على تمثيل يبين أسعار السهم بالين الياباني.

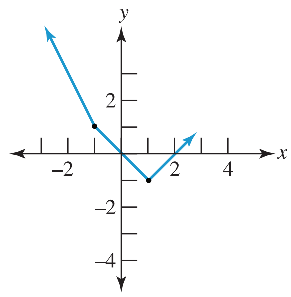
إجابات أسئلة التمارين 2.4

1. a. إزاحة رأسية بمقدار 5.2 وحدات إلى الأعلى.
   b. إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.
   c. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار.
   d. إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
2. a. انعكاس حول المحور x.
   b. إزاحة أفقية بمقدار 5 وحدات إلى اليمين.
   c. انعكاس حول المحور y.
   d. انعكاس حول المحور y، ثم إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
3. a. تمدد رأسي بمعامل قيمته 2
   b. تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$، أو تمدد رأسي بمعامل قيمته 8
   c. تمدد أفقي بمعامل قيمته 5، أو تضيق رأسي بمعامل قيمته 0.008
   d. تضيق رأسي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$
4. a. إزاحة أفقية بمقدار 100 وحدة إلى اليسار.
   b. إزاحة رأسية بمقدار 100 وحدة إلى الأسفل.
   c. إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.
   d. إزاحة أفقية بمقدار 50 وحدة إلى اليسار، ثم إزاحة رأسية بمقدار 279 وحدة إلى الأسفل.
5. a. إزاحة أفقية بمقدار 6 وحدات إلى اليمين.
   b. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x.
   c. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار.
   d. تمدد رأسي بمعامل قيمته 2 أو تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$

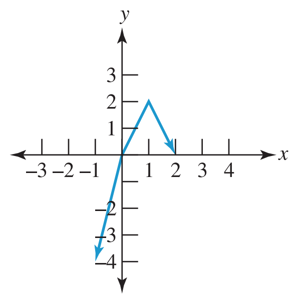
6. $f(x) = \sqrt{x+5}$
7. $f(x) = \sqrt{-x+3}$
8. $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$
9. a. $y = -f(x) = -x^3 + 5x^2 + 3x - 2$
   b. $y = f(-x) = -x^3 - 5x^2 + 3x + 2$
10. a. $y = -f(x) = -2\sqrt{x+3} + 4$
    b. $y = f(-x) = 2\sqrt{-x+3} - 4$
11. a. $y = -f(x) = -\sqrt[3]{8x}$
    b. $y = f(-x) = \sqrt[3]{-8x}$
12. a. $y = -f(x) = -3|x+5|$
    b. $y = f(-x) = 3|-x+5|$
13. a. $y = 2f(x) = 2x^3 - 8x$
    b. $y = f(3x) = 27x^3 - 12x$
14. a. $y = 2f(x) = 2|x+2|$
    b. $y = f(3x) = |3x+2|$
15. a. $y = 2f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
    b. $y = f(3x) = 9x^2 + 3x - 2$
16. a. $y = 2f(x) = \frac{2}{x+2}$
    b. $y = f(3x) = \frac{1}{3x+2}$
17. $y = 3(x-4)^2$
18. $y = 3(x-4)^2$
19. $y = 2|x+2| - 4$
20. $y = |3x+2| - 4$
21. $y = x^2$، إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 2. ثم إزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
22. $y = \sqrt{x}$، إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 3، ثم انعكاس حول المحور x.
23. $y = x^2$، تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{3}$ ، ثم إزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
24. $y = |x|$، إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 2، ثم انعكاس حول المحور x، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
25. ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 3، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.



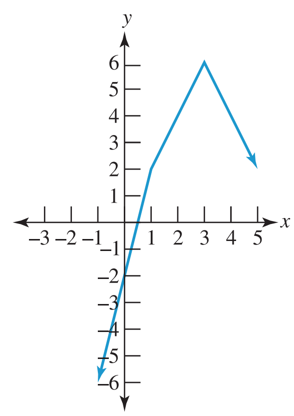
.26 ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.



.27 طبّق تضيقًا أفقيًا بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$.



.28 ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 2، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.



.29 تمدد رأسي بمعامل قيمته $\frac{9}{5}$، ثم إزاحة رأسية بمقدار 32 وحدة إلى الأعلى.

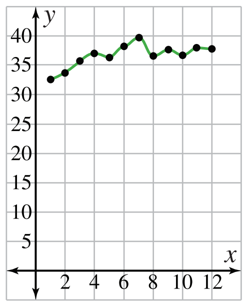
.30 إزاحة رأسية بمقدار 32 وحدة إلى الأسفل، ثم تضيق رأسي بمعامل قيمته $\frac{5}{9}$.

.31 خطأ، إلى اليسار لأن الثابت موجب.

.32 صواب، لأن الثابت سالب.

.37

a.



b. تمدد رأسي بمعامل قيمته سعر صرف الين الياباني مقابل الدولار (الآن حوالي 107.53)

الوحدة 2 مراجعة الوحدة

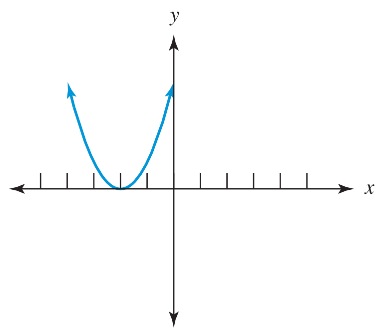
في التمارين 1-5، اربط بين كل رسم بياني والدالة المناسبة له من اللائحة a-e أدناه. استعمل ما تعرفه عن خصائص الدوال، لا تستعمل برنامج الرسم البياني.

a. $f(x) = x^2 - 1$ **b.** $f(x) = x^2 + 1$

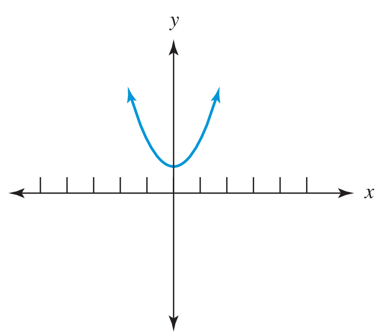
c. $f(x) = (x - 2)^2$ **d.** $f(x) = (x + 2)^2$

e. $f(x) = \frac{x - 1}{2}$

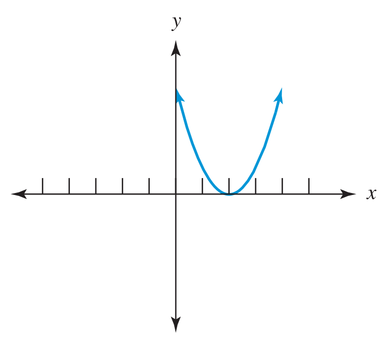
1. d



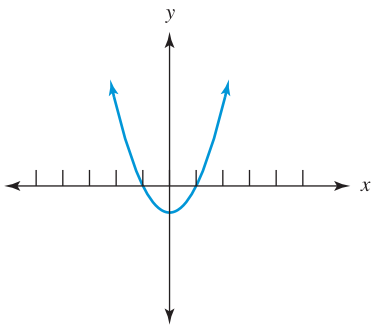
2. b



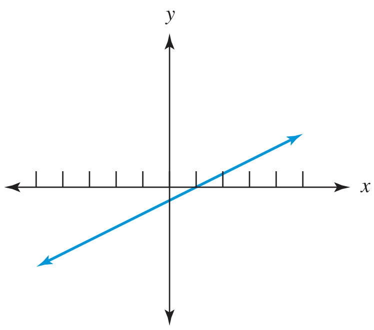
3. c



4. a



5. e



في التمارين 6-13، أوجد المجال للدالة.

6. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{4 - x}$ $[1, 4]$

7. $f(x) = 35x - 602$ $]-\infty, \infty[$

8. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$ $[0, 1[$

9. $h(x) = (x + 2)^2 + 5$ $]-\infty, \infty[$

10. $g(x) = 3|x| + 8$ $]-\infty, \infty[$

11. $k(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $[-2, 2]$

12. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x}$ $]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, \infty[$

13. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $]-1, 1[$

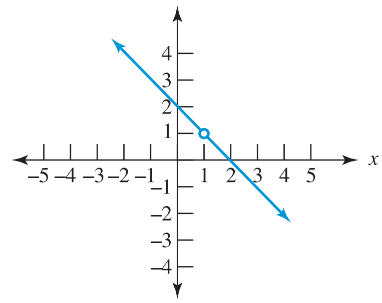
في التمرينين 14 و 15، استعمل برنامج الرسم البياني لتمثيل منحنى الدالة f ، ثم حدد ما إذا كانت متصلة عند النقطة $x = 0$. إذا كانت غير متصلة،حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلًا للإزالة أم لا.

14. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ متصلة

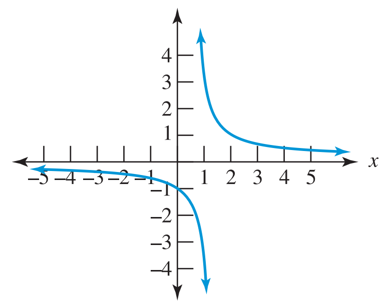
15. $f(x) = \frac{x + 1}{x}$ غير متصلة، غير قابل للإزالة

في التمارين 16-18، حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 1$. إذا كانت غير متصلة، حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلًا للإزالة أم لا.

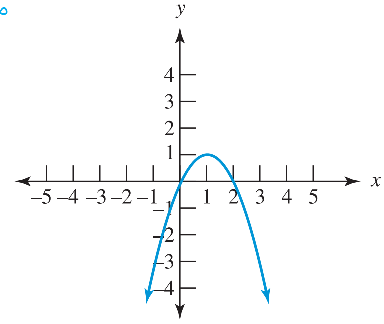
16. عدم اتصال قابل للإزالة



17. عدم اتصال غير قابل للإزالة



18. متصلة



في التمارين 19-22، أوجد كل (*a*) خطوط التقارب الرأسية و (*b*) خطوط التقارب الأفقية للتمثيل البياني للدالة. تأكد من إعطاء إجاباتك على شكل معادلات خطوط مستقيمة.

19. $y = \dfrac{5}{x^2 - 5x}$

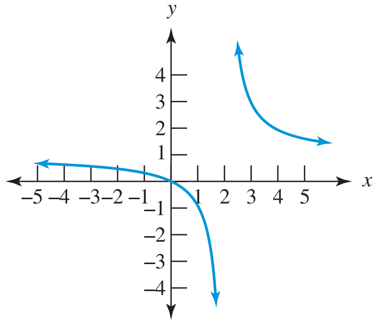
20. $y = \dfrac{x+3}{x-2}$

21. $y = \dfrac{7x}{\sqrt{x^2 + 10}}$

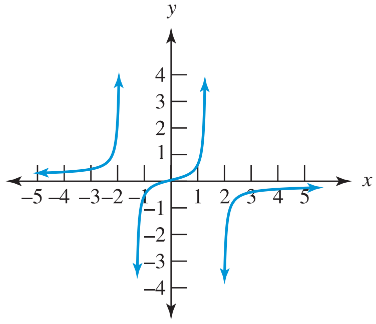
22. $y = \dfrac{|x|}{x+1}$

في التمرينين 23 و 24، حدد خطوط التقارب الأفقية وخطوط التقارب الرأسية لكل دالة.

23.



24.



في التمارين 25-28، استعمل برنامج الرسم البياني ثم حدد الفترات حيث تكون الدالة متزايدة.

25. $y = \dfrac{x^3}{3}$

26. $y = 2 + |x - 1|$

27. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

28. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

في التمارين 29-32، استعمل برنامج الرسم البياني لإيجاد كل من (*a*) القيم العظمى المحلية و (*b*) القيم الصغرى المحلية للدالة. حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة قصوى محلية.

29. $y = (x+1)^2 - 7$

30. $y = x^3 + 3x^2 - 5$

31. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

32. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

في التمارين 33-36، حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم ليست أيًّا منهما.

33. $y = 3x^2 + 4|x|$ زوجية

34. $y = 2x - x^3$ فردية

35. $y = \dfrac{x}{1 - x}$ لا فردية ولا زوجية

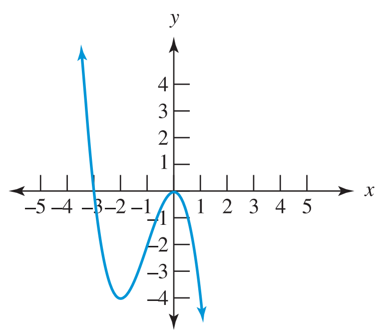
36. $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ فردية

في التمرينين 37 و 38، حدد لكل دالة:

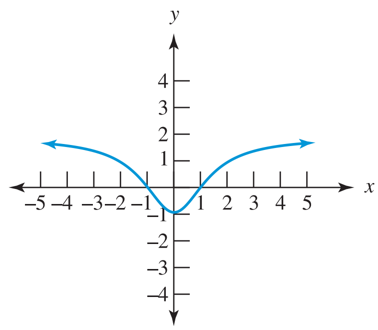
a. الفترات حيث تكون الدالة متناقصة.

b. القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية.
حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة.

37.



38.



في التمارين 39-42، أوجد صيغة للدالة العكسية $f^{-1}(x)$.

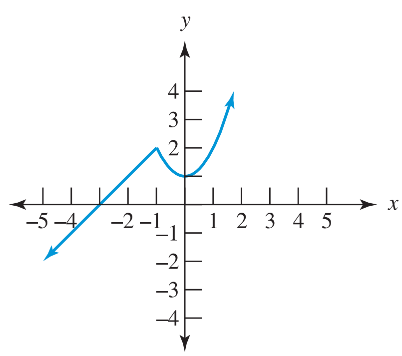
39. $f(x) = 2x + 3$
$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

40. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$
$f^{-1}(x) = x^3 + 8$

41. $f(x) = \frac{2}{x}$
$f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$

42. $f(x) = \frac{6}{x-4}$
$f^{-1}(x) = \frac{6}{x} + 4$

في التمارين 43-46، استعمل الدالة $y = f(x)$ ذات الرسم البياني الموضح أدناه.



43. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x) - 1$.

44. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x-1)$.

45. ارسم التمثيل البياني للعلاقة العكسية.

46. هل العلاقة العكسية تعرّف y كدالة بدلالة x؟ لا

في التمارين 47-49، لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 4$

47. أوجد صيغة $(f \times g)(x)$ وحدد مجالها.
$(fg)(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$, $[0, \infty[$

48. أوجد صيغة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ وحدد مجالها.
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$, $[0, 2[\cup]2, \infty[$

49. أوجد صيغة الدالة $y = (f \circ g)(x)$ وحدد مجالها.
$f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$, $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

50. لتكن الدالتين: $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 3$

a. أوجد $(g \circ f)(0)$ و $(g \circ f)(-2)$
$(g \circ f)(-2) = -3$, $(g \circ f)(0) = 1$

b. أوجد $(f \circ g)(0)$ و $(f \circ g)(-2)$
$(f \circ g)(-2) = 3$, $(f \circ g)(0) = -1$

51. أوجد دالتين $g(x)$ و $f(x)$ بحيث يمكن وصف الدالة $y = \sqrt{x^3 - 4}$ في الصورة $y = f(g(x))$، وبحيث لا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة. (قد يوجد أكثر من حل ممكن).
$f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = x^3 - 4$

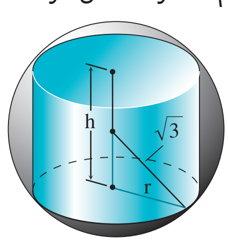
52. لتكن $f(x) = x^2 - 1$

a. أوجد دالة g بحيث تكون: $(f \times g)(x) = x^4 - 1$.
$g(x) = x^2 + 1$

b. أوجد دالة h بحيث تكون: $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = x + 1$
$h(x) = x - 1$, $\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$

c. أوجد دالة k بحيث تكون: $(f + k)(x) = 2x$
$k(x) = -x^2 + 2x + 1$

53. **حصر أسطوانة في كرة** أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h، تم حصرها داخل كرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ cm



a. استعمل نظرية فيثاغورس لكتابة h بدلالة r.

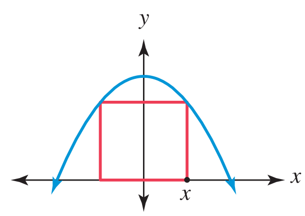
b. اكتب حجم الاسطوانة V بدلالة r.

c. ما هي قيم r الموجودة في مجال V؟

d. ارسم تمثيلًا بيانيًا للحجم $V(r)$ على المجال $[0, \sqrt{3}]$.

e. استعمل التمثيل البياني من الفرع d لإيجاد القيمة العظمى لحجم هذه الأسطوانة.

54. **حصر مستطيل تحت قطع مكافئ** مستطيل تم حصره ما بين المحور x والقطع المكافئ $y = 36 - x^2$ مع ضلع واحد على المحور x، كما هو موضّح في الرسم أدناه.



a. افترض أن x تمثّل الاحداثي x للنقطة المُشار إليها في الرسم، بينما تمثّل A مساحة المستطيل. اكتب A بدلالة x.

b. ما هي قيم x الموجودة في مجال A؟

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمساحة $A(x)$ على مجالها.

d. استعمل الرسم البياني لإيجاد القيمة العظمى للمساحة التي يمكن أن تكون لهكذا مستطيل.

الوحدة 2 الإجابات

.19 .a رأسي: $x = 0$ و $x = 5$

.b أفقي: $y = 0$

.20 .a رأسي: $x = 2$

.b أفقي: $y = 1$

.21 .a رأسي: لا يوجد

.b أفقي: $y = 7$ و $y = -7$

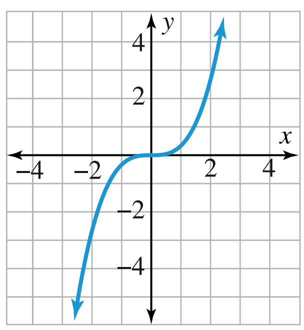
.22 .a رأسي: : $x = -1$

.b أفقي: $y = -1$ و $y = 1$

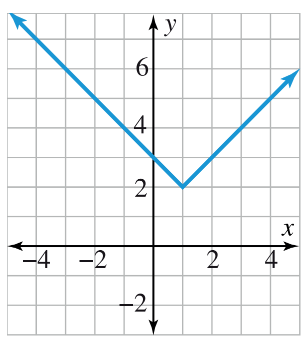
.23 أفقي: $y = 1$، رأسي: $x = 2$

.24 أفقي: $y = 0$، رأسي: $x = 2$ و $x = -2$

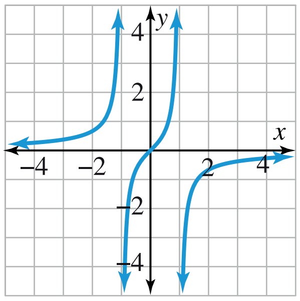
25. $]-\infty, \infty[$



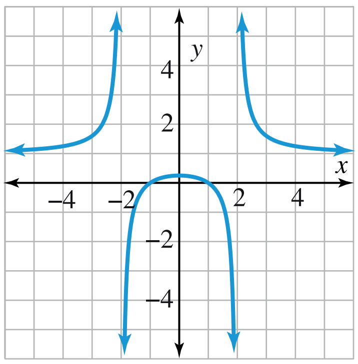
26. $[1, \infty[$



27. $]-\infty, -1[\ ,\ ]-1, 1[\ ,\ ]1, \infty[$

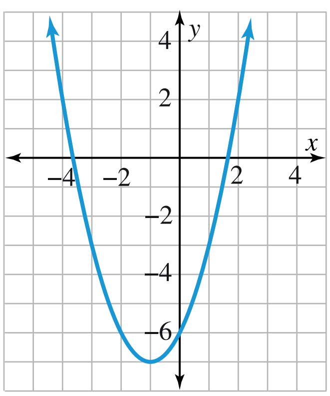


28. $]-\infty, -2[\ ,\ ]-2, 0]$



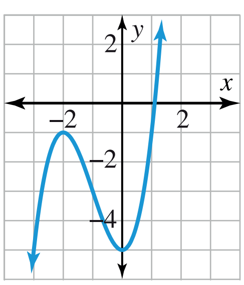
.29 .a لا يوجد قيمة عظمى محلية.

.b قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ تساوي -7



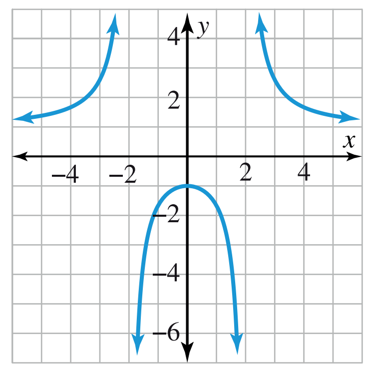
.30 .a قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ تساوي -1

.b قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ تساوي -5



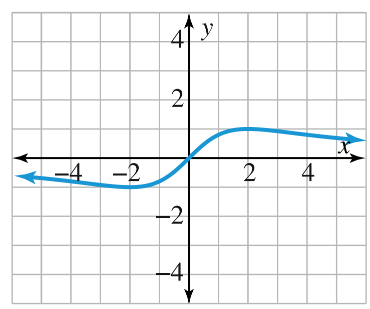
31. **a.** قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي -1

b. لا يوجد قيمة صغرى محلية.



32. **a.** قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ تساوي 1

b. قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ تساوي -1



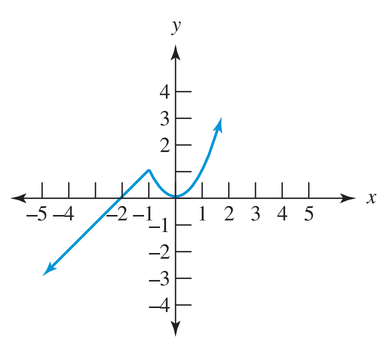
37. **a.** متناقصة في $]-\infty, -2]$ وفي $[0, \infty[$

b. قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ تساوي -4، قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي 0

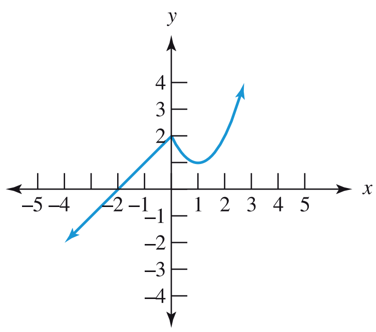
38. **a.** متناقصة في $]-\infty, 0]$

b. قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ تساوي -1

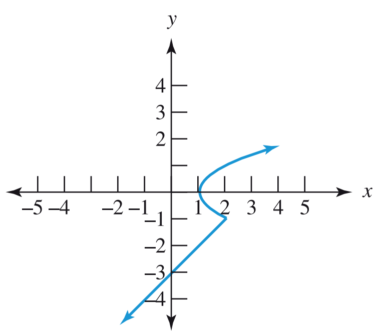
43. إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.



44. إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.



45. انعكاس حول المحور $y = x$.



46. كلا

47. $(fg)(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$, $[0, \infty[$

48. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$, $[0, 2[\cup]2, \infty[$

49. $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$, $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

50. **a.** $(g \circ f)(-2) = -3$, $(g \circ f)(0) = 1$

a. $(f \circ g)(-2) = 3$, $(f \circ g)(0) = -1$

51. $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^3 - 4$

52. **a.** $g(x) = x^2 + 1$

b. $h(x) = x - 1$, $\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$

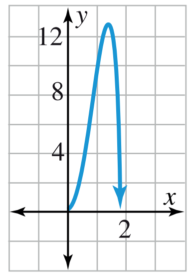
c. $k(x) = -x^2 + 2x + 1$

53. **a.** $h = 2\sqrt{3 - r^2}$

b. $V = \pi r^2 (h) = \pi r^2 \left(2\sqrt{3 - r^2}\right) = 2\pi r^2 \sqrt{3 - r^2}$

c. $]0, \sqrt{3}]$

d.

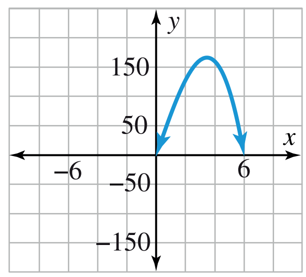


e. قيمة عظمى محلية عند $x = 1.41$ تساوي 12.57

54. **a.** $A = 72x - 2x^3$

b.]0, 6[

c.



d. قيمة عظمى محلية عند $x = 3.46$ تساوي 166.28

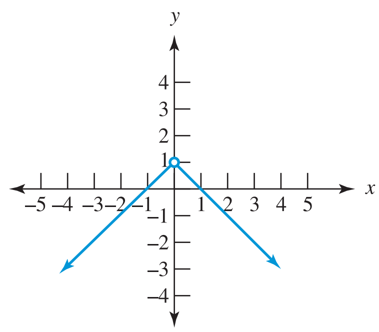
الوحدة 2 تقويم

في التمرينين 1 و 2، أوجد مجال الدالة.

1. $h(x) = (x - 2)^2 + 5$
$]-\infty, \infty[$

2. $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$
$]-3, 3[$

.3 التمثيل البياني لدالة موضح في الشكل أدناه

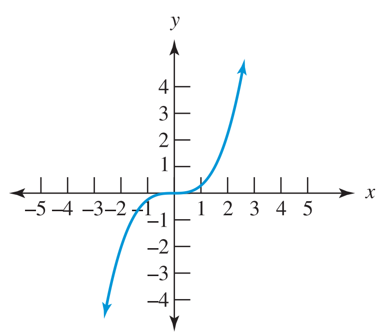


حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 0$. إذا كانت غير متصلة، حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلاً للإزالة أم لا.
غير متصلة، عدم اتصال قابل للإزالة.

.4 أوجد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية لرسم الدالة البياني. تأكد من إعطاء إجاباتك على شكل معادلات خطوط مستقيمة.
خط التقارب الرأسي: $x = -2$،
خط التقارب الأفقي: $y = 1$.

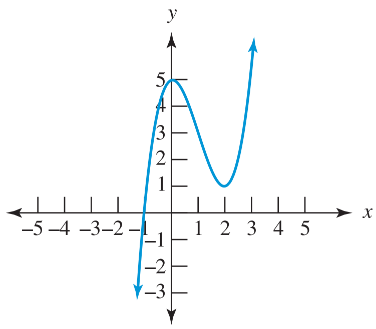
$$y = \frac{x + 3}{x + 2}$$

.5 التمثيل البياني للدالة $y = \frac{x^3}{6}$ موضح في الشكل



حدد الفترة/الفترات حيث تكون الدالة متزايدة.
متزايدة في الفترة $]-\infty, \infty[$

.6 الرسم البياني لمنحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ موضّح في الشكل التالي:
قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي 5،
قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ تساوي 1



استعمل الرسم البياني لإيجاد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للدالة.
حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة قصوى محلية.

.7 حدد ما إذا كانت الدالة الاتية فردية أم زوجية أم ليست أيًّا منهما. زوجية

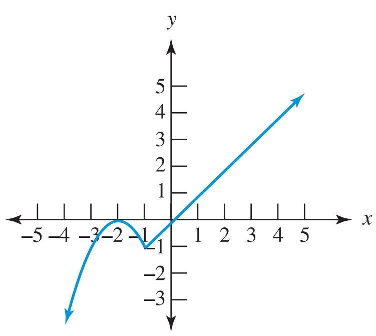
$$f(x) = 3x^2 - 4|x|$$

.8 أوجد صيغة الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة f التالية.

$$f(x) = \frac{6}{x + 4} \qquad f^{-1}(x) = \frac{6}{x} - 4$$

في التمرينين 9 و 10، استعمل الدالة $y = f(x)$ ذات الرسم البياني الموضح أدناه.

.9



ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(-x)$

.10 ارسم التمثيل البياني للدالة $y = -f(x)$

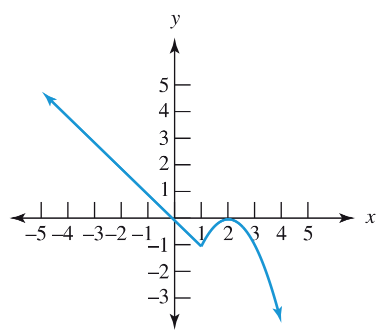
في التمرينين 11 و 12، لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 4$.

.11 أوجد صيغة للدالة $(f \circ g)(x)$ وحدد مجالها.
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4},\ ]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

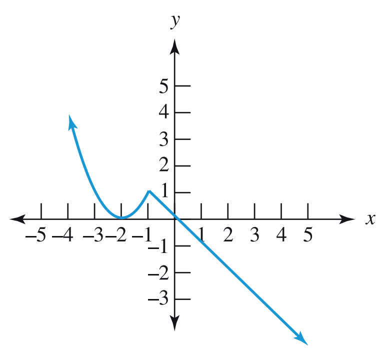
.12 أوجد صيغة للدالة $(g \circ f)(x)$ وحدد مجالها.
$(g \circ f)(x) = x - 4,\ [0, \infty[$

الوحدة 2 الإجابات

9. ارسم الانعكاس حول المحور y.



10. ارسم الانعكاس حول المحور x.



الوحدة 2 المشروع

نمذجة تطور عدد مستخدمي الإنترنت عالميًا

لقد مرّ تطور شبكة الإنترنت في العالم بعدّة مراحل وصولًا إلى ما هي عليه في وقتنا الحاضر. فقد تمّ إنشاؤها بدايةً لأهداف عسكرية في العام 1969، بدأت استخداماتها المدنية في العام 1983 بشكل محدود، وشيئًا فشيئًا إلى أن تم وضعها بين أيدي المستخدمين في جميع أنحاء العالم وذلك في العام 1991، حيث ارتبط بهذه الشبكة حوالي مليون حاسوب بعد عام واحد فقط. يُبرز الجدول التالي أرقام مستخدمي الإنترنت حول العالم بين العامين 2000 و 2008.

عدد مستخدمي الإنترنت (بالملايين)	السنة
413.4	2000
500.6	2001
662.7	2002
778.6	2003
910.1	2004
1 029.7	2005
1 157.5	2006
1 373	2007
1 562.1	2008

استكشافات

.1 مثّل عدد مستخدمي الإنترنت على مستوى احداثي بدلالة رقم السنة مبتدئًا بالترقيم 0 للعام 2000.

.2 لاحظ أن الدالة التربيعية (أو إحدى تحويلاتها) تبدو الدالة الأنسب لنمذجة المعطيات التي تم تمثيلها. استعمل برنامج الرسم البياني أو الحاسوب خاصتك لإيجاد دالة تربيعية مناسبة لنمذجة معطيات الجدول.

.3 استخدم النموذج الذي أوجدته للتو لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت في العامين 2009 و 2010.

.4 بحسب الاحصاءات، فقد بلغ عدد مستخدمي الإنترنت 1 752.3 مليون مستخدم في العام 2009،
و 2 034.3 مليون مستخدم في العام 2010 (يمكنك التأكد من صحة هذه المعلومات عن طريق الإنترنت نفسه، وكذلك التوسع في البحث عن المعطيات حول مستخدمي الإنترنت للسنوات اللاحقة). لماذا يوجد اختلاف هام بين تقديرك لأعداد مستخدمي الإنترنت في هذين العامين وبين الأعداد الواقعية للمستخدمين؟ ما هي الميزة الواقعية التي لم تؤخذ بالحسبان لدى اعتماد النمذجة بالدالة التربيعية؟

.5 إذن، ما بعد العام 2008، أنت بحاجة إلى نمذجة أعداد المستخدمين من خلال دالة تأخذ بعين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم سوف لن تتزايد إلى مالانهاية! ارجع إلى الدوال الأساسية التي درستها في الوحدة. لاحظ أن نمط المعطيات يتزايد بوتيرة متسارعة في البداية، ومن ثم يبدأ بالتباطؤ.
استعمل برنامج الرسم البياني أو الحاسوب خاصتك لنمذجة هذه المجموعة الجديدة من المعطيات.

.6 استعمل النموذج الجديد لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم في العامين 2009 و 2010.
كيف تجد هذه الأعداد بالمقارنة مع الأعداد الحقيقية للمستخدمين في هذين العامين؟
بكم تقدّر عدد مستخدمي الإنترنت في العام 2020؟

الوحدة 2 المشروع

لمحة عن المشروع

يهدف هذا المشروع التطبيقي إلى تعريف الطلاب على استخدامات مفهوم "الدوال" اليومية. في البدء، ينمذج كل منهم أعداد مستخدمي الإنترنت في العالم بين عامي 2000 و 2008 من خلال برنامج حاسوبي مختص بصناعة الرسوم البيانية. وإذ يستدرك هؤلاء أن نمذجة المعطيات تقتضي استعمال واحدة من أبرز المفاهيم التي تناولتها هذه الوحدة وهي "الدالة التربيعية"، سيلجأون إليها لتقدير أعداد مستخدمي شبكة الإنترنت في عامي 2009 و 2010، لكن تقديراتهم لن تتطابق مع النسب الواقعية هذه المرة. هذا الأمر يدفع بهم إلى استعادة سائر الدوال التي تعلموها في مرحلة سابقة من الدرس، واختيار الأصلح من بينها بغية حل مسألتهم وفق الشكل المطلوب.

تقديم المشروع

ناقش مفهوم "نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت" مع الطلاب، ثم اعرض عليهم خريطة عمل المشروع.

استعن بالأسئلة الآتية لتصويب النقاش:

س: ماذا يُقصد بمفهوم "نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت"؟

"نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت" تعني إيجاد صيغة رياضية تُمثّل أعداد مستخدمي الإنترنت.

س: لماذا برأيك يوجد اختلاف كبير بين تقديرك لأعداد مستخدمي الإنترنت بين عامي 2009 و 2010، وبين الأعداد الواقعية للمستخدمين؟

عند استخدام معطيات الجدول لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت، تبيّن أن أعداد مستخدمي الإنترنت سيشهد ارتفاعًا في خلال عامي 2009 و 2010، وهي من بين الأعوام التي لم يبيّنها الجدول. وإذ أن عدد مستخدمي الانترنت حول العالم لا يمكن أن يصل إلى مالانهاية كما يفترض الحاسوب، فإن برنامج الرسم البياني سيجد في الدالة التربيعية الخيار الأمثل لنمذجة معطيات الجدول.

س: ما هي الدالة الأنسب لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت؟

بما أن نمط المعطيات الواردة في الجدول يشهد تزايدًا متسارعًا في البداية ثم تباطؤًا، فإن برنامج الرسم البياني سوف يحدد إحدى تحويلات دالة الجذر التربيعي على أنها الدالة الأنسب لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت.

س: عند استعمالك للنموذج الجديد (إحدى تحويلات دالة الجذر التربيعي) لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت في العامين 2009 و 2010، هل وجدت هذه الأعداد قريبة من الأعداد الحقيقية للمستخدمين في هذين العامين؟ برّر إجابتك.

نعم، السبب في ذلك يعود إلى أن النموذج الجديد أخذ في عين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم سوف لن تتزايد إلى ما لا نهاية.

تنفيذ المشروع

وضّح للطلاب أن عليهم إدخال معطيات الجدول إلى برنامج الرسم البياني على الحاسوب لينشئوا تمثيلًا بيانيًا ينمذج أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم ، ومن ثم إيجاد الدالة التربيعية التي تمثّل هذه المعطيات.

بعد استدراكهم أن نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم بين عامَي 2009 و 2010 لا تتم بالضرورة عبر الدالة التربيعية، سوف يلجأ الطلبة إلى برنامج الرسم البياني مجددًا لتحديد الدالة الأصح، مع الأخذ بعين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم غير قابل للتزايد إلى ما لا نهاية.

إنهاء المشروع

يمكن للمعلم تحديد يوم يعرض فيه الطالب مشاريعهم ويشرحون الخطوات التي اتبعوها في تنفيذ هذه المشاريع والنتائج التي استخلصوها.