المملكة الأردنية الهاشمية

المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية

National Center for Human Resources Development

دليل إرشادي لمعلمي الرياضيات
(PISA)

إعداد

فاضل شطناوي

إشراف

أ.د. عبد الله عبابنة

د. خطاب أبو لبدة

د. عماد عبابنة

د. أحمد الطويسي

د. شيرين حامد

بدعم من منظمة الأمم المتحدة للتربية والثقافة والعلوم (اليونسكو)

2013

فهرس المحتويات

دليل إرشادي لمعلمي الرياضيات
لمعالجة أخطاء التعلم عند الطلبة في ضوء نتائجهم على أسئلة
البرنامج الدولي لتقييم الطلبة (PISA)

المقدمة :

يشارك الأردن في الدراسات الدولية لتقييم أداء الطلبة منذ عام ١٩٩١، حيث تسعى هذه الدراسات لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية والتي تعينهم في مراقبة وتقييم نجاحات أو إخفاقات تلك النظم، ومن تلك الدراسات دراسة البرنامج الدولي لتقييم الطلبة (PISA)، إذ بدأت مشاركة الأردن الأولى في البرنامج الدولي لتقييم الطلبة الذي ينفذ كل ثلاث سنوات في دورة PISA 2006 بمشاركة (٥٧) دولة من دول العالم حيث جاء ترتيبه في العلوم (٤٥) بمتوسط (٤٢٢)، وفي الرياضيات (٥١) بمتوسط (٣٨٤)، وفي القرائية (٤٦) بمتوسط (٤٠١)، فيما شاركت (٦٥) دولة في دورة PISA2009 بما فيها الأردن، وركزت هذه الدورة على قياس تحصيل الطلبة في القرائية، وجاء ترتيب الأردن في هذه الدورة في مجال العلوم (٥١) بمتوسط (٤١٥) وفي الرياضيات (٥٦) بمتوسط (٣٨٧) وفي القرائية (٥٥) بمتوسط (٤٠٥). وشارك الأردن في دورة PISA 2012 التي ركزت على قياس تحصيل الطلبة في الرياضيات، إذ شارك في هذه الدورة (٦٦) دولة، حيث نشرت نتائج هذه الدورة رسمياً من قبل منظمة التنمية والتعاون الاقتصادي (OECD) الجهة المشرفة على الدراسة في كانون أول ٢٠١٣.

يُعد المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية المؤسسة الوطنية التي تشرف على الدراسة وتنفذها بالتنسيق مع الجهات الدولية المشرفة عليها والمؤسسات التربوية الوطنية المختلفة والتي تتمثل

بوزارة التربية والتعليم والثقافة العسكرية ووكالة الغوث والمدارس الخاصة، إذ يقوم المركز بتنفيذ الاختبارات، وإصدار التقارير، ودعم الدراسات التربوية المستفيدة من نتائج هذه الدراسات.

ويأمل الأردن من خلال مشاركته في هذه الدراسة بتطوير مؤشرات نوعية لمدى نجاح النظام التربوي في إعداد وتهيئة الطلبة للعب دور بناء كمواطنين في مجتمعاتهم وتحديد مدى اكتساب الطلبة للمعارف والمهارات في مجالات القرائية والرياضيات والعلوم لمساعدة النظام التربوي على تشخيص نقاط قوته وضعفه لتحسين مخرجات التعليم.

لقد كشفت الدراسة عن قصور في إجابات الطلبة في مجالات الرياضيات، والعلوم، والقرائية. وفي المجالات الفرعية لكل مبحث، وتشير نتائج الدراسة إلى وجود أخطاء بنسب عالية في بعض المهارات والمعارف والتي قد تكون ناتجه عن أخطاء مفاهيمية حدثت لدى الطلبة أثناء عملية التعلم، الأمر الذي حدى بالمركز لتسليط الضوء على اداء الطلبة ونتائجهم في هذه الدراسة على مستوى الفقرة الاختبارية بغرض إفادة المعلمين منها من خلال إصدار هذا الدليل الإرشادي الذي يقدم امثلة واستراتيجيات تدريس لمعالجة أخطاء الطلبة المفاهيمية.

وقد مر العمل في إعداد هذا الدليل بالمراحل الآتية:

المرحلة الاولى: تحليل أخطاء الطلبة وتحديد مجالاتها وصورها

المرحلة الثانية: إعداد الدليل الذي تضمن ما يلي:

- تعريف بالخطأ
- اقتراح مجموعة من الأسئلة والمهمات يبرز فيها الخطأ (الوظيفة التشخيصية)

- اقتراح الاستراتيجيات التعليمية المناسبة التي تساعد المعلم على التعامل مع الخطأ وتجاوز الطلبة له (الوظيفة العلاجية).

<u>المرحلة الثالثة:</u> مناقشة الدليل مع مجموعة من ذوي الاختصاص والمشرفين التربويين والمعلمين للتحقق من مناسبته للغاية التي وضع لأجلها.

وأخيراً، نأمل من زملائنا المشرفين التربويين والمعلمين الاستفادة من هذا الدليل في التعرف إلى نماذج من أخطاء الطلبة في الرياضيات، وتطبيق استراتيجيات التدريس المقترحة فيه للتغلب على أخطائهم المختلفة بهدف الارتقاء بمستوى أداء طلبة الأردن في دورات الدراسة القادمة وخصوصاً دورة الدراسة التي ستجري في عام ٢٠١٥.

وصف اختبار الرياضيات في دراسة البرنامج الدولي لتقييم الطلبة لدورة ٢٠١٢ (PISA2012)

كان مجال الرياضيات المجال الرئيس في الدورة الثانية للبرنامج الدولي لتقييم الطلبة PISA 2003، وتم العودة لهذا المجال كمجال رئيس في الدورة الخامسة PISA 2012، حيث تطلب ذلك مراجعة كاملة لإطار التقييم والأدوات التي تمثله. وتعرف المعرفة الرياضية وفق البرنامج الدولي لتقييم الطلبة بانها مدى قدرة الفرد على صياغة، وتوظيف، وتفسير الرياضيات في أوضاع مختلفة، إذ تتضمن قدرة الفرد على التفكير الرياضي واستخدام المفاهيم، والإجراءات، والحقائق والأدوات الرياضية لوصف الظواهر والتنبؤ بها.

لقد شمل اختبار الرياضيات في دورة عام ٢٠١٢ المحتويات الفرعية الآتية: الكميات، والتغير والعلاقات، والأشكال والفراغات، والإحصاء والاحتمالات. إذ توزعت فقرات الاختبار البالغ عددها (١١٠) فقرة على النحو المبين في الجدول رقم (١):

جدول رقم (١): توزيع فقرات اختبار الرياضيات بحسب المحتوى

المحتوى	عدد الفقرات
كميات	٢٩
تغير وعلاقات	٢٩
الأشكال والفراغات	٢٧
الإحصاء والاحتمالات	٢٥
المجموع	١١٠

لقد سعى البرنامج الدولي لتقييم الطلبة في دورة عام ٢٠١٢ قياس قدرة الطلبة على توظيف وصياغة وتفسير المشكلات باستخدام الرياضيات، إذ توزعت فقرات الاختبار وفق المستويات المعرفية على النحو المبين في الجدول رقم (٢):

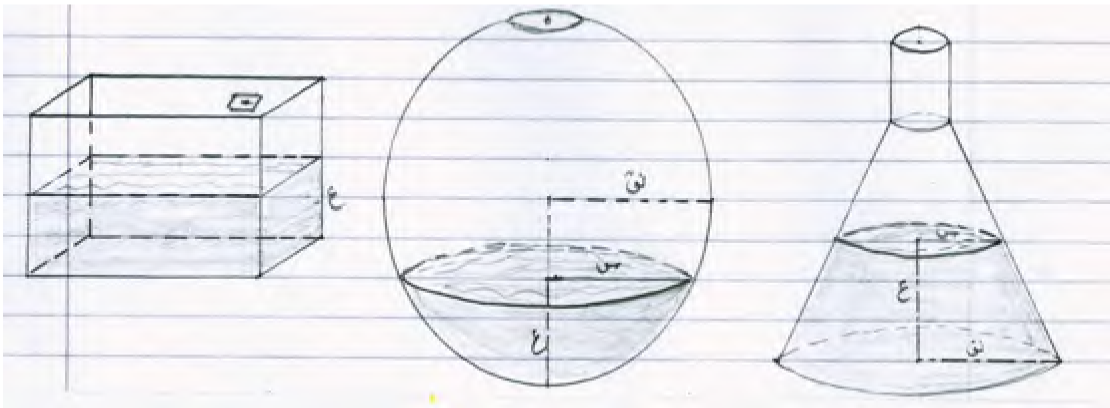
جدول رقم (٢): توزيع فقرات اختبار الرياضيات بحسب المستوى المعرفي

المستوى المعرفي	عدد الفقرات
صياغة	٥١
توظيف	٣٢
تفسير	٢٧
المجموع	١١٠

التغير والعلاقات

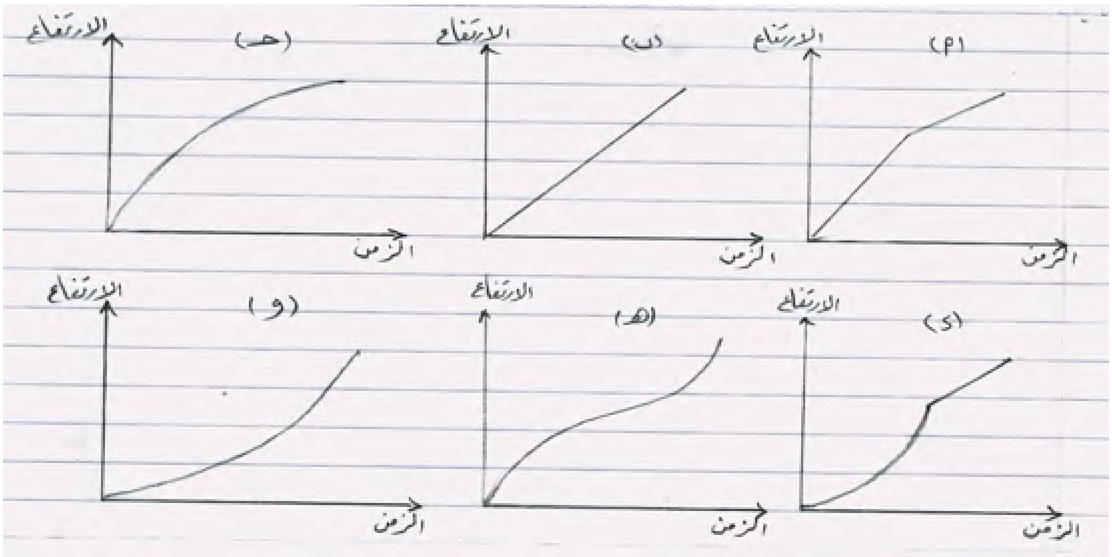
خزانات ماء

ترى هنا ثلاثة أنواع من خزانات المياه. تُملأ هذه الخزانات بالماء بمعدل ثابت.



خزان منشوري　　　　　خزان كروي　　　　　خزان مخروطي

وتجد هنا عدة رسومات بيانية تبين كيف يزيد ارتفاع الماء في ستة أوعية مختلفة أثناء عملية التعبئة.



أي رسم يناسب كل واحد من الخزانات؟

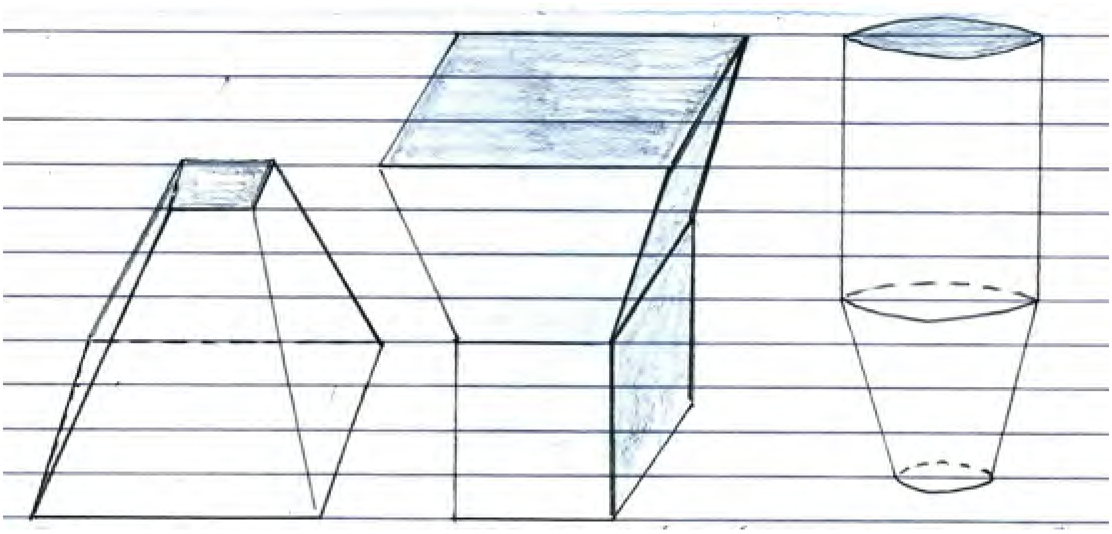
الخزان المخروطي: ___________________________

الخزان الكروي: ______________________________

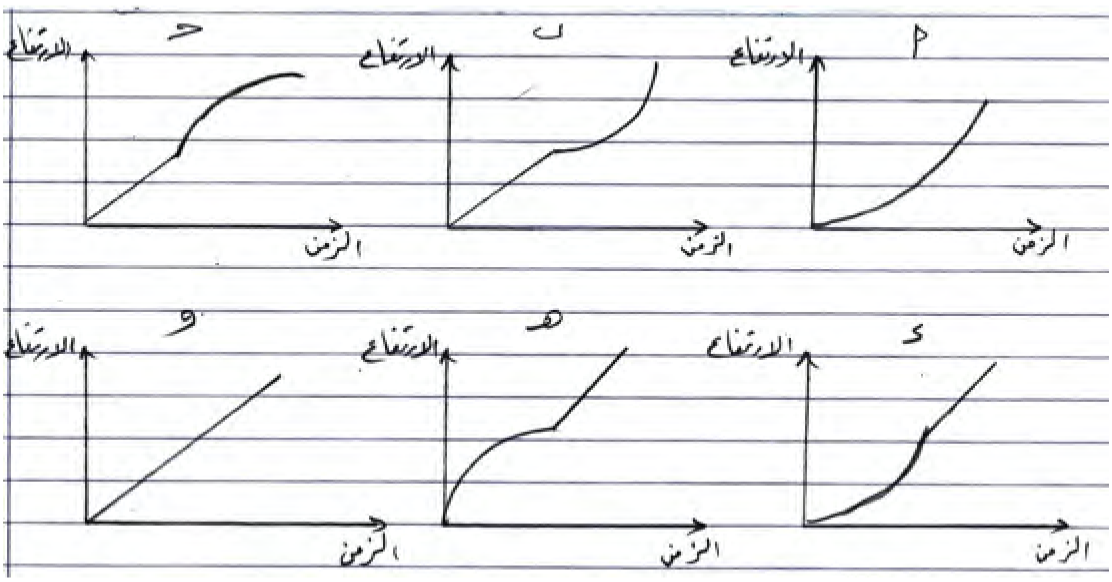
الخزان المنشوري: ___________________________

سؤال مشابه: ترى هنا ثلاثة أنواع من الأوعية. تُملأ هذه الأوعية بالماء بمعدل ثابت.

الأول الثاني الثالث



وتجد هنا عدة رسومات بيانية تبين كيف يزيد مستوى الماء (ارتفاع الماء) في ستة أوعية مختلفة أثناء عملية التعبئة.



أي رسم يناسب كل واحد من الأوعية؟

الأول: ____________________________

الثاني: ____________________________

الثالث: ____________________________

العــلاج: يعتمد التفكير لحل مثل هذا السؤال على إدراك العلاقات بين المتغيرات وأنواعها: متزايدة، متناقصة، طردية، عكسية، ...

فبالنسبة **للخزان المخروطي**: بما أن الخزان يُملأ بمعدل ثابت، وسعة الجزء العلوي من المخروط تنقص كلما ارتفع سطح الماء فإن سطح الماء يرتفع بسرعة أكبر مع مرور الزمن إلى أن يمتلأ الجزء المخروط ويبدأ الجزء الأسطواني عندها يبدأ سطح الماء بالارتفاع بسرعة ثابتة مع مرور الزمن.

إذن فالشكل د يمثل العلاقة بين ارتفاع الماء في هذا الخزان والزمن.

وبالنسبة **للخزان الكروي**: سعة الجزء السفلي من الخزان صغيرة وتزداد السعة كلما اقترب سطح الماء من وسط الخزان ثم تعود السعة بالنقصان كلما ارتفع سطح الماء وابتعد عن وسط الخزان. لذلك، يبدأ سطح الماء بالارتفاع السريع ويتباطأ كلما اقترب سطح الماء من وسط الخزان وفي تلك اللحظة تكون سرعة ارتفاع سطح الماء أقل ما يمكن. وبعدها تبدأ سرعة ارتفاع سطح الماء بالتزايد وتصل ذروتها عند لحظة امتلاء الخزان.

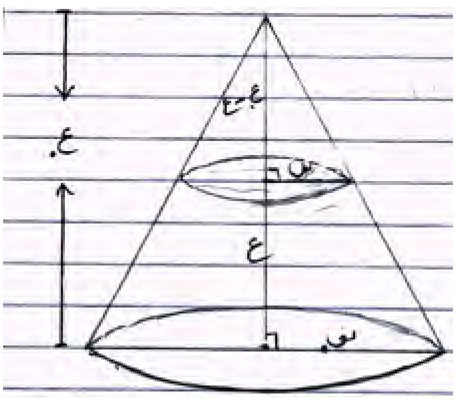
إذن فالشكل (هـ) يمثل العلاقة بين ارتفاع الماء في هذا الخزان والزمن.

أما بالنسبة **للخزان المنشوري (متزازي مستطيلات):** فإن سرعة ارتفاع سطح الماء ستكون ثابتة. أي أن ارتفاع الماء في الخزان يزداد بانتظام. لذلك فالشكل (ب) يمثل العلاقة بين ارتفاع الماء في هذا الخزان والزمن.

ويمكن أن يطلب من الطلبة ذوي المستوى المرتفع (يتعرف الطلبة على مفهوم المشتقة في الصف الثاني عشر) أن يبحثوا العلاقة بين ع ، ن رياضياً كما يلي:

حجم الماء في المخروط $\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\text{نق}^{٢}\,\text{ع.} - \frac{\pi}{٣}\text{س}^{٢}\,(\text{ع.} - \text{ع})$...(١)

لكن $\frac{\text{س}}{\text{ع.-ع}} = \frac{\text{نق}}{\text{ع.}}$ ومنها $\text{س} = \frac{\text{نق}}{\text{ع.}}(\text{ع.} - \text{ع})$ وبالتعويض في (١)



$$\text{ح} = \frac{\pi}{٣}\text{نق}^{٢}\,\text{ع.} - \frac{\pi}{٣} \times \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ع.}^{٢}}(\text{ع.} - \text{ع})^{٣}$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \text{صفر} + \frac{\pi\,\text{نق}^{٢}}{٣\,\text{ع.}^{٢}} \times ٣\,(\text{ع.} - \text{ع})^{٢}\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

وبما أن حجم الماء يزداد بمقدار ثابت فإن $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \text{ث}$.

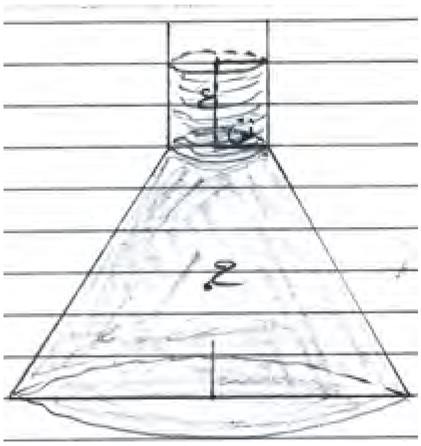
إذن $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{ث}}{(\text{ع.-ع})^{٢}} > \text{صفر}$

نلاحظ من هذه العلاقة أنه كلما زاد الزمن ن يزداد ارتفاع الماء ع ويقل الفرق ع. – ع

ويزداد تبعاً لذلك المقدار $\frac{ث}{(ع.-ع)^{٢}}$

أي أن سرعة ارتفاع الماء $\frac{دع}{دن}$ في الجزء المخروطي تزداد كلما زاد الزمن ن

وهذه العلاقة يمثلها الجزء الأول من المنحنى (د)



وعندما يصل سطح الماء إلى الجزء الأسطواني فإن:

حجم الماء ح = ح. + π نق^{٢} ع

ث ن = ح. + π نق^{٢} ع

وهذه علاقة خطية متزايدة بين ن ، ع

ويمثلها الجزء الثاني من المنحنى (د)

وبالمثل يتم تناول العلاقة بين ن ، ع للخزانين الكروي والمنشوري.

سباق الدراجات

يشترك سامر في سباق للدراجات

سؤال: يتدرب سامر لخوض سباق للدراجات لمسافة ٣ كيلومترات. يستعمل سامر دراجة قطر عجلاتها ٦٣ سنتمتراً.

كم دورة تقريباً تدور عجلات دراجة سامر عند قطعه لمسافة السباق.

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن هذا السؤال إجابة صحيحة ٣,٩٦٪ ونسبة طلبة الدول المشاركة ١٤٪ والنسبتان منخفضتان جداً.

أسئلة مشابهة:

(١) دُحرجت كرة طول قطرها ٧٥ سم على أرض أفقية، واستقرت على مسافة ٥٦,٥ متراً من نقطة البداية.
كم مرة تقريباً دارت الكرة؟

(٢) دُحرجت كرة طول نصف قطرها ١٥ سم على منحدر ثلجي وكان الثلج يتراكم على سطحها بمعدل ١,٥ سم في كل دورة.
كم يصبح حجمها بعد ١٠ دورات؟

العلاج: يعتمد حل مثل هذا السؤال على إدراك الطالب بأن المسافة التي يقطعها سامر عندما تدور عجلة دراجته دورة واحدة تساوي محيط تلك العجلة.

وهنا يأتي دور التذكر لقانون محيط الدائرة:

محيط الدائرة = ٢ π نق

= π × طول قطر الدائرة

إذن محيط عجلة دراجة سامر $= \frac{٢٢}{٧} \times ٦٣$

= ١٩٨ سم

= ١,٩٨ متراً

ولذلك مع كل دورة تدورها عجلتا دراجة سامر يكون قد قطع مسافة ١,٩٨ متراً.

ولقطع مسافة السباق وهي ٣ كيلومترات نقسم هذه المسافة على ١,٩٨ متراً.

إذن عدد الدورات التي تدورها عجلتا دراجة سامر لقطع مسافة السباق =

٣ كيلومترات ÷ ١,٩٨ متراً

وهنا تظهر نقطتين هامتين يجب أن لا يغفلهما الطالب وهما:

١) عند قسمة كمية على أخرى يجب أن تكون الكميتان مقاستين بالوحدة نفسها.
٢) العلاقة بين الكيلومتر والمتر:

الكيلومتر = ١٠٠٠ متر.

إذن عدد الدورات = ٣٠٠٠ متر ÷ ١,٩٨ متر

= ١٥١٥ دورة

سؤال مشابه: **الدراج أحمد**

اشترى أحمد دراجة جديدة مثبت على مقودها مقياس سرعة يبين لراكبها المسافة التي قطعها ومعدل السرعة التي قاد بها الدراجة.

سؤال (١): في إحدى الرحلات قطع أحمد مسافة ٤ كيلومترات في أول ١٠ دقائق، ثم قطع كيلومترين في الخمسة دقائق التالية.

أي عبارة من العبارات الآتية صحيحة؟

(١)كان معدل السرعة في أول عشر دقائق أكبر منه في الدقائق الخمس التالية.
(٢)كان معدل السرعة في المرحلتين هو نفسه.
(٣)كان معدل السرعة في أول عشر دقائق أقل منه في الدقائق الخمس التالية.
(٤)لا يمكن معرفة أي شيء حول معدل السرعة التي قاد بها أحمد دراجته من المعلومات المعطاة.

سؤال (٢): ذهب أحمد لزيارة عمته التي يبعد بيتها ٦ كيلومترات عن بيت احمد. أشار مقياس السرعة إلى أن معدل السرعة التي قاد بها أحمد دراجته إلى بيت عمته ١٨ كم/ساعة.

أي عبارة من العبارات الآتية صحيحة؟

(١)احتاج أحمد إلى ٢٠ دقيقة للوصول إلى بيت عمته.
(٢)احتاج أحمد إلى ٣٠ دقيقة للوصول إلى بيت عمته
(٣)احتاج أحمد إلى ٣ ساعات للوصول إلى عمته.
(٤)لا يمكن معرفة الزمن الذي احتاجه أحمد للوصول إلى بيت عمته.

سؤال (٣): قاد أحمد دراجته إلى حديقة الملاهي التي تبعد عن بيته ٤ كيلومترات. استغرقت المسافة لقطعها ٩ دقائق. وسلك أحمد طريقاً مختصرة عند العودة طولها ٣ كيلومترات واستغرقت عند عودته ٦ دقائق.

ما معدل سرعة أحمد للرحلة كلها (ذهاباًو إياباً) بالكيلومترات/ ساعة؟

معدل السرعة: ______________كم/ ساعة

العــلاج: يتناول هذا السؤال ثلاثة أفكار حول العلاقة بين المسافة ومعدل السرعة والزمن:

١) المقارنة بين معدلين للسرعة لقطع مسافتين في زمنين.
٢) حساب الزمن لقطع مسافة بمعدل سرعة معلوم.
٣) حساب معدل السرعة في قطع مسافتين بزمنين معلومين.

وهناك فكرة رابعة وهي تحويل الوحدات من صورة لأخرى، مثل كم/دقيقة إلى كم/ساعة ...

ولمعالجة مثل هذا الموقف يجب التأكيد على العلاقة بين المسافة ومعدل السرعة والزمن.
المسافة المقطوعة = معدل السرعة × الزمن

مع توضيح مفهوم السرعة ومعدل السرعة. ففي لحظة ما إذا أشار مقياس السرعة لسيارة إلى ٨٠ فإن هذا يعني أن السيارة في تلك اللحظة تسير بسرعة ٨٠ كيلومتراً في الساعة. ولو حافظت السيارة على هذه السرعة ثابتة لمدة ساعة فإنها ستقطع ٨٠ كيلومتراً. غير أننا لو تابعنا مقياس السرعة لفترة زمنية سنجد أن سرعة السيارة تختلف من لحظة لأخرى، فقد تزيد أحياناً وتنقص أحياناً أخرى. وإذا قسمنا المسافة التي قطعتها السيارة عند نهاية الرحلة على الزمن الذي استغرقته في قطع هذه المسافة فإننا نحصل على ما يسمى معدل السرعة. فإذا كان معدل سرعة سيارة في قطع مسافة ما يساوي ٩٠ كيلومتراً/ ساعة فإن هذا لا يعني أن السيارة كانت تسير بسرعة منتظمة وثابتة وهي ٩٠ كم/ ساعة، بل كانت تسير بسرعات مختلفة أثناء الرحلة.

والمعدل ٩٠ كم/ ساعة يصبح معناه أننا لو افترضنا سيارة تسير بسرعة ثابتة وهي ٩٠ كم/ساعة فإنها ستقطع المسافة نفسها وفي الزمن نفسه.

وبالعودة إلى السؤال (١):

معدل سرعة أحمد في أول عشر دقائق = $\frac{\text{٤ كيلومترات}}{\text{١٠ دقائق}}$ = ٠,٤ كم/دقيقة

أي أنه كان يقطع في المتوسط ٠,٤ كيلومتر كل دقيقة.

ومعدل سرعته في الدقائق الخمس التالية = $\frac{\text{٢ كيلومتر}}{\text{٥ دقائق}}$ = ٠,٤ كم/دقيقة

وبمقارنة المعدلين نجد أنهما متساويان.

إذن، **فالعبارة الثانية هي الصحيحة.**

وفي السؤال (٢):

بالتعويض في العلاقة: المسافة = معدل السرعة × الزمن

نجد أن ٦ كم = ١٨ كم/ ساعة × الزمن بالساعات

إذن الزمن الذي احتاجه أحمد للوصول إلى بيت عمته = $\frac{\text{٦ كم}}{\text{١٨كم/ساعة}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ساعة

= $\frac{\text{١}}{\text{٣}} \times$ ٦٠ دقيقة

= ٢٠ دقيقة

إذن **فالعبارة الأولى هي الصحيحة**.

وبالنسبة إلى السؤال (٣):

المسافة المقطوعة كلها (ذهاباً وإياباً) = ٤ + ٣

= ٧ كيلومترات

والزمن الذي استغرقه أحمد (ذهاباً وإياباً) = ٩ + ٦

= ١٥ دقيقة

إذن معدل سرعة أحمد في الرحلة كلها = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

= $\frac{\text{٧ كيلومترات}}{\text{١٥ دقيقة}}$

= $\frac{\text{٧ كيلومترات}}{\frac{\text{١٥}}{\text{٦٠}}\text{ ساعة}}$

= ٧ × $\frac{\text{٦٠}}{\text{١٥}}$ كيلومتر/ ساعة

= ٢٨ كيلومتر/ ساعة

سؤال مشابه: زيارة محمية طبيعية

تفتح محمية طبيعية أبوابها للجمهور خمسة أيام في الأسبوع من الأحد إلى الخميس، وتغلق أبوابها يومي الجمعة والسبت.

سؤال (١): زار المحمية في أربعة أسابيع ٨٦٤٨٠٠ شخصاً. ما المتوسط التقريبي لعدد الأشخاص الذين زاروا المحمية في اليوم الواحد؟

أ- ٤٣٢٤
ب- ٢٨٩٣
ج- ٤٣٢٤٠
د- ٢٨٩٣٠
ه- ٢١٦٢٠٠

سؤال (٢): تبعد المحمية عن بيت سعيد ١٠,٥ كيلومتر؛ وتغلق أبوابها عند الساعة الثالثة مساءً.

يقدر سعيد أنه يستطيع الذهاب إلى المحمية سيراً على الأقدام بسرعة متوسطة قدرها ٣,٥ كيلومتر في الساعة، ويقضي في المحمية ٣ ساعات ثم يعود مع صاحبه على دراجته بسرعة متوسطة قدرها ٧كم/ ساعة.

باستعمال هذه التقديرات للسرعات:

أ) ما آخر وقت يمكن أن يبدأ منه سعيد رحلته حتى يتمكن من العودة إلى بيته عند الساعة الرابعة مساءً؟

ب) ما آخر وقت يمكن أن يبدأ منه سعيد وصاحبه رحلة العودة؟

ج) حمل سعيد معه عداد الخُطى ليعرف عدد خطواته من بيته حتى المحمية. أظهر عداد الخُطى أن سعيد قد سار ٢٦٢٥٠ خطوة في رحلة الذهاب إلى المحمية. قدر متوسط طول خطوة سعيد أثناء ذهابه إلى المحمية بالسنتمترات.

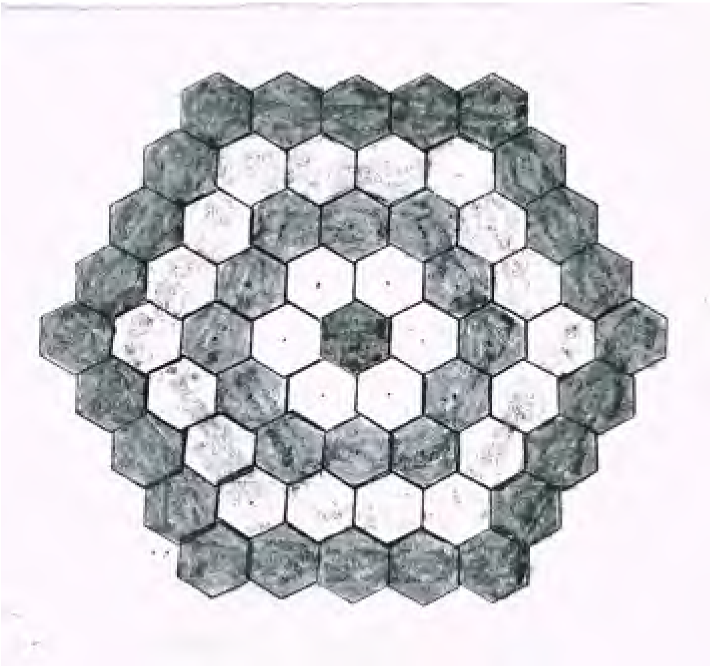
خلية النحل

سؤال: خلية النحل

إذا نظرت لقرص الشمع في خلية نحل ترى نمطاً من الأشكال السداسية المنتظمة. في مركزه شكل سداسي منتظم، تحيط به ٦ أشكال سداسية. ويحيط بهاتين الحلقتين حلقة ثالثة تتألف من ١٢ شكلاً سداسياً.

وإذا رمزنا لعدد الأشكال السداسية في أول س من الحلقات بالرمز ع (س) فإن:

$$ع\,(س) = ٣\,س^{٢} - ٣\,س + ١$$



١) ما عدد الأشكال السداسية في أول ١٠ حلقات؟

٢) ما عدد الأشكال السداسية في أول ٩ حلقات؟

٣) ما عدد الأشكال السداسية في الحلقة العاشرة؟

٤) جد علاقة تحدد عدد الأشكال السداسية في الحلقة ن؟

العلاج: يمكن أن يعالج مثل هذا السؤال بطريقتين:

الطريقة الأولى: نجد أولاً إجابة الفرع (١) بالتعويض المباشر.

ع (١٠) = ٣ × ١٠^{٢} – ٣ × ١٠ + ١

= ٣٠٠ – ٣٠ + ١

= ٢٧١ شكلاً سداسياً في أول ١٠ حلقات

ثم نجد إجابة الفرع (٢) بالتعويض المباشر

ع (٩) = ٣ × ٩^{٢} – ٣ × ٩ + ١

= ٢٤٣ – ٢٧ + ١

= ٢١٧ شكلاً سداسياً في أول ٩ حلقات

ومن هاتين النتيجتين نجد إجابة الفرع (٣)

عدد الأشكال السداسية في الحلقة العاشرة = ع (١٠) – ع (٩)

= ٢٧١ – ٢١٧

= ٥٤ شكلاً سداسياً

وبتعميم الطريقة التي اتبعت في إجابة الفرع (٣) نجيب على الفرع (٤)

عدد الأشكال السداسية في الحلقة ن = ع (ن) – ع (ن – ١) حيث ن > ١

= (٣ ن^{٢} – ٣ ن + ١) – (٣ (ن – ١)^{٢} – ٣ (ن – ١) + ١)

= (٣ ن^{٢} – ٣ ن + ١) – (٣ ن^{٢} – ٦ ن + ٣ – ٣ ن + ٣ + ١)

= ٣ ن^{٢} – ٣ ن + ١ - ٣ ن^{٢} + ٦ ن – ٣ + ٣ ن – ٣ – ١

= ٦ ن – ٦

= ٦ (ن – ١)

الطريقة الثانية: تنظم المعلومات المستخلصة من الشكل في جدول كالتالي لاستنتاج قاعدة لعدد الأشكال السداسية في الحلقات وتعميمها لإجابة الفرع (٤) ومنها نجيب الفرع (٣).

رقم الحلقة س	عدد الأشكال في أول س من الحلقات = ٣س^{٢}-٣س+١	عدد الأشكال في الحلقة س
١	١	١
٢	٧	٦=٦×١=٦(٢-١)
٣	١٩	١٢=٦×٢=٦(٣-١)
٤	٣٧	١٨=٦×٣=٦(٤-١)
٥	٦١	٢٤=٦×٤=٦(٥-١)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
ن	٣ ن^{٢}-٣ن+١	٦(ن-١)

فإذا رمزنا لعدد الأشكال السداسية في الحلقة ن بالرمز ل (ن) فإن:

ل (ن) = ٦ (ن - ١) حيث ن > ١

ومن هذه القاعدة نجيب عن الفرع (٣):

ل (١٠) = ٦(١٠ - ١)

= ٥٤ شكلاً سداسياً في الحلقة العاشرة.

تهدف مناقشة مثل هذا السؤال إلى تنمية قدرة الطالب للاستنتاج والتعميم وتشكيل الأنماط واستنتاج قاعدتها.

سؤال مشابه - مدرج روماني

يبين الرسم أدناه رسماً توضيحياً لمدرج روماني.

الصف رقم ١ هو الأقرب إلى المنصة. والصف رقم ١٠ هو الأبعد عن المنصة. وكلما كان الصف أبعد كان عدد مقاعده أكبر.

يمكن حساب عدد المقاعد في أي صف باستعمال الصيغة الآتية:

ع = ٦ ن + ٢٤   حيث ع عدد المقاعد في الصف ن

سؤال (١): مدرج روماني.

ما عدد المقاعد في الصف ٦؟

عدد المقاعد: ______________________

سؤال (٢): مدرج روماني.

يُضاف مقعدان في كل ممر لكل صف عند الحاجة. أكتب الصيغة الجديدة التي تُحدد عدد المقاعد في كل صف.

____

سؤال (٣): مدرج روماني.

جد صيغة لعدد المقاعد في أول ن من الصفوف.

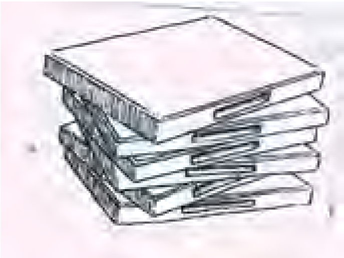
____

الأقراص المدمجة

يعمل جمال في شركة لتأجير الأقراص المدمجة DVDs وألعاب الكمبيوتر.

الاشتراك السنوي في هذه الشركة ١٠ دنانير.

أجرة تأجير القرص للأعضاء أقل من أجرة تأجيره لغير الأعضاء كما هو موضح في الجدول التالي:



أجرة تأجير القرص الواحد لغير الأعضاء	أجرة تأجير القرص الواحد للأعضاء
٣,٢ دينار	٢,٥ دينار

سؤال (١): كان توفيق مشتركاً في هذه الشركة في السنة الماضية.

دفع توفيق في تلك السنة ٥٢,٥ ديناراً شاملة رسم الاشتراك.

كم كان سيدفع توفيق لو لم يكن عضواً مشتركاً واستأجر العدد نفسه من الأقراص؟

____

____

____

المبلغ الذي سيدفعه توفيق: ______________________

سؤال (٢): ما أقل عدد من الأقراص يحتاج العضو المشترك لاستئجارها ليغطي رسم الاشتراك؟ وضح خطوات عملك.

____

____

____

____

العلاج: يتضمن هذا السؤال حساب أعداد في مواقف من واقع الحياة والمقارنة بينها. أي أنه يحتاج لحله توظيف بعض المعارف الحسابية أو إيجاد نموذج جبري يعبر عن الموقف وحله.

السؤال الأول: يمكن أن يحل حسابياً ويمكن أن يحل جبرياً.

حل حسابي: أجرة استئجار الأقراص = ٥٢,٥٠ – ١٠

= ٤٢,٥٠ دينار

وبما أن أجرة استئجار القرص الواحد للمشترك = ٢,٥٠ دينار

فإن عدد الأقراص التي استأجرها توفيق = ٤٢,٥٠ ÷ ٢,٥٠

= ١٧ قرصاً

ولو كان توفيق غير مشترك في الشركة فإنه سيدفع أجرة لهذا العدد من الأقراص مبلغاً يساوي ١٧ × ٣,٢٠ = ٥٤,٤٠ ديناراً

حل جبري: نفرض أن عدد الأقراص المستأجرة ن قرصاً فيكون

المبلغ الذي سيدفعه العضو المشترك م = ١٠ + ٢,٥ ن ... (I)

المبلغ الذي سيدفعه غير المشترك مَ = ٣,٢٠ ن ... (II)

وفي حالة توفيق كعضو مشترك: ٥٢,٥٠ = ١٠ + ٢,٥ ن

٤٢,٥٠ = ٢,٥ ن

إذن ن = ١٧ قرصاً استأجرها توفيق في السنة الماضية

ولوكان توفيق غير مشترك فإنه سيدفع مبلغاً = ٣,٢٠ × ١٧

= ٥٤,٤٠ ديناراً

ومناقشة حل هذا السؤال ومثيلاته بطرق متنوعة ينمي لدى الطالب القدرة على توظيف المعرفة الرياضية لمعاجة مواقف من واقع الحياة. كما يعزز لدى الطالب تكامل المعرفة الرياضية.

ويمكن أن توجه الأسئلة التالية للوصول إلى الحل الأول:

كم ديناراً دفع توفيق أجرةً لاستئجار الأقراص؟

الجواب: ٥٢,٥٠ ــ ١٠ = ٤٢,٥٠ ديناراً

ما أجرة استئجار القرص الواحد للمشترك؟

الجواب: ٢,٥٠ ديناراً

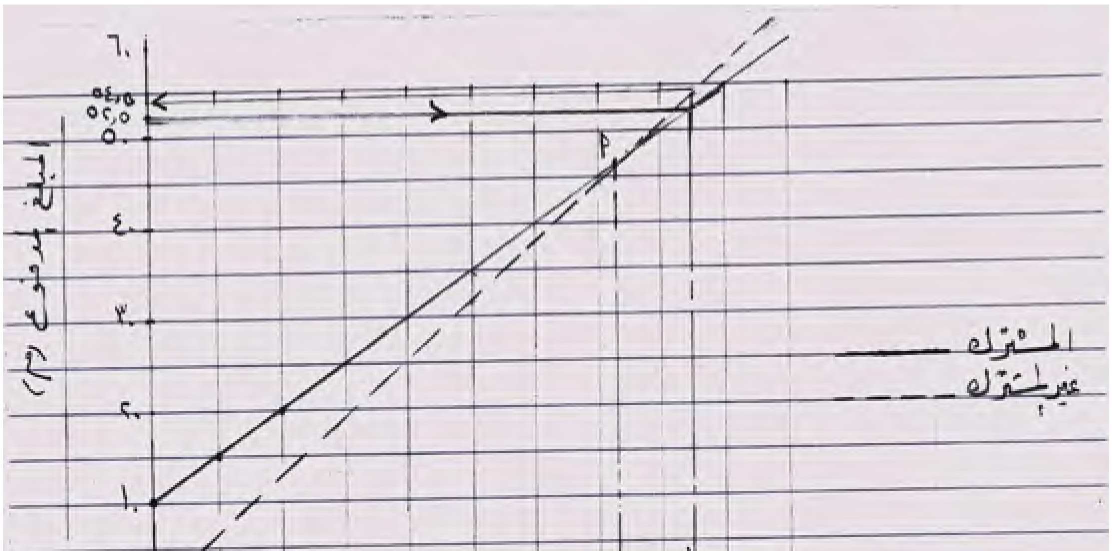
ما عدد الأقراص التي استأجرها توفيق؟

الجواب: ٤٢,٥٠ ÷ ٢,٥٠ = ١٧ قرصاً

إذا لم يكن توفيق عضواً مشتركاً، فكم ديناراً كان سيدفع لقاء استئجار هذا العدد من الأقراص؟

الجواب: ١٧ × ٣,٢٠ = ٥٤,٤٠ ديناراً

كما يمكن حله هندسياً برسم بياني العلاقتين (I) ، (II) وتوظيفهما في الإجابة عن السؤال.



ولمعرفة عدد الأقراص التي استأجرها توفيق نرسم من التدريج ٥٢,٥٠ على محور المبالغ (م) خطاً يوازي محور (ن) ليقطع بيان العضو المشترك في نقطة. ننزل منها عموداً على محور ن فيقطعه عند التدريج ١٧ وهو عدد الأقراص التي استأجرها توفيق.

ولمعرفة المبلغ الذي سيدفعه توفيق لو لم يكن عضواً مشتركاً. نجد قيمة (م) المقابلة عندما

ن = ١٧ فنجدها ٥٤,٤٠ ديناراً

السؤال الثاني: أيضاً يمكن حله بطرق عدة.

حل حسابي: يوفر العضو المشترك في كل قرص يستأجره مبلغاً = ٣,٢٠ – ٢,٥٠

= ٠,٧٠ ديناراً

وحتى يوفر رسم الاشتراك عليه أن يستأجر عدداً من الأقراص يساوي

١٠ ÷ ٠,٧٠

= $\frac{٢}{٧}$ ١٤ = ١٥ قرصاً

أي أن أقل عدد من الأقراص يحتاج العضو المشترك لاستئجارها ليغطي رسم الاشتراك هو ١٥ قرصاً.

حل جبري: نضع م = مَ ونحل المعادلة

١٠ + ٢,٥ ن = ٣,٢ ن

١٠ = ٠,٧٠ ن

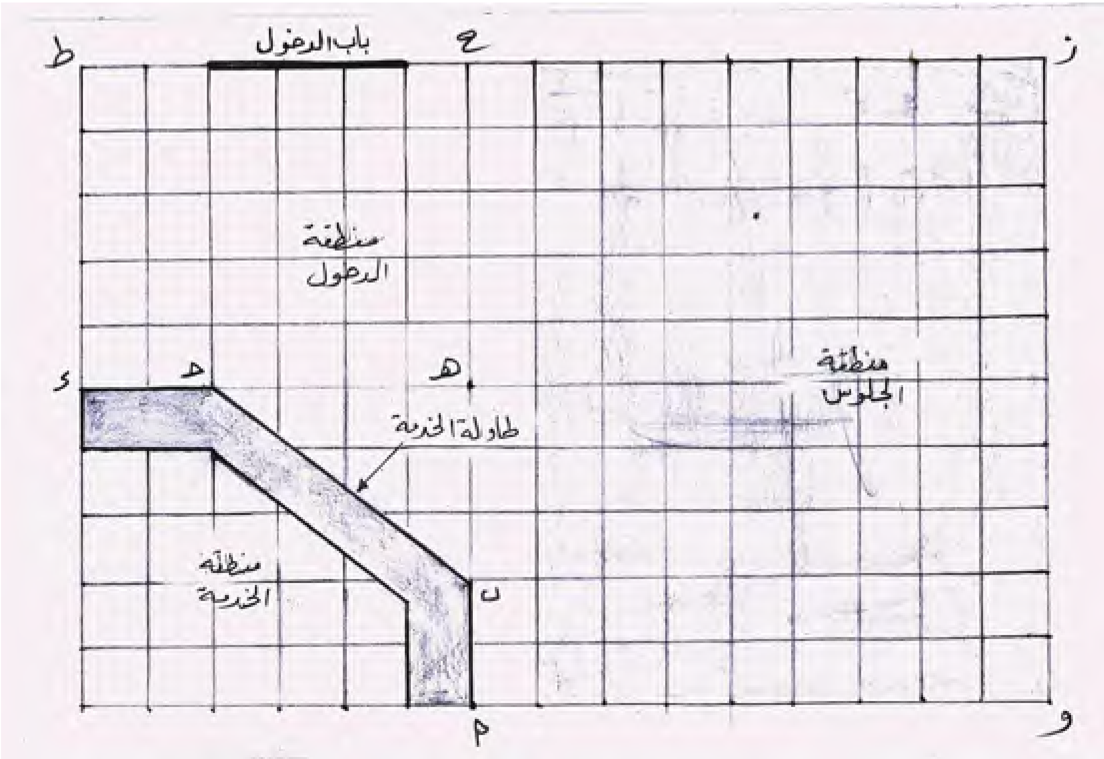
ومنها ن = $\frac{٢}{٧}$ ١٤ = ١٥ قرصاً

حل هندسي: الحل المطلوب هو قيمة ن المقابلة لنقطة تقاطع الخطين البيانيين.

مقـهى

الرسم أدناه مخطط أرضي لأحد المقاهي. يريد صاحبه أسعد أن يجدد فيه.

صالة الخدمة محاطة بكاونتر الخدمة.

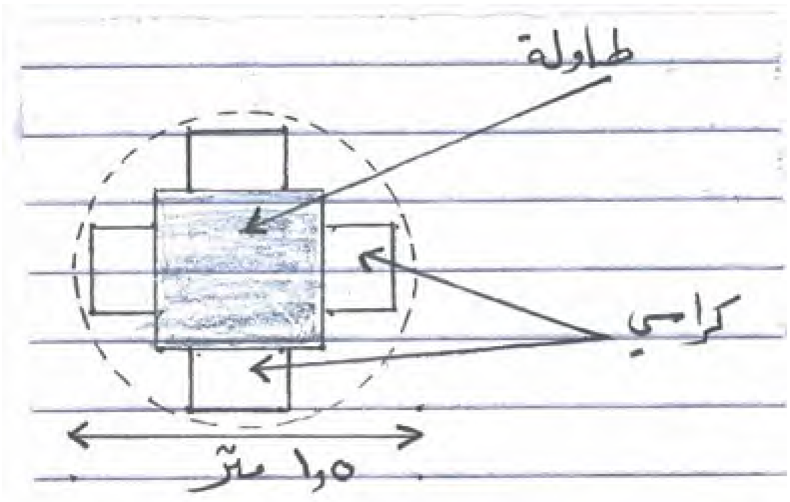


ملاحظة: كل مربع على الشبكة يمثل ٠,٥ متر × ٠,٥ متر

سؤال (١): يريد أسعد أن يضع حاجزاً جديداً على امتداد الحافة الخارجية لطاولة الخدمة. ما طول هذا الحاجز؟ وضع خطوات عملك.

سؤال (٢): يريد أسعد أيضاً أن يغطي أرضية المقهى بالموكيت باستثناء منطقة الخدمة وطاولة الخدمة. ما مساحة المنطقة التي ستغطى بالموكيت؟ وضح خطوات عملك؟

سؤال (٣):



يريد أسعد أن يضع طاولات مع كل منها أربعة كراسي كما في الشكل أعلاه. تمثل الدائرة المنقطة المنطقة اللازمة للطاولة والكراسي. ومن أجل أن يجد الزبائن مساحة كافية عندما يجلسون، ستوضع كل طاولة وكراسيها (كما هو واضح في الدائرة) وفقاً للمحددات التالية:

- كل طاولة يجب أن توضع على مسافة ٠,٥ متر على الأقل من الجدران
- كل طاولة يجب أن توضع على مسافة ٠,٥ متر على الأقل من الطاولات الأخرى.

ما أكبر عدد من الطاولات يمكن وضعها في منطقة الجلوس المظللة؟

____

____

____

____

عدد الطاولات: ______________________

العلاج: أسئلة هذا القسم تتضمن فكرتين أساسيتين:

- مقياس الرسم
- علاقات رياضية: نظرية فيثاغورس، مساحات مناطق مضلعة، مساحة المنطقة الدائرية

وتوظيفهما لإيجاد عدد الدوائر التي تتوافق مع منطقة مضلعة.

السؤال الأول: الحافة الخارجية لطاولة الخدمة مكونة من ثلاثة أجزاء:

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$

وطول الحافة الخارجية يساوي مجموع أطوال هذه الأجزاء.

أ ب = ٢ × ٠,٥ = ١ متر

جـ د = ٢ × ٠,٥ = ١ متر

ولحساب ب جـ ننظر للمثلث القائم الزاوية ب هـ جـ فيه:

ب هـ = ٣ × ٠,٥ = ١,٥ متر

هـ جـ = ٤ × ٠,٥ = ٢ متر

إذن ب جـ^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (هـ جـ)^{٢}

= ٢,٢٥ + ٤

= ٦,٢٥

= ٢,٥ متر

إذن طول الحاجز = أ ب + ب جـ + جـ د

= ١ + ٢,٥ + ١

= ٤,٥ متر

والسؤال الثاني: يتطلب حساب مساحة منطقة مضلعة. فالمنطقة التي ستغطى بالموكيت تشمل منطقة الجلوس ومنطقة الدخول.

وسنجزؤها إلى : المنطقة أ و ز ح ، والمنطقة ح هـ د ط ، والمنطقة ب هـ جـ

المنطقة أ و ز ح مستطيلة طولها = ١٠ ×٠,٥ = ٥ أمتار

وعرضها = ٩ × ٠,٥ = ٤,٥ أمتار

فتكون مساحتها = ٥ × ٤,٥ = ٢٢,٥ متراً مربعاً

والمنطقة ح هـ د ط مستطيلة طولها = ٦ × ٠,٥ = ٣ أمتار

وعرضها = ٥ × ٠,٥ = ٢,٥ متر

فتكون مساحتها = ٣ × ٢,٥ = ٧,٥ متراً مربعاً

والمنطقة ب هـ جـ مثلثة يحدها مثلث قائم الزاوية في هـ

فتكون مساحتها = $\frac{١}{٢}$ ب هـ × هـ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١,٥ × ٢ = ١,٥ متراً مربعاً

إذن فمساحة المنطقة التي ستغطى بالموكيت = ٢٢,٥ + ٧,٥ + ١,٥

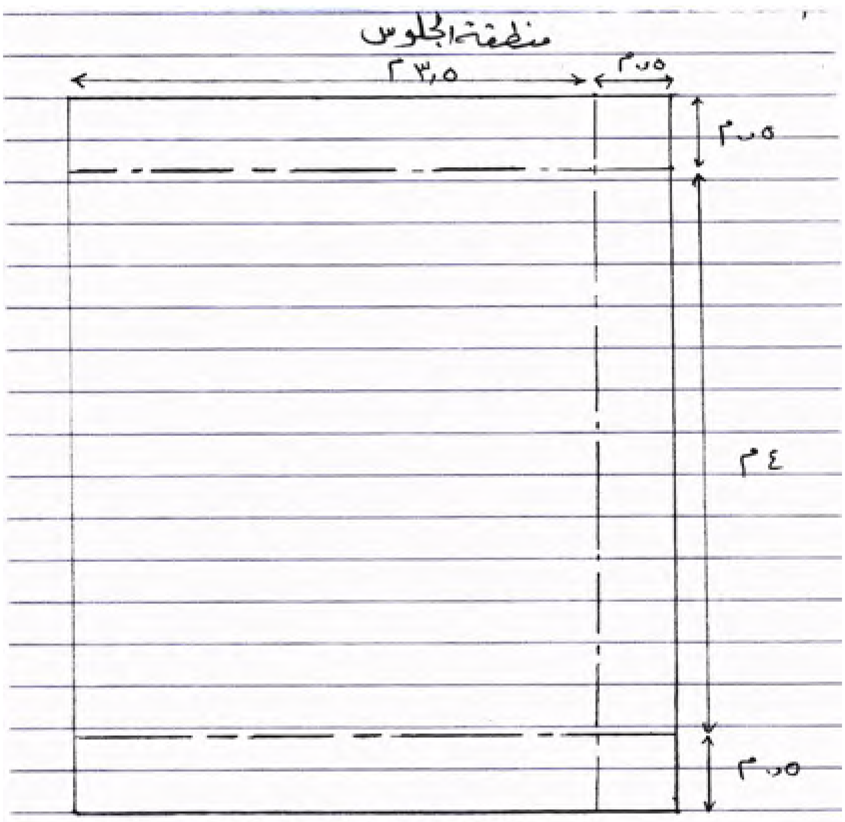
= ٣١,٥ متراً مربعاً

وبعد مناقشة الحل مع الطلبة يطرح السؤال التالي:

هل يمكن تجزئة المنطقة التي ستغطى بالموكيت بطريقة أخرى؟

يستمع المعلم إلى مقترحات الطلبة ويسجلها. ويمكن أن يطلب إلى الطلبة فرادى أو في مجموعات تنفيذ هذه المقترحات للتأكد على أن المساحة النهائية لا تتغير بتغير طريقة التجزئ.

السؤال الثالث:



عرضياً: كل صف يتسع لطاولتين فقط لأن المسافة العرضية المتاحة لوضع الطاولات ٣,٥ م.
وعرض منطقتي الطاولتين مع المسافة بينهما = ١,٥ + ٠,٥ + ١,٥

= ٣,٥ م

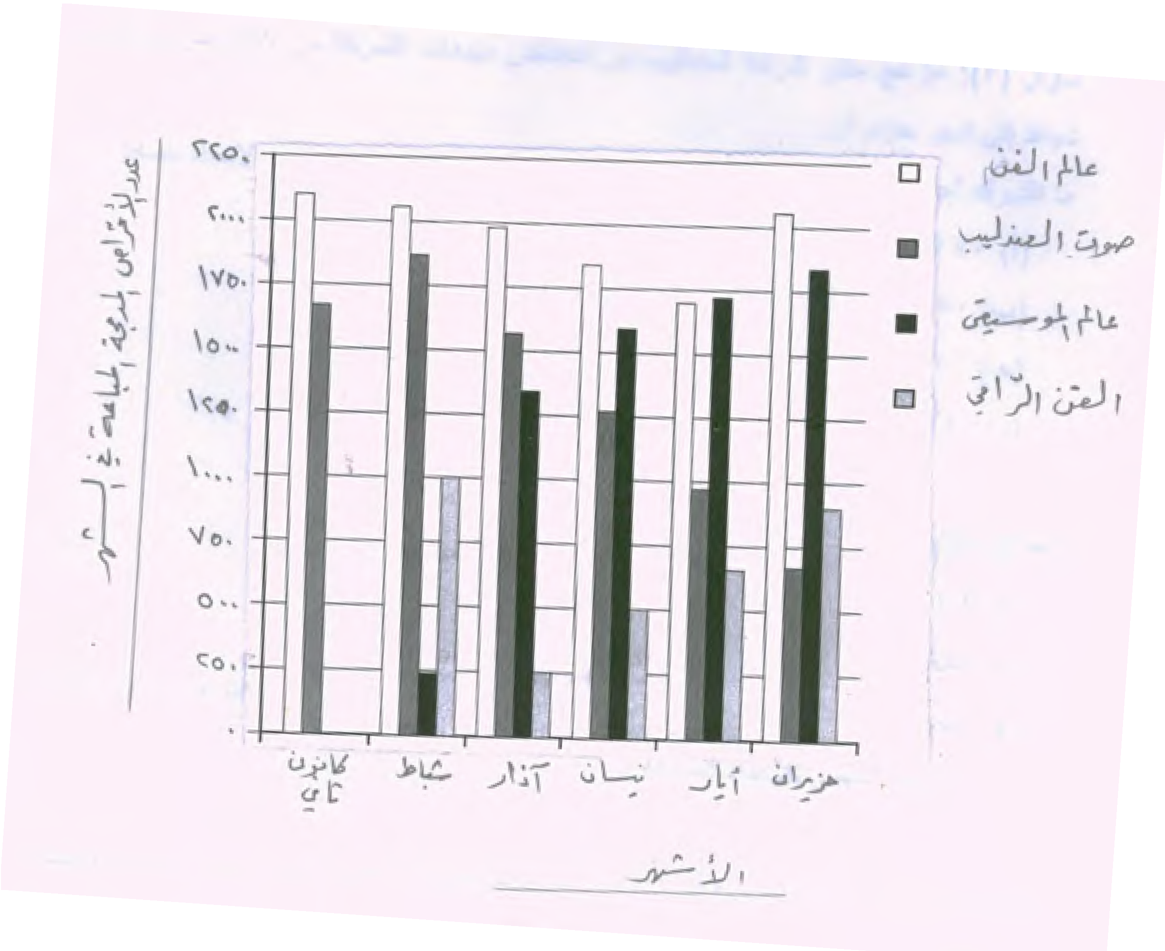
طولياً: كل صف يتسع لطاولتين أيضاً لأن المسافة الطولية المتاحة لوضع الطاولات ٤م.
وعرض منطقتي الطاولتين مع المسافة بينهما = ٣,٥م
والمسافة الباقية لا تتسع لطاولة ثالثة.

وهنا يجب تدريب الطلبة على الاستعانة بالرسم لتوضيح المسألة ومن ثم يساعد على الوصول لطريقة الحل.

لوحة الأعمدة

في كانون الثاني حصلت الشركتان عالم الفن وصوت العندليب على تصريح لإنتاج أقراص مدمجة CDs للموسيقى والأغاني وبيعها. وفي شهر شباط من العام نفسه تبعتهما الشركتان عالم الموسيقى والفن الراقي.

تبين لوحة الأعمدة التالية مبيعات الشركات الأربع من الأقراص من شهر كانون الثاني إلى شهر حزيران.



سؤال (١): ما عدد الأقراص التي باعتها شركة الفن الراقي في شهر نيسان؟

أ) ٢٥٠

ب) ٥٠٠

ج) ١٠٠٠

د) ١٢٧٠

سؤال (٢): في أي شهر فاقت مبيعات شركة عالم الموسيقى مبيعات شركة العندليب لأول مرة؟

أ) لم يحصل ذلك

ب) آذار

ج) نيسان

د) أيار

سؤال (٣): انزعج مدير شركة العندليب من انخفاض مبيعات الشركة من الأقراص من شهر شباط إلى شهر حزيران.

ما تقديرك لحجم مبيعات الشركة في شهر تموز إذا استمر انخفاض المبيعات بالاتجاه نفسه؟

أ) ٧٠ قرصاً

ب) ٣٧٠ قرصاً

ج) ٦٧٠ قرصاً

د) ١٣٤٠ قرصاً

العـلاج: تتناول هذه الأسئلة الأفكار التالية:

- قراءة لوحة أعمدة تمثل بيانات في فترات زمنية.
- المقارنة بين قيمتين من قيم البيانات في فترتين زمنيتين.
- تفسير لوحة أعمدة وتقدير عدد الأقراص التي ستباع مستقبلاً بافتراض استمرارية الاتجاه الخطي للأعداد المباعة.

ومن أجل اكتساب الطلبة مهارة في قراءة الرسومات البيانية لمجموعة من البيانات يُدرب الطلبة على ذلك وبصورة مستمرة، وعرض لوحة بيانية على الطلبة وطرح أسئلة حولها.

ومن المفيد أخذ رسومات بيانية مختلفة من الصحف اليومية والمحلات المتخصصة وعرضها على الطلبة وإجراء مناقشة حولها والإجابة عن أسئلة متنوعة حولها حتى ترتبط الأفكار الرياضية بالمواقف الحياتية، مثل؛ تطور الأسعار وإعداد السكان ودرجات الحرارة ... إلخ.
وفي هذا الموقف، تبين لوحة الأعمدة العلاقة بين فترات زمنية (الأشهر الستة) وعدد الأقراص المدمجة المباعة.

ففي **السؤال الأول** يُراد معرفة عدد الأقراص التي باعتها شركة الفن الراقي في شهر نيسان وبالنظر إلى شهر نيسان نحدد العمود الذي يمثل ما باعته هذه الشركة ونقرأ ارتفاعه على المحور الرأسي الذي يمثل عدد الأقراص المباعة فنجده ٥٠٠ قرص.

وبالنسبة **للسؤال الثاني** المطلوب معرفة الشهر الذي فاقت فيه مبيعات شركة عالم الموسيقى على مبيعات شركة العندليب. ومن أجل ذلك نتتبع مبيعات الشركتين عبر الأشهر بدءاً من شهر كانون ثاني فنجد:

- في شهر كانون ثاني لا وجود لشركة عالم الموسيقى
- وفي شهر شباط مبيعات شركة العندليب (حوالي ١٨٢٥ قرصاً) أكثر من مبيعات شركة عالم الموسيقى (حوالي ٢٤٠ قرصاً).

وهنا يمكن أن تُطرح أسئلة على الطلبة حول هذه المعلومات مثل:

- ما عدد الأقراص التي باعتها شركة العندليب في شهر شباط؟
- وما عدد الأقراص التي باعتها شركة عالم الموسيقى في شهر شباط؟
- أيهما أكثر مبيعات شركة العندليب أم مبيعات شركة عالم الموسيقى؟

وفي شهر آذار تُطرح الأسئلة نفسها بالإضافة إلى:

- هل زادت مبيعات شركة العندليب في شهر آذار عما كانت عليه في شهر شباط أم نقصت؟
- وهل زادت مبيعات شركة عالم الموسيقى في شهر آذار عما كانت عليه في شهر شباط أم نقصت؟

وفي شهر نيسان يتم الوصول إلى أن:

مبيعات شركة عالم الموسيقى (حوالي ١٦٠٠ قرصاً) فاقت ولأول مرة مبيعات شركة العندليب (حوالي ١٢٦٠ قرصاً).

أما **السؤال الثالث** فإجابته تحتاج إلى إمعان في مبيعات الشركة من الأقراص في الأشهر من شباط إلى حزيران وملاحظة معدل الانخفاض الشهري في المبيعات:

الشهر	المبيعات	الانخفاض
شباط	١٨٧٥	ـــــــــــــ
آذار	١٥٧٥	٣٠٠
نيسان	١٢٧٥	٣٠٠
أيار	٩٧٥	٣٠٠
حزيران	٦٧٥	٣٠٠

وإذا استمر انخفاض المبيعات بالاتجاه الخطي نفسه فإن مبيعات الشركة في شهر تموز ستكون ٣٧٥ قرصاً.

حملة الشهادات الجامعية

يبين الجدول أدناه حملة الشهادات الجامعية في ٥ مدن في دولة ما.

			حملة الشهادات الجامعية			
	عدد السكان		عدد العاملين		عدد غير العاملين	
المدينة	كانون أول ٢٠٠٩	كانون أول ٢٠١٠	كانون أول ٢٠٠٩	كانون الأول ٢٠١٠	كانون الأول ٢٠٠٩	كانون الأول ٢٠١٠
أ	٣٠٨١١	٣٠٩١٦	٧١١٣	٧١٦٤	٢٢٠	٢٩٥
ب	٤٥٩٠١	٤٧٧٩٥	١٠٥٥٤	١١٠٢٨	٥٤١	٧٦٤
جـ	٣٣٠٨٢	٣٥٨٥٨	٧٧٩٨	٧٧٧٩	٤١٠	٥٨٢
د	١٥٤٢٩	١٦٥٩٢	٣٩٣٨	٤٠٣٥	١٧٧	٢٢٣
هـ	٥٥٠٨	٥٥٦٣	١٤٤٥	١٤٦٤	٦٧	٩٠

سؤال (١): في أي المدن كان عدد حملة الشهادات الجامعية غير العاملين أكبر في كانون أول لعام ٢٠١٠؟

المدينة: ____________________________

النتيجة: رغم بساطة السؤال كانت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن السؤال إجابة صحيحة ٦٦,٧٪ وهي نسبة منخفضة خاصة إذا ما قورنت بنسبة طلبة الدول المشاركة والبالغة ٨٦,٥٦٪

سؤال (٢): كم كان عدد حملة الشهادات الجامعية في المدينة ب في كانون أول عام ٢٠٠٩؟

عدد حملة الشهادات الجامعية في ٢٠٠٩: ____________________________

النتيجة: بلغت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن السؤال إجابة صحيحة ١٢,٣٦٪ ، في حين بلغت نسبة طلبة الدول المشاركة ٣٠,٣٣٪

سؤال (٣): هل العبارات الآتية صحيحة بناءً على هذه البيانات؟

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" في كل حالة.

العبارة	هل هذه العبارة صحيحة؟
لقد زاد عدد العاملين من حملة الشهادات الجامعية في جميع المدن بين كانون أول ٢٠٠٩ وكانون أول ٢٠١٠	نعم / لا
في كانون أول ٢٠١٠ كان عدد حملة الشهادات الجامعية في المدينة هو أكثر من ربع عدد السكان	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا فقرة واحدة إجابة صحيحة ٥١,٢٥٪ في حين كانت نسبة طلبة الدول المشاركة ٣٠,٨٤٪ . أما نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا الفقرتين إجابة صحيحة فقد بلغت ٤١,٨٤٪ مقارنة بنسبة طلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٦٤,٢٢٪

سؤال (٤): استعمل الجدول أعلاه للإجابة على السؤال الآتي:

في أي مدينة من المدن أ أو ب أو د أو هـ كانت نسبة حملة الشهادات الجامعية الأقل في كانون أول عام ٢٠١٠؟

(أ) المدينة أ

(ب) المدينة ب

(جـ) المدينة د

(د) المدينة هـ

النتيجة: كانت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا السؤال إجابة صحيحة ٢٢,٥٦٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة بنسبة طلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٤٧,٣١٪

العلاج:تتناول هذه الأسئلة الأفكار التالية:

- قراءة جدول بيانات واستخلاص المعلومات المطلوبة.
- إيجاد قيمة الصواب لعبارة اعتماداً على البيانات الواردة في الجدول.
- إيجاد النسبة المئوية (أو النسبة) لمجموعة جزئية من المجتمع.

ففي **السؤال الأول،** يبدأ المعلم بتوجيه أسئلة حول ما تمثله الأعمدة المختلفة إلى أن يصل إلى عمود حملة الشهادات الجامعية غير العاملين لعام ٢٠١٠ ويربط ذلك بالسؤال ليبدأ الطلبة في إيجاد أكبر عدد في ذلك العمود.

وفي **السؤال الثاني،** يوجه المعلم سؤالاً حول المطلوب من السؤال؛ هل هو عدد حملة الشهادات الجامعية العاملون أو غير العاملين أو كلاهما. وبعد أن يستمع لإجابات الطلبة وتبريراتهم يطلب منهم إيجاد عدد حملة الشهادات الجامعية العاملين وغير العاملين في المدينة ب لعام ٢٠٠٩.

وفي **السؤال الثالث،** تتناول العبارة الأولى المقارنة بين عدد العاملين من حملة الشهادات الجامعية في جميع المدن بين عامي ٢٠٠٩ و ٢٠١٠. وربط ذلك بمفهوم المسورة كلياً ومتى تكون خطأ. ليتوصل إلى خطأ العبارة لأن عدد العاملين من حملة الشهادات الجامعية في المدينة جـ قد نقص من عام ٢٠٠٩ لعام ٢٠١٠.

أما العبارة الثانية فتتطلب إيجاد نسبة عدد حملة الشهادات الجامعية العاملين وغير العاملين في المدينة هـ وهل تزيد أم تقل عن الربع.

فعدد حملة الشهادات الجامعية = ١٤٦٤ + ٩٠

= ١٥٥٤

ونسبتهم في تلك المدينة = $\frac{١٥٥٤}{٥٥٦٣}$

إذن فالعبارة صحيحة.

وفكرة **السؤال الرابع** هي فكرة السؤال الثالث ولكن لجميع المدن ثم المقارنة بين هذه النسب وتحديد النسبة الأصغر.

الكميات

السباحة

سؤال: زمن السباحة

تنافس ثمانية سباحين لمسافة ٥٠ متراً، وسجلت للسباحين الأزمان التالية بالثواني:

٣٥,٣ ٣٦,٠٧ ٣٦ ٣٧,٢ ٣٥,٤٥ ٣٧,٠٩ ٣٦,٠٢ ٣٥,٠٨

ما زمن خامس أسرع سباح؟ ضع دائرة حول الجواب الصحيح.

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة عن سؤال مشابه ٤٠,٨١٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة بنسبة الطلبة في الدول المشاركة والتي بلغت ٧٢,٢٤٪

سؤال مشابه: رتب الأعداد التالية ترتيباً تنازلياً.

١٥,٤ ١٧,١٩ ١٦,٠٨ ١٦ ١٧,٢ ١٥,٣٨ ١٦,١٢ ١٥,٢٨٩

العـلاج: يعتمد حل هذا السؤال وأمثاله على فهم الطالب للقيم المنزلية في النظام العشري.

وأن الأصفار على يمين الجزء العشري تغير المعنى ولكنها لا تغير القيمة.

فمثلاً؛ ***العُشر*** ورمزه ٠,١ = ٠,١٠ أي عشرة أجزاء من مائة.

= ٠,١٠٠ أي مائة جزء من ألف ... وهكذا

ولمعرفة زمن خامس أسرع سباح، نرتب أزمان السباحين ترتيباً تصاعدياً. ونتبع الخطوات التالية:

١. نبدأ بمقارنة الأجزاء الصحيحة أولاً ونبدأ بالزمن الأقل وهي:

٣٥,٣ ٣٥,٤٥ ٣٥,٠٨

ونوحد عدد المنازل العشرية بإضافة أصفار إلى يمين الأجزاء الكسرية:

٣٥,٣٠ ٣٥,٤٥ ٣٥,٠٨

وبالنظر إلى الأجزاء العشرية نجد أن الزمن الأصغر هو ٣٥,٠٨ ثم ٣٥,٣٠ ثم ٣٥,٤٥

فالترتيب التصاعدي لهذه الأزمان هو:

٣٥,٠٨ ٣٥,٣٠ ٣٥,٤٥

٢. يأتي بعد ذلك الأزمان التي جزؤها الصحيح ٣٦ وهي:

٣٦,٠٧ ٣٦ ٣٦,٠٢

ونوحد عدد المنازل العشرية:

٣٦,٠٧ ٣٦,٠٠ ٣٦,٠٢

وترتيبها التصاعدي هو:

٣٦,٠٠ ٣٦,٠٢ ٣٦,٠٧

٣. والأزمان التي جزؤها الصحيح ٣٧ هي:

٣٧,٢ ٣٧,٠٩

نوحد عدد المنازل العشرية:

٣٧,٢٠ ٣٧,٠٩

وترتيبها التصاعدي هو:

٣٧,٠٩ ٣٧,٢٠

إذن، فالترتيب التصاعدي لأزمان السباحين الثمانية هو:

٣٥,٠٨ ٣٥,٣ ٣٥,٤٥ ٣٦ ٣٦,٠٢ ٣٦,٠٧ ٣٧,٠٩ ٣٧,٢

وزمن **خامس** أسرع سباح هو ٣٦,٠٢ ثانية.

بيع الصحف

يوجد في مدينة ما صحيفتان يوميتان تحاولان توظيف بائعين: يبين الملصقان الإعلانيان أدناه كيف يدفعان للبائعين.

جريدة النجمة	جريدة الصباح
تحتاج لنقود أكثر؟ قم ببيع جريدتنا سيُدفع لك: ٠,٢٠ دينار عن كل نسخة لأول ٢٤٠ نسخة تبيعها في الأسبوع، إضافة إلى ٠,٤٠ دينار عن كل نسخة إضافية تبيعها.	أترغب بعمل مدفوع الأجر ويحتاج منك لوقت قليل؟ قم ببيع جريدة الصباح لقاء ٦٠ دينار كل أسبوع بالإضافة إلى ٠,٥٠ دينار عن كل نسخة تبيعها

سؤال (١): يبيع فؤاد في المتوسط ٣٥٠ نسخة من جريدة النجمة كل أسبوع.

كم ديناراً يكسب كل أسبوع في المتوسط؟

____

____

يكسب فؤاد في المتوسط كل أسبوع: ______________ ديناراً

سؤال (٢): يبيع كريم جريدة الصباح، كسب في أحد الأسابيع ٧٤ ديناراً.

كم نسخة باع في ذلك الأسبوع؟

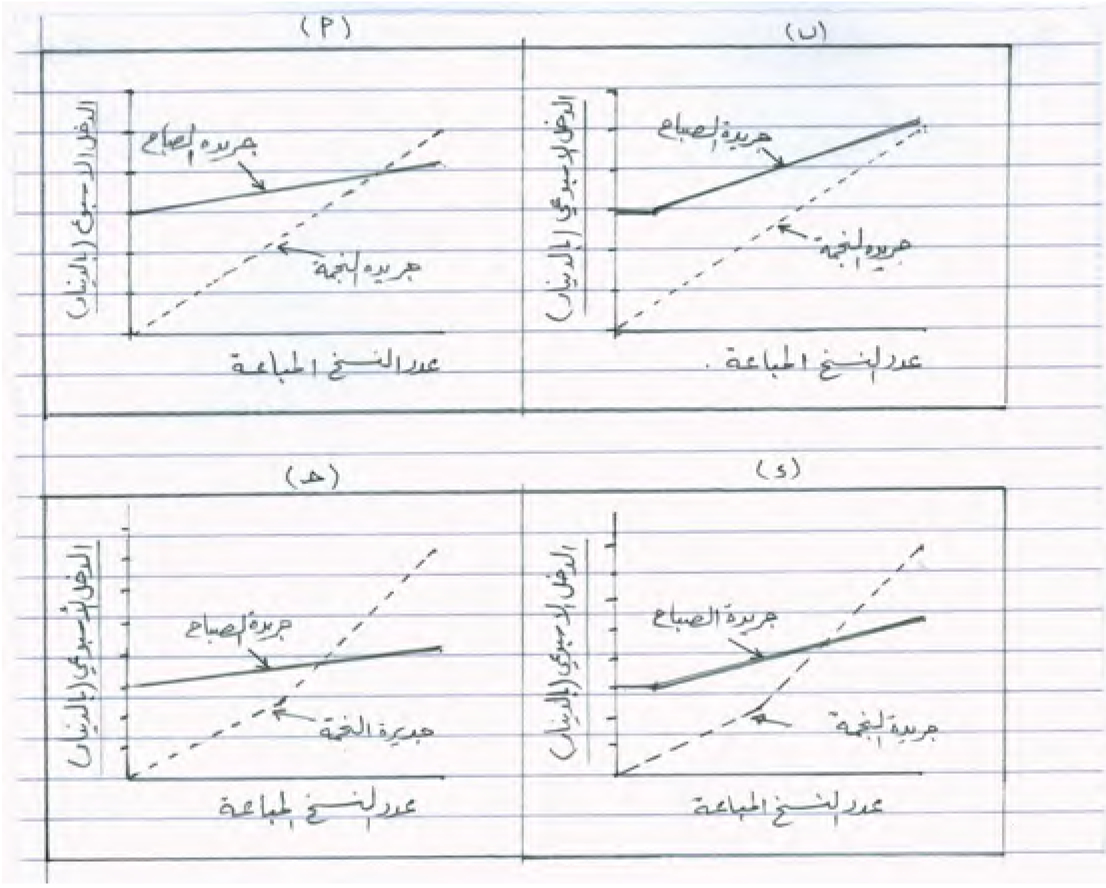
____

____

عدد النسخ التي باعها كريم في ذلك الأسبوع: ______________ نسخة

سؤال (٣): قرر جميل أن يقدم طلباً للعمل كبائع صحف. وعليه أن يختار التقدم لجريدة النجمة أم لجريدة الصباح.

أي رسم بياني من الرسومات الآتية يمثل ما تدفعه الصحيفتان للبائعين؟ ضع دائرة حول أ أو ب أو جـ أو د.



العــلاج: يدور السؤال الأول حول قدرة الطالب على تعيين نموذج رياضي يُعبر عن موقف من واقع الحياة لحساب عدد ما.

فعدد النسخ التي يبيعها فؤاد = ٣٥٠ نسخة

منها ٢٤٠ نسخة مقابل ٠,٢٠ دينار عن كل نسخة

والباقي ١١٠ نسخ مقابل ٠,٤٠ دينار عن كل نسخة

إذن فمقدار ما يكسبه فؤاد في المتوسط كل أسبوع = ٢٤٠ × ٠،٢٠ + ١١٠ × ٠,٤٠

= ٤٨ + ٤٤

= ٩٢ ديناراً

ويمكن توظيف مثل هذا السؤال لتدريب الطلبة وإكسابهم مهارة في إيجاد صيغة جبرية تعبر عن علاقة بين متغيرين.

فإذا رمزنا لعدد النسخ التي يبيعها فؤاد في الأسبوع بالرمز س ولمقدار ما يكسبه في الأسبوع بالرمز م

فإن م = {
٠،٢ س ، إذا كانت س ≤ ٢٤٠
٠,٢ × ٢٤٠ + ٠,٤ (س – ٢٤٠) ، إذا كانت س > ٢٤٠

= {
٠,٢ س ، إذا كانت س ≤ ٢٤٠ ـ ـ ـ ـ ـ (أ)
٠,٤ س – ٤٨ ، إذا كانت س > ٢٤٠

ثم توظف هذه العلاقة لإجابة السؤال

م $_{\text{س}=٣٥٠}$ = ٠,٤ × ٣٥٠ – ٤٨

= ١٤٠ – ٤٨

= ٩٢ ديناراً

وبالنسبة **للسؤال الثاني،**

إذا رمزنا لعدد النسخ التي يبيعها كريم في الأسبوع بالرمز س ولمقدار ما يكسبه في الأسبوع بالرمز م

فإن

م = ٦٠ + ٠,٠٥ س ـــــــ (II)

وبما أن كريم كسب في ذلك الأسبوع مبلغ ٧٤ ديناراً فإن

٧٤ = ٦٠ + ٠,٠٥ س

٠,٠٥ س = ١٤

س = $\frac{١٤}{٠,٠٥}$

= ٢٨٠ نسخة باعها كريم في ذلك الأسبوع

ويقيس **السؤال الثالث** قدرة الطالب على تعيين النموذج الرياضي الصحيح عندما تمثل علاقتان خطيتان بيانياً.

فبالنسبة للعلاقة (I) سيكون بيانها مكوناً من قسمين:

الأول على الفترة [٠ ، ٢٤٠] حيث م = ٠,٢ س وهو بيانٌ خطي ميله ٠,٤

والثاني على الفترة (٢٤٠ ، ∞) حيث م = ٠,٤ س – ٤٨ وهو بيان خطي ميله ٠,٤ وهو أشد صعوداً من القسم الأول.

ومن الممكن دراسة اتصال العلاقة عند س = ٢٤٠

ولذلك فإن منحنى هذه العلاقة ممثل في الرسمين جـ ، د

وعلى هذين الرسمين ندرس بيان العلاقة (II) حيث:

م = ٦٠ + ٠,٠٥ س

وهي علاقة خطية بيانها خط مستقيم ميله ٠,٠٥ وهو متوفر في الرسم جـ.

إذن، فالرسم البياني جـ يمثل ما تدفعه الصحيفتان للبائعين.

لاحظ أن طريقة الاستبعاد قد وظفت في هذا السؤال، حيث تم استبعاد الرسمين أ ، ب عند دراسة العلاقة (I).

وعند دراسة العلاقة (II) تم استبعاد الرسم د.

وبذلك لم يبقَ إلا الرسم (جـ)

دفع أثمان المشتريات

خرج خالد من بيته إلى السوق يحمل نوعين من الأوراق النقدية؛ أوراق نقد فئة ٢٠ ديناراً. وأوراق نقد فئة ٥٠ ديناراً.

الجدول الآتي يبين الأشياء التي اشتراها خالد وأثمانها.

السلعة	الثمن
مستلزمات مدرسية	٣٠ ديناراً
دراجة هوائية	١٣٠ ديناراً
هاتف خلوي	٢٤٠ ديناراً
ثلاجة	١٣١٠ دنانير

سؤال (١): هل يستطيع خالد أن يدفع كلاً من المبالغ المذكورة أعلاه باستعمال ما لديه من أوراق نقد فقط، ودون حاجة لاسترداد باق من الباعة؟

ضع دائرة حول كلمة "نعم" أو "لا" مقابل كا واحد من المبالغ المبينة في الجدول أدناه.

المبلغ	هل يمكن لخالد دفع هذا المبلغ باستعمال الأوراق النقدية لديه؟
٣٠ ديناراً	نعم / لا
١٣٠ ديناراً	نعم / لا
٢٤٠ ديناراً	نعم / لا
١٣١٠ دنانير	نعم / لا

النتيجة: كانت النسب المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابات صحيحة عن أجزاء سؤال مشابه مقارنة بالنسب المئوية لطلبة الدول المشاركة كما يلي:

الطلبة المشاركين	عدد الإجابات الصحيحة على الفقرات				
	صفر	١	٢	٣	٤
الأردن	١٢,١٨٪	٢٩,٢٩٪	١٦,٠٥٪	١٧,٦٢٪	٢١,٠٨٪
الدول المشاركة	١,٥٨٪	١٤,٨١٪	١٣,٣٤٪	١٨,٠٤٪	٥٠,٤٩٪

يلاحظ أن النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا الفقرات الأربعة إجابة صحيحة ٢١,٠٨٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة بالنسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٥٠,٤٩٪. كما نلاحظ ارتفاع نسبة الطلبة الأردنيين الذين لم يجيبوا على أي فقرة إجابة صحيحة والتي بلغت ١٢,١٨٪ مقارنة بنسبة طلبة الدول المشاركة والبالغة ١,٥٨٪.

سؤال (٢): إذا كان مع خالد كماً أكبر من الأوراق النقدية فئة الـ ٥٠ ديناراً، وكان يرغب بدفع المبلغ مستعملاً أكبر عدد ممكن من الأوراق النقدية فئة ٥٠ ديناراً. كم ورقة من فئة ٥٠ ديناراً، وكم ورقة من فئة ٢٠ ديناراً سيدفعها خالد إذا اشترى سلعاً بمبلغ ٩٣٠ ديناراً.

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين على هذا السؤال مقارنة بالنسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة كما يلي:

٢٧,٢٦٪ من الطلبة الأردنيين أجابوا إجابة صحيحة عن هذا السؤال في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٦٥,٤٦٪، ويلاحظ تدني نسبة الطلبة الأردنيين.

أسئلة مشابهة:

١) إذا كان ع = ١٠س + ٢٥ص حيث س، ص، ع أعداد طبيعية. فهل يمكن للمتغير ع أن يأخذ القيم المبينة في الجدول أدناه؟

ضع دائرة حول كلمة "نعم" أو "لا" في الجدول أدناه.

قيم ع	هل يمكن للمتغير ع أن يأخذ هذه القيمة؟
٤٠	نعم / لا
٦٥	نعم / لا
١٧٠	نعم / لا
٣٤٥	نعم / لا

٢) ذهب قصي إلى سوق الطيور ليشتري عدداً من الدجاج والكتاكيت. ووجد أن كل ٣ كتاكيت بدينار، وكل دجاجة بدينارين.

هل يمكن أن يشتري قصي ٢٥ طيراً بـ ٢٥ ديناراً؟

وما عدد كل من الكتاكيت والدجاجات التي اشتراها قصي إن كان ذلك ممكناً؟

العــلاج: تقوم فكرة هذا السؤال على إيجاد حل لمعادلة من الدرجة الأولى في متغيرين في المجموعة ط X ط. ففي السؤال (١):

إذا رمزنا للمبلغ الذي سيدفعه خالد بالرمز م

ولعدد قطع الأوراق النقدية من فئة ٢٠ ديناراً بالرمز ن

ولعدد قطع الأوراق النقدية من فئة ٥٠ ديناراً بالرمز ك

فإن:

م = ٢٠ ن + ٥٠ ك ... (١) ويكون حلها على الصورة (ن ، ك)

ومنها ك = $\frac{\text{م} - ٢٠ \text{ن}}{٥٠}$ ويكون هذا عدداً طبيعياً إذا كان م – ٢٠ ن يقسم على ٥٠ (أي مضاعف للعدد ٥)

وعندما م = ٣٠ فإنه لا يوجد عدد طبيعي ن يجعل ٣٠ – ٢٠ ن عدداً طبيعياً يقسم على ٥٠ أي أن خالد لا يستطيع دفع ٣٠ ديناراً باستعمال أوراق النقود التي معه.

وعندما م = ١٣٠ فإن ن = ٤ تجعل ك = $\frac{١٣٠ - ٢٠ \times ٤}{٥٠} = \frac{٥٠}{٥٠}$ = ١ وهو عدد طبيعي

أي أن خالد يستطيع دفع مبلغ ١٣٠ ديناراً. على شكل:

٤ قطع من فئة ٢٠ ديناراً وقطعة واحدة من فئة ٥٠ ديناراً

وعندما م = ٢٤٠ فإن ن = ٢ تجعل ك = $\frac{٢٤٠ - ٢٠ \times ٢}{٥٠} = \frac{٢٠٠}{٥٠}$ = ٤ وهو عدد طبيعي

أي أن خالد يستطيع دفع ٢٤٠ ديناراً على شكل قطعتان من فئة ٢٠ ديناراً وأربع قطع من فئة ٥٠ ديناراً

وبالمثل؛ ١٣١٠ = ٢٠ × ٣ + ٥٠ × ٢٥

أي أن خالد يستطيع دفع ١٣١٠ دنانير على شكل ٣ قطع من فئة ٢٠ ديناراً و٢٥ قطعة من فئة ٥٠ ديناراً

ويمكن إيجاد أكثر من حل للحالات السابقة.

فالمعادلة م = ٢٠ ن + ٥٠ ك حيث ٠ ≤ ن < ٦٥ ، ٠ ≤ ك < ٢٦

تعني أن م هو مجموع مضاعف للعدد ٢٠ ومضاعف للعدد ٥٠

فعندما م = ٣٠ فإن ٣٠ = ٢٠ ن + ٥٠ ك ليس لها حل في ط × ط

وعندما م = ١٣٠ فإن ١٣٠ = ٢٠ × ٤ + ٥٠ × ١ وهو حل وحيد (٤ ، ١)

وعندما م = ٢٤٠ فإن ٢٤٠ = ٢٠ × ٢ + ٥٠ × ٤

= ٢٠ × ٧ + ٥٠ × ٢

إذن فللمعادلة حلان هما (٢ ، ٤) ؛ (٧ ، ٢)

وعندما م **= ١٣١٠** فإن ١٣١٠ = ٢٠ × ٣ + ٥٠ × ٢٥

=٢٠ × ٨ + ٥٠ × ٢٣

=٢٠ × ١٣ + ٥٠ × ٢١

=٢٠ × ١٨ + ٥٠ × ١٩

=٢٠ × ٢٣ + ٥٠ × ١٧

=٢٠ × ٢٨ + ٥٠ × ١٥

=٢٠ × ٣٣ + ٥٠ × ١٣

=٢٠ × ٣٨ + ٥٠ × ١١

=٢٠ × ٤٣ + ٥٠ × ٩

=٢٠ × ٤٨ + ٥٠ × ٧

=٢٠ × ٥٣ + ٥٠ × ٥

=٢٠ × ٥٨ + ٥٠ × ٣

=٢٠ × ٦٣ + ٥٠ × ١

وهذا يفتح باباً لحل السؤال (٢):

فلإيجاد أكبر عدد لقطع الأوراق النقدية من فئة ٥٠ ديناراً نتبع ما يأتي.

١٣١٠ ÷ ٥٠ = ٢٦ والباقي ١٠

وهذا الباقي لا يمكن سحبه بالأوراق من فئة ٢٠ ديناراً
ولذلك نقلل عدد القطع من فئة ٥٠ ديناراً ورقة واحدة فيصبح

١٣١٠ ÷ ٥٠ = ٢٥ والباقي ٦٠ وهذا الباقي مضاعف للعدد ٢٠ حيث ٦٠ = ٢٠ × ٣

❖ ١٣١٠ = ٢٠ × ٣ + ٥٠ × ٢٥

وهذا الحل يتفق مع السؤال (٢)

وبالأسلوب نفسه:

٩٣٠ ÷ ٥٠ = ١٨ والباقي ٣٠ وهذا الباقي ليس مضاعفاً للعدد ٢٠

نقلل عدد قطع النقد فئة ٥٠ ديناراً ورقة واحدة

= ١٧ والباقي ٨٠ وهذا الباقي مضاعف للعدد ٢٠ حيث ٨٠ = ٢٠ × ٤

إذن ٩٣٠ = ٢٠ × ٤ + ٥٠ × ١٧

أي أنه إلتزاماً بشرط سؤال (٢) يكون أكبر عدد ممكن للأوراق النقدية من فئة ٥٠ ديناراً هو ١٧ ومن فئة ٢٠ ديناراً هو ٤

ولحل السؤال الثاني من الأسئلة المشابهة:

نفرض عدد الكتاكيت التي اشتراها قصي = س وثمن الكتكوت = $\frac{١}{٣}$ دينار

عدد الدجاجات التي اشتراها قصي = ص وثمن الدجاجة = ٢ دينار

فيكون:

س + ص = ٢٥ طيراً حيث ١≤ س ≤ ٧٥ ، ١ ≤ ص ≤ ١٢

$\frac{١}{٣}$ س + ٢ص = ٢٥ ديناراً

إذن س + ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢ص

$\frac{٢}{٣}$ س = ص أو س = $\frac{٣}{٢}$ ص

المعادلة الأخيرة تحتم أن تكون قيم ص زوجية حتى تكون قيم س صحيحة.

وبما أن ١ ≤ ص ≤ ١٢

فإن القيم التي يمكن أن تأخذها ص هي: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢

نكون جدولاً كالآتي نضع فيه قيم ص ونحسب قيم س ونبحث متى تكون س + ص = ٢٥

ص	س	س + ص
٢	٣	٥
٤	٦	١٠
٦	٩	١٥
٨	١٢	٢٠
١٠	١٥	٢٥
١٢	١٨	٣٠

من هذا الجدول نجد أن عدد الدجاجات التي اشتراها قصي = ١٠

وعدد الكتاكيت التي اشتراها قصي = ١٥

وللتحقق من ذلك:

س + ص = ١٥ + ١٠

= ٢٥

$\frac{١}{٣}$ س + ٢ص = $\frac{١}{٣}$ × ١٥ + ٢ × ١٠

= ٥ + ٢٠

= ٢٥

إذن فالحل صحيح.

الإحصاء

والاحتمالات

شراء منزل

يرغب فارس أن يتزوج. وفكر أن يشتري منزلاً خاصاً به.

يبين الجدول الآتي مواصفات أربعة منازل أرشده إليها مكتب عقاري.

المواصفات	البيت الأول	البيت الثاني	البيت الثالث	البيت الرابع
سنة البناء	٢٠٠٨	١٩٩٥	٢٠٠٣	١٩٩٠
الثمن بالدينار	٣٢٠٠٠	٢٨٥٠٠	٢٥٠٠٠	٢٤٠٠٠
البعد عن مركز المدينة بالكيلومتر	١,٧٦	١,٨٦٧	٢,٢٥	١,٧٥٥
المساحة بالأمتار المربعة	١٧٠	١٨٠	١٨٥	١٦٥

سؤال (١): يريد فارس أن يشتري بيتاً يحقق الشروط الآتية جميعها:

- لا يزيد بُعد البيت عن مركز المدينة على ٢ كيلومتر.
- بُني البيت سنة ١٩٩٥م أو في السنوات اللاحقة.
- لا يزيد ثمن البيت على ٣٠٠٠٠ دينار.

أي بيت يحقق شروط فارس؟

أ) البيت الأول.

ب) البيت الثاني.

ج) البيت الثالث

د) البيت الرابع

النتيجة: كانت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا سؤالاً مشابهاً إجابة صحيحة ٧٣,٧٦٪ وهي قريبة من النسبة الدولية والتي بلغت ٧٧,٦٥٪

سؤال مشابه: ما الرقم الذي يجب أن يكتب في ☐ حتى يصبح العدد ☐٢٨٤٤:

- يقبل القسمة على ٢
- ويقبل القسمة على ٣
- ويقبل القسمة على ١١ ؟

العلاج: يعالج هذا السؤال وأمثاله بطريقة الاستبعاد. وهي إحدى طرق البرهان. حيث يتم تناول الشروط واحداً تلو الآخر. ويتم استبعاد الحالات التي لا تحققه.

فمن الشرط الأول: يُستبعد البيت الثالث لأنه يبعد عن مركز المدينة بأكثر من ٢ كيلومتر. وتبقى البيوت الأول والثاني والرابع.

ومن الشرط الثاني: يُستبعد البيت الرابع لأنه بُني قبل سنة ١٩٩٥م. ويبقى البيتان الأول والثاني.

ومن الشرط الثالث: يُستبعد البيت الأول لأن ثمنه يزيد على ٣٠٠٠٠ دينار. ويبقى البيت الثاني.

إذن، فالبيت الثاني يحقق شروط فارس جميعها.

وتتم هذه المراحل باستعمال أسلوب الحوار والمناقشة. حيث يطرح المعلم أسئلة حول هذه الشروط، ويطلب تبريراً لإجابات الطلبة. ويستعمل المثال المضاد عندما تكون الإجابة خطأ. فمثلاً؛ حول الشرط الأول:

كم متراً يبعد البيت الأول عن مركز المدينة؟

وكم متراً يبعد البيت الثاني عن مركز المدينة؟ البيت الثالث؟ البيت الرابع؟

أي بيت يزيد بُعده عن مركز المدينة على ٢٠٠٠ متر؟

ما البيوت التي تحقق شرط فارس الأول؟

وبالمثل، تُطرح أسئلة حول الشرط الثاني، وأسئلة حول الشرط الثالث، إلى أن يتم تحديد البيت الذي يحقق الشروط جميعها.

سؤال (٢): أي بيت أقرب لمركز المدينة؟

أ) البيت الأول.

ب) البيت الثاني.

ج) البيت الثالث

د) البيت الرابع

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا هذا السؤال إجابة صحيحة (البيت الرابع) ٢٨,٨١٪ وهي نسبة منخفضة بشكل عام ومقارنة بالنسبة العالمية والتي بلغت ٤٢,١٢٪

العلاج: يُعزى انخفاض مستوى أداء الطلبة على مثل هذا السؤال إلى ضعفهم في فهم وإدراك المنازل العشرية وقيمها. فهم يتعاملون مع الجزء الكسري وكأنه جزء صحيح. ولذلك يرون أن العدد ٠,١٧٥ أكبر من ٠,٢٥

ولمعالجة هذا الضعف يجب التأكيد على القيم المنزلية للأرقام في الجزء العشري والعلاقة بينها في النظام العشري. فمثلاً:

٠,٢ = ٠,٢٠ = ٠,٢٠٠ ...

أي جزءان من عشرة = عشرون جزءاً من مائة = مئتا جزء من ألف = ...

ومنها يؤكد على أن وضع أصفار إلى يمين الجزء الكسري لا يغير في قيمة العدد. وتوظف هذه الفكرة لترتيب الأعداد.

فأبعاد البيوت عن مركز المدينة بالكيلومترات هي على الترتيب:

١,٧٦   ١,٨٦٧   ٢,٢٥   ١,٧٥٥

ويصبح السؤال: ما أصغر عدد بين هذه الأعداد الأربعة؟

ولإجابة هذا السؤال نوحد عدد المنازل العشرية؛ ونبدأ بمقارنة أرقام الأعداد في المنازل المتشابهة من اليسار إلى اليمين.

١,٧٦٠   ١,٨٦٧   ٢,٢٥٠   ١,٧٥٥

وعند مقارنة **الجزء الصحيح** نجد أن العدد ٢,٢٥٠ هو الأكبر.

وعند مقارنة **أجزاء العشرة** في الأعداد الباقية نجد أن العدد ١,٨٦٧ هو الأكبر.

وعند مقارنة **أجزاء المئة** في العددين الباقيين نجد أن العدد ١,٧٦٠ هو الأكبر.

إذن فأصغر الأعداد الأربعة هو ١,٧٥٥

أي أن البيت الرابع هو الأقرب لمركز المدينة.

سؤال مشابه: ما أصغر عدد بين الأعداد ٣,٩٥ ٣,٨٣ ٤,٥ ٣,٨٢٤

سؤال (٣): يتعين على فارس أن يدفع رسوماً إضافية للدولة تساوي ٢,٥٪ من ثمن البيت. ما مقدار الرسوم الإضافية المترتبة على البيت الأول؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ٢٠,٠٩٪ وهي نسبة منخفضة رغم بساطة السؤال. وكذلك كانت النسبة المئوية العالمية منخفضة حيث بلغت ٢٧,٤١٪

العلاج: فكرة هذا السؤال تدور حول حساب نسبة مئوية من كمية معلومة. فيبدو أن مفهوم النسبة المئوية غير واضح لدى الطلبة.

لذلك يجب التأكيد على أن ٢,٥٪ تعني $\frac{٢,٥}{١٠٠}$ أي $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$

ثم تأتي الفكرة الثانية وهي حساب نسبة (أو كسر) من عدد ما. فلحساب $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$ من ثمن البيت الأول والبالغ ٣٢٠٠٠ دينار نضرب $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$ في ٣٢٠٠٠

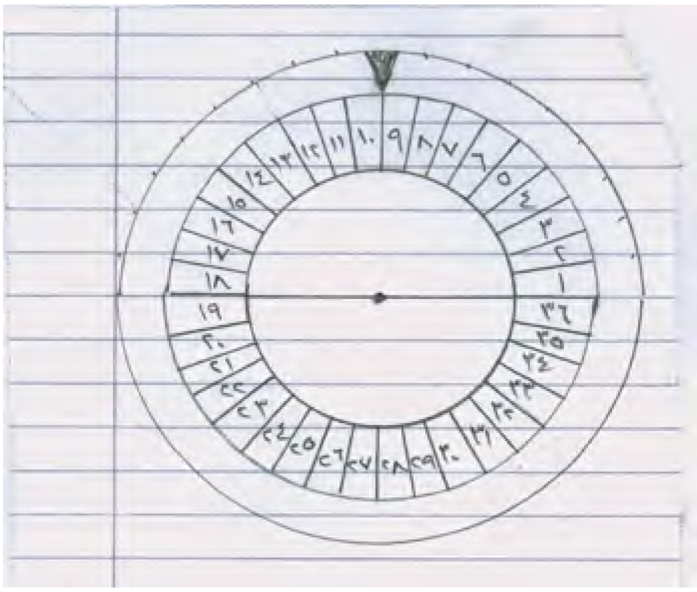
إذن مقدار الرسوم الإضافية المترتبة على البيت الأول = $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$ X ٣٢٠٠٠

= ٨٠٠ دينار

سؤال مشابه: أعلن تاجر عن خصم ١٥٪ من ثمن بضاعته، ما مقدار الخصم على سلعة ثمنها ٦٥٠ ديناراً؟

القرص الدوار

سؤال: في لعبة القرص الدوار المرقم من ١ إلى ٣٦ يُدور القرص ٥ مرات، ويربح الجائزة من يتوقع الأرقام الخمسة التي يستقر عندها المؤشر.



راقب سامر هذه اللعبة مرات عديدة وحفظ الأرقام التي لم تظهر في المرات السابقة. كما حفظ الأرقام التي ربحت في المرة الأخيرة.

ضع دائرة حول كلمة "صواب" أو كلمة "خطأ" مقابل كل من العبارات الآتية:

العبارة	قيمة الصواب
لا فائدة للمعلومات التي حفظها سامر في التنبؤ بالأرقام التي ستظهر في المرة التالية	صواب / خطأ
الأرقام التي لم تظهر في المرات السابقة لها فرصة أكبر في الظهور	صواب / خطأ
الأرقام التي ظهرت في المرة الأخيرة فرصتها أقل لأنه من غير المحتمل تكرار ظهورها مرتين متتاليتين	صواب / خطأ
الأرقام التي تكرر ظهورها في المرات السابقة فرصتها أكبر في الظهور لأنها أرقام شائعة	صواب / خطأ

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن الفقرات الأربع إجابة صحيحة ١٥,٢٪ في حين بلغت نسبة طلبة الدول المشاركة ٣٨,١١٪

كما كانت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا ثلاث عن فقرات إجابة صحيحة ٢٦,٤٥٪

والذين أجابوا عن فقرتين إجابة صحيحة ٣٠,٥٪

والذين أجابوا عن فقرة واحدة إجابة صحيحة ١٩,٨٪

أما النسبة الباقية وهي ٨,٠٥٪ فتمثل الطلبة الذين أخطأوا الفقرات الأربعة أو أهملوا السؤال ولم يصلوه.

سؤال مشابه: ألقيت ثلاث قطع نقود منتظمة عشوائياً ١٠٠ مرة، وظهرت "الصورتان والكتابة" أكبر عدد من المرات، في حين لم تظهر "الصور الثلاث" في المرات السابقة.

ألقيت قطع النقود الثلاث مرة أخرى.

ضع دائرة حول كلمة "صواب" أو كلمة "خطأ" مقابل كل من العبارات الآتية:

العبارة	قيمة الصواب
فرصة ظهور الصور الثلاث أكبر لأنها لم تظهر في المرات السابقة	صواب / خطأ
فرصة ظهور "صورتان وكتابة" أكبر لأنها أصبحت شائعة	صواب / خطأ
لا فائدة من المعلومات السابقة عن رمي القطع الثلاث ١٠٠ مرة في التنبؤ بنتيجة الرمية التالية	صواب / خطأ
نتيجة الرمي الأخيرة فرصتها أقل لأنه من غير المحتمل تكرار ظهورها مرتين متتاليتين	صواب / خطأ

العلاج: تعتمد إجابة مثل هذه الأسئلة على إتقان الطالب لمفاهيم الاحتمالات. وتمييزهم ما بين الاحتمالات المشروطة والحوادث المستقلة. ففي حالة سلسلة من الحوادث، إذا كان احتمال حادث يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحوادث السابقة له كانت احتمالات الحوادث مشروطة بوقوع أو عدم وقوع ما قبلها. وعندها لا نستطيع إيجاد احتمال حادث إلا إذا عرفنا نتائج الحوادث السابقة له. أما إذا كان احتمال حادث لا يتأثر بوقوع الحوادث السابقة له كانت الحوادث مستقلة.

فإذا كان ح_1، ح_2 حادثين من فضاء عيني Ω لتجربة عشوائية، وكان احتمال ح_2 يتأثر بوقوع أو عدم وقوع ح_1 فإن احتمال ح_2 مشروط بوقوع أو عدم وقوع ح_1. وعندها

نكتب $\text{ل}\ (\text{ح}_2|\text{ح}_1)$ ليعني احتمال وقوع ح_2 تحت شرط وقوع ح_1

أو $\text{ل}\ (\text{ح}_2|\overline{\text{ح}_1})$ ليعني احتمال وقوع ح_2 تحت شرط عدم وقوع ح_1

ويكون احتمال وقوع الحادثين معاً هو:

$$\text{ل}\ (\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \text{ل}\ (\text{ح}_1)\ .\ \text{ل}\ (\text{ح}_2|\text{ح}_1)$$

أما إذا كان احتمال وقوع ح_2 لا يتأثر بوقوع ح_1 أو عدم وقوعه فإننا نكتب:

$$\text{ل}\ (\text{ح}_2|\text{ح}_1) = \text{ل}\ (\text{ح}_2)$$

وكذلك $\text{ل}\ (\text{ح}_2|\overline{\text{ح}_1}) = \text{ل}\ (\text{ح}_2)$

وفي الحالتين يكون احتمال وقوع الحادثين معاً هو:

$$\text{ل}\ (\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1)\ .\ \text{ل}(\text{ح}_2)$$

وتمييز الطالب ما بين الحوادث المشروطة والحوادث المستقلة شيء مهم جداً لحل مثل هذه المسائل.

ففي تجربة القرص الدوار، استقرار المؤشر عند رقم ما لا يؤثر في احتمال استقراره عند رقم آخر في المرة التالية، وعليه فإن حفظ سامر للأرقام التي لم تظهر في المرات السابقة والأرقام التي ربحت في المرة الأخيرة لا فائدة منها لأنها لن تؤثر ولن تغير من فرصة ظهور الأرقام في المرة التالية.

ويجب على المعلم أن يقدم عدداً من التجارب ويُجري نقاشاً حول تأثر الحوادث المتعاقبة ببعضها حتى يكتسب الطلبة القدرة على التمييز بين الحوادث المشروطة والحوادث المستقلة.

شقة للإيجار

وجد كريم الإعلان التالي على الإنترنت عن بيت معروض للبيع في مدينة سياحية يؤجر في الإجازات والأعياد. فكر كريم بشرائه بحيث يمكنه تأجيره لأولئك الراغبين في قضاء إجازاتهم.

عدد الغرف	**غرفة معيشة وسفرة واحدة** **غرفة نوم واحدة** **غرفة حمام**	**السعر:** ٢٠٠٠٠٠ دينار 
المساحة الكلية	٦٠ متراً مربعاً (م^{2})	
مكان للسيارة	نعم	
الزمن للوصول لمركز المدينة	١٠ دقائق	
المسافة إلى الشاطئ	٣٥٠ متراً في طريق مباشر	
معدل إشغالها بالزوار في آخر ١٠ سنوات	٣١٥ يوماً في السنة	

سؤال (١): لتقييم سعر الشقة، طلب كريم إلى أحد الخبراء تقييم سعر البيت.

استخدم الخبير المعايير الواردة في الجدول أدناه لتقدير قيمة البيت.

سعر المتر المربع	السعر الأساسي:	٢٥٠٠ ديناراً			
معايير قيمة إضافية	زمن الوصول لمركز المدينة	أكثر من ١٥ دقيقة: لا شيء	من٥ إلى ١٥ دقيقة: ١٠٠٠٠ دينار	أقل من ٥ دقائق: ٢٠٠٠٠ دينار	
	المسافة إلى الشاطئ (بالطريق المباشر)	أكثر من ٢ كيلومتر: لا شيء	من ١ إلى ٢ كيلومتر: ٥٠٠٠ دينار	من ٠,٥ إلى ١ كيلومتر: ١٠٠٠٠ دينار	أقل من ٠,٥ كيلومتر: ١٥٠٠٠ دينار
	مكان للسيارة	لا: لا شيء	نعم: ٣٥٠٠٠ دينار		

إذا كانت القيمة المقدرة من قبل الخبير أكبر من سعر البيع المعلن، فإن السعر المعلن يعتبر "جيد جداً" بالنسبة لكريم كمشتر محتمل.

بين أن – وبناءً على معايير الخبير- سعر البيع المعلن "جيد جداً" لكريم.

سؤال (٢): معدل إشغال البيت من قبل الزائرين الراغبين في قضاء إجازاتهم في السنوات العشر الأخيرة هو ٣١٥ يوم في السنة.

حدد ما إذا كانت العبارات التالية يمكن أن تستنتج من هذه المعلومة.

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" لكل عبارة.

العبارة	هل يمكن أن تستنتج العبارة من البيانات المعطاة؟
يمكن القول بثقة أن البيت قد أشغل ٣١٥ يوماً بالضبط من قبل الزائرين في سنة واحدة على الأقل من السنوات العشر الأخيرة	نعم / لا
من الممكن نظرياً أن يكون البيت قد أشغل أكثر من ٣١٥ يوماً في كل سنة من السنوات العشر الأخيرة	نعم / لا
من الممكن نظرياً أن يكون البيت لم يُشغل بتاتاً في سنة من السنوات العشر الأخيرة من قبل الزائرين	نعم / لا

ملاحظة: اعتبر السنة ٣٦٥ يوماً

العلاج: تدور فكرة السؤال الأول حول استعمال مجموعة من المعايير وتطبيقها لتقدير قيمة شيء لاتخاذ قرار.

فحسب المعيار الأول: مساحة الشقة ٦٠ متراً مربعاً

وسعر المتر الواحد ٢٥٠٠ دينار

إذن فالقيمة بناءً على ذلك = ٦٠ × ٢٥٠٠

= ١٥٠٠٠٠ دينار

وحسب المعيار الثاني: زمن الوصول لمركز المدينة ١٠ دقائق وهو بين ٥ إلى ١٥ دقيقة.

إذن فالقيمة المضافة = ١٠٠٠٠ دينار

وحسب المعيار الثالث: المسافة إلى الشاطئ ٣٥٠ متراً وهي أقل من ٠,٥ كيلومتر.

إذن فالقيمة المضافة = ١٥٠٠٠ دينار

وحسب المعيار الرابع: يوجد في البيت مكان للسيارة

إذن فالقيمة المضافة = ٣٥٠٠٠ دينار

مما سبق وحسب المعايير الأربعة تكون قيمة البيت كما يلي:

١٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ١٥٠٠٠ + ٣٥٠٠٠ = ٢١٠٠٠٠ دينار

وهذه القيمة أعلى من السعر المعلن للبيت وهو ٢٠٠٠٠٠ دينار.

إذن فالسعر المعلن جيد جداً لكريم.

أما فكرة **السؤال الثاني** فتدور حول مفهوم المتوسط الحسابي (المعدل).

فالمتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد هو عدد حقيقي (ليس بالضرورة أن يكون منتمياً لمجموعة الأعداد) مجموع انحرافات الأعداد عنه يساوي صفراً.

وعلى ذلك فالوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون واقعاً بين أصغر عدد وأكبر عدد.

فبالنسبة **للعبارة الأولى،** لا يمكن الجزم بأن البيت قد أشغل ٣١٥ يوماً بالضبط من قبل الزائرين في سنة على الأقل من السنوات العشر الأخيرة.

لذلك فالعبارة الأولى **"لا"** يمكن أن تستنتج من البيانات المعطاة

وبما أن الوسط الحسابي يقع بين أصغر عدد وأكبر عدد فلا يمكن أن يكون المتوسط الحسابي أصغر من جميع الأعداد. ولذلك **فالعبارة الثانية "لا"** يمكن أن تستنتج من البيانات المعطاة.

وبالنسبة **للعبارة الثالثة:**

عدد أيام إشغال البيت في العشر سنوات = ٣١٥ × ١٠

= ٣١٥٠ يوماً

والسؤال الآن، هل يمكن أن يكون هذا العدد من الأيام قد تم في تسع سنوات؟

وللإجابة على ذلك:

٣١٥٠ ÷ ٩ = ٣٥٠ يوماً في السنة

وهو عدد معقول لأن عدد أيام السنة ٣٦٥ يوماً

كل هذه المراحل تتم من خلال الحوار والمناقشة. حيث يطرح المعلم أسئلة ويستمع لإجابات الطلبة ويطلب منهم تبرير إجاباتهم.

مكونات البيض

يبين الجدول أدناه مكوّنات البيضة الناتجة من ٨ أنواع من الطيور والنسب المئوية للمكوّنات.

مكوّنات البيضة							
النوع	الوزن بالجرامات	الصفار		البياض		القشرة	
		غم	٪	غم	٪	غم	٪
الدجاج	٥٨,١	١٨,٥	٣١,٨	٣٣,٧	٥٨	٥,٩	١٠,٢
دجاجة الوادي	٤٢,٧	١٦,٠	٣٧,٤	٢٠,٣	٤٧,٥	٦,٤	١٥,٠
الرومي	٨٥,٩	٢٨,٣	٣٢,٩	٤٨,٠	٥٥,٩	٩,٦	١١,٢
البط	٧٠,٤	٢٥,٣	٣٥,٩	٣٧,٩	٥٣,٨	٧,٢	١٠,٢
الأوز	١٦١,٠	٥٧,٣	٣٥,٦	٨٣,١	٥١,٦	٢٠,٦	١٢,٨
الحمام	١٩,٤	٦,٦	٣٤,٠	١٠,٨	٥٥,٧	٢,٠	١,٠٣
السمّان	١٠	٣,٥	٣٥,٠	٥,٦	٥٦,٠	٠,٩	٩,٠
النعام	١٣٠٠	٣٩٠	٣٠,٠	٦٥٠	٥٠,٠	٢٦٠	٢٠,٠

سؤال(١): في بيض أي نوع من هذه الطيور تكون النسبة المئوية للصّفار هي الأكبر؟

الجواب: ____

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ٦٦,٧٪ وهي نسبة منخفضة إذا ما أخذنا في الاعتبار بساطة السؤال والتي تقوم على أساس قراءة البيانات المنظمة في جداول. في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة

٨٦,٥٦٪. واضح الفرق الكبير بين النسبتين. واعتقد أن ذلك يُعزى إلى عدم تدريب الطلبة على مثل هذا السؤال والذي يتضمن مهارتين: قراءة البيانات المنظمة في جداول واستخلاص نتائج منها، وتنظيم البيانات في جداول يسهل قراءتها واستخلاص نتائج مباشرة منها.

سؤال (٢): ما مجموع أوزان المكوّنات الداخلية لبيضة الأوز؟

وزن المكوّنات الداخلية لبيضة الأوز: ________________________________

النتيجة : كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابات صحيحة على سؤال مشابه ١٢,٣٦٪ وهي منخفضة بشكل عام ومقارنة بالنسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٣٠,٣٣٪. إنّ فكرة هذا السؤال تقوم على أساس فهم السؤال وتحديد المطلوب ثم استخلاص المعلومات وإجراء العملية عليها.

سؤال (٣): هل العبارات الآتية صحيحة بناءً على هذه البيانات؟

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" في كل حالة:

العبارة	هل هذه العبارة صحيحة؟
يشكل البياض أكثر من نصف وزن البيضة لجميع هذه الطيور	نعم / لا
وزن البياض أكبر من وزن الصفار لجميع هذه الطيور	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا الفقرتين لسؤال مشابه إجابات صحيحة ٤١,٨٤٪ مقابل ٦٤,٢٢٪ لطلبة الدول المشاركة؛ والنسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا فقرة واحدة إجابة صحيحة ٥١,٢٥٪ مقابل ٣٠,٨٤٪ لطلبة الدول المشاركة.

سؤال (٤): ما النسبة المئوية للزيادة في وزن البياض في بيضة النعام على وزن الصفار؟

أ) ٢٠٪

ب) ٤٠٪

ج) ٦٦,٧٪

د) ٧٦,٧٪

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابات صحيحة على سؤال مشابه ٢٢,٥٦٪ في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٤٧,٣١٪ ويشير انخفاض نسبة الطلبة الأردنيين إلى ضعف الطلبة في النسبة المئوية وطريقة حسابها.

سؤال مشابه : طيور البطريق

سافر مصور الحيوانات جين بابتسي J. Baptiste في بعثة سنوية، وأخذ عدداً كبيراً من الصور لطيور البطريق وصغارها. وكان مهتماً على وجه الخصوص بزيادة حجم مستعمرات عدة لطيور البطريق.

سؤال (١): عادةً يضع كل زوج من طيور البطريق (ذكر وأنثى) بيضتين كل سنة. وغالباً ما يبقى الصوص الخارج من البيضة الكبيرة فقط على قيد الحياة.

ولنوع معين من طائر البطريق يكون وزن البيضة الأولى ٧٨ غراماً تقريباً ووزن البيضة الثانية ١١٠ غرامات تقريباً.

على وجه التقريب

ما النسبة المئوية للزيادة في وزن البيضة الثانية على وزن البيضة الأولى؟

أ) ٢٩٪

ب) ٣٢٪

ج) ٤١٪

د) ٧١٪

سؤال (٢): تساءل جين كيف سيتغير حجم مستعمرة لطيور البطريق عبر السنوات القليلة القادمة. ومن أجل ذلك، وضع الافتراضات التالية:

- عند بداية السنة، كانت مستعمرة طيور البطريق مكونة من ١٠٠٠٠ طائر (٥٠٠٠ زوج)
- وفي ربيع كل سنة، يفرخ كل زوج طائراً واحداً يضاف للمستعمرة.
- ومع نهاية كل سنة يموت ٢٠ من طيور البطريق كلها (كباراً وصغاراً)

ما عدد طيور البطريق في هذه المستعمرة عند نهاية السنة الأولى؟

عدد طيور البطريق: ______________

سؤال (٣): افترض جين أن المستعمرة ستستمر في النمو بالحالة الآتية:

- عند بداية كل سنة، تتكون المستعمرة من أعداد متساوية من الذكور والإناث والتي تشكل أزواجاً.
- يُفرخ كل زوج طائراً واحداً كل سنة.
- ومع نهاية كل سنة يموت ٢٠ من طيور البطريق كلها (كباراً وصغاراً)
- تبدأ طيور البطريق بالتزاوج والتكاثر عندما تتم سنة من عمرها.

بناءً على هذه الافتراضات، أي من الصيغ التالية تمثل العدد الكلي ع لطيور البطريق في المستعمرة بعد ٧ سنوات؟

أ) ع = ١٠٠٠٠ (١,٥ X ٠,٢)^٧

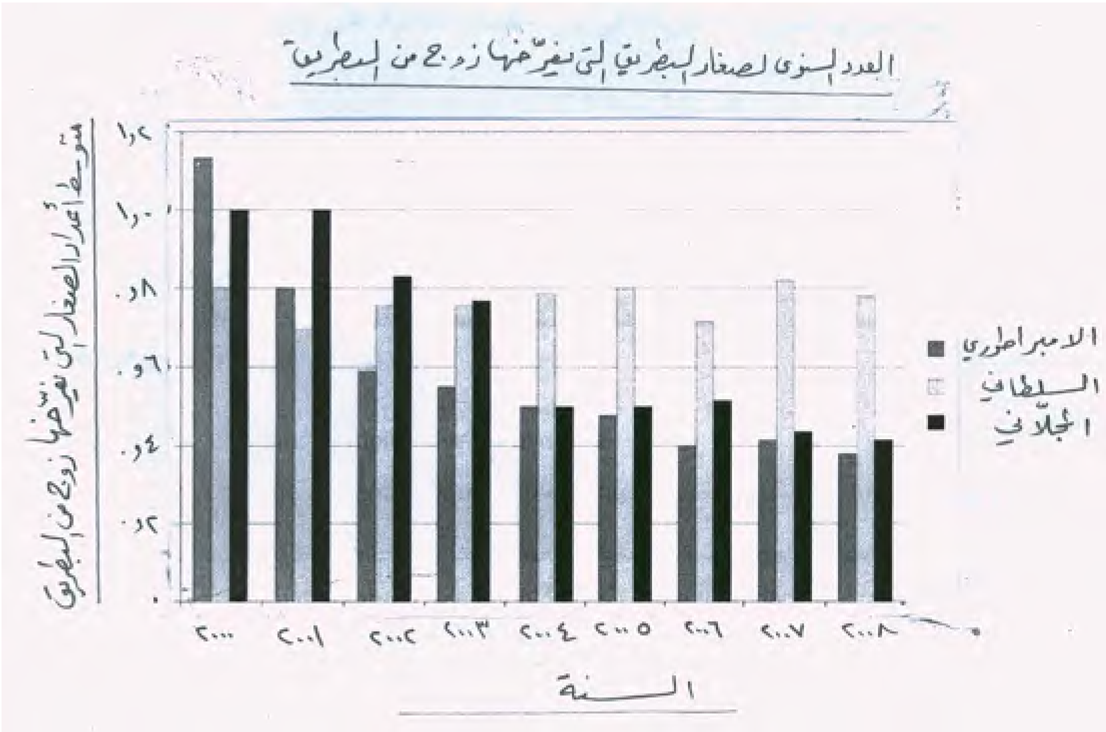
ب) ع = ١٠٠٠٠ (١,٥ X ٠,٨)^٧

ج) ع = ١٠٠٠٠ (١,٢ X ٠,٢)^٧

د) ع = ١٠٠٠٠ (١,٢ X ٠,٨)^٧

سؤال (٤): بعد عودته من البعثة إلى البيت، بحث في الإنترنت ليرى كم طائراً صغيراً يضيف كل زوج من طيور البطريق في المتوسط.

وجد جين لوحة الأعمدة البيانية لثلاثة أنواع من البطريق: الأمبراطوري، السلطاني، المجلاني.



بناءً على لوحة الأعمدة أعلاه، هل العبارات الآتية حول هذه الأنواع الثلاثة صحيحة أم خطأ؟ ضع دائرة حول "صح" أو "خطأ" لكل عبارة.

العبارة	هل العبارة صحيحة أم خطأ
في سنة ٢٠٠٠، كان متوسط أعداد الصغار التي يفرخها كل زوج من البطريق أكبر من ٠,٦	صح / خطأ
في سنة ٢٠٠٦، في المتوسط، أقل من ٨٠ من أزواج طائر البطريق فرخ صغاراً	صح / خطأ
حوالي ٢٠١٥، ستنقرض هذه الأنواع الثلاثة	صح / خطأ
تناقص متوسط أعداد الصغار التي يفرخها كل زوج من طائر المجلاني بين عامي ٢٠٠١ و ٢٠٠٤	صح / خطأ

سؤال مشابه: النمو السكاني:

نشرت جريدة السوسنة في الموسوعة الحرة ويكيبيديا ووفق بيان أصدرته دائرة الإحصاءات العامة أن عدد سكان الأردن ارتفع من حوالي ٥٨٦ ألف نسمة عام ١٦٥٢م إلى ٦,٤ مليون نسمة نهاية عام ٢٠١١م.

سؤال (١): ما معدل الزيادة السنوية في عدد السكان في الفترة من عام ١٩٥٢ إلى عام ٢٠١١؟

سؤال (٢): ونشرت الجريدة نفسها أن معدل النمو السكاني في الفترة من ٢٠٠٤ إلى ٢٠١٢ كان ٢,٢٪.

إذا استمر النمو السكاني بهذا المعدل حتى عام ٢٠٢٠ فإن عدد السكان سيكون:

أ- ٦٤٠٠٠٠٠ × ٢,٢

ب- ٦٤٠٠٠٠٠ × $(٢,٢)^{٨}$

ج- ٦٤٠٠٠٠٠ × ١,٠٢٢

د- ٦٤٠٠٠٠٠ × $(١,٠٢٢)^{٨}$

العلاج: تدور الأسئلة حول الأفكار التالية:

السؤال (١): يتناول حساب النسبة المئوية للزيادة في كمية ما على كمية أخرى. ومصدر خطأ الطلاب في مثل هذا السؤال هو عدم معرفة الكمية المنسوب إليها والكمية المنسوبة.

ففي هذا السؤال.

الكمية المراد إيجاد نسبتها المئوية = الزيادة في وزن البيضة الثانية على وزن البيضة الأولى

= ١١٠ – ٧٨

= ٣٢ غراماً تقريباً

والكمية التي ستقارن بها هذه الزيادة هي وزن البيضة الأولى = ٧٨ غراماً تقريباً.

وهنا يجب الإشارة إلى والتأكيد على وجوب أن تكون الكميتان مقدرتين بالوحدة نفسها. وهي هنا الغرام.

إذن النسبة المئوية للزيادة في وزن البيضة الثانية على وزن البيضة الأولى

$$= \frac{٣٢}{٧٨} \times ١٠٠٪$$

= ٤١٪ تقريباً.

ويتضمن **السؤال (٢)** فهم مسألة من واقع الحياة وحلها تحت شروط معطاة.

فتحت **الشرط الأول**: عدد طيور البطريق في المستعمرة = ١٠٠٠٠ طائر.

= ٥٠٠٠ زوج

وتحت **الشرط الثاني**: يزداد عدد طيور البطريق في فصل الربيع ب ٥٠٠٠ طائر، ليصبح عدد طيور البطريق في المستعمرة = ١٥٠٠٠ طائر.

وتحت **الشرط الثالث**: عدد الطيور التي تموت = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ١٥٠٠٠ = ٣٠٠٠ طائر

إذن، عدد طيور البطريق في المستعمرة عند نهاية السنة = ١٥٠٠٠ – ٣٠٠٠

= ١٢٠٠٠ طائر بطريق

ويتضمن **السؤال (٣)** الوصول إلى قاعدة عامة لعدد طيور البطريق في المستعمرة بعد عدد من السنوات وتحت شروط محددة:

عدد طيور البطريق في ربيع السنة الأولى = ١٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠ × ٠،٥

= ١٠٠٠٠ × ١,٥ طائر

وعند نهاية السنة الأولى يموت ٢٠٪ من مجمل الطيور ليبقى ٨٠٪ منها حياً

إذن عدد طيور البطريق في المستعمرة عند نهاية السنة الأولى = ١٠٠٠٠ × ١,٥ × ٠,٨ طائر

وفي ربيع السنة الثانية تكون الطيور الصغيرة قد بلغت سنة من عمرها وتصبح قادرة على التزاوج والتكاثر.

إذن،

عدد طيور البطريق في المستعمرة في بداية السنة الثانية = ١٠٠٠٠ × ١,٥ × ٠,٨ طائراً

ويصبح عددها في ربيع السنة الثانية = (١٠٠٠٠ × ١,٥ × ٠,٨) × ١,٥

وعددها عند نهاية السنة الثانية = (١٠٠٠٠ × ١,٥ × ٠,٨) × ١,٥ × ٠,٨

= ١٠٠٠٠ × (١,٥ × ٠,٨)^{٢}

ومن ذلك يمكننا أن نستنتج أن:

عدد طيور البطريق في المستعمرة عند نهاية السنة السابعة = ١٠٠٠٠ × (١،٥ × ٠،٨)^{٧}

أما السؤال (٤) فيتناول قدرة الطالب على تحليل عبارات تتعلق بلوحة أعمدة بيانية وتحديد قيم الصواب لها.

بالنظر إلى الأعمدة الثلاثة لعام ٢٠٠٠ نلاحظ أن المتوسطات الثلاثة أكبر من ٠,٦ ؛ ولذلك فإن متوسط هذه المتوسطات سيكون أكبر من ٠,٦

ولذلك **فالعبارة الأولى صحيحة**.

وبالنظر إلى الأعمدة لعام ٢٠٠٦ نلاحظ أن المتوسطات الثلاث أقل من ٠,٨ ؛ وهذا يعني أن أقل من ٨٠٪ من أزواج طائر البطريق فرخ صغاراً

ولذلك **فالعبارة الثانية صحيحة**.

إن الأعمدة في الرسم البياني تمثل متوسط الزيادة السنوية لأنواع البطريق ولا تمثل أعداد طائر البطريق. صحيح أن مقدار الزيادة السنوية يقل إلا أن الأعداد الكلية تزيد. ولذلك لن تنقرض هذه الأنواع سنة ٢٠١٥

فالعبارة الثالثة خطأ.

وبتتبع الأعمدة الممثلة لمتوسط أعداد الصغار التي يفرخها طائر البطريق المجلاني بين عامي ٢٠٠١ إلى ٢٠٠٤ نجد أنها تتناقص

لذلك فالعبارة الرابعة صحيحة.

سؤال مشابه : بيانات السكان والناتج الإجمالي

يبيّن الجدول أدناه بيانات لعدد سكان بعض الدول العربية وناتجها الإجمالي:

الدولة	المساحة (كم٢)	عدد السكان	الناتج الإجمالي ($)
الأردن	٩٢١١١	٥,٣٠٧,٤٧٠	٢٨ مليارًا
سوريا	١٨٥١٨٠	٢١,٥٩٣,٧٨٤	٧٢ مليارًا
العراق	٤٣٧٠٧٢	٣١,٣٣٣,٨١٦	٩٠ مليارًا
لبنان	١٠٤٥٢	٣,٦٧٧,٧٨٠	٢٤ مليارًا
مصر	١٠٠١٤٤٩	٨٠,٠٠٠,٠٠٠	٣٨٤ مليارًا
الجزائر	٢٣٨١٧٤٠	٣٦,٦٠٠,٤١٠	٢٥٣ مليارًا
تونس	١٦٣٦١٠	١٠,١٠٢,٠٠٠	٩٨ مليارًا
ليبيا	١٧٥٩٥٤٠	٦,٤٦١,٤٥٤	٧٥ مليارًا
المغرب	٧١٠٨٥٠	٣١,٧٠٠,١٧٥	١٦٢ مليارًا
السودان	١٨٦٥٨١٨	٣٢,٢١٨,٤٥٦	٨٠ مليارًا
الإمارات	٨٢٨٨٠	٤,٤٩٦,٠٠٠	١٤٦ مليارًا
السعودية	٢٢٤٠٥٨٢	٢٩,٥١٣,٣٣٠	٧٣٣ مليارًا
البحرين	٦٦٥	٦٥٦,٣٩٧	١٤ مليارًا
عُمان	٢١٢٤٦٠	٣,٢٠٠,٠٠٠	٥٤ مليارًا
قطر	١١٤٣٧	٧٩٣,٩٤١	٦٩ مليارًا
الكويت	١٧٨٢٠	٣,٤٤١,٨١٣	١٣٦ مليارًا
اليمن	**٥٥٥٠٠٠**	**٢٣,٧٠١,٢٥٧**	**٦٣,٤ مليارًا**

سؤال (١): أيّ من هذه الدول هي الأكبر ناتجًا؟

سؤال (٢): لنفترض أنّه: إذا كان متوسط ناتج الفرد أقل من ١٢٠٠٠ دولار فإن ذلك المجتمع يعاني من الفقر.

فأي من الدول التالية تُعاني من الفقر؟

الأردن – ليبيا – مصر – قطر

سؤال (٣): إذا عرّفنا الكثافة السكانية بأنها عدد الأفراد في الكيلومتر المربع، ووصفنا الدولة بالازدحام إذا زادت الكثافة السكانية عن ١٥٠ فردًا في الكيلو متر المربع. فأي الدول التالية تكون مزدحمة؟

الأردن – لبنان – مصر – البحرين

سؤال (٤): هل العبارات الآتية صحيحة بناء على هذه البيانات؟

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" في كل حالة:

العبارة	هل هذه العبارة صحيحة؟
كلمّا زاد عدد السكان زاد الناتج الإجمالي	نعم / لا
كلمّا صغرت المساحة قلّ عدد السكان	نعم / لا

العـلاج: يقوم برنامج العلاج على تدريب الطلبة على تنظيم البيانات لمتغيرين ولكل منهما أكثر من مستوى. ثم تدريبهم على قراءة مثل هذه الجداول واستخلاص المعلومات المطلوبة بطريقة منظمة.

فبالنسبة للسؤال (١):

المطلوب معرفة الطيور التي نسبة الصّفار في بيضها هي النسبة المئوية الأكبر. نُحدّد عمود النسبة المئوية للصّفار في البيض وهو العمود الرابع في الجدول ونبحث عن أعلى نسبة بينها

فنجدها ٣٧,٤٪. وبالنظر لنوع الطير في العمود الأول لنجد أن دجاجة الوادي هي الطير الذي النسبة المئوية للصّفار في بيضه هي الأكبر.

وبالنسبة للسؤال (٢):

المطلوب إيجاد مجموع أوزان المكوّنات الداخلية لبيضة الأوز. ولذلك نبحث في العمود الأول عن الأوز ثم نحدد وزن الصّفار ووزن البياض في بيضة الأوز ونجمع الوزنين معًا.

مجموع أوزان المكوّنات الداخلية لبيضة الأوز = وزن الصفار + وزن البياض

= ٥٧,٣ + ٨٣,١

= ١٤٠,٤ غرامًا

ويطرح سؤال على الطلبة عن امكانية الحل بطريقة أخرى.

مجموع أوزان المكونات الداخلية = وزن البيضة – وزن القشرة

= ١٦١,٠ – ٢٠,٦

= ١٤٠,٤ غراماً

والتأكيد بعد مناقشة السؤالين السابقين على أنّه يمكن أن تُعطى قيمة لأحد المتغيرين ويُطلب إيجاد قيمة المتغير الثاني المقابلة.

وبالنسبة للسؤال (٣):

يناقش الطلبة أولا بالعبارات المسوّرة كليّا أو جزئيّا وقيم الصواب لكل منهما، فإذا كانت ف(س) جملة مفتوحة ومجموعة التعوض لها ج فإنّ العبارة المسورة كليّا :

∀ س ∋ ج؛ ف(س)

تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت ف (أ) صحيحة لكل أ ∋ ج

وتكون خطأ إذا وفقط إذا وُجد على الأقل عنصر أ ∋ ج بحيث تكون ف (أ) خطأ. ومثل هذا العنصر يسمّى مثال مضاد.

فبالنسبة للعبارة الأولى: نتتبع أوزان البياض لبيض الأنواع المختلفة للطيور في العمود الخامس ومقارنتها بأوزان البيض في العمود الثاني فنجد أن البياض في بيضة دجاجة الوادي أقل من نصف وزن البيضة أو النسبة المئوية للبياض أقل من ٥٠٪.

أما العبارة الثانية فهي صحيحة لأنه لا يوجد ما ينقضها. فلجميع أنواع الطيور وزن البياض في البيضة أكبر من وزن الصفار فيها.

أما السؤال (٤):

فاعتقد أن خطأ الطلاب في إيجاد النسبة المئوية هو عدم معرفتهم للشيء المنسوب إليه، ثم عدم معرفتهم لطريقة تحويل النسبة إلى نسبة مئوية.

ففي هذا السؤال:

العدد المنسوب هو: الزيادة في وزن البياض على وزن الصّفار في بيضة النعام.

والعدد المنسوب إليه هو: وزن الصفار.

وتحديد العدد المنسوب والعدد المنسوب إليه هي الخطوة الأساس لحل السؤال.

فالعدد المنسوب = ٦٥٠ – ٣٩٠

= ٢٦٠ غرامًا.

والعدد المنسوب إليه = ٣٩٠ غرامًا.

والنسبة بينهما= $\frac{٢٦٠}{٣٩٠}$

= $\frac{٢}{٣}$

ولتحويل هذه النسبة إلى نسبة مئوية نضربها في $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ أي في ١٠٠٪ فنجد:

$\frac{٢}{٣}$ × ١٠٠٪ = ٦٦,٧٪

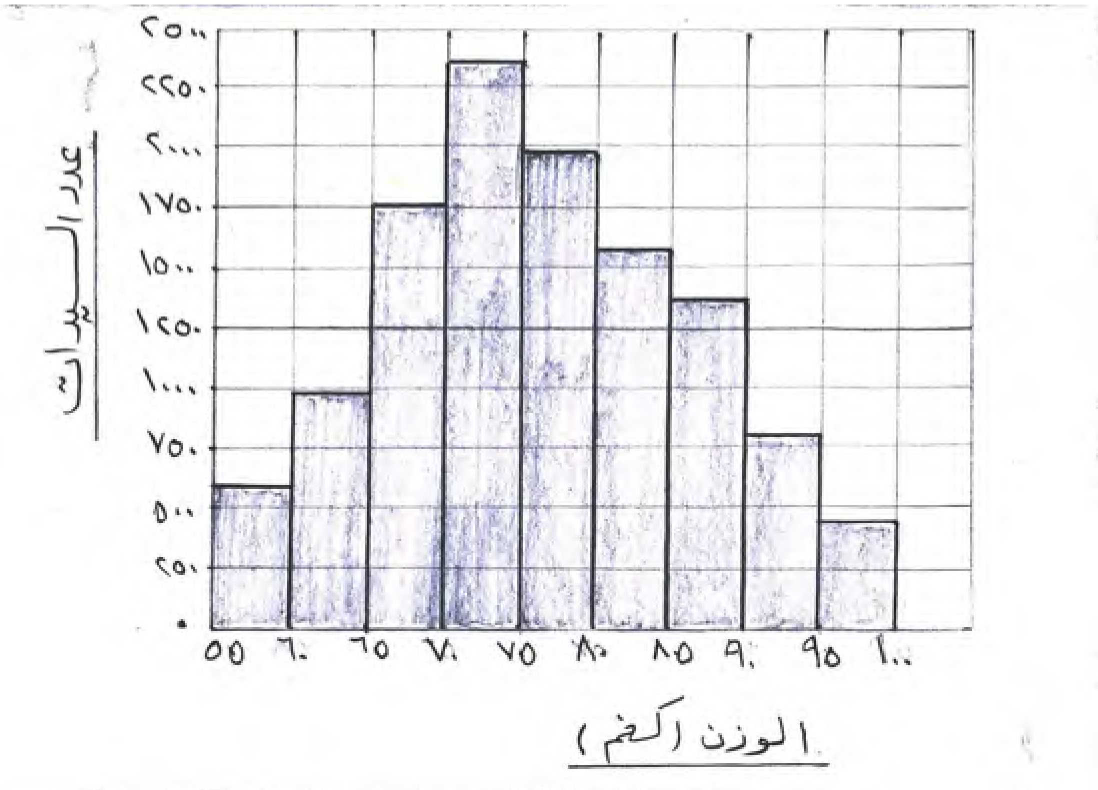
وهي الإجابة **(جـ)**

مثل هذه الأسئلة تحتاج إلى عدد كبير نسبيا من التدريبات مع التأكيد على إتباع التفكير المنظم للوصول إلى الحل بسرعة.

الأوزان ومعامل اللياقة

تشكو النساء في كثير من الدول من زيادة أوزانهن. وتسعى الحكومات لدراسة هذه الظاهرة لاقتراح مجموعة من الإرشادات تعمل على تخفيف الأوزان والتخلص من البدانة. قامت إحدى الجمعيات النسائية بدراسة شملت ١١٧٩٣ سيدة.

يبين الرسم البياني التالي عدد السيدات موزعة في فئات للأوزان.



سؤال (١): اعتماداً على هذا الرسم البياني، ما العدد التقريبي للسيدات اللواتي تزيد أوزانهن عن ٨٠ كيلوغراماً؟

أ) ١٥٧٠

ب) ٣٥٣٠

ج) ٤١٥٠

د) ٧٦٥٠

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ٢١,٤٦٪ وهي نسبة منخفضة بشكل عام وبالمقارنة مع النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٣٥,٢٣٪ خاصة إذا ما أخذ في الاعتبار بساطة السؤال. وقد كانت النسبة الأعلى للطلبة لأولئك الطلبة الذين اختاروا تكرار الفئة المجاورة للوزن ٠,٨٠ فبعضهم اختار تكرار الفئة على يمين الوزن ٨٠ مباشرة. وبعضهم اختار تكرار الفئة على يسار الوزن ٠,٨٠ وهذا يشير إلى استعجال الطلبة في قراءة السؤال فلم يفهموا المطلوب منه.

سؤال (٢): إذا علمت أن معامل اللياقة يعطى بالمعادلة م = الوزن بالكيلوغرامات / مربع الطول بالأمتار

وكان م < ٢٠ فإن وزن السيدة أقل من المعدل الطبيعي

، ٢٠ < م < ٢٢ فإن وزن السيدة في المعدل الطبيعي

، ٢٢ < م < ٢٥ فإن وزن السيدة في الحدود الصحية

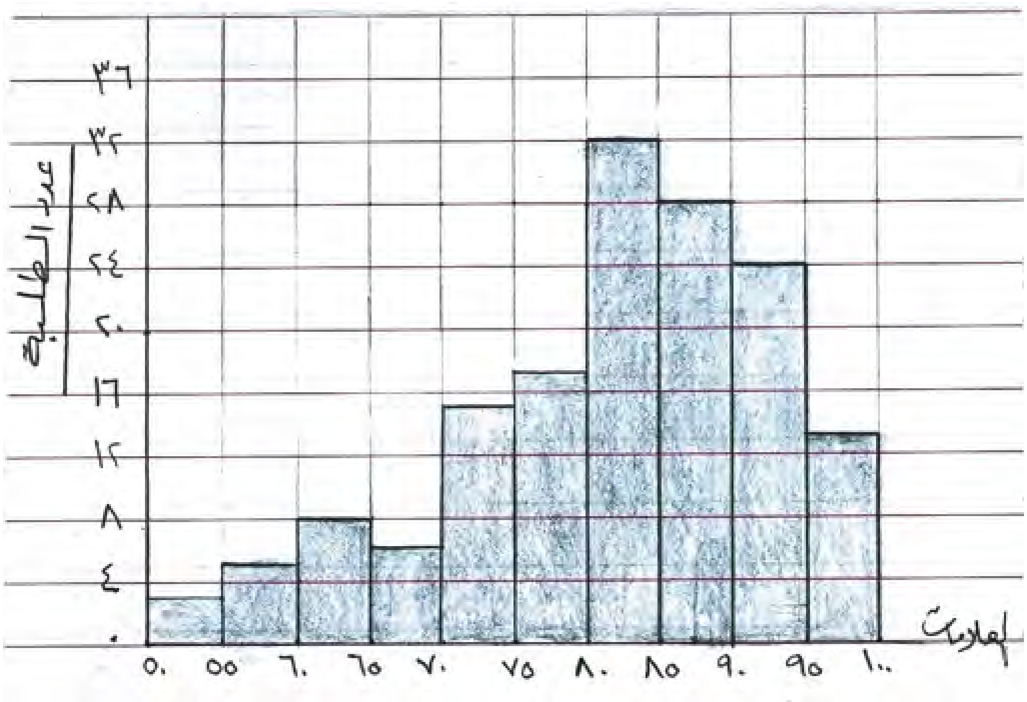
، ٢٥ < م < ٣٠ فإن وزن السيدة يزيد عن الحدود الصحية

، ٣٠ < م فإن وزن السيدة زائد بدرجة كبيرة وغير صحية

تزن إحدى السيدات ٦٧ كيلوغراماً وطولها ١٦٠ سنتمتراً. ما معامل لياقتها؟ وفي أي فئة تصنف؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ٤٧,٠٨٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة بالنسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٦٧,٠٧٪.

سؤال مشابه: تقدم من مدرسة ما ١٦٢ طالباً وطالبة لامتحان الشهادة الثانوية العامة (التوجيهي) نجح منهم نجاحاً كاملاً ١٥١ طالباً وطالبة. يبين الشكل أدناه علامات الناجحين ممثلة بالأعمدة البيانية.



سؤال (١): ما العدد التقريبي للطلبة الذين علاماتهم من ٨٠ إلى أقل من ٩٥؟

أ) ١٥

ب) ٦٠

ج) ٨٤

د) ٩٧

سؤال (٢): إذا كانت النسبة المئوية للعلامات الأقل من العلامة س = ي ٪ فإن ي تسمى الرتبة المئينية للعلامة س.

حصل طالب على العلامة ٩٠، ما الرتبة المئينية لعلامته لأقرب عشر؟

العلاج: يتناول هذا السؤال ومثيلاته فكرتين أساسيتين:

- فهم لوحة الأعمدة وما تمثله (توزيع تكراري لقيم متغير في فترات) وقدرة الطالب على استخلاص معلومات منها والإجابة عن أسئلة تطرح حولها.
- فهم الطالب العلاقة بين متغيرين وتفسير معامل بين المتغيرين.

فبالنسبة للسؤال الأول، يجب أن يدرب الطالب على قراءة لوحة الأعمدة والاجابة عن أسئلة مثل:

- ما عدد السيدات اللواتي أوزانهن من ٧٥ كغم وأقل من ٨٠ كغم؟
- ما عدد السيدات اللواتي أوزانهن من ٧٠ كغم وأقل من ٩٠ كغم؟
- ما عدد السيدات اللواتي أوزانهن أقل من ٧٠؟
- ما عدد السيدات اللواتي أوزانهن أكبر من أو يساوي ٧٠ كغم؟

فالسؤال الأول يهدف لمعرفة فهم الطالب للوحة الأعمدة وقدرته على التقدير. وعليه أن يحدد الفترة ٧٥ – ٨٠ للأوزان ويقدر ارتفاع العمود المنشأ على هذه الفترة.

أما **السؤال الثاني** فيتطلب من الطالب أن يحدد فترات الأوزان من ٧٠ كغم إلى أقل من ٩٠ كغم وهي: ٧٠ – ٧٥ ، ٧٥ – ٨٠ ، ٨٠ – ٨٥ ، ٨٥ – ٩٠.

ثم يقدر عدد السيدات اللواتي أوزانهن في هذه الفترات، ويجمع هذه الأعداد ليحصل على إجابة السؤال. فمثلاً:

عدد السيدات اللواتي أوزانهن ٧٠ – ٧٥ يساوي تقريباً ٢٣٥٠ سيدة

وعدد السيدات اللواتي أوزانهن ٧٥ – ٨٠ يساوس تقريباً ١٩٥٠ سيدة

وعدد السيدات اللواتي أوزانهن ٨٠ – ٨٥ يساوي تقريباً ١٥٥٠ سيدة

وعدد السيدات اللواتي أوزانهن ٨٥ – ٩٠ يساوي تقريباً ١٤٠٠ سيدة

إذن العدد التقريبي للسيدات اللواتي أوزانهن من ٧٠ كغم وأقل من ٩٠ كغم يساوي ٧٢٥٠ سيدة.

وفكرة **السؤال الثالث** تتناول إيجاد عدد السيدات اللواتي أوزانهن تقل عن ٧٠ كغم وهن السيدات اللواتي أوزانهن ضمن الفترات: ٥٥ ــ ٦٠ ، ٦٠ ــ ٦٥ ، ٦٥ ــ ٧٠ ،وعلى الطالب أن يقدر عدد السيدات اللواتي أوزانهن في هذه الفترات ويجمع الأعداد كما في السؤال الثاني.

وبالمثل يعالج **السؤال الرابع**، فالسيدات اللواتي أوزانهن أكبر من أو يساوي ٧٠ كغم هن السيدات اللواتي أوزانهن في الفترات:

٧٠ ــ ٧٥ ، ٧٥ ــ ٨٠ ، ٨٠ ــ ٨٥ ، ٨٥ ــ ٩٠ ، ٩٠ ــ ٩٥ ، ٩٥ ــ ١٠٠.

ويمكن إيجاد جواب هذا السؤال بطريقة أخرى وذلك بطرح عدد السيدات اللواتي أوزانهن أقل من ٧٠ كغم من العدد الكلي للسيدات اللواتي شملتهن الدراسة. أي:

عدد السيدات اللواتي أوزانهن أكبر من أو يساوي ٧٠ كغم = ١١٧٩٣ ــ عدد السيدات اللواتي أوزانهن أقل من ٧٠ كغم.

ويهدف السؤال الثاني إلى حساب معامل ما وتفسير دلالة هذا المعامل.

فبالنسبة للسيدة المراد حساب لياقتها:

وزنها = ٦٧ كيلوغراماً

وطولها = ١٦٠ سنتمتراً

= ١,٦ متراً. وهنا يجب أن ينتبه الطالب إلى الوحدات المستعملة في حساب المعامل.

إذن،

$$\text{معامل لياقتها} = \frac{\text{الوزن بالكيلوغرامات}}{\text{مربع الطول بالأمتار}}$$

$$= \frac{٦٧}{(١،٦)^{٢}}$$

$$= \frac{٦٧}{٢,٥٦}$$

$$= ٢٦,١٧$$

وهذا المعامل يشير إلى أن وزن السيدة يزيد عن الحدود الصحية.

يدرب الطلبة على أسئلة مماثلة يمكن الحصول عليها من الصحف والمجلات والدراسات حتى يعتاد الطالب على التعامل مع مثل هذا السؤال ويحس بتطبيقات الاحصاء في واقع الحياة.

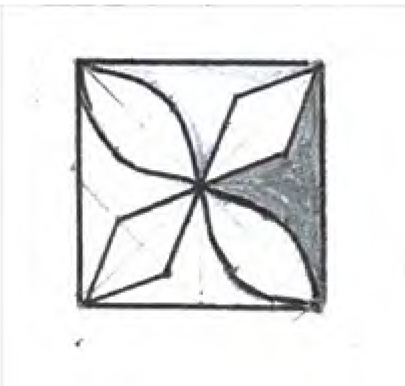
كما أن من الأمور الهامة جداً أن يعتاد الطالب على قراءة السؤال قراءة متأنية وواعية كي يفهم السؤال ويحدد المطلوب منه. ففهم السؤال هو الخطوة الأولى والأساسية للتفكير الصحيح في إجابة السؤال.

الأشـــكــال

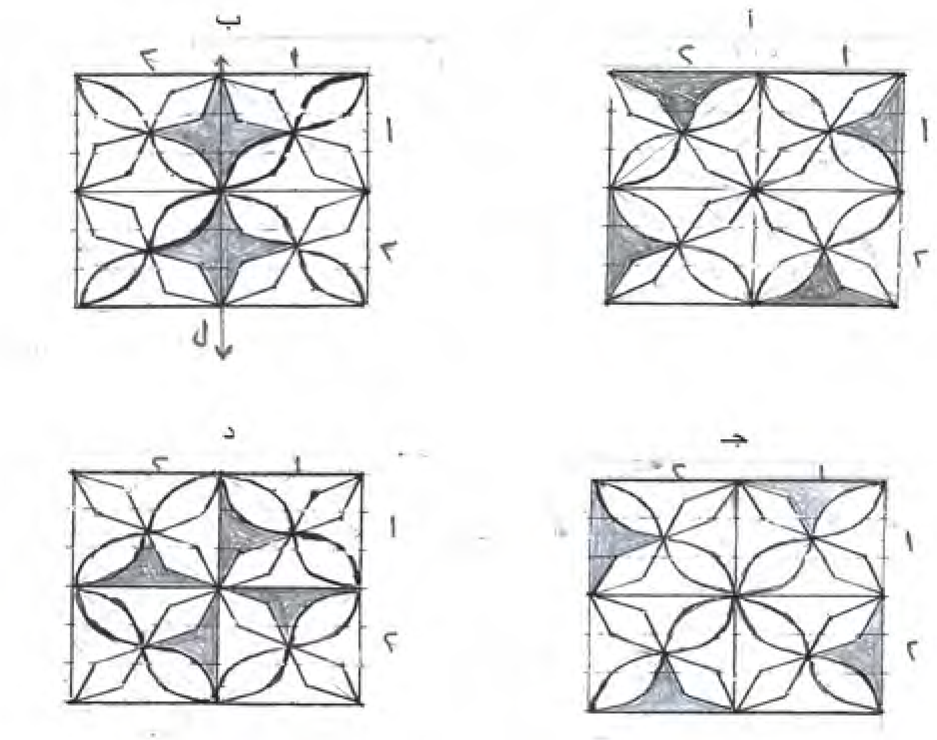
والفـــراغـــات

النقوش

يبين الشكل الآتي بلاطة عليها نقش.



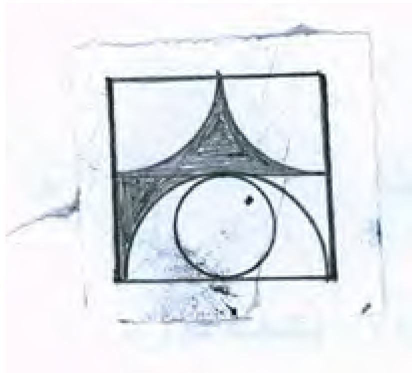
أي واحد من الترتيبات الآتية لا يمكن تشكيله باستعمال ٤ بلاطات من النوع المبين في الشكل أعلاه؟



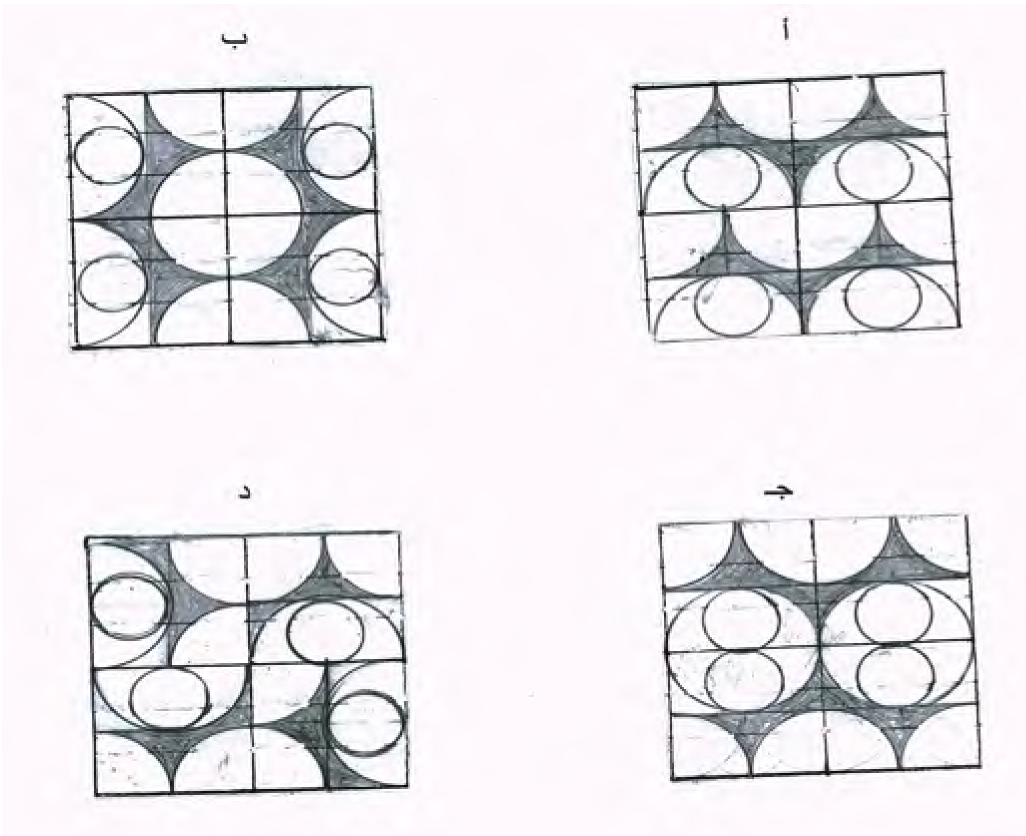
النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة (الترتيب ب) ٣٧,٦١٪ في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٦٦,٢٤٪

سؤال مشابه: ترتيب البلاط

يبين الشكل الآتي بلاطة عليها نقش



أي واحد من الترتيبات الآتية يمكن تكوينه باستعمال ٤ بلاطات من النوع المبين في الشكل أعلاه؟



العلاج: يمكن التفكير في مثل هذه الأسئلة بطريقتين.

الطريقة الأولى: باستعمال التحويلات الهندسية (الانسحاب والدوران) لمعرفة إمكانية الحصول على البلاطات الأربع من بلاطة واحدة.

فمثلاً؛ في **الشكل** أ؛ بتدوير البلاطة ١×١ حول مركزها:

بزاوية قياسها ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ٢×١

بزاوية قياسها ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ٢×٢

بزاوية قياسها ٢٧٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ١×٢

فالشكل أ يمكن تشكيله باستعمال ٤ بلاطات من النوع نفسه.

وفي **الشكل ب**؛ إذا أخذنا البلاطة ١×٢ فإننا سنحصل على البلاطة ١×١ بانعكاس البلاطة ١×٢ بالمحور ل.

إذن فالشكل ب لا يمكن تشكيله باستعمال ٤ بلاطات من النوع نفسه.

وفي **الشكل د**؛ بتدوير البلاطة ٢×٢ حول مركزها:

بزاوية قياسها ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ١×٢

بزاوية قياسها ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ٢×١

بزاوية قياسها ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ١×١

فالشكل د يمكن تشكيله باستعمال أربع بلاطات من النوع نفسه.

وفي **الشكل ج**؛ بتدوير البلاطة ٢×١ حول مركزها:

بزاوية قياسها ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ٢×٢

بزاوية قياسها ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ١×٢

بزاوية قياسها ٢٧٠° باتجاه دوران عقارب الساعة نحصل على البلاطة ١×١

فالشكل ج يمكن تشكيله باستعمال ٤ بلاطات من النوع نفسه.

الطريقة الثانية: بإيجاد علاقة تحدد موقع الجزء المظلل في البلاطة بالنسبة للأشكال الأخرى.

لاحظ في البلاطة النموذج: عندما يكون الجزء المظلل إلى اليمين يكون الشكل المعين فوقها وشكل ورقة الشجر أسفلها.

لاحظ في **الشكل ب**: إذا نظر للبلاطة ١×١ من أعلى يكون الجزء المظلل إلى اليمين بينما الشكل المعين أسفلها وورقة الشجر أعلاها.

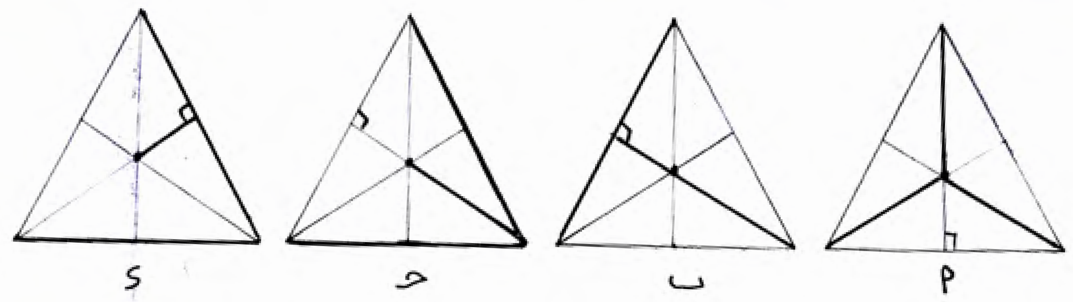
إذن لا يمكن تشكيله باستعمال ٤ بلاطات من النوع نفسه.

الكهرباء

تشكل ثلاث مجمعات سكنية رؤوس مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه ١٠كم

أقيمت محطة لتوليد الكهرباء عند مركز المثلث.

في الشكل أدناه أربع طرق مقترحة لربط محطة توليد الكهرباء بالمجمعات السكنية.



رتب هذه المقترحات الأربع حسب طول خطوط توصيل الكهرباء من الأقصر إلى الأطول.

________ ________ ________ ________

الأقصر الأطول

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ١٦,٧١٪ في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٤٨,٥٨٪

العلاج:تحتاج مثل هذه المسائل إلى تطبيق استراتيجية حل المسألة ذات الخطوات التالية:

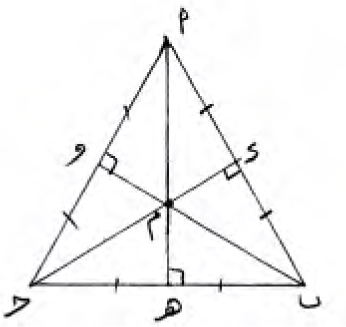
أولاً: فهم المسألة: عندما يقرأ الطالب نص المسألة عليه أن يحدد المعلومات المعطاة في المسألة ويحاول تذكر الخواص لهذه المعطيات؛ مثل:

- المثلث متطابق الأضلاع تكون زواياه الداخلية متطابقة.
- مركز المثلث متطابق الأضلاع هي نقطة إلتقاء قطعه المتوسطة وتقسم هذه النقطة كل قطعة بنسبة ١:٢ من جهة الرأس. والقطع المتوسطة للمثلث متطابق الأضلاع متطابقة. وهي منصفات لزوايا المثلث الداخلية وعمودية على أضلاع المثلث.

ثم يحدد المطلوب من السؤال: إيجاد أطوال خطوط توصيل الكهرباء وترتيبها.

ثانياً: التفكير في طريقة الحل: حتى نتمكن من إيجاد أطوال خطوط توصيل الكهرباء نحتاج إلى إيجاد طول ضلع المثلث (معطى)؛ وبُعد مركز المثلث عن رؤوسه وعن أضلاعه.

ثالثاً: التنفيذ:



بما أن ب جـ = ١٠كم فإن ب هـ = هـ جـ = ٥كم

وبالمثل أ د = د ب = ٥كم

أ و = و جـ = ٥كم

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية أ هـ ج :

(أ هـ)^{٢} + (هـ جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢}

(أ هـ)^{٢} = ١٠٠ ــ ٢٥

= ٧٥

إذن أ هـ = ٥ ٣ كم

ولأن بُعد مركز المثلث عن أي رأس من رؤوسه يساوي ضعفي بعده عن الضلع المقابل فإن:

أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ = $\frac{١٠\ \ ٣}{٣}$ كم

م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ = $\frac{٥\ \ ٣}{٣}$ كم

وبذلك تصبح المعلومات اللازمة لإيجاد أطوال خطوط توصيل الكهرباء معلومة

إذن:

طول خطوط توصيل الكهرباء في الشكل أ = ٣ × $\frac{١٠\ \ ٣}{٣}$ = ١٠ ٣ كم

طول خطوط توصيل الكهرباء في الشكل ب = (١٠ + ٥ ٣) كم

طول خطوط توصيل الكهرباء في الشكل جـ = $\left(٢٠ + \frac{١٠ ٣}{٣} \right)$ كم

طول خطوط توصيل الكهرباء في الشكل د =$\left(٢٠ + \frac{٥ ٣}{٣} \right)$ كم

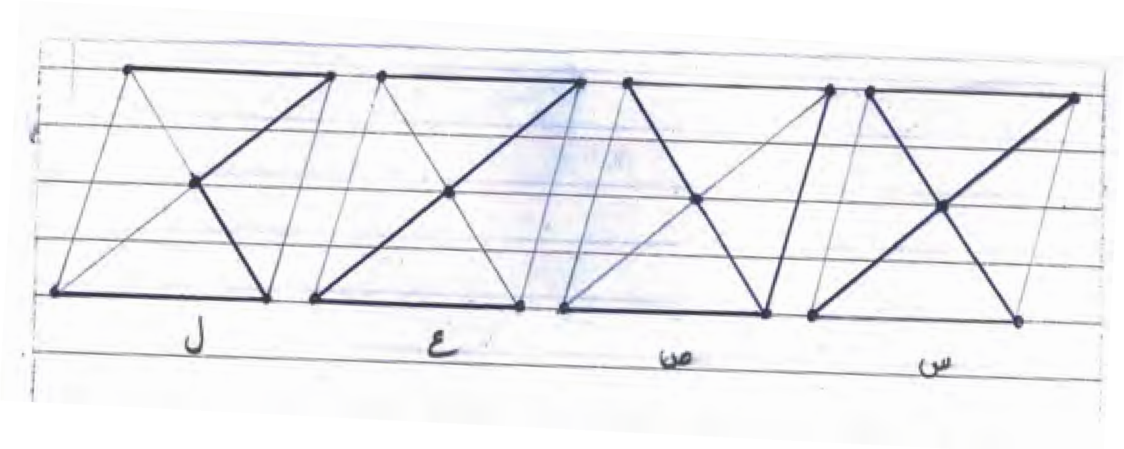
وترتيبها هو: أ ب د ج

الأقصر الأطول

سؤال مشابه: خطوط أنابيب المياه

تشكل أربع مجمعات سكنية رؤوس معين طولا قطريه ٨كم ، ٦كم. بُني خزان ماء عند ملتقى القطرين.

في الشكل أدناه أربع طرق مقترحة لربط خزان الماء بالمجمعات السكنية.

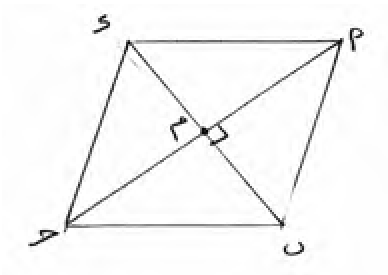


رتب هذه المقترحات الأربع حسب طول خط الأنابيب من الأقصر إلى الأطول

__________ __________ __________ __________

الأقصر الأطول

العلاج: يعتمد حل مثل هذا السؤال على معرفة خواص المعين واستعمالها في إيجاد الأطوال غير المعلومة. فقطرا المعين متناصفان ومتعامدان.



وفي الشكل إلى اليسار:

بما أن أ جـ = ٨ كم فإن أ م = م جـ = ٤كم

وبما أن ب د = ٦كم فإن ب م = م د = ٣كم

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث أ م ب يكون:

$(أ\ ب)^٢ = (أ\ م)^٢ + (م\ ب)^٢$

$= ١٦ + ٩$

$= ٢٥$

إذن أ ب = ٥كم

ولأن أضلاع المعين متطابقة فإن أ ب = ب ج = ج د = د أ = ٥كم

من هذه المعلومات نستطيع حساب أطوال خطوط الأنابيب في الطرق الأربع.

في **الشكل الأول**: طول خطوط الأنابيب = ٨ + ٦

= ١٤كم

في **الشكل الثاني**: طول خطوط الأنابيب = ٥ + ٥ + ٦

= ١٦كم

في **الشكل الثالث**: طول خطوط الأنابيب = ٥ + ٥ + ٨

= ١٨كم

في **الشكل الرابع**: طول خطوط الأنابيب = ٥ + ٥ + ٤ + ٣

= ١٧كم

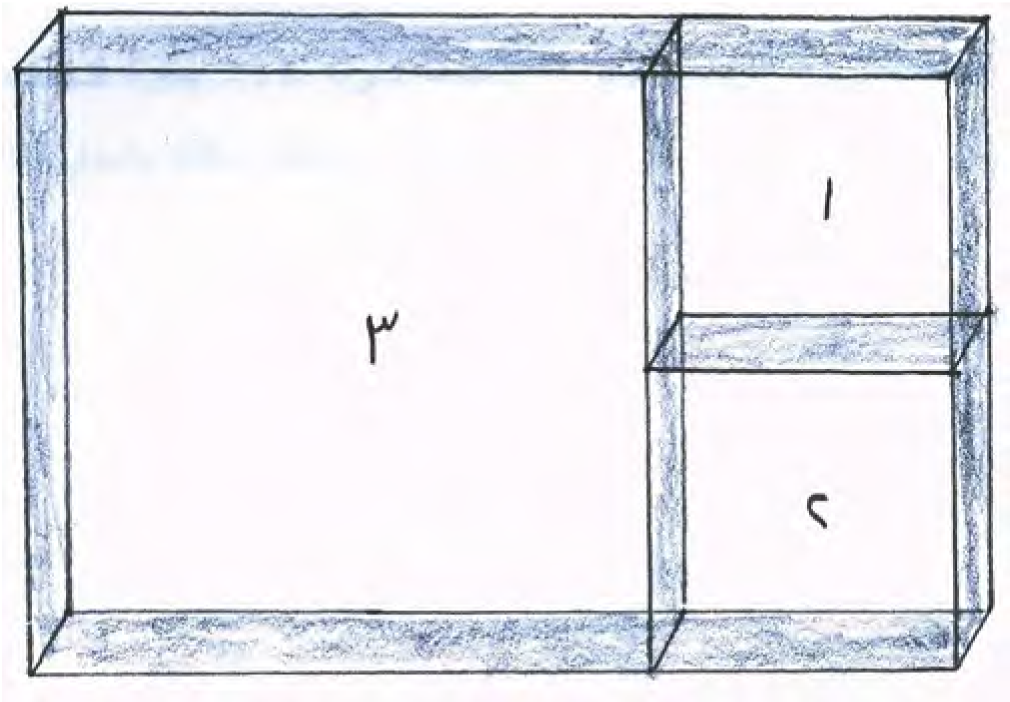
إذن فالترتيب التصاعدي لأطوال خطوط الأنابيب هو:

س ص ل ع

الأقصر الأطول

الحظيرة

لدى فيصل ١٩٥ متراً من السياج. ويرغب في تسييج ثلاث حظائر مربعة لأغنامه. حظيرتان صغيرتان وحظيرة كبيرة، وطول ضلع الحظيرة الكبيرة ضعفي طول ضلع الحظيرة الصغيرة. كما يظهر في الشكل.



ما مساحة كل حظيرة؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن سؤال مشابه إجابة صحيحة ٤,٠٩٪ وهي نسبة منخفضة جداً بصورة مطلقة ومقارنة مع النسبة العالمية والبالغة ٢٠,٢٥٪

وأعتقد أن ذلك يعود لأسباب عدة.

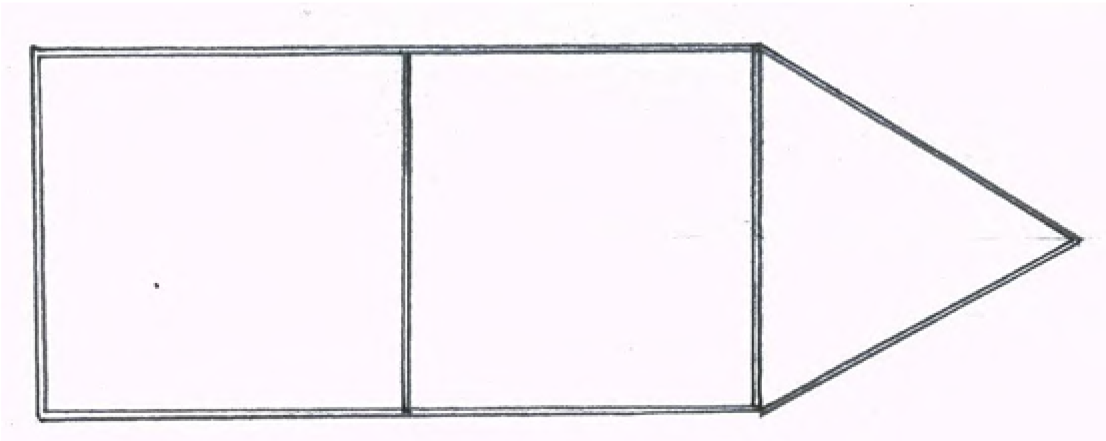
- عدم القدرة على ترجمة المسألة إلى معادلة رياضية يجد منها طول ضلع كل حظيرة.
- عدم فهم مدلول السياج وما يمثله.

أسئلة مشابهة:

(١)لدى رائد حديقة خلف بيته مستطيلة الشكل محيطها ٦٤ متراً، وطولها يزيد عن عرضها بـ ٨ أمتار. ما مساحتها؟

وإذا عمل رائد في وسطها بركة ماء دائرية الشكل طول قطرها ٧ أمتار، وزرع الجزء الباقي من الحديقة وروداً وأشجاراً. فما مساحة الجزء المزروع من الحديقة؟

(٢)استعمل معلم التربية الرياضية ورقاً لاصقاً طوله ١٤٤متراً لتخطيط ملعب لإحدى الألعاب الرياضية يتكون من منطقتين مربعتين ومنطقة مثلثة متطابقة الأضلاع كما في الشكل.



ما مساحة الملعب كله؟

العلاج: يتناول هذا السؤال قدرة الطالب على ترجمة السؤال إلى معادلة جبرية وحلها.

ويتم تناوله بالحوار والمناقشة.

- إذا فرضنا طول ضلع الحظيرة الصغيرة س متراً فكم يكون طول ضلع الحظيرة الكبيرة؟

  الجواب: ٢ س متراً. ضع هذه الأطوال على الشكل.

- ما مجموع أطوال الأسوار المحيطة بالحظائر الثلاث؟

  الجواب: ١٣ س

- استعمل فيصل ١٩٥ متراً من السياج في تسييج الحظائر. كون معادلة تستعملها لإيجاد قيمة س.

  الجواب: ١٣ س = ١٩٥

- حل هذه المعادلة.

  الجواب: بقسمة طرفي المعادلة على ١٣ ينتج

  س = ١٥ متراً

- ما مساحة الحظيرة الصغيرة؟

  الجواب: س^{٢} = ٢٢٥ متراً مربعاً

- ما طول ضلع الحظيرة الكبيرة؟

  الجواب: ٢ س = ٣٠ متراً

- ما مساحة الحظيرة الكبيرة؟

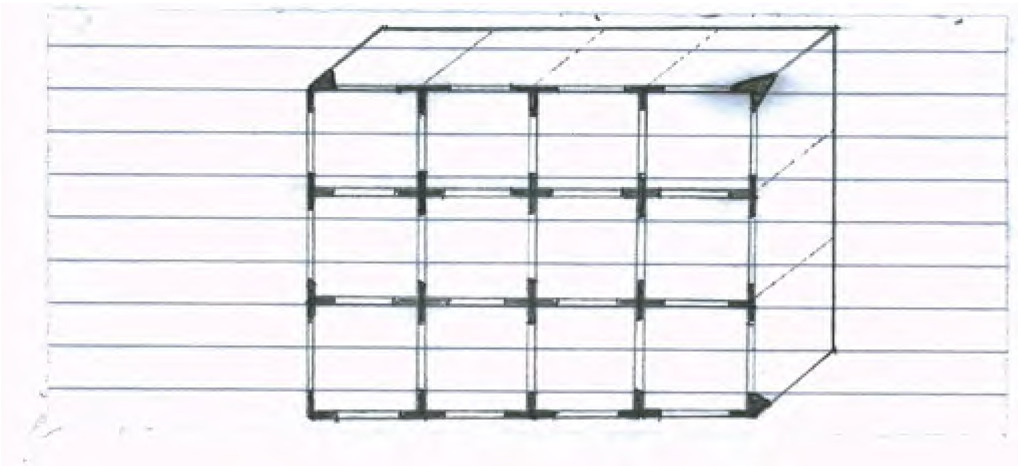
  الجواب: (٢ س)^{٢} = ٩٠٠ مترمربع

المرابـط

السؤال: يعمل سالم نجاراً، ويصنع أرففاً تثبت على الحائط لعرض التحف.

يستعمل سالم قطعاً معدنية بثلاثة أشكال لتثبيت الأرفف مع بعضها وهي: 

يبين الشكل التالي هذه القطع المعدنية المستعملة في صنع نموذج مستطيل من الأرفف يتكون من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة.



١) ما عدد القطع المعدنية التي على الشكل  ، والتي يحتاجها سالم ليصنع نموذجاً مستطيلاً من الأرفف يتكون من خمسة صفوف وستة أعمدة.

عدد القطع ذات الشكل  : ________________

٢) يريد سالم أن يصنع نموذجاً مستطيلاً من الأرفف يتكون من أربعة صفوف وسبعة أعمدة. ما عدد القطع ذات الشكل  التي يحتاج إليها؟

٣) يريد سالم أن يكتب صيغاً رياضية تُحدد عدد القطع من كل نوع عندما يكون عدد الصفوف ن وعدد الأعمدة م. أكتب الصيغ الثلاث بدلالة ن، م.

عدد القطع من النوع  :

عدد القطع من النوع  :

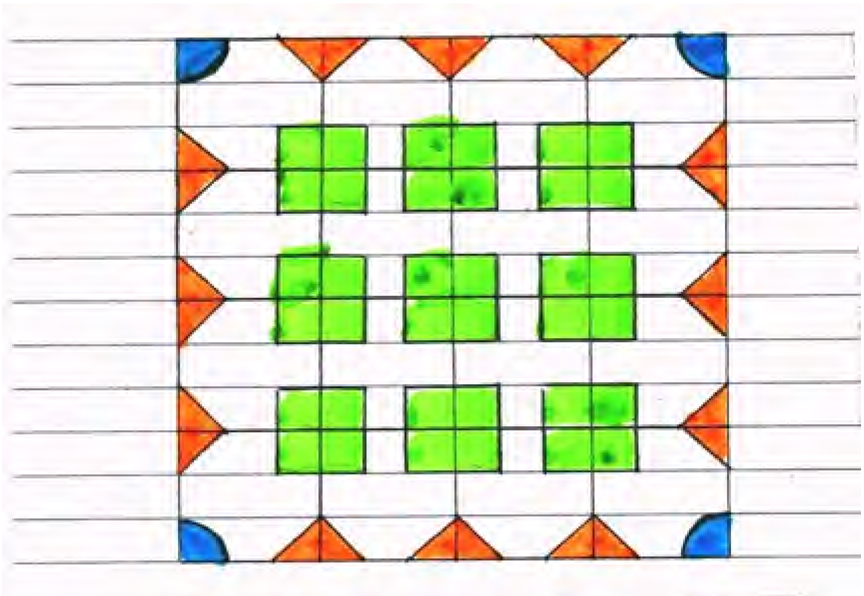
عدد القطع من النوع  :

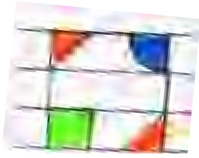
النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا السؤال الأول إجابة صحيحة ٦٠,٢٩٪ مقارنة بنسبة طلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٧٤,٧٥٪ وهي نسبة منخفضة ولا تتناسب مع سهولة السؤال.

وكانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا السؤال الثاني إجابة صحيحة ٥,٩٩٪ مقارنة بنسبة طلبة الدول المشاركة والتي بلغت ١٧,٠٣٪ والنسبتان منخفضتان، مما يشير إلى ضعف عام لدى الطلبة في تشكيل أنماط واكتشاف قاعدتها وتطبيقها. ويظهر جلياً في إجابة الطلبة على السؤال الثالث حيث كانت نسبة الطلبة الأردنيين الذين توصلوا للصيغة العامة ١,٢٩٪ ونسبة طلبة الدول المشاركة ٧,٠٥٪.

سؤال مشابه: يعمل عادل بليطاً. ويستعمل ثلاثة أشكال من البلاط هي:

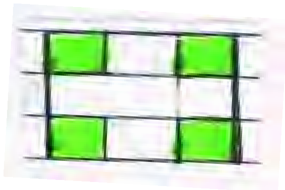
يبين الشكل التالي كيف استعملت هذه الأشكال في ترتيب مربع مكون من ١٦ بلاطة.



١) ما عدد البلاطات من الشكل  التي يحتاج إليها عادل ليكون ترتيباً

مربعاً مكوناً من ٣٦ بلاطة مربعة؟

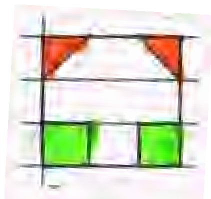
٢) يريد عادل أن يكون ترتيباً مربعاً من ٨١ بلاطة مربعة. ما عدد البلاطات من الشكل



التي يحتاج إليها؟

٣) يريد عادل أن يكون ترتيباً من ن٢ بلاطة مربعة.

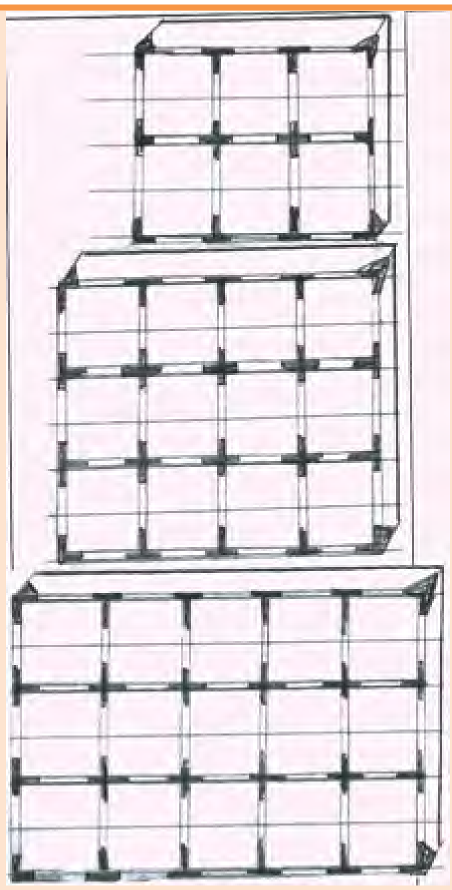
أكتب صيغة بدلالة ن يمكن لعادل أن يحسب بوساطتها عدد البلاطات من الشكل



التي يحتاج إليها.

العلاج: يعتمد حل مثل هذه الأسئلة على تنظيم معلومات في جدول لتكوين نمط واستنتاج قاعدته. ولتنمية قدرات الطلبة على تنظيم المعلومات في جداول لإظهار الأنماط واستنتاج قواعدها، يجب تضمين مثل هذه النشاطات في عمليات التدريس، وتخصيص حصص لمناقشة مثل هذه الأنشطة وإجراء حوار ومناقشة لتفعيل دور الطلبة في عملية التنظيم والاستنتاج. وتضمين الواجبات البيتية أنشطة مشابهة.

ففي السؤال الأول تنظم المعلومات في جدول كالتالي:

عدد الصفوف (ن)	عدد الأعمدة (م)	الشكل	عدد القطع من النوع	عدد القطع من النوع	عدد القطع من النوع
٢	٣		٤	٦= ٢(٢+٣)-٤	٢= (٢-١)(٣-١)
٣	٤		٤	١٠= ٢(٣+٤)-٤	٦= (٣-١)(٤-١)
٣	٥		٤	١٢= ٢(٣+٥)-٤	٨= (٣-١)(٥-١)
ن	م		٤	٢(ن+م)-٤	(ن-١)(م-١)

وإجابة الأسئلة الثلاثة تكون:

١) ٤

٢) (٤ - ١)(٧ – ١) = ١٨

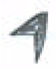
٣) عدد القطع من النوع  = ٤

عدد القطع من النوع  = (ن – ١)(م – ١)

عدد القطع من النوع  = ٢(ن + م) – ٤

ثم تُطرح أسئلة مثل:

١) إذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ويساوي ن فما عدد القطع من كل نوع؟

عدد القطع من النوع  = ٤

عدد القطع من النوع  = (ن – ١)^{٢}

عدد القطع من النوع  = ٢(٢ن) – ٤ = ٤ (ن – ١)

٢) إذا كان عدد الأعمدة يزيد عن عدد الصفوف بـ ٢ فما عدد القطع من كل نوع؟

أي م = ن + ٢

عدد القطع من النوع  = ٤

عدد القطع من النوع  = (ن – ١)(ن + ٢ – ١)

= ن^{٢} – ١

عدد القطع من النوع  = ٢(ن + ن + ٢) – ٤

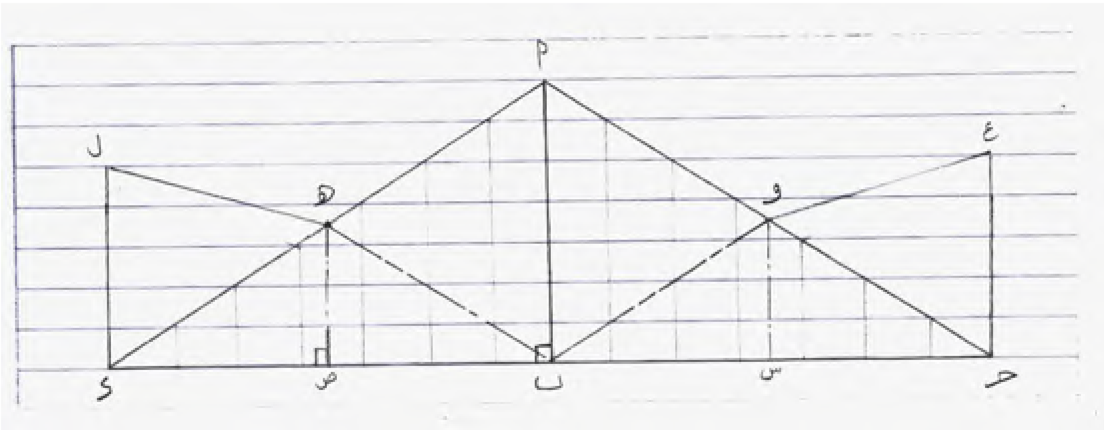
= ٤ ن

جسر معلق

تستخدم أسلاك معدنية قوية لحمل وتثبيت الجسور المعلقة.

يظهر أدناه رسم مبسط لجسر معلق. في هذا الرسم:

- أ ب مستقيم رأسي وهو محور تماثل للجسر المعلق.
- هـ منتصف أ د.
- ∠ أ ب د ، ∠ هـ ص د زاويتان قائمتان.
- جـ د مستقيم أفقي.



سؤال (١): لكل زوج من القطع المستقيمة من الجسر المعلق المبينة في الجدول أدناه. حدد ما إذا كانت القطعتان متساويتين في الطول.

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" لكل زوج من القطع المستقيمة.

زوج القطع المستقيمة	هل القطعتان المستقيمتان متساويتان في الطول؟
أد و دب	نعم / لا
هـأ و هـب	نعم / لا
دس و جـص	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن السؤال كاملاً إجابة صحيحة ٣٥,٤٤٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة مع نسبة طلبة الدول المشاركة والبالغة ٦٦,٢٢٪ خاصة إذا ما أخذ بعين الاعتبار سهولة السؤال واعتماده على معلومات رياضية بسيطة.

سؤال (٢): لكل زوج من زوايا الجسر المعلق المبينة في الجدول أدناه، حدد ما إذا كانت الزاويتان متساويتين في القياس.

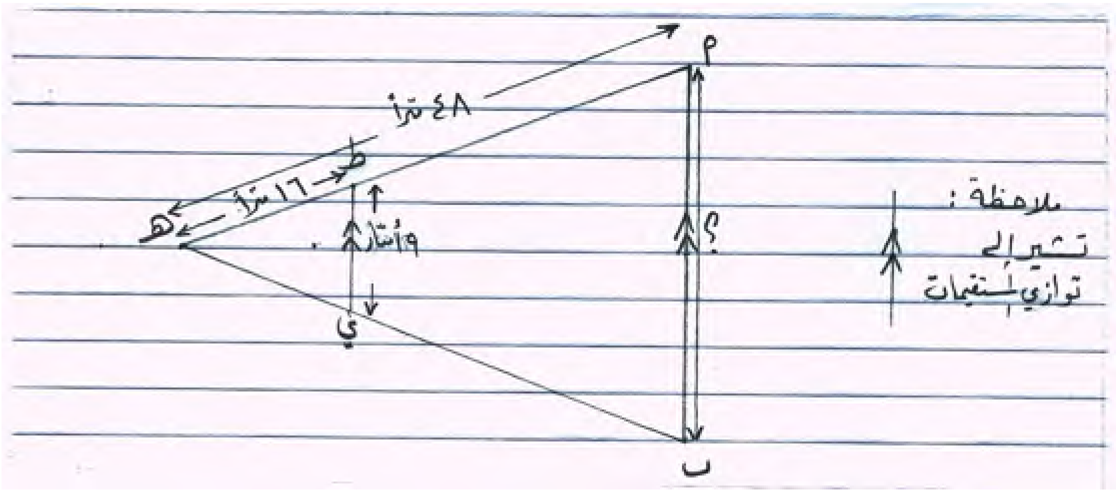
ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" لكل زاويتين.

زوج الزوايا	هل الزاويتان متساويتان في القياس؟
< أ د ب و < أ جـ ب	نعم / لا
< د هـ ص و < د أ ب	نعم / لا
< جـ أ ب و < د ب أ	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن السؤال كاملاً إجابة صحيحة ٢٢,٦٣٪ وهي منخفضة جداً بصورة عامة وأقل من نسبة طلبة الدول المشاركة والبالغة

٢٩,٧٧٪ وهي منخفضة أيضاً. مما يشير إلى تدني إدراك الطلبة لخصائص الشكل المتماثل والعلاقة بين الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين مختلفين ومتوازيين.

سؤال (٣): يبين الشكل أدناه رسماً مكبراً لمقطع من الجسر المعلق.



استعمل الرسم والمعلومات المبينة عليه لحساب ارتفاع العمود أ ب. بين خطوات الحل.

____

____

____

____

ارتفاع العمود $\overline{\text{أ ب}}$: ____________ متراً

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا عن السؤال إجابة صحيحة ١٠٪ وهي نسبة منخفضة بشكل عام ومقارنة بالنسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٢٨,٤٤٪ وهي منخفضة أيضاً. مما يشير إلى ضعف الطلبة في إدراك تشابه المثلثات والشروط الكافية للتشابه.

العلاج: معالجة الأفكار في هذا السؤال وأمثاله تتم باستعمال أسلوب الحوار والمناقشة لتوضيح المفاهيم:

- تماثل الأشكال وخواصه.
- الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين مختلفين في نقطتين مختلفتين والنتائج المترتبة على شرط أن يكون المستقيمان متوازيين.
- تشابه المضلعات والشروط الكافية في حالة المثلثات.

فإذا كان شكل متماثلاً حول خط مستقيم فإن:

- القطع المستقيمة المتناظرة تكون متطابقة.
- الزوايا المتناظرة تكون متطابقة.
- المناطق المتناظرة تكون متطابقة.

ففي السؤال الأول:

أ ب د مثلث قائم الزاوية في ب.

يُذكَر الطلبة بالخاصية التي تنص على أن الزاوية الأكبر في مثلث يقابلها الضلع الأطول. ثم يسأل الطلبة:

بما أن ق(< ب) = ٩٠° ، فهل يمكن أن توجد زاوية أخرى في المثلث أ ب جـ قياسها أكبر من أو يساوي ٩٠° ؟ ولماذا؟

إذن ق (< ب) > ق (< د)

ماذا يترتب على ذلك بخصوص طولي الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين؟

الجواب: أ د > د ب

ثم يُذكر الطلبة بخاصية المثلث القائم الزاوية:

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر طولها يساوي نصف طول الوتر.
ثم يُسأل الطلبة:

ما العلاقة بين ب هـ ، أ د ؟   الجواب: ب هـ = ١/٢ أ د

وما العلاقة بين هـ أ ، أ د ؟   الجواب: هـ أ = ١/٢ أ د

ماذا تستنتج عن العلاقة بين هـ أ ، ب هـ ؟   الجواب: هـ أ = ب هـ

ونعود لخواص تماثل الأشكال.

بما أن أ ب محور تماثل فإن:

ب د = ب جـ

ب س = ب ص

____________ وبالجمع

د س = جـ ص

وفي السؤال الثاني:

ما الزاوية التي تناظر < أ د ب؟ **الجواب:** < أ جـ ب

ما العلاقة بينهما؟   **الجواب:** ق (< أ د ب) = ق (< أ جـ ب)

هل الزاويتان جـ أ ب ، د ب أ متناظرتان؟ الجواب: لا

هل هما متطابقتان؟   **الجواب:** لا

ولماذا؟   **الجواب:** لأنهما غير متناظرتين وكلاهما زاوية داخلية في مثلث و < أ ب د قائمة.

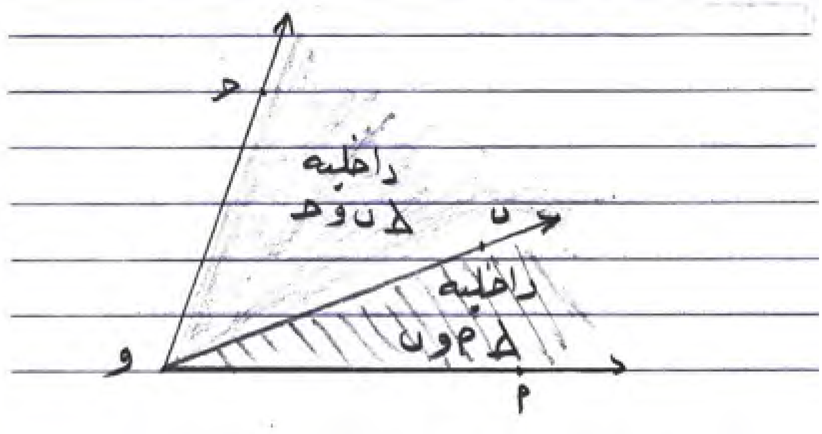
أو: لأن < أ ب د ، < أ ب جـ متجاورتان على خط مستقيم
ولأن < أ ب د قائمة فإن < أ ب جـ قائمة.

إذن لا يمكن أن تكون < جـ أ ب قائمة. لماذا؟

ويسأل الطلبة عن مفهوم التجاور بين الزوايا:

تكون زاويتان متجاورتين إذا وفقط إذا كان بينهما ضلع مشترك وداخليهما منفصلتين.

سؤال: هل وجود ضلع مشترك بين زاويتين يحتم أن يكون لهما رأس مشترك؟



الزاويتان أ و ب ، ب و جـ متجاورتان لأن:

- و ب ضلع مشترك.
- داخلية < أ و ب غير متقاطعة مع داخلية < ب و جـ.

وبالنسبة للسؤال الثالث:

يناقش الطلبة بمفهوم تشابه المضلعات.

يكون مضلعان متشابهين إذا وفقط إذا كان لهما العدد نفسه من الأضلاع ولهما الشكل نفسه.

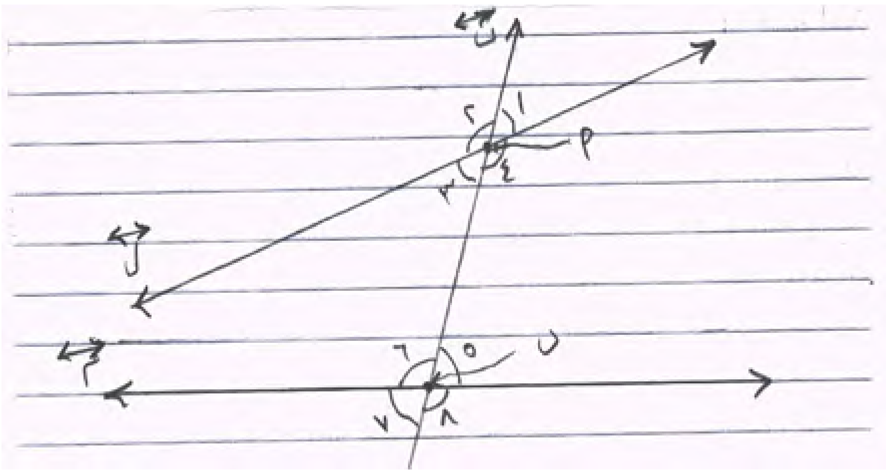
والشروط الكافية لذلك هي:

- الزوايا المتناظرة متطابقة.
- والأضلاع المتناظرة متناسبة.

وفي حالة **المثلثات:** للمثلث ستة عناصر. ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ويكفي لتشابه مثلثين توفر الشروط التالية:

١) تطابق الزوايا المتناظرة في المثلثين وينتج عن ذلك تناسب الأضلاع المتناظرة.
٢) تناسب الأضلاع المتناظرة في المثلثين وينتج عن ذلك تطابق الزوايا المتناظرة.
٣) تناسب زوجين من الأضلاع المتناظرة في المثلثين وتطابق الزاويتين المحصورتين في المثلثين وينتج عن ذلك تناسب الضلعين المتبقيين وتطابق الزوايا المتناظرة الأخرى.

ويناقش الطلبة بالزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين مختلفين في نقطتين مختلفتين.



ففي الشكل أعلاه:

$\overleftrightarrow{ن}$ يقطع $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ في النقطتين أ ، ب

نسمي الزوايا ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ زوايا داخلية.
والزوايا ١ ، ٢ ، ٧ ، ٨ زوايا خارجية.

وتعرف العلاقات التالية على مجموعة الزوايا ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

١) **التبادل:** تكون زاويتان متبادلتين داخليا (خارجيا) إذا وفقط إذا كانتا داخليتين (خارجيتين) وفي جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين.

التبادل الداخلي: ٣ و ٥	التبادل الخارجي: ١ و ٧
٤ و ٦	٢ و ٨

٢) **التحالف:** تكون زاويتان متحالفتين داخليا (خارجيا) إذا وفقط إذا كانتا داخليتين (خارجيتين) وفي جهة واحدة من القاطع.

سؤال: هل شرط " غير متجاورتين" ضروري؟

التحالف الداخلي: ٣ و ٦	التحالف الخارجي: ١ و ٨
٤ و ٥	٢ و ٧

٣) **التناظر:** تكون زاويتان متناظرتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما داخلية والأخرى خارجية وفي جهة واحدة من القاطع وغير متجاورتين.

التناظر: ١ و ٥
٢ و ٦
٣ و ٧
٤ و ٨

سؤال: إذا حُذف الشرط "غير متجاورتين" من تعريف التناظر. فهل ينطبق الشرطان المتبقيان على أزواج من الزوايا غير المذكورة أعلاه؟ أذكرها.

وعند إضافة شرط لمجموعة الشروط في أي عبارة شرطية فإنه يترتب على ذلك نتائج بالإضافة للنتائج الأولى.

نظرية: إذا قطع مستقيم مستقيمين مختلفين و**متوازيين** فإن:

١) كل زاويتين متبادلتين (داخلياً أو خارجياً) متطابقتان
٢) كل زاويتين متحالفتين (داخلياً أو خارجياً) متكاملتان.
٣) كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

والعكس صحيح أيضاً.

سؤال: لماذا تم الاستغناء عن الشرط "... في نقطتين مختلفتين" في النظرية؟

سؤال: أكتب نص عكس النظرية.

وبالعودة إلى السؤال الثاني:

$\overleftrightarrow{\text{د ب}}$ قاطع لـ $\overleftrightarrow{\text{هـ ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

ما العلاقة بين الزاويتين هـ ص د ، أ ب د؟ **الجواب:** متطابقتان.

وكيف تصف وضعهما؟ **الجواب:** متناظرتان.

ماذا تستنتج حول العلاقة بين هـ ص ، أ ب؟ **الجواب:** متوازيان.

وبما أن هـ ص // أ ب ، د أ قاطع لهما، فماذا تستنتج حول الزاويتين د هـ ص ، د أ ب ؟

والآن، نعود للسؤال الثالث:

بما أن ط ي // أ ب ، هـ أ قاطع لهما فإن:

< هـ ط ي تطابق < هـ أ ب. لماذا؟

وكذلك ط ي // أ ب ، هـ ب قاطع لهما فإن

< هـ ي ط تطابق < هـ ب أ. لماذا؟

وكذلك: < هـ تطابق < هـ. لماذا؟

إذن زوايا المثلث هـ ط ي تطابق نظيراتها في المثلث هـ أ ب.

هل هذا يكفي لاستنتاج أن المثلثين هـ ط ي ، هـ أ ب متشابهان؟ **الجواب:** نعم.

ما النتائج المترتبة على ذلك؟ **الجواب:** الأضلاع المتناظرة متناسبة.

إذن $\frac{\text{هـ ط}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ط ي}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ي}}{\text{هـ ب}}$ وبالتعويض

$\frac{١٦}{٤٨} = \frac{٩}{\text{أ ب}}$ ومنها أ ب = ٢٧ متراً

تقسيم قرص دائري

تعمل سميرة مدرسة في المرحلة الابتدائية. سميرة معلمة مخلصة، تقضي وقتاً طويلاً في إعداد الوسائل التعليمية. احتاجت يوماً أن تقسم قرصاً ورقياً دائرياً لتصنع منه أجزاء تمثل كسوراً. طلبت من أخيها سهيل أن يساعدها في ذلك. رسم أخوها دائرة، ورسم فيها نصفي قطر قياس الزاوية بينهما ٤٠° ليحدد قطاعاً دائرياً.

سؤال (١):

إذا استمر سهيل في رسم أنصاف أقطار قياس الزاوية بين كل نصفي قطرين متتاليين ٤٠° فهل سينتج عن ذلك عدد صحيح من القطاعات الدائرية؟ وما عددها؟ وما الكسر الذي يمثله كل قطاع من القرص كله؟

الحل:____

____

____

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه ١٤,٥٣٪ مقارنة بالنسبة المئوية العامة والبالغة ٢٧,٦٢٪ والنسبتان منخفضتان عموماً.

أعتقد أن السبب في انخفاض نسبة الطلبة الذين أجابوا إجابات صحيحة يُعزى إلى ضعف في معرفة الطلبة بقانون مساحة القطاع الدائري والنسبة بين مساحتي قطاعين دائريين في دائرة.

سؤال (٢): عرفت سميرة من أخيها الفكرة الأساسية لتقسيم قرص دائري إلى قطاعات متطابقة. ترغب سميرة أن تقسم أقراصاً عدة لتعمل نماذج تمثل كسوراً مختلفة.

- ما هي الشروط التي ستلتزم بها جميلة على الزاوية المركزية حتى يتم تقسيم القرص الدائري إلى عدد صحيح من القطاعات؟
- هل يمكن تقسيم قرص إلى سبعة قطاعات متطابقة قياس الزاوية المركزية لكل منها عدد صحيح من الدرجات؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة عن سؤال مشابه منخفضة جداً حيث بلغت ٧,٨٤٪ وهي قريبة من النسبة المئوية العامة والبالغة ٧,٨٧٪ . وأعتقد أن هذا التدني في نسبة الطلبة الذين أجابوا إجابة صحيحة يُعزى إلى ضعف عند الطلبة في تحديد الشروط اللازم وضعها على المتغيرات حتى يكون الحل معقولاً. فكل مسألة تتضمن معطيات ومطلوب وشروط يجب الالتزام بها لتحديد المطلوب المعقول والمقبول.

العلاج: يوجد ضعف واضح عند الطلبة في لغة الرياضيات. فهم يتعاملون مع المفردات الرياضية وهي في الغالب أسماء لمفاهيم دون أن يُدركوا معناها الرياضي الدقيق. فإتقان أي لغة أمر ضروري وهام لسلامة التفكير. ولذلك يجب على المعلمين عند تدريسهم للمعلومات الرياضية أن لا يُغفلوا الجانب اللغوي. وعليهم أن يتأكدوا من أن الطلبة أدركوا المعاني الرياضية الصحيحة لكل مفردة. فمثلاً؛

الدائرة: منحنى مغلق بسيط جميع نقطه تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة معلومة بداخله.

تُسمى النقطة المعلومة مركز الدائرة.
والبُعد الثابت بين نقط الدائرة ومركزها يسمى طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز **نق**.
أما نصف قطر الدائرة فهو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة ونقطة على الدائرة.
والمنطقة المظللة في الشكل إلى اليسار تُسمى

داخلية الدائرة أو منطقة دائرية. فالمنطقة الدائرية هي جزء من مستوى يحده دائرة. وهو ما نقيسه تحت مسمى مساحة المنطقة الدائرية. حيث:مساحة المنطقة الدائرية = π نق^2

أما الدائرة نفسها فلا مساحة لها، وإنما يمكننا قياس طولها ويُسمى محيط الدائرة حيث:

محيط الدائرة = ٢ π نق.

والعدد π عدد حقيقي غير نسبي يمثل النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

أي أن $\pi = \dfrac{\text{محيط الدائرة}}{\text{طول قطر الدائرة}}$

والقطاع الدائري هو جزء من داخلية الدائرة محصور بين نصفي قطر في الدائرة وقوس منها.

وتُسمى الزاوية أ م ب الزاوية المركزية للقطاع الدائري وإذا كان ق (< أ م ب) = هـ راديان

فإن مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـ نق^2

والنسبة بين مساحتي قطاعين دائريين لدائرة واحدة تساوي النسبة بين قياسي زاويتهما المركزيتين.

إن معرفة الطالب وإدراكه لها ستمكنه من معالجة السؤالين وحلهما.

فبالنسبة للسؤال (١):

حتى يتم تقسيم القرص الدائري (المنطقة الدائرية) إلى عدد صحيح من القطاعات الدائرية المتطابقة يجب أن يكون قياس الزاوية المركزية لكل قطاع عامل لـ ٣٦٠° (قياس الزاوية المركزية الكاملة عند مركز الدائرة).

وبما أن ٣٦٠° ÷ ٤٠° = ٩ فإن القياس ٤٠° عامل لـ ٣٦٠°

إذن سينتج مع سهيل عدد صحيح من القطاعات الدائرية وعددها ٩ قطاعات.

وبما أن جميع القطاعات متطابقة فإن كل قطاع يمثل $\frac{1}{9}$ من القرص كله.

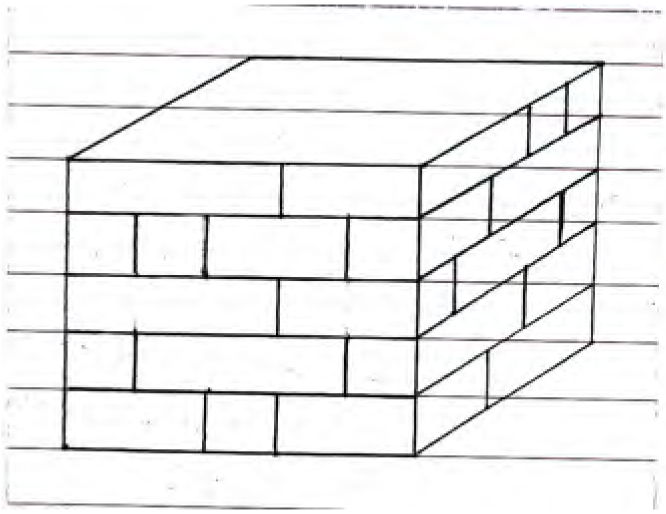
وبالنسبة للسؤال (٢):

الشرط اللازم والضروري لقياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري حتى يتم تقسيم القرص الدائري إلى عدد صحيح من القطاعات هو أن يكون قياس الزاوية المركزية للقطاع عاملاً لـ ٣٦٠°. وعليه سيكون عدد القطاعات الدائرية عاملاً للعدد ٣٦٠°.

وبما أن ٣٦٠ ÷ ٧ = ٥١ والباقي ٣ فإن العدد ٧ ليس عاملاً للعدد ٣٦٠. إذن لا يمكن تقسيم قرص إلى سبعة قطاعات متطابقة التزاماً بشرط أن يكون قياس الزاوية المركزية لكل منها عدد صحيح من الدرجات.

حجارة البناء

بنى مروان في إحدى الزوايا الخارجية لمنزله قاعدة ليثبت عليها تمثالا لأسد. استعمل مروان أحجارًا بثلاثة أطوال مختلفة: ٢٥ سم، ٥٠ سم، ٧٥ سم وبعرض واحد ٢٥ سم لتغطية الواجهتين الخارجيتين. كما في الشكل أدناه.



سؤال (١): افرض أن مروان استعمل النوع الصغير من الحجارة فقط.

ما عدد الحجارة الصغيرة التي سيحتاجها لتغطية الواجهتين الخارجيتين.

النتيجة: كانت نتيجة الطلبة الأردنيين على سؤال مشابه منخفضة وبلغت ١١,١١٪ مقارنة مع النتيجة العامة لطلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٣٨,٣٤٪

وتقوم فكرة السؤال على عد القطع المكونة لمجسم ما من خلال صورة لمجسم ذو ثلاثة أبعاد.

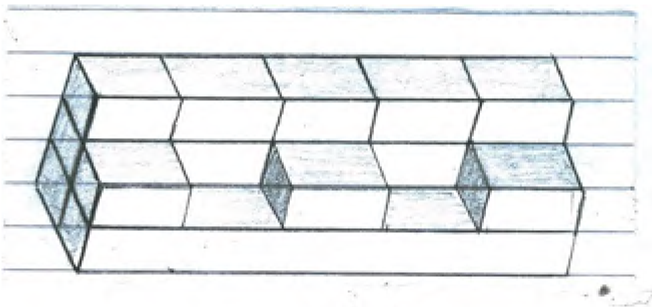
أسئلة مشابهة:

سؤال (١): الطوب

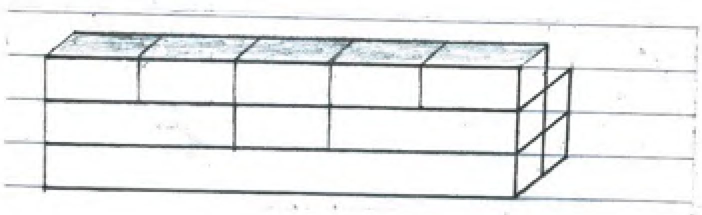
في كومة من الطوب تجد الطوب بثلاثة أحجام مختلفة.

طولا طوبتين من الحجم المتوسط وطول طوبة صغيرة يساوي طول طوبة واحدة كبيرة. وطولا طوبتين صغيرتين يساوي طول الطوبة المتوسطة.

المنظران أدناه لنموذج صنع من هذا الطوب.



منظر أمامي



منظر خلفي

افرض أنك تريد صنع النموذج نفسه باستعمال الطوب الصغير فقط.

فكم طوبة صغيرة تحتاج؟

____

____

____

الجواب: ____

النتيجة : كانت نتيجة الطلبة الأردنيين على سؤال مشابه منخفضة وبلغت ١١,١١٪ مقارنة مع النتيجة العامة لطلبة الدول المشاركة والتي بلغت ٣٨,٣٤٪.

وتقوم فكرة السؤال على عد القطع المكونة لمجسم ما من خلال صورة لمجسم ذو ثلاثة أبعاد.

سؤال (٢): حجارة النرد

في الصورة أدناه إنشاءٌ صنع باستعمال سبعة أحجار نرد متطابقة مرقمة وجوهها من ١ إلى ٦

وعندما يُنظر للمنشأ من أعلى يمكن رؤية خمسة أحجار فقط.

ما عدد النقط التي يمكن رؤيتها عندما يُنظر لهذا المنشأ من أعلى؟

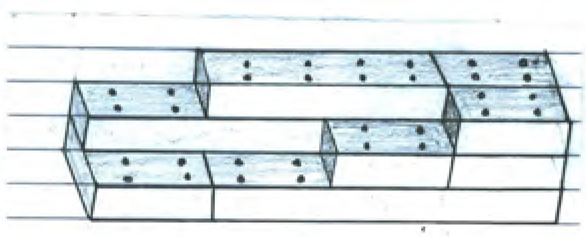
عدد النقط التي يمكن رؤيتها:____

سؤال (٣): قطع اللوجو

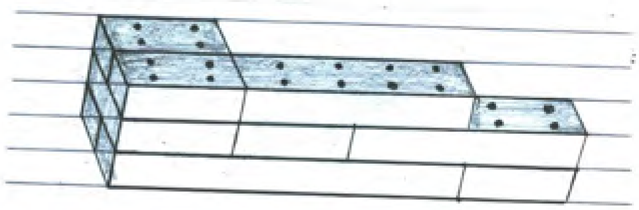
في كومة من قطع اللوجو تجد القطع بثلاثة أحجام مختلفة.

طول قطعة من الحجم المتوسط وطول قطعة صغيرة يساوي طول قطعة واحدة كبيرة وطولا قطعتين صغيرتين يساوي طول قطعة متوسطة.

الشكل أدناه لنموذج صنع من هذه القطع.



منظر أمامي



منظر خلفي

افرض أنك تريد صنع النموذج نفسه باستعمال القطع الصغيرة فقط.

فكم طوبة صغيرة ستحتاج؟

الجواب: ____

العلاج: تهدف مثل هذه الأسئلة إلى تنمية قدرة الطلبة على التخيل ودقة الملاحظة. والتحويل من وحدة لأخرى. حيث يقوم الطالب بعد الحجارة في الجدار الأمامي وحساب عددها بالحجارة الصغيرة:

الحجر الكبير = ٣ × الحجر الصغير

وعدد الحجارة الكبيرة = ٨

إذن فالحجارة الكبيرة = ٨ × ٣

= ٢٤ حجراً صغيراً

الحجر المتوسط = ٢ × الحجر الصغير

وعدد الحجارة المتوسطة = ٨

∴ فالحجارة المتوسطة = ٨ × ٢

= ١٦ حجراً صغيراً

عدد الحجارة الصغيرة = ١٠

∴ سيحتاج مروان ٢٤ + ١٦ + ١٠ = ٥٠ حجراً صغيراً

ويُسأل الطلبة عن حلول أخرى للسؤال مثل:

حلٌ ثان: مساحة الحجر الصغير = ٢٥ × ٢٥

= ٦٢٥ سم^{٢}

طول كل واجهة = ١٢٥ سم

وارتفاعها = ٥ × ٢٥

= ١٢٥ سم

∴ فمساحة كل واجهة = ١٢٥ × ١٢٥

= ١٥٦٢٥ سم^{٢}

ومساحة الواجهتين معاً = ٢ × ١٥٦٢٥

= ٣١٢٥٠ سم^{٢}

∴ عدد الحجارة الصغيرة لتي سيحتاها مروان = ٣١٢٥٠ ÷ ٦٢٥

= ٥٠ حجراً

حلٌ ثالث: طول الصف الواحد من كل واجهة = ١٢٥ سم

وهذا يحتاج إلى ١٢٥ ÷ ٢٥ = ٥ حجارة صغيرة

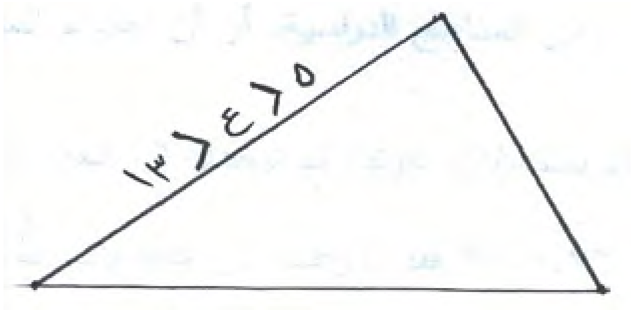
∴ فالواجهة الواحدة وبها خمسة صفوف ستحتاج إلى ٥ × ٥ = ٢٥ حجراً صغيراً

والواجهتان ستحتاجان إلى ٢٥ × ٢ = ٥٠ حجراً صغيراً.

أطوال أضلاع المثلث

سؤال: إذا كان طوب أحد أضلاع مثلث أكبر من ٥ وأقلّ من ١٣، فما طولا الضلعين الآخرين.

وما القيم الممكنة لطول هذا الضلع التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟



أسئلة مشابهة:

١) أي مجموعة من مجموعات الأعداد التالية تمثل أطوال أضلاع مثلث؟

أ) {٣، ٥، ٦}　　　ب) {٢، ٥، ٨}

ج) {١، ٤، ٥}　　　د) {٦، ٧، ١٣}

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة وكاملة منخفضة جدًا حيث بلغت ٠,٥٦٪ وهي أقل من النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٦,٥١٪. وكلا النسبتين منخفضة. وفي اعتقادي أن السبب يعود إلى عدم وجود الخاصيّة التي تحكم العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث في المناهج الدراسية، أو أن اهتمام المعلمين بها لم يكن كافياً.

وهناك قسم من الطلبة قام بمحاولات جزئية لم توصله إل الحل الكامل ونسبتهم المئوية ١,٧٢٪.

أما بالنسبة الباقية وهي ٩٧,٧٢٪ فقد توزعت بين محاولات خطأ أو إهمال للسؤال أو لم يصل إليه الطالب.

العلاج: يمكن معالجة مثل هذه الأسئلة بإستراتيجية حل المسألة.

أولا: فهم المسألة: معطى مثلث معلوم مدى طول أحد أضلاعه.

والمطلوب إيجاد طولي الضلعين الآخرين، ومعرفة القيم الممكنة لطول هذا الضلع التي تجعل المثلث قائم الزاوية.

ثانيا: البحث عن طريقة للحل: العلاقة التي تربط بين أطوال أضلاع أي مثلث هي: طول أي ضلع من أضلاع المثلث أكبر من الفرق بين طولي الضلعين الآخرين وأصغر من مجموع طوليهما.

ثالثا: التنفيذ: نفرض أن طول الضلع المعطى مداه ع.

وطولي الضلعين الآخرين س، ص حيث س > ص فيكون:

س – ص < ع < س + ص

وبما أنّ ٥< ع < ١٣ معطى

فإنّ س – ص = ٥

، س + ص = ١٣

ونحل هاتين المعادلتين:

بجمع المعادلتين ينتج ٢س = ١٨

ومنها س = ٩ وحدات.

وبالتعويض في المعادلة الثانية وحلّها نجد أنّ ص = ٤ وحدات.

رابعا: التحقق:

بما أنّ ع > س – ص يعني أن ع > ٩ – ٤

أي أن ع > ٥

وكذاك ع < س + ص فإنّ ع < ٩ + ٤

أي أن ع < ١٣

إذن ٥ < ع < ١٣

وهو ما يتفق مع المعطيات.

ولمعرفة القيم لطول الضلع التي تجعل المثلث قائم الزاوية نناقش حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان الوتر هو الضلع الذي طوله ٩سم فإن

ع^{٢} + ٤^{٢} = ٩^{٢}

ع^{٢} = ٨١ – ١٦

= ٦٥

فتكون ع = ٦٥ = ٨سم تقريباً وهذه القيمة تنتمي للفترة (٥ ، ١٣)

الحالة الثانية: إذا كا ن الوتر هو الضلع الثالث فيكون:

ع^{٢} = ٤^{٢} + ٩^{٢}

= ١٦ + ٨١

= ٩٧

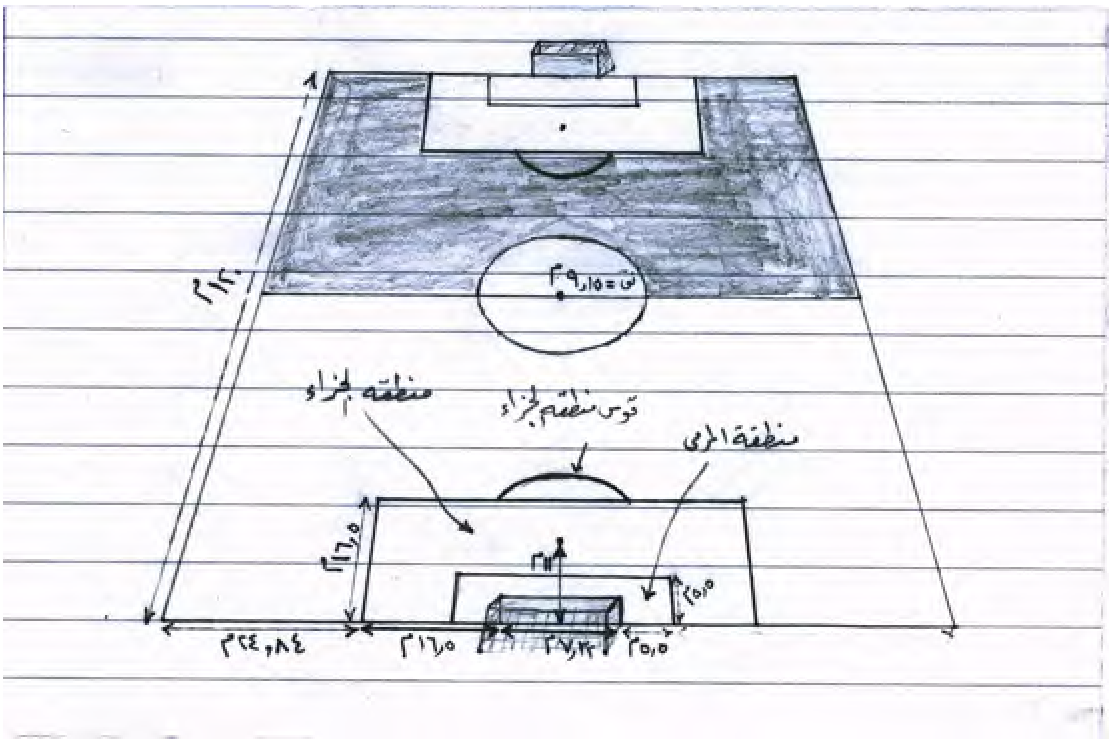
فتكون ع = ٩٧ = ٩،٨٥سم تقريباً وهذه القيمة تنتمي للفترة (٥ ، ١٣)

إذن توجد قيمتان لطول الضلع الثالث تجعلان المثلث قائم الزاوية. وهما ٦٥ ، ٩٧

سؤال : هل يمكن أن يكون الضلع الذي طوله ٤سم وتراً؟ ولماذا؟

ملعب كرة القدم

يبين الشكل الآتي مخططا لملعب كرة قدم وعليه القياسات بالأمتار.



سؤال (١): كم مترًا عرض هذا الملعب؟

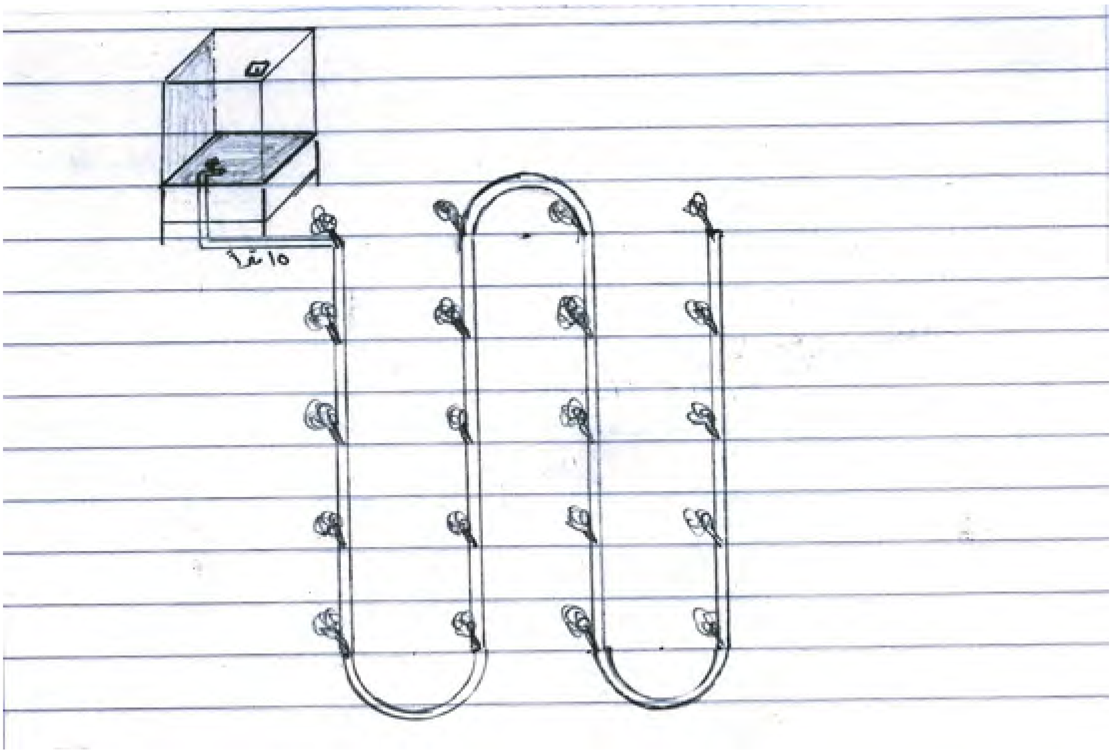
النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه منخفضة جدًّا حيث بلغت ٢,٨٦٪ في حين بلغت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٢٤,١٥٪. وفي اعتقادي أن الطلبة لم يتدربوا على حساب مسافة من مكوّناتها، ولم يعتادوا على التعامل من مواقف من واقع الحياة.

سؤال (٢): إذا جرى أسامة دورة كاملة حول الجزء المظلّل من الملعب وجرى تيسير دورة كاملة حول النصف الآخر من الملعب متتبعا الخطوط الخارجية فأي المسافتين أكبر التي قطعها أسامة أم التي قطعها تيسير؟ وما الفرق بينهما؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه لهذا السؤال منخفضة جدا أيضا حيث بلغت ٢,٧٢٪ وهي أقل من النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة التي كانت ١٥,١٩٪ وهي منخفضة أيضا.

سؤال (٣): ما طول قوس منطقة الجزاء؟

سؤال إضافي:



يرغب سامر أن يروي أشجار حديقته بالتنقيط. تحوي حديقة سامر أربعة صفوف من الأشجار. المسافة بين كل صفيّن متجاورين عشرة أمتار. والمسافة بين كل شجرتين متجاورتين عشرة أمتار أيضا.

رسم سامر المخطط أعلاه ليبيّن خط الأنابيب الذي سيستعمله.

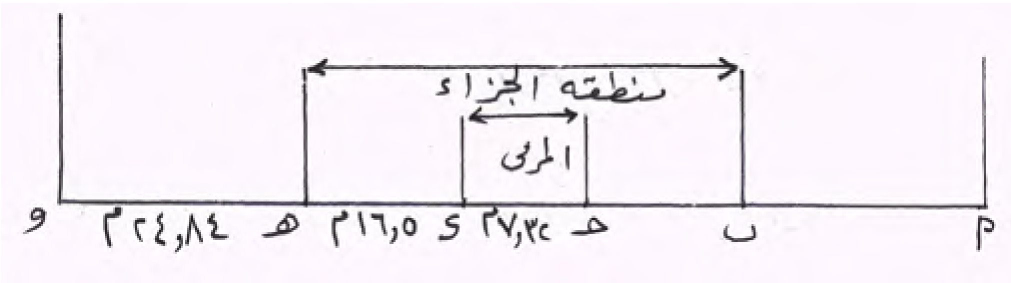
سؤال (١): إذا كان ارتفاع صنبور الخزان عن الأرض مترًا واحدًا وبعده الأفقي عن أول شجرة ١٥ مترا، والقوس بين كل صف والصف الذي يليه نصف دائرة؛ فكم من أنابيب الري سيحتاج سامر؟

سؤال (٢): وإذا وضع الخزّان بين الصفين الثاني والثالث بحيث كان الصنبور يرتفع مترًا واحدًا عن نقطة منتصف المسافة بين الشجرتين، فهل سيحتاج سامر لأنابيب أطول أم أقصر من الطريقة الأولى؟

العـلاج: لمعالجة مثل هذه الأسئلة يُدرّب الطلبة على تقسيم المسافة الكلّيّة إلى أجزاء مناسبة يسهل إيجادها ثم تجمع المسافات الجزئيّة لإيجاد المسافة الكلية.

فبالنسبة للسؤال (١):

الرسم أدناه يوضح عرض الملعب بأجزائه المعطاة أطوالها.



نتيجة لتماثل الملعب حول منتصف المرمى فإنّ:

أ ب = هـ و

ب جـ = د هـ

إذن؛ عرض الملعب = (أ ب + هـ و) + (ب جـ + د هـ) + جـ د

$= ٢ \times ٢٤,٨٤ + ٢ \times ١٦,٥ + ٧,٣٢$

$= ٤٩,٦٨ + ٣٣ + ٧,٣٢$

= ٩٠,٠٠٠ مترًا

ويمكن حساب عرض الملعب بتقسيمة أخرى:

نقطة منتصف المرمى هي نقطة منتصف عرض الملعب. ولذلك نحسب المسافة بين نقطة منتصف المرمى وزاوية الملعب فتكون هذه المسافة تساوي نصف عرض الملعب.

إذن؛

عرض الملعب $= ٢ \times (٢٤,٨٤ + ١٦,٥ + \frac{٧,٣٢}{٢})$

$= ٤٩,٦٨ + ٣٣ + ٧,٣٢$

= ٩٠ مترًا

وبالنسبة للسؤال (٢):

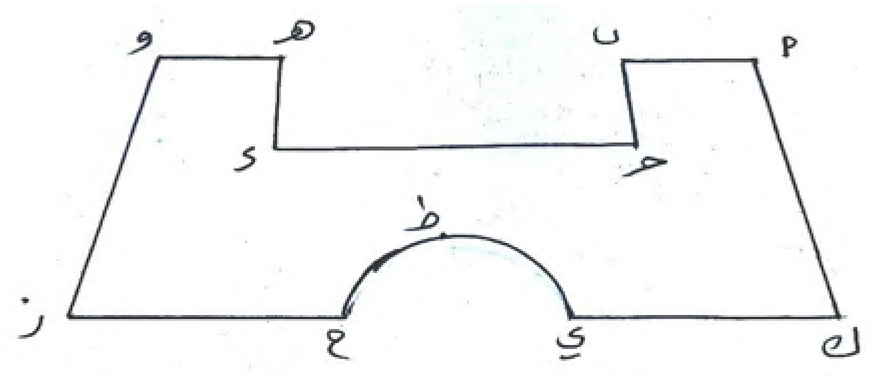
المسافة التي ركضها تيسير= $٢ \times$ عرض الملعب + $\frac{١}{٢} \times$ طول الملعب + $\frac{١}{٢} \times$ طول الملعب

$= ٢ \times ٩٠ + \frac{١}{٢} \times ١٢٠ + \frac{١}{٢} \times ١٢٠$

$= ١٨٠ + ٦٠ + ٦٠$

= ٣٠٠ مترًا

الرسم أدناه يبيّن المسافة التي ركضها أسامة



لاحظ أن أ ب = هـ و = ٢٤,٨٤م

جـ د = ب هـ في الرسم السابق.

= ٢ × ١٦,٥ + ٧,٣٢

= ٣٣ + ٧,٣٢

= ٤٠,٣٣م

ب جـ = هـ د = ١٦,٥م

أ ك = وز = ٦٠م

ك ي + ح ز = ك ز – ي ح

= ٩٠ – ٢ نق

= ٩٠ – ١٨,٣٠

= ٧١,٧ م

طول القوس ي ط ح = $\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق

= ٣,١٤ × ٩,١٥

= ٢٨,٧٣م

إذن؛

المسافة التي ركضها أسامة= (أ ب + هـ و) + (ب جـ + هـ د) + جـ د + (أ ك + وز) + (ك ى + ح ز) + طول القوس ى ط ح

= ٢ × ٢٤,٨٤ + ٢ × ١٦,٥ + ٤٠,٣٣ + ٢ × ٦٠ + ٧١,٧٠ + ٢٨,٧٣

= ٤٩,٦٨ + ٣٣ + ٤٠,٣٣+ ١٢٠ + ٧١,٧٠ + ٢٨,٧٣

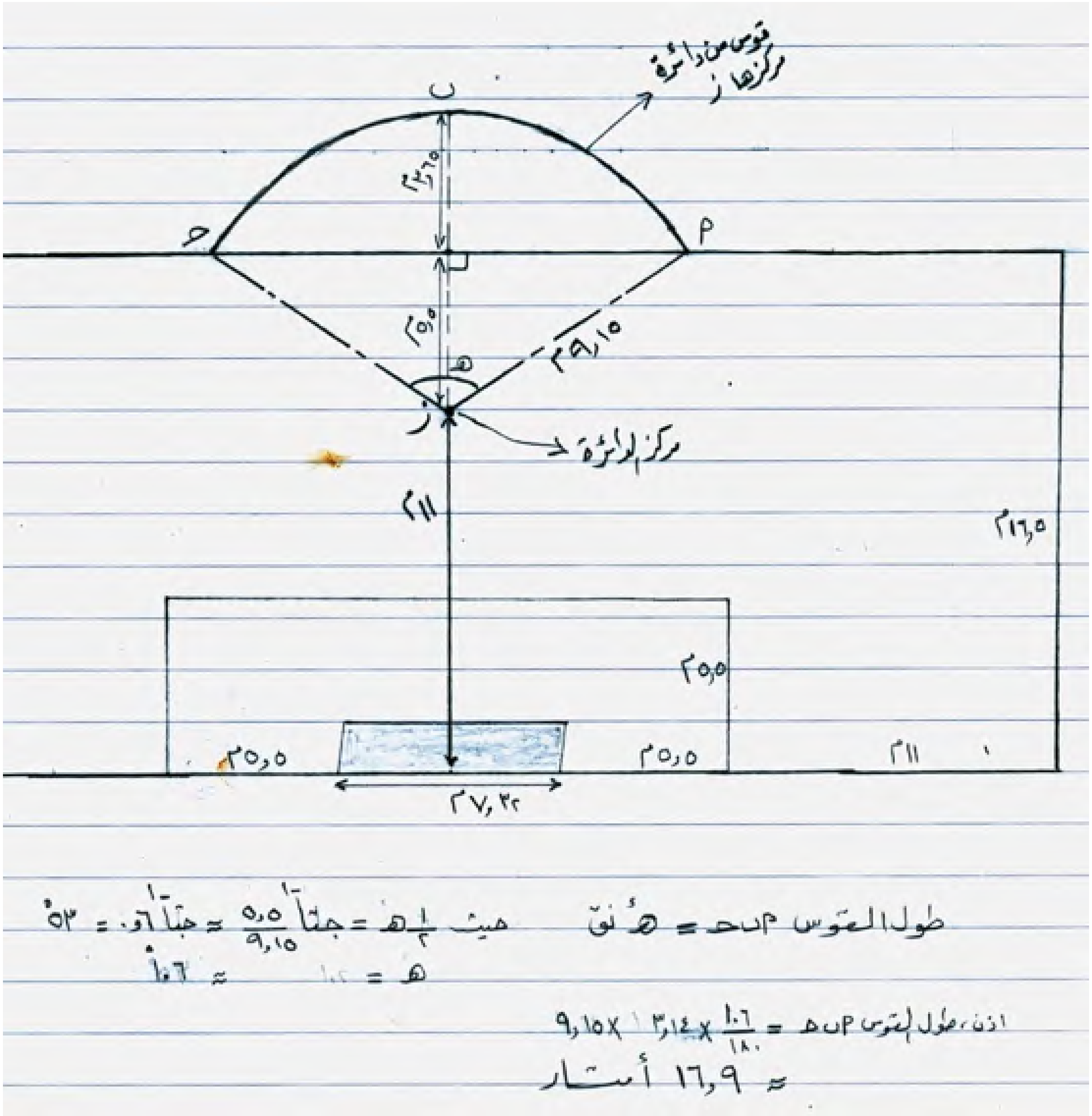
= ٣٤٣,٤٤ مترًا

مما سبق نلاحظ أنّ المسافة التي ركضها أسامة أكبر من المسافة التي ركضها تيسير والفرق بينهما = ٣٤٣,٤٤ – ٣٠٠

= ٤٣,٤٤ مترًا

وبالنسبة للسؤال (٣):

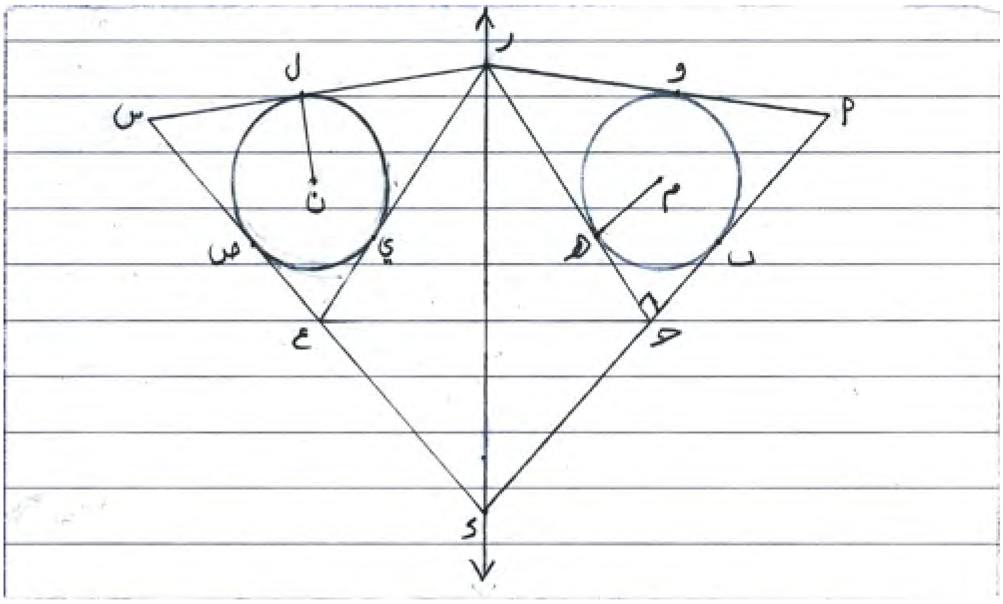
يبين الشكل أدناه رسماً مكبراً لمنطقة الجزاء.



الأشكال المتماثلة

يوجد في الطبيعة كثير من الأشكال المتماثلة

كما يُصمّم الإنسان كثيرًا من التصميمات المتماثلة.



يُظهر الشكل أعلاه شكلا متماثلاً فيه:

- $\overleftrightarrow{\text{ر د}}$ محور التماثل.
- م مركز دائرة تمس أضلاع المثلث أ جـ ر في ب، هـ، و.
- ن مركز دائرة تمس أضلاع المثلث س ع ر في ص، ي، ل.
- $\overline{\text{ر جـ}}$ عموديّة على $\overline{\text{أ د}}$.

سؤال (١): لكل زوج من القطع المستقيمة في الجدول أدناه، حدّد ما إذا كانت القطعتان متساويتين في الطول.

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" لكل زوج من القطع المستقيمة.

زوج القطع المستقيمة	هل القطعتان المستقيمتان متساويتان في الطول؟
جـ د ، د ع	نعم / لا
م هـ ، ن ل	نعم / لا
أ جـ ، أ ر	نعم / لا
ر ل ، ر هـ	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا سؤالا مشابها إجابة صحيحة لجميع الفقرات٣٥,٤٤٪ وهي نسبة منخفضة مقارنة مع النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٦٦,٢٢٪. وفي اعتقادي أن هذا يُعزى لعدم إتقان الطلبة لتعلم مفهوم التماثل وخواصّه وبعض جوانب الدائرة.

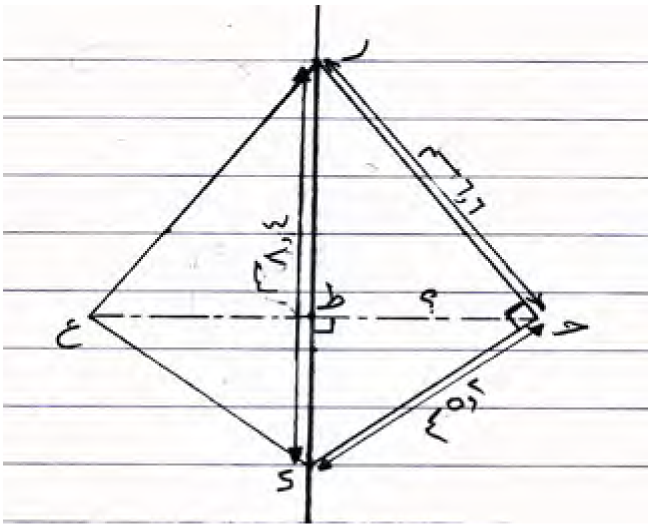
سؤال (٢): لكل زوج من الزوايا في الجدول أدناه، حدّد ما إذا كانت الزوايتان متساويتين في القياس؟

ضع دائرة حول "نعم" أو "لا" لكل زوج من الزوايا:

زوج الزوايا	هل الزاويتان متساويتان في القياس؟
< م هـ جـ ، < ن ل ر	نعم / لا
< هـ جـ د، < ي ع س	نعم / لا
< أ ر جـ ، < ر س ع	نعم / لا

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا سؤالا مشابها إجابة كاملة وصحيحة ٢٢,٦٣٪ وهي نسبة منخفضة بصورة عامة وأقل من النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والبالغة ٢٩,٧٧٪ وهي منخفضة أيضا. مما يشير إلى تدني فهم الطلبة لخصائص الشكل المتماثل وبعض خواص الدائرة.

سؤال (٣): يبين الشكل أدناه جزءا من الشكل الأصلي. ورُسمت حـ ع وقطعت ر د في ط.



استعمل الرسم والمعلومات المبيّنة عليه لحساب حـ ط.

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا على سؤال مشابه إجابة كاملة وصحيحة ١٠٪ في حين كانت النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة ٢٨,٤٤٪ وكلا النسبتين منخفضتان. وهذا يشير إلى ضعف عند الطلاب في تشابه المثلثات وشروط التشابه، أو أنّهم يعرفونها ولكنهم لم يُدرّبوا تدريبا كافيا على توظيف ما يعرفون من معلومات في حل المسائل وهو أحد مهارات التفكير العليا.

العلاج: معالجة هذا السؤال ومثيلاته تتم باستعمال إستراتيجية حل المسألة وإجراء حوار ومناقشة مع الطلبة لتحديد المطلوب وتذكر المعلومات ذات العلاقة ثم اقتراح فرضيات لتوظيف هذه المعلومات لحل الأسئلة.

أولا: فهم المسألة:

- **ما هي المعطيات في هذا السؤال؟**

الجواب: شكل متماثل حول خط مستقيم.

- **ماذا يترتب على تماثل خط مستقيم؟**

الجواب: التماثل حول خط مستقيم يعني أنّ جزئي الشكل حول المستقيم انعكاس لبعضهما البعض.

- **ما خواص الانعكاس في خط مستقيم؟**

الجواب: الانعكاس تحويل قياسي يحافظ على القياسات الطوليّة والمساحات وقياسات الزوايا. فطول كلّ قطعة مستقيمة يساوي طول صورتها، وقياس كلّ زاوية يساوي قياس صورتها، ومساحة كل منطقة تساوي مساحة صورتها.

- **ماذا أيضا؟**

الجواب: القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة وصورتها تكون عموديّة على محور التماثل، ومحور التماثل يُنصّفها.

نأتي الآن إلى الأسئلة:

- **ما المطلوب في السؤال الأول؟**

الجواب: هل القطعتان في كل زوج متطابقتان (متساويتان في الطول)؟

الزوج الأول: القطعتان جـد ، د ع كلّ منهما انعكاس للأخرى. لذلك فلهما الطول نفسه. فالإجابة نعم.

الزوج الثاني: بما أنّ كلا من الدائرتين انعكاس للأخرى فهما متطابقتان.

ومتى تتطابق دائرتان؟ الجواب: إذا كان نصفا قطريهما متساويين في الطول.

هل م هـ ، ن ل متطابقتان؟ الجواب: نعم، لأنهما نصفا قطرين لدائرتين متطابقتين.

الزوج الثالث: أ حـ ، أ ر ضلعان للمثلث أ حـ ر القائم الزاوية في حـ.

- هل يمكن أن تكون زاوية أخرى في المثلث أ حـ ر قائمة؟ ولماذا؟

الجواب: لا يمكن، لأن مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية ١٨٠°. وبما أنّ

ق(< حـ) = ٩٠°

فإنّ ق (< أ) + ق (< ر) = ٩٠°

أي أن قياس كل زاوية منهما أقل من ٩٠°

- ما العلاقة بين قياسات المثلث وأطوال أضلاعه؟

الجواب: الزاوية الأكبر تقابل الضلع الأطول.

وبما أن ق (< حـ) > ق (< ر)، فماذا تستنتج؟

الجواب: الضلع المقابل لـ < حـ أطول من الضلع المقابل لـ < ر.

أي أن أ ر > أ حـ

أذن أ ر ، أ حـ ، ليستا متساويتين في الطول، فالجواب: لا.

الزوج الرابع: وإذا رُسم مماسّان لدائرة من نقطة خارجها، فما العلاقة بين طولي القطعتين الواصلتين بين تلك النقطة ونقطتي التماس.

الجواب: متساويتان في الطول.

- هل رل = ري؟ ولماذا؟

الجواب: نعم لأنّهما طولا قطعتين مماسيتين للدائرة ن من النقطة ر.

وهل رو = رهـ ؟ ولماذا؟

الجواب: كالسابق.

- هل رل، رو متساويتان في الطول؟ ولماذا؟

الجواب: نعم، ؟لأنّ كلا منهما انعكاس للأخرى بمحور التماثل.

إذن؛ رل = رو ؛ رو = رهـ. ماذا تستنتج؟

الجواب: رل = رهـ بناءً على خاصية التعدّي لعلاقة المساواة.

إذن رل، رهـ متساويتان في الطول.

فالجواب: نعم

السؤال (٢):

- **ما المطلوب في هذا السؤال؟**

الجواب: هل الزاويتان في كل زوج متساويتان في القياس.

الزوج الأول: لأن نصف قطر التماس عموديّ على المماس. فالزاويتان م هـ حـ ، ن ل ر قائمتان. والزوايا القوائم متطابقة. إذن؛ فالجواب: نعم.

الزوج الثاني: الزاويتان هـ حـ د، ي ع س كل منهما انعكاس للأخرى؛ فهما متطابقتان. إذن؛ فالجواب: نعم.

الزوج الثالث: < أ ر حـ ، < س ر ع انعكاس لبعضهما البعض فهما متطابقتان.

وبما أن المثلث ر ع س غير متطابق الضلعين، أي أن ر ع ≠ ع س.

فإن ق (< س رع) ≠ ق (< رس ع)

إذن ق (< أ ر حـ) ≠ ق (< رس ع)

فالجواب: لا

السؤال (٣):

بما أنّ النقطة حـ انعكاس للنقطة ع بمحور التماثل فإنّه عمودٌ منصّف لـ $\overline{\text{حـ ع}}$. أي أنّ حـ ط

= $\frac{١}{٢}$ حـ ع.

المثلثان ر حـ د، ر ط حـ فيهما:

< ر حـ د ≡ < ر ط حـ زاويتان قائمتان.

< د ر حـ ≡ < حـ ر ط خاصية الانعكاس لتطابق الزوايا أو زاوية مشتركة.

< حـ د ر ≡ < ط حـ ر مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°.

إذن، فالمثلثان متشابهان وينتج أنّ:

$\frac{\text{ر حـ}}{\text{رط}} = \frac{\text{جد}}{\text{طحـ}} = \frac{\text{ر د}}{\text{ر جـ}}$ وبالتعويض

$\frac{٦,٦}{\text{رط}} = \frac{٥,٢}{\text{طحـ}} = \frac{٨,٤}{٦,٦}$ ومنها ط حـ = $\frac{٦,٦ \times ٥,٢}{٨.٤}$

≈ ٤,١ سم

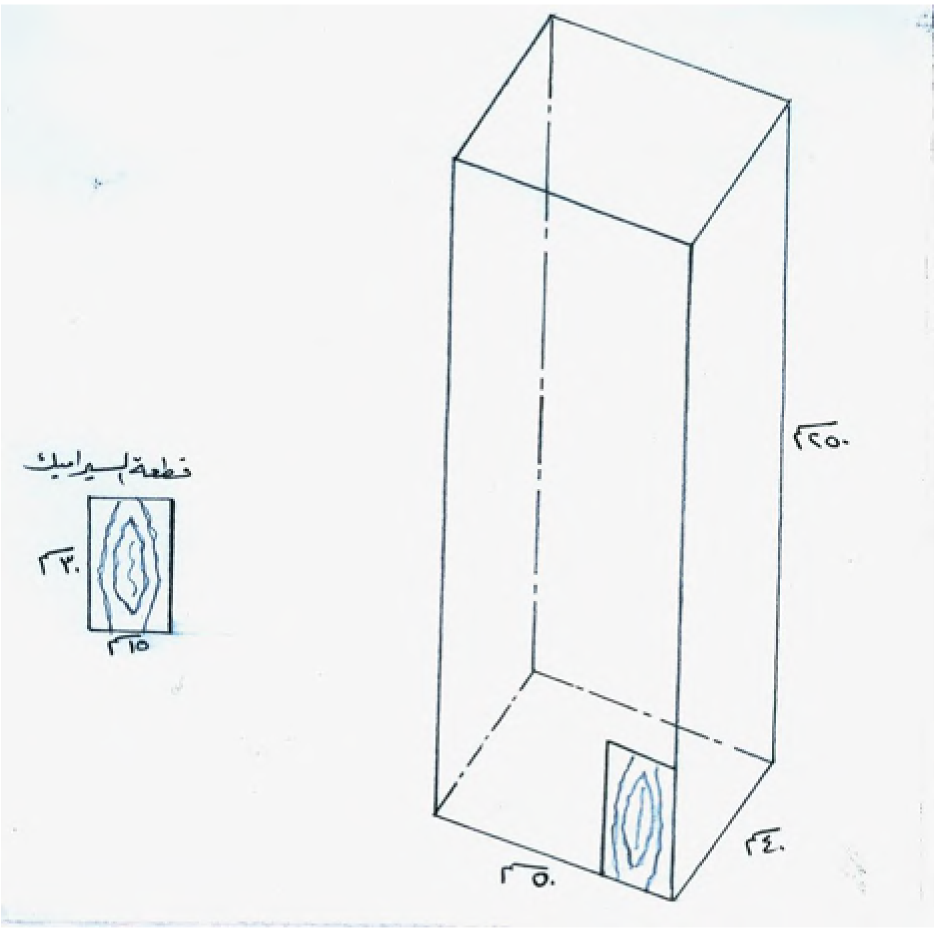
إن مثل هذه الأسئلة عندما تُناقش مع الطلبة تُحقق هدفين رئيسين.

- مراجعة معلومات سابقة كثيرة وتثبيتها.

- تنمية قدرة الطالب على تطبيق هذه المعلومات وتوظيفها في حل المسائل بطرق مبتكرة وهو أحد مظاهر التفكير، أي أنّها تساعد الطالب على اكتساب مهارات التفكير.

تبليط عامود

في منزل عمر عمود قاعدته مستطيلة الشكل طولها ٥٠سم وعرضها ٤٠سم، وارتفاعه ٢٥٠سم. أراد عمر أن يغطيه بقطع من السيراميك مستطيلة الشكل طولها ٣٠سم وعرضها ١٥سم.



سؤال (١): ما عدد قطع السيراميك الكاملة التي سيستعملها عمر بالوضع المبين في الشكل؟

النتيجة: كانت النسبة المئوية للطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال مشابه منخفضة جداً حيث بلغت ٠,٧٨٪ وهي أقل من النسبة المئوية لطلبة الدول المشاركة والتي كانت منخفضة أيضاً حيث بلغت ٧,٤٢٪. وأعتقد أن الطلبة لم يعتادوا على مثل هذه الأسئلة ولذلك لم يتمكنوا من فهم السؤال جيداً لتحديد طريقة الحل.

سؤال مشابه: في إحدى قاعات متحف لعرض اللوحات الفنية عمود أسطواني ارتفاعه ثلاثة أمتار، وطول قطره نصف متر. يُراد تغطيته بطلاء ثمن العلبة منه ١٥ ديناراً. إذا كانت العلبة تكفي لطلاء ١,٢٥ متراً مربعاً، فما أقل عدد من عُلب الطلاء تلزم لطلاء العمود؟

العـلاج: تتمحور فكرة حل مثل هذا السؤال في وضع تصور لطريقة حساب عدد القطع الكاملة اللازمة لتغطية العمود.

للعمود أربعة أوجه مستطيلة الشكل، كل اثنين منهما متطابقان: وجهان بُعدا كل منهما ٥٠سم، ٢٥٠سم، ووجهان بُعدا كل منهما ٤٠سم، ٢٥٠سم.

أولاً: نحسب عدد القطع الكاملة لتغطية الوجه ٥٠ × ٢٥٠ ثم نضرب العدد في ٢.

٢٥٠ ÷ ٣٠ = ٨ والباقي ١٠

إذن يحتاج عمر ٨ قطع كاملة لعمل صف رأسي.

٥٠ ÷ ١٥ = ٣ والباقي ٥

إذن يحتاج عمر ٣ قطع كاملة لعمل صف أفقي.

وسيحتاج عمر إلى ٨ × ٣ = ٢٤ قطعة كاملة لكل وجه من هذين الوجهين.

٢٤ × ٢ = ٤٨ قطعة سيستعملها عمر لهذين الوجهين.

ثانياً: نحسب الآن عدد القطع الكاملة لتغطية الوجه ٤٠ × ٢٥٠ ثم نضرب في ٢.

٢٥٠ ÷ ٣٠ = ٨ والباقي ١٠

٤٠ ÷ ١٥ = ٢ والباقي ١٠

إذن سيحتاج عمر إلى ٨ × ٢ = ١٦ وقطعة كاملة لكل من الوجهين.

١٦ × ٢ = ٣٢ قطعة كاملة سيستعملها عمر لهذين الوجهين.

وعدد القطع الكاملة كلها التي سيستعملها عمر لتغطية العمود = ٤٨ + ٣٢

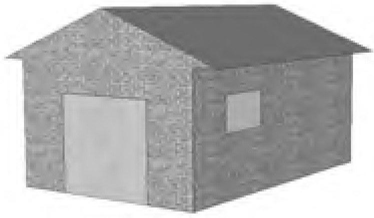
= ٨٠ قطعة

إذن حل مثل هذا السؤال يتطلب من الطالب تجزئة الحل إلى أجزاء لتسهيل عملية الحساب ثم تجميع الحلول الجزئية.

المـرآب

تنتج الشركة المُصنعة للمرآب نماذج "أساسية" متنوعة تشتمل على نماذج ذات نافذة واحدة وباب واحد فقط.

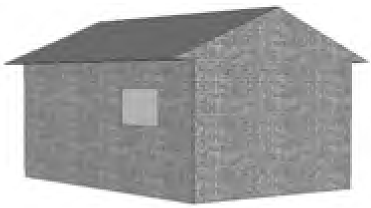
يختار جلال النموذج التالي من بين النماذج "الأساسية". يبين هذا الشكل موقع كل من النافذة والباب.



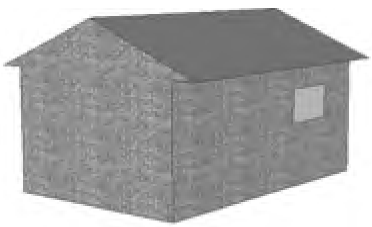
سؤال (١): تبين الرسوم التوضيحية الآتية نماذج "أساسية " مختلفة عندما تشاهد من الخلف. واحد فقط من هذه الرسوم التوضيحية يطابق النموذج أعلاه الذي اختاره جلال.

ما النموذج الذي اختاره جلال؟ ضع دائرة حول أ أو ب أو ج أو د.

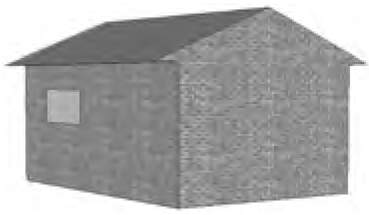
أ



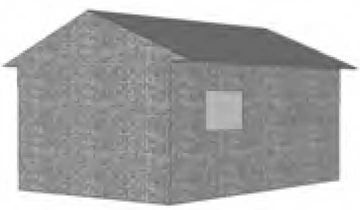
ب



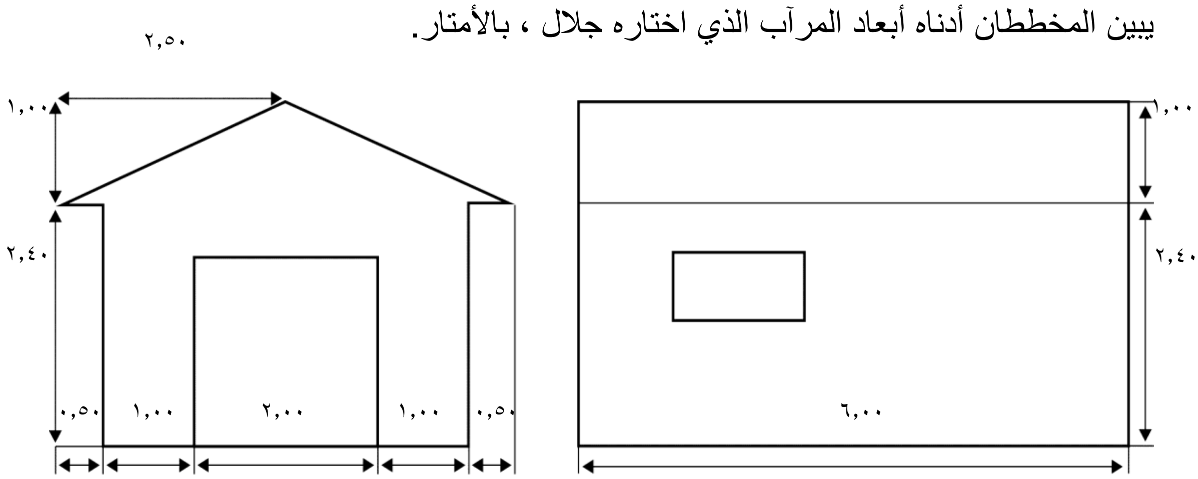
ج



د



يبين المخططان أدناه أبعاد المرآب الذي اختاره جلال ، بالأمتار.



منظر أمامي   منظر جانبي

ملاحظة: الشكل ليس مرسومًا وفق مقياس رسم.

يتكون السقف من لوحين متطابقين مستطيلي الشكل.

احسب المساحة **الكلية** للسقف.بيّن خطوات الحل .

....

....

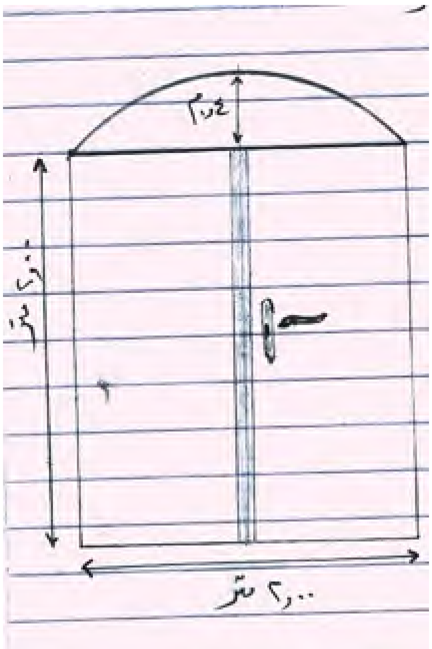
....

النتيجة: كانت نتيجة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا السؤال الأول إجابة صحيحة (النموذج ج) ٤٩,٣٦٪ وهي نتيجة منخفضة، ولا تتناسب مع بساطة السؤال. في حين بلغت النسبة الدولية ٦٠,٤١ وهي ليست مرتفعة أيضاً.

وبالنسبة للسؤال الثاني فقد بلغت نسبة الطلبة الأردنيين الذين أجابوا إجابة صحيحة ١,٥٦٪ والنسبة الدولية ٣,١٪ وكلاهما منخفضتان جداً مما يشير إلى ضعف عام عند الطلبة في توظيف المعلومات الرياضية لمعالجة مواقف من واقع الحياة.

سؤال مشابه: الشكل إلى اليسار، رسم تخطيطي لباب قدمه سامر لنجار كي ينفذه، وطلب منه أن يكون القوس في أعلى الباب قوساً دائرياً.

ما طول نصف قطر تلك الدائرة؟

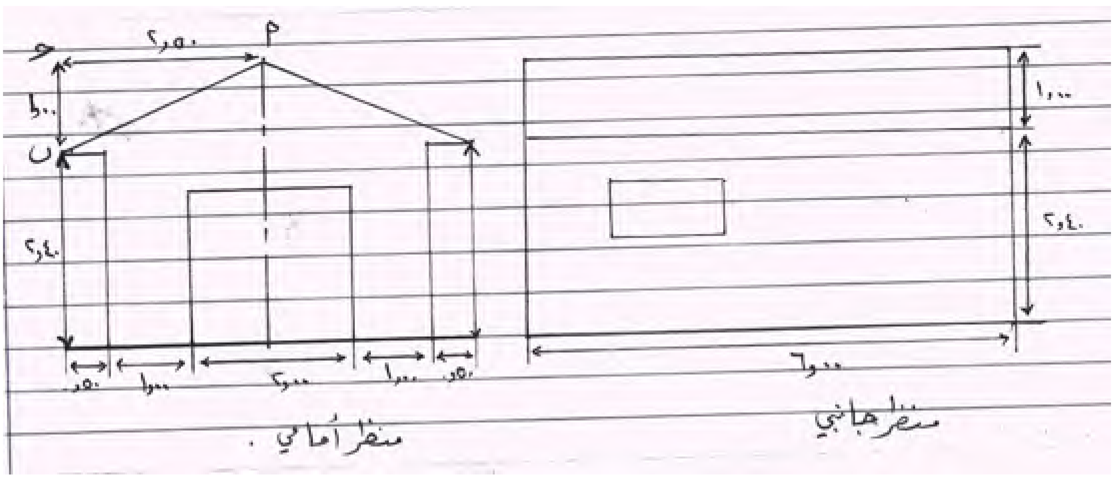


العلاج: تعتمد إجابة **السؤال الأول** على تأمل الطالب في المنظر الأمامي وإدراك العلاقة بين أجزاء النموذج لتحديد المنظر من جهة أخرى.

فمن المنظر الأمامي تكون واجهة الشباك إلى يمين الناظر ويكون الشباك في الطرف القريب من الواجهة.

ولذلك، عند النظر إلى النموذج من الخلف ستكون واجهة الشباك إلى يسار الناظر، ويكون الشباك في الطرف البعيد من الواجهة. وهذا الوصف يتحقق في البديل جـ.

أما بالنسبة **للسؤال الثاني** فتحتاج إجابته لتوظيف نظرية فيثاغورس لإيجاد عرض اللوح الواحد ثم إيجاد مساحته.



من المثلث أ ب جـ :

عرض اللوح الواحد = أ ب = (أ ب)^{٢} + (جـ ب)^{٢}

= (٢,٥)^{٢} + ١^{٢}

= ٧,٢٥ متراً

وطوله = ٦ أمتار

إذن مساحة اللوح = ٦ × ٧,٢٥

والمساحة الكلية للسقف = ٢ × ٦ ٧,٢٥

= ١٢ ٧,٢٥

ومثل هذا السؤال يعزز شعور الطالب بالجانب الوظيفي للرياضيات في واقع الحياة. مما يزيد من شعوره باهمية الرياضيات.

وعلى المعلم أن يكثر من التطبيقات الحياتية المتنوعة للرياضيات كي يعتاد الطالب على توظيف ما يتعلمه من معرفة رياضية في معالجة مواقف حياتية.