الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

الوحدات ٥، ٦، ٧

دليل المعلم

الوحدةُ 7

نظرة عامة على الوحدة:

تعلم الطلبة المتجهات في الفيزياء، ومثلوها بصورة هندسية. وسيتعلمون في هذه الوحدة كيفية كتابة المتجه بالصورة الإحداثية، وتمثيله على المستوى الإحداثي، وإيجاد مقداره واتجاهه، وسيتعلمون أيضًا جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي، ويفسرون دلالة ذلك في مسائل حياتية. وكذلك سيتعلمون الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد الزاوية بين متجهين، وحساب الشغل، وحل مسائل حياتية عنها.

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- حل معادلات خطية بمتغيرين.
- حل معادلات تربيعية بمتغير واحد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة.

الصف العاشر

- إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.
- تعرف المتجهات، وتمثيلها على المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر.
- حل مسائل حياتية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- استعمال الصورة القياسية للمتجهات $(xi + yj, xi + yj + zk)$ لجمع متجهين، أو طرحهما، أو ضرب متجه في ثابت، وتفسير هذه العمليات هندسيًّا.
- استعمال متجه الوحدة، ومتجه الموقع، ومتجه الإزاحة.
- كتابة معادلة مستقيم عُلِم فيها متجه الموقع لنقطة عليه، واتجاه المتجه، أو عُلِم فيها متجها الموقع لنقطتين على المستقيم.
- تحديد إذا كان المستقيمان متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، وإيجاد نقاط التقاطع بينهما (إن وجدت).
- استعمال الضرب القياسي في مسائل تحوي مستقيمات ونقاطًا.

مشروعُ الوحدةِ

المتجهاتُ في الجغرافيا

فكرةُ المشروعِ أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ باكتشافِ استعمالاتِ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما ستتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورةٍ لخريطةِ الوطنِ العربيِّ أوِ الشرقِ الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ بجهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ أيقونةَ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
   - أُظهِرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاسوبِ، ثمَّ اختيارِ (الإعداداتُ) Settings، ومنْها أختارُ Background Image
   - أجِدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ موقعِ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ.
3. أرسمُ متجهًا بينَ أيِّ عاصمتيْنِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ منْ شريطِ الأدواتِ.
4. أجِدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمّانَ وأربعِ عواصمَ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أُقارِنُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّمًا النتائجَ في جدولٍ.
5. أجِدُ اتجاهَ أربعِ عواصمَ عربيةٍ بالنسبةِ إلى مدينةِ عمّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجريتُها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومقترحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

81

مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا.

هدف المشروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، باكتشاف استعمالات المتجهات في الخرائط الجغرافية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (7–5) طلبة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- بيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (3–1) بعد الانتهاء من الدرس الأول، والخطوة (4) بعد الدرس الثاني، والخطوة (5) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم التالية.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
3	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
4	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
5	عرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
6	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: ايجاد المسافة بين نقطتين، واستعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث قائم الزاوية.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة – من دون ذكر اسم الطالب–، وأَدِرْ نقاشًا حوله.

الوحدةُ 7: المتجهاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتَينِ.

أجِدُ المسافةَ بينَ النقطتَينِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $6\sqrt{2}$

2) $\sqrt{89}$

3) $(-5, -7), (2, -3)$ $\sqrt{65}$

4) $(8, 0), (-4, -5)$ 13

5) $(-4, 7), (-3, 6)$ $\sqrt{2}$

مثالٌ: أجِدُ المسافةَ بينَ النقطتَينِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانونُ المسافةِ بينَ نقطتَينِ

$= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$ بتعويضِ إحداثياتِ النقطتَينِ

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ بالتبسيطِ

إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتَينِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$ هيَ 5 وحداتِ طولٍ.

استعمالُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعٍ في مثلثٍ.

أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ، ثمَّ أجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ الحادةِ الكبرى:

6) x, $35°$, 8 cm

7) 10 m, $x°$, 6 m

8) 7 cm, $15°$, x

9) 3.1 mm, $x°$, 9.5 mm

6–9) انظر الهامش

18

الوحدةُ 7: المتجهاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ طولِ $\overline{AB}$ في المثلثِ الآتي، ثمَّ أجِدُ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ A:

A, B, C, p, $78°$, 13.4 cm

الضلعُ المجهولُ $\overline{AB}$ مجاورٌ للزاويةِ A؛ لذا أستعملُ نسبةَ جيبِ التمامِ للزاويةِ A:

$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ تعريفُ نسبةِ جيبِ التمامِ

$\cos 78° = \frac{p}{13.4}$ بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ

$0.21 = \frac{p}{13.4}$ بتعويضِ قيمةِ $\cos 78°$

$p = (0.21)(13.4)$ بالضربِ التبادليِّ

$p = 2.81$ بالتبسيطِ

لحسابِ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$(13.4)^2 = (BC)^2 + (2.81)^2$ بالتعويضِ

$179.56 = (BC)^2 + 7.90$ بالتبسيطِ

$179.56 - 7.90 = BC^2$ بطرحِ 7.90

$171.66 = BC^2$ بالتبسيطِ

$13.10 = BC$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A:

$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ تعريفُ نسبةِ الجيبِ

$\sin 78° = \frac{13.10}{13.4}$ بالتعويضِ

$\sin 78° \approx 0.98$ بالتبسيطِ

$\tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ تعريفُ نسبةِ الظلِّ

$\tan 78° = \frac{13.10}{2.79}$ بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ

$\tan 78° \approx 4.7$ بالتبسيطِ

19

إجابات (أستعد لدراسة الوحدة):

6) $x \approx 13.95$

$AB \approx 11.43$

$\cos 55° = \frac{8}{13.95} \approx 0.573$

$\tan 55° = \frac{11.43}{8} \approx 1.429$

7) $x \approx 37°$

$AB = 8$

$\cos 53° = \frac{6}{10} = 0.6$

$\tan 53° = \frac{8}{6} = 1.33$

8) $x \approx 1.81$

$AB = 6.76$

$\cos 75° = \frac{1.81}{7} \approx 0.259$

$\tan 75° = \frac{6.76}{1.81} \approx 3.734$

9) $x \approx 19°$

$AB = 8.98$

$\cos 71° = \frac{3.1}{9.5} \approx 0.326$

$\tan 71° = \frac{8.98}{3.1} \approx 2.897$

الدرسُ 1

المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ

Vectors in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ المتجهِ، وتمثيلُهُ في المستوى الإحداثيِّ، وإيجادُ مقدارِ المتجهِ.

المصطلحاتُ المُركَّبةُ الأفقيةُ، المُركَّبةُ الرأسيةُ، الصورةُ الإحداثيةُ، الوضعُ القياسيُّ، مقدارُ المتجهِ، السرعةُ المتجهةُ.

مسألةُ اليومِ قطعَ يختٌ سياحيٌّ مسارًا مستقيمًا في البحرِ الأحمرِ، مُنطلِقًا منْ مدينةِ العقبةِ باتجاهِ الجنوبِ الغربيِّ منْ مدينةِ طابا المصريةِ. هلْ يُمكِنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليختِ، وتحديدُ المسافةِ التي قطعَها باستعمالِ إحداثيَّيْ هاتيْنِ المدينتيْنِ فقطْ؟

درسْتُ في الفيزياءِ تمثيلَ المتجهاتِ في صورةِ سهمٍ ينطلقُ منْ نقطةِ إسنادٍ، مثلِ نقطةِ الأصلِ، وبطولٍ يُحدِّدُهُ مقياسُ رسمٍ مناسبٍ، واتجاهٍ تُحدِّدُهُ الزاويةُ θ التي يصنعُها السهمُ معَ محورٍ مرجعيٍّ، مثلِ محورِ x الموجبِ عكسَ عقاربِ الساعةِ. ولأنَّ استعمالَ مقياسِ الرسمِ قدْ لا يكونُ دقيقًا في بعضِ الأحيانِ؛ فإنَّهُ يتعيَّنُ استعمالُ طريقةٍ أكثرَ دقَّةً لتمثيلِ المتجهاتِ.

يُمكِنُ تمثيلُ المتجهِ $(\overrightarrow{AB})$ في المستوى الإحداثيِّ في صورةِ قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُّ منْ نقطةِ بدايتِهِ $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةِ نهايتِهِ $B(x_2, y_2)$، وفي اتجاهٍ يُحدِّدُهُ رمزُ السهمِ كما في الشكلِ المجاورِ.

تُسمّى المسافةُ الأفقيةُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ ونقطةِ نهايتِهِ **المُركَّبةَ الأفقيةَ** (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$، وتُسمّى المسافةُ الرأسيةُ بينَهُما **المُركَّبةَ الرأسيةَ** (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى المتجهِ الذي نقطةُ بدايتِهِ A، ونقطةُ نهايتِهِ B بالرمزِ $\overrightarrow{AB}$ أوْ بالرمزِ $\boldsymbol{v}$ مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ، ويُرمَزُ إليْهِ أيضًا بالرمزِ $\vec{v}$، وبخاصةٍ عندَ كتابتِهِ بالقلمِ؛ نظرًا إلى صعوبةِ كتابتِهِ بخطٍّ غامقٍ.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يتعرف المتجه، ويكتبه بالصورة الإحداثية، ويمثله على المستوى الإحداثي.
- يجد مقدار المتجه، ويحدد اتجاهه.
- يجد السرعة المتجهة.

التعلم القبلي:

- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- حل مثلث قائم الزاوية، وإيجاد النسب المثلثية لزواياه.

1 التهيئة

- راجِع الطلبة في نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين، عن طريق حل السؤالين الآتيين:
  - » عيِّن النقاط $A(1, -2), B(4, 2), C(-2, 1)$ على المستوى الإحداثي، ثم جد طول كلٍّ من $\overline{AB}$، و $\overline{AC}$.
  - » أجد MN في المثلث القائم LMN المجاور، وقياس كلٍّ من الزاويتين MNL، و MLN.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » مـا الفرق بين القارب واليخت؟ اليخت مثل القارب، لكنه أكبر حجمًا، ومُزوَّد بمحرك لدفعه إلى الأمام، وفيه كثير من وسائل الراحة والاستجمام.
  - » كيف يمكن حسـاب المسـافة بين مدينتي العقبة وطابا؟ إذا عُرِفت إحداثيات المدينتين فإنه يمكن إيجاد المسـافة باسـتعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون المسـافة بين نقطتين، وكذلك يمكن إيجادها بقياس المسافة بينهما على خريطة باستعمال مقياس الرسم.
  - » كيف يمكن تمثيل مسـار اليخت على الخريطة؟ برسم قطعة مستقيمة من العقبة إلى طابا، ثم وضع إشارة تدل على بدء الرحلة من العقبة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.

وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخـر لديهم. بعد ذلك وضِّح لهم أنهم سـيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسـألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المسـتخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على اسـتعمالها، مثل: المتجه (vector)، والمركبة الأفقيـة (horizontal component)، والمركبة الرأسية (vertical component)، والصورة الإحداثية (coordinate form)، والوضع القياسي (standard position)، والسرعة المتجهة (velocity).

3 التدريس

مثال 1

- وضِّح الفرق بين الكميات القياسية (العددية) التي تُحدَّد بعدد، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والكميات المتجهة التي تُحدَّد بعدد واتجاه، مثل: القوة، والسرعة.
- اسـتعمل فقرة الشـرح الوارد ذكرها في بداية الدرس لتوضيح الفرق بين تمثيل المتجه هندسيًّا والتعبير عنه جبريًّا بالصورة الإحداثية.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيف يُكتَب المتجه بالصورة الإحداثية إذا عُلِمت نقطتا بدايته ونهايته.

إرشـاد: حفِّز الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني، أو دفاتر ورق المربعات عند البدء بدراسة هذه الوحدة.

ملاحظات المعلم

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المفاهيم العابرة:

أكِّـد للطلبة أهميـة المفاهيم العابـرة للمواد حيثما ورد ذكرهـا في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشـطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، عزِّز الوعـي بالقضايـا البيئية)أهمية البحار والمحيطات) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهميـة البحار والمحيطات للطقس والمخزون الغذائي والمائي، وتأثيرها في حياة الإنسان والكائنات الحية، ثم اسألهم:

- » ما فائدة البحار والمحيطات؟
- » ما البحار التي يقع عليها وطننا الأردن؟
- » كيف نحافظ على البحار والمحيطات؟

يُمكِنُ كتابةُ المتجهِ **بالصورةِ الإحداثيةِ** (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبتيهِ الأفقيةِ والرأسيةِ (العموديةِ) كما يأتي:

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle a, b \rangle$$

إذا كانَتْ نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ نقطةَ الأصلِ O، كما في الشكلِ المجاورِ، فإنَّهُ يكونُ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position).

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الرمزُ $\langle a, b \rangle$ أوْ $\binom{a}{b}$ لكتابةِ المتجهِ بصورتِهِ الإحداثيةِ.

مثال 1

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:

1 $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $A(1, 2) = (x_1, y_1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

$$x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$$

إذنْ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3 \rangle$

2 $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $B(3, 5)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$$

إذنْ، $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2 \rangle$

3 $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $D(5, 1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

إذنْ، $\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2 \rangle$

طريقةٌ بديلةٌ

للانتقالِ منَ النقطةِ A إلى النقطةِ B، أتحرَّكُ وحدتَينِ إلى اليمينِ، وثلاثَ وحداتٍ إلى الأعلى.

أتعلَّمُ

يُعبِّرُ عنِ الانتقالِ إلى اتجاهِ اليسارِ أوِ اتجاهِ الأسفلِ باستعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

أخطاء مفاهيمية:

- قد لا يُميِّز بعض الطلبة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ عند كتابة المتجه بالصورة الإحداثية؛ لذا الفت انتباههم إلى طرح إحداثي نقطة البداية من الإحداثي المناظر له في نقطة النهاية.
- قد يُبدِّل بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط موقعي المركبتين الأفقية والرأسية؛ لذا وضِّح لهم الطريقة الصحيحة لكتابة الصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل المجاور، اكتب كلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

1 $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 2 \rangle$ **2** $\overrightarrow{BC}$ $\langle 2, -1 \rangle$

3 $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, 1 \rangle$ **4** $\overrightarrow{DA}$ $\langle -2, 0 \rangle$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:

a) $\overrightarrow{EA}$ $\langle -6, 1\rangle$ b) $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -4\rangle$

c) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 4\rangle$ d) $\overrightarrow{DE}$ $\langle 3, -2\rangle$

e) $\overrightarrow{BC}$ $\langle 3, 1\rangle$ f) $\overrightarrow{CB}$ $\langle -3, -1\rangle$

مقدارُ المتجهِ (magnitude) هوَ كميةٌ قياسيةٌ تُمثِّلُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطتَيْ بدايةِ المتجهِ ونهايتِهِ.

فإذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ $\boldsymbol{v}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس لإيجادِ الصيغةِ الآتيةِ لمقدارِ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

أتعلَّمُ

يُرمَزُ إلى مقدارِ المتجهِ $\boldsymbol{v}$ بالرمزِ $|\boldsymbol{v}|$

مفهومٌ أساسيٌّ

مقدارُ المتجهِ:

إذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\boldsymbol{v}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

وإذا كانَ المتجهُ $\boldsymbol{v}$ مكتوبًا بالصورةِ الإحداثيةِ $\boldsymbol{v} = \langle a, b\rangle$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

إرشادات للمعلم

وجِّه الطلبة إلى استعمال ورق المربعات أو ورق الرسم البياني لتمثيل المتجهات، إضافةً إلى المسطرة والمنقلة؛ فذلك يُكسِبهم مهارة التمثيل بسرعة ودقة، واطلب إليهم استعمال الأقلام الملونة لتمييز المتجهات المختلفة بعضها من بعض.

مثال 2

1 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ v في الشكلِ المجاورِ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ نقطةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطةِ نهايتِهِ.

إحداثيا نقطةِ بدايةِ المتجهِ $(2, 3)$، وإحداثيا نقطةِ نهايتِهِ $(8, 6)$.

الخطوةُ 2: أُعوِّضُ الإحداثياتِ بصيغةِ مقدارِ المتجهِ.

$|v| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{36 + 9}$ بالتبسيطِ

$= 3\sqrt{5}$ بالتبسيطِ

2 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

المتجهُ مكتوبٌ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$ بالتعويضِ

$= 5$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$ $\sqrt{17}$

b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$ $\sqrt{74}$

أتعلَّمُ

يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ بدلالةِ اتجاهِهِ منَ الشمالِ.

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ المتجهُ وترًا فيهِ.

مثال 2

- وضِّح للطلبة مفهوم مقدار المتجه (طوله)، وكيفية حسابه إذا عُلِمت إحداثيات بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مقدار المتجه المُمثَّل على المستوى الإحداثي، أو المعطى بالصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- جد مقدار كل متجه ممّا يأتي:

1 $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3, -7)$ و $B(0, -5)$ $\sqrt{13}$

2 $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -10 \rangle$ $5\sqrt{5}$

مثال 3

- بيِّن للطلبة أنَّ اتجاه أيِّ متجه يُحدَّد بقياس الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة التي تُمثِّله مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس حركة عقارب الساعة، أو اتجاه الشمال مع حركة عقارب الساعة.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية تحديد اتجاه متجه مرسوم في الوضع القياسي، مُبيِّنًا أن هذه الطريقة تُستعمَل إذا عُلِمت نقطتا بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية، ثم اذكر أمثلة على ذلك.
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» هل يمكن استعمال نسبة أُخرى غير ظل الزاوية؟
نعم، ولكن يجب إيجاد طول المتجه أولًا.

إرشاد: أرشِد الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة بصورة صحيحة لإيجاد قياس زاوية عُلِمت إحدى نسبها المثلثية.

أخطاء مفاهيمية: قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في كتابة معادلة النسبة المثلثية؛ لذا الفت انتباههم إلى الصيغ الصحيحة للنسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية.

مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.

الخطوةُ 1: أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$

أستعملُ نسبةَ الظلِّ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ $\overrightarrow{AB}$ وترًا فيهِ:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ استعمالُ نسبةِ الظلِّ لإيجادِ الزاويةِ

$= \frac{7}{7} = 1$ بالتعويضِ

$\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$ باستعمالِ معكوسِ الظلِّ

إذنْ، اتجاهُ $\overrightarrow{AB}$ هوَ $45°$ معَ الأفقيِّ.

إرشادٌ
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ العلميةَ لأجدَ $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي:
SHIFT Tan 1

أتحقق من فهمي

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.

$130.6°$ مع محور x الموجب.

السرعةُ المتجهةُ (velocity) هيَ سرعةٌ في اتجاهٍ مُحدَّدٍ يُمكِنُ تمثيلُها بمتجهٍ. في الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ المتجهُ $\boldsymbol{v}$ السرعةَ المتجهةَ لجسمٍ تحرَّكَ في مسارٍ مستقيمٍ، فصنعَ زاويةً قياسُها θ معَ محورِ x الموجبِ، وقدْ مثَّلَ مقدارُ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$ سرعةَ هذا الجسمِ.

تُمثِّلُ $\boldsymbol{v}_x$ المُرَكَّبةَ الأفقيةَ للسرعةِ المتجهةِ، وتُمثِّلُ $\boldsymbol{v}_y$ المُرَكَّبةَ الرأسيةَ لهذهِ السرعةِ، حيثُ: $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y \rangle$

86

مثال إضافي

1 جد اتجاه $\overrightarrow{AB}$ في الشكل الآتي.

$26.6°$ مع محور x الموجب.

2 جد اتجاه $\overrightarrow{LM} = \langle 4, -3 \rangle$

$323.1°$ مع محور x الموجب.

أتعلَّمُ

قدْ يُمثِّلُ المتجهُ أيضًا مسافةً متجهةً، أوْ قوةً متجهةً.

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لكتابةِ المُركَّبتيْنِ الأفقيةِ والرأسيةِ للسرعةِ المتجهةِ بدلالةِ الزاويةِ θ التي تصنعُها السرعةُ المتجهةُ معَ محورِ x الموجبِ كما يأتي:

$$v_x = |v| \cos\theta$$

$$v_y = |v| \sin\theta$$

عندئذٍ، يُمكِنُ كتابةُ السرعةِ المتجهةِ بالصورةِ الإحداثيةِ كما يأتي:

$$v = \langle |v| \cos\theta, |v| \sin\theta \rangle$$

مثال 4: من الحياة

كرةُ قدمٍ: ركلَ ريّانُ كرةً بسرعةِ **25m/s**، كما في الشكلِ المجاورِ، وبزاويةٍ مقدارُها **°40** معَ الأفقيِّ. أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للكرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

أرسمُ شكلًا مُبسَّطًا يُعبِّرُ عنِ المسألةِ، بحيثُ يكونُ فيهِ $|v| = 25$، وَ $\theta = 40°$:

$v_x = |v| \cos\theta$، و $v_y = |v| \sin\theta$

$v = \langle |v|\cos\theta, |v|\sin\theta \rangle$

بالتعويضِ $= \langle 25 \cos 40°, 25 \sin 40° \rangle$

بتعويضِ قيمِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ °40 $= \langle 25\times0.7660, 25\times0.6428 \rangle$

بالتبسيطِ $= \langle 19.15, 16.07 \rangle$

إذنْ، $v = \langle 19.15, 16.07 \rangle$

هوَ المتجهُ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الكرةِ.

ازدادَ الاعتمادُ على الطائراتِ المُسيَّرةِ عنْ بُعْدٍ في كثيرٍ منَ المجالاتِ، مثلِ: رصدِ الازدحاماتِ المروريةِ، ومراقبةِ انتشارِ حرائقِ الغاباتِ.

أتحقق من فهمي

ألعابٌ: أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميساءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةٍ قياسُها **°35** عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ **6 m/s** كما في الشكلِ المجاورِ.

أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.

$\langle 4.91 , 3.44 \rangle$

مثال 4: من الحياة

- وضِّح للطلبة كيفية تحليل المتجه إلى مركبة أفقية وأُخرى رأسية باستعمال النسب المثلثية لزاوية الاتجاه.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية كتابة الصورة الإحداثية لسرعة متجهة باستعمال زاوية الاتجاه.

إرشاد: أكِّد باستمرار الفرق بين مفاهيم السرعة المتوسطة، والسرعة اللحظية، والسرعة المتجهة.

مثال إضافي

- انطلق صاروخ ألعاب نارية بسرعة 32 m/s، وبزاوية مقدارها °45 مع الأفقي. اكتب المتجه الذي يُمثِّل السرعة المتجهة للصاروخ بالصورة الإحداثية.

$\langle 16\sqrt{2}, 16\sqrt{2} \rangle$

تنويع التعليم

- استعمل برمجية جيوجبرا، واطلب إلى الطلبة استعمالها لاستكشاف المتجهات، وتعلُّم الكثير عنها.
- اطلب إلى الطلبة تصفُّح موقع برمجية جيوجبرا الإلكتروني الذي يحوي معلومات مفيدة لدراسة جميع دروس الوحدة:

https://www.geogebra.org/t/2d-vectors

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من (2–24).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

تنبيه:

عند حل الأسئلة (1–6)، وجِّه الطلبة إلى افتراض أن النقطة الأولى من اليسار هي نقطة بداية المتجه، وأن النقطة الثانية هي نهايته.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة العشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1) $(2, 5), (4, -1)$ $\langle 2, -6\rangle$ $|u| = 2\sqrt{10}$

2) $(-4, 7), (-3, 0)$ $\langle 1, -7\rangle$ $|u| = 5\sqrt{2}$

3) $(6, -2), (8, 1)$ $\langle 2, 3\rangle$ $|u| = \sqrt{13}$

4) $(4, -9), (3, -5)$ $\langle -1, 4\rangle$ $|u| = \sqrt{17}$

5) $(-1.5, 3), (0.5, -4)$ $\langle 2, -7\rangle$ $|u| = \sqrt{53}$

6) $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$ $\langle 4, \frac{1}{3}\rangle$ $|u| = \frac{\sqrt{145}}{3}$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:

7) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 4, -1\rangle$

8) $\overrightarrow{DB}$ $\langle 3, 1\rangle$

9) $\overrightarrow{CB}$ $\langle 2, 3\rangle$

10) $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4\rangle$

11) $\overrightarrow{AC}$ $\langle 2, -4\rangle$

12) $\overrightarrow{DA}$ $\langle -1, 2\rangle$

13) في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ D على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$؟

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{5}$ ، D نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

14) $\langle 2, -6\rangle$ $2\sqrt{10}$

15) $\langle 7, -8\rangle$ $\sqrt{113}$

16) $\langle -1, -1\rangle$ $\sqrt{2}$

17) $\langle 3, 5\rangle$ $\sqrt{34}$

18) $\langle 0, 0\rangle$ 0

19) $\langle 2, 9\rangle$ $\sqrt{85}$

إذا كانَتْ M هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ O هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

20) $\overrightarrow{FG}$ $\langle -2, 4\rangle$

21) $\overrightarrow{GF}$ $\langle 2, -4\rangle$

22) $\overrightarrow{OM}$ $\langle 3, 4\rangle$

23) أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ P في الشكلِ المجاورِ بطريقتَيْنِ.

اتجاه P هو $25°$ مع الأفقي.

اتجاه P هو $065°$

24) حيواناتٌ: أكتبُ السرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سرعتُهُ الأفقيةُ $v_x = 27$ km/h، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25$ km/h

$\langle 27, 25\rangle$

25 فيزياءُ: تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N، وبزاويةِ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

⟨158.90 , 311.85⟩

26 أكتبُ المتجهَ v بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|v| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °90 معَ محورِ x. ⟨0 , 27⟩

27 أكتبُ المتجهَ v بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|v| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °320 معَ محورِ x.
⟨7.66 , −6.43⟩

28 خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أُخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ (إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتينِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما).

⟨248 , −562⟩

مهارات التفكير العليا

29 تحدٍّ: إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ B، مُبرِّرًا إجابتي. انظر الهامش

30 تبريرٌ: ما مجموعةُ قيمِ b التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b\rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

31 أكتشفُ الخطأَ: حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $v = \langle 6, -1\rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

ناصرٌ	ليلى
$\lvert v\rvert = 37$	$\lvert v\rvert = \sqrt{35}$

أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟ كلتا الإجابتين غير صحيحة؛ لأن ناصرًا نسي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلًا من جمعهما.

32 مسألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.
ستتنوع إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة صحيحة: $\overrightarrow{AB} = v = \langle 6, -4\rangle$
$|v| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

إجابات (أتدرب وأحل المسائل):

29) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$

$4 + (y-2)^2 = 13$

$(y-2)^2 = 9$

$y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5, y = -1$

إذن، إحداثيا B هما: $(3, 5)$، أو $(3, -1)$.

30) $|v| = \sqrt{16 + b^2} = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

مهارات التفكير العليا

- أشرِكُ الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم، مُنبِّهًا إيّاهم إلى تصحيح أرقامها، بحيث تبدأ بـ 29، وتنتهي بـ 32 في كتبهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - » إذا كانت $A(3, -2), B(7, 5), C(1, y)$، وكانت B تقسم القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ بنسبة 1:2، فما العلاقة بين $|\overrightarrow{BC}|$، وَ $|\overrightarrow{AB}|$؟ ما قيمة y؟

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (3–1) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية في ورقة، ثم تسليمها لك في نهاية الحصة:
  - » ما الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة؟
  - » اذكر 3 أمثلة على كلٍّ منهما.
  - » بيِّن بمثالٍ كيفية إيجاد مقدار متجه عُلِمت بدايته ونهايته.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يميز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، ويعبر عنها بالرموز.
- يحل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا.
- يتعرف المتجه الصفري.
- يجد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.

التعلم القبلي:

- كتابة المتجه بالصورة الإحداثية.
- إيجاد مقدار المتجه واتجاهه.
- كتابة المركبتين الأفقية والرأسية لمتجه معطى.
- حل المثلث باستعمال قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام.

1 التهيئة

- ارسم على لوح المستوى الإحداثي المتجهين $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ كما في الشكل الآتي:

- اطلب إلى الطلبة التعبير عن هذين المتجهين بالصورة الإحداثية.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المقدار والاتجاه لكلٍّ من $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية لكلٍّ من $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$، ورسمهما.
- أكمل الشكل المرسوم إلى مثلث، مُذكِّرًا الطلبة بكيفية تطبيق قانوني الجيوب وجيوب التمام لحل المثلث.

الدرسُ 2

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

فكرةُ الدرسِ إجراءُ العملياتِ على المتجهاتِ.

المصطلحاتُ المتجهاتُ المتساويةُ، المتجهاتُ المتوازيةُ، معكوسُ المتجهِ، المحصلةُ.

مسألةُ اليومِ بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ بسرعةٍ مقدارُها 450 km/h، لكنَّها واجهَتْ رياحًا شرقيةً سرعتُها 60 km/h، فأخذَتِ تنحرفُ نحوَ اليسارِ. كيفَ يُمكِنُ للطيارِ أنْ يُعدِّلَ اتجاهَها وسرعتَها ليصلَ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

المتجهانِ المتساويانِ (equal vectors) هما متجهانِ لهُما نفسُ الاتجاهِ والمقدارِ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ متساويةٌ، وبالرموزِ: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

المتجهانِ المتوازيانِ (parallel vectors) هما متجهانِ لهُما الاتجاهُ نفسُهُ، أوْ عكسُهُ، وليسَ شرطًا أنْ يكونَ لهُما المقدارُ نفسُهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ متوازيةٌ، وبالرموزِ: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{f}$

معكوسُ المتجهِ (opposite vectors) هوَ متجهٌ لهُ نفسُ مقدارِ متجهٍ آخرَ، لكنَّهُ في اتجاهٍ مُعاكِسٍ لهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهُ $\boldsymbol{d}$ معكوسُ المتجهِ $\boldsymbol{a}$، وبالرمزِ: $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a}$؛ أيْ إنَّ $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{d}$

مثال 1

في الشكلِ المجاورِ، $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فيهِ $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}$ ، وَ $\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$:

1) $\overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{SR} = a$ — متجهٌ موازٍ ومساوٍ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

2) $\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{SP} = -b$ — متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما قياس زاوية متجه سرعة الطائرة مع الأفقي؟ $90°$
  - » ما قياس زاوية متجه سرعة الرياح مع الأفقي؟ $180°$
  - » ما تأثير الرياح على الطائرة؟ ستدفع الطائرة إلى الغرب.
  - » هل سيُعدِّل الطيّار اتجاه الطائرة نحو الشرق أم نحو الغرب للتغلُّب على أثر الرياح؟ سيُعدِّل اتجاه الطائرة نحو الشرق.
  - » ماذا سيفعل الطيّار للتغلُّب على أثر الرياح، والمحافظة على اتجاه الطائرة شمالًا والسرعة نفسها؟ سيحرفها جهة اليمين، ويُقلِّل سرعتها، بحيث تحرفها الرياح إلى مسارها الصحيح، وتزيد سرعتها حتى تصل $450\ km/h$
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضِّح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة المقصود بالمتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors) ومعكوس المتجه (opposite vector)، وعبِّر عنها بالرموز، ثم ارسمها مُستعمِلًا المسطرة والمنقلة.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، وارسم متوازي أضلاع على لوح المستوى الإحداثي مُشابِه للمعطى في المثال، مُبرِّرًا كل خطوة من خطوات الحل (يمكن اختيار طالب من ذوي المستوى فوق المتوسط لذكر التبرير).
- ذكِّر الطلبة أن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع يكونان متطابقين ومتوازيين.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors)، ومعكوس المتجه (opposite vector)، والمحصلة (resultant).

مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $ABED$ مُربّع، فيه $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}$، $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{u}$، أعبّر عن كل من $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{DE}$ باستعمال المتجهين $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$.

$\overrightarrow{DE} = \boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{EB} = -\boldsymbol{u}$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

التدريس

- وضِّح للطلبة خطوات إيجاد مجموع متجهين هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث.
- ارسم متجهين على لوح المستوى الإحداثي لتوضيح أن المتجه $\boldsymbol{b}$ يبقى كما هو من حيث الطول والاتجاه عند عمل انسحاب له، بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\boldsymbol{a}$.
- أخبر الطلبة أن $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ هو متجه يُسمّى متجه المحصلة (resultant)، وأن له التأثير نفسه الذي يُحدِثه كلٌّ من المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ الواحد تلو الآخر.
- ارسم على اللوح شكلًا يُشبِه الشكل الآتي، مُستعمِلًا أقلامًا ذات ألوان لتمييز متجه المحصلة:

- أخبر الطلبة أن $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ هو متجه المحصلة، وأنه ناتج جمع المتجهات $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$، ثم اشرح لهم قاعدة المثلث؛ لجمع المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ أولًا، ثم جمع المحصلة $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ مع المتجه $\boldsymbol{c}$ لينتج المتجه $\boldsymbol{v}$ كما في الشكل الآتي:

- أكِّد للطلبة أنه يمكن تطبيق قاعدة المثلث عند إيجاد مجموع متجهين أو أكثر.

3 $\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{QP}=-a$ — متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

4 $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RQ}=-b$ — متجهٌ معكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $ABCD$ مستطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، وَ $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$:

a) $\overrightarrow{AD}$ b b) $\overrightarrow{DC}$ a c) $\overrightarrow{CB}$ $-b$

جمعُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِنُ إجراءُ عملياتٍ على المتجهاتِ، مثلِ: الجمعِ، والطرحِ.

لإيجادِ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ هندسيًّا، أتّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $\boldsymbol{a}$.

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ $\boldsymbol{b}$ بحيثُ تكونُ نقطةُ بدايتِهِ هيَ نقطةَ نهايةِ المتجهِ $\boldsymbol{a}$.

الخطوةُ 3: أَصِلُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ a ونقطةِ نهايةِ المتجهِ $\boldsymbol{b}$، فيكونُ المتجهُ الناتجُ هوَ المتجهَ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

يُسمّى المتجهُ الناتجُ منْ جمعِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ **المحصلةَ** (resultant).

أتعلَّمُ

يُطلَقُ على هذهِ الطريقةِ في جمعِ المتجهاتِ هندسيًّا اسمُ قاعدةِ المثلثِ.

مثال 2

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ — أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BC}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$، فينتجُ $\overrightarrow{BA}$

مثال 2

- قبل البدء بتقديم المثال 2، ارسم المضلع $ABCDE$ المعطى في المثال على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل فروع المثال، مُبرِّرًا الناتج في كل فرع.
- عند مناقشة الطلبة في حل الفرع 4، وضِّح لهم أن متجه المحصلة الناتج $\overrightarrow{AA}$ يُسمّى المتجه الصفري، ثم اسألهم: لماذا سُمِّي بهذا الاسم؟ لعدم وجود طول واتجاه له.
- وضِّح للطلبة كيفية طرح المتجهات برسم المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ باستعمال لوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.
- وضِّح للطلبة كيفية تطبيق قاعدة المثلث لإيجاد ناتج طرح متجهين هندسيًّا، حيث $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$
- عند رسم معكوس المتجه $\boldsymbol{b}$، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه، مراعيًا أن تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\boldsymbol{a}$.
- عند رسم متجه المحصلة: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه.
- وضِّح للطلبة كيفية تمثيل المتجه $\boldsymbol{a}$ بعد ضربه في عدد حقيقي، وابدأ بالمتجه $2\boldsymbol{a}$، و$3\boldsymbol{a}$، ثم $-2\boldsymbol{a}$، و$-3\boldsymbol{a}$، و$-0.5\boldsymbol{a}$
- في أثناء تمثيل المتجه $k\,\boldsymbol{a}$، حيث k عدد حقيقي، اعكس اتجاه المتجه الناتج عندما يكون k عددًا سالبًا.

2 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$

أصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BA}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{EC}$ — $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$

3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

أصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{DE}$ — $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

4 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

أصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$ — $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$ $\quad\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$ $\quad\overrightarrow{BC}$

أتعلَّمُ

- يُسمّى المتجهُ $\overrightarrow{AA}$ المتجهَ الصفريَّ؛ وهوَ متجهٌ ليسَ لهُ مقدارٌ واتجاهٌ.
- لأيِّ متجهٍ $\boldsymbol{a}$، فإنَّ:

$\boldsymbol{a}+0=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=0$

طرحُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ، أوْ ناتجِ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا.

لإيجادِ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، أجمعُ المتجهَ $\boldsymbol{a}$ معَ معكوسِ المتجهِ $\boldsymbol{b}$؛ أيْ:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

ولذلكَ يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ هندسيًّا بطريقةٍ مشابهةٍ لعمليةِ الجمعِ كما في الشكلِ المجاورِ.

أجِدُ محصلةَ $\boldsymbol{a}$ وَ $-\boldsymbol{b}$

ضربُ المتجهِ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا

ينتجُ منْ ضربِ المتجهِ $\boldsymbol{a}$ في العددِ الحقيقيِّ k متجهٌ موازٍ للمتجهِ $\boldsymbol{a}$، ويكونُ للمتجهيْنِ $k\boldsymbol{a}$، وَ $\boldsymbol{a}$ الاتجاهُ نفسُهُ إذا كانَ k عددًا موجبًا، واتجاهانِ مُتعاكِسانِ إذا كانَ k عددًا سالبًا.

$$2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$$

$$-2\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$$

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، مستعينًا بلوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.

مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل المجاور، جد هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

1) $2p-q$

2) $p-\frac{1}{3}q$

الحل:

1)

2)

تنويع التعليم (استراتيجية التعلم بالأقران)

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تمثيل المتجهات، وبخاصة تلك التي تُضرَب في عدد حقيقي كسري، وحل مسائل عنها هندسيًّا؛ لذا اطلب إليهم حل المثال الإضافي ضمن مجموعات؛ ما يُسهِّل عليهم تمثيل المتجهات هندسيًّا عندما تكون أفقية أو رأسية.
- وزِّع الطلبة الذين أتقنوا مهارات تمثيل المتجهات على المجموعات؛ لمساعدة زملائهم في أثناء حل التمارين في بند (أتحقق من فهمي)، أو بند (أتدرب وأحل المسائل).
- اكتب النص الوارد في بند (مفهوم أساسي) على يمين اللوح بخط واضح، مُستعمِلًا الألوان المناسبة، ثم وضِّح للطلبة كيفية إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي عندما تكون المتجهات مكتوبة بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أنه يمكن التحقُّق ممّا ورد في البند السابق بتمثيل المتجهات هندسيًّا، ثم اذكر أمثلة عددية على ذلك.

مثال 3

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

1) $2q+p$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $2q$

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $2q$ وَ p

2) $q-3p$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $-3p$ منْ رأسِ المتجهِ q

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ q وَ $-3p$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $p+3q$ b) $3q-2p$ c) $2q-\frac{1}{2}p$

اكتُشِفَتِ المتجهاتُ قبلَ 200 عامٍ تقريبًا، وهيَ تُعَدُّ منَ الفروعِ الحديثةِ في علمِ الرياضياتِ مقارنةً بعلمِ الجبرِ. وقدْ أسهمَ اكتشافُها كثيرًا في الربطِ بينَ الهندسةِ والجبرِ؛ ما أدّى إلى تطوُّرِ علمِ الرياضياتِ.

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها جبريًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ الجمعِ والطرحِ للمتجهاتِ المكتوبةِ بالصورةِ الإحداثيةِ عنْ طريقِ جمعِ مُركَّباتِها الأفقيةِ والرأسيةِ، أوْ طرحِها.

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ $a=\langle x_1, y_1\rangle$ ، وَ $b=\langle x_2, y_2\rangle$، وكانَ k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$a+b=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$ $\quad a-b=\langle x_1-x_2, y_1-y_2\rangle$ $\quad ka=\langle kx_1, ky_1\rangle$

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $p+3q$

c) $2q-0.5p$

b) $3q-2p$

مثال 4

إذا كانَ $a = \langle 3, 1 \rangle$، وَ $b = \langle -4, 6 \rangle$، وَ $c = \langle -3, -1 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $a + b$

$a + b = \langle 3 + (-4), 1 + 6 \rangle$

$= \langle -1, 7 \rangle$

2) $2a$

$2a = \langle 2 \times 3, 2 \times 1 \rangle = \langle 6, 2 \rangle$

3) $c - b$

$c - b = \langle -3 - (-4), -1 - 6 \rangle$

$= \langle 1, -7 \rangle$

4) $a + c$

$a + c = \langle 3 + (-3), 1 + (-1) \rangle$

$= \langle 0, 0 \rangle$

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $a = \langle 3, 1 \rangle$، وَ $b = \langle -2, 7 \rangle$، وَ $c = \langle 0, -5 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $-b$ b) $4c$ c) $b - c$ d) $4a + 3c$

أُفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ المتجهيْنِ $u - v$، $v - u$؟

أتعلَّمُ

في المثالِ 4، المتجهُ a هوَ معكوسُ المتجهِ c؛ لأنَّ مجموعَهُما يساوي المتجهَ الصفريَّ؛ أيْ إنَّ: $a + c = 0$

لجمعِ المتجهاتِ وطرحِها تطبيقاتٌ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والطيرانِ.

مثال 5: من الحياة

ملاحةٌ جويةٌ: بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشرقِ بسرعةٍ مقدارُها 400 km/h، لكنَّها واجهَتْ رياحًا تهبُّ منَ الشمالِ الشرقيِّ بسرعةٍ مقدارُها 50 km/h. كيفَ يُمكِنُ لِرُبّانِ الطائرةِ أنْ يُعدِّلَ مقدارَ سرعتِها واتجاهَها ليصلَ إلى وجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ السرعةَ والاتجاهَ لكلٍّ منَ الطائرةِ، والرياحِ.

يُمثِّلُ المتجهُ f السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.

يُمثِّلُ المتجهُ w السرعةَ المتجهةَ للرياحِ. أُلاحِظُ منَ الشكلِ الآتي أنَّهُ يجبُ على الطائرةِ أنْ تنحرفَ عنْ مسارِها قليلًا بحيثُ تعيدُها الرياحُ إلى مسارِها الأصليِّ.

أتذكَّرُ

يُمثِّلُ مقدارُ (طولُ) كلٍّ منَ المتجهِ f والمتجهِ w سرعةً، لا مسافةً.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) $-b = \langle 2, -7 \rangle$ b) $4c = \langle 0, -20 \rangle$

c) $b - c = \langle -2, 12 \rangle$ d) $4a + 3c = \langle 12, -11 \rangle$

مثال 4

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، والفت انتباههم إلى أهمية استعمال الأقواس في كل فرع؛ لتمييز المتجهات بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أن المتجهات المعطاة هي متجهات بالوضع القياسي (standard position)، وأن أيَّ متجه على المستوى الإحداثي يمكن كتابته بالوضع القياسي من دون أن يُؤثِّر ذلك في مقداره أو اتجاهه.
- يمكنك الاستفادة من برمجية جيوجبرا في توضيح حل المسائل المعطاة عن المتجهات، والتحقُّق هندسيًّا من صحة ناتج كلٍّ منها.

مثال 5: من الحياة

تنبيه: وجِّه الطلبة إلى تعديل رقم المثال ليصبح 5 بدلًا من 4 في كتبهم؛ فهذا خطأ مطبعي.

- قبل مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، اطلب إليهم ذكر تطبيقات حياتية على جمع المتجهات وطرحها.
- ناقِش الطلبة في حل المثال، وارسم شكلًا تقريبيًّا للمعطيات على محورين متعامدين، وثبِّت عليهما رموز الاتجاهات الأربعة (الشمال N، والجنوب S، والشرق E، والغرب W).
- اكتب خطوات مُنظَّمة للحل كما في كتاب الطالب.

مثال إضافي

تُحلِّق طائرة بسرعة 500 km/h في الاتجاه °070، وتُؤثِّر فيها رياح تهب من الاتجاه °130 بسرعة 90 km/h، ما محصلة سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى سطح الأرض؟

محصلة سرعة الطائرة: 461.63 km/h، واتجاهها: °060.21 (تقريبًا).

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للرياح بعدَ انحرافِها عنْ مسارِها.

بما أنَّ الرياحَ تهبُّ منَ الشمالِ الشرقيِّ، فإنَّ اتجاهَ $\boldsymbol{w}$ هوَ °45؛ لذا، فإنَّ الزاويةَ بينَ $\boldsymbol{f}$ وَ $\boldsymbol{w}$ تساوي °135 (زاويتانِ متجاورتانِ على مستقيمٍ)، ويكونُ المتجهُ $\boldsymbol{e}$ هوَ محصلةَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{f}$ وَ $-\boldsymbol{w}$.

أتعلَّمُ
لماذا وُضِعَ المتجهُ $-\boldsymbol{w}$ بدلًا منَ المتجهِ $\boldsymbol{w}$؟

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ سرعةَ الطائرةِ بعدَ انحرافِها.

مقدارُ سرعةِ الطائرةِ بعدَ انحرافِها عنْ مسارِها يساوي مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{e}$، وليكنْ x.

أَجِدُ طولَ x باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ:

قانونُ جيوبِ التمامِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
بالتعويضِ	$x^2 = 400^2 + 50^2 - 2\times400\times50\cos135°$
بالتبسيطِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$= 190784.3$
	$x \approx 436.8$

استطاعَ الأخوانِ رايت في العقدِ الأولِ منَ القرنِ العشرينَ أنْ يصنعا أولَ طائرةٍ تعملُ بمُحرِّكٍ، ويُمكنُ التحكُّمُ فيها.

الخطوةُ 4: أَجِدُ قياسَ زاويةِ انحرافِ الطائرةِ θ باستعمالِ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ	$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$
بالتعويضِ	$\frac{\sin\theta}{50} = \frac{\sin 135°}{436.8}$
بالتبسيطِ	$\theta = \sin^{-1}(0.0809)$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\approx 4.64°$

إذنْ، يجبُ على الرُّبَّانِ أنْ يحرفَ مسارَ الطائرةِ بزاويةِ °4.64 شمالَ الشرقِ، ويزيدَ مقدارَ سرعتِها إلى 436.8 km/h، عندئذٍ ستعملُ الرياحُ على تقليلِ مقدارِ سرعتِها إلى 400 km/h.

أتحقق من فهمي

ملاحةٌ بحريةٌ: انطلقَ قاربٌ شراعيٌّ منْ ميناءٍ بسرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 30 km/h، مُتَّجِهًا إلى جزيرةٍ تقعُ غربَهُ. وفي هذهِ الأثناءِ، هبَّتْ رياحٌ بلغَتْ سرعتُها المتجهةُ 10 km/h بزاويةِ °25 جنوبَ الغربِ. كيفَ يُمكِنُ للبَحّارِ تعديلُ مقدارِ سرعةِ القاربِ واتجاهِهِ للوصولِ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟ انظر الهامش

إجابة أتحقق من فهمي 5:

افترض أن $\boldsymbol{v}$ هو متجه سرعة القارب، وأن $\boldsymbol{u}$ هو متجه سرعة الرياح (انظر الشكل أعلاه). وبذلك، فإن:

$$|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}|^2 = 30^2 + 10^2 - 2(30)(10)\cos 115°$$
$$= 1252$$
$$|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}| = \sqrt{1252} \approx 35.38 \text{ km/h}$$
$$\frac{\sin\theta}{10} = \frac{\sin 115}{35.38}$$
$$\sin\theta \approx 0.26$$
$$\theta = \sin^{-1}(0.26) = 15.07°$$

أي يجب تعديل اتجاه القارب بزاوية °15.07 شمال غرب، وزيادة سرعته لتصبح 35.38 km/h؛ لكي يصل إلى وجهته في الوقت المُحدَّد.

إرشادات للمعلم

نبِّه الطلبة عند حل المثال 5 والتدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) إلى ما يأتي:

- جملة (رياح تهب من الشمال الشرقي) تعني أن متجه الرياح يصنع مع الأفقي زاوية قياسها °225، وأن قياس الزاوية بين معكوس متجه الرياح والمحور الأفقي هو °45، أمّا لو كانت الرياح تهب باتجاه الشمال الشرقي، فذلك يعني أن متجه الرياح يصنع زاوية قياسها °45 مع المحور الأفقي.
- جملة (رياح تهب بزاوية °25 جنوب غرب) تعني أن متجه الرياح يصنع مع محور y السالب (من S إلى W) زاوية قياسها °25 (يُعرَف هذا التعبير بقياس الزاوية الربعية)، فيكون قياس الزاوية بينه وبين محور x السالب °65 (انظر الشكل المجاور).

أتدرب وأحل المسائل

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$:

1) $\overrightarrow{EI}$ $\boldsymbol{a}$ 2) $\overrightarrow{FC}$ $\boldsymbol{b}$ 3) $\overrightarrow{DE}$ $-\boldsymbol{b}$

4) $\overrightarrow{GE}$ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 5) $4\overrightarrow{GD}$ $8\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}$ 6) $\overrightarrow{CA}$ $-(2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$

إذا كانَ $\boldsymbol{a}=\langle 34,-86\rangle$، وَ $\boldsymbol{b}=\langle -65,17\rangle$، وَ $\boldsymbol{c}=\langle 9,-1\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

7) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ $\langle 43,-87\rangle$ 8) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ $\langle -99,103\rangle$ 9) $3\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$ $\langle -38,14\rangle$ 10) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ $\langle -49,-67\rangle$

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\boldsymbol{r}$ وَ $\boldsymbol{s}$ وَ $\boldsymbol{t}$:

11) $\overrightarrow{SR}$ $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$ 12) $\overrightarrow{ST}$ $\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}$ 13) $\overrightarrow{RS}$ $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}$

14) إذا كانَ $\langle 7,-5\rangle=\langle 3x-y,y-x^2\rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟ $x=1$ و $y=-4$، أو $x=2$ و $y=-1$

إذا كانَ $\boldsymbol{e}=\langle -3,-2\rangle$، وَ $\boldsymbol{f}=\langle 2,4\rangle$، فأُمثِّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ: انظر ملحق الإجابات

15) $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}$ 16) $3\boldsymbol{f}$ 17) $\boldsymbol{e}-\boldsymbol{f}$

18) $\boldsymbol{f}-\boldsymbol{e}$ 19) $4\boldsymbol{e}$ 20) $2\boldsymbol{f}+\boldsymbol{e}$

21) إذا كانَ $\boldsymbol{d}=\langle 5,9\rangle$، وَ $\boldsymbol{e}=\langle 11,-8\rangle$، فأَجِدُ $|4\boldsymbol{d}-3\boldsymbol{e}|$، $|\frac{1}{3}\boldsymbol{e}|$ انظر ملحق الإجابات

في الشكلِ المجاورِ، $OACB$ شبهُ منحرفٍ، فيهِ R منتصفُ $\overline{OB}$، وَ Q منتصفُ $\overline{AC}$. إذا كانَ $\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}$ وَ $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$، فأكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$: انظر ملحق الإجابات

22) $\overrightarrow{QR}$ 23) $\overrightarrow{AQ}$ 24) $\overrightarrow{RQ}$

25) كيفَ يُمكنُ تحديدُ إذا كانَ $\overline{OA}$ وَ $\overline{BC}$ متوازيَيْنِ في الشكلِ $OACB$؟

26) رياضةٌ: في سباقِ للمشيِ، انطلقَتْ رندُ منْ نقطةِ البدايةِ، فقطعَتْ مسافةَ 15 km في اتجاهِ الشرقِ، ثمَّ اتجهَتْ شمالًا مسافةَ 17 km، كمْ كيلومترًا تبعدُ رندُ عنْ نقطةِ البدايةِ؟ 22.67 km تقريبًا.

27) نزهةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أَجِدُ اتجاهَ القاربِ وبُعْدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ. انظر ملحق الإجابات

أخطاء مفاهيمية:

عند حل الأسئلة: 11, 12, 13، قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن طرح متجهين بكتابة عكس الحل الصحيح، مثل كتابة $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}$ بدلًا من $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$؛ لذا الفت انتباه الطلبة إلى اتجاه السهم المرسوم على المتجه، وأن عكس الاتجاه الذي يشير إليه السهم عند الحركة يدل على معكوس المتجه؛ ما يعني أنه يجب كتابة المتجه بإشارة سالبة. وكذلك كتابة المتجه المطلوب في صورة محصلة (مجموع) متجهين.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة (13–1) في مجموعات، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة (29–14)، ثم شارِكهم في حلها على اللوح.
- وجِّه الطلبة إلى تعديل وحدة قياس السرعة في السؤال 29 لتصبح km /h بدلًا من km في كتبهم.
- أخبر الطلبة أنه يمكنهم استعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من حل أسئلة الدرس في البيت، أو عن طريق تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- اطلب إلى الطلبة حل بقية الأسئلة بعد الحصة، ثم عرضها عليك للتحقُّق من صحة الحل.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الحادية والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات – حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- عند حل السؤال 37، ذكِّر الطلبة بخصائص المثلث متطابق الأضلاع: ارتفاعاته منصفات لأضلاعه (أي إنها القطع المتوسطة للمثلث)، ومنصفات لزواياه، وهي تتقاطع في مركزه الذي يقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس.

5 الإثراء

- وضِّح للطلبة كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة أُخرى تُسمّى قاعدة متوازي الأضلاع؛ إذ يمكن إيجاد محصلة المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ في الشكل المجاور باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: سحب المتجه $\boldsymbol{b}$ بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه $\boldsymbol{a}$.

الخطوة 2: إكمال رسم متوازي الأضلاع، بحيث يكون المتجهان $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ضلعين فيه كما في الشكل الآتي:

الخطوة 3: رسم قُطْر متوازي الأضلاع المار بتقاطع المتجهين لتمثيل المتجه $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ كما في الشكل الآتي:

28 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

29 سباقُ زعانفَ: شاركَ سامي في سباقِ الزعانفِ الذي نظَّمَهُ اتحادُ الرياضاتِ البحريةِ على شاطئِ خليجِ العقبةِ. سبحَ سامي بسرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 3 km في اتجاهِ الجنوبِ، لكنَّهُ واجهَ أمواجًا سرعتُها 1.8 km، وقدْ دفعَتْهُ إلى اتجاهِ الشرقِ، فغيَّرَ مقدارَ سرعتِهِ واتجاهَها ليقاومَ الأمواجَ، ويفوزَ بالسباقِ. أَجِدُ السرعةَ المتجهةَ التي يجبُ أنْ يسبحَ بها سامي. انظر ملحق الإجابات

تحويلاتٌ هندسيةٌ: أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $ABCD$ المجاورِ باستعمالِ المتجهِ $\langle a, b\rangle$، حيثُ a مقدارُ الانسحابِ على محورِ x، وَ b مقدارُ الانسحابِ على محورِ y:

30 أَجِدُ $\langle a, b\rangle$. $\langle a, b\rangle = \langle -4, -2\rangle$

31 إذا أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $A'B'C'D'$ باستعمالِ المتجهِ $\langle 3, -4\rangle$، فأرسمُ الشكلَ الناتجَ منَ الانسحابِ، وأُسمِّيهِ $A''B''C''D''$. انظر ملحق الإجابات

32 أُحدِّدُ المتجهَ $\langle f, e\rangle$ الذي يصفُ انسحابَ الشكلِ $ABCD$ إلى الشكلِ $A''B''C''D''$. $\langle f, e\rangle = \langle -1, -6\rangle$

33 انطلقَتْ سيارةٌ منَ المدينةِ A إلى المدينةِ B، فقطعَتْ مسافةَ 200 km في اتجاهِ 040°، ثمَّ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها إلى 050°، وقطعَتْ مسافةَ 150 km. أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ B وبُعْدَها عنِ النقطةِ A. انظر ملحق الإجابات

34 إذا كانَتْ $<3, x> + y^2 <3, 5> - <15, 7> = 0$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ العددَيْنِ x وَ y. $x = -13, y = \pm 2$

مهارات التفكير العليا

35 تبريرٌ: انطلقَ يختٌ في رحلةٍ بحريةٍ منَ الميناءِ، فقطعَ مسافةَ 60 km شمالًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 40 km شرقًا، ثمَّ مسافةَ 16 km جنوبًا، فوصلَ إلى جزيرةٍ. أَجِدُ بُعْدَ الجزيرةِ عنِ الميناءِ، ثمَّ أَجِدُ المسافةَ التي قطعَها اليختُ في رحلتِهِ البحريةِ حتى وصلَ الجزيرةَ، وأُقارِنُ بينَهُما. انظر ملحق الإجابات

تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ OAB مثلثًا مُتطابقَ الأضلاعِ، ويُمثِّلُ فيهِ M مركزَ المثلثِ؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ M عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:

36 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. انظر ملحق الإجابات

37 أُثبِتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ انظر ملحق الإجابات

- اطلب إلى الطلبة إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة قاعدة المثلث تارة، وبطريقة قاعدة متوازي الأضلاع تارة أُخرى، ثم تدوين مزايا كل طريقة.
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - » أيُّ الطريقتين تُفضِّلون؟

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (4) من المشروع.
- ذكِّر الطلبة بأن مقياس الرسم في الخريطة يُعبِّر عن النسبة بين البُعْد على الخريطة والبُعْد الحقيقي على الأرض.

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب اختيار فكرة فهمها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- اطلب إلى كل طالب تسليمك ورقته.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، خطِّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي ترصدها.

الدرسُ 3

الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

فكرةُ الدرسِ ضربُ المتجهاتِ، وإيجادُ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

المصطلحاتُ الضربُ القياسيُّ.

مسألةُ اليومِ دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها 54° مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

تعرَّفْتُ سابقًا العملياتِ على المتجهاتِ، مثلَ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ، وسأتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفيةَ إيجادِ ناتجِ ضربِ متجهيْنِ. **الضربُ القياسيُّ** (scalar product) هوَ عمليةٌ جبريةٌ بينَ متجهيْنِ، تنتجُ منْها كميةٌ قياسيةٌ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$ ، وتُقرَأُ: $\boldsymbol{v}$ dot $\boldsymbol{w}$

مفهومٌ أساسيٌّ

الضربُ القياسيُّ:

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وَ $\boldsymbol{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنَّ: $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

مثال 1

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle 2, 8 \rangle$، وَ $\boldsymbol{w} = \langle -5, 4 \rangle$، فأَجِدُ $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$:

صيغةُ الضربِ القياسيِّ	$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$
بالتعويضِ	$= 2 \times -5 + 8 \times 4$
بالتبسيطِ	$= -10 + 32$
	$= 22$

أتعلَّمُ

يُسمّى الضربُ القياسيُّ أيضًا الضربَ النقطيَّ Dot product

أتعلَّمُ

لأيِّ متجهٍ $\boldsymbol{u}$ ، فإنَّ: $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$

أتحققُ من فهمي

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle -3, 2 \rangle$، وَ $\boldsymbol{u} = \langle 6, 9 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ 0 b) $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}$ 0 c) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}$ 117

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يجد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.
- يتعرف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.
- يجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يحسب الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.

التعلم القبلي:

- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي.
- حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بما تعلموه عن المتجهات في الدرسين السابقين، ثم اطرح عليهم السؤال الآتي:

» إذا كان $\boldsymbol{u} = \langle 3, -2 \rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 4, 1 \rangle$ ، فجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ $\langle 7, -1 \rangle$

b) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ $\langle 4, 3 \rangle$

c) $2\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{u}$ $\langle 17, -4 \rangle$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x في المثلثين الآتيين:

1

7.8 cm

2

74.4°

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما المقصود بالشغل؟ الطاقة المبذولة لتحريك جسم ما مسافة محددة.
  - » علامَ يعتمد مقدار الشغل؟ يعتمد على مقدار القوة المُؤثِّرة، واتجاهها، والمسافة التي تَحرَّكها الجسم.
  - » ما وحدة قياس الشغل؟ الجول؛ وهو مقدار الشغل المبذول عندما تُؤثِّر قوة مقدارها نيوتن واحد في جسم يتحرك مسافة متر واحد في اتجاه تلك القوة.
  - » هل تبذل شغلًا إذا حاولت دفع حائط غرفة الصف؟ لا؛ لأنه لن يتحرك.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- أخبر الطلبة أنهم سيتعلمون في هذا الدرس كيفية حساب الشغل.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الضرب القياسي (scalar product)، والشغل (work).

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم الضرب القياسي لمتجهين، وكيفية حسابه إذا أُعطِي متجهان بالصورة الإحداثية.

مثال 1

ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب القياسي لمتجهين، مُوضِّحًا علاقة ناتج الضرب القياسي للمتجه في نفسه بمقدار المتجه (أو طوله) عندما يحل الطلبة التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

مثال إضافي

إذا كان $\boldsymbol{u} = \langle \frac{3}{2}, -4 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle -6, -3 \rangle$ ، فجد $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. 3

إرشادات للمعلم

وضِّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيوب التمام، مُبيِّنًا أنه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كلٍّ منهما، وقياس الزاوية بينهما.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المعلم

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وَ $\boldsymbol{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنَّ طولَ المتجهِ المرسومِ باللونِ الأخضرِ في الشكلِ المجاورِ هوَ $|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|$ ، حيثُ: $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v} = \langle w_1-v_1, w_2-v_2 \rangle$

وباستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، فإنَّ:

$$|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2\,|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = |\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2\,|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

$$= w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

$$\cancel{w_1^2} - 2w_1v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{w_2^2} - 2w_2v_2 + \cancel{v_2^2} = \cancel{w_1^2} + \cancel{w_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} - 2|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_1v_1 = -2|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$w_1v_1 + w_2v_2 = |\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$$ بالتبسيطِ

$$v_1w_1 + v_2w_2 = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|\cos\theta$$ الخاصيةُ التبديليةُ

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|\cos\theta$$

ولذلكَ، فإنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}$$

مفهومٌ أساسيٌّ

يُمكِنُ إيجادُ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$، حيثُ $0° \le \theta \le 180°$ الزاويةُ المحصورةُ بينَ المتجهيْنِ.

مثال 2

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8 \rangle$، وَ $\boldsymbol{b} = \langle 3, 4 \rangle$

الخطوةُ 1: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{a}$.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$ بالتعويضِ

$$= \sqrt{100} = 10$$ بالتبسيطِ

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن خطوات إيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين، واسألهم عن الحالات المختلفة للعلاقة بين متجهين، ثم اربطها بناتج الضرب القياسي.

مثال إضافي

- جد قياس الزاوية بين المتجهين
  $\boldsymbol{w} = \langle 1, -5 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle -4, 2 \rangle$ $127.9°$

أخطاء شائعة: قد يخطئ بعض الطلبة في حساب قياس الزاوية بين متجهين؛ لذا وجِّههم إلى رسم المتجهين على المستوى الإحداثي، لملاحظة الزاوية بين المتجهين، ومقارنتها بإجاباتهم؛ للتحقُّق من معقولية الحل.

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة أنه توجد تسميات أُخرى للضرب القياسي، منها: الضرب النقطي (dot product)، والضرب الداخلي (inner product).

مثال 3

- أخبر الطلبة أن الضرب القياسي لمتجهين متعامدين يساوي صفرًا، مُبيِّنًا سبب ذلك.
- وضِّح للطلبة أنه إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين يساوي صفرًا فإن المتجهين متعامدان.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

مثال إضافي

- حدِّد إذا كان المتجهان في كلٍّ ممّا يأتي متعامدين، أو متوازيين، أو غير ذلك:

a) $\boldsymbol{u} = \langle 2, 4\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -8, 4\rangle$ متعامدان

b) $\boldsymbol{u} = \langle 1, -2\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -3, 6\rangle$ متوازيان

c) $\boldsymbol{u} = \langle -2, 4\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -1, 5\rangle$ غير ذلك

d) $\boldsymbol{u} = \langle 4, 5\rangle, \boldsymbol{v} = \langle 10, -8\rangle$ متعامدان

الخطوةُ 2: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{b}$.

صيغةُ مقدارِ المتجهِ	$\lvert b\rvert = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
بالتعويضِ	$= \sqrt{3^2 + 4^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{25} = 5$

الخطوةُ 3: أَجِدُ الضربَ القياسيَّ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 . b_1 + a_2 . b_2$
بالتعويضِ	$= 6\times3 + 8\times4$
بالتبسيطِ	$= 18 + 32$
	$= 50$

الخطوةُ 4: أُعوِّضُ القيمةَ الناتجةَ منَ الخطوةِ السابقةِ في الصيغةِ الأُخرى لقانونِ الضربِ القياسيِّ.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ	$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\lvert a\rvert\,\lvert b\rvert}$
بالتعويضِ	$= \frac{50}{10 \times 5} = 1$
	$\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ صفرٌ، فهُما متوازيانِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{u} = \langle -1, 1\rangle$ وَ $\boldsymbol{v} = \langle 2, 7\rangle$ $61°$ تقريبًا.

تُستخدَمُ المتجهاتُ في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونيةِ؛ فهيَ تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكَّمُ فيها اللاعبونَ.

إرشادٌ

أرسمُ المتجهيْنِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا وضعَ التوازي بينَهُما.

إذا كانَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ متجهيْنِ غيرَ صفريينِ، وكانَتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَهُما قائمةً، فإنَّ المتجهيْنِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ الضربِ القياسيِّ بينَهُما صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90° = 0$

مثال 3

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $v = \langle -6, 4 \rangle$، وَ $u = \langle 2, 3 \rangle$ متعامدَيْنِ أمْ لا.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ	$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
بالتعويضِ	$= 2\times -6 + 3\times 4$
بالتبسيطِ	$= -12 + 12$
	$= 0$

بما أنَّ $u \cdot v = 0$ ، فإنَّ المتجهيْنِ متعامدانِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $v = \langle 3, -5 \rangle$، وَ $u = \langle 1, 0 \rangle$ متعامدَيْنِ أمْ لا.

غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا، وإنما يساوي 3

توجدُ تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ، أهمُّها حسابُ الشغلِ W الناتجِ منْ تأثيرِ قوةٍ ثابتةٍ F بزاويةٍ مُحدَّدةٍ θ على جسمٍ ما؛ لتحريكِهِ منْ نقطةٍ إلى أُخرى مسافةً مقدارُها d وحدةً. فالشغلُ هوَ كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجَ الضربِ القياسيِّ لمتجهِ القوةِ في متجهِ الإزاحةِ، ووحدةُ قياسِهِ هيَ جول (J). يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ الشغلِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$W = |F|\,|d| \cos\theta$$

أتعلَّمُ

وَحدةُ قياسِ الشغلِ هيَ نيوتن - متر، وتُسمّى الجول، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ J

مثال 4: من الحياة

فيزياءُ: سحبَ عاملٌ صندوقًا بقوةٍ مقدارُها $F = 13\ \text{N}$ ، وبذلَ شغلًا مقدارُهُ $W = 20\ \text{J}$ لسحبِ الصندوقِ مسافةً أفقيةً مقدارُها $d = 18\ \text{m}$. ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

قانونُ الشغلِ	$W = |F|\,|d| \cos\theta$
بالتعويضِ	$20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$
بالتبسيطِ	$20 = 234 \times \cos\theta$

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في مفهوم الشغل، وصيغة إيجاده، ثم اكتب على اللوح وحدتي القوة والشغل.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

إرشادات للمعلم

القوة: مُؤثِّرٌ يؤدي إلى تغيير حالة الجسم الحركية. والقوة من الكميات المتجهة، وهي تقاس بوحدة نيوتن. أمّا الشغل فهو من الكميات المرتبطة بالقوة؛ إذ تبذل القوة شغلًا على جسم ما عندما تُحرِّكه في اتجاه ما بمقدار إزاحةٍ معين، ويقاس الشغل بوحدة جول.

مثال إضافي

تدفع سلوى مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 17 N، وتصنع ذراع المكنسة زاوية قياسها 65° مع أرضية الغرفة. ما الشغل (بالجول) الذي تبذله سلوى لتحريك المكنسة مسافة 4 m بإهمال قوة الاحتكاك؟ 28.7 J تقريبًا.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسـائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسـئلة (1–10) ضمن مجموعات.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة فـي الصفحة الثانيـة والعشـرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التـي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسـب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

بالتبسيطِ $\frac{20}{234} = \cos\theta$

معكوسُ جيبِ التمامِ $\cos^{-1}(0.0855)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\theta = 85.1°$

أتحقق من فهمي

سـحبَ فارسٌ عربةً، فبذلَ شغلًا مقدارُهُ 13 J، بقوةٍ مقدارُها 50 N، مسافةَ $d = 30$ m

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟ 89.5° تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8\rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle 4, -3\rangle$ 0

2) $\boldsymbol{u} = \langle -3, 11\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle -9, 4\rangle$ 71

3) $\boldsymbol{c} = \langle -12, 43\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 22, 14\rangle$ 338

4) $\boldsymbol{d} = \langle 21, 32\rangle$, $\boldsymbol{e} = \langle -21, 25\rangle$ 359

5) إذا كانَ $|\boldsymbol{b}| = 6$، وَ $|\boldsymbol{a}| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ هوَ 42°، فأَجِدُ ناتجَ $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ 40.13

6) إذا كانَ $|\boldsymbol{b}| = 76$، وَ $|\boldsymbol{a}| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ هوَ 120°، فأَجِدُ ناتجَ $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ −1292

7) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a} = \langle 7, 10\rangle$ ، وَ $\boldsymbol{b} = \langle 4, -10\rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ. 123.2°

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

8) $\boldsymbol{c} = \langle 2, 4\rangle$, $\boldsymbol{d} = \langle -24, 12\rangle$
0, 90°

9) $\boldsymbol{a} = \langle 4, 16\rangle$, $\boldsymbol{k} = \langle 8, -2\rangle$
0, 90°

10) أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $\boldsymbol{e} = \langle 3, 4\rangle$ ، وَ $\boldsymbol{a} = \langle 11, -8\rangle$ متعامديْنِ أَمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = 1$ إذن، المتجهان غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا.

11) إذا كانَ $\boldsymbol{r} = \langle 3, -4\rangle$ ، وَ $\boldsymbol{s} = \langle b, b+2\rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ b.
$3b - 4(b+2) = 0$
$3b - 4b - 8 = 0$
$-b = 8$, $b = -8$

12 سيّاراتٌ: تسحبُ شاحنةٌ سيّارةً كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السحبِ $F = 34\text{N}$، والمسافةُ المقطوعةُ $d = 12\text{ km}$، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46\text{ J}$، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.

$\theta = \cos^{-1}(46 \div 408000) \approx 89.9935°$

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|a| = 2$، وَ $|b| = 4$، وَ $|c| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

13 $a \bullet b$ -4

14 $b \bullet c$ 10

15 $a \bullet c$ -10

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $w = 70 \times 18 \times \cos 54° \approx 74\text{ J}$

مهارات التفكير العليا

17–19) انظر ملحق الإجابات

برهانٌ: إذا كانَتْ c, b, a متجهاتٍ، وكانَ 0 المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

17 $a \bullet b = b \bullet a$

18 $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$

19 $0 \bullet a = 0$

20 مسألةٌ مفتوحةٌ: إذا كانَ $p \bullet q = 30$، وَ $q = \langle 6, 2 \rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتَمَلةً للمتجهِ p. انظر ملحق الإجابات

21 مسألةٌ مفتوحةٌ: أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $a = \langle -8, -2 \rangle$ انظر ملحق الإجابات

22 تبريرٌ: أُبيِّنُ باستعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(-4, -2)$, $(1, 5)$, $(6, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

23 تبريرٌ: إذا كانَ المتجهانِ $a = \langle -1, r \rangle$، وَ $b = \langle 2, -3 \rangle$ متوازيَيْنِ، فما قيمةُ r؟

انظر ملحق الإجابات

تنبيه: نبِّه الطلبة إلى تعديل النقطة $(4, -2)$ في السؤال 22 لتصبح $(-4, -2)$.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

إذا كان للمتجهين v و u المقدار نفسه، فأثبِت أن $v + u$ و $v - u$ متعامدان.

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (5) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة – كتابةً– بيان كيف يمكن تحديد إن كان متجهان معطيان متعامدين أم متوازيين، ثم تحديد المتجهين المتعامدين والمتجهين المتوازيين من بين المتجهات الآتية:

$u = \langle 4, 6 \rangle$, $v = \langle -3, -6 \rangle$,

$w = \langle -8, 4 \rangle$, $z = \langle 10, 15 \rangle$

u, z : متعامدان. v, w : متعامدان

الوحدةُ 5

التقويم الختامي:

- راجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعـات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسـئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأسـئلة ليحلها الطلبة واجبًـا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أن الأسـئلة (26 –30) وردت ضمن أسـئلة الاختبـارات الدولية، أو هي مسـائل مشابهة لها.

ملحوظـة: تُخصَّـص حصتان(90 دقيقـة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

إرشادات للمعلم

وجِّـه الطلبة إلى تعديل نص السـؤالين 23 و24 في كتبهم كما وردا في هذا الدليل.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $v = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإنَّ $|v|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانَتْ $A(0, 2)$ ، $B(3, y)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ y تساوي:

a) 5 b) -1

c) $5, -1$ d) $7, -3$

إذا كانَ $v = \langle 1, 5 \rangle$، وَ $u = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 5, 6, 7:

5 $v - u$ تساوي:

a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كانَ $p = u + 2v$، فإنَّ $|p|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوسُ المتجهِ $u + v$ هوَ:

a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 2, -4 \rangle$

c) $\langle 4, 6 \rangle$ d) $\langle -4, -6 \rangle$

8 إذا كانَ $a = \langle 2, -3 \rangle$ ، $b = \langle 3, 4 \rangle$، فإنَّ $a \cdot 2b$ تساوي:

a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانَتِ النقاطُ A, B, C, D نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$, $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ C إذا كانَ:

9 $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ $C(8, 3)$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ $C(\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$

أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها: 11–13) انظر ملحق الإجابات

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: v وَ u ، فإنَّ $u \cdot v = v \cdot u$

أنسخُ الرسـمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ: 14–16) انظر ملحق الإجابات

14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ E على المستوى الإحداثيِّ.

15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$، فأُحدِّدُ النقطةَ D على المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ M على المستوى الإحداثيِّ.

17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ k. $k = 4$

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ $u = \langle -1, 5 \rangle$، وَ $v = \langle 2, -1 \rangle$، وَ $w = \langle 4, -2 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

18 $-3(v - w)$ $\langle 6, -3 \rangle$

19 $v \cdot 2u$ 20

20 $w \cdot (u + \frac{1}{2}w)$ -4

21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ v وَ w. $0°$

22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m. 661.9J

23 ركَضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةٍ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s، وبزاويةِ قياسُها $38°$ معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ. انظر ملحق الإجابات

24 هبطَتْ طائرةٌ بسرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُها $10°$. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. انظر ملحق الإجابات

25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $a = \langle 6, 8 \rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $b = \langle 4, -3 \rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الثانيةِ. هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم، يتعامدان؛ لأن $a \cdot b = 0$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 أَجِدُ الزاويةَ θ بينَ المتجهيْنِ p وَ q إذا كانَ $p = \langle 5, -1 \rangle, q = \langle -2, 3 \rangle$ $135°$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسوميْنِ في الوضعِ القياسيِّ، حيثُ O نقطةُ الأصلِ، وَ M نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:

27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ a وَ b. انظر ملحق الإجابات

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(a + b)$ انظر ملحق الإجابات

الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ O، وفيهِ $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$:

29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ a وَ b.
انظر ملحق الإجابات

30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ K بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ a وَ b.
انظر ملحق الإجابات

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفيـن: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبـار (TIMSS): كل أربع سـنوات. ويهدف هذا الاختبـار إلى قياس مسـتوى تقدُّم الطلبة فـي التحصيل الدراسـي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييـم جودة التعليم فـي الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسـم السياسة التربوية على المسـتوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: فـي مجـالات القـراءة، والرياضيات، والعلـوم. وفـي ما يخـص الرياضيـات، فـإن المعرفة الرياضيـة – وفق هـذا البرنامج– يُعبَّر عنهـا بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسـيرها في أوضاع مختلفـة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واسـتعمال المفاهيم والإجـراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقيـة وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعِينهـم على تقييم النجاحـات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّـن عليـك – عزيزي المعلِّـم– تشـجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسـئلة، والمشـاركة في الدراسات وبرامـج التقييم الدولية بكل جديـة، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

كتاب التمارين

الدرسُ 1 المتجهاتُ في المستوى الإحداثيّ

إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 2, -1 \rangle$، فأكتبُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ ثمَّ أجدُ مقدارَهُ:

1. $\overrightarrow{AF}$ $\langle 5, 1 \rangle, \sqrt{26}$
2. $\overrightarrow{AB}$ $\langle -1, -3 \rangle, \sqrt{10}$
3. $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4 \rangle, 2\sqrt{5}$
4. $\overrightarrow{EB}$ $\langle -6, -1 \rangle, \sqrt{37}$
5. $\overrightarrow{EF}$ $\langle 0, 3 \rangle, 3$
6. $\overrightarrow{DC}$ $\langle 0, -3 \rangle, 3$

7. أكتبُ كلًّا منْ $\overrightarrow{BD}$، وَ $\overrightarrow{BF}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ B، وَD، وَF؟
انظر ملحق الإجابات

أستعملُ إحداثيَّيِ النقطةِ $A(6, 3)$ للإجابةِ عنِ المسائلِ الآتيةِ:

8. إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = \langle 2, -5 \rangle$، فأجدُ إحداثيَّيِ النقطةِ B. $B(8, -2)$
9. إذا كانَ $\overrightarrow{AC} = \langle -3, 4 \rangle$، فأجدُ إحداثيَّيِ النقطةِ C. $C(3, 7)$
10. إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 6, 0 \rangle$، فأجدُ إحداثيَّيِ النقطةِ D. $D(12, 3)$
11. **شاحناتٌ:** أكتبُ بالصورةِ الإحداثيةِ السرعةَ المتجهةَ لشاحنةٍ تسيرُ على طريقٍ مُنحدرٍ، علمًا بأنَّ سرعتَها الأفقيةَ $v_x = 58\ \text{km}/h$، وسرعتَها الرأسيةَ $v_y = 37\ \text{km}/h$. $\langle 58, 37 \rangle$
12. يدفعُ صالحٌ مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارُها 272 N، وبزاويةِ قياسُها $51°$ معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. $\langle 171.18, 211.38 \rangle$
13. إذا كانَ $A(-1, 4)$، حيثُ $|AB| = 7$، هيَ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(x, 2)$ هيَ نقطةُ نهايتِهِ، فأجدُ قيمةَ x، مُبرِّرًا إجابتي.
انظر ملحق الإجابات

الدرسُ 2 جمعُ المتجهاتِ وطرحُها

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ: 1–6 انظر ملحق الإجابات

1. $a + b$
2. $-a$
3. $a - c$
4. $b - a$
5. $-c$
6. $-a - b$

في الشكلِ المجاورِ، M هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ المتجهيْنِ a، وَb:

7. $\overrightarrow{AB}$ $b - a$
8. $\overrightarrow{BO}$ $-b$
9. $\overrightarrow{AM}$ $\frac{1}{2}(b - a)$
10. $\overrightarrow{OM}$ $\frac{1}{2}(a + b)$
11. أُحدِّدُ على الشكلِ موقعَيِ النقطتيْنِ X، وَY، بحيثُ يكونُ $\overrightarrow{OX} = 2a + b$، $\overrightarrow{OY} = a + 2b$. انظر ملحق الإجابات
12. أكتبُ $\overrightarrow{XY}$ بدلالةِ a، وَb $b - a$
13. ما المتجهاتُ الأُخرى المكافئةُ لـ $\overrightarrow{XY}$؟ $\overrightarrow{AB}$

إذا كانَ $a = \langle 27, -15 \rangle, b = \langle 9, -21 \rangle, c = \langle -12, 0 \rangle$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

14. $a - c$ $\langle 39, -15 \rangle$
15. $b - 2a$ $\langle -45, 9 \rangle$
16. $3c - b$ $\langle -45, 21 \rangle$
17. $a - b - c$ $\langle 30, 6 \rangle$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهاتِ الآتيةَ علمًا بأنَّ O هيَ نقطةُ الأصلِ:

$\overrightarrow{OA} = \langle 2, 2 \rangle$ $\overrightarrow{OB} = \langle 4, 1 \rangle$ $\overrightarrow{OC} = \langle 6, 0 \rangle$ 18–20 انظر ملحق الإجابات

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أرسمُهُ على الشكلِ:

18. $\overrightarrow{AB}$
19. $\overrightarrow{AC}$
20. $\overrightarrow{BC}$

21. هلْ إجاباتُ المسائلِ السابقةِ كافيةٌ لإثباتِ أنَّ ABC مستقيمٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم، كافية. بما أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$، فإن $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$، وبما أنهما يشتركان في النقطة B فهما يُكوِّنان مستقيمًا واحدًا. وهذا يعني أن ABC خطٌّ مستقيمٌ؛ أي إن النقاط A، وB، وC تقع على المستقيم نفسه.

الدرسُ 3 الضربُ القياسيُّ

أجدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $a = \langle -1, 5 \rangle, b = \langle -6, -2 \rangle$ -4
2. $u = \langle 3, 9 \rangle, v = \langle 6, 5 \rangle$ 63
3. -92
4. -72

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ u وَv متوازيَيْنِ، أوْ متعامدَيْنِ، أوْ غيرَ ذلكَ في كلٍّ ممّا يأتي:

5. $u = \langle 4, -9 \rangle, v = \langle -9, 4 \rangle$ غير ذلك.
6. $u = \langle -5, 2 \rangle, v = \langle -10, 25 \rangle$ غير ذلك.

أجدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

7. $142.1°$
8. $131.6°$

9. يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سحبَ طاولةٍ بقوةٍ مقدارُها 45 N، وزاويةِ قياسُها $30°$ معَ الأفقيِّ. إذا سُحِبَتِ الطاولةُ مسافةَ 20 cm، فأجدُ مقدارَ الشغلِ الذي بُذِلَ.

تقريبًا 7.8 J

الدرس 2:

15)

16)

17)

18)

19)

20)

21) $|\frac{1}{3}e| = \frac{1}{3}|e| = \frac{1}{3}\sqrt{(11)^2 + (-8)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{185} \approx 4.5$

$|4d - 3e| = \sqrt{(-13)^2 + (60)^2} = \sqrt{3769} \approx 61.4$

22) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{1}{2}(-2\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}b$

$= -\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

23) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

24) $\overrightarrow{RQ} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

25) بما أن $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2\boldsymbol{a}$، فإن $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{OA}$

إذن، $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{OA}$

27) انظر الشكل الآتي:

$|AC| = \sqrt{40^2 + 70^2}$

$= \sqrt{6500} \approx 80.62$ km

$\tan\theta = \frac{40}{70}$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{7}) \approx 29.7°$

أي إن القارب يَبعُد 80.62 km عـن نقطة انطلاقه A، وفي اتجاه 330.3° مع محور x الموجب.

28) $|v+w| = \sqrt{450^2 + 60^2} \approx 453.98$ km/h

$\tan\theta = \frac{60}{450} = \frac{2}{15}$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{15}) \approx 7.59°$

أي يتعيَّن على الربّان أن يحرف مسـار الطائرة بزاوية 7.59° نحو اليمين، ويزيد سـرعتها لتصبح 453.98 km، فتعيدها الرياح إلى اتجاه الشمال، وتخفض سرعتها حتى تصل 450 km/h

29) $|v+u| = \sqrt{3^2 + 1.8^2} = \sqrt{12.24} \approx 3.50$ km/h

إذن، يجب أن يسـبح بسـرعة 3.5 km/h، وفي اتجاه 31° غرب الجنوب حتى ينهي السباق في موعده.

31) انظر الشكل الآتي:

33) انظر الرسم التقريبي المجاور:

$m\angle AON = 180° - 40° = 140°$

$m\angle AOB = 360° - (50° + 140°) = 170°$

$AB^2 = 200^2 + 150^2 - 2 \times 200 \times 150 \times \cos 170°$

$= 121588.47$

$AB = \sqrt{121588.47} \approx 348.70$ km

$\frac{\sin\theta}{150} = \frac{\sin 170}{348.7}$

$\sin\theta = 0.075$

$\theta = \sin^{-1}(0.075) \approx 4.30°$

أي إن B تَبعُد عـن A مسـافة 348.70 km، واتجاهها من A هو 044.3°

34) $x = -13, y = \pm 2$

35) انظر الرسم التقريبي المجاور:

مجموع المسافات التي قطعها اليخت: 60+40+16=116 km

وبافتراض أن الجزيرة تَبعُد عن الميناء x km، فإن:

$$x = \sqrt{44^2 + 40^2} \approx 59.46 \text{ km}$$

إذن، مجموع المسافات التي قطعها اليخت تساوي مثلي بُعْد الجزيرة عن الميناء تقريبًا؛ لأن اليخت لم يسلك المسار المستقيم من الميناء إلى الجزيرة.

36) انظر الشكل المجاور.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$
$$= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$
$$= \langle |\boldsymbol{b}| \cos 0°, |\boldsymbol{b}| \sin 0° \rangle - \langle |\boldsymbol{a}| \cos 60°, |\boldsymbol{a}| \sin 60° \rangle$$
$$= \langle |\boldsymbol{b}|, 0 \rangle - \langle \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}|, \tfrac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}| \rangle$$
$$= \langle |\boldsymbol{b}| - \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}|, \tfrac{-\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}| \rangle$$
$$= \langle \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}|, \tfrac{-\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}| \rangle . \quad (|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \text{ لأن})$$

37) انظر الشكل السابق.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

(لأن مركز المثلث يقسم القطع المتوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس).

$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$
$$= \boldsymbol{a} + \tfrac{2}{3}(-\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b})$$
$$= \boldsymbol{a} - \tfrac{2}{3}\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$$
$$= \tfrac{1}{3}\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{b} = \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

الدرس 3:

17) إذا كان $\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2 \rangle, \boldsymbol{b} = \langle b_1, b_2 \rangle, \boldsymbol{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$، فإن:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 \quad \text{(لأن ضرب الأعداد الحقيقية تبديلي).}$$

وإن: $\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2$

إذن، $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$ ؛ أي إن الضرب القياسي للمتجهات تبديلي.

18) إيجاد الطرف الأيسر:

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \langle a_1, a_2 \rangle . (\langle b_1, b_2 \rangle + \langle c_1, c_2 \rangle)$$
$$= \langle a_1, a_2 \rangle . \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle$$
$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

ثم إيجاد الطرف الأيمن:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} = \langle a_1, a_2 \rangle . \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle . \langle c_1, c_2 \rangle$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

(بتبديل موقعي الحدين: الثاني، والثالث)

إذن، $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$؛ أي إن الضرب القياسي يتوزَّع على جمع المتجهات.

19) $\boldsymbol{0}.\boldsymbol{a} = \langle 0,0 \rangle . \langle a_1, a_2 \rangle = 0 \times a_1 + 0 \times a_2 = 0 + 0 = 0$

20) بافتراض أن $\boldsymbol{p} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$، فإن:

$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = 30$ ؛ أي إن $6\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = 30$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أن $\boldsymbol{a} = 2$، فإن $\boldsymbol{b} = 9$، وعندئذٍ، فإن $\boldsymbol{p} = \langle 2, 9 \rangle$

وبافتراض وجود قيم أُخرى لـ $\boldsymbol{a}$، فإنه توجد قيم مناظرة لـ $\boldsymbol{b}$، فتنتج قيم ممكنة للمتجه $\boldsymbol{p}$.

21) بافتراض أن $\boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ يعامد المتجه $\boldsymbol{a} = \langle -8, -2 \rangle$، فإن:

$-8\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = 0$ ؛ أي إن $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{c}$

إذن، جميع المتجهات في صورة $\langle \boldsymbol{c}, -4\boldsymbol{c} \rangle$ تعامد المتجه $\boldsymbol{a} = \langle -8, -2 \rangle$، ومن أمثلتها: $\langle 1,-4 \rangle, \langle 3,-12 \rangle, \langle -2,8 \rangle$.

22) إذا كان $A(6, -2), B(1, 5), C(-4, -2)$، فإن:

$\overrightarrow{AB} = \langle -5,7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$\overrightarrow{AC} = \langle -10,0 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100} = 10$

$\overrightarrow{BC} = \langle -5,-7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

إذن، المثلث ABC متطابق الضلعين؛ لأن $AB = BC = \sqrt{74}$

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{\sqrt{74} \times 10} \approx 54.5°$

$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{10 \times \sqrt{74}} \approx 54.5°$

$m\angle B = 180° - (54.5° + 54.5°) = 71°$

23) $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$ إذا كان قياس الزاوية بينهما $0°$، أو $180°$؛

أي إن $\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|}$ يساوي $\cos 0°$، أو $\cos 180°$ ؛

أي إن: $\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|} = \pm 1$

$\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}}\right)^2 = (\pm 1)^2$

$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1 \Rightarrow 4 + 12r + 9r^2 = 13 + 13r^2$

$4r^2 - 12r + 9 = 0$

$(2r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

حل آخر:

$\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$ إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ ؛

أي إن: $\langle 2,-3 \rangle = k\langle -1, r \rangle$، ومنه:

$-3 = kr \Rightarrow r = \frac{-3}{k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ، و $2 = -k \Rightarrow k = -2$

اختبار الوحدة:

11) صحيحة.

12) غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان.

13) صحيحة.

14)

15)

16)

23) يُمثِّل المتجه $\boldsymbol{u}$ سرعة حسام، ويُمثِّل المتجه $\boldsymbol{v}$ سرعة الكرة، ويُمثِّل المتجه $\boldsymbol{r}$ محصلة السرعتين. ولهذا، فإن:

$(|r|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2 \times 5 \times 20\cos 142°$

$= 582.6$

$|r| = \sqrt{582.6} \approx 24.1 \text{ m/s}$

أي إن محصلة سرعة الكرة هي 24.1 m/s تقريبًا.

24) قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360° - 10° = 350°$؛ لذا، فإن الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:

$\langle 200\cos 350°, 200\sin 350° \rangle = \langle 196.96, -34.73 \rangle$

27) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

28) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

$= \boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

29) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

30) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{AB}$

لكن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$؛ لأن $ABCO$ متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.

إذن، $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} + 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

كتاب التمارين - الدرس 1:

7) $\overrightarrow{BD} = \langle 3,2 \rangle$

$\overrightarrow{BF} = \langle 6,4 \rangle$

اتجاه $\overrightarrow{BD}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$،

واتجاه $\overrightarrow{BF}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

إذن، النقاط B، و D، و F تقع على خط مستقيم واحد.

13) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$7 = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$49 = (x+1)^2 + 4$

$(x+4)^2 = 45$

$x + 1 = \pm\sqrt{45}$

$x = -1 \pm 3\sqrt{5}$

كتاب التمارين - الدرس 2:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

11)

18) $\langle 2, -1 \rangle$

19) $\langle 4, -2 \rangle$

20) $\langle 2, -1 \rangle$

21) نعم، كافية. بما أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$، فإن $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$، وبما أنهما يشتركان في النقطة B فهما يُكوِّنان مستقيمًا واحدًا. وهذا يعني أن ABC خط مستقيم؛ أي إن النقاط A، وB، وC تقع على المستقيم نفسه.