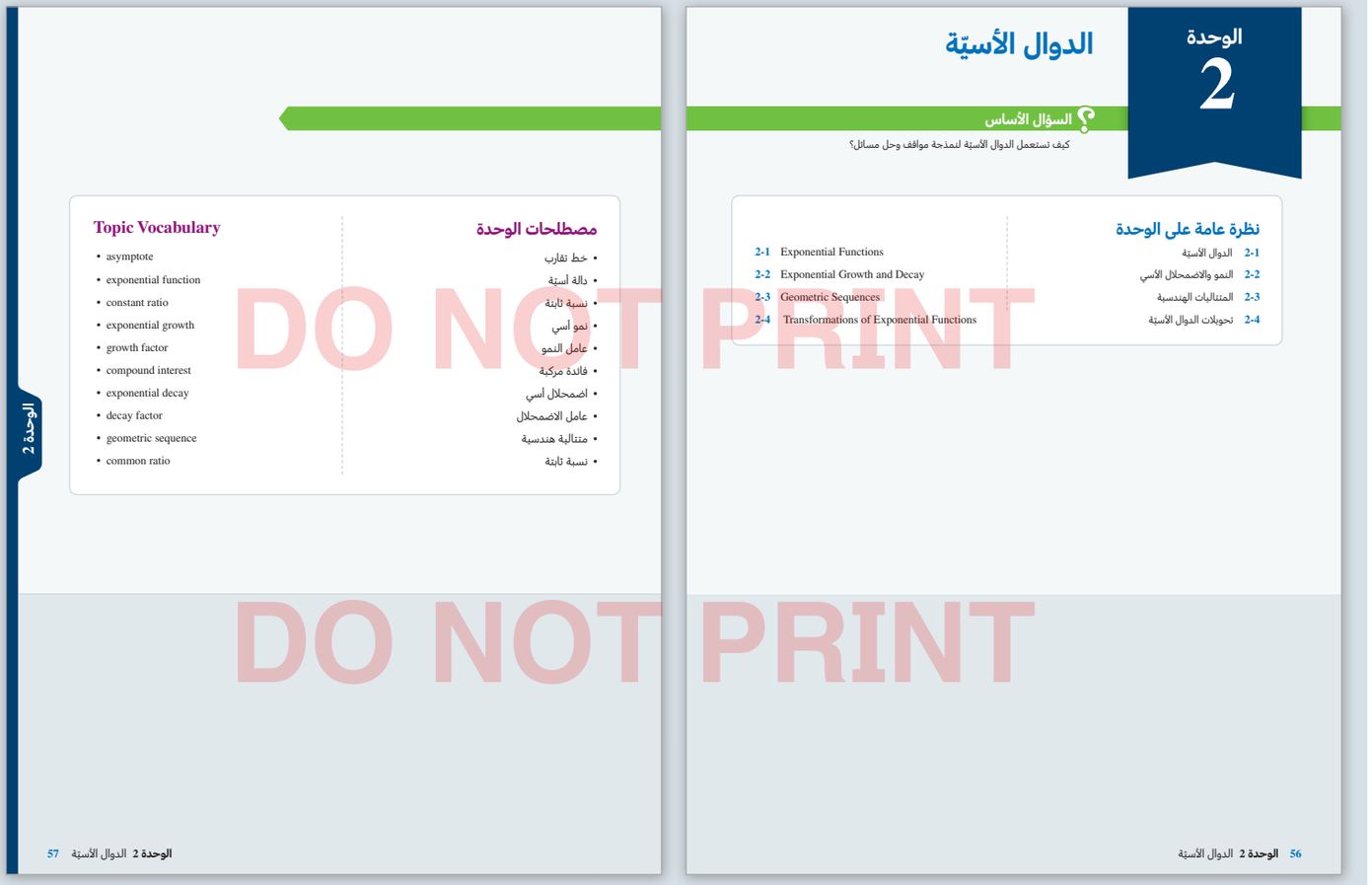
مقدمة الوحدة



الوحدة
2

الدوال الأسيّة

السؤال الأساس

كيف تستعمل الدوال الأسية لنمذجة مواقف وحل مسائل؟

نظرة عامة على الوحدة

2-1 الدوال الأسية
2-2 النمو والاضمحلال الأسي
2-3 المتتاليات الهندسية
2-4 تحويلات الدوال الأسية

2-1 Exponential Functions
2-2 Exponential Growth and Decay
2-3 Geometric Sequences
2-4 Transformations of Exponential Functions

56 الوحدة 2 الدوال الأسية

الوحدة 2

مصطلحات الوحدة

- خط تقارب
- دالة أسية
- نسبة ثابتة
- نمو أسي
- عامل النمو
- فائدة مركبة
- اضمحلال أسي
- عامل الاضمحلال
- متتالية هندسية
- نسبة ثابتة

Topic Vocabulary

- asymptote
- exponential function
- constant ratio
- exponential growth
- growth factor
- compound interest
- exponential decay
- decay factor
- geometric sequence
- common ratio

57 الوحدة 2 الدوال الأسية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

السؤال الأساس للوحدة

كيف تستعمل الدوال الأسيّة لنمذجة مواقف وحل مسائل؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 87 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

مشروع STEM

نظرة عامة عن المشروع

في هذا المشروع، سيحلّل الطلاب دالة أسيّة بتوقع نمو على الصعيد التكنولوجي.

تقديم المشروع

قدّم الموقف بمناقشة قانون مور.
يمكنك طرح الأسئلة الآتية لتوجيه النقاش:

س: هل تشبه التكنولوجيا التي تستعملها اليوم التكنولوجيا التي كان يستعملها أفراد عائلتك عندما كانوا في سنك؟ إذا كانت الإجابة كلا، ما أوجه الاختلاف بينهما؟
[كلا. قد تتنوع الإجابات، نموذج إجابة : لم يكن والداي يملكان هواتف خلوية عندما كانا في سني.
كانت الحواسيب كبيرة وضخمة وغير قابلة للنقل.]

س: في الأربعينيات، كانت الحواسيب ضخمة جدًا. أما اليوم، فأصبح بإمكانك حمل حاسوب بيد واحدة. ما الذي جعل هذا التغيّر ممكنًا في رأيك؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تقلص حجم الشرائح الإلكترونية، وازداد عدد الترانزستورات في الشريحة الواحدة.]

س: أشار قانون مور عام 1965 إلى أن عدد الترانزستورات الذي يمكن أن تحويه شريحة إلكترونية واحدة سيتضاعف كل 12 شهرًا تقريبًا. بعد 10 سنوات، راجع مور توقّعه وعدّل الفترة من 12 شهرًا إلى 24 شهرًا. لماذا عدّل هذه الفترة في رأيك؟
[قد تتنوع الإجابات، نموذج إجابة : ابحث عن الطلاب الذين يعرفون (والطلاب الذين لا يعرفون) أن النمو الأسي لا يستمر على نفس المنوال بالضرورة في المسائل الحياتية.]
اطلب من الطلاب قراءة المهمّة التي عليهم إنجازها.

اجعل الطلاب يقرؤون المهمة التي سيُطلب منهم إكمالها.

تنفيذ المشروع

واصل التركيز على الدوال الأسية إذا أمكن. إذا كان أحد الطلاب يملك حاسوبًا قديمًا، اطلب من الطلاب مقارنة مواصفاته التقنية بالمواصفات التقنية للحواسيب الحديثة وفقًا لتوقعات قانون مور.

قد يحتاج بعض الطلاب إلى تعريفهم بلغة النظام المتري كما هو مطبّق في قياس سرعة وحدة المعالجة المركزية للحاسوب:
ميغاهرتز (MHz) = مليون دورة في الثانية
غيغاهرتز (GHz) = مليار دورة في الثانية

تُقاس أحجام الترانزستورات بالميكرومتر، وهي أجزاء من المليون من المتر، وبالنانومتر، وهي أجزاء من المليارات من المتر.

إنهاء المشروع

قد ترغب في تحديد يوم يتشارك فيه الطلاب المشاريع التي أنجزوها. شجّع الطلاب على شرح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

الدرس 2-1

الدوال الأسيّة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✔ رسم التمثيلات البيانية التي تظهر الخصائص الأساسية للدوال الأسيّة.
- ✔ كتابة الدوال الأسيّة باستعمال الجداول والتمثيلات البيانية.
- ✔ المقارنة بين الدوال الخطية والأسيّة.

الفهم الأساس

تنمذج الدوال الأسيّة العلاقة بين كميتين الفارق بينهما نسبة ثابتة. تُنمذج الدوال الأسيّة باستعمال الدالة $f(x) = ab^x$، حيث a هي القيمة الابتدائية و b النسبة الثابتة.

ترابط

في الوحدة السابقة، تمكّن الطلاب من:

- إنشاء دوال خطية وتمثيلها بيانيًا.
- تحديد الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الخطية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إنشاء دوال أسيّة وتمثيلها بيانيًا.
- تحديد الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.
- تحديد ما إذا كان يجب نمذجة موقف ما بدالة خطية أم بدالة أسيّة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال الدوال الأسيّة لنمذجة النمو والاضمحلال الأسي.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يستعمل الطلاب جدولًا أو تمثيلًا بيانيًا لتحديد النسبة الثابتة وكتابة دالة أسيّة عبر تعويض القيمة الابتدائية عن a والنسبة الثابتة عن b.
- يكتب الطلاب الدوال الأسيّة ويمثّلونها بيانيًا لحل مسائل حياتية مثل إيجاد عدد الساعات التي يستغرقها انتشار فيروس في كل حواسيب شبكة إلكترونية.

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

المصطلحات الجديدة

- **خط تقارب** | *asymptote*
- **دالة أسيّة** | *exponential function*
- **نسبة ثابتة** | *constant ratio*

نشاط المصطلحات

راجع مع الطلاب المعنى المتعارف عليه لكلمة "ثابت" التي تعني بقاء شيء ما على حاله من دون تغيير. اربط هذا المفهوم بما يعرفه الطلاب عن "النسبة الثابتة". اطلب من الطلاب تحديد ما إذا كان كل جدول أدناه يمثّل معدلًا ثابتًا أم نسبة ثابتة.

[نسبة ثابتة]

x	y
1	6
2	12
3	18
4	24

[معدل ثابت]

x	y
1	5
2	25
3	125
4	625

[معدل ثابت]

x	y
1	2
2	4
3	8
4	16

[نسبة ثابتة]

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

11F.1.4 يرسم دوالًا ويُفسّر تمثيلاتها البيانية، ويتعرّف متى تكون الدّوال التالية متزايدة أو متناقصة أو ثابتة:

- الدالة الخطية
- دالة القيمة المطلقة (دالة المقياس)
- دالة الجذر التربيعي
- الدالة الأسيّة

معايير ممارسات الرياضيات

ابن الحجج الرياضية وانقد تبرير الآخرين

يستعمل الطلاب التبرير المنطقي ليوضحوا سبب تغير متوسط نسبة التغير لدالة أسيّة عندما تتزايد قيم x.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية في نموذج دالة أسيّة ليوضحوا كيف يتغير التمثيل البياني للدالة مع تغير قيمة a.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يقارن الطلاب الأنماط في جدولَي بيانات لاستكشاف لماذا تعطي طريقتا الطي المختلفتان للورق نتيجتين مختلفتين. هذا يهيّئ الطلاب لتمييز المواقف التي يمكن نمذجتها بدالة أسيّة.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: كيف تقارن طريقتَي الطي المختلفتين للورق؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تضاعف إحدى عمليتَي الطي عدد أقسام الورقة، فيما يُنشئ طي الورق على شكل أكورديون قسمًا واحدًا جديدًا لكل طية.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: قارن بين نتيجتَي طريقتَي الطيّ. أيّ الطريقتين تُنشئ عددًا أكبر من المستطيلات.

[الورقة التي طويتها عند خط الوسط تتضمن عددًا أكبر من المستطيلات لأنها تضاعف عدد المستطيلات بدلًا من إضافة واحد.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: كيف يمكنك كتابة معادلة تربط بين عدد الطيات والمستطيلات المتشكلة؟

[تربط المعادلة $y = x + 1$ بين عدد الطيات x وعدد الأقسام المستطيلة المتشكلة y باستعمال طريقة الطي على شكل أكورديون.

تربط المعادلة $y = 2^x$ بين عدد الطيات x وعدد الأقسام المستطيلة المتشكلة y عند طي الورقة عند خط الوسط.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

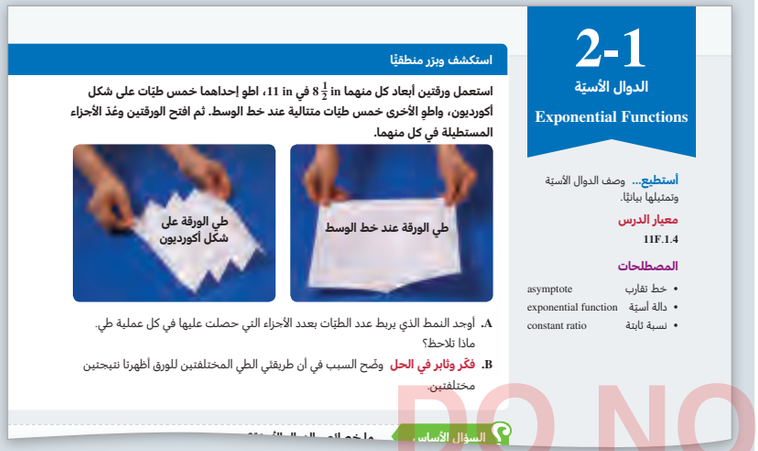
س: أي نوع من الدوال تمثّل الطي على شكل أكورديون؟

[الدالة الخطية]

س: كيف يمكنك تحديد نوع الدالة التي تمثّل كل طريقة؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: استعمل العلاقة بين عدد الطيات وعدد الأقسام لتحديد نوع الدالة.]

كتاب الطالب، صفحة 59



2-1
الدوال الأسيّة
Exponential Functions

أستطيع... وصف الدوال الأسيّة وتمثيلها بيانيًّا.

معيار الدرس
11F.1.4

المصطلحات
- خط تقارب asymptote
- دالة أسيّة exponential function
- نسبة ثابتة constant ratio

استكشف وبرّر منطقيًّا

استعمل ورقتين أبعاد كل منهما 8 ½ in في 11 in، اطوِ إحداهما خمس طيّات على شكل أكورديون، واطوِ الأخرى خمس طيّات متتالية عند خط الوسط. ثم افتح الورقتين وعُدّ الأجزاء المستطيلة في كل منهما.

طي الورقة على شكل أكورديون

طي الورقة عند خط الوسط

A. أوجد النمط الذي يربط عدد الطيّات بعدد الأجزاء التي حصلت عليها في كل عملية طي. ماذا تلاحظ؟

B. **فكّر وتأمّل في الحل** وضّح السبب في أن طريقتَي الطي المختلفتين للورق أظهرتا نتيجتين مختلفتين.

السؤال الأساس:

نموذج من أعمال الطلاب

A. طي الورقة على شكل أكورديون:

الطيات	0	1	2	3	4	5
الأقسام	1	2	3	4	5	6

طي الورقة عند خط الوسط:

الطيات	0	1	2	3	4	5
الأقسام	1	2	4	8	16	32

B. يتزايد عدد الأقسام بمقدار 1 عند كل طية للورقة على شكل أكورديون، بينما يتضاعف عدد الأقسام عند طي الورقة عند خط الوسط كل مرة. يتزايد عدد الأقسام في الورقة التي تطوى عند خط الوسط بسرعة أكبر بكثير.

DO NOT PRINT

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

نمذج صِف موقفًا آخر يمكنك تمثيله باستعمال الدالة الأسيّة.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: يمكنك استعمال دالة أسيّة لنمذجة تزايد عدد السكان.]

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب بالدوال الأسيّة. ذكّر الطلاب بأن الخصائص الأساسية للدوال الأسيّة ومواصفات تمثيلاتها البيانية تساعد على تمييزها عن الدوال الأخرى.

مثال 1 الميّزات الأساسية للدالة $f(x) = 2^x$

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

الجزء A

س: ما الأنماط التي تلاحظها في الجدول؟

[لا توجد قيم سالبة للدالة $f(x)$. كذلك، عندما تكون قيمة x أصغر من 0، يكون y كسرًا أصغر من 1]

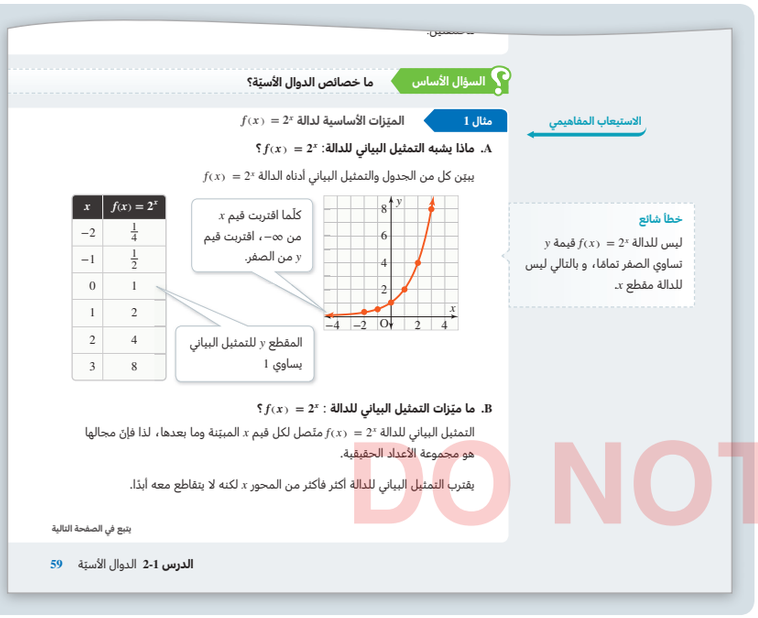
الجزء B

س: ما الخصائص الأساسية التي يمكن تحديدها من التمثيل البياني لدالة أسيّة؟

[المقطع y، خط التقارب]

س: ما المقصود بخط التقارب، ولماذا للدوال الأسيّة خط تقارب؟

[خط التقارب هو خط يقترب منه منحنى الدالة لكنه لا يصل إليه أبدًا، وذلك لأن هناك مدى من القيم لا تتساوى معها الدالة أبدًا، ولكن يمكنها الاقتراب بشدة من قيمة خط التقارب.]



السؤال الأساس: ما خصائص الدوال الأسيّة؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 الميّزات الأساسية لدالة $f(x) = 2^x$

A. ماذا يشبه التمثيل البياني للدالة: $f(x) = 2^x$؟

يبيّن كل من الجدول والتمثيل البياني أدناه الدالة $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

كلّما اقتربت قيم x من ∞−، اقتربت قيم y من الصفر.

المقطع y للتمثيل البياني يساوي 1

خطأ شائع

ليس للدالة $f(x) = 2^x$ قيمة y تساوي الصفر تمامًا، و بالتالي ليس للدالة مقطع x.

B. ما ميّزات التمثيل البياني للدالة: $f(x) = 2^x$؟

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ متّصل لكل قيم x المبيّنة وما بعدها، لذا فإن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

يقترب التمثيل البياني للدالة أكثر فأكثر من المحور x لكنه لا يتقاطع معه أبدًا.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 2-1 الدوال الأسيّة 59

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

س: كيف يؤثر خط التقارب في المدى؟

[يبيّن خط التقارب القيود على قيم المتغير التابع.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. الدالتان لهما نفس المقطع y والمجال والمدى وخط التقارب. عندما $b = 3$، تتزايد الدالة الأسيّة بتزايد قيمة x، وعندما $b = \frac{1}{2}$، تتناقص الدالة الأسيّة بتزايد قيمة x.

مثال 2 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًّا

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تختار تدريجًا للمحور الرأسي؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: حدد المجال الذي تحتاج إليه لتحليل الدالة. أوجد قيمة الدالة عند أكبر قيمة وأصغر قيمة في المجال لتحديد مدى القيم التي يجب تغطيتها على المحور الرأسي.]

س: ما الافتراضات التي تسمح بأن تكون الدالة الأسيّة نموذجًا ملائمًا لهذا الموقف؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: احتمالات إصابة كل الحواسيب بالفيروس متساوية، كل حاسوب متصل بالشبكة لحظة انتشار الفيروس.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

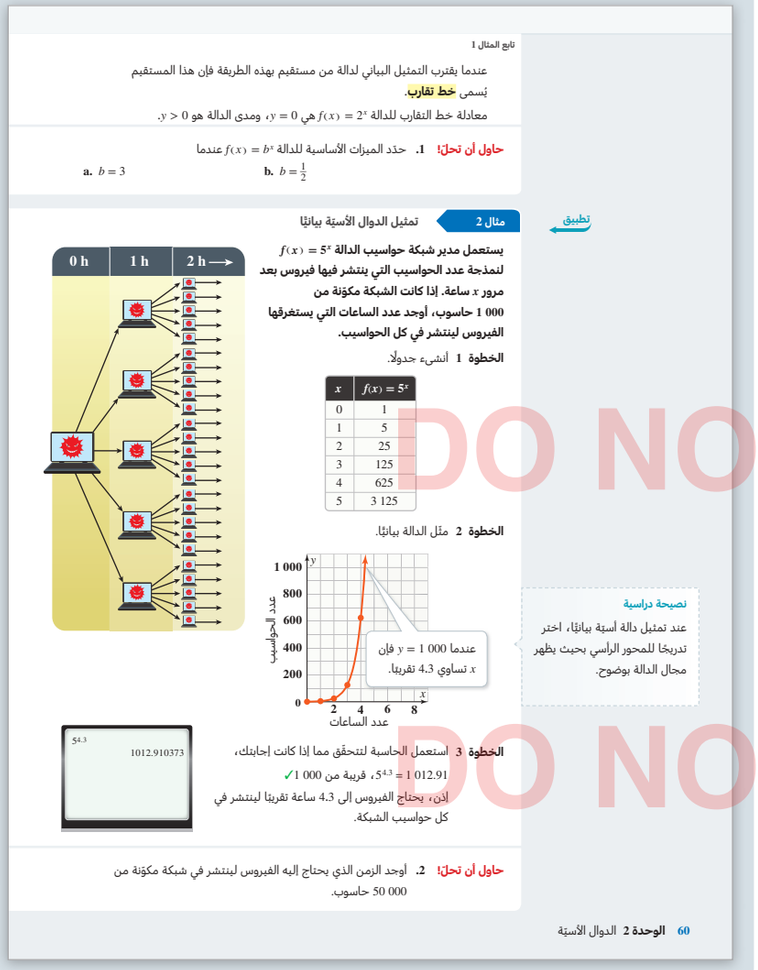
2. 6.73 ساعة تقريبًا.

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة افترض أن انتشار فيروس آخر يُنمذج بالدالة $g(x) = 5^x$.
إذا استغرق الفيروس خمس ساعات ونصف لينتشر، ما الأدوات التي يمكنك استعمالها لدراسة الدالة $g(x) = 5^x$؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: حاسبة بيانية، أو جدول وتمثيل بياني.]



تابع المثال 1

عندما يقترب التمثيل البياني لدالة من مستقيم بهذه الطريقة فإن هذا المستقيم يُسمى **خط تقارب**.

معادلة خط التقارب للدالة $f(x) = 2^x$ هي $y = 0$، ومدى الدالة هو $y > 0$.

حاول أن تحلّ! **1.** حدّد الميزات الأساسية للدالة $f(x) = b^x$ عندما

a. $b = 3$ **b.** $b = \frac{1}{2}$

تطبيق

مثال 2 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًّا

يستعمل مدير شبكة حواسيب الدالة $f(x) = 5^x$ لنمذجة عدد الحواسيب التي ينتشر فيها فيروس بعد مرور x ساعة. إذا كانت الشبكة مكوّنة من 1 000 حاسوب، أوجد عدد الساعات التي يستغرقها الفيروس لينتشر في كل الحواسيب.

الخطوة 1 أنشيء جدولًا.

x	$f(x) = 5^x$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3 125

الخطوة 2 مثّل الدالة بيانيًّا.

نصيحة دراسية

عند تمثيل دالة أسية بيانيًا، اختر تدريجًا للمحور الرأسي بحيث يظهر مجال الدالة بوضوح.

الخطوة 3 استعمل الحاسبة لتتحقّق مما إذا كانت إجابتك، $5^{4.3} = 1\,012.91$، قريبة من 1 000 ✓

إذن، يحتاج الفيروس إلى 4.3 ساعة تقريبًا لينتشر في كل حواسيب الشبكة.

حاول أن تحلّ! **2.** أوجد الزمن الذي يحتاج إليه الفيروس لينتشر في شبكة مكوّنة من 50 000 حاسوب.

60 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثال 2**

الكتابة **مستوى 1** الفيروس هو شيء له تأثير سيئ على الأشخاص أو الأشياء. اطلب من الطلاب كتابة تعريفين لكلمة "فيروس" في دفاترهم، ثم اطلب منهم كتابة إجاباتهم عن الأسئلة التالية في دفاترهم.

س: ما الكلمات التي قد تخطر في بالك عند سماع كلمة "فيروس" في ما يتعلق بالأشخاص؟

[قد تتنوع الإجابات. نماذج إجابة: مرض، حمّى، ألم، سعال]

س: ماذا يعني إصابة حاسوب بفيروس؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يتوقف عن العمل، تتباطأ سرعته، تنبثق على شاشاته نوافذ مفاجئة، يتعطل.]

التحدث **مستوى 2**

س: ما معنى "مقياس" في النصيحة الدراسية؟

[إنه يصف مدى القيم التي تُستعمل لتمثيل الدالة بيانيًا.]

س: كيف يمكنك اختيار مقياس للمحور y لتبيّن الأجزاء ذات الصلة في التمثيل البياني؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: قيمة y الأعلى في الجدول أكبر من 3 000
قيمة y الأقرب إليها هي أكبر من 600
لذا فإن المقياس الذي يتراوح بين 0 و 1 000 بالمئات مقياس منطقي.]

القراءة **مستوى 3** اطلب من الطلاب قراءة نص المسألة والإشارة إلى كلمة "شبكة" وهم يقرؤون. لاحظ أن كلمة "شبكة" تتكرر مرتين.

س: حدّد معنى كلمة "شبكة" من السياق أو من أي معجم إذا لزم الأمر.

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: الشبكة هي نظام يتكون من مجموعة من الحواسيب والأجهزة الطرفية والطابعات وغيرها من الأجهزة المتصلة فيما بينها بأداوت الاتصال السلكي أو الكابلات.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 كتابة الدوال الأسيّة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما وجه الشبه والاختلاف بين الفرق الثابت والنسبة الثابتة؟
[كلاهما يُحسب من قيم صفين متتالين في جدول. يتم إيجاد الفرق عبر طرح الحدود المتتالية ويتم إيجاد النسبة عبر قسمتها.]

س: لماذا a هي القيمة الابتدائية لكل قيمة من قيم b الممكنة في الدالة $f(x) = ab^x$؟
[القيمة الابتدائية هي قيمة f عندما $x = 0$.
بالتالي، عندما $x = 0$ فإن، $f(x) = ab^0 = a(1) = a$]

س: كيف تعرف ما إذا كانت الدالة الأسيّة تقترب من خط تقاربها عندما $x < 0$ أو عندما $x > 0$؟
[إذا كانت النسبة الثابتة أكبر من 1، يقترب التمثيل البياني للدالة من خط التقارب عندما $x < 0$. إذا كانت النسبة الثابتة أصغر من 1، يقترب التمثيل البياني للدالة من خط التقارب عندما $x > 0$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

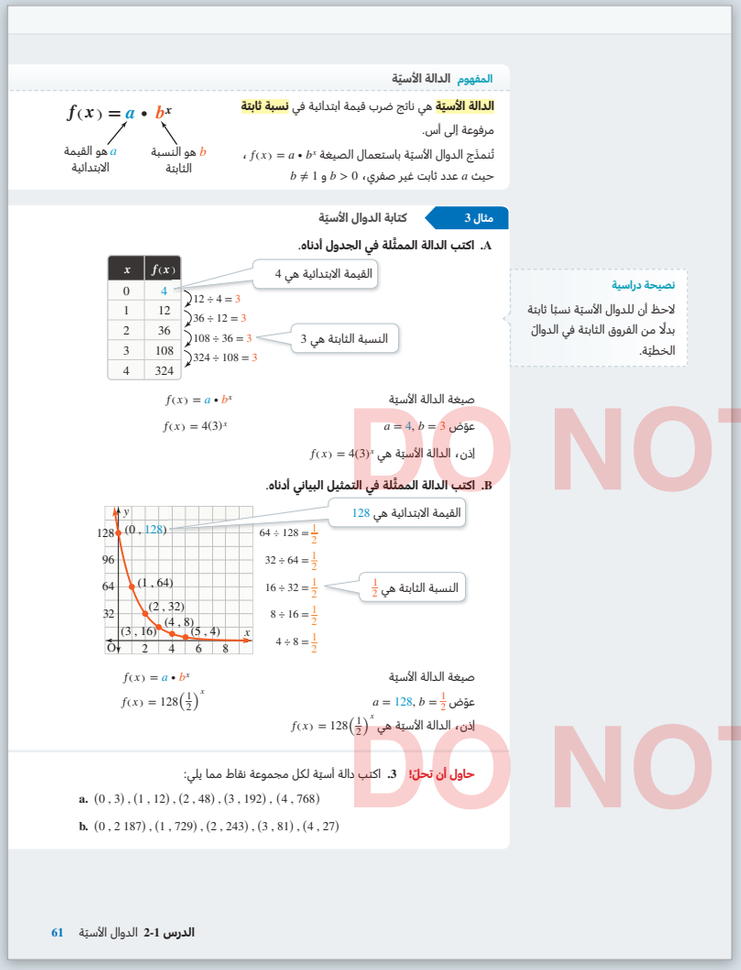
3. a. $f(x) = 3(4)^x$ **b.** $f(x) = 2187\left(\frac{1}{3}\right)^x$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تجد القيمة الابتدائية والنسبة الثابتة بالاستناد إلى مجموعة نقاط معطاة؟
[القيمة الابتدائية هي قيمة y عندما $x = 0$. لإيجاد النسبة الثابتة، اختر نقطتين متتاليتين واقسم قيمة الإحداثي y للنقطة التي قيمة إحداثيها x أكبر على قيمة الإحداثي y للنقطة الأخرى.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 في الجزء B، قد يعتقد بعض الطلاب أن قيمة b هي 3، عندما يكتب الطلاب معادلة، اطلب منهم تعويض قيمتَي x و y في المعادلة للتحقق من عملهم.



المفهوم الدالة الأسيّة

الدالة الأسيّة هي ناتج ضرب قيمة ابتدائية في **نسبة ثابتة** مرفوعة إلى أس.

$f(x) = a \cdot b^x$، تُنمذج الدوال الأسيّة باستعمال الصيغة حيث a عدد ثابت غير صفري، $b > 0$ و $b \neq 1$

a هو القيمة الابتدائية، b هو النسبة الثابتة

مثال 3 كتابة الدوال الأسيّة

A. اكتب الدالة الممثّلة في الجدول أدناه.

x	$f(x)$
0	4
1	12
2	36
3	108
4	324

القيمة الابتدائية هي 4
$12 \div 4 = 3$، $36 \div 12 = 3$، $108 \div 36 = 3$، $324 \div 108 = 3$
النسبة الثابتة هي 3

نصيحة دراسية: لاحظ أن للدوال الأسيّة نسبًا ثابتة بدلًا من الفروق الثابتة في الدوال الخطيّة.

صيغة الدالة الأسيّة: $f(x) = a \cdot b^x$
عوّض $a = 4$، $b = 3$: $f(x) = 4(3)^x$
إذن، الدالة الأسيّة هي $f(x) = 4(3)^x$

B. اكتب الدالة الممثّلة في التمثيل البياني أدناه.

القيمة الابتدائية هي 128
$64 \div 128 = \frac{1}{2}$، $32 \div 64 = \frac{1}{2}$، $16 \div 32 = \frac{1}{2}$، $8 \div 16 = \frac{1}{2}$، $4 \div 8 = \frac{1}{2}$
النسبة الثابتة هي $\frac{1}{2}$

صيغة الدالة الأسيّة: $f(x) = a \cdot b^x$
عوّض $a = 128$، $b = \frac{1}{2}$: $f(x) = 128\left(\frac{1}{2}\right)^x$
إذن، الدالة الأسيّة هي $f(x) = 128\left(\frac{1}{2}\right)^x$

حاول أن تحلّ! **3.** اكتب دالة أسية لكل مجموعة نقاط مما يلي:

a. (0 , 3) , (1 , 12) , (2 , 48) , (3 , 192) , (4 , 768)

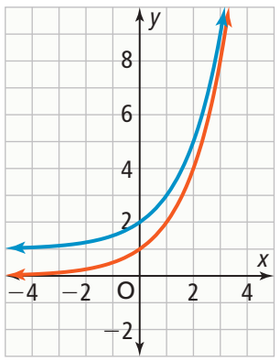
b. (0 , 2 187) , (1 , 729) , (2 , 243) , (3 , 81) , (4 , 27)

الدرس 2-1 الدوال الأسيّة 61

DO NOT PRINT

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب استكشاف المزيد عن الدوال الأسيّة عبر مقارنة التمثيلين البيانيين التاليين.



س: ما وجه الشبه والاختلاف بين التمثيلين البيانيين؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: لهما نفس الشكل. أحدهما يقع في مستوى أعلى من الآخر.]

س: اكتب معادلة التمثيل البياني السفلي.
[$y = 2^x$]

س: التمثيل البياني العلوي هو إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة للتمثيل البياني السفلي. ما معادلة التمثيل البياني العلوي؟
[$y = 2^x + 1$]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الدوال الأسيّة

س: كيف يمكنك تمييز الدوال الأسيّة في الصيغة الجبرية والجداول والتمثيلات البيانية؟

[الصيغة الجبرية للدوال الأسيّة هي $y = ab^x$. في الجدول، يمكنك إيجاد نسبة ثابتة بين قيم y المتتالية. يتزايد شكل التمثيل البياني للدالة الأسيّة أو يتناقص، ولكنه يقترب من جانب واحد من خط التقارب.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 5 قد يحدد بعض الطلاب العدد 3 على أنه القيمة الابتدائية بدلًا من النسبة الثابتة. اطلب من الطلاب إيجاد المقطع y عبر تعويض $x = 0$ في الدالة ومن ثم تحديد القيمة الابتدائية.

الإجابات

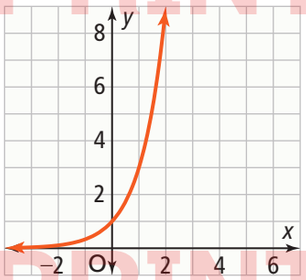
1. تكون الدالة الأسيّة التي صورتها $f(x) = ab^x$ متزايدة عندما $b > 1$ ومتناقصة عندما $0 < b < 1$
خط التقارب للدوال الأسيّة هو $y = 0$ إذا كان المدى $y > 0$.

2. إذا كان $b > 1$، فإن التمثيل البياني يتزايد من اليسار إلى اليمين. إذا كان $0 < b < 1$، فإن التمثيل البياني يتناقص من اليسار إلى اليمين.

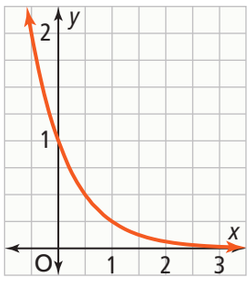
3. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان $b = 1$، فإن قيمة b^x تساوي دائمًا 1، ويكون التمثيل البياني للدالة خطًا أفقيًا.

4. عكس منصور a و b في $f(x) = ab^x$. القيمة الابتدائية للدالة هي 2 والنسبة الثابتة هي 4

5.



6.



7. $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

8. $f(x) = 3\,(2)^x$

ملخص المفهوم الدوال الأسيّة

تُنمذج الدوال الأسيّة باستعمال الصيغة $f(x) = a \cdot b^x$، حيث a القيمة الابتدائية و b النسبة الثابتة.

	$0 < b < 1$	$b > 1$
جبريًا	$f(x) = 81\left(\frac{2}{3}\right)^x$	$f(x) = 2(3)^x$
بجدول	x: 0, 1, 2, 3, 4, 5 — $f(x)$: 81, 54, 36, 24, 16, 10.7 (×2/3)	x: 0, 1, 2, 3, 4, 5 — $f(x)$: 2, 6, 18, 54, 162, 486 (×3)
بيانيًا	المقطع y يساوي 81	المقطع y يساوي 2

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما خصائص الدوال الأسيّة؟
2. **ابحث عن العلاقات** كيف يمكنك معرفة ما إذا كان التمثيل البياني لدالة صيغتها $f(x) = a \cdot b^x$ يتزايد أم يتناقص من اليسار إلى اليمين؟
3. **فكّر وناقش في الحل** وضّح لماذا $b \neq 1$ شرط أساس للدالة $f(x) = a \cdot b^x$.
4. **حلّل الخطأ** يقول منصور إن القيمة الابتدائية للدالة $f(x) = 2(4)^x$ تساوي 4 ونسبتها الثابتة تساوي 2، بيّن خطأ منصور وصحّحه.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، مثّل الدالة بيانيًا.

5. $f(x) = 3^x$
6. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

في التمرينين 7 و 8، اكتب الدالة الأسيّة الممثّلة في الجدول.

7.

x	$f(x)$
0	4
1	2
2	1
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

8.

x	$f(x)$
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48

62 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9–21, 23, 25–29	9–15, 17, 19–31

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 16, 28	1
	10, 14, 27	2
	13	3
2	17–20	1
	12	2
	27	3
3	21–23	1
	9	2
	11, 24, 26	3

الإجابات

9. 4

10. نعم، يقترب التمثيل البياني للدالة $f(x) = ab^x$ أكثر فأكثر من المحور x دائمًا، لكنه لا يصل إليه أبدًا.

11. أخطأ سالم في ضرب 6 في الكسر $\frac{1}{3}$، لذا طُبّق الأس على ناتج الضرب بدلًا من $\frac{1}{3}$ فقط.

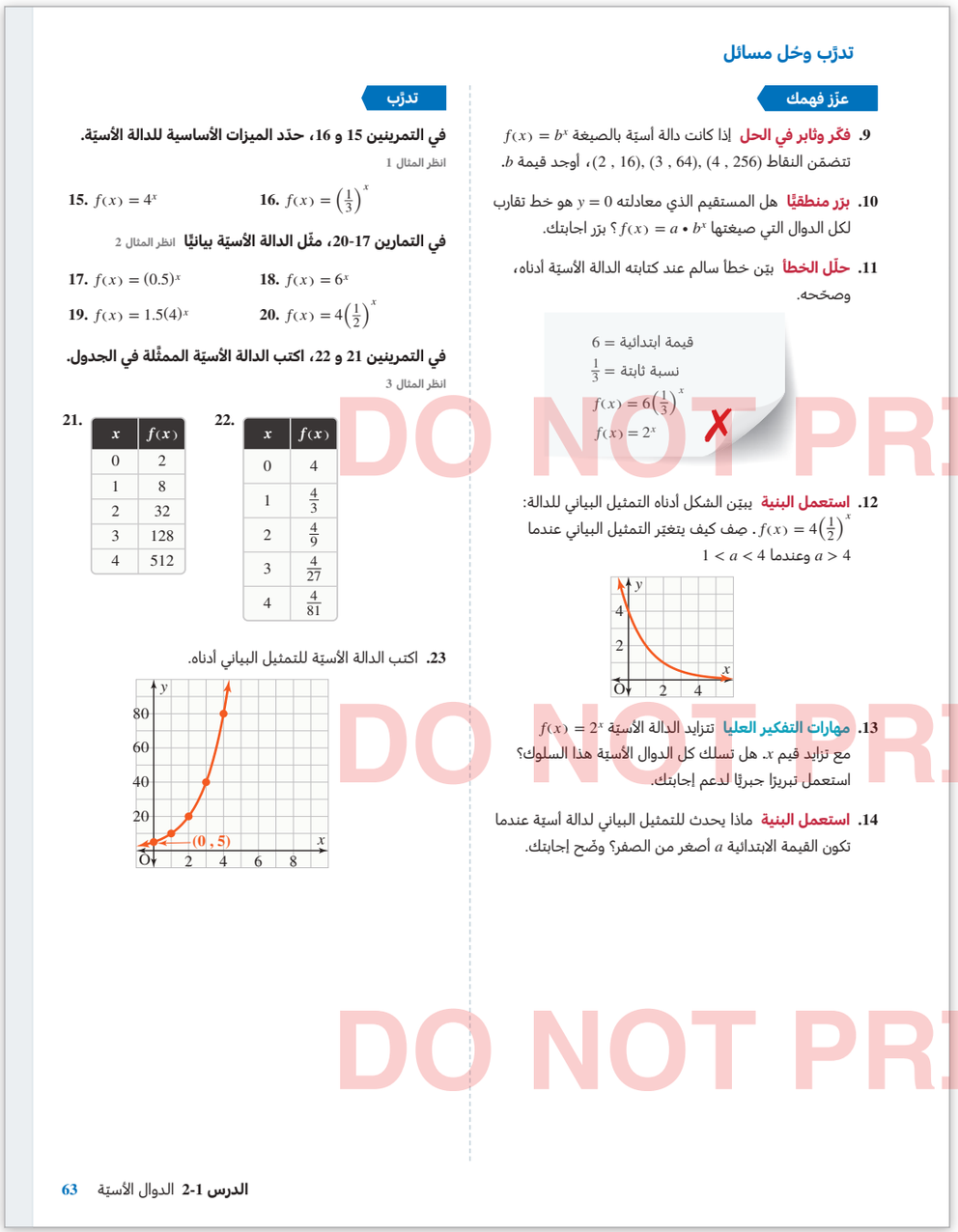
12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يتزايد المقطع y عندما $a > 4$ ويتناقص عندما $1 < a < 4$
يصبح التمثيل البياني أكثر انحدارًا عندما $a > 4$ وأقل انحدارًا عندما $1 < a < 4$

13. كلا، قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان الأساس b أكبر من 1، فإن قيمة b^x تتزايد بتزايد قيمة x. في هذه الحالة، تتزايد الدالة بتزايد قيمة x. لكن إذا كانت قيمة b أصغر من 1، فإن قيمة b^x تتناقص بتزايد قيمة x. في هذه الحالة، تتناقص الدالة بتزايد قيمة x.

14. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: قيمة الدالة سالبة لكل قيم x. يبقى خط التقارب عند $y = 0$، لكن التمثيل البياني يقترب من $y = 0$ تحت المحور x بدلًا من فوقه.

15. المقطع y: 1
المجال: كل الأعداد الحقيقية
المدى: $y > 0$
خط التقارب: $y = 0$
تتزايد الدالة بتزايد قيمة x

16. المقطع y: 1
المجال: كل الأعداد الحقيقية،
المدى: $y > 0$
خط التقارب: $y = 0$
تتناقص الدالة بتزايد قيمة x



تدرَّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

9. فكّر وثابر في الحل إذا كانت دالة أسيّة بالصيغة $f(x) = b^x$ تتضمّن النقاط $(2, 16), (3, 64), (4, 256)$، أوجد قيمة b.

10. برّر منطقيًّا هل المستقيم الذي معادلته $y = 0$ هو خط تقارب لكل الدوال التي صيغتها $f(x) = a \cdot b^x$؟ برّر اجابتك.

11. حلّل الخطأ بيّن خطأ سالم عند كتابته الدالة الأسيّة أدناه، وصحّحه.

قيمة ابتدائية $= 6$
نسبة ثابتة $= \frac{1}{3}$
$f(x) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$f(x) = 2^x$ ✗

12. استعمل البنية يبيّن الشكل أدناه التمثيل البياني للدالة: $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$. صِف كيف يتغيّر التمثيل البياني عندما $a > 4$ وعندما $1 < a < 4$

13. مهارات التفكير العليا تتزايد الدالة الأسيّة $f(x) = 2^x$ مع تزايد قيم x. هل تسلك كل الدوال الأسيّة هذا السلوك؟ استعمل تبريرًا جبريًّا لدعم إجابتك.

14. استعمل البنية ماذا يحدث للتمثيل البياني لدالة أسيّة عندما تكون القيمة الابتدائية a أصغر من الصفر؟ وضّح إجابتك.

تدرّب

في التمرينين 15 و 16، حدّد الميزات الأساسية للدالة الأسيّة. انظر المثال 1

15. $f(x) = 4^x$

16. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

في التمارين 17-20، مثّل الدالة الأسيّة بيانيًّا انظر المثال 2

17. $f(x) = (0.5)^x$

18. $f(x) = 6^x$

19. $f(x) = 1.5(4)^x$

20. $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

في التمرينين 21 و 22، اكتب الدالة الأسيّة الممثّلة في الجدول. انظر المثال 3

21.

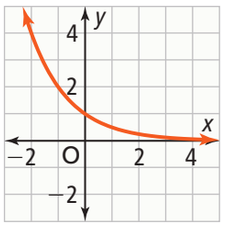
x	$f(x)$
0	2
1	8
2	32
3	128
4	512

22.

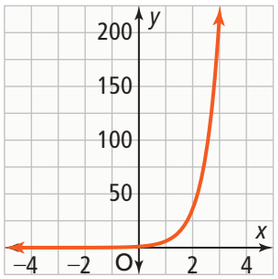
x	$f(x)$
0	4
1	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{4}{9}$
3	$\frac{4}{27}$
4	$\frac{4}{81}$

23. اكتب الدالة الأسيّة للتمثيل البياني أدناه.

17.



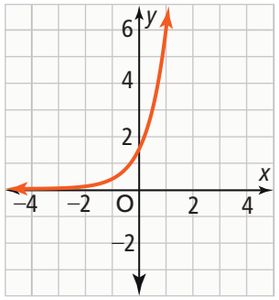
18.



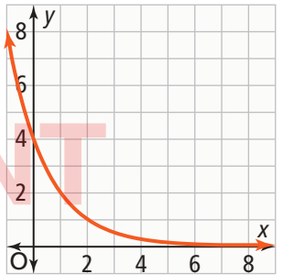
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRIN

www.jnob-jo.com

19.



20.



21. $f(x) = 2(4)^x$

22. $f(x) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

23. $f(x) = 5(2)^x$

24. $f(x) = 10^x$. أوجد نسبة $f(x)$ عند $x = 8.1$ إلى $f(x)$ عند $x = 7.8$، قوة زلزال (مدريد الجديدة) تساوي تقريبًا ضعف قوة زلزال (سان فرنسيسكو).

25. $f(x) = 7\ (0.9)^x$. في الأسبوع العاشر، يصبح عدد مشاهدي البرنامج 2.44 مليون مشاهد تقريبًا، لذا سيُلغى البرنامج.

26. $f(x) = 2\ 000\ (5)^x$، 6 أيام.

27. 3، $y = 0$، كل الأعداد الحقيقية، $y > 0$

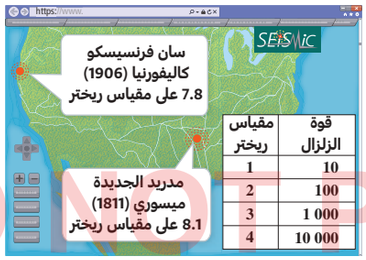
29. **الجزء A** شراء شتلات جديدة: $f(x) = 50x + 6$
تجزئة الشتلات الموجودة: $f(x) = 6\ (2)^x$

الجزء B شراء شتلات جديدة: 506
تجزئة الشتلات الموجودة: 144 6

الجزء C قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا اشترى البستاني شتلات جديدة، سيصبح عدد النباتات 256 بعد 5 سنوات و 756 بعد 15 سنة. إذا جزأ البستاني الشتلات، سيصبح عدد النباتات 192 بعد 5 سنوات و 608 196 بعد 15 سنة. يتزايد عدد النباتات بسرعة كبيرة عندما تتم تجزئة الشتلات الموجودة، لذا يتعين على البستاني أن يعيد النظر في الطريقة الأساسية التي وضعها بحسب عدد النباتات التي يحتاج إليها.

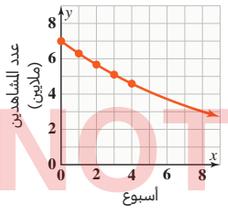
طبّق

24. فكّر وثابر في الحل اكتب دالة أسيّة لنمذجة قوة زلزال في صورة دالة لمقياس ريختر. كيف يمكنك استعمال الدالة التي كتبتها للمقارنة بين قوة زلزال (مدريد الجديدة) سنة 1811 وقوة زلزال (سان فرنسيسكو) سنة 1906؟



قوة الزلزال	مقياس ريختر
10	1
100	2
1 000	3
10 000	4

25. نمذج سيتم إلغاء برنامج تلفزيوني إذا تناقص العدد المقدر للمشاهدين إلى أقل من 2.5 مليون مشاهد بحلول الأسبوع العاشر. استعمل التمثيل البياني أدناه لكتابة دالة أسيّة تنمذج هذه الحالة. إذا استمر هذا النمط، هل سيُلغى البرنامج؟



26. فكّر وثابر في الحل يبيّن الجدول أدناه عدد خلايا الطحالب في عيّنات من مياه بركة سباحة. سوف يتحول لون مياه البركة إلى اللون الأخضر عندما يصبح عدد خلايا الطحالب فيه 24 مليون أو أكثر.
اكتب دالة أسيّة ومثّلها بيانيًا لنمذجة العدد المتوقّع لخلايا الطحالب في صورة دالة لعدد الأيام. إذا استمر النمط، بعد كم يوم سيتحول لون مياه البركة إلى اللون الأخضر؟

يوم	عدد خلايا الطحالب
0	2 000
1	10 000
2	50 000
3	250 000
4	1 250 000

تدرّب على اختبار

27. لتكن الدالة: $f(x) = 3(5)^x$

- المقطع y يساوي _____.
- معادلة خط التقارب هي _____.
- مجال الدالة هو _____.
- مدى الدالة هو _____.

28. اختبار SAT/ACT ما المقطع y للدالة $f(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$؟

Ⓐ 0

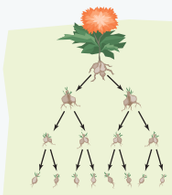
Ⓑ $\frac{1}{2}$

Ⓒ 1

Ⓓ 2

● 8

29. مهمة أدائية يستطيع بستاني زيادة عدد نبتة الأضاليا في حديقة محلية سنويًا إما بشراء شتلات جديدة كل عام وإما بتجزئة الشتلات الموجودة في الحديقة للحصول على نباتات جديدة. يبيّن الجدول أدناه عدد الشتلات المتوقّع من كل طريقة.



سنة	شراء شتلات جديدة	تفريع الشتلات الموجودة
0	6	6
1	56	12
2	106	24
3	156	48
4	206	96

الجزء A اكتب دالة تنمذج العدد المتوقّع سنويًا من النباتات باستعمال كل طريقة.

الجزء B استعمل الدالتين اللتين كتبتهما لإيجاد العدد المتوقّع من النباتات خلال 10 سنوات باستعمال كل طريقة.

الجزء C ما وجه المقارنة بين عدد النباتات المتوقّع خلال 5 سنوات وعدد النباتات المتوقّع خلال 15 سنة؟ وضّح كيف يمكن أن تؤثّر هذه الأنماط في قرار البستاني عند اختيار الطريقة التي عليه استعمالها.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

ملاحظات

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الدرس 2-2

النمو والاضمحلال الأسي

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✔ إنشاء دوال النمو والاضمحلال الأسي انطلاقًا من وصف علاقة معطى.
- ✔ معرفة ما إذا كان بالإمكان نمذجة موقف باستعمال النمو الأسي أو الاضمحلال الأسي، وتفسير معاملات النموذج المتغيرة في سياق الموقف.

الفهم الأساس

تتزايد دالة النمو الأسي بنسبة مئوية ثابتة في كل فترة. أما دالة الاضمحلال الأسي فتتناقص بنسبة مئوية ثابتة في كل فترة. يمكن استعمال دوال النمو والاضمحلال الأسي لنمذجة مواقف حياتية.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة دوال أسيّة وتمثيلها بيانيًا.
- تحديد الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- كتابة دوال النمو والاضمحلال الأسي.
- استعمال دوال النمو والاضمحلال الأسي لنمذجة مواقف حياتية.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استكشاف العلاقة بين الدوال الأسيّة والمتتاليات الهندسية.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن دوال النمو الأسي تمثّل العلاقات التي تتزايد أسيًّا وأن دوال الاضمحلال الأسي تمثّل العلاقات التي تتناقص أسيًّا.
- يطبّق الطلاب دوال النمو والاضمحلال الأسي لنمذجة مواقف حياتية مثل الفائدة المركبة وتناقص قيمة الأشياء بسبب استهلاكها.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **دالة أسيّة** | *exponential function*

المصطلحات الجديدة

- **نمو أسي** | *exponential growth*
- **عامل النمو** | *growth factor*
- **فائدة مركبة** | *compound interest*
- **اضمحلال أسي** | *exponential decay*
- **عامل الاضمحلال** | *decay factor*

نشاط المصطلحات

ناقش النمو والاضمحلال بصورة عامة. ناقش كيف يمكن تطبيق مصطلحي النمو والاضمحلال على التمثيل البياني لكل من الدالتين $y = 2^x$ و $y = 0.5^x$.

اطلب من الطلاب مطابقة كل مصطلح أدناه بتعريفه.

1. معادلة تُنمذج بدالة صورتها $y = ab^x$، حيث $0 < b < 1$ **[اضمحلال أسي]**
2. معادلة تُنمذج بدالة صورتها $y = ab^x$، حيث $b > 1$ **[نمو أسي]**
3. أساس دالة النمو الأسي **[عامل النمو]**
4. أساس دالة الاضمحلال الأسي **[عامل الاضمحلال]**

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

11F.1.6 ينمذج مجموعة من المواقف الحياتية المناسبة للدالة الخطية ودالة المقلوب ودالة القيمة المطلقة ودالة الجذر التربيعي والدالة الأسيّة، ويستعمل هذه الدوال لحل مسائل من واقع الحياة.

معايير ممارسات الرياضيات

نمذج

يستعمل الطلاب ما يعرفونه عن الدوال الأسيّة لوصف مسائل عن النمو أو الاضمحلال الأسي في مواقف حياتية بما في ذلك تزايد عدد السكان وتناقصه، وتناقص قيمة سيارة بسبب استهلاكها، ومسائل الفائدة المركبة.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية الخاصة بالدوال الأسيّة لتحديد الفرق بين دوال النمو الأسي ودوال الاضمحلال الأسي.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب ما يعرفونه عن الدوال الأسيّة لوصف تناقص قيمة السيارة بدلالة زمن استهلاكها. يعزز ذلك فهم الطلاب للدوال الأسيّة ويحثّهم على توسيع نطاق فهمهم ليشمل دوال النمو والاضمحلال الأسي.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما النمط الذي تلاحظه في تغير قيمة السيارة؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تتناقص قيمة السيارات بتزايد عدد سنوات استهلاكها.]

س: كيف يمكنك تحديد العلاقة بين القيم المتتالية في الجدول؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: ابحث عن الأنماط عبر طرح كل عدد من العدد الذي يسبقه مباشرة أو عبر قسمة القيم المتتالية؛ عيّن النقاط في المستوى الإحداثي وابحث عن العلاقة فيما بينها.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف تساعد معرفة الصيغة العامة للدالة الأسيّة في وصف هذا الموقف؟

[تسمح لك معرفة الصيغة العامة لدالة أسيّة باستعمال البيانات في الجدول لكتابة الدالة الأسيّة الخاصة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب الدالة التي تنمذج قيمة السيارة بعد x سنة. إذا تناقصت قيمة السيارة بسرعة مضاعفة، ما الزمن اللازم لتصبح قيمة السيارة $\frac{1}{4}$ قيمتها الأصلية؟

[$f(x) = 40\,000\,(0.85)^x$؛ تصبح قيمة السيارة 10 000 بعد 8 أو 9 سنوات من شرائها. إذا تناقصت قيمة السيارة بسرعة مضاعفة، ستستغرق 4 إلى 5 سنوات لتصبح قيمتها $\frac{1}{4}$ قيمتها الأصلية.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما معنى الاضمحلال في ما يخص الدوال الأسيّة؟

[تتناقص الدالة؛ كلما تزايدت المدخلة تناقصت المخرجة؛ يتراوح أساس الدالة بين 0 و 1]

س: ما معنى النمو في ما يخص الدوال الأسيّة؟

[تتزايد الدالة؛ كلما تزايدت المدخلة تزايدت المخرجة؛ أساس الدالة أكبر من 1]

عادات التفكير

استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

فكّر وثابر في الحل ما النسبة الثابتة للقيم المتناقصة؟

[مع أن نسب القيم في السنوات المتتالية ليست ثابتة، إلا أنها جميعها قريبة من 0.85، لذا يمكن استعمالها لنمذجة قيمة السيارة.]

كتاب الطالب، صفحة 65

2-2

النمو والاضمحلال الأسي

Exponential Growth and Decay

أستطيع... استعمال الدوال الأسيّة لنمذجة مواقف ووضع توقعات.

معيار الدرس

11F.1.6

المصطلحات

- نمو أسي exponential growth
- عامل النمو growth factor
- فائدة مركبة compound interest
- اضمحلال أسي exponential decay
- عامل الاضمحلال decay factor

استكشف وبرّر منطقيًّا

اشترت ليلى سيارة جديدة وتريد أن تعرف كيف تتغير قيمتها بمرور الزمن. يقدّر خبراء التأمين القيم المستقبلية للسيارات باستعمال دوال تمثّل انخفاض أسعار السلع بدلالة زمن استهلاكها. وقد طُبّقت إحدى هذه الدوال على السيارة التي يبيّن الشكل المجاور قيمتها التراجعية.

A. صِف كيف تتناقص قيمة السيارة من سنة إلى أخرى.

B. **نمذج** أي نوع من الدوال يمكن أن يوضّح نمطًا كهذا؟

C. استنادًا إلى إجابتك في الجزء B، ماذا يلزم لإيجاد الدالة التي استعملها خبير التأمين؟ وضّح إجابتك.

القيمة التراجعية	السنوات المنقضية بعد الشراء
QR 40 000	0
QR 34 080	1
QR 28 852	2
QR 24 400	3
QR 20 840	4

السؤال الأساس

ما المواقف التي يمكن نمذجتها باستعمال دوال النمو الأسي أو دوال الاضمحلال الأسي؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. تتناقص الفروق بين قيم السيارة كلما تزايدت السنوات المنقضية بعد الشراء.

B. الدالة الأسيّة.

C. نسبة ثابتة بين قيم السيارة في أعوام متتالية والقيمة الابتدائية للسيارة.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب بالنمو والاضمحلال الأسي على أنهما دالتان تتزايد مخرجاتهما أو تتناقص بعامل ثابت. ذكّر الطلاب بأن المتغيّر في الدوال الأسيّة هو في الأس. وضّح لهم أن بالإمكان استعمال دوال النمو والاضمحلال الأسي لنمذجة مواقف مثل الفائدة المركبة أو تناقص قيم الأشياء بدلالة استهلاكها.

مثال 1 النمو الأسي

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا يُضاف معدل النمو إلى العدد 1 في دالة النمو الأسي؟

[العامل الذي تُضرب فيه الكمية يكون أكبر من 1 عندما تتزايد، أو أكثر من 100%]

س: كيف يمكنك وصف معدل نمو عدد السكان كل عام؟

[يتزايد بنسبة 15% كل عام.]

• اضمحلال أسي exponential decay
• عامل الاضمحلال decay factor

الاستيعاب المفاهيمي

السؤال الأساس
ما المواقف التي يمكن نمذجتها باستعمال دوال النمو الأسي أو دوال الاضمحلال الأسي؟

مثال 1 النمو الأسي

يتزايد عدد سكان إحدى المدن بنسبة 15% سنويًا، إذا كان عدد سكان هذه المدينة الآن 5 000 نسمة، أوجد عدد سكانها التقديري بعد 5 سنوات.

أهلًا وسهلًا في مدينتنا
عدد السكان: 5 000

يمكنك نمذجة **نمو أسي** باستعمال الدالة $f(x) = a \cdot b^x$ حيث $a > 0$ و $b > 1$.

$f(x) = a \cdot b^x$
$f(x) = a(1 + r)^x$

دالة النمو الأسي لها **عامل نمو** يساوي العدد 1 مضافًا إليه نسبة النمو (معدل النمو).

الخطوة 1 اكتب دالة النمو الأسي التي تنمذج النمو المتوقع للسكان.

ليكن:
القيمة الابتدائية = a ، معدل النمو = r ، الزمن بالسنوات = x

صيغة دالة النمو الأسي: $f(x) = a(1 + r)^x$
عوض $a = 5\,000$, $r = 0.15$: $= 5\,000(1 + 0.15)^x$
بسّط: $= 5\,000(1.15)^x$

إذن، دالة النمو هي $f(x) = 5\,000(1.15)^x$

نمذج
في حالة النمو الأسي، التغير في قيمة y يتناسب دائمًا مع قيم y نفسها. لذا تتزايد الدالة بسرعة عندما تكون قيم y كبيرة. ما هي حالات النمو الأسي الأخرى التي قد تفكر فيها؟

يتبع في الصفحة التالية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. كلا، التزايد يتمثل بخط مستقيم لأن عدد السكان يتزايد بقيمة ثابتة كل سنة.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما المعلومات التي يمكنها مساعدتك على تحديد ما إذا كان بالإمكان نمذجة عدد السكان بدالة نمو أسي؟

[معدل التزايد. لكي تكون الدالة أسيّة يجب أن يكون معدل التزايد نسبة ثابتة لا أن يتزايد عدد السكان بقيمة ثابتة.]

المفهوم

س: فسّر الصيغة عندما تكون نسبة الفائدة 0%؟

[عندما تكون نسبة الفائدة السنوية 0%، فإن جملة المبلغ تساوي المبلغ الأصلي.]

س: لماذا تقسم نسبة الفائدة السنوية على عدد مرات استحقاق الفائدة المركبة في السنة؟

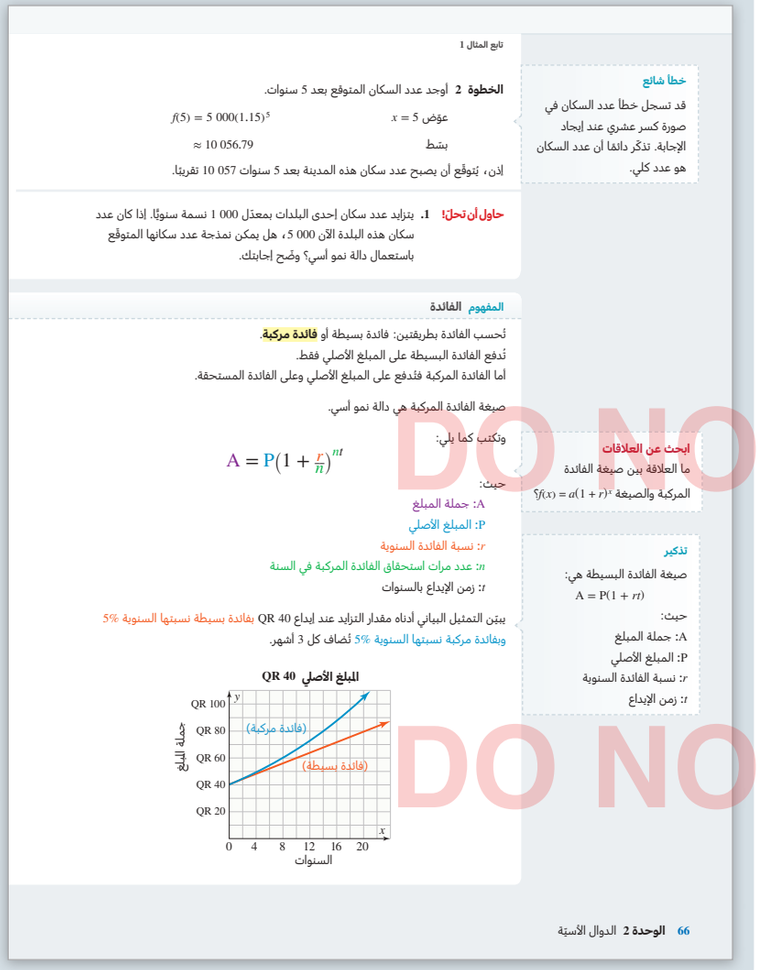
[نسبة الفائدة هي نسبة سنوية، لذا عندما تُستحق الفائدة المركبة أكثر من مرة في السنة تصبح النسبة $\frac{r}{n}$ كل مرة تُستحق فيها الفائدة المركبة.]

س: في التمثيل البياني الذي يبيّن الفائدة المركبة، ما قيمة كل من P و r و n ؟

[P = 40, $r = 0.05$, $n = 4$]

س: ما وجه المقارنة بين صيغة الفائدة المركبة وصيغة الفائدة البسيطة؟

[صيغة الفائدة البسيطة هي $I = prt$. تشمل الصيغتان المبلغ الأصلي ونسبة الفائدة السنوية وزمن الإيداع. تُستعمل صيغة الفائدة البسيطة لحساب قيمة مبلغ الفائدة، بينما تُستعمل صيغة الفائدة المركبة لحساب المبلغ الكلي.]



تابع المثال 1

الخطوة 2 أوجد عدد السكان المتوقع بعد 5 سنوات.

عوّض 5 = x — $f(5) = 5\,000(1.15)^5$

بسّط — $\approx 10\,056.79$

إذن، يُتوقع أن يصبح عدد سكان هذه المدينة بعد 5 سنوات 10 057 تقريبًا.

خطأ شائع

قد تسجل خطأ عدد السكان في صورة كسر عشري عند إيجاد الإجابة. تذكّر دائمًا أن عدد السكان هو عدد كلي.

حاول أن تحلّ!

1. يتزايد عدد سكان إحدى البلدات بمعدّل 1 000 نسمة سنويًا. إذا كان عدد سكان هذه البلدة الآن 5 000، هل يمكن نمذجة عدد سكانها المتوقّع باستعمال دالة نمو أسي؟ وضّح إجابتك.

المفهوم الفائدة

تُحسب الفائدة بطريقتين: فائدة بسيطة أو **فائدة مركبة**.

تُدفع الفائدة البسيطة على المبلغ الأصلي فقط.

أما الفائدة المركبة فتُدفع على المبلغ الأصلي وعلى الفائدة المستحقة.

صيغة الفائدة المركبة هي دالة نمو أسي.

وتُكتب كما يلي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث:

A: جملة المبلغ

P: المبلغ الأصلي

r: نسبة الفائدة السنوية

n: عدد مرات استحقاق الفائدة المركبة في السنة

t: زمن الإيداع بالسنوات

ابحث عن العلاقات

ما العلاقة بين صيغة الفائدة المركبة والصيغة $f(x) = a(1 + r)^x$؟

تذكير

صيغة الفائدة البسيطة هي:

$A = P(1 + rt)$

حيث:

A: جملة المبلغ

P: المبلغ الأصلي

r: نسبة الفائدة السنوية

t: زمن الإيداع

يبيّن التمثيل البياني أدناه مقدار التزايد عند إيداع QR 40 بفائدة بسيطة نسبتها السنوية 5% وبفائدة مركبة نسبتها السنوية 5% تُضاف كل 3 أشهر.

66 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 2 نماذج أسيّة للنمو

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

س: ما المقصود بفائدة مركبة تُضاف كل 3 أشهر؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: تُضاف الفائدة المركبة 4 مرات في السنة؛ تضاف الفائدة المركبة كل ثلاثة أشهر.]

الجزء B

س: ما الفروق التي تلاحظها بين فائدة مركبة تُضاف كل 3 أشهر وفائدة مركبة تُضاف سنويًا؟

[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة: تتغير قيمة n في الصيغة؛ ويتناقص عامل النمو؛ ويزداد عدد مرات إضافة الفائدة.]

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

تواصل بدقة اشرح لما تتزايد جملة المبلغ كلما تزايد عدد مرات إضافة الفائدة المركبة.

[كلما تزايد عدد مرات إضافة الفائدة المركبة تناقص عامل النمو بشكل طفيف، لكنه يُرفع إلى أس أكبر، وبالتالي تتزايد القيمة الكلية.]

تطبيق

مثال 2 نماذج أسيّة للنمو

فتح والد حمد حسابًا مصرفيًا له عند ولادته أودع فيه مبلغ QR 12 000 بفائدة مركبة تُضاف كل 3 أشهر، نسبتها السنوية 8%

A. أوجد جملة المبلغ بعد مرور 5 سنوات.

استعمل صيغة الفائدة المركبة.

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$= 12\,000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4t}$

$= 12\,000(1 + 0.02)^{4t}$

$= 12\,000(1.02)^{4t}$

$= 12\,000(1.02)^{4(5)}$

$= 12\,000(1.02)^{20}$

$= 17\,831.37$

المبلغ الأصلي هو QR 12 000. الفائدة السنوية نسبتها 8%، وعدد مرات احتساب الفائدة في السنة هو $n = \frac{12}{3} = 4$

8% هي فائدة سنوية تُدفع على 4 فترات من السنة، إذن 2% هي فائدة تُدفع كل فترة وهي 3 أشهر.

استعمل البنية

استعمل ترتيب العمليات الحسابية عند إدخال الأعداد على الحاسبة. كيف يمكن لعدم استعمال الأقواس أن يغير إجابتك؟

إذن، ستصبح جملة المبلغ في نهاية السنة الخامسة QR 17 831.37.

B. هل ستكون جملة المبلغ أكبر بعد 15 سنة بفائدة مركبة تُضاف سنويًا بدلًا من الفائدة المركبة التي تُضاف كل 3 أشهر؟

قارن بين الدالة الأسية في الجزء A $(t = 15, n = 4)$ والدالة الأسية في الجزء B $(t = 15, n = 1)$.

فائدة مركبة تُضاف سنويًا:

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$= 12\,000\left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^{(15)}$

$= 12\,000(1.08)^{15}$

$= 38\,066.03$

فائدة مركبة تُضاف كل 3 أشهر:

$A = 12\,000(1.02)^{nt}$

$= 12\,000(1.02)^{4(15)}$

$= 12\,000(1.02)^{60}$

$= 39\,372.37$

بما أن الفائدة تُضاف مرة واحدة كل سنة فإن نسبة الفائدة 8% تُدفع مرة واحدة كل سنة.

إذن، جملة المبلغ لحساب حمد المصرفي بعد مرور 15 سنة بفائدة مركبة تُضاف سنويًا ستكون أصغر من جملة المبلغ بعد مرور 15 سنة بفائدة مركبة تُضاف كل ثلاثة أشهر.

يتبع في الصفحة التالية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. إذا أضيفت الفائدة المركبة كل ستة أشهر، يكون المبلغ في الحساب أقل بمقدار QR 451.6.

b. إذا أضيفت الفائدة المركبة شهريًا، يكون المبلغ في الحساب أكثر بمقدار QR 310.68.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يتأثر الدخل بعدد مرات استحقاق الفائدة المركبة في السنة؟

[إذا تزايد عدد مرات إضافة الفائدة المركبة في السنة، تتزايد قيمة جملة المبلغ بوتيرة أسرع.]

مثال 3 الاضمحلال الأسي

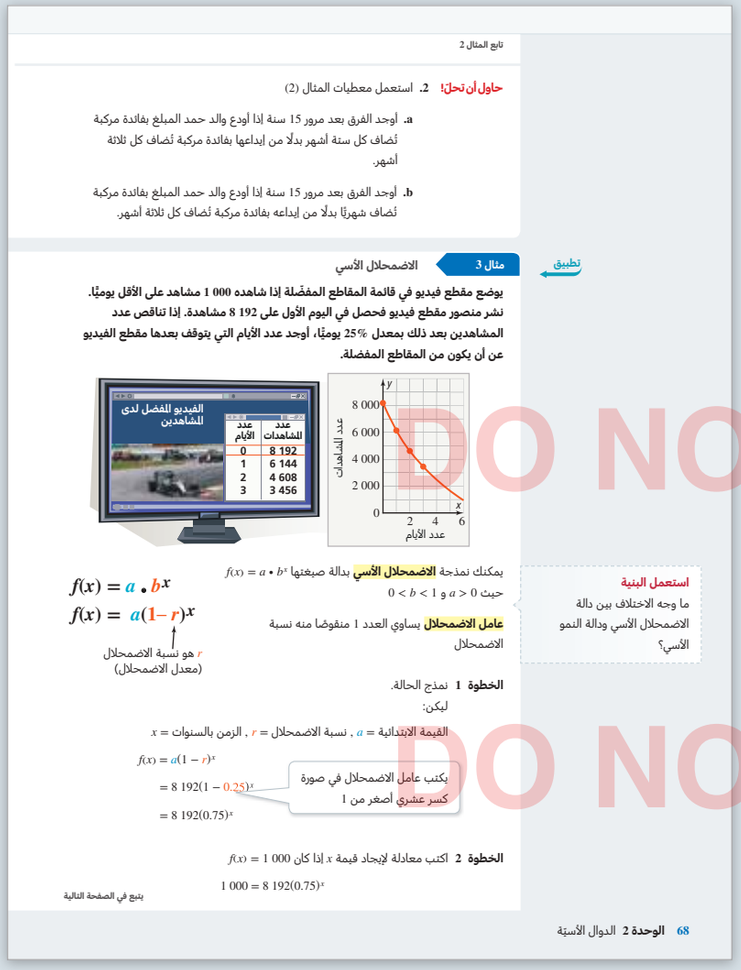
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما الذي تلاحظه بشأن عامل الاضمحلال؟

[قد تتنوع الإجابات. نماذج إجابة: إنه دائمًا أصغر من 1؛ لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا؛ إنه كسر عشري.]

س: لماذا يتراوح عامل الاضمحلال بين 0 و 1؟

[ناتج ضرب عدد في عدد يتراوح بين 0 و 1 يكون عددًا أصغر، مما يؤدي إلى تناقص المخرجة.]



تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! 2. استعمل معطيات المثال (2)

a. أوجد الفرق بعد مرور 15 سنة إذا أودع والد حمد المبلغ بفائدة مركبة تُضاف كل ستة أشهر بدلًا من إيداعها بفائدة مركبة تُضاف كل ثلاثة أشهر.

b. أوجد الفرق بعد مرور 15 سنة إذا أودع والد حمد المبلغ بفائدة مركبة تُضاف شهريًا بدلًا من إيداعه بفائدة مركبة تُضاف كل ثلاثة أشهر.

تطبيق **مثال 3** الاضمحلال الأسي

يوضع مقطع فيديو في قائمة المقاطع المفضّلة إذا شاهده 1 000 مشاهد على الأقل يوميًا. نشر منصور مقطع فيديو فحصل في اليوم الأول على 8 192 مشاهدة. إذا تناقص عدد المشاهدين بعد ذلك بمعدل 25% يوميًا، أوجد عدد الأيام التي يتوقف بعدها مقطع الفيديو عن أن يكون من المقاطع المفضلة.

الفيديو المفضل لدى المشاهدين

عدد الأيام	عدد المشاهدات
0	8 192
1	6 144
2	4 608
3	3 456

عدد المشاهدات

عدد الأيام

استعمل البنية
ما وجه الاختلاف بين دالة الاضمحلال الأسي ودالة النمو الأسي؟

يمكنك نمذجة **الاضمحلال الأسي** بدالة صيغتها $f(x) = a \cdot b^x$ حيث $a > 0$ و $0 < b < 1$

عامل الاضمحلال يساوي العدد 1 منقوصًا منه نسبة الاضمحلال

$f(x) = a \cdot b^x$

$f(x) = a(1 - r)^x$

r هو نسبة الاضمحلال (معدل الاضمحلال)

الخطوة 1 نمذج الحالة.

ليكن:

القيمة الابتدائية = a ، نسبة الاضمحلال = r ، الزمن بالسنوات = x

$f(x) = a(1 - r)^x$

$= 8\,192(1 - 0.25)^x$

$= 8\,192(0.75)^x$

يكتب عامل الاضمحلال في صورة كسر عشري أصغر من 1

الخطوة 2 اكتب معادلة لإيجاد قيمة x إذا كان $f(x) = 1\,000$

$1\,000 = 8\,192(0.75)^x$

يتبع في الصفحة التالية

68 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 قد يواجه الطلاب صعوبة في تحديد ما إذا كان موقف ما يمثّل نموًا أسيًا أم اضمحلالًا أسيًا، وقد يجدون صعوبة أيضًا في حساب عامل النمو أو الاضمحلال. دع الطلاب يتدربون من خلال حل المسألة التالية.

- تمت معالجة عينة من خلايا السرطان بدواء جديد أدّى إلى تناقص عدد الخلايا بنسبة 10% كل ساعة. كان عدد الخلايا في العيّنة في الأصل 100 000 خلية.

س: هل يُعدّ هذا مثالًا على نمو أم اضمحلال أسي؟

[اضمحلال]

س: ما عامل الاضمحلال؟

[عامل الاضمحلال هو 1 ناقص نسبة التغير، أو 0.9]

س: ما عدد الخلايا المتبقي بعد 3 ساعات؟

[$f(3) = 100\,000(0.9)^3 = 72\,900$؛ عدد الخلايا المتبقي بعد 3 ساعات هو 72 900 خلية.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. 10 أيام.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الذي تلاحظه بشأن العلاقة بين نسبة التغير وعامل الاضمحلال؟

[كلما زادت نسبة التغير يتناقص عامل الاضمحلال، مما يعني أن مخرجة الدالة تتناقص بوتيرة أسرع.]

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 3 قد يضيف بعض الطلاب نسبة التغير إلى العدد 1 بدلًا من طرحها. اطلب من الطلاب أن يعتبروا أن دالة الاضمحلال تتناقص، لذا يجب أن يكون عامل الاضمحلال أصغر من 1

مثال 4 نماذج أسيّة للاضمحلال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف تساعدك صيغة الميل للدوال الخطية في حساب متوسط نسبة التغير لدالة أسيّة؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يُحسب متوسط نسبة التغير لفترة محددة لدالة أسيّة باستعمال صيغة ميل المستقيم الذي يصل نقطتَي نهاية تلك الفترة.]

س: كيف تحدد متوسط نسبة التغير لدالة أسيّة في فترة محددة؟

[احسب التغير في y مقسومًا على التغير في x باستعمال صيغة الميل.]

س: لماذا متوسط نسبة التغير أقل في السنوات ما بين 6 و 10 مقارنةً بالسنوات ما بين 1 و 5؟

[يتناقص عدد الجرذان بمرور الزمن. تُضرب الأعداد الصغيرة في نفس عامل الاضمحلال الأمر الذي يؤدي إلى نسبة تغير أدنى.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. متوسط نسبة التغير من السنة 1 إلى السنة 5 هو 14؛ متوسط نسبة التغير من السنة 6 إلى السنة 10 هو 20.5؛ يتزايد متوسط نسبة التغير كلما ازداد عدد السنوات.

تابع المثال 3

الخطوة 3 قدّر حلّ المعادلة باستعمال حاسبة بيانية.

استعمل ميزة الجدول لإيجاد قيمة x عندما $y < 1\,000$

X	Y1
4	2592
5	1944
6	1458
7	1093.5
8	820.12
9	615.09
10	461.32

X=8

إذن، سيتوقّف مقطع الفيديو عن كونه مفضّلًا لدى المشاهدين بعد مرور 8 أيام.

حاول أن تحلّ! 3. استعمل معطيات المثال (3)

على فرض أن عدد المشاهدين يتناقص بنسبة 20% يوميًا.

بعد كم يوم سيصبح عدد المشاهدين يوميًا أقل من 1 000؟

تطبيق

مثال 4 نماذج أسيّة للاضمحلال

يتناقص عدد الجرذان في إحدى المناطق بالنسبة المبيّنة في الشكل المجاور. ما وجه المقارنة بين تناقص عدد الجرذان من السنة 1 إلى السنة 5 وتناقص عدد الجرذان من السنة 6 إلى السنة 10؟

يتناقص عدد الجرذان بنسبة 8% سنويًا

العدد الابتدائي 144جرذًا

اكتب دالة اضمحلال أسيّة لنمذجة الحالة.

صيغة دالة الاضمحلال الأسي $f(x) = a(1 - r)^x$

عوّض $a = 144$, $r = 0.08$ $= 144(1 - 0.08)^x$

بسّط $= 144(0.92)^x$

نصيحة دراسية

استعمل صيغة الميل لإيجاد متوسط نسبة التغير بين نقطتين:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أوجد متوسط نسبة التغير لكل فترة.

من السنة 1 إلى السنة 5: $1 \le x \le 5$

$f(5) \approx 95$ $f(1) \approx 132$

$m = \frac{95 - 132}{5 - 1} = -\frac{37}{4} = -9.25$

من السنة 6 إلى السنة 10: $6 \le x \le 10$

$f(10) \approx 63$ $f(6) \approx 87$

$m = \frac{63 - 87}{10 - 6} = -\frac{24}{4} = -6$

بالنسبة للسنوات من 1 إلى 5، نلاحظ أن متوسط تناقص عدد الجرذان هو 9.25 جرذًا في السنة. بالنسبة للسنوات من 6 إلى 10، نلاحظ أن متوسط تناقص عدد الجرذان هو 6 جرذان في السنة. إذن، متوسط نسبة تغير عدد الجرذان يتناقص كلما ازداد عدد السنوات.

حاول أن تحلّ! 4. استعمل معطيات المثال (4)

أوجد متوسط نسبة تغير عدد الجرذان في نفس الفترات إذا كان عددها يتزايد بنسبة 8%.

الدرس 2-2 النمو والاضمحلال الأسي 69

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب توقّع الفترة التي يصل فيها متوسط نسبة التغير إلى مبلغ محدد في الموقف التالي.

- لدى منظمة مدنية محلية 200 عضو، لكن العضوية تتناقص بنسبة 3% كل سنة. يقاس متوسط نسبة التغير لفترات مدة كل منها 5 سنوات.

س: متى يكون متوسط نسبة التغير 4−؟

$f(10) = 200(0.97)^{10} = 147$]

$f(15) = 200(0.97)^{15} = 127$

$(147 - 127) \div (10 - 15) = -4$

بين السنة 10 والسنة 15]

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 5 الاضمحلال الأسي والنمو الأسي

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: أي موقف ينمذج النمو الأسي وأي موقف ينمذج الاضمحلال الأسي؟

[تمثّل تكلفة صيانة السيارة المتزايدة نموًا أسيًا (عامل النمو 1.28) بينما يمثّل انخفاض قيمة السيارة بمرور الزمن اضمحلالًا أسيًا (عامل الاضمحلال 0.85).]

س: ما الطرائق التي يمكنك استعمالها لحل المعادلتين؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: استعمل التعويض لحل المعادلتين في الوقت نفسه؛ مثّل المعادلتين بيانيًا وأوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

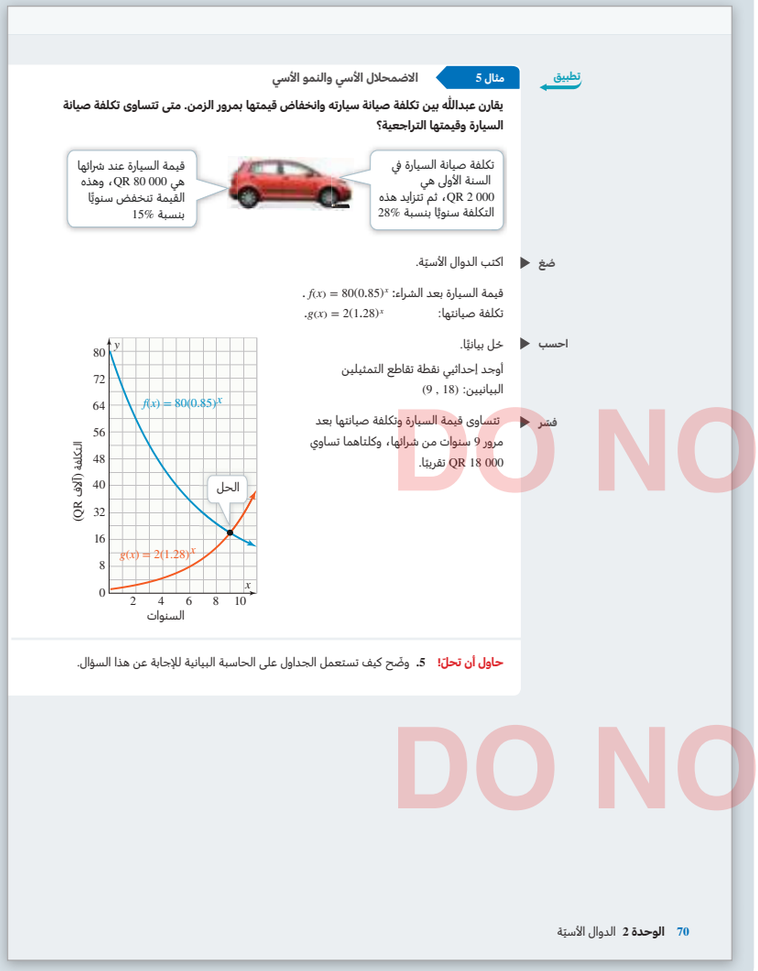
5. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: أدخل الدالتين إلى الحاسبة البيانية في Y = screen، اضغط على 2ND TABLE، وأوجد قيمة x حيث تكون قيمتا الدالتين متساويتين.

استعمل مع **الأمثلة 3-5**

عادات التفكير

ابنِ الحجج الرياضية ما هي الفوارق الأساسية بين التمثيل الجبري للنمو الأسي والتمثيل الجبري للاضمحلال الأسي؟ وضّح إجابتك.

[عامل النمو في دوال النمو الأسي أكبر من 1، فيما عامل الاضمحلال في دوال الاضمحلال الأسي أصغر من 1]



تطبيق

مثال 5 الاضمحلال الأسي والنمو الأسي

يقارن عبدالله بين تكلفة صيانة سيارته وانخفاض قيمتها بمرور الزمن. متى تتساوى تكلفة صيانة السيارة وقيمتها التراجعية؟

تكلفة صيانة السيارة في السنة الأولى هي 2 000 QR، ثم تتزايد هذه التكلفة سنويًا بنسبة 28%

قيمة السيارة عند شرائها هي 80 000 QR، وهذه القيمة تنخفض سنويًا بنسبة 15%

ضع ◀ اكتب الدوال الأسية.

قيمة السيارة بعد الشراء: $f(x) = 80(0.85)^x$.

تكلفة صيانتها: $g(x) = 2(1.28)^x$.

احسب ◀ حلّ بيانيًا.

أوجد إحداثي نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين: (9 ، 18)

فسّر ◀ تتساوى قيمة السيارة وتكلفة صيانتها بعد مرور 9 سنوات من شرائها، وكلتاهما تساوي 18 000 QR تقريبًا.

التكلفة (الآف QR)

السنوات

الحل

$f(x) = 80(0.85)^x$

$g(x) = 2(1.28)^x$

حاول أن تحلّ! 5. وضّح كيف تستعمل الجداول على الحاسبة البيانية للإجابة عن هذا السؤال.

70 **الوحدة 2** الدوال الأسية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم النمو والاضمحلال الأسي

س: ما الفرق بين دوال النمو الأسي ودوال الاضمحلال الأسي؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عامل النمو في دوال النمو الأسي أكبر من 1 بينما عامل الاضمحلال في دوال الاضمحلال الأسي يتراوح بين 0 و 1 ؛ لدوال النمو الأسي مخرجة متزايدة مع مدخلة متزايدة ولدوال الاضمحلال الأسي مخرجة متناقصة مع مدخلة متزايدة.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمارين 5-8 عند تحديد عامل النمو أو الاضمحلال قد ينسى بعض الطلاب جمع نسبة التغير مع 1 أو طرحها منه. اطلب منهم ضرب 100 في 0.05 وفي 1.05، ووصف ما يحدث للعدد 100 في كل مثال.

الإجابات

1. حسابات ادخار واستثمارات بفائدة مركبة، تزايد عدد السكان وانخفاضه، انتشار فيروس حاسوبي أو مقطع فيديو.
2. تزيد الفائدة البسيطة قيمة الحساب بمبلغ ثابت بمرور الزمن، لذا تنمذج بدالة خطية. تزيد الفائدة المركبة قيمة الحساب بنسبة ثابتة، لذا تنمذج بدالة أسيّة.
3. لم تميّز سلوى بين عامل النمو ونسبة النمو. عامل النمو هو 1.25 نسبة النمو هي 25%
4. عامل النمو $(1 + r)$ هو الحد b في الدالة الأسيّة. لكي تكون الدالة الأسيّة دالة نمو يجب أن يكون b أكبر من 1
على سبيل المثال، إذا تزايد عدد السكان بنسبة 25% في السنة، تكون نسبة عدد السكان كل سنة 125% من عدد السكان في السنة السابقة.
لذا يُضرب العدد في 1.25 أو في $1 + r$
5. $f(x) = 100(1.05)^x$
6. $f(x) = 1\,250(1.25)^x$
7. $f(x) = 512(0.5)^x$
8. $f(x) = 10\,000(0.88)^x$
9. QR 117.8

ملخص المفهوم الاضمحلال والنمو الأسي

	نمو أسي	اضمحلال أسي	فائدة مركبة
جبريًا	$f(x) = a \cdot b^x$ $f(x) = a(1 + r)^x$	$f(x) = a \cdot b^x$ $f(x) = a(1 - r)^x$	$f(x) = a \cdot b^x$ $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
عدديًا	$f(x) = 4(1 + 0.5)^x$	$f(x) = 4(1 - 0.5)^x$	$A = 5\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2t}$
لفظيًا	• القيمة الابتدائية: 4 • نسبة النمو: 50% • عامل النمو: 1.5	• القيمة الابتدائية: 4 • نسبة الاضمحلال: 50% • عامل الاضمحلال: 0.5	• المبلغ الأصلي: 5 • نسبة الفائدة السنوية: 12% • فترات الإيداع: 2
بيانيًا			

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما المواقف التي يمكن نمذجتها باستعمال دوال النمو الأسي أو دوال الاضمحلال الأسي؟
2. **المصطلحات** ما الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة؟
3. **حلّل الخطأ** تقول سلوى إن عامل النمو للدالة الأسيّة $f(x) = 100(1.25)^x$ يساوي 25%، أوجد خطأ سلوى وصححه.
4. **ابحث عن العلاقات** وضّح السبب في أن $(1 + r)$ هو عامل النمو لدالة النمو الأسي.

طبّق فهمك

في التمارين 5-8 اكتب دالة نمو أو اضمحلال أسي لكل موقف.

5. قيمة ابتدائية مقدارها 100 تتزايد بنسبة 5%
6. قيمة ابتدائية مقدارها 1 250 تتزايد بنسبة 25%
7. قيمة ابتدائية مقدارها 512 تتناقص بنسبة 50%
8. قيمة ابتدائية مقدارها 10 000 تتناقص بنسبة 12%
9. أوجد الفرق بين قيمة مبلغ مقداره QR 8 000 أودع في مصرف مدة 10 سنوات بفائدة مركبة مقدارها 5% مستحقة كل 3 أشهر وبين قيمته إذا كانت هذه الفائدة مستحقة سنويًا؟

الدرس 2-2 النمو والاضمحلال الأسي 71

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10–21, 24–25, 27–32	10–14, 16–17, 20–32

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	10, 11	2
	15–16	1
2	12, 17–18, 31	2
	14, 28	3
3	13, 19–20, 27	2
	32	4
4	21–24, 30	2
5	25–26	2
	29	3

الإجابات

10. تمثّل قيمة a المبلغ الأصلي، بينما تساوي b عامل النمو $(1 + r)$.

11. $y = 0$؛ تُنمذج كل من دالة النمو الأسي ودالة الاضمحلال الأسي بالصيغة $f(x) = ab^x$.

12. يجب أن تكون المعادلة الأصلية $1\,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{2t}$ لأن الفائدة المركّبة تستحق مرتين في السنة.

13. أدخل الدالة إلى $Y = \text{screen}$، اعرض الجدول المناظر، ثم أوجد قيمة x عندما $y = 15$.

14. a. كلما تزايدت قيمة n، تناقص معدل النمو لأن قيمة الكسر المضاف إلى 1 تتناقص بتزايد مقامه.

b. 4 469.54; 4 475.28; 4 475.40; 4 475.47; 4 475.47

c. على الرغم من أن معدل النمو يتناقص بتزايد قيمة n، إلّا أن قيمة الدالة تزداد بسبب تزايد قيمة الأس.

15. $f(x) = 20(1.25)^x$

16. $f(x) = 100(1.05)^x$

17. بعد 20 سنة، تصبح قيمة الاستثمار بفائدة مركبة تُضاف كل 3 أشهر أكثر بمقدار QR 2 672.88 من الاستثمار بفائدة مركبة تُضاف سنويًا.

18. بعد 5 سنوات، تصبح قيمة الاستثمار بفائدة مركبة تُضاف كل 6 أشهر أكثر بمقدار QR 70.33 من قيمة الاستثمار بفائدة مركبة تُضاف سنويًا.

19. $f(x) = 100(0.95)^x$؛ x تساوي 10 تقريبًا حيث $f(x) = 60$.

20. $f(x) = 50\,000(0.7)^x$؛ x تساوي 17 تقريبًا حيث $f(x) = 100$.

21. $f(x) = 50(0.9)^x$، متوسط نسبة التغير في الفترة $1 \le x \le 4$ يساوي -4.065 تقريبًا ومتوسط نسبة التغير في الفترة $8 \le x \le 5$ يساوي -2.667 تقريبًا. تتناقص نسبة التغير فيما تتزايد قيمة x لأنها دالة اضمحلال أسي.

22. $f(x) = 25(0.8)^x$، متوسط نسبة التغير في الفترة $2 \le x \le 4$ يساوي -2.88 تقريبًا ومتوسط نسبة التغير في الفترة $8 \le x \le 6$ يساوي -1.18 تقريبًا. تتناقص نسبة التغير فيما تتزايد قيمة x.

23. $f(x) = 4(0.5)^x$، عامل الاضمحلال: 0.5

24. $f(x) = 100(1.1)^x$، عامل النمو: 1.1

25. $f(x) = 100(0.95)^x$, $g(x) = 20(1.05)^x$

تتساوى الدالتان عندما $x = 16$ تقريبًا.

26. $f(x) = 40(1.25)^x$, $g(x) = 10\,000(0.84)^x$

تتساوى الدالتان عندما $x = 14$ تقريبًا.

DO NOT PRINT

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. ابحث عن العلاقات ما العلاقة بين دالة نمو أسي صيغتها $f(x) = a \cdot b^x$ ودالة نمو أسي صيغتها $f(x) = a(1 + r)^x$؟

11. عمّم ما خط التقارب للتمثيل البياني لدالة النمو أو لدالة الاضمحلال الأسي؟ وضّح إجابتك.

12. حلّل الخطأ كتب جاسم المعادلة التالية لإيجاد القيمة السنوية المستحقة لإيداع مبلغ QR 4 000 بفائدة مركبة نسبتها السنوية 4% مستحقة كل 6 أشهر. أوجد خطأ جاسم وصحّحه.

$$A = 4\,000(1 + 0.04)^{4t}$$
$$= 4\,000(1.04)^{4t}$$

✗

13. استعمل الأدوات المناسبة صِف كيف تستعمل الحاسبة البيانية لتقدير قيمة x عندما $f(x) = 8(1.25)^x$ تساوي 15

14. مهارات التفكير العليا في المثال (2)، استعملت الصيغة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لحلّ مسائل تتضمن فائدة مركبة.

a. كيف يتأثر عامل نمو الدالة التي تنمذج الفائدة المركبة عندما تتزايد قيمة n؟ وضّح إجابتك.

b. انسخ الجدول التالي وأكمله.

n	$A = 3\,000\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{5n}$
12	
365	
1 000	
10 000	
100 000	

c. ما العلاقة بين قيمة الدالة والتغيير الحاصل على عامل النمو عندما تتزايد قيمة n؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب

في التمرينين 15 و 16، اكتب دالة نمو أسي لنمذجة الموقف.

انظر المثال 1

15. قيمة ابتدائية = 20، عامل نمو = 1.25

16. قيمة ابتدائية = 100، عامل نمو = 1.05

في التمرينين 17 و 18، قارن بين قيمة المبلغ الأصلي وقيمة نفس المبلغ إذا أودع بفائدة سنوية مركبة نسبتها ثابتة.

انظر المثال 2

17. مبلغ أصلي: QR 32 000
الفائدة السنوية: 6%
الاستحقاق: كل 3 أشهر.
سنوات الإيداع: 20 سنة.

18. مبلغ أصلي: QR 40 000
الفائدة السنوية: 3.5%
الاستحقاق: كل 6 أشهر.
سنوات الإيداع: 5 سنوات.

في التمرينين 19 و 20، اكتب دالة اضمحلال أسي لنمذجة كل موقف مما يلي.ثم قدّر قيمة x لكل قيمة $f(x)$ معطاة.

انظر المثال 3

19. قيمة ابتدائية: 100
عامل اضمحلال: 0.95
$f(x) = 60$

20. قيمة ابتدائية: 5 000
عامل اضمحلال: 0.7
$f(x) = 100$

في التمرينين 21 و 22، اكتب دالة اضمحلال أسي لنمذجة الموقف. قارن بين متوسط نسب التغيير على الفترات المعطاة.

انظر المثال 4

21. قيمة ابتدائية: 50
عامل اضمحلال: 0.9
$4 \le x \le 1$ و $8 \le x \le 5$

22. قيمة ابتدائية: 25
عامل اضمحلال: 0.8
$4 \le x \le 2$ و $8 \le x \le 6$

في التمرينين 23 و 24، اكتب دالة أسيّة لنمذجة البيانات في كل جدول أدناه. حدد عامل النمو أو عامل الاضمحلال. انظر الأمثلة 1-4

23.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

24.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	100	110	121	133.1	146.41

في التمرينين 25 و 26، نمذج كل زوج من الحالات أدناه بدالتين أسيّتين f و g. أوجد قيمة تقريبية للمتغير x تجعل $f(x) = g(x)$

انظر المثال 5

25. f: قيمة ابتدائية مقدارها 100 تتناقص بنسبة 5%
g: قيمة ابتدائية مقدارها 20 تتزايد بنسبة 5%

26. f: قيمة ابتدائية مقدارها 40 تتزايد بنسبة 25%
g: قيمة ابتدائية مقدارها 10 000 تتناقص بنسبة 16%

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

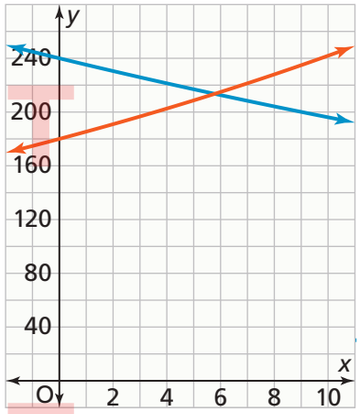
www.jnob-jo.com

الإجابات

27. $f(x) = 500(1.07)^x$؛ 45 سنة تقريبًا؛ أدخل الدالة إلى Y = screen في شاشة الحاسبة البيانية، اضغط على 2ND TABLE، ثم أوجد قيمة x عندما $y = 10\ 000$.

28. لطيفة: $f(t) = 2\ 000(1.039)^{2t}$؛
خولة: $f(t) = 4\ 000(1.03)^{2t}$؛
ستتضاعف أموال لطيفة أولًا.
بالنسبة للطيفة: $f(10) \approx 4\ 300$،
بالنسبة لخولة: $f(12) \approx 8\ 000$.

29. $f(x) = 240(0.98)^x$; $f(x) = 180(1.03)^x$.



يتساوى تقريبًا عدد الطلاب في المدرستين بعد 6 سنوات. يمكنك إيجاد القيمة التقريبية للمتغير x عند نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين.

32. الجزء A A: $f(x) = 40\ 000(1.04)^x$;
B: $f(x) = 40\ 000(1.01)^{4x}$;
C: $f(x) = 40\ 000(1.042)^x$

الجزء B الاستثمار C.

الجزء C سيبلغ الاستثمار C المبلغ 1 000 000 QR أولًا وذلك بعد 79 سنة، بينما يحتاج الاستثمار B مدة 81 سنة والاستثمار A مدة 83 سنة.

طبّق

27. نمذج يُعدّ نبات ما مجتاحًا عندما يبلغ عدد شتلاته في منطقة معيّنة 10 000 شتلة. استعمل معطيات الصورة أدناه لنمذجة الحالة باستعمال دالة نمو أسي. بعد كم سنة سيصبح النبات المبيّن في الصورة مجتاحًا؟ وضّح طريقة إيجاد الحل.

28. ابحث عن العلاقات أودعت لطيفة 2 000 QR في مصرف بفائدة سنوية مركبة نسبتها 7.8% كما في الإعلان أدناه، وأودعت خولة 4 000 QR بفائدة سنوية مركبة نسبتها 6% تضاف كل 6 أشهر. نمذج كل إيداع بدالة نمو أسي. أي مبلغ سيتضاعف أولًا؟ وضّح إجابتك.

29. فكّر وناقش في الحل اكتب دالتين أسيّتين ومثّلهما بيانيًا لنمذجة عدد الطلاب في المدرسة A وفي المدرسة B بدلالة عدد السنوات. بعد كم سنة تقريبًا يصبح عدد الطلاب في المدرستين هو نفسه؟ وضّح كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني لمعرفة الإجابة.

تدرَّب على اختبار

30. حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يلي دالة نمو أسي أم دالة اضمحلال أسي.

- $f(x) = 2(1.02)^x$ — نمو
- $f(x) = 5\ 000(3)^x$ — نمو
- $f(x) = 7\ 500(0.91)^x$ — اضمحلال
- $f(x) = 189(1 - 0.25)^x$ — اضمحلال
- $f(x) = 2\ 485(1 + 0.25)^x$ — نمو

31. اختبار SAT/ACT أي دالة مما يلي تنمذج إيداع مبلغ بفائدة سنوية مركبة نسبتها 3% تُضاف كل 3 أشهر؟

Ⓐ $150(1 - 0.03)^{4x}$
Ⓑ $150(1 + 0.03)^{4x}$
Ⓒ $150(1 - 0.03)^x$
Ⓓ $150(1 + 0.0075)^{4x}$
Ⓔ $150(1 - 0.0075)^x$

32. مهمة أدائية لدى خولة مبلغ 40 000 QR تريد إيداعه في مصرف وعليها أن تختار بين خيارات الإيداع الثلاثة المبيّنة في الجدول أدناه.

نوع الاستثمار	الفائدة السنوية	عدد فترات الاستحقاق
A	4%	كل سنة ($n = 1$)
B	4%	كل 3 أشهر ($n = 4$)
C	4.2%	كل سنة ($n = 1$)

الجزء A اكتب دالة تنمذج كل نوع من أنواع الاستثمار في x سنوات.

الجزء B بفرض أن خولة تريد استثمار المبلغ الذي لديها لمدة 5 سنوات، أي استثمار سيعود عليها بعائد أكبر بعد 5 سنوات؟

الجزء C أي استثمار سيجعل خولة تمتلك 1 000 000 QR أولًا؟

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الدرس 2-3
المتتاليات الهندسية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✔ إيجاد الصيغتين الصريحة والارتدادية لمتتاليات هندسية.
- ✔ التحويل بين الصيغتين الارتدادية والصريحة لمتتاليات هندسية.
- ✔ إنشاء دوال أسيّة لتمثيل متتاليات هندسية.

الفهم الأساس

المتتاليات الهندسية هي متتاليات عددية يرتبط فيها كل حد بالحد الذي يليه مباشرة بنسبة ثابتة. يمكن تمثيل المتتاليات بصيغة ارتدادية وصيغة صريحة، كما يمكن تمثيلها بدوال أسيّة.

ترابط

في الوحدة السابقة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة متتاليات حسابية بالصيغتين الارتدادية والصريحة واستنتاج إحداهما من الأخرى.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- المقارنة بين المتتاليات الحسابية والهندسية.
- كتابة متتاليات هندسية بالصيغتين الارتدادية والصريحة واستنتاج إحداهما من الأخرى.

لاحقًا في هذا الصف، سيتمكّن الطلاب من:

- تحويل ومقارنة الدوال الأسيّة.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن المتتاليات الهندسية هي متتاليات عددية يرتبط فيها كل حد بالحد الذي يليه مباشرة بنسبة ثابتة.
- يربط الطلاب الصيغ الصريحة للمتتاليات الهندسية بالدوال الأسيّة ويستعملونها لحلّ مسائل حياتية مثل إيجاد عدد المشتركين في خدمة إلكترونية عبر الإنترنت عندما يتضاعف هذا العدد كل أسبوع.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **متتالية حسابية** | *arithmetic sequence*
- **صيغة صريحة** | *explicit formula*
- **صيغة ارتدادية** | *recursive formula*

المصطلحات الجديدة

- **متتالية هندسية** | *geometric sequence*
- **نسبة ثابتة** | *common ratio*

نشاط المصطلحات

استعمل الطلاب الصيغتين الصريحة والارتدادية عند العمل على المتتاليات الحسابية. ذكّرهم بالفرق بين الصيغتين من خلال توضيح أن "الصيغة الارتدادية" لمتتالية تعرّف كل حد فيها بربطه بالحد الذي يسبقه مباشرة، في حين تعبّر "الصيغة الصريحة" عن الحد العام (أو الحد النوني) في صورة دالة بدلالة n.

اكتب هاتين الصيغتين للمتتاليات الهندسية واطلب من الطلاب استعمال معرفتهم المسبقة بالصيغتين الصريحة والارتدادية لتحديد أيّهما الصيغة الارتدادية وأيهما الصريحة.

$a_n = r(a_{n-1})$ **[الصيغة الارتدادية]**

$a_n = a_1(r)^{n-1}$ **[الصيغة الصريحة]**

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

11F.4.3 يحدد ما إذا كانت متتالية ما هندسية أم لا، ويستعمل الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية ليكتب حدود معينة من متتالية هندسية.

معايير ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية والأنماط العامة في الرياضيات عندما يربطون المتتاليات الهندسية بدوال النمو والاضمحلال الأسي.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يلاحظ الطلاب العمليات الحسابية المتكررة ويبحثون عن القواعد العامة عندما يدركون أن كل حد في متتالية هندسية هو x مرة الحد الذي يسبقه مباشرة.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يحدّد الطلاب نمط ترتيب المقاعد في مدرّج مسرح.
يوصلهم بحثهم إلى فهم المتتاليات الحسابية تمهيدًا لفهم المتتاليات الهندسية.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما الذي تلاحظه في عدد المقاعد في الصفوف كلما ارتقيت المدرج؟
[يتزايد عدد المقاعد من كل صف إلى الصف الذي يليه مباشرة بنفس العدد.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما فائدة كتابة معادلة لتمثيل نمط؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكنك استعمال معادلة لتوقّع قيمة أي حد في النمط.]

س: اذكر متغيّرين يمكنك مقارنتهما في النمط.
[قد تتنوع الإجابات. نموذجا إجابة: عدد الصفوف والعدد الكلي للمقاعد، رقم الصف وعدد المقاعد في الصف.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: كيف يمكنك تمثيل نمط ترتيب المقاعد بيانيًا؟ صِف التمثيل البياني.
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: مثّل النقاط بيانيًا باستعمال رقم الصف في المحور x وعدد المقاعد في المحور y أو مثّل المعادلة التي تمثّل هذا النمط بيانيًا. التمثيل البياني يبدو شبيهًا بخط مستقيم، لكن لا يمكن رسم مستقيم لأن عدد الصفوف والمقاعد لا يمكن أن يكون إلا عددًا كليًا.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل وجدت معادلة تناسب رتبة أي صف من الصفوف؟
[تحقّق من عمل الطلاب.]

س: ما المعادلة التي تربط رقم الصف بعدد المقاعد في الصف؟
[(عدد المقاعد) = 3(رقم الصف) − 1]

س: أي معادلة تربط عدد المقاعد الكلي برقم الصف؟
[قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة:
(عدد المقاعد الكلي) = 3(مجموع أرقام كل الصفوف) − 1(رقم الصف الأعلى)]

عادات التفكير

استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

استعمل الأدوات المناسبة متى يكون المخطط الأداة الأفضل لتحديد عدد المقاعد في صف معيّن؟ وضّح إجابتك.

[يعدّ المخطط الأداة الأفضل عندما يكون عدد المقاعد في الصف قليلًا نسبيًّا. عندما يكون عدد المقاعد كبيرًا في الصف يصبح من الصعب استعمال المخطط لحساب عدد المقاعد بسرعة، لذا فإن استعمال الجبر يجعل عملية الحساب أسهل.]

كتاب الطالب، صفحة 74

2-3
المتتاليات الهندسية
Geometric Sequences

استكشف وبرّر منطقيًّا

ضُمّ مخطط المقاعد أدناه للقسم الثاني عشر في ملعب حديث البناء.

A. صِف نمط المقاعد المبيّن في الصفوف.

B. اكتب معادلة تمثّل هذا النمط.

C. **استعمل البنية** يجب أن يحتوي الصف Z في القسم الثاني عشر على 75 مقعدًا على الأقل. إذا استمر هذا النمط كما هو، هل يحقق مخطط المقاعد هذا الشرط؟ وضّح إجابتك.

أستطيع... تحديد المتتاليات الهندسية ووصفها.

معيار الدرس
11F.4.3

المصطلحات
- متتالية هندسية
geometric sequence
- نسبة ثابتة
common ratio

السؤال الأساس: كيف يمكن تحديد العلاقة بين المتتالية الهندسية والدوال الأسية؟

مثال 1: تحديد المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

هل كل متتالية مما يلي متتالية حسابية أم هندسية؟

المتتالية الهندسية

نموذج من أعمال الطلاب

A. يحتوي كل صف على 3 مقاعد إضافية مقارنة بالصف الذي يسبقه مباشرة.

B. t = العدد الكلي للمقاعد في الصف، n = رقم الصف.

$$t = 3n - 1$$

C. نعم، الصف Z رقمه 26 وعدد المقاعد فيه 77 مقعدًا:

$$t = 3n - 1 = 3(26) - 1 = 78 - 1 = 77$$

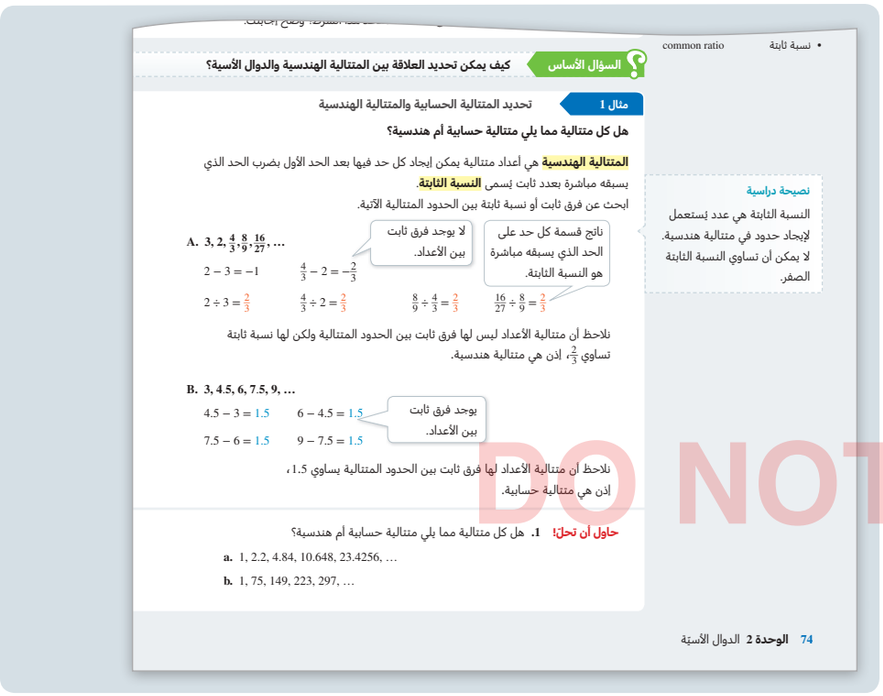
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب بالمتتاليات الهندسية، موضحًا لهم أنها تُظهر علاقة أسيّة بدلًا من علاقة خطية.



• نسبة ثابتة common ratio

السؤال الأساس كيف يمكن تحديد العلاقة بين المتتالية الهندسية والدوال الأسية؟

مثال 1 تحديد المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

هل كل متتالية مما يلي متتالية حسابية أم هندسية؟

المتتالية الهندسية هي أعداد متتالية يمكن إيجاد كل حد فيها بعد الحد الأول بضرب الحد الذي يسبقه مباشرة بعدد ثابت يُسمى **النسبة الثابتة**.

ابحث عن فرق ثابت أو نسبة ثابتة بين الحدود المتتالية الآتية.

نصيحة دراسية
النسبة الثابتة هي عدد يُستعمل لإيجاد حدود في متتالية هندسية. لا يمكن أن تساوي النسبة الثابتة الصفر.

A. $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots$

لا يوجد فرق ثابت بين الأعداد.

ناتج قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه مباشرة هو النسبة الثابتة.

$2 - 3 = -1$ $\quad \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

$2 \div 3 = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{3} \div 2 = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{8}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{16}{27} \div \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$

نلاحظ أن متتالية الأعداد ليس لها فرق ثابت بين الحدود المتتالية ولكن لها نسبة ثابتة تساوي $\frac{2}{3}$، إذن هي متتالية هندسية.

B. $3, 4.5, 6, 7.5, 9, \ldots$

يوجد فرق ثابت بين الأعداد.

$4.5 - 3 = 1.5$ $\quad 6 - 4.5 = 1.5$

$7.5 - 6 = 1.5$ $\quad 9 - 7.5 = 1.5$

نلاحظ أن متتالية الأعداد لها فرق ثابت بين الحدود المتتالية يساوي 1.5، إذن هي متتالية حسابية.

حاول أن تحلّ! 1. هل كل متتالية مما يلي متتالية حسابية أم هندسية؟

a. 1, 2.2, 4.84, 10.648, 23.4256, …

b. 1, 75, 149, 223, 297, …

مثال 1 تحديد المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

طرح أسئلة هادفة

الجزء A

س: ما المقصود بالمصطلح "نسبة ثابتة"؟

[ناتج قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه مباشرة في المتتالية هو نفسه.]

الجزء B

س: ما وجه الشبه والاختلاف بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية؟

[كلا النوعين من المتتاليات يتضمن نمطًا للحدود المتتالية. لدى المتتالية الحسابية فرق ثابت بين الحدود. لدى المتتالية الهندسية نسبة ثابتة بين الحدود.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. **a.** هندسية، النسبة الثابتة هي 2.2
   b. حسابية، الفرق الثابت هو 74

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 2 كتابة الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: هل يكفي حساب $\frac{12}{8}$ فقط لإيجاد النسبة الثابتة $\frac{3}{2}$؟

[كلا، يجب التأكد من أن المتتالية هندسية عبر التحقق من أن النسبة بين كل زوج من الحدود المتتالية هي ثابتة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1})$, $a_1 = 3\,072$

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 2 عند إيجاد النسبة الثابتة، قد يقسم بعض الطلاب كل حد في المتتالية على الحد الذي يليه مباشرة ويحسبون النسبة الثابتة على أنها 4، اطلب من الطلاب التحقق من النسبة الثابتة بضرب كل حد في المتتالية في النسبة الثابتة والتحقق من أنهم قد حصلوا على الحد التالي في المتتالية. ذكّرهم بأن عليهم قسمة الحد الثاني على الحد الأول في كل زوج متتالٍ لإيجاد النسبة الثابتة.

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

فكّر وثابر في الحل وضّح لماذا لا يمكن لنسبة ثابتة في متتالية هندسية أن تساوي الصفر.

[تُحسب النسبة الثابتة بقسمة أحد الحدود على الحد الذي يسبقه مباشرة. إذا كانت النسبة الثابتة تساوي الصفر، فهذا يعني أن كل حد في المتتالية يساوي الصفر، باستثناء الحد الأول، ولا يمكن قسمة عدد على الصفر.]

مثال 3 استعمال الصيغة الصريحة

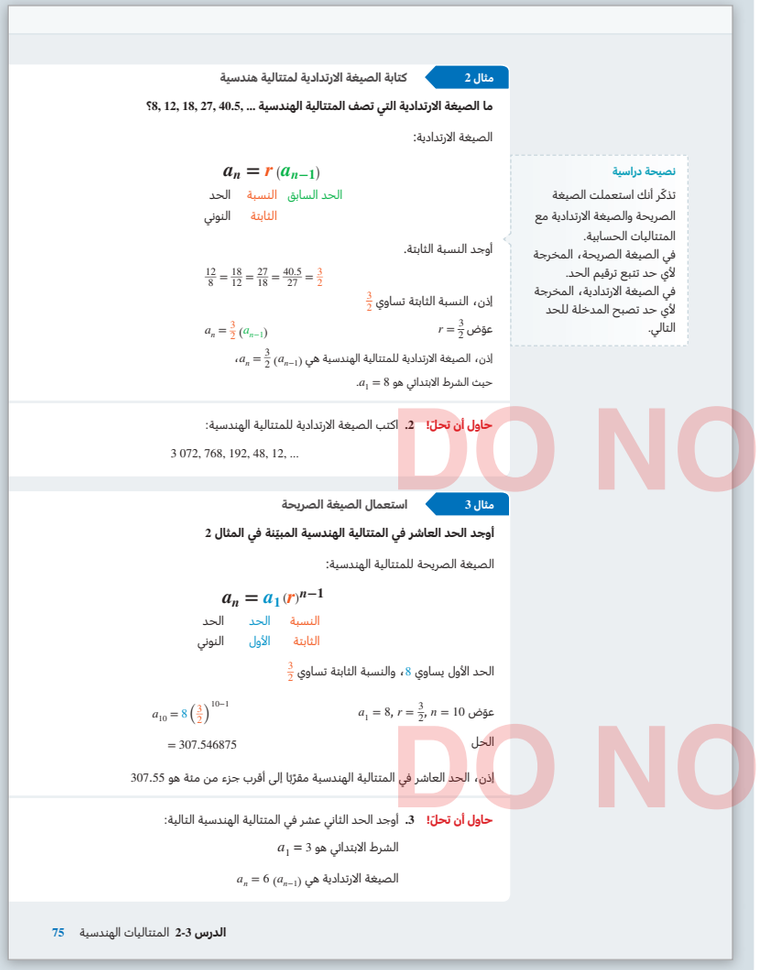
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: هل يمكنك إيجاد الحد العاشر في المتتالية الهندسية باستعمال الصيغة الارتدادية؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكنك إيجاد الحد العاشر باستعمال الصيغة الارتدادية، ولكن عليك في هذه الحالة إيجاد الحدود من الأول إلى التاسع أولًا، وهذا قد يستغرق وقتًا أطول.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. 1 088 391 168



مثال 2 كتابة الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية

ما الصيغة الارتدادية التي تصف المتتالية الهندسية ... 8, 12, 18, 27, 40.5,؟

الصيغة الارتدادية:

$a_n = r\,(a_{n-1})$

الحد النوني — الحد — النسبة الثابتة — الحد السابق

أوجد النسبة الثابتة.

$\frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{27}{18} = \frac{40.5}{27} = \frac{3}{2}$

إذن، النسبة الثابتة تساوي $\frac{3}{2}$

عوّض $r = \frac{3}{2}$ $a_n = \frac{3}{2}(a_{n-1})$

إذن، الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية هي $a_n = \frac{3}{2}(a_{n-1})$، حيث الشرط الابتدائي هو $a_1 = 8$.

نصيحة دراسية

تذكّر أنك استعملت الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية مع المتتاليات الحسابية. في الصيغة الصريحة، المخرجة لأي حد تتبع ترقيم الحد. في الصيغة الارتدادية، المخرجة لأي حد تصبح المدخلة للحد التالي.

حاول أن تحلّ! 2. اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

3 072, 768, 192, 48, 12, ...

مثال 3 استعمال الصيغة الصريحة

أوجد الحد العاشر في المتتالية الهندسية المبيّنة في المثال 2

الصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية:

$a_n = a_1\,(r)^{n-1}$

الحد النوني — الحد — النسبة الثابتة — الحد الأول

الحد الأول يساوي 8، والنسبة الثابتة تساوي $\frac{3}{2}$

عوّض $a_1 = 8,\ r = \frac{3}{2},\ n = 10$ $a_{10} = 8\left(\frac{3}{2}\right)^{10-1}$

الحل $= 307.546875$

إذن، الحد العاشر في المتتالية الهندسية مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة هو 307.55.

حاول أن تحلّ! 3. أوجد الحد الثاني عشر في المتتالية الهندسية التالية:

الشرط الابتدائي هو $a_1 = 3$

الصيغة الارتدادية هي $a_n = 6\,(a_{n-1})$

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 ساعد الطلاب على فهم العلاقة بين الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة.

- المتتالية الهندسية: ... 2, 10, 50, 250, 1 250,
- الصيغة الصريحة: $a_n = 2(5)^{n-1}$
- تفاصيل المتتالية: ... 2, 2(5)^1, 2(5)^2,?, 2(5)^4,
- الصيغة الارتدادية: $a_1 = 2$ $a_n = 5(a_{n-1})$
- تفاصيل المتتالية: ... 2, 2(5), 10(5), ?, 250(5),

س: استعمل النسبة الثابتة لكتابة الحد الناقص من كل متتالية.

[2(5)^3; 50(5)]

س: وضّح سبب صعوبة إيجاد الحد الذي رتبته 300 في المتتالية باستعمال الصيغة الارتدادية.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: لإيجاد الحد الذي رتبته 300، يجب أن تعرف الحد الذي رتبته 299]

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 4 الربط بين المتتاليات الهندسية والدوال الأسيّة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف تعرف القيمة التي يجب أن تعوّضها عن b في الدالة الأسيّة؟

[إنها النسبة الثابتة التي تصف التغيّر في عدد المشتركين. بما أن عدد المشتركين قد تضاعف، إذن النسبة الثابتة هي 2]

س: لماذا تمثّل الصيغة الصريحة النموذج الأفضل لعدد المشتركين؟

[تمكننا الصيغة الصريحة من تحديد عدد المشتركين عند أي زمن.]

س: لماذا تم طرح 1 من الأس في المتسلسلة الهندسية ولم نفعل الشيء نفسه في الدالة الأسية؟

[إذا كنت ترغب في استعمال الدالة الأسية لحساب عدد المشتركين في الأسبوع الرابع، مثلاً، فستحسب $f(3)$ على اعتبار أن الأسبوع الأول هو الأسبوع 0]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. 2 560 مشترك.

مثال 4 الربط بين المتتاليات الهندسية والدوال الأسيّة

عدد المشتركين في مدوّنة عبر الإنترنت يتضاعف كل أسبوع.
كيف يمكن نمذجة اتجاه عدد المشتركين في هذه المدوّنة؟

عدد المشتركين يتضاعف كل أسبوع، لذا يمكن استعمال دالة أسيّة لنمذجة هذا الموقف. العدد الابتدائي للمشتركين هو 5، وهذا العدد يتضاعف كل أسبوع.

$f(x) = a \cdot b^x$

$f(x) = 5(2)^x$

x يمثّل عدد الأسابيع المنقضية منذ إنشاء المدوّنة. اعتبر الأسبوع الذي أُنشئت فيه المدوّنة الأسبوع 0

القيمة الابتدائية — النسبة الثابتة

يمكن نمذجة الاتجاه أيضًا في صورة متتالية هندسية القيمة الابتدائية فيها 5 والنسبة الثابتة 2

$a_n = a_1(r)^{n-1}$

عوّض $r = 2, a_1 = 5$

$a_n = 5(2)^{n-1}$

عدد المشتركين يتغير بنسبة ثابتة، لذا يمكن نمذجة هذا الموقف بدالة أسيّة أو بمتتالية هندسية.

حاول أن تحلّ! **4.** كم سيصبح عدد المشتركين في الأسبوع 9 إذا كان عدد المشتركين الابتدائي 10؟

76 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 5 استعمال الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

س: لماذا النسبة الثابتة تساوي 0.8؟

[بما أن المتتالية تمثّل العدد الفعلي لزوار المهرجان، يدلّ التناقص بنسبة 20% في السنة على أن عدد الزوار في كل سنة يمثّل 80% من عدد الزوار في السنة التي قبلها.]

الجزء B

س: لماذا تُستعمل الصيغة الصريحة بدلًا من الصيغة الارتدادية لإيجاد عدد الزوار بعد 10 سنوات؟

[لكي تستعمل الصيغة الارتدادية، تحتاج لمعرفة عدد الزوار في السنة التاسعة.]

س: ما المعلومات المشتركة بين الصيغتين الارتدادية والصريحة، وما أهمية هذه المعلومات؟

[النسبة الثابتة r هي نفسها في الصيغتين. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: النسبة الثابتة تصف نمط المتتالية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. 202.5

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

برّر منطقيًّا ما العلاقة بين الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية؟ وضّح إجابتك.

[الصيغتان الارتدادية والصريحة متكافئتان. يمكنك ملاحظة ذلك عندما تستبدل a_{n-1} بصيغتها الصريحة، فتصبح العبارة الارتدادية $a_n = r(a_1(r)^{n-2})$، التي يمكن تبسيطها إلى $a_n = a_1(r)^{n-1}$، وهي الصيغة الصريحة.]

تطبيق

مثال 5 استعمال الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

تناقص عدد زوار مهرجان المدينة الدولي السنوي للأغذية بنسبة 20% سنويًّا منذ سنة افتتاحه.

A. كيف يمكن نمذجة عدد زوار المهرجان في السنوات الخمس الأولى من افتتاحه؟

عدد الزوار يتناقص بنسبة ثابتة تساوي 20%، إذن يمكن نمذجة هذا العدد بمتتالية هندسية.

أوجد النسبة الثابتة.

النسبة الثابتة هنا تساوي عامل الاضمحلال.

$r = 1 - 20\%$

$1 - 0.2 = 0.8$

اكتب صيغة ارتدادية $a_n = r(a_{n-1})$

عوّض $r = 0.8$ $a_n = 0.8(a_{n-1})$

إذن، الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية هي $a_n = 0.8(a_{n-1})$ حيث عدد الزائرين في السنة الأولى $a_1 = 1\,250$.

B. اذا استمر هذا النمط، أوجد عدد الزائرين بعد 10 سنوات من الافتتاح.

استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد عدد الزائرين في السنة العاشرة.

الصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية $a_n = a_1(r)^{n-1}$

عوّض $a_1 = 1\,250, r = 0.8, n = 10$ $a_{10} = 1\,250(0.8)^{10-1}$

$1250 \times \left(\frac{4}{5}\right)^9 = 167.77216$

استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة

1250×(4/5)^9 167.77216

إذن، عدد الحضور في السنة العاشرة سيكون 168 شخصًا تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 5. الصيغة $a_n = 1.5(a_{n-1})$ حيث $a_1 = 40$ تصف متتالية.
استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس في هذه المتتالية.

عمّم

ما العلاقة بين شكل المتتالية الهندسية ونوع الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها إجابة كافية عند استعمال هذا الشكل؟

الدرس 2-3 المتتاليات الهندسية 77

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 5 اطلب من الطلاب استكشاف المزيد عبر كتابة صيغة صريحة ومتى تكون قيمة النسبة الثابتة بين 0 و 1

- يوجد في صندوق دمية على نابض يدفعها إلى خارج الصندوق كل مرة يُفتح فيها هذا الصندوق. يتناقص ارتداد النابض بنسبة 2.5% في كل مرة يُفتح فيها الصندوق. تقفز الدمية من الصندوق بارتفاع 16.5 إنش في المرة الأولى التي يُفتح فيها الصندوق.

س: ما المعادلة التي يمكنك استعمالها لتحديد الارتفاع الذي ستصل إليها الدمية عندما يُفتح؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $f_n = 16.5(0.975)^{n-1}$.]

س: ما الارتفاع الذي تصل إليه الدمية عندما يُفتح الصندوق للمرة الثانية والعشرين.

[9.7 إنش تقريبًا.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

س: ما العلاقة بين إحداثيات التمثيل البياني والصيغة الصريحة؟

[تُمثّل n إحداثيات x و a_n إحداثيات y.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 5 بما أن المتتالية تتناقص، قد يقسم بعض الطلاب كل حد على الحد الذي يليه مباشرة لحساب النسبة الثابتة. اطلب من الطلاب تمثيل حدين متتالين في المتتالية بنقطتين في المستوى الإحداثي. (الإحداثي x هو رتبة الحد n).

الإجابات

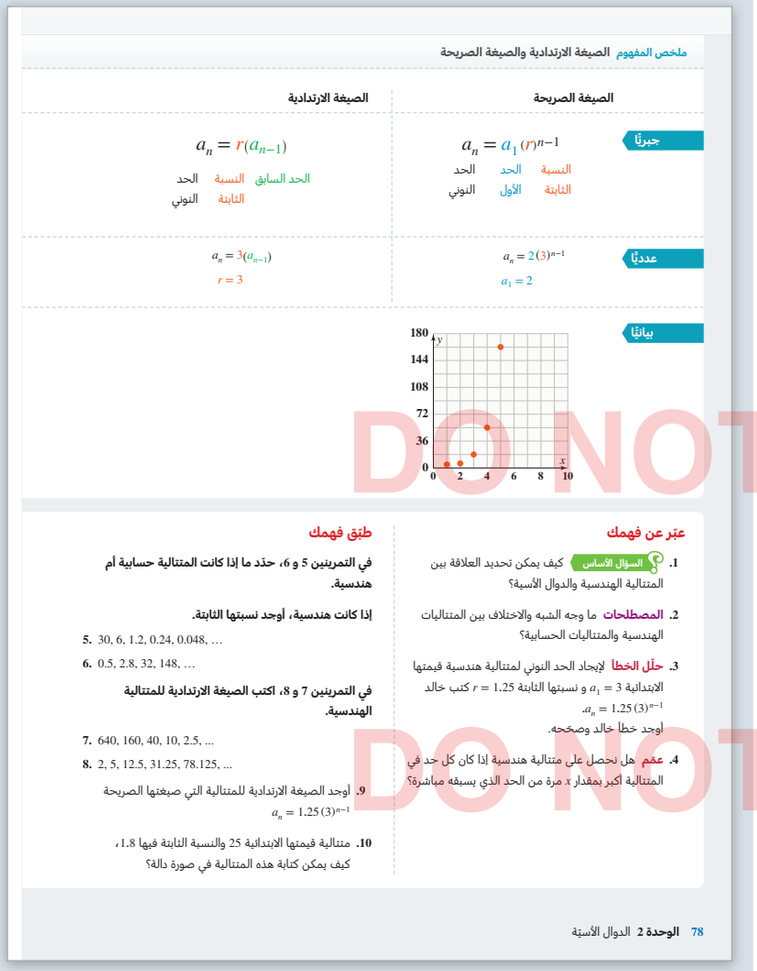
1. المتتاليات الهندسية هي دوال أسية مجالها الأعداد الطبيعية .... 1, 2, 3, بدل أن يكون الأعداد الحقيقية.
2. مجال كل من المتتاليات الهندسية والحسابية هو مجموعة الأعداد الطبيعية، لكن المتتاليات الهندسية لها نسبة ثابتة، فيما المتتاليات الحسابية لها فرق ثابت.
3. عكس خالد a_1 و r في الصيغة. يجب أن تكون $a_n = 3(1.25)^{n-1}$.
4. نعم، هناك نسبة ثابتة تساوي x.
5. هندسية، النسبة الثابتة هي 0.2
6. المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.
7. $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1})$، الشرط الابتدائي هو $a_1 = 640$.
8. $a_n = 2.5(a_{n-1})$، الشرط الابتدائي هو $a_1 = 2$.
9. $a_n = 3(a_{n-1})$، الشرط الابتدائي هو $a_1 = 1.25$.
10. $f(n) = 25(1.8)^{n-1}$

استعمل مع **المثالين 3 و 5**

عادات التفكير

برّر منطقيًّا ما العلاقة بين الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية؟ وضّح إجابتك.

[الصيغتان الارتدادية والصريحة متكافئتان. يمكنك ملاحظة ذلك عندما تستبدل a_{n-1} بصيغتها الصريحة، فتصبح العبارة الارتدادية $a_n = r(a_1(r)^{n-2})$، التي يمكن تبسيطها إلى $a_n = a_1(r)^{n-1}$، وهي الصيغة الصريحة.]



ملخص المفهوم الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

	الصيغة الصريحة	الصيغة الارتدادية
جبريًّا	$a_n = a_1(r)^{n-1}$ النسبة الثابتة، الحد الأول، الحد النوني	$a_n = r(a_{n-1})$ النسبة الثابتة، الحد السابق، الحد النوني
عدديًّا	$a_n = 2(3)^{n-1}$ $a_1 = 2$	$a_n = 3(a_{n-1})$ $r = 3$
بيانيًّا		

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن تحديد العلاقة بين المتتالية الهندسية والدوال الأسية؟
2. المصطلحات ما وجه الشبه والاختلاف بين المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية؟
3. حلّل الخطأ لإيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية قيمتها الابتدائية $a_1 = 3$ ونسبتها الثابتة $r = 1.25$ كتب خالد $a_n = 1.25(3)^{n-1}$. أوجد خطأ خالد وصحّحه.
4. عمّم هل تحصل على متتالية هندسية إذا كان كل حد في المتتالية أكبر بمقدار x مرة من الحد الذي يسبقه مباشرة؟

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية.

إذا كانت هندسية، أوجد نسبتها الثابتة.

5. 30, 6, 1.2, 0.24, 0.048, …
6. 0.5, 2.8, 32, 148, …

في التمرينين 7 و 8، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية.

7. 640, 160, 40, 10, 2.5, ...
8. 2, 5, 12.5, 31.25, 78.125, ...
9. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية التي صيغتها الصريحة $a_n = 1.25(3)^{n-1}$
10. متتالية قيمتها الابتدائية 25 والنسبة الثابتة فيها 1.8، كيف يمكن كتابة هذه المتتالية في صورة دالة؟

78 الوحدة 2 الدوال الأسية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
11-32, 37-39, 41-46	11-22, 28-46

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	11, 20, 21, 23, 40	1
	14	2
2	13, 17-19, 22, 24-26, 45	1
	16, 41-43	2
3	27-34	1
4	39-44	1
	46	3
5	35-39	1
	12, 39, 40	2
	15	3

الإجابات

11. اكتب الصيغة الصريحة $a_n = 3^{n-1}$ أو الصيغة الارتدادية $a_n = 3(a_{n-1}),\ a_1 = 1$

12. قد تتنوّع الإجابات، نموذج إجابة:
المتتاليات الهندسية التي لها نسبة ثابتة $r > 1$ تشبه دوال النمو الأسي ولكن بمجال محدود بالأعداد الطبيعية.
المتتاليات الهندسية التي لها نسبة ثابتة $0 < r < 1$ تشبه دوال الاضمحلال الأسي ولكن بمجال محدود بالأعداد الطبيعية.

13. نسي يوسف إدراج الشرط الابتدائي $a_1 = 210$ في الصيغة الارتدادية.

14. يمكنك قسمة كل حد على الحد الذي يسبقه مباشرة لتنظر ما إن كانت هناك نسبة ثابتة أم لا.

15. a. تُستعمل n بشكل تقليدي للإشارة إلى أن مجال الدالة هو مجموعة أعداد العد أو الأعداد الطبيعية 1, 2, 3, ... بدلًا من الأعداد الحقيقية.
b. مع أن مجال الدالة محدود بالأعداد الطبيعية، إلا أن مداها يشمل كل الأعداد. الأعداد في المتتالية هي مدى المتتالية.

16. a. $a_n = 80(0.95)^{n-1}$
b. $a_{10} = 80(0.95)^{10-1} = 50.42$ cm

17. نعم؛ $a_n = 1.5(a_{n-1}),\ a_1 = 8$.

18. نعم؛ $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}),\ a_1 = 3$.

19. نعم؛ $a_n = 3(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{1}{27}$.

20. لا

21. لا

22. نعم؛ $a_n = \frac{4}{3}(a_{n-1}),\ a_1 = 2$.

23. لا

24. نعم؛ $a_n = 4(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{1}{2}$.

25. لا

26. نعم؛ $a_n = 5(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{4}{5}$.

27. $a_n = 10(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{1}{5}$

28. $a_n = 6(a_{n-1}),\ a_1 = 1.1$

29. $a_n = 5(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{2}{3}$

30. $a_n = 8(a_{n-1}),\ a_1 = 0.4$

31. $a_n = 100\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

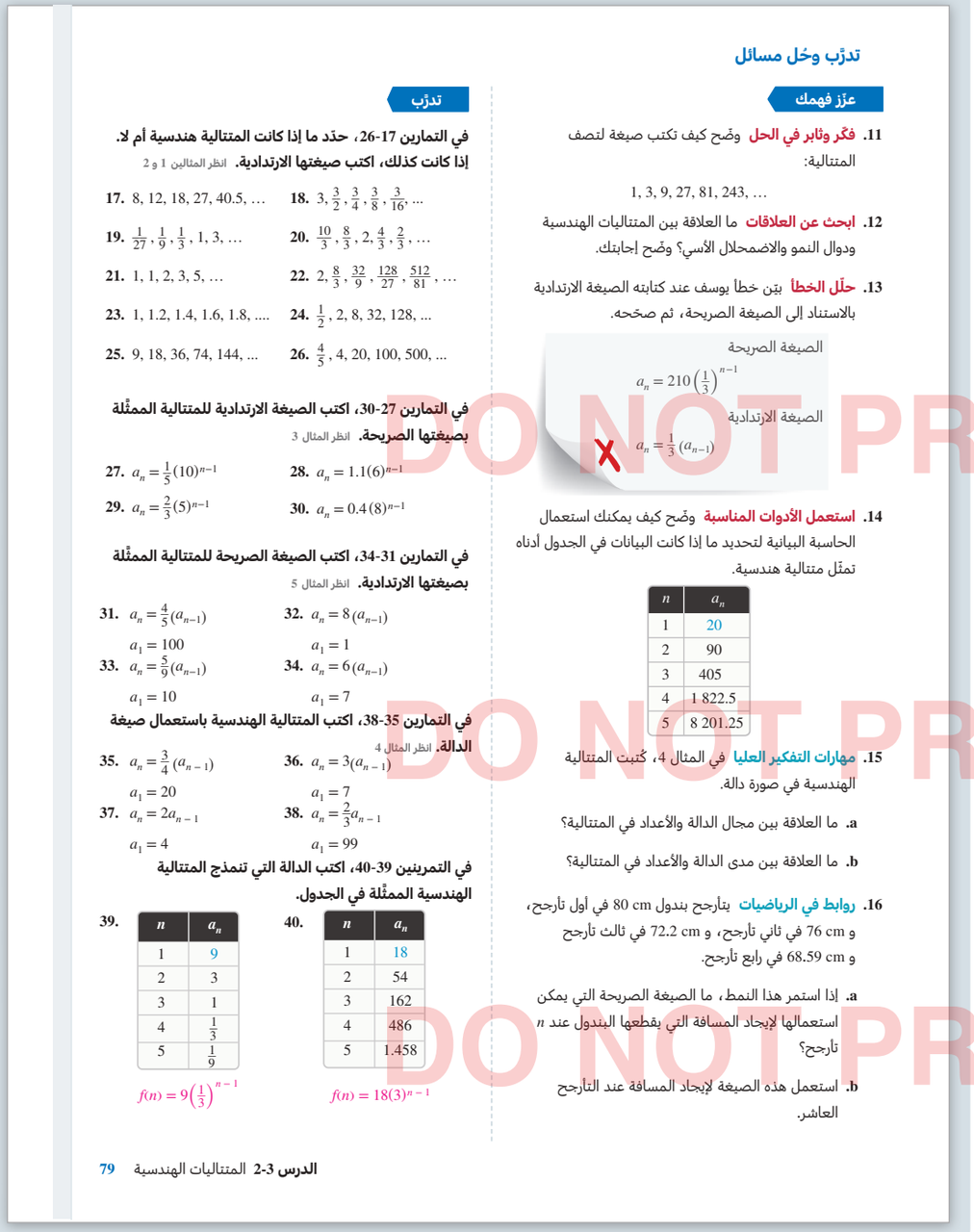
32. $a_n = 1(8)^{n-1}$

33. $a_n = 10\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$

34. $a_n = 7(6)^{n-1}$

35. $f(n) = 20\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

36. $f(n) = 7(3)^{n-1}$



تدرَّب وحُل مسائل

عزز فهمك

11. فكّر وثابر في الحل وضّح كيف تكتب صيغة لتصف المتتالية:

1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

12. ابحث عن العلاقات ما العلاقة بين المتتاليات الهندسية ودوال النمو والاضمحلال الأسي؟ وضّح إجابتك.

13. حلّل الخطأ بيّن خطأ يوسف عند كتابته الصيغة الارتدادية بالاستناد إلى الصيغة الصريحة، ثم صحّحه.

الصيغة الصريحة
$a_n = 210\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
الصيغة الارتدادية
$a_n = \frac{1}{3}(a_{n-1})$ ✗

14. استعمل الأدوات المناسبة وضّح كيف يمكنك استعمال الحاسبة البيانية لتحديد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تمثّل متتالية هندسية.

n	a_n
1	20
2	90
3	405
4	1 822.5
5	8 201.25

15. مهارات التفكير العليا في المثال 4، كُتبت المتتالية الهندسية في صورة دالة.

a. ما العلاقة بين مجال الدالة والأعداد في المتتالية؟

b. ما العلاقة بين مدى الدالة والأعداد في المتتالية؟

16. روابط في الرياضيات يتأرجح بندول 80 cm في أول تأرجح، و 76 cm في ثاني تأرجح، و 72.2 cm في ثالث تأرجح و 68.59 cm في رابع تأرجح.

a. إذا استمر هذا النمط، ما الصيغة الصريحة التي يمكن استعمالها لإيجاد المسافة التي يقطعها البندول عند n تأرجح؟

b. استعمل هذه الصيغة لإيجاد المسافة عند التأرجح العاشر.

تدرّب

في التمارين 17-26، حدّد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا. إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية. انظر المثالين 1 و 2

17. 8, 12, 18, 27, 40.5, ...

18. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$

19. $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$

20. $\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

21. 1, 1, 2, 3, 5, ...

22. $2, \frac{8}{3}, \frac{32}{9}, \frac{128}{27}, \frac{512}{81}, \ldots$

23. 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, ...

24. $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128, \ldots$

25. 9, 18, 36, 74, 144, ...

26. $\frac{4}{5}, 4, 20, 100, 500, \ldots$

في التمارين 27-30، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الممثّلة بصيغتها الصريحة. انظر المثال 3

27. $a_n = \frac{1}{5}(10)^{n-1}$

28. $a_n = 1.1(6)^{n-1}$

29. $a_n = \frac{2}{3}(5)^{n-1}$

30. $a_n = 0.4(8)^{n-1}$

في التمارين 31-34، اكتب الصيغة الصريحة للمتتالية الممثّلة بصيغتها الارتدادية. انظر المثال 5

31. $a_n = \frac{4}{5}(a_{n-1})$, $a_1 = 100$

32. $a_n = 8(a_{n-1})$, $a_1 = 1$

33. $a_n = \frac{5}{9}(a_{n-1})$, $a_1 = 10$

34. $a_n = 6(a_{n-1})$, $a_1 = 7$

في التمارين 35-38، اكتب المتتالية الهندسية باستعمال صيغة الدالة. انظر المثال 4

35. $a_n = \frac{3}{4}(a_{n-1})$, $a_1 = 20$

36. $a_n = 3(a_{n-1})$, $a_1 = 7$

37. $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 4$

38. $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$, $a_1 = 99$

في التمرينين 39-40، اكتب الدالة التي تنمذج المتتالية الهندسية الممثّلة في الجدول.

39.

n	a_n
1	9
2	3
3	1
4	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{9}$

$f(n) = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

40.

n	a_n
1	18
2	54
3	162
4	486
5	1.458

$f(n) = 18(3)^{n-1}$

الدرس 2-3 المتتاليات الهندسية 79

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

37. $f(n) = 4(2)^{n-1}$

38. $f(n) = 99\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

41. $a_n = 4(a_{n-1}), a_1 = 20$

$a_n = 20(4)^{n-1}$

عوّض $n = 8$ في $a_n = 20(4)^{n-1}$

$20(4)^{8-1} = 327\ 680$

عدد المشاركات بعد 8 ساعات هو 327 680

42. a. $a_n = 1.5(a_{n-1}), a_1 = 16$

b. لن يصل عدد المشاركين إلى 1 000 بعد 10 سنوات:

$a_n = 16(1.5)^{n-1} = 16(1.5)^{10-1} = 615.09375$

43. $a_n = 3\ 000\ 000\left(\frac{1}{3}\right)^n$؛ 8 ساعات.

46. الجزء A النمط A: $a_n = 5(a_{n-1})$.

الشرط الابتدائي هو $a_1 = 1$.

النمط B: $a_n = 5(a_{n-1})$.

الشرط الابتدائي هو $a_1 = 4$.

الجزء B بما أن المتتاليات هي ذاتها باستثناء شرطها الابتدائي، تكون قيمة a_n في النمط B هي 4 أضعاف قيمة a_n في النمط A.

الجزء C $\frac{x}{4}$؛ لدى النمط B عدد نقاط بمقدار 4 مرات النقاط في النمط A عندما يكون النمطان في الحلقة ذاتها.

طبّق

41. فكّر وثابر في الحل انتشرت على شبكة الإنترنت الخدعة البصرية المبيّنة في الصورة أدناه، وتزايد عدد مشاركات الرابط في متتالية هندسية كما هو موضّح. اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية، ثم اكتب صيغة الحد النوني لتحديد عدد مشاركات الرابط بعد مرور 8 ساعات.

42. ابنِ الحجج الرياضية

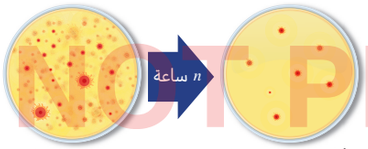
a. اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية التي تنمذج البيانات في الجدول أدناه.

يوم النظافة السنوي

السنة	عدد المشاركين
1	16
2	24
3	36
4	54
5	81

b. استعمل الصيغة الصريحة لتحديد ما إذا كان عدد المشاركين في يوم النظافة السنوي في السنة العاشرة سيبلغ 1 000 مشارك.

43. نمذج في العيّنة المبيّنة في الرسم أدناه، تتناقص أعداد البكتيريا بنسبة $\frac{2}{3}$ كل ساعة. اكتب الحد النوني للمتتالية الهندسية التي تمثّل التناقص في عدد البكتيريا. بعد مرور كم ساعة يصبح عدد البكتيريا أصغر من 1 000؟



أقل من 1 000 بكتيريا — 3 000 000 بكتيريا

تدرّب على اختبار

44. هل كل متتالية ممثّلة في الجدول أدناه متتالية هندسية؟ اختر نعم أو لا.

	نعم	لا
6, 18, 30, 42, 54, …	☐	☑
$2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}, \ldots$	☑	☐
1 024, 256, 64, 16, 4, …	☑	☐
243, 162, 81, 54, 27, …	☐	☑

45. اختبار SAT/ACT ما الصيغة الصريحة للمتتالية:

360, 180, 90, 45, 22.5, …

Ⓐ $a_n = \frac{1}{2}(360)^{n-1}$

Ⓑ $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1})$

Ⓒ $a_n = 360(a_{n-1})$

Ⓓ $a_n = 360\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Ⓔ $a_n = 360 + \frac{1}{2}(a_{n-1})$

46. مهمة أدائية ينشئ برنامج الحاسوب النمطين المبيّنين أدناه كلّ مرة يجري فيها البرنامج تكرارًا حلقيًا.

الجزء A اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية التي تنمذج كل نمط.

الجزء B ما العلاقة بين المتتالية الهندسية للنمط A والمتتالية الهندسية للنمط B؟

الجزء C إذا كان للنمط B العدد x من النقاط في الحلقة n، أوجد عدد نقاط النمط A في الحلقة n. وضّح إجابتك.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الدرس 2-4

تحويلات الدوال الأسيّة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ إزاحة التمثيل البياني لدالة أسيّة رأسيًا وأفقيًا، وتحديد تأثير تغيّر قيمة كل من الثابتين h و k في التمثيل البياني للدالة.

✔ مقارنة خصائص دالتين أسيّتين ممثلتين بطريقتين مختلفتين، مثل الجداول والتمثيلات البيانية.

الفهم الأساس

إن قيمة كل من الثابتين h و k تؤثر في التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة، إذ يؤدي تغيّر قيمة k إلى إزاحة التمثيل البياني للدالة رأسيًا، بينما يؤدي تغيّر قيمة h إلى إزاحة التمثيل البياني للدالة أفقيًا.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- تحديد وتفسير كيفية تأثير تغيّر قيم الثوابت في التمثيلات البيانية للدوال الخطية والتربيعية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تحديد وتفسير كيفية تأثير تغيّر قيمة كل من الثابتين h و k في التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الاجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب أن إشارة وقيمة كل من الثابتين h و k تؤثران في اتجاه الإزاحة الرأسية والأفقية للتمثيل البياني للدالة الأسيّة.
- يحدّد الطلاب المدى وخطوط التقارب لدالتين أسيّتين مختلفتين ويقارنون فيما بينها.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **ثابت** | *constant*
- **دالة أسيّة** | *exponential function*
- **إزاحة** | *translation*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح " ثابت" بالطلب من الطلاب تحديد الأعداد الثابتة في الدالتين الخطيتين الآتيتين:

$f(x) = 5x + 8$ **[8]**

$f(x) = mx + b$ **[b]**

ثم اطلب من الطلاب تحديد الثوابت في الدوال الأسيّة المبينة أدناه.

$f(x) = 2^x + 4$ **[4]**

$f(x) = a^x + k$ **[k]**

$f(x) = 5^{x+3}$ **[3]**

$f(x) = a^{x+h}$ **[h]**

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

11F.3.1 يفهم أنواعًا مختلفة من التحويلات للدالة $y = f(x)$:

- الإزاحة الأفقية والرأسية.
- التمدد/التضيق الأفقي والرأسي.
- الانعكاس الأفقي والرأسي.

ويصف تحويلا معطى جبريًا أو بيانيًا.

11F.3.2 يُطبق كحد أقصى تحويلين لتحويل تمثيل بياني لدالة معطاة $y = f(x)$ إلى تمثيل بياني لدالة المحوّلة؛ يرسم بيانيا الدّالّة الناتجة عن هذين التحويلين.

معايير ممارسات الرياضيات

بزر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يفهم الطلاب معنى الكميات والعلاقات فيما بينها عندما يدركون تأثير تغيّر قيمة h من عدد إيجابي إلى عدد سلبي في التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x - h$.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية والأنماط العامة في الرياضيات عندما يخمّنون كيف تؤثر التحويلات المختلفة للدالة $f(x) = 2^x$ في مدى الدالة.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يحلّل الطلاب الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية الناتجة عن نفس الدالة الأسيّة الأصلية. فهم هذه الخصائص يساعد الطلاب على إدراك كيفية تأثير التحويلات على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

الجزء A

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 100(3)^x$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$؟

[القيمة الابتدائية في الدالتين مختلفة، لذا فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$ يتقاطع مع المحور y عند $x = 1$ وليس عند $x = 100$.

كما أن الدالة $f(x) = 100(3)^x$ تتزايد بوتيرة أسرع.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكنك استعمال المعادلة والتمثيل البياني لتوضيح أن سرعة نمو متابعي الموجة B يساوي ضعف سرعة نمو متابعي الموجة A؟

[اضرب معدل النمو الثابت في 2، سوف يبدأ التمثيل البياني من نفس النقطة لكنه سيكون أشدّ انحدارًا.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: كيف يبدو التمثيل البياني لدالة تمثّل موجة محطة إذاعية عدد متابعيها يساوي نصف عدد متابعي الموجة A؟ ما معادلة هذه الدالة؟

[القيمة الابتدائية للدالة التي تمثل متابعي هذه الموجة تساوي 50، والتمثيل البياني أقل انحدارًا لأن معدل النمو أصغر.

معادلة هذه الدالة هي $f(x) = 50(1.5)^x$ لأن العدد الابتدائي للمتابعين 50 ومعدل النمو يساوي نصف العدد 3.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

ناقش الطلاب في معنى تحويلات الدوال الأسيّة في مواقف من واقع الحياة.

س: كيف سيؤثر تغيّر العدد الابتدائي لمتابعي الموجة الإذاعية أو معدل النمو في التمثيل البياني؟

[إن تغيّر العدد الابتدائي لمتابعي الموجة الإذاعية يؤدي إلى تغير المقطع y، وتغيّر معدل النمو يؤدي إلى تغيّر شكل وانحدار التمثيل البياني.]

س: هل سيبدو شكل التمثيل البياني مختلفًا إذا كان عدد متابعي الموجة الإذاعية يتناقص؟

[نعم؛ سيبدأ التمثيل البياني بالانحدار ويقترب من خط التقارب بدلًا من الاتجاه صعودًا.]

عادات التفكير استعمل مع **نمذج وناقش**

ابحث عن العلاقات هل من الممكن أن يتضمن التمثيل البياني للدالة قيمة سالبة للمتغير x؟ وضّح إجابتك.

[كلا، فالمتغير x في هذا الموقف يمثّل الزمن، وبالتالي لا يمكن أن تكون له قيمة سالبة.]

كتاب الطالب، صفحة 81

نموذج من أعمال الطلاب

A. سيتجه التمثيل البياني صعودًا بوتيرة أسرع.

B. لكلا التمثيلين البيانيين مقطع y يساوي 100، وخط تقارب هو $y = 0$، ومدى هو $y > 0$. التمثيل البياني لدالة متابعي الموجة B أكثر انحدارًا من التمثيل البياني لدالة متابعي الموجة A.

C. التمثيل البياني لدالة متابعي الموجة C عبارة عن تمدد رأسي للتمثيل البياني لدالة متابعي الموجة *B*. التمثيلات البيانية للدوال الثلاث تتجه صعودًا بتزايد قيمة x.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على تحويلات الدوال الأسيّة، وذكّرهم بأن قيمتَي الثابتين h و k في الدالة تؤثران في شكل التمثيل البياني للدالة. يتعلم الطلاب أن قيمة كل من الثابتين h و k تؤثر في التمثيل البياني للدالة الأسيّة.

مثال 1 الإزاحات الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك أن تعرف ما إذا كانت التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة تقع فوق أم تحت التمثيل البياني للدالة الأسيّة الأصلية؟

[إذا كان $k > 0$، يكون التمثيل البياني فوق التمثيل البياني للدالة الأصلية.
إذا كان $k < 0$، يكون التمثيل البياني تحت التمثيل البياني للدالة الأصلية.]

س: كيف يتأثر كل من المقطع y والنسبة الثابتة عند إزاحة التمثيل البياني رأسيًّا؟

[إذا كان k عددًا موجبًا فإن المقطع y يتحرك بمقدار k وحدة إلى الأعلى، وإذا كان k عددًا سالبًا فإن المقطع y يتحرك بمقدار k وحدة إلى الأسفل. الدالة المُزاحة لا تعود تتضمّن نسبة ثابتة بعد الإزاحة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. الدالة g إزاحة للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
b. الدالة j إزاحة للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: أي قيمة في الدالة الأسيّة تزيح تمثيلها البياني رأسيًّا؟

[الثابت الذي يُضاف إلى $f(x)$.]

السؤال الأساس
ما العلاقة بين التغيّرات في دالة أسيّة وإزاحات تمثيلها البياني؟
الاستيعاب المفاهيمي
مثال 1 الإزاحات الرأسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة
كيف تؤثر قيمة k في التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x + k$؟
قارن بين التمثيلين البيانيين للدالتين $g(x) = 2^x + 3$ و $j(x) = 2^x - 3$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.
إزاحة 3 وحدات إلى الأعلى.
إزاحة 3 وحدات إلى الأسفل.
التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x + k$ هو إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.
إذا كان العدد k موجبًا، يتم إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى الأعلى. إذا كان العدد k سالبًا، يتم إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى الأسفل.
حاول أن تحلّ! 1. a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^x + 1$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$؟
b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $j(x) = 2^x - 1$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$؟
الدرس 2-4 تحويلات الدوال الأسية 81

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مثال 2 الإزاحات الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تؤثر إضافة قيمة ثابتة إلى المتغير x أو طرح قيمة ثابتة منه في التمثيل البياني للدالة الأسية الأصلية؟
[يؤدي ذلك إلى إزاحة الدالة أفقيًا.]

س: كيف يتأثر التمثيل البياني عندما تكون قيمة h موجبة؟
[يؤدي ذلك إلى إزاحة التمثيل البياني إلى اليمين بمقدار h وحدة.]

س: لماذا يُكتب الأس في الصورة $x - h$ بدلًا من $x + h$؟
[للتأكيد على أن العدد الثابت المطروح من x هو الذي يحدد اتجاه الإزاحة الأفقية.]

س: قارن بين إزاحات الدوال الأسية والخطية.
[تزيح قيم h و k التمثيلات البيانية لكلا النوعين من الدوال في نفس الاتجاه.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدتين إلى اليسار.
b. التمثيل البياني للدالة j إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدتين إلى اليمين.

خطأ شائع

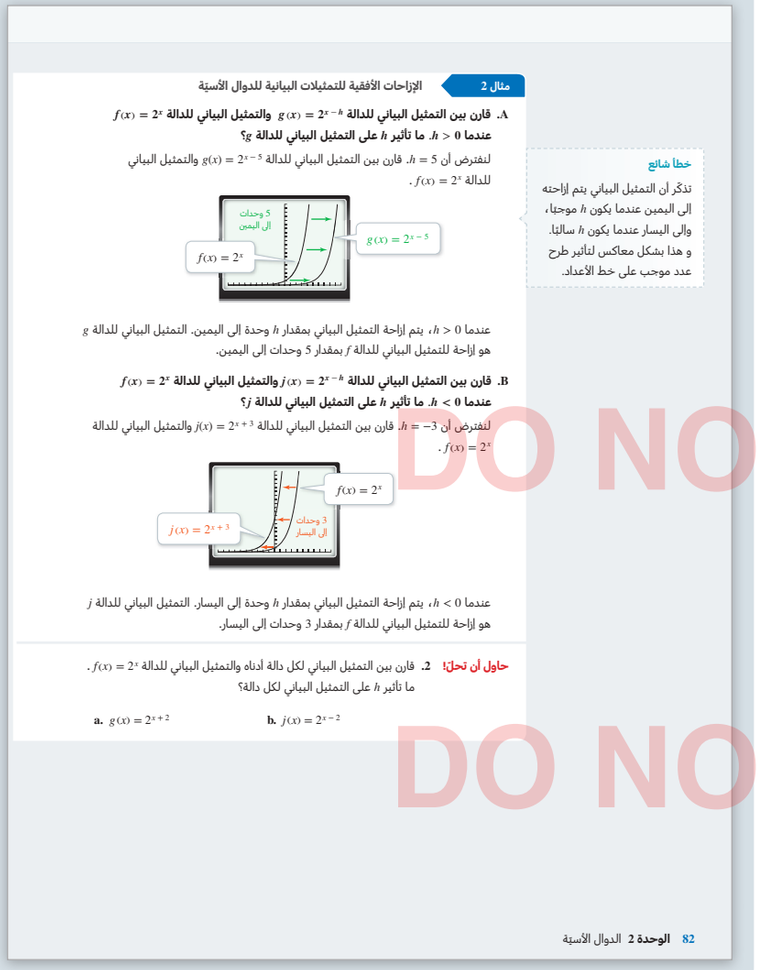
حاول أن تحلّ! 2 بما أن الثابت يُطرح من x، يفترض بعض الطلاب أن الإزاحة الأفقية يجب أن تكون إلى اليسار. اطلب من الطلاب أن يعيدوا كتابة الأسس دائمًا باستعمال الطرح. نبّه الطلاب إلى أن إشارة العدد المطروح هي التي تحدد اتجاه الإزاحة.

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

استعمل البنية ما وجه الاختلاف بين دالة ناتجة عن إزاحة رأسية ودالة ناتجة عن إزاحة أفقية؟

[في الدالة الناتجة عن إزاحة رأسية يُضاف عدد ثابت إلى مخرجة الدالة، بينما في الدالة الناتجة عن إزاحة أفقية يُضاف عدد ثابت إلى مدخلة الدالة. بالنسبة للدوال الأسيّة، في الدالة الناتجة عن إزاحة رأسية يُضاف عدد ثابت إلى المقدار، بينما في الدالة الناتجة عن إزاحة أفقية يُضاف عدد ثابت إلى الأس.]



مثال 2 الإزاحات الأفقية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

A. قارن بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^{x-h}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ عندما $h > 0$. ما تأثير h على التمثيل البياني للدالة g؟

لنفترض أن $h = 5$. قارن بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^{x-5}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.

عندما $h > 0$، يتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار h وحدة إلى اليمين. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 5 وحدات إلى اليمين.

خطأ شائع
تذكّر أن التمثيل البياني يتم إزاحته إلى اليمين عندما يكون h موجبًا، وإلى اليسار عندما يكون h سالبًا. و هذا بشكل معاكس لتأثير طرح عدد موجب على خط الأعداد.

B. قارن بين التمثيل البياني للدالة $j(x) = 2^{x-h}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ عندما $h < 0$. ما تأثير h على التمثيل البياني للدالة j؟

لنفترض أن $h = -3$. قارن بين التمثيل البياني للدالة $j(x) = 2^{x+3}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.

عندما $h < 0$، يتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار h وحدة إلى اليسار. التمثيل البياني للدالة j هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.

حاول أن تحلّ! **2.** قارن بين التمثيل البياني لكل دالة أدناه والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$. ما تأثير h على التمثيل البياني لكل دالة؟

a. $g(x) = 2^{x+2}$ **b.** $j(x) = 2^{x-2}$

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 1 اطلب من الطلاب استكشاف كيفية كتابة معادلات الدوال الأسيّة التي خضعت لأكثر من إزاحة رأسيّة.

س: أُزيح التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3(9)^x + 6$ بمقدار 8 وحدات إلى الأسفل ثم 6 وحدات إلى الأعلى. ما هي معادلة الدالة الجديدة ؟
$[f(x) = 3(9)^x + 4]$

س: كيف تعرف ما إذا كانت الإزاحة الناتجة إلى الأعلى أم إلى الأسفل؟
[اجمع الثابتين. إذا كان ناتج الجمع عددًا موجبًا تكون الإزاحة إلى الأعلى، وإذا كان ناتج الجمع عددًا سالبًا تكون الإزاحة إلى الأسفل.]

س: ماذا يحصل إذا كان ناتج جمع الثابتين يساوي الصفر؟
[يكون الناتج الدالة الأسيّة الأصلية.]

الطلاب اللذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 يواجه بعض الطلاب صعوبة في تحديد ما إذا كان اتجاه الإزاحة الأفقية إلى اليمين أم إلى اليسار.

- أعد كتابة الدالتين التاليتين بحيث يكون العدد الثابت مطروحًا من x في الأس.

1. $f(x) = 2^{(x+5)}$ $[f(x) = 2^{(x-(-5))}]$
2. $f(x) = 2^{(x+(-4))}$ $[f(x) = 2^{(x-4)}]$

س: في أي اتجاه تمت إزاحة كل دالة؟
[إلى اليسار؛ إلى اليمين]

س: لماذا تحتاج إلى إعادة كتابة كل أس باستعمال الطرح بدلًا من الجمع؟
[إشارة العدد المطروح من x تمثل اتجاه الإزاحة، لذا فإن كتابة الأس في صورة جملة طرح يجنّبنا الخطأ في الإشارات.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 المقارنة بين تحويلين مختلفين للدالة $f(x) = 2^x$

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تلاحظ في الجدول؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يتكون الجدول من 3 أعمدة؛ عمود لقيم x وعمودان لقيم الدالتين تجري مقارنتهما، f و g، كل من العمودين يوضّح القيم المناظرة لنفس قيم x.]

س: كيف يمكنك المقارنة بين المقطعين y؟

[انظر إلى قيم الدالتين عندما $x = 0$.]

س: ما العلاقة بين خط التقارب والمدى؟

[كل قيم y في الدالة أكبر من خط التقارب.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. التمثيل البياني للدالة c إزاحة للتمثيل البياني للدالة b بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

b. التمثيل البياني للدالة m إزاحة للتمثيل البياني للدالة p بمقدار 7 وحدات إلى الأسفل.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تغيّر الإزاحة الرأسيّة الخصائص الأساسية للتمثيل البياني؟

[الإزاحة الرأسية تزيد أو تنقص قيمة المقطع y وكذلك موقع خط التقارب.]

استعمل مع **المثال 3**

عادات التفكير

تواصل بدقة ما تأثير استبدال العدد الثابت في دالة أسيّة بعدد آخر على كيفية تحويل الدالة؟ وضّح إجابتك.

[إن استبدال العدد الثابت في دالة أسيّة بعدد آخر يغيّر مقدار تحويل الدالة مقارنةً بالدالة الرئيسة.]

مثال 3 المقارنة بين تحويلين مختلفين للدالة $f(x) = 2^x$

ما وجه المقارنة بين خصائص الدالة g، المعطاة في الجدول أدناه، وخصائص الدالة j، المعطاة في التمثيل البياني؟ كلتا الدالتين تمثّل إزاحة للدالة f.

x	$f(x) = 2^x$	$g(x)$
−2	0.25	2.25
−1	0.5	2.5
0	1	3
1	2	4
2	4	6

استعمل البنية

مدى الدالة $f(x) = 2^x$ هو $f(x) > 0$. كيف تؤثر التحويلات المختلفة للدالة $f(x) = 2^x$ في مدى الدالة؟

الخطوة 1 قارن بين g و f.

المقطع y للتمثيل البياني للدالة f هو 1

المقطع y للتمثيل البياني للدالة g هو 3

قيم y في الدالة g أكبر بوحدتين من قيم y المناظرة لها في الدالة f. معادلة خط التقارب للدالة f، هي $y = 0$. إذن، خط التقارب للدالة g أعلى بوحدتين من خط التقارب للدالة f، أي ان معادلة خط التقارب للدالة g هي $y = 2$.

بما أن معادلة خط التقارب للدالة g هي $y = 2$، فإن مدى g هو $y > 2$، وذلك مقارنة بمدى الدالة f، وهو $y > 0$.

الخطوة 2 قارن بين الدالتين j و f.

معادلة خط التقارب للدالة f هي $y = 0$.

معادلة خط التقارب للدالة j هي $y = -1$.

خط التقارب للدالة j أدنى بوحدة واحدة من خط التقارب للدالة f.

بما أن معادلة خط التقارب للدالة j هي $y = -1$، فإن مدى الدالة j هو $y > -1$، وذلك مقارنة بمدى الدالة f، وهو $y > 0$.

المقطع y هو 0

تقترب قيم $j(x)$ من -1 مع تناقص قيم x.

الخطوة 3 قارن بين الدالتين g و j.

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f إلى الأعلى بمقدار وحدتين، بينما التمثيل البياني للدالة j هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f إلى الأسفل بمقدار وحدة واحدة.

إذن، التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة j إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات. لذا فإن خط التقارب للدالة g أعلى من خط التقارب للدالة j بمقدار 3 وحدات، وقيم y في الدالة g أكبر من قيم y المناظرة لها في الدالة j بمقدار 3 وحدات.

حاول أن تحلّ! **3. a.** التمثيل البياني للدالة b هو إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $a(x) = 3^x$، والمقطع y للدالة b يساوي الصفر. قارن بين التمثيل البياني للدالة $c(x) = 3^x + 1$ والتمثيل البياني للدالة b.

b. قارن بين التمثيل البياني للدالة $m(x) = 3^x - 3$ والتمثيل البياني للدالة $p(x) = 3^x + 4$.

الدرس 2-4 تحويلات الدوال الأسية 83

DO NOT PRINT

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 3**)

التحدث **مستوى 1** اطلب من الطلاب مناقشة المصطلح "أسية". عرّف الدالة الأسيّة بأنها الدالة التي يكون المتغير فيها هو الأس. اعرض بعض التمثيلات البيانية وأشر إلى خصائصها الأساسية. ثم اعرض عدة تمثيلات بيانية، واطلب من الطلاب تحديد ما إذا كان التمثيل البياني لدالة أسيّة أم لدالة غير أسيّة.

س: اعرض تمثيلًا بيانيًا لدالة خطيّة.

[غير أسي]

س: اعرض تمثيلًا بيانيًا لدالة أسيّة.

[أسي]

س: اعرض تمثيلًا بيانيًا لدالة تربيعية.

[غير أسي]

الاستماع **مستوى 2** قبل قراءة المثال، راجع المصطلحات التي تساعد الطلاب عل فهم النص. اكتب بعض المصطلحات على اللوح، مثل "خط التقارب"، "المدى"، "وحدات"، "إزاحة"، "المقطع y"، وما إلى ذلك. ثم أعطِ تلميحًا عن كل مصطلح من هذه المصطلحات، واطلب من الطلاب الاستماع وتخمين المصطلح الموصوف في التلميح.

س: ما المصطلح الذي يُطلق على الخط الوهمي الذي لا يقطعه التمثيل البياني أبدًا؟

[خط التقارب]

س: ما المصطلح الذي يمكن استعماله لوصف قيم مترابطة فيما بينها؟

[متناظرة]

الكتابة **مستوى 3** اطلب من الطلاب مقارنة الدالتين g و j كتابةً في دفاترهم، ثم اطلب منهم أن يرسموا جدولًا بعمودين، أحدهما لأوجه الشبه بين الدالتين والآخر لأوجه الاختلاف بينهما، وكتابة نتائج هذه المقارنة في العمودين.

س: ما وجه الشبه بين الدالتين g و j؟

[كلتاهما دالتان أسيّتان، وكلتاهما ناتجتان عن إزاحة للدالة الأسية الأصلية، $f(x) = 2^x$.]

س: ما وجه الاختلاف بين الدالتين g و j؟

[الدالة g إزاحة رأسية للدالة f إلى الأعلى ومداها هو $y > 2$، بينما الدالة j إزاحة رأسية للدالة f إلى الأسفل ومداها هو $y > -1$.]

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم إزاحات الدوال الأسيّة

س: كيف يمكن إزاحة دالة أسيّة أصلية رأسيًا وأفقيًا؟

[أضف عددًا ثابتًا إلى الدالة لإزاحتها رأسيًا. اطرح عددًا ثابتًا من x في الأس لإزاحة الدالة أفقيًا.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 8 يواجه بعض الطلاب صعوبة في تحديد الدالة التي تكون ناتجة عن تحويل دالة أخرى، خصوصًا عندما تكون الدالتان مكتوبتين في صورتين مختلفتين. شجّع الطلاب على التعبير عن الدالتين في نفس الصورة، جبريًا أو بتمثيل بياني، لكي يتمكنوا من مقارنة خصائصهما الأساسية بسهولة.

الإجابات

1. عند إضافة ثابت إلى دالة ينزاح تمثيلها البياني رأسيًا. إذا كان الثابت عددًا موجبًا ينزاح التمثيل البياني إلى الأعلى، وإذا كان الثابت عددًا سالبًا ينزاح التمثيل البياني إلى الأسفل. عند طرح ثابت من الأس ينزاح التمثيل البياني أفقيًا. إذا كان الثابت عددًا موجبًا ينزاح التمثيل البياني إلى اليمين، وإذا كان الثابت عددًا سالبًا ينزاح التمثيل البياني إلى اليسار.
2. يؤدي تغير قيمة كل من k و h إلى إزاحة التمثيل البياني، لكن تغير قيمة k تؤدي إلى إزاحة التمثيل البياني رأسيًا، بينما يؤدي تغير قيمة h إلى إزاحته أفقيًا.
3. كان على جاسم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 6 وحدات إلى الأعلى.
4. يصبح التمثيل البياني للدالة الناتجة تحت التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ بدلًا من أن يكون فوقه.
5. إن استعمال الجمع في إحدى الصيغتين العامتين واستعمال الطرح في الصيغة الأخرى يجعل اتجاه الإزاحة في الاتجاه الموجب دائمًا (إلى الأعلى في الإزاحة الرأسية وإلى اليمين في الأزاحة الأفقية) بالنسبة لقيم k و h الموجبة، وفي الاتجاه السالب دائمًا (إلى الأسفل في الإزاحة الرأسية وإلى اليسار في الإزاحة الأفقية) بالنسبة لقيم k و h السالبة.
6. التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
7. التمثيل البياني للدالة p إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.
8. التمثيل البياني للدالة j إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
9. التمثيل البياني للدالة q إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار.
10. التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأسية الأصلية $f(x) = 2^x$، بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل، والتمثيل البياني للدالة j إزاحة للتمثيل البياني للدالة الأسيّة الأصلية f بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى. إذن، التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة j بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
11. التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار.
12. التمثيل البياني للدالة p إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.
13. التمثيل البياني للدالة j إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.

ملخص المفهوم إزاحات الدوال الأسيّة

	الإزاحات الرأسية	الإزاحات الأفقية
جبريًا	$f(x) = a^x + k$	$f(x) = a^{(x-h)}$
عدديًا	$f(x) = 0.5^x$ $g(x) = 0.5^x + 3$ $j(x) = 0.5^x - 3$	$f(x) = 0.5^x$ $g(x) = 0.5^{x+3}$ $j(x) = 0.5^{x-3}$
بيانيًا		

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما العلاقة بين التغيّرات في دالة أسيّة وإزاحات تمثيلها البياني؟
2. **تواصل بدقة** ما وجه الشبه والاختلاف بين تأثير k على التمثيل البياني للدالة $a^x + k$ وتأثير h على التمثيل البياني للدالة a^{x-h}؟
3. **حلّل الخطأ** مثل جاسم الدالة $g(x) = 2^x + 6$ بيانيًا بإزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ إلى اليمين بمقدار 6 وحدات. بيّن خطأ جاسم وصححه.
4. **برر منطقيًا** ما تأثير تغير قيمة k من عدد موجب إلى عدد سالب على التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x + k$؟
5. **استعمل البنية** الصيغة العامة للإزاحات الرأسية للدوال الأسيّة هي $f(x) = a^x + k$، والصيغة العامة للإزاحات الأفقية للدوال الأسيّة هي $f(x) = a^{x-h}$. لماذا تتضمن الصيغة الأولى الجمع بينما تتضمن الصيغة الثانية الطرح؟

طبّق فهمك

في التمارين 6-9، قارن بين التمثيل البياني للدالة المعطاة والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.

6. $g(x) = 2^x + 1$
7. $p(x) = 2^{x-1}$
8. $j(x) = 2^x - 4$
9. $q(x) = 2^{x+1}$
10. قارن بين الدالة $g(x) = 2^x - 3$ والدالة الممثّلة بالجدول أدناه.

x	$j(x)$
−2	1.25
−1	1.5
0	2
1	3
2	5

في التمارين 11-14، قارن بين التمثيل البياني للدالة المعطاة والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 0.4^x$.

11. $g(x) = 0.4^{x+1}$
12. $p(x) = 0.4^{x-1}$
13. $j(x) = 0.4^x + 1$
14. $q(x) = 0.4^x - 1$

84 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
15-25, 28-35	15-19, 22-35

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	19, 22, 23, 25	1
	15	3
2	16, 20, 21, 26, 29, 34	1
	24, 33	2
3	18, 27, 28, 30	2
	17, 31, 32, 35	3

الإجابات

15. يمكن تحديد عدد الوحدات التي يتغير فيها المقطع y للدالة g بالنسبة للمقطع y للدالة f، أو يمكن تحديد عدد الوحدات التي يتغير فيها خط التقارب للدالة g بالنسبة لخط التقارب للدالة f.

16. لتحديد ما إذا كانت الإزاحة إلى اليمين أم إلى اليسار، يحتاج جاسم إلى معرفة إشارة h.

17. a. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى الأعلى و 3 وحدات إلى اليسار للتمثيل البياني للدالة f.

b. يتأثر خط التقارب بالإزاحة الرأسية فقط، لذا تصبح معادلته $y = k$.

c. مجال الدالة هو نفس مجال الدالة الرئيسة، بينما يتغير مدى الدالة بحسب الإزاحة الرأسية.

18. a.

x	$f(x) = 4^{\frac{1}{2}x}$	$g(x) = 4^x$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	1	1
2	4	16
4	16	256

b. تمثل الدالة f تضيقًا أفقيًا معامله $\frac{1}{2}$

c. $(0, 1)$

c. خط التقارب لكلا التمثيلين البيانيين هو $y = 0$.

19. إزاحة رأسية 6 وحدات إلى الأسفل.

20. إزاحة أفقية 4 وحدات إلى اليسار.

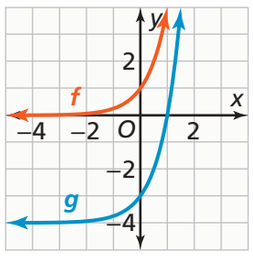
21. إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليمين.

22. إزاحة إلى الأعلى بمقدار $\frac{3}{4}$ وحدة.

23. 2

24. 1

25.



DO NOT PRINT

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

15. فكّر وثابر في الحل لديك الدالة $f(x) = a^x$. صِف طريقتين يمكنك من خلالهما تحديد قيمة k في التحويل المطبّق بالدالة $g(x) = a^x + k$، وذلك باستعمال التمثيلين البيانيين للدالتين f و g.

16. حلّل الخطأ بيّن خطأ جاسم في تحليل التحويل $g(x) = a^{x-h}$ وصحّحه.

> التمثيل البياني للدالة $g(x) = a^{x-h}$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة $f(x) = a^x$ بمقدار h وحدة إلى اليسار.
>
> ✗

17. مهارات التفكير العليا في المثالين 1 و 2، تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ أفقيًا ورأسيًا.

a. قارن بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^{x+3} + 4$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.

b. بشكل عام، ما تأثير إزاحة التمثيل البياني لدالة أسية أفقيًا ورأسيًا على خط التقارب؟

c. بشكل عام، ما تأثير إزاحة التمثيل البياني لدالة أسية أفقيًا ورأسيًا على مجال الدالة ومداها؟

18. a. استعمل الأدوات المناسبة انسخ الجدول أدناه وأكمله. ثم قارن بين التمثيل البياني للدالة f والتمثيل البياني للدالة g.

x	$f(x) = 4^{\frac{1}{2}x}$	$g(x) = 4^x$
-2		
-1		
0		
2		
4		

b. ما النقطة المشتركة بين التمثيلين البيانيين للدالتين؟

c. حدّد خط التقارب لكل دالة.

تدرَّب

في التمارين 19-22، قارن بين التمثيل البياني للدالة المعطاة والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

19. $g(x) = 2^x - 6$

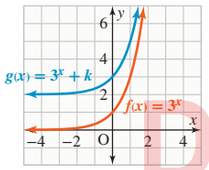
20. $p(x) = 2^{x+4}$

21. $q(x) = 2^{x-1}$

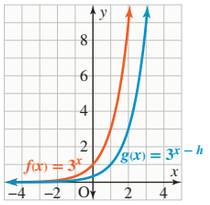
22. $j(x) = 2^x + \frac{3}{4}$

في التمرينين 23 و 24، أوجد قيمة كل من k أو h في التمثيل البياني. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

23.



24.



في التمرينين 25 و 26، مثّل بيانيًا الدالة وتحويل الدالة. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

25. $f(x) = 4^x$

$g(x) = 4^x + k, k = -4$

26. $f(x) = 0.5^x$

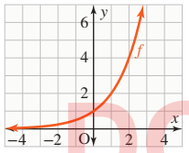
$g(x) = 0.5^{x-h}, h = 5$

في التمرينين 27 و 28، قارن بين الدالتين f و g من حيث المقطع y، وخط التقارب، والمدى. انظر المثال 3

27. $f(x) = 4^x$

x	$g(x)$
-2	3.0625
-1	3.25
0	4
1	7
2	19

28.



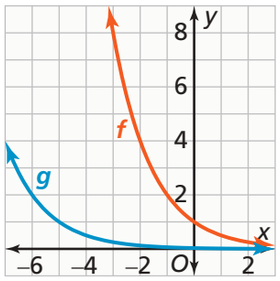
التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الإجابات

26.



27. التمثيل البياني للدالة g إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى. الدالة f: المقطع y: 1؛ خط التقارب: $y = 0$؛ المدى: $y > 0$؛ الدالة g: المقطع y: 4؛ خط التقارب: $y = 3$؛ المدى: $y > 3$.

28. الدالة f: المقطع y: 1؛ خط التقارب: $y = 0$؛ المدى: $y>0$؛ الدالة g: المقطع y: 8؛ خط التقارب: $y = 0$؛ المدى: $y > 0$

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الإجابات

29. إذا كان h موجبًا، يكون التمثيل البياني إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ بمقدار h وحدة إلى اليمين. إذا كان h سالبًا، يكون التمثيل البياني إزاحة للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$ بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليسار.

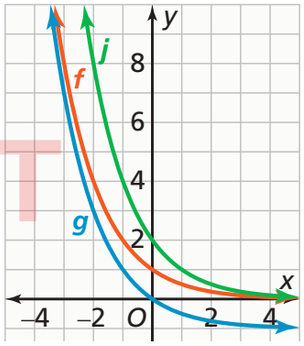
30. التمثيل البياني للدالة f إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة الأصلية، بينما التمثيل البياني للدالة g إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة الأصلية.

31. أدخل $g(x)$ في حاسبة بيانية وادرس الجدول. لاحظ أن $g(x - 2) = j(x)$. إذن التمثيل البياني للدالة j إزاحة للتمثيل البياني للدالة g بمقدار وحدتين إلى اليمين. يمكن ملاحظة أن $g \bullet j(x) = 2^{x - 1.5}$

32. a. التمثيل البياني الجديد سيكون تمددًا رأسيًّا للتمثيل البياني معامله 1.5، والقيمة الابتدائية للدالة $f(x) = ab^x$ ستكون نفس قيمة k في الصيغة $kf(x)$.

b. التمثيل البياني الجديد سيكون تمددًا رأسيًّا للتمثيل البياني الأصلي معامله 2

33. a.

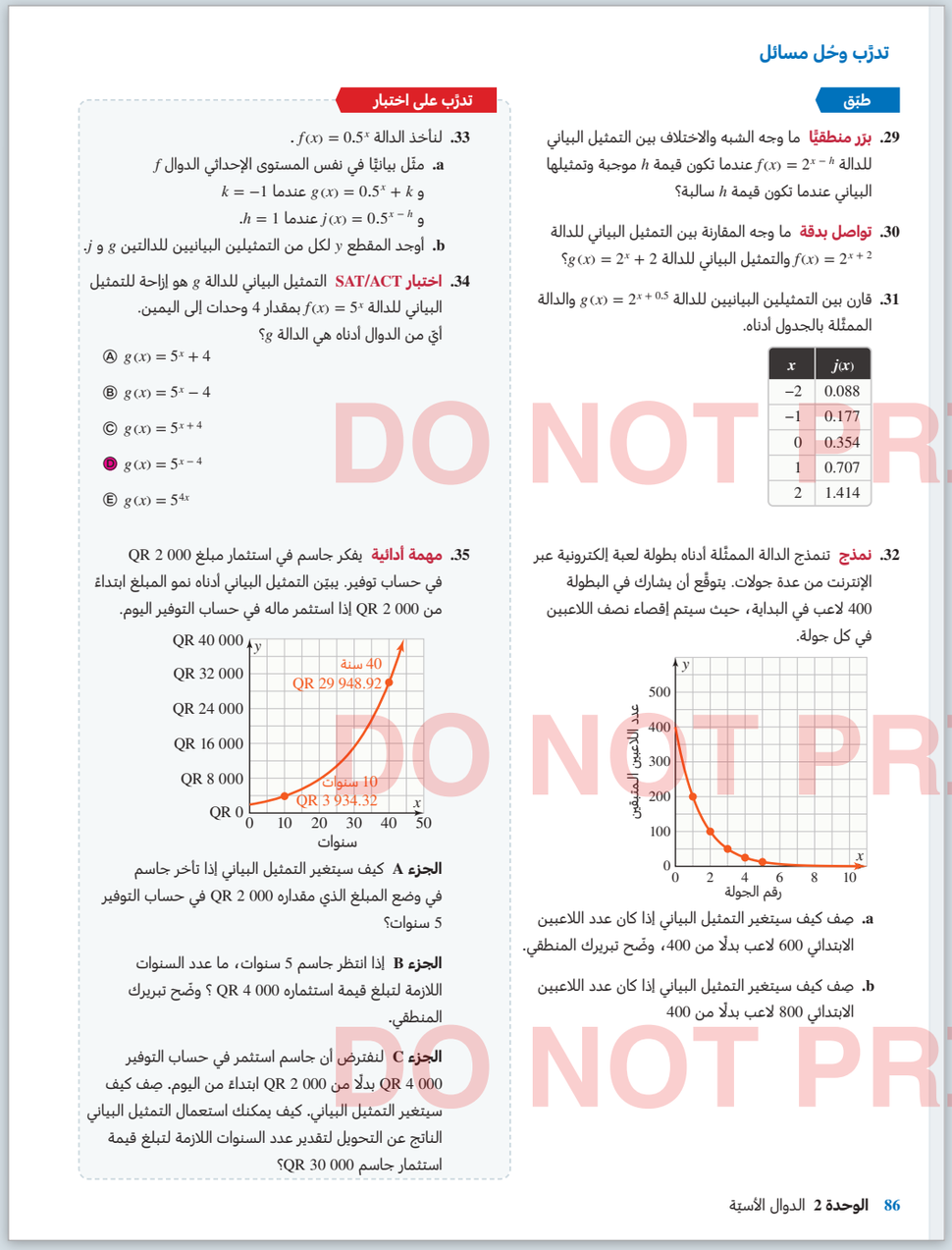


b. المقطع y: j: 2, g: 0

34. الجزء A سيُزاح التمثيل البياني 5 وحدات إلى اليمين.

الجزء B 15 سنة؛ قد تتنوع الإجابة.
نموذج إجابة: إذا بدأ حاسم الاستثمار الآن فسوف ينتظر 10 سنوات ليصبح المبلغ QR 4 000، إذا أزيح التمثيل البياني 5 وحدات إلى اليمين.
سيكون المبلغ نفسه عند $x = 15$.

الجزء C سيكون التمثيل البياني الجديد تمددًا رأسيًّا للتمثيل البياني الأصلي معامله 2
يمكن النظر إلى التمثيل البياني الجديد لتخمين قيمة x عند $y = 30\,000$ والتي تساوي 30، وبالتالي يحتاج حاسم إلى 30 سنة تقريبًا لتبلغ قيمة استثماره QR 30 000 مع استثمار أولي مقداره QR 4 000.



تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

29. برّر منطقيًّا ما وجه الشبه والاختلاف بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^{x-h}$ عندما تكون قيمة h موجبة وتمثيلها البياني عندما تكون قيمة h سالبة؟

30. تواصل بدقة ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^{x+2}$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = 2^x + 2$؟

31. قارن بين التمثيلين البيانيين للدالة $g(x) = 2^{x+0.5}$ والدالة الممثّلة بالجدول أدناه.

x	$j(x)$
−2	0.088
−1	0.177
0	0.354
1	0.707
2	1.414

32. نمذج تنمذج الدالة الممثّلة أدناه بطولة لعبة إلكترونية عبر الإنترنت من عدة جولات. يتوقّع أن يشارك في البطولة 400 لاعب في البداية، حيث سيتم إقصاء نصف اللاعبين في كل جولة.

a. صِف كيف سيتغير التمثيل البياني إذا كان عدد اللاعبين الابتدائي 600 لاعب بدلًا من 400، وضّح تبريرك المنطقي.

b. صِف كيف سيتغير التمثيل البياني إذا كان عدد اللاعبين الابتدائي 800 لاعب بدلًا من 400

تدرَّب على اختبار

33. لنأخذ الدالة $f(x) = 0.5^x$.

a. مثّل بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي الدوال f و $g(x) = 0.5^x + k$ عندما $k = -1$ و $j(x) = 0.5^{x-h}$ عندما $h = 1$.

b. أوجد المقطع y لكل من التمثيلين البيانيين للدالتين g و j.

34. اختبار SAT/ACT التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 5^x$ بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.
أيّ من الدوال أدناه هي الدالة g؟

Ⓐ $g(x) = 5^x + 4$

Ⓑ $g(x) = 5^x - 4$

Ⓒ $g(x) = 5^{x+4}$

Ⓓ $g(x) = 5^{x-4}$

Ⓔ $g(x) = 5^{4x}$

35. مهمة أدائية يفكر حاسم في استثمار مبلغ QR 2 000 في حساب توفير. يبيّن التمثيل البياني أدناه نمو المبلغ ابتداءً من QR 2 000 إذا استثمر ماله في حساب التوفير اليوم.

الجزء A كيف سيتغير التمثيل البياني إذا تأخر حاسم في وضع المبلغ الذي مقداره QR 2 000 في حساب التوفير 5 سنوات؟

الجزء B إذا انتظر حاسم 5 سنوات، ما عدد السنوات اللازمة لتبلغ قيمة استثماره QR 4 000 ؟ وضّح تبريرك المنطقي.

الجزء C لنفترض أن حاسم استثمر في حساب التوفير QR 4 000 بدلًا من QR 2 000 ابتداءً من اليوم. صِف كيف سيتغير التمثيل البياني. كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني الناتج عن التحويل لتقدير عدد السنوات اللازمة لتبلغ قيمة استثمار حاسم QR 30 000؟

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف تستعمل الدوال الأسيّة لنمذجة مواقف وحل مسائل؟

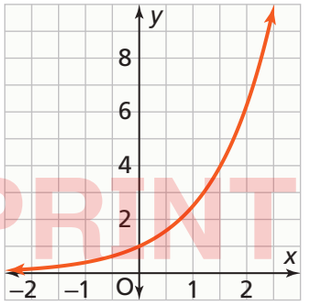
عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمين أمثلة تدعم إجاباتهم. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- يمكن نمذجة المتتاليات الهندسية بدوال أسيّة باستعمال النسبة الثابتة والقيمة الابتدائية.
- يمكن استعمال دوال النمو والاضمحلال الأسي لنمذجة المواقف حيث تتزايد أو تتناقص كمية معيّنة بنفس المعدل في كل فترة زمنية.
- يكون متوسط معدل التغير للدالة الأسية إمّا متزايدًا أو متناقصًا مع تزايد قيم x.
- يمكن استعمال الدوال الأسيّة لتوقّع قيمة الدالة عند نقطة معيّنة من الزمن.

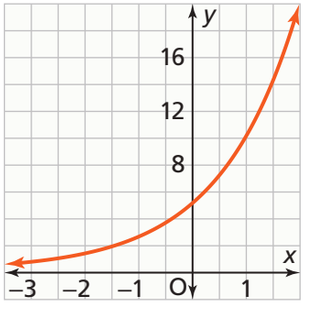
الإجابات

2. نمو أسي
3. نسبة ثابتة
4. المتتالية الهندسية
5. الفائدة المركبة
6. خط تقارب

7.



8.



9. $y = 0.5(2)^x$

الوحدة 2
مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تستعمل الدوال الأسيّة لنمذجة مواقف وحل مسائل؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. يمكن نمذجة نمو عدد سكان بدالة _____ صورتها: $f(x) = a \cdot b^x$ حيث $a > 0$ و $b > 1$.
3. الدوال الأسيّة هي ناتج ضرب قيمة ابتدائية بعدد موجب مضروب بنفسه بشكل تكراري ويُسمى _____.
4. _____ هي متتالية أعداد مكوّنة من ناتج ضرب حد في المتتالية بعدد ثابت غير الصفر، أو نسبة ثابتة، لإيجاد الحد الذي يليه مباشرة.
5. _____ هي الفائدة التي تُدفع على المبلغ الأصلي المودع وعلى الفوائد المتراكمة في فترات الإيداع.
6. لكل دالة أسيّة $f(x) = a \cdot b^x$ _____ هو المحور x.

- المتتالية الهندسية
- نسبة ثابتة
- فائدة بسيطة
- عامل اضمحلال
- الفائدة المركبة
- اضمحلال أسي
- نمو أسي
- خط تقارب
- عامل نمو
- دالة أسية

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 2-1 الدوال الأسيّة

مراجعة سريعة

الدالة الأسيّة هي ناتج ضرب قيمة ابتدائية في **نسبة ثابتة** مرفوعة الى أس. تُنمذج الدوال الأسيّة باستعمال الصيغة $f(x) = a \cdot b^x$ حيث a عدد ثابت غير صفري، $b > 0$ و $b \neq 1$.

مثال

أوجد القيمة الابتدائية والنسبة الثابتة للدالة الأسيّة الممثّلة بالجدول المجاور:

x	$f(x)$
0	3
1	12
2	48
3	192
4	768

القيمة الابتدائية تساوي 3

$12 \div 3 = 4$
$48 \div 12 = 4$
$192 \div 48 = 4$
$768 \div 192 = 4$

النسبة الثابتة تساوي 4

صيغة الدالة الأسية $f(x) = a \cdot b^x$

عوّض $a = 3, b = 4$ $f(x) = 3(4)^x$

تدرّب وحل مسائل

مثّل بيانيًا كل دالة أسيّة مما يلي.

7. $f(x) = (2.5)^x$
8. $f(x) = 5(2)^x$
9. اكتب الدالة الأسيّة الممثّلة للجدول التالي:

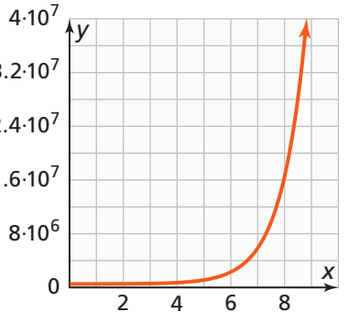
x	0	1	2	3
$f(x)$	0.5	1	2	4

10. **فكّر وتابر في الحل** استعمل الجدول أدناه لتكتب معادلة لدالة أسيّة تنمذج العدد المتوقع من البكتيريا بدلالة الزمن. مثّل بيانيًا الدالة. إذا استمر هذا النمط، بعد كم شهرًا يتجاوز عدد البكتيريا 45 000 000؟

الشهر	عدد البكتيريا
0	2 500
1	7 500
2	22 500
3	67 500
4	202 500

الوحدة 2 مراجعة الوحدة 87

10. $y = 2\,500(3)^x$



بعد 9 أشهر: 49 207 500

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الإجابات

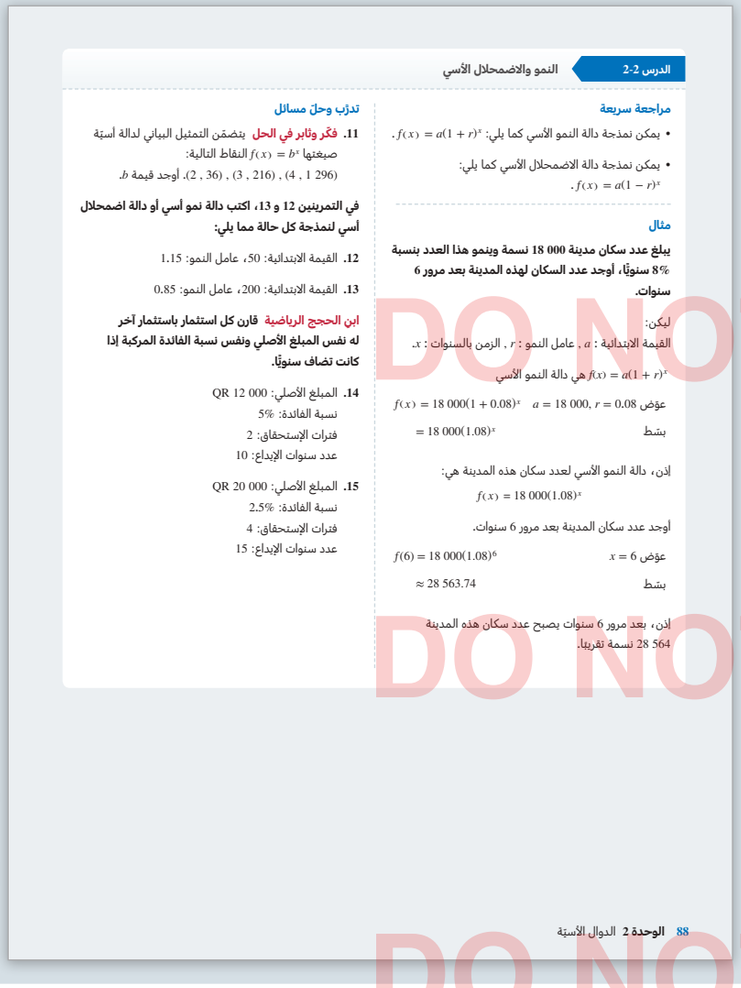
11. $b = 6$

12. $f(x) = 50(1.15)^x$

13. $f(x) = 200(0.85)^x$

14. QR19 663.40، سنويًا: QR 19 546.74.

15. QR 29 065.89، سنويًا: QR 28 965.96.



الدرس 2-2 النمو والاضمحلال الأسي

مراجعة سريعة

- يمكن نمذجة دالة النمو الأسي كما يلي: $f(x) = a(1 + r)^x$.
- يمكن نمذجة دالة الاضمحلال الأسي كما يلي: $f(x) = a(1 - r)^x$.

مثال

يبلغ عدد سكان مدينة 18 000 نسمة وينمو هذا العدد بنسبة 8% سنويًا، أوجد عدد السكان لهذه المدينة بعد مرور 6 سنوات.

ليكن:
القيمة الابتدائية: a ، عامل النمو: r ، الزمن بالسنوات: x.
$f(x) = a(1 + r)^x$ هي دالة النمو الأسي

عوض $a = 18\,000,\ r = 0.08$ $f(x) = 18\,000(1 + 0.08)^x$

بسّط $= 18\,000(1.08)^x$

إذن، دالة النمو الأسي لعدد سكان هذه المدينة هي:
$f(x) = 18\,000(1.08)^x$

أوجد عدد سكان المدينة بعد مرور 6 سنوات.

عوض $x = 6$ $f(6) = 18\,000(1.08)^6$

بسّط $\approx 28\,563.74$

إذن، بعد مرور 6 سنوات يصبح عدد سكان هذه المدينة 28 564 نسمة تقريبًا.

تدرّب وحل مسائل

11. فكّر وثابر في الحل يتضمّن التمثيل البياني لدالة أسيّة صيغتها $f(x) = b^x$ النقاط التالية:
$(2, 36)$ ، $(3, 216)$ ، $(4, 1\,296)$. أوجد قيمة b.

في التمرينين 12 و 13، اكتب دالة نمو أسي أو دالة اضمحلال أسي لنمذجة كل حالة مما يلي:

12. القيمة الابتدائية: 50، عامل النمو: 1.15

13. القيمة الابتدائية: 200، عامل النمو: 0.85

ابن الحجج الرياضية **قارن كل استثمار باستثمار آخر له نفس المبلغ الأصلي ونفس نسبة الفائدة المركبة إذا كانت تضاف سنويًا.**

14. المبلغ الأصلي: QR 12 000
نسبة الفائدة: 5%
فترات الإستحقاق: 2
عدد سنوات الإيداع: 10

15. المبلغ الأصلي: QR 20 000
نسبة الفائدة: 2.5%
فترات الإستحقاق: 4
عدد سنوات الإيداع: 15

88 الوحدة 2 الدوال الأسيّة

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الإجابات

16. هندسية
الصيغة الصريحة: $a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
الصيغة الارتدادية: $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}),\ a_1 = 5$

17. حسابية

18. هندسية
الصيغة الصريحة: $a_n = 8(2)^{n-1}$
الصيغة الارتدادية: $a_n = 2(a_{n-1}),\ a_1 = 8$

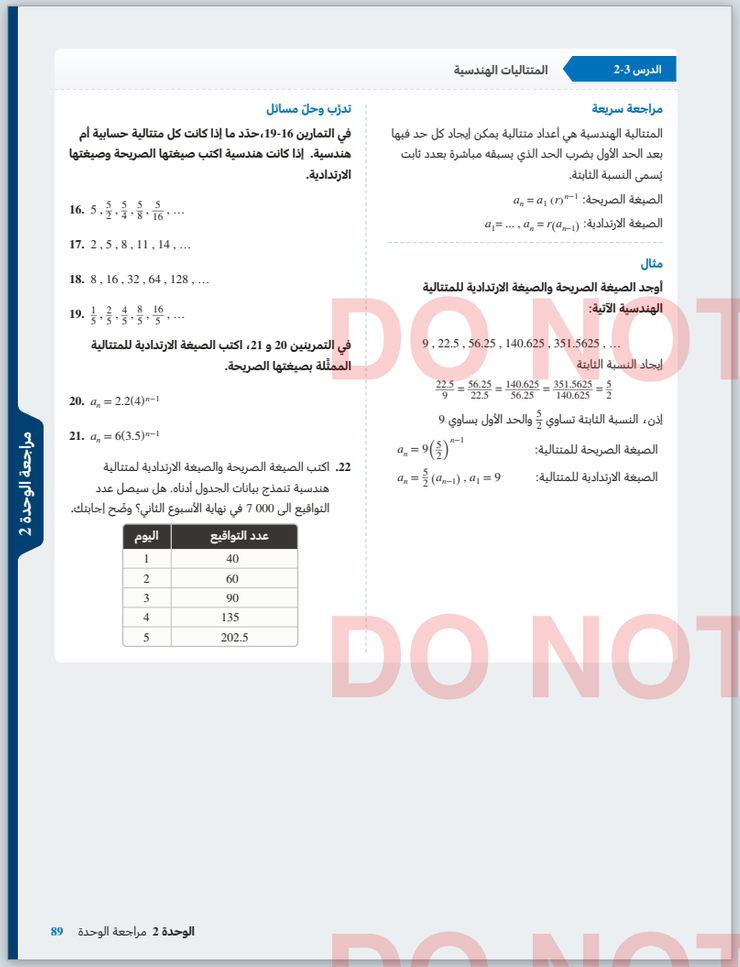
19. هندسية
الصيغة الصريحة: $a_n = \frac{1}{5}(2)^{n-1}$
الصيغة الارتدادية: $a_n = 2(a_{n-1}),\ a_1 = \frac{1}{5}$

20. $a_n = 4(a_{n-1}),\ a_1 = 2.2$

21. $a_n = 3.5(a_{n-1}),\ a_1 = 6$

22. $a_n = 40(1.5)^{n-1}$
$a_n = 1.5(a_{n-1}),\ a_1 = 40$

نعم، خلال أسبوعين أو 14 يومًا يصبح عدد التواقيع 7 785 تقريبًا.



الدرس 3-2 المتتاليات الهندسية

مراجعة سريعة

المتتالية الهندسية هي أعداد متتالية يمكن إيجاد كل حد فيها بعد الحد الأول بضرب الحد الذي يسبقه مباشرة بعدد ثابت يُسمى النسبة الثابتة.

الصيغة الصريحة: $a_n = a_1 (r)^{n-1}$

الصيغة الارتدادية: $a_1 = \ldots ,\ a_n = r(a_{n-1})$

مثال

أوجد الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية الآتية:

$9 , 22.5 , 56.25 , 140.625 , 351.5625 , \ldots$

إيجاد النسبة الثابتة

$\frac{22.5}{9} = \frac{56.25}{22.5} = \frac{140.625}{56.25} = \frac{351.5625}{140.625} = \frac{5}{2}$

إذن، النسبة الثابتة تساوي $\frac{5}{2}$ والحد الأول يساوي 9

الصيغة الصريحة للمتتالية: $a_n = 9\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

الصيغة الارتدادية للمتتالية: $a_n = \frac{5}{2}(a_{n-1}) ,\ a_1 = 9$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 16-19، حدّد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم هندسية. إذا كانت هندسية اكتب صيغتها الصريحة وصيغتها الارتدادية.

16. $5 , \frac{5}{2} , \frac{5}{4} , \frac{5}{8} , \frac{5}{16} , \ldots$

17. $2 , 5 , 8 , 11 , 14 , \ldots$

18. $8 , 16 , 32 , 64 , 128 , \ldots$

19. $\frac{1}{5} , \frac{2}{5} , \frac{4}{5} , \frac{8}{5} , \frac{16}{5} , \ldots$

في التمرينين 20 و 21، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الممثّلة بصيغتها الصريحة.

20. $a_n = 2.2(4)^{n-1}$

21. $a_n = 6(3.5)^{n-1}$

22. اكتب الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية تنمذج بيانات الجدول أدناه. هل سيصل عدد التواقيع الى 7 000 في نهاية الأسبوع الثاني؟ وضّح إجابتك.

اليوم	عدد التواقيع
1	40
2	60
3	90
4	135
5	202.5

مراجعة الوحدة 2

الوحدة 2 مراجعة الوحدة 89

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الإجابات

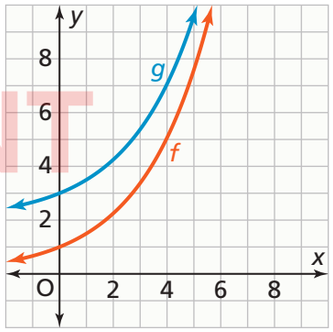
23. إزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأسفل

24. إزاحة رأسية 10 وحدات إلى الأعلى

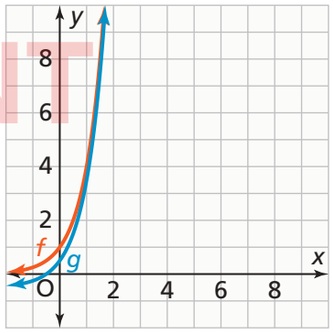
25. إزاحة أفقية وحدتين إلى اليمين

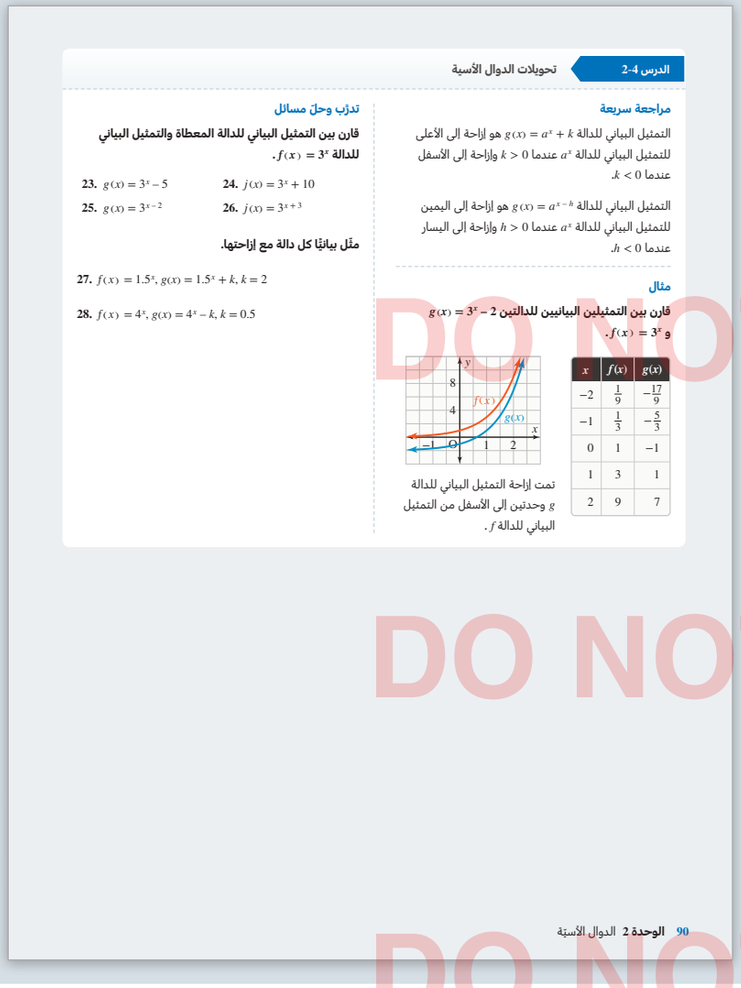
26. إزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليسار

27.



28.





الدرس 4-2 تحويلات الدوال الأسية

مراجعة سريعة

التمثيل البياني للدالة $g(x) = a^x + k$ هو إزاحة إلى الأعلى للتمثيل البياني للدالة a^x عندما $k > 0$ وإزاحة إلى الأسفل عندما $k < 0$.

التمثيل البياني للدالة $g(x) = a^{x-h}$ هو إزاحة إلى اليمين للتمثيل البياني للدالة a^x عندما $h > 0$ وإزاحة إلى اليسار عندما $h < 0$.

مثال

قارن بين التمثيلين البيانيين للدالتين $g(x) = 3^x - 2$ و $f(x) = 3^x$.

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	$\frac{1}{9}$	$-\frac{17}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$
0	1	-1
1	3	1
2	9	7

تمت إزاحة التمثيل البياني للدالة g وحدتين إلى الأسفل من التمثيل البياني للدالة f.

تدرّب وحلّ مسائل

قارن بين التمثيل البياني للدالة المعطاة والتمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$.

23. $g(x) = 3^x - 5$

24. $f(x) = 3^x + 10$

25. $g(x) = 3^{x-2}$

26. $f(x) = 3^{x+3}$

مثّل بيانيًا كل دالة مع إزاحتها.

27. $f(x) = 1.5^x, g(x) = 1.5^x + k, k = 2$

28. $f(x) = 4^x, g(x) = 4^x - k, k = 0.5$

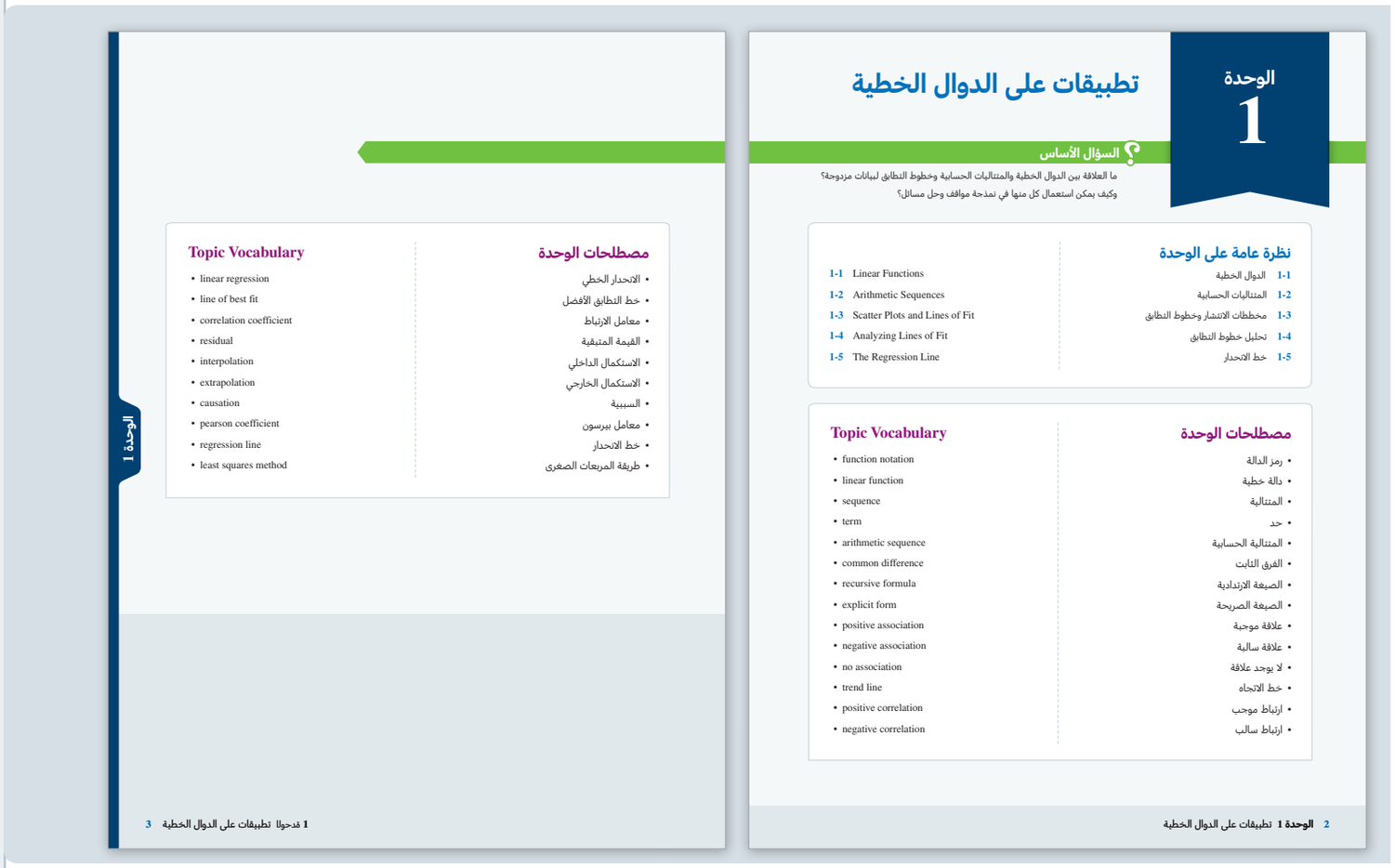
90 الوحدة 2 الدوال الأسية

DO NOT PRINT
DO NOT PRINT
DO NOT PRINT

www.jnob-jo.com

الوحدة 1
الدوال الخطية

مقدمة الوحدة



الوحدة 1

تطبيقات على الدوال الخطية

السؤال الأساس

ما العلاقة بين الدوال الخطية والمتتاليات الحسابية وخطوط التطابق لبيانات مزدوجة؟
وكيف يمكن استعمال كل منها في نمذجة مواقف وحل مسائل؟

نظرة عامة على الوحدة

1-1 الدوال الخطية
1-2 المتتاليات الحسابية
1-3 مخططات الانتشار وخطوط التطابق
1-4 تحليل خطوط التطابق
1-5 خط الانحدار

1-1 Linear Functions
1-2 Arithmetic Sequences
1-3 Scatter Plots and Lines of Fit
1-4 Analyzing Lines of Fit
1-5 The Regression Line

مصطلحات الوحدة

- رمز الدالة
- دالة خطية
- المتتالية
- حد
- المتتالية الحسابية
- الفرق الثابت
- الصيغة الارتدادية
- الصيغة الصريحة
- علاقة موجبة
- علاقة سالبة
- لا يوجد علاقة
- خط الاتجاه
- ارتباط موجب
- ارتباط سالب

Topic Vocabulary

- function notation
- linear function
- sequence
- term
- arithmetic sequence
- common difference
- recursive formula
- explicit form
- positive association
- negative association
- no association
- trend line
- positive correlation
- negative correlation

2 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الوحدة 1

مصطلحات الوحدة

- الانحدار الخطي
- خط التطابق الأفضل
- معامل الارتباط
- القيمة المتبقية
- الاستكمال الداخلي
- الاستكمال الخارجي
- السببية
- معامل بيرسون
- خط الانحدار
- طريقة المربعات الصغرى

Topic Vocabulary

- linear regression
- line of best fit
- correlation coefficient
- residual
- interpolation
- extrapolation
- causation
- pearson coefficient
- regression line
- least squares method

1 قدحوا تطبيقات على الدوال الخطية 3

السؤال الأساس للوحدة

ما العلاقة بين الدوال الخطية والمتتاليات الحسابية خطوط التطابق لبيانات مزدوجة؟
وكيف يمكن استعمال كل منها في نمذجة مواقف وحل مسائل؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 49 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

يستكشف الطلاب في هذا المشروع علاقة الارتباط بين استهلاك الطاقة في دولة قطر وعدد السكان، ثم يستخدمون هذا الارتباط ليتوقعوا استهلاك سكان دولة قطر في العام المقبل من الكهرباء.

تقديم المشروع

اعرض المشروع منطلقًا من مناقشة مفهوم "ترشيد استهلاك الموارد المائية والكهربائية".

اطرح الأسئلة التالية لتوجيه النقاش:

س: ما معنى ترشيد استهلاك الموارد المائية والكهربائية؟

[ترشيد استهلاك الماء والكهرباء يعني استعمال الماء والكهرباء بشكل مثالي، حيث يتّبع المواطن مجموعة من الإجراءات تؤدي إلى عدم استهلاك الماء والكهرباء إلا للحاجات الضرورية، الأمر الذي يفضي إلى الحد من الاستهلاك.]

س: ما معنى "استدامة" الموارد المائية والكهربائية؟

[إن عدم الاستخدام الرشيد للموارد الكهربائية والمائية قد يهدد بندرة المياه، خصوصًا أن موجات الجفاف التي تشهدها بعض بلدان العالم تؤدي إلى انخفاض معدل سقوط الأمطار ، ما يؤدي إلى شحّ موارد المياه.]

س: ما التدابير التي اتخذتها شركة كهرماء للتقليل من استخدام الكهرباء؟

[وضعت شركة كهرماء مقاييس قطرية لأجهزة التكييف، التي تمثل نسبة استهلاكها أكثر من 60% من الطاقة الكهربائية في الأبنية. كما اتخذت الشركة تدابير للتخلص من المصابيح الحرارية المتوهّجة، مما قلّل من استهلاك الكهرباء.]

تنفيذ المشروع

وضّح للطلاب أن عليهم جمع بيانات عن استهلاك الكهرباء في دولة قطر لإيجاد معامل الارتباط بين عدد السكان في دولة قطر واستهلاك الكهرباء. بعد ذلك، عليهم أن يفسروا معامل الارتباط لكي يكتبوا معادلة خط الانحدار ويستعملوا هذه المعادلة لتوقع استهلاك الكهرباء في العام المقبل. يجب أن تكون نتائج هذه التوقعات منسجمة مع السياسة التي وضعتها شركة كهرماء لتخفيض استهلاك الكهرباء.

إنهاء المشروع

قد ترغب في التخطيط ليوم يتشارك فيه الطلاب التصماميم التي أنجزوها لأسقفهم.

شجّع الطلاب على شرح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

الدرس 1-1
الدوال الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✔ كتابة وإيجاد قيم دوال خطية باستعمال رمز الدالة.
- ✔ تمثيل دالة خطية بيانيًا وربط مجال الدالة بتمثيلها البياني.
- ✔ تفسير الدوال الممثلة بتمثيلات بيانية وجداول وأوصاف لفظية ورمز الدالة بدلالة موقف ما.

الفهم الأساس

يمكن تمثيل الدوال الخطية بعدة طرق، وذلك باستعمال الكلمات والجداول والتمثيلات البيانية والقواعد. إن رمز الدالة هو طريقة لكتابة قاعدة الدالة f. إن مخرجة الدالة $f(x)$، تقرأ "f عند x"، تعني بأن f هي دالة للمدخلة x.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة وحل معادلات خطية.
- التمييز بين العلاقات والدوال.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال رمز الدالة لتمثيل الدوال الخطية.
- إيجاد قيم دوال خطية لمدخلات في مجالاتها.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تمثيل تحويلات الدوال الخطية باستعمال رمز الدالة.

دقة

يركّز هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يكتب الطلاب قاعدة دالة خطية باستعمال رمز الدالة ويجدون قيمة الدوال باستعمال رمز الدالة.
- يربط الطلاب مجال الدالة بالعلاقة الكمية التي تصفها. على سبيل المثال، تحديد مجال دالة حول الزمن بالمتباينة $0 < x < 24$ لأنه يوجد 24 ساعة في اليوم الواحد.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **مجال** | *domain*
- **عنصر** | *element*
- **مدى** | *range*

المصطلحات الجديدة

- **رمز الدالة** | *function notation*
- **دالة خطية** | *linear function*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح "دالة" على أنها قاعدة تربط كل عنصر في المجال مع عنصر واحد في المدى.

اعرض على الطلاب التمثيل البياني للمستقيم $y = x + 1$.

اطلب من الطلاب استعمال التمثيل البياني لتحديد عنصر في المجال وتبيان كيفية ربطه بعنصر في المدى. بعدها بيّن للطلاب كيفية تمثيل نفس الدالة المعروضة في التمثيل البياني باستعمال رمز الدالة، أي $f(x) = x + 1$.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

يركز الطلاب في هذا الدرس على المعايير:

11F.1.1 يجد قيمة دالة عند مدخلة في مجالها، ويكتب قاعدة دالة خطية لبيانات معطاة.

11F.1.4 يرسم دوالًا ويُفَسّر تمثيلاتها البيانية، ويتَعرّف متى تكون الدّوَال التالية متزايدة أو متناقصة أو ثابتة:

- الدالة الخطية
- دالة القيمة المطلقة (دالة المقياس)
- دالة الجذر التربيعي
- الدالة الأسية
- دالة الجذر التكعيبي

11F.1.6 ينمذج مجموعة من المواقف الحياتية المناسبة للدالة الخطية ودالة المقلوب ودالة القيمة المطلقة ودالة الجذر التربيعي، والدالة الأسيّة؛ ويستعمل هذه الدّوَال لحل مسائل من واقع الحياة.

تطبيق ممارسات الرياضيات

تم توضيح هذه المعايير في هذا الدرس:

نمذج

يستعمل الطلاب الجداول والرسومات والقواعد لتمثيل العلاقات الخطية في المواقف الحياتية، مثل معرفة درجة الحرارة، والتي تتزايد بمعدل ثابت على مدى فترة زمنية تبلغ 24 ساعة.

كن دقيقًا

يفهم الطلاب معاني الرموز المستعملة في صيغة الدالة ويرون ميزة اختيار حروف تتعلق بمعنى المسألة، مثل اختيار $d(t)$ لتمثيل المسافة كدالة للزمن.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس : يقدم الطلاب توقعات حول العدد النهائي للأحجية باستعمال الأنماط. هذا يساعد الطلاب على فهم كيفية نمذجة المعادلات أو الدوال بناء على الأنماط خلال هذا الدرس.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: ماذا تلاحظ عن الأحجية؟ باعتقادك، ماذا تتوقّع أن يحدث؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تتضمّن الأحجية نمطًا، وقد يتم إنشاء نمط من الأعداد الصحيحة الأصلية والأعداد الصحيحة الناتجة.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما النمط الذي تتعرف عليه من حل الأحجية؟

[ناتج ضرب العدد الصحيح الأصلي مضروب بالعدد 3 يساوي العدد الصحيح الجديد]

س: لماذا من المهم إيجاد نمط؟

[يمكن أن يساعدك النمط على تحديد العدد التالي.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب معادلة تمثل النمط.

[$y = 3x$، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد]

س: اكتب معادلة تمثل الأحجية

[$y = \frac{7x - x}{2}$، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف تمثل نمطًا أو توقعًا؟

[يمكنك كتابة معادلة لنمذجة نمط أو توقع.]

عادات التفكير

استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

ابنِ الحجج الرياضية هل من الممكن إيجاد مثال مضاد؟

[لا، لأن القاعدة صحيحة دائمًا]

كتاب الطالب، صفحة 5

نموذج من أعمال الطلاب

A. و B.

$1 \rightarrow 3$: $1(7) - 1 = 6$, $\frac{6}{2} = 3$

$2 \rightarrow 6$: $2(7) - 2 = 12$, $\frac{12}{2} = 6$

$3 \rightarrow 9$: $3(7) - 3 = 18$, $\frac{18}{2} = 9$

$4 \rightarrow 12$: $4(7) - 4 = 24$, $\frac{24}{2} = 12$

$5 \rightarrow 15$: $5(7) - 5 = 30$, $\frac{30}{2} = 15$

$6 \rightarrow 18$: $6(7) - 6 = 36$, $\frac{36}{2} = 18$

$-1 \rightarrow -3$: $-1(7) - (-1) = -6$, $\frac{-6}{2} = -3$

C. دائمًا ما يساوي العدد النهائي ثلاثة أمثال العدد الأصلي.

D. نعم، لأنه مهما كان العدد الذي تختاره، فإنك تضربه في ستة ثم تقسم الناتج على اثنين، وهي العملية التي تكافئ ضرب العدد الأصلي في ثلاثة.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

قدّم الدوال الخطية للطلاب. ذكّر الطلاب بأنه يمكنهم تمثيل قاعدة دالة باستعمال رمز الدالة. وضّح لهم أنهم سيقومون بتحديد الدوال الخطية وإيجاد قيمها وتمثيلها بيانيًا وكتابتها في هذا الدرس.

مثال 1 إيجاد قيم الدوال بمعلومية رمز الدالة

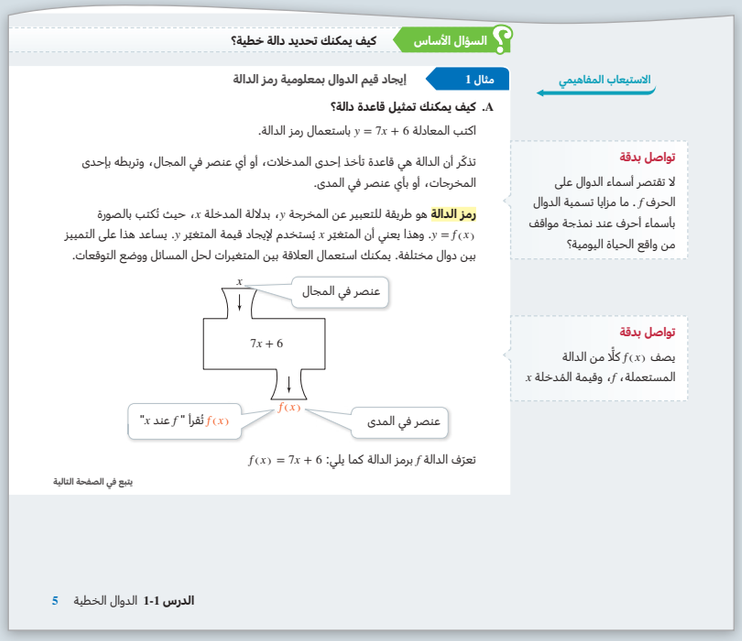
طرح أسئلة هادفة

س: متى تستعمل رمز الدالة؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: عندما تحتاج إلى كتابة متغير بدلالة متغير آخر.]

س: ما الطريقة الأخرى للتفكير بالمجال والمدى؟

[عناصر المجال هي قيم x، وعناصر المدى هي قيم $f(x)$ أو قيم y.]



السؤال الأساس: كيف يمكنك تحديد دالة خطية؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1: إيجاد قيم الدوال بمعلومية رمز الدالة

٨. كيف يمكنك تمثيل قاعدة دالة؟

اكتب المعادلة $y = 7x + 6$ باستعمال رمز الدالة.

تذكّر أن الدالة هي قاعدة تأخذ إحدى المدخلات، أو أي عنصر في المجال، وتربطه بإحدى المخرجات، أو بأي عنصر في المدى.

رمز الدالة هو طريقة للتعبير عن المخرجة y، بدلالة المدخلة x، حيث تُكتب بالصورة $y = f(x)$. وهذا يعني أن المتغير x يُستخدم لإيجاد قيمة المتغير y. يساعد هذا على التمييز بين دوال مختلفة. يمكنك استعمال العلاقة بين المتغيرات لحل المسائل ووضع التوقعات.

تعرّف الدالة f برمز الدالة كما يلي: $f(x) = 7x + 6$

يتبع في الصفحة التالية

تواصل بدقة

لا تقتصر أسماء الدوال على الحرف f. ما مزايا تسمية الدوال بأسماء أحرف عند نمذجة مواقف من واقع الحياة اليومية؟

تواصل بدقة

يصف $f(x)$ كلًّا من الدالة المستعملة، f، وقيمة المُدخلة x.

الدرس 1-1 الدوال الخطية 5

www.jnob-jo.com

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. −18
   b. 38

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

طرح أسئلة هادفة

س: ما الطريقة التي يمكنك استعمالها لتحديد العلاقة بين القيم؟

[ألاحظ النمط من قيمة إلى أخرى في الجدول.]

س: لماذا يمكنك استعمال صيغة الميل والمقطع لنمذجة الدالة الخطية؟

[يمثّل المتغير y في صيغة الميل والمقطع مخرجة الدالة $f(x)$. لذا يمكنك كتابة $f(x) = mx + b$.]

تابع المثال 1

B. ما قيمة $g(x) = 7x + 6$ عندما $x = 4$؟

أوجد قيمة $g(x) = 7x + 6$ عند $x = 4$.

4

عوّض بالمدخلة 4 عن x في الدالة.

$7(4) + 6$

34

إذا كان $g(x) = 7x + 6$، فإن $g(4) = 34$.

يمكن استعمال أحرف أخرى غير f لرمز الدالة. من الأحرف الشائع استعمالها أيضًا g و h.

حاول أن تحلّ! 1. أوجد قيمة كل دالة عند $x = 3$.

a. $g(x) = -4x - 6$

b. $h(x) = 9x + 11$

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

يبيّن الجدول أدناه تكلفة شراء 4 وجبات سريعة.

كيف يمكنك تحديد تكلفة شراء أي عدد من الوجبات السريعة؟

الخطوة 1 افحص العلاقة بين القيم الواردة في الجدول.

عدد الوجبات	1	2	3	4
التكلفة	22	42	62	82

+1 +1 +1

+20 +20 +20

المعدل الثابت للتغيير هو 20

العلاقة خطية.

خطأ شائع

قد تعتقد أن كلًا من مدى ومجال العلاقة بين المتغيرين في الجدول هو مجموعة الأعداد الحقيقية لأن كلًا من مدى و مجال الدالة $f(x) = 20x + 2$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية. إلا أن الموقف الخاص بالمسألة قد يحتّم تغيير تحديدهما.

الخطوة 2 اكتب دالة باستعمال صيغة الميل والمقطع للقاعدة.

$f(x) = mx + b$

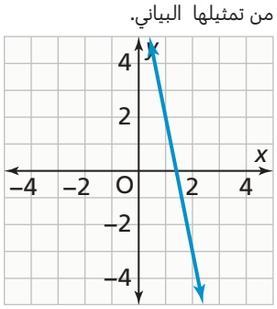
$f(x) = 20x + b$

يتبع في الصفحة التالية

6 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب اكتشاف كتابة قاعدة دالة خطية من تمثيلها البياني.



س: ما قاعدة الدالة التي تحدد التمثيل البياني؟

[$f(x) = -5x + 7$، اختر نقطتين من التمثيل البياني مثل (2 , 1) و (3− , 2).
أوجد الميل بين النقطتين. استعمل الميل وإحدى النقطتين لإيجاد قيمة المقطع y.]

س: اذكر خمس قيم لكل من المجال والمدى.

[المجال = {−1, 0, 1, 2, 3}؛ المدى = {− 8, − 3, 2, 7, 12}]

www.jnob-jo.com

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** $f(x) = 4.5x$

b. $f(x) = 2x + 3$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ماذا تلاحظ في ما يتعلق بالأنماط في الجداول والتي تساعدك على كتابة الدوال الخطية؟

[في فقرة حاول أن تحل! 2(a)، تزداد قيم y بمقدار 4.5،
وفي فقرة "حاول أن تحل!" 2(b)، تزداد قيم y بمقدار 2]

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

ابحث عن العلاقات ماذا تكشف العلاقة بين القيم x والقيم y عن الدالة؟

[يمكن أن تساعد العلاقة بين القيم x و القيم y على تحديد ما إذا كانت الدالة خطية أم لا.]

مثال 3 تحليل دالة خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا يمثل العدد 0 في كل من مجال ومدى التمثيل البياني للدالة؟

[بالنسبة للمجال، يمثل العدد 0 الساعة السادسة صباحًا، بالنسبة للمدى، العدد 0 يمثل 0°C]

س: ماذا يمثل المحور x؟

[يمثل المحور x الزمن أو عدد الساعات في اليوم.]

س: ماذا يمثل المحور y؟

[يمثل المحور y درجة الحرارة الخارجية.]

تابع المثال 2

الخطوة 3 أوجد قيمة b.

$22 = 20(1) + b$ ← عوّض بأي زوج مرتّب من الجدول.

$2 = b$

يمكنك استعمال الدالة $f(x) = 20x + 2$ لتحديد تكلفة شراء أي عدد من الوجبات السريعة.

الدالة $f(x) = 20x + 2$ دالة خطية لأن القاعدة، $20x + 2$، هي نفسها قاعدة المعادلة الخطية $y = 20x + 2$.

حاول أن تحلّ! **2.** اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول باستعمال رمز الدالة.

a.

x	1	2	3	4
y	4.5	9	13.5	18

b.

x	1	2	3	4
y	5	7	9	11

مثال 3 تحليل دالة خطية

٨. يسجّل جابر درجة الحرارة الخارجية في إحدى المدن الباردة. عند السادسة صباحًا كانت الحرارة −8°C، ثم بدأت تزداد بمعدل 2°C كل ساعة خلال الساعات الست اللاحقة. افترض أن الحرارة تستمر بالارتفاع بنفس المعدل، أوجد درجة الحرارة عند الساعة الثانية بعد الظهر.

الخطوة 1 اكتب دالة تنمذج الموقف.

$f(x) = 2x - 8$ ← درجة الحرارة عند الساعة السادسة صباحًا

ارتفاع بمقدار 2°C كل ساعة

الخطوة 2 مثّل هذه الدالة بيانيًا.

المدى لهذه الدالة هو مجموعة درجات الحرارة المتوقعة والتي هي أكبر من −8

استعمل صيغة الميل والمقطع لتمثيل الدالة بيانيًا.

$f(x) = 2x - 8$

يتبع في الصفحة التالية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 يواجه بعض الطلاب صعوبات في فهم مجال ومدى الدالة الخطية ورسم تمثيل بياني لها. اطلب من الطلاب التدرّب على إيجاد مدى الدالة عندما يكون مجالها معلومًا، والتدرب كذلك على رسم تمثيلها البياني.

س: أوجد مدى الدالة $f(x) = -2x + 4$، علمًا أن مجالها هو $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

[$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$]

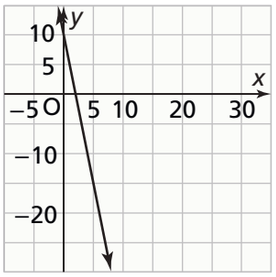
س: مثل f بيانيًا باستعمال المقطعين x و y.

[تحقق من عمل الطلاب. يجب أن يكون التمثيل البياني خطًا مستقيمًا يمرّ بالنقاط (0, 4) و (2, 0).]

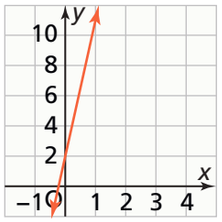
www.jnob-jo.com

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. **a.**



b.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تمثيل الدالتين بيانيًا؟

[ابدأ كل تمثيل بياني برسم المقطع y، في الجزء a، تحرك 5 وحدات إلى الأسفل وَوحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، وصِل النقطتين. في الجزء b، تحرك 9 وحدات إلى الأعلى و وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، وصِل النقطتين.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3a قد يمثل بعض الطلاب $y = 5x + 10$ بيانيًا لأنهم ينسون مراعاة إشارة الميل. اطلب من الطلاب أن يفكروا في ما إذا يجب أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة عندما يكون الميل سالبًا. ثم اطلب منهم التحقق لمعرفة ما إذا كانت التمثيلات البيانية التي رسموها تشير إلى الاتجاه الذي يدعم إجابتهم أم لا.

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحل المسائل

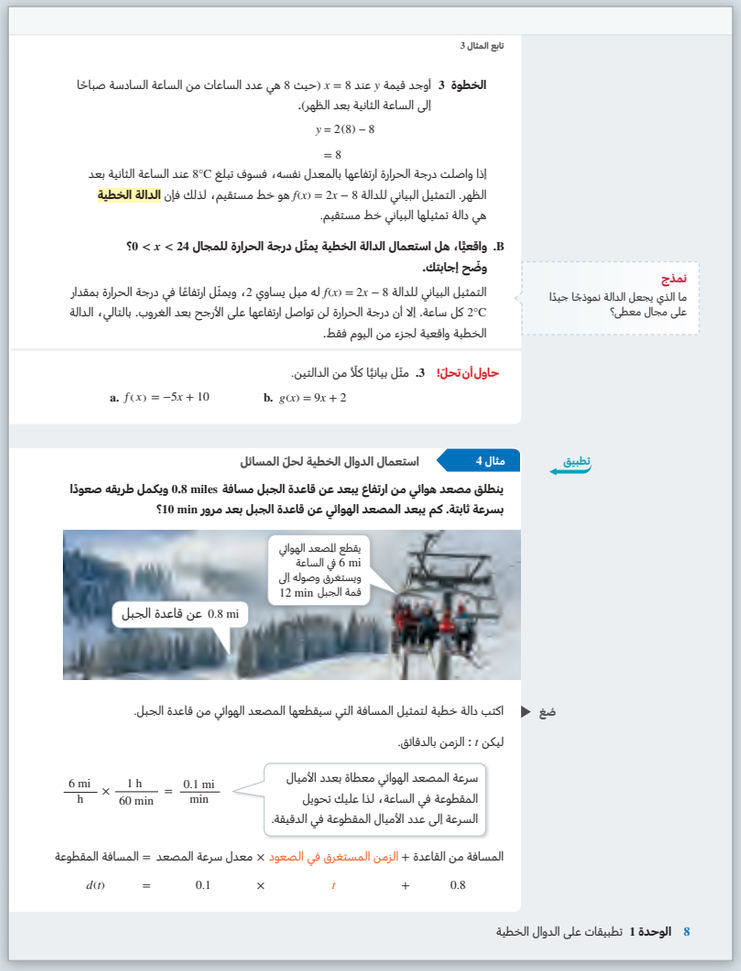
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يرتبط المجال والمدى بالتمثيل البياني؟

[يتمثل المجال بالمحور t مع عرض الزمن بالدقائق. يتم تمثيل المدى بالمحور $d(t)$ والذي يوضح عدد الأميال انطلاقًا من قاعدة الجبل.]

س: : كيف يساعدك النموذج الخطي على إيجاد قيمة دالة ما في زمن معين؟

[يمكنك استعمال التمثيل البياني لإيجاد المسافة التي يبعدها المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل في زمن معين.]



تابع المثال 3

الخطوة 3 أوجد قيمة y عند $x = 8$ (حيث 8 هي عدد الساعات من الساعة السادسة صباحًا إلى الساعة الثانية بعد الظهر).

$$y = 2(8) - 8$$
$$= 8$$

إذا واصلت درجة الحرارة ارتفاعها بالمعدل نفسه، فسوف تبلغ 8°C عند الساعة الثانية بعد الظهر. التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 8$ هو خط مستقيم، لذلك فإن **الدالة الخطية** هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم.

B. واقعيًا، هل استعمال الدالة الخطية يمثل درجة الحرارة للمجال $0 < x < 24$؟ وضح إجابتك.

نمذج
ما الذي يجعل الدالة نموذجًا جيدًا على مجال معطى؟

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 8$ له ميل يساوي 2، ويمثل ارتفاعًا في درجة الحرارة بمقدار 2°C كل ساعة. إلا أن درجة الحرارة لن تواصل ارتفاعها على الأرجح بعد الغروب. بالتالي، الدالة الخطية واقعية لجزء من اليوم فقط.

حاول أن تحل! 3. مثّل بيانيًا كلًا من الدالتين.

a. $f(x) = -5x + 10$ **b.** $g(x) = 9x + 2$

تطبيق

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحل المسائل

ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع يبعد عن قاعدة الجبل مسافة 0.8 miles ويكمل طريقه صعودًا بسرعة ثابتة. كم يبعد المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل بعد مرور 10 min؟

يقطع المصعد الهوائي 6 mi في الساعة ويستغرق وصوله إلى قمة الجبل 12 min

0.8 mi عن قاعدة الجبل

ضع ▶ اكتب دالة خطية لتمثيل المسافة التي سيقطعها المصعد الهوائي من قاعدة الجبل.

ليكن t : الزمن بالدقائق.

$\frac{6 \text{ mi}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = \frac{0.1 \text{ mi}}{\text{min}}$

سرعة المصعد الهوائي معطاة بعدد الأميال المقطوعة في الساعة، لذا عليك تحويل السرعة إلى عدد الأميال المقطوعة في الدقيقة.

المسافة من القاعدة + الزمن المستغرق في الصعود × معدل سرعة المصعد = المسافة المقطوعة

$d(t) = 0.1 \times t + 0.8$

8 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الاستماع **مستوى 1** قبل عرض المثال على الطلاب، اقرأ الفقرة الأولى جهرًا. خلال استماع الطلاب، اطلب إليهم الإشارة إلى عبارة غير مألوفة بالنسبة إليهم. [مصعد هوائي]

س: ما معنى مصعد هوائي؟ [مصعد ينقلك إلى أعلى الجبل]

س: من يستعمله عادة؟ [المتزلجون]

س: ما المسافة التي يجب أن تقطعها في الجبل حتى تصل إلى المصعد الهوائي؟ [0.8 mi]

الكتابة **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب دراسة كلمة قاعدة. أطوِ قطعة ورق إلى أربعة أرباع واكتب كلمة قاعدة في مركز الورقة. اطلب إلى الطلاب كتابة تعريفين مختلفين للكلمة على جزئين من الورقة. في الجزئين الآخرين، اطلب إليهم رسم صورة لكيفية استعمال الكلمة في المثال، وصورة لكيفية استعمال الكلمة بطريقة رياضية.

س: ما المسافة التي تمثلها القاعدة في المسألة؟ [0 mi]

القراءة **مستوى 3** اطلب إلى الطلاب قراءة نص المسألة ودراسة الشروحات الموجودة في الصورة.

س: ما وحدات القياس التي تلاحظها في نص المسألة والصورة؟ [أميال، دقائق، أميال في الساعة.]

س: ما أهمية ملاحظة وحدات القياس الموجودة في المسألة؟ [لحل المسائل، يجب أن تكون وحدات القياس متسقة. في هذه الحالة، يجب تحويل الوحدة أميال في الساعة إلى أميال في الدقيقة لأن t تمثّل الزمن (دقيقة).]

www.jnob-jo.com

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. تبقى الدالة $d(t)$ تربط المسافة المقطوعة من قاعدة الجبل بعدد الدقائق التي يقطعها المصعد الكهربائي. ستكون المعادلة $d(t) = \frac{1}{12}t + 0.8$. تبقى نقطة بداية التمثيل البياني، أي $(0, 0.8)$، نفسها، ولكن لن يكون للمستقيم نفس حدة الانحدار. سيتغير المجال من $\{t \mid 0 \le t \le 12\}$ إلى $\{t \mid 0 \le t \le 14.4\}$.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك وصف أي تغيير قد يحدث للمجال والمدى، دون إجراء أي عمليات حسابية؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: بما أن المصعد الهوائي يتحرك ببطء أكبر، فسيستغرق الوصول إلى القمة زمنًا أطول، وبالتالي سيتزايد المجال ليشمل زمنًا أطول.
لن تتغير المسافة من قاعدة الجبل إلى قمة المصعد الهوائي، وبالتالي سيبقى المدى كما هو.]

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

برّر منطقيًا كيف ترتبط الدالة الخطية بالمعادلة الخطية؟ وضّح إجابتك.

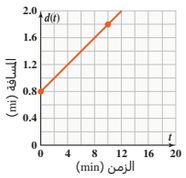
[يمكن نمذجة الدالة الخطية بمعادلة خطية.]

تابع المثال 4

احسب ◀ أُمثّل المسافة التي تفصل المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل في أي وقت بالدالة الخطية: $d(t) = 0.1t + 0.8$.

أوجد قيمة الدالة عند $t = 10$.

$$d(10) = 0.1(10) + 0.8$$
$$= 1 + 0.8$$
$$= 1.8$$



فسّر ◀ بعد 10 دقائق، يكون المصعد الهوائي قد قطع 1.8 miles من ارتفاع سفح الجبل.

حاول أن تحلّ! **4.** في المثال 4، كيف ستتغير الدالة والتمثيل البياني والمعادلة إذا كانت سرعة المصعد الهوائي 5 miles في الساعة؟ ما تأثير ذلك في المجال؟

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الدوال الخطية

س: كيف يرتبط المجال والمدى بالدالة الخطية؟

[المجال هو قيم المدخلة والمدى هو قيم المخرجة للدالة الخطية.]

س: اذكر بعضًا من الطرق التي يمكن تمثيل الدوال الخطية بها؟

[الكلمات والقواعد والجداول والرسوم البيانية]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد ينسى بعض الطلاب توزيع الإشارة السالبة على حدّي المقدار $(2x - 4)$. اطلب إلى الطلاب مقارنة $f(6) = -2(6) - 4$ و $f(6) = -(2(6) - 4)$ لتوضيح الدالة التي عليهم احتسابها.

الإجابات

1. هي دالة، تمثيلها البياني مستقيم أو يقع على طول مستقيم، ويمكن كتابتها بالصيغة $y = mx + b$، حيث m و b عددين ثابتين.

2. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: يمكن نمذجة حركة شخص يركض بمعدل ثابت بدالة خطية. لا يمكن نمذجة حركة مجموعة من الاشخاص يركضون بسرعات مختلفة بدالة خطية.

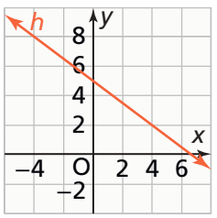
3. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: يمكن تمثيل الدالة الخطية بالكلمات والقواعد والجداول والرسوم البيانية. المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى تتضمن متغيرًا واحدًا أو أكثر.

4. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: لم تحول نجلاء الدقائق إلى ساعات بشكل صحيح. يجب أن تكون الدالة مكتوبة في الصورة $f(x) = 15x$.

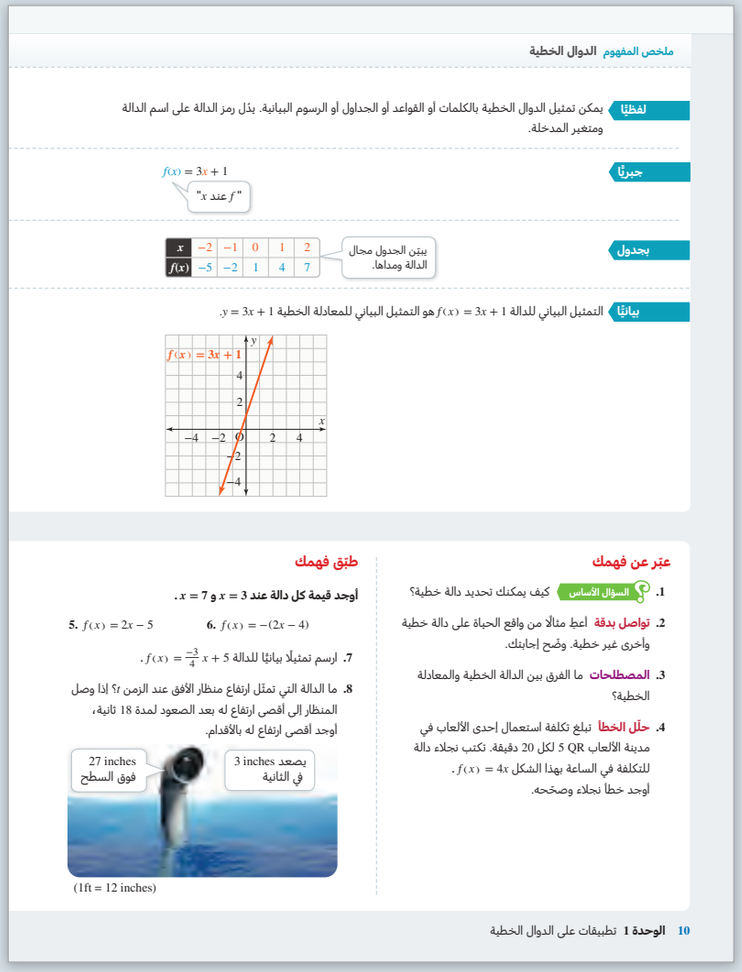
5. $f(3) = 1$, $f(7) = 9$

6. $f(3) = -2$, $f(7) = -10$

7.



8. $f(t) = 3t + 27$, 6.75 ft



ملخص المفهوم الدوال الخطية

لفظيًا يمكن تمثيل الدوال الخطية بالكلمات أو القواعد أو الجداول أو الرسوم البيانية. يدل رمز الدالة على اسم الدالة ومتغير المدخلة.

جبريًا $f(x) = 3x + 1$ — "f عند x"

بجدول

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−5	−2	1	4	7

يبيّن الجدول مجال الدالة ومداها.

بيانيًا التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3x + 1$ هو التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = 3x + 1$.

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف يمكنك تحديد دالة خطية؟
2. **تواصل بدقة** أعطِ مثالًا من واقع الحياة على دالة خطية وأخرى غير خطية. وضّح إجابتك.
3. **المصطلحات** ما الفرق بين الدالة الخطية والمعادلة الخطية؟
4. **حلّل الخطأ** تبلغ تكلفة استعمال إحدى الألعاب في مدينة الألعاب QR 5 لكل 20 دقيقة. تكتب نجلاء دالة للتكلفة في الساعة بهذا الشكل $f(x) = 4x$. أوجد خطأ نجلاء وصحّحه.

طبّق فهمك

أوجد قيمة كل دالة عند $x = 3$ و $x = 7$.

5. $f(x) = 2x - 5$
6. $f(x) = -(2x - 4)$
7. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \frac{-3}{4}x + 5$.
8. ما الدالة التي تمثّل ارتفاع منظار الأفق عند الزمن t؟ إذا وصل المنظار إلى أقصى ارتفاع له بعد الصعود لمدة 18 ثانية، أوجد أقصى ارتفاع له بالأقدام.

(1ft = 12 inches)

10 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9–21, 23, 25, 27–34	9–13, 15, 17, 19–34

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	13–18	1
	33	2
2	19–21, 32	1
	12, 30	2
3	22–27	1
	9	2
	10	3
4	11	1
	29, 31, 34	2
	28	3

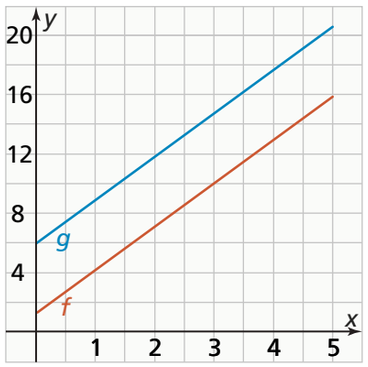
الإجابات

9. a. $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b. 3

10. a. يجب أن يكون مدى $g(x)$ أكبر من مدى $f(x)$ بمقدار 5

b.



المدى على المجال $0 < x < 5$ هو $1 < y < 16$ للدالة $f(x)$ و $6 < y < 21$ للدالة $g(x)$.

11. a. $f(x) = 0.35x + 75$

b. QR 264

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عندما $x = 0$، $y = 4 - 3$، أي $y = 1$. $y = 3x + 1$

13. $f(5) = 17$

14. $f(5) = -18$

15. $f(5) = 41$

16. $f(5) = -\frac{1}{3}$

17. $f(5) = -6.5$

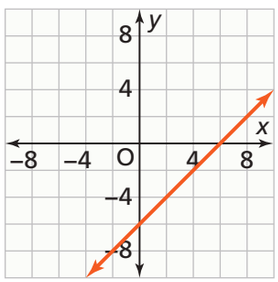
18. $f(5) = -4$

19. $y = 4x - 2$

20. $y = -1.5x + 3$

21. $y = -4.5x - 4$

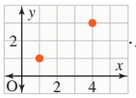
22.



تدرَّب وحُل مسائل

عزز فهمك

9. استعمل البنية النقطتان المبيّنتان على الرسم البياني معطاتان بالدالة f.



a. استعمل النقطتين لإيجاد المعادلة التي تمثّل الدالة f

b. أوجد $f(4)$.

10. مهارات التفكير العليا لتأخذ الدالتين $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = 3x + 6$ على المجال $0 < x < 5$

a. من دون إيجاد قيمة الدالتين أو رسمهما بيانيًا، كيف يمكننا المقارنة بين مدى كل منهما؟

b. مثّل الدالتين بيانيًا وصِف مدى كل منهما في المجال المعطى.

11. فكّر وثابر في الحل تستوفي شركة الكهرباء QR 75 بدل اشتراك شهري و QR 0.35 تكلفة استهلاك عن كل كيلوواط (kw)

a. اكتب دالة خطية تنمذج الفاتورة الشهرية.

b. اذا كان الاستهلاك لأحد الشهور 540 kw، أوجد قيمة الفاتورة لهذا الشهر.

12. حلّل الخطأ بيّن الخطأ الذي ارتكبه عمر عند إيجاد قاعدة الدالة للبيانات الواردة في الجدول أدناه، ثم صحّح هذا الخطأ.

x	1	2	3	4
y	4	7	10	13

كلما ازداد x بمقدار 1، يزداد y بمقدار 3
عندما يكون $x = 1$، فإن $y = 4$،
إذن، $y = 3x + 4$.

تدرَّب

أوجد قيمة $f(5)$ لكل دالة. انظر المثال 1

13. $f(x) = 7 + 2x$ **14.** $f(x) = -3(x + 1)$

15. $f(a) = 6(a + 2) - 1$ **16.** $f(h) = -\frac{h}{15}$

17. $f(m) = 1 - 3\left(\frac{m}{2}\right)$ **18.** $f(m) = 4(m - 6)$

اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول.

انظر المثال 2

19.

x	0	1	2	3	4
y	−2	2	6	10	14

20.

x	0	1	2	3	4
y	3	1.5	0	−1.5	−3

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	5	0.5	−4	−8.5	−13

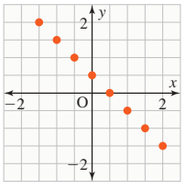
ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالة خطية. انظر المثال 3

22. $g(x) = x - 6$ **23.** $h(x) = 6 - x$

24. $f(x) = \frac{1}{4}(x - 1)$ **25.** $f(x) = 0.9(10 - x) + 1$

استعمل التمثيل البياني أدناه لحلّ التمرينين 26 و 27

انظر المثال 3



26. هل الدالة المبيّنة دالة خطية؟ وضّح إجابتك.

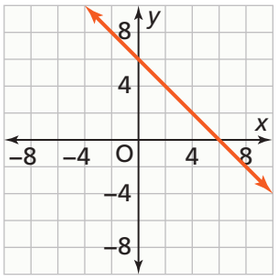
27. حدّد مجال الدالة ومداها.

28. تريد سلمى شراء سلك معدني لصنع سياج طوله 84 ft يحيط بمنطقة مستطيلة الشكل. استعمل الصيغة $2(l + w) = 84$ لكتابة دالة للطول، بدلالة العرض. مثّل الدالة بيانيًا. ما المجال المقبول للموقف؟ وضّح إجابتك. انظر المثال 4

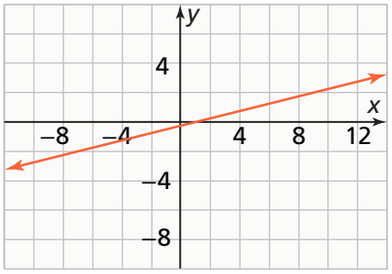
www.jnob-jo.com

الإجابات

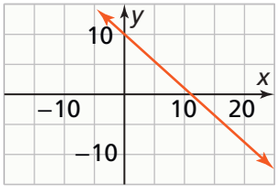
23.



24.



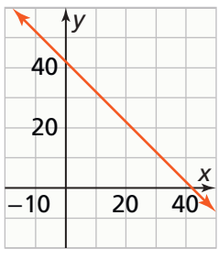
25.



26. نعم، عند زيادة مقدارها وحدة واحدة في قيم x، تتناقص قيم y بمعدل ثابت. أيضًا، بالإمكان وصل نقاط التمثيل البياني بمستقيم. إذن، الدالة المبيَّنة خطية.

27. المجال: $\{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$
المدى: $\{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$

28. $f(w) = -w + 42$



المجال: $0 < w < 42$ كل قيمة خارج الفترة تعني أن الطول أو العرض يكون سالبًا أو يساوي الصفر وهذا ليس منطقيًا.

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

29. نمذج يقيس المقياس المبيّن في الصورة أدناه مستوى ارتفاع مياه النهر مقارنةً بمتوسط مستواها. أشار المقياس في البداية الى أنّ مستوى المياه أقل بمقدار 0.5 ft من متوسط مستواها البالغ 10 ft ثم بدأت المياه بالارتفاع بمعدل ثابت مقداره 0.75 ft في الساعة.

a. مثّل الدالة الخطية بيانيًا لتبيّن التغيير الذي يحدث في مستوى المياه بمرور الزمن.

b. هل سيصل مستوى مياه النهر إلى 7 ft فوق المعدل الطبيعي بعد 10 ساعات؟ وضّح إجابتك.

30. استعمل البنية يتقاضى صاحب ورشة تصليح سيارات من عملائه مقابل ساعات الخدمة الأجور التالية. تتم محاسبة العملاء على أساس أنصاف من ساعات الخدمة أو ساعات كاملة.

ورشة تصليح السيارات					
الساعات	0.5	1	1.5	2	2.5
رسوم العمل (QR)	60	105	150	195	240

a. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول.

b. استغرق إصلاح إحدى السيارات 5 h و 15 min وتطلب دفع QR 450 مقابل قطع الغيار. أوجد التكلفة الإجمالية.

31. برّر منطقيًا يفتح متجر أبوابه في أحد المعارض من الساعة 10 صباحًا إلى الساعة 5:30 مساءً ولديه 555 عبوّة مياه للبيع. يبلغ متوسط المبيعات 1.5 عبوّة مياه في الدقيقة.

a. مثّل بيانيًا عدد العبوات المتبقية بدلالة عدد الساعات. أوجد المجال والمدى.

b. بهذا المعدل، في أي وقت سيتم بيع جميع عبوّات المياه؟ كم عدد عبوّات المياه المطلوبة في بداية اليوم التالي؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب على اختبار

32. اذا كانت الدالة $f(x) = 4(x - 2) - 0.4(4 - x)$.
صِل كل مقدار بقيمته المكافئة.

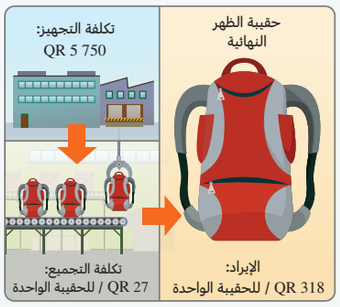
I. $f(1) + f(2)$	A. 4.4
II. $f(4)$	B. 3.6
III. $f(7) - f(6)$	C. −6
IV. $f(3)$	D. 8

33. اختبار SAT/ACT حدّد أي من النقاط التالية لا تحقّق الدالة الخطية التي يمثّلها الجدول أدناه.

x	$f(x)$
0	180
1	174
2	168
3	162
4	156

Ⓐ (12 , 108)
Ⓑ (30 , 0)
Ⓒ (−15 , 270)
Ⓓ (21 , 54)
Ⓔ (9 , 120)

34. مهمة أدائية يحسب جابر تكاليف وأرباح مشروعه التجاري المتمثل في إنتاج n من حقائب الظهر للنزهات البرية. تتمثل أرباح جابر في العائد مطروحًا منه النفقات.

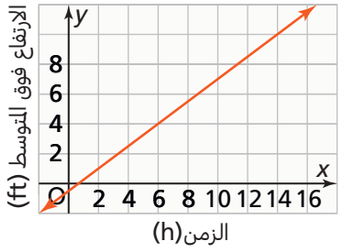


الجزء A اكتب دالة لتمثيل الأرباح التي سيحققها جابر من بيع n حقيبة من حقائب الظهر.

الجزء B مثّل دالة الأرباح بيانيًا. أوجد المجال المقبول لهذه الدالة لعام واحد إذا كان عائده يتراوح بين QR 4 000 و QR 30 000.

الجزء C كم ستبلغ أرباحه إذا باع 45 حقيبة ظهر؟ وضّح إجابتك.

29. a. $f(t) = -0.5 + 0.75t$



b. نعم. أعلى ارتفاع للمياه، بعد h 10،
هو $f(10) = -0.5 + 0.75(10) = 7$ ft

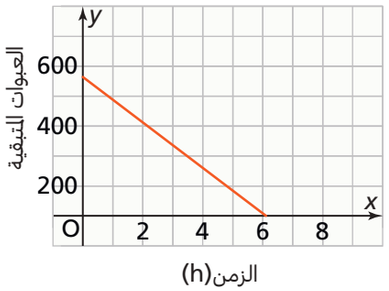
30. a. $f(t) = 15 + 90t$

b. QR 960

www.jnob-jo.com

الإجابات

31. a. المجال: $\{t \mid 0 \le t \le 6.17\}$
المدى: $\{n \mid 0 \le n \le 555\}$

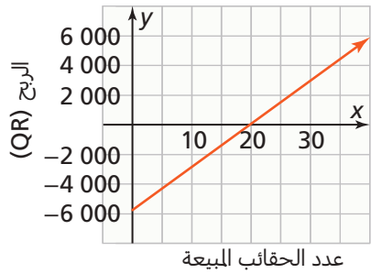


b. باع جميع عبوات المياه في الساعة 4:10 P.M لأن العبوات تنفذ بعد مرور 6.17 h، بعد الساعة 10:00 صباحًا، يتم بيع 90 عبوة في الساعة تقريبًا ويفتح المتجر أبوابه لمدة 7.5 ساعات، أي يجب أن يكون لديهم على الأقل $90(7.5) = 675$ عبوة مياه في بداية يوم العمل التالي.

34. الجزء A $r(n) = 318n$, $c(n) = 5\,750 + 27n$
اطرح التكلفة من الربح:

$$p(n) = 318n - (5\,750 + 27n)$$
$$= 291n - 5\,750$$

الجزء B



المجال: $\{n \mid 13 \le n \le 94\}$، دالة العائد هي $r(n) = 318n$. إذن، إذا كان يبيع بين 4 000 QR و 30 000 QR، فإن عدد الحقائب التي يبيعها هو $\frac{4\,000}{318} < n < \frac{30\,000}{318}$
أو $13 < n < 94$ تقريبًا.

الجزء C إذا باع 43 حقيبة، سيكون ربحه موجبًا لأن $291\,(45) - 5\,750 = 7\,345$
إذن، سيربح 7 345 QR.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-2

المتتاليات الحسابية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✔ كتابة متتاليات حسابية بالصيغتين الارتدادية والصريحة.
- ✔ استعمال الصيغتين الصريحة والارتدادية لنمذجة مواقف من واقع الحياة.
- ✔ التحويل بين الصيغتين الصريحة والارتدادية.

الفهم الأساس

تستعمل الصيغتان الصريحة والارتدادية لوصف المتتاليات الحسابية. تربط المتتاليات الحسابية، كما الدوال الخطية، الكميات التي تتزايد بمعدل ثابت.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- تمثيل الدوال الخطية باستعمال الكلمات ورمز الدالة (القواعد) والجداول والتمثيلات البيانية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال الدوال الخطية لتمثيل المتتاليات الحسابية.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- كتابة الدالة الخطية باستعمال انحدار خطي بحيث تكون أكثر مطابقة مع متتالية قيم.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن المتتالية الحسابية هي دالة مجالها هو الأعداد الطبيعية ومداها هو حدود المتتالية.
- يطبق الطلاب الصيغتين الصريحة والارتدادية لحل مسائل تتعلق بتوقع ارتفاع الدرجة التي ترتيبها n في هرم أو تكلفة استئجار دراجة مدة n يوم.

بناء المصطلحات

العربية | *English*

المصطلحات الجديدة

- **متتالية حسابية** | *arithmetic sequence*
- **الفرق الثابت** | *common difference*
- **الصيغة الصريحة** | *explicit formula*
- **الصيغة الارتدادية** | *recursive formula*
- **متتالية** | *sequence*
- **حد المتتالية** | *term of a sequence*

نشاط المصطلحات

اطلب إلى الطلاب التفكير في كيفية استعمال المصطلح متتالية في اللغة التي يستعملونها في صفوف اللغات. استعمل فهمهم للمتتالية في صف اللغات لتعريف الطلاب بالمصطلح "متتالية حسابية" بأنه متتالية عددية يستدعي إيجاد أي حد فيها إضافة عدد ثابت إلى الحد الذي يسبقه مباشرة. قد يعتقد الطلاب في البداية أن أي نمط من الأعداد يشكل متتالية حسابية. اطلب من الطلاب اختيار العبارة التي تتطابق مع كل مجموعة من الأعداد: متتالية ليست حسابية؛ ليست متتالية؛ متتالية حسابية.

1. _____ 2, 5, 8, 11, 14, ... [متتالية حسابية]
2. _____ 2, 4, 8, 16, 32, ... [متتالية ليست حسابية]
3. _____ 2, 5, 3, 8, 1, ... [ليست متتالية]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعايير:

11F.4.1 يفهم أن المتتالية تمثل دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية او مجموعة جزئية منها $\{1, 2, 3, ..., n\}$
تربط موقع الحد (أو رتبته) بقيمته، ويحدد متى تكون المتتالية منتهية أو غير منتهية.

11F.4.2 يحدد ما إذا كانت متتالية ما حسابية أم لا، ويستعمل الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية ليكتب حدوذا معيّنة من متتالية حسابية.

تطبيق ممارسات الرياضيات

برّر بطريقة تجريدية وكمية

يظهر الطلاب فهمهم للكميات وعلاقاتها عند تحديد ما إذا كان عليهم استعمال الصيغة الصريحة أم الصيغة الارتدادية لتمثيل متتالية حسابية بناء على المعلومات المعطاة.

كن دقيقًا

يتواصل الطلاب بدقة مستعملين التعاريف والصيغ لمقارنة ومقابلة الصيغتين الارتدادية والصريحة لمتتالية حسابية.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب الأنماط في تصميم قماش مزخرف. يؤدي تحديد الأنماط في هذا التصميم إلى فهم واكتشاف الأنماط في المتتاليات الحسابية.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ في التصميم؟ [قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عدد المربعات المظللة في كل صف عدد غير زوجي. عدد المربعات الملونة بالأصفر في كل صف عدد زوجي.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يساعدك استعمال الجدول في تحديد الأنماط الموجودة في التصميم؟ [إن استعمال الجدول لتنظيم المعلومات يجعل العلاقات بين الصفوف أكثر وضوحًا.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: أنشئ جدولًا مشابهًا للجدول في الجزء A لصفوف المربعات الصفراء في التصميم. ما وجه المقارنة بين الأنماط التي وجدتها وأنماط صفوف المربعات النمطية في التصميم؟ [عدد المربعات في أي صف يزيد عن عدد المربعات النمطية المناظرة له بمقدار 1، العدد الكلي للمربعات يساوي رقم الصف زائد عدد المربعات في صف المربعات النمطية المناظرة له.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف يمكنك استعمال تمثيل بياني لوصف الأنماط التي وجدتها؟ [يمكنك إنشاء تمثيلين بيانيين، يتضمن أحدهما الأزواج المرتبة (رقم الصف ، عدد المربعات النمطية في الصف)، ويتضمن الثاني الأزواج المرتبة (رقم الصف ، إجمالي عدد المربعات). يمكنك النظر إلى التمثيلين البيانيين وملاحظة العلاقات بين كل صف ورقمه، والصفوف التي قبله وبعده.]

س: على ماذا يدل الفرق بين عدد المربعات في صفين متتاليين عن النمط؟ [الفرق بين عدد المربعات في أي صفين متتاليين هو 2، وهذا يعني أن القيم تتبع نمطًا خطيًّا.]

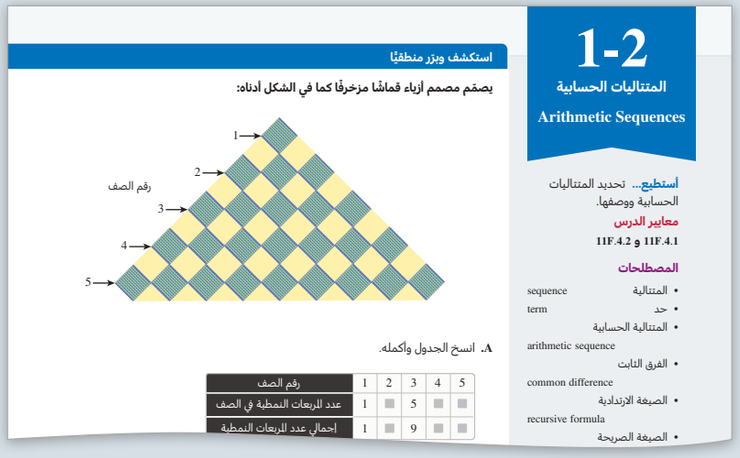
استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عادات التفكير

نمذج ما المعلومات التي تحتاج إليها من الجدول لكتابة معادلة خطية تمثل النمط؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عند ملء الجدول، يمكنك تحديد أن الصفوف تتزايد في نمط يمكن نمذجته بالمعادلة $y = 2x - 1$، حيث x رقم الصف و y عدد المربعات النمطية في الصف.]

كتاب الطالب، صفحة 13



1-2
المتتاليات الحسابية
Arithmetic Sequences

أستطيع... تحديد المتتاليات الحسابية ووصفها.

معايير الدرس
11F.4.1 و 11F.4.2

المصطلحات
- المتتالية sequence
- حد term
- المتتالية الحسابية arithmetic sequence
- الفرق الثابت common difference
- الصيغة الارتدادية recursive formula
- الصيغة الصريحة

استكشف وبرّر منطقيًّا

يصمّم مصمم أزياء قماشًا مزخرفًا كما في الشكل أدناه:

A. انسخ الجدول وأكمله.

رقم الصف	1	2	3	4	5
عدد المربعات النمطية في الصف	1	■	5	■	■
إجمالي عدد المربعات النمطية	1	■	9	■	■

نموذج من أعمال الطلاب

A.

رقم الصف	1	2	3	4	5
عدد المربعات النمطية في الصف	1	3	5	7	9
إجمالي عدد المربعات النمطية	1	4	9	16	25

B. الفرق في عدد المربعات النمطية بين كل صف والصف الذي يليه مباشرة هو 2

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

قدّم للطلاب المتتاليات الحسابية. ذكرهم بأنهم تعرفوا سابقًا على الدوال الخطية وبأن المتتاليات الحسابية مرتبطة بالدوال الخطية. وضّح لهم أن المتتاليات الحسابية يمكن استعمالها لنمذجة مواقف من واقع الحياة.

مثال 1 الربط بين المتتاليات والدوال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

س: ما المقصود بحدّين متتاليين في متتالية؟ [الحدان المتتاليان في متتالية هما عددان في متتالية يعقب أحدهما الآخر أو يليه.]

س: كيف تجد الفرق الثابت في متتالية؟ [تحسب الفرق بين أي حدين متتاليين.]

س: ما الشرط الواجب تحققه في متتالية لتكون حسابية؟
[أن يكون الفرق بين كل زوج من الحدود المتتالية هو نفسه.]

السؤال الأساس ما العلاقة بين المتتاليات الحسابية والدوال الخطية؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 الربط بين المتتاليات والدوال

أ. هل القائمة المرتبة 26, 39, 52, 65, 78 متتالية حسابية؟

المتتالية قائمة أعداد مرتبة غالبًا ما تشكل نمطًا. وكل عدد من هذه الأعداد هو **حد** في المتتالية.

في **المتتالية الحسابية**، يكون الفرق بين كل حدين متتاليين ثابتًا يسمى **الفرق الثابت**.

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين في القائمة.

26 (13) 39 (13) 52 (13) 65 (13) 78

الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت يساوي 13 وبالتالي تشكّل أعداد هذه القائمة متتالية حسابية.

يتبع في الصفحة التالية

نصيحة دراسية
يجب أن يكون الفرق بين كل حدّين متتاليين في المتتالية ثابتًا حتى تكون هذه المتتالية متتالية حسابية. ويمكن أن يكون هذا الفرق الثابت أي عدد حقيقي.

الدرس 1-2 المتتاليات الحسابية 13

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

الجزء B

س: هل يتضمن مدى المتتالية الحسابية أعدادًا طبيعية فقط؟ [كلا؛ مع أن المجال يجب أن يتضمن أعدادًا طبيعية فقط، يتألف المدى من حدود المتتالية التي يمكن أن تكون أي عدد حقيقي.]

س: ما وجه الشبه بين المتتالية الحسابية والدالة الخطية؟ [يمكن مقارنة الفرق الثابت في المتتالية الحسابية مع ميل الدالة الخطية. يمكنك إيجاد قيمة الحد التالي بإضافة الفرق الثابت على الحد السابق، تمامًا كما لو أنك تجد قيمة $f(x + 1)$ بإضافة مقدار التغير في قيمة y (أي الميل) إلى قيمة $f(x)$.]

الجزء C

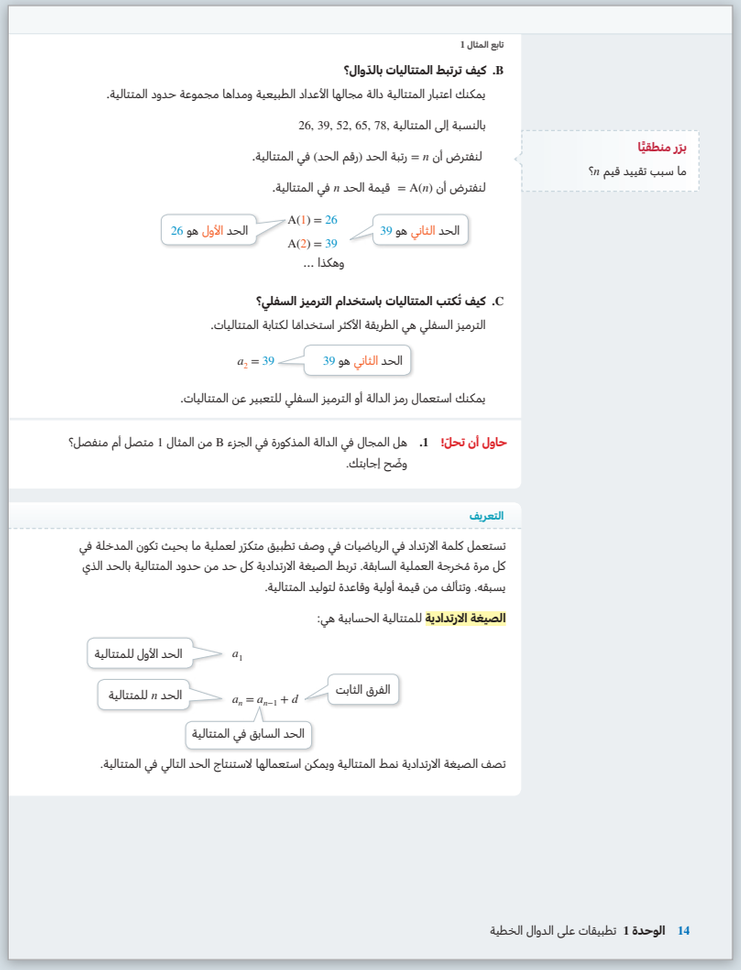
س: ما فائدة استعمال الترميز السفلي في رأيك؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يسهل كتابته أكثر لأنه لا يحتاج إلى تضمين القوسين، ومن غير المرجح الخلط بينها وبين الضرب.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. منفصل؛ عناصر المجال هي رموز الحدود، أي أن المجال يتضمن الأعداد الطبيعية (أعداد العد) فقط.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل من الممكن كتابة متتالية حسابية يكون مداها متصلًا؟ [كلا؛ فالمتتالية الحسابية بالتعريف هي قائمة من أعداد مرتبة، الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت.]



تابع المثال 1

B. كيف ترتبط المتتاليات بالدوال؟

يمكنك اعتبار المتتالية دالة مجالها الأعداد الطبيعية ومداها مجموعة حدود المتتالية.

بالنسبة إلى المتتالية 26, 39, 52, 65, 78, ...

لنفترض أن n = رتبة الحد (رقم الحد) في المتتالية.

لنفترض أن $A(n)$ = قيمة الحد n في المتتالية.

$A(1) = 26$ — الحد الأول هو 26

$A(2) = 39$ — الحد الثاني هو 39

وهكذا ...

بزر منطقيًا

ما سبب تقييد قيم n؟

C. كيف تُكتب المتتاليات باستخدام الترميز السفلي؟

الترميز السفلي هي الطريقة الأكثر استخدامًا لكتابة المتتاليات.

$a_2 = 39$ — الحد الثاني هو 39

يمكنك استعمال رمز الدالة أو الترميز السفلي للتعبير عن المتتاليات.

حاول أن تحلّ!

1. هل المجال في الدالة المذكورة في الجزء B من المثال 1 متصل أم منفصل؟ وضّح إجابتك.

التعريف

تستعمل كلمة الارتداد في الرياضيات في وصف تطبيق متكرر لعملية ما بحيث تكون المدخلة في كل مرة مُخرجة العملية السابقة. تربط الصيغة الارتدادية كل حد من حدود المتتالية بالحد الذي يسبقه. وتتألف من قيمة أولية وقاعدة لتوليد المتتالية.

الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية هي:

a_1 — الحد الأول للمتتالية

$a_n = a_{n-1} + d$ — الحد n للمتتالية؛ الفرق الثابت؛ الحد السابق في المتتالية

تصف الصيغة الارتدادية نمط المتتالية ويمكن استعمالها لاستنتاج الحد التالي في المتتالية.

14 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1B لأن المتتاليات تعطى في صورة قوائم مرتبة، قد يجد بعض الطلاب صعوبة في الربط بينها وبين الدوال أو في تحديد قيم المدخلات.

اطلب إلى الطلاب التدرب على كتابة متتالية في صورة مجموعة أزواج مرتبة.

1. ما أول خمسة أزواج مرتبة في المتتالية ... 3–, 5, 13, 21, 29,؟
[(1 , –3), (2 , 5), (3 , 13), (4 , 21), (5 , 29)]

2. ما مجال المتتالية؟
[{1, 2, 3, 4, 5, ...}]

3. ما مدى المتتالية؟
[{–3, 5, 13, 21, 29, ...}]

www.jnob-jo.com

مثال 2 تطبيق الصيغة الارتدادية

طرح أسئلة هادفة

س: ما الخطوات المطلوبة لإيجاد قيمة a_3؟ [الحد الأول هو a_1. لإيجاد a_2، اجمع قيمة a_1 إلى الفرق الثابت. لإيجاد a_3، اجمع قيمة a_2 إلى الفرق الثابت.]

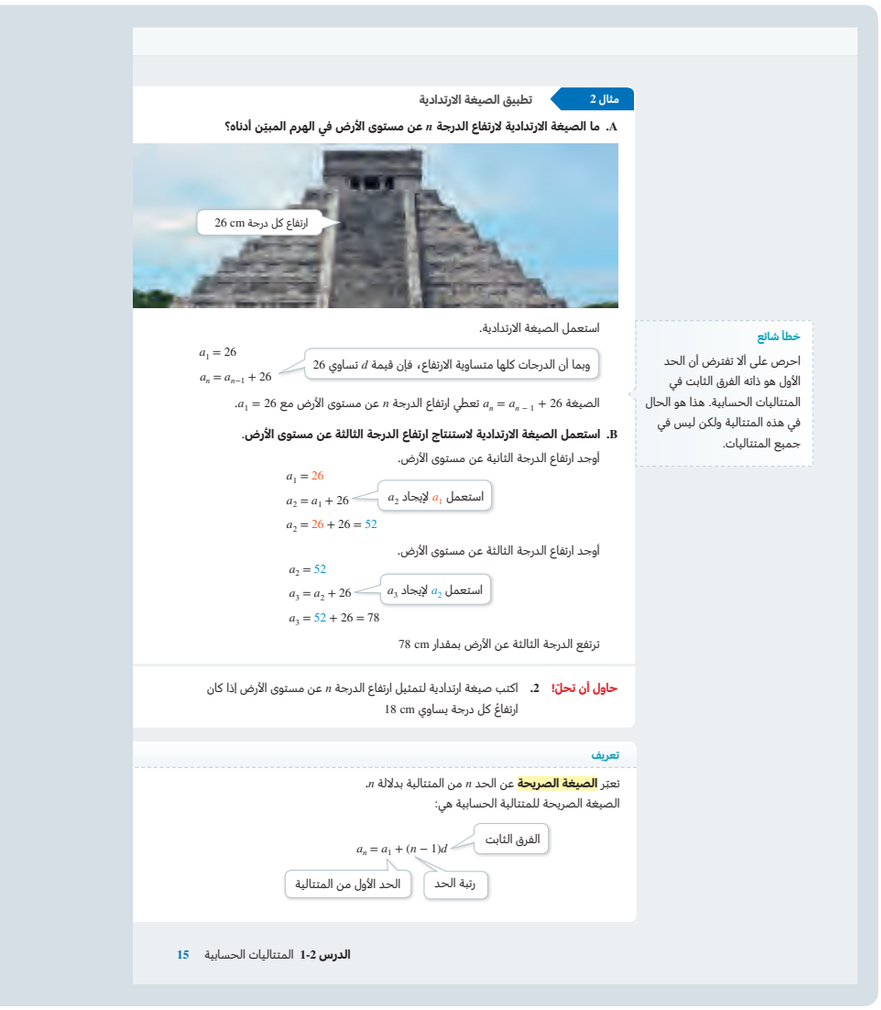
س: لماذا عليك معرفة قيمة a_1 لتتمكن من استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية؟ [تستعمل الصيغة الارتدادية قيمة الحد السابق لإيجاد الحد التالي. لذا تحتاج إلى معرفة الحد الأول للبدء بالخطوات المطلوبة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. $a_n = a_{n-1} + 18;\ a_1 = 18$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تحديد قيمة a_1 من المعلومات المعطاة؟ [تنص المسألة على أن ارتفاع كل درجة هو 18 cm، وبما أن الدرج يبدأ من الأرض فإن ارتفاع الدرجة الأولى هو 18 cm، إذن، $a_1 = 18$.]



مثال 2 تطبيق الصيغة الارتدادية

A. ما الصيغة الارتدادية لارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض في الهرم المبيّن أدناه؟

ارتفاع كل درجة 26 cm

استعمل الصيغة الارتدادية.

$a_1 = 26$

$a_n = a_{n-1} + 26$ — وبما أن الدرجات كلها متساوية الارتفاع، فإن قيمة d تساوي 26

الصيغة $a_n = a_{n-1} + 26$ تعطي ارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض مع $a_1 = 26$.

B. استعمل الصيغة الارتدادية لاستنتاج ارتفاع الدرجة الثالثة عن مستوى الأرض.

أوجد ارتفاع الدرجة الثانية عن مستوى الأرض.

$a_1 = 26$

$a_2 = a_1 + 26$ — استعمل a_1 لإيجاد a_2

$a_2 = 26 + 26 = 52$

أوجد ارتفاع الدرجة الثالثة عن مستوى الأرض.

$a_2 = 52$

$a_3 = a_2 + 26$ — استعمل a_2 لإيجاد a_3

$a_3 = 52 + 26 = 78$

ترتفع الدرجة الثالثة عن الأرض بمقدار 78 cm

خطأ شائع

احرص على ألا تفترض أن الحد الأول هو ذاته الفرق الثابت في المتتاليات الحسابية. هذا هو الحال في هذه المتتالية ولكن ليس في جميع المتتاليات.

حاول أن تحلّ! **2.** اكتب صيغة ارتدادية لتمثيل ارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض إذا كان ارتفاع كل درجة يساوي 18 cm

تعريف

تعبّر **الصيغة الصريحة** عن الحد n من المتتالية بدلالة n.

الصيغة الصريحة للمتتالية الحسابية هي:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

الفرق الثابت — رتبة الحد — الحد الأول من المتتالية

الدرس 1-2 المتتاليات الحسابية 15

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب إلى الطلاب استكشاف المزيد حول إيجاد أي قيمة في متتالية حسابية.

س: أوجد الحد الخامس للمتتالية المعرفة بالصيغة $a_1 = 4,\ a_n = a_{n-1} + 5$؟ [24]

س: أوجد الحد السادس للمتتالية المعرفة بالصيغة $a_1 = 17,\ a_n = a_{n-1} - 4$؟ [−3]

س: أوجد الحد الخامس للمتتالية المعرفة بالصيغة $a_1 = 23,\ a_n = a_{n-1} + 8$؟ [55]

www.jnob-jo.com

مثال 3 تطبيق الصيغة الصريحة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا يُعد استعمال الصيغة الصريحة في إنشاء متتالية حسابية أكثر إفادة من استعمال الصيغة الارتدادية؟ [عندما تحسب قيمة ما باستعمال الصيغة الارتدادية، يجب أن تحسب كل قيم المتتالية حتى تصل إلى القيمة المطلوب إيجادها. أما عند استعمال الصيغة الصريحة، يكفي حساب القيمة المطلوب إيجادها.]

س: كيف يمكنك استعمال الجدول لتبرير تكلفة استئجار الدراجة مدة 10 أيام؟ [قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكنك تمديد الجدول بحيث يصبح عدد أيام الاستئجار من 1 إلى 10، كرر إضافة 12 إلى تكلفة الاستئجار (الحد السابق) حتى يكتمل الجدول.]

س: لماذا القيمة الابتدائية في المتتالية والمقطع y في الدالة الخطية المكافئة ليسا متساويين؟ [تتناظر القيمة الابتدائية للمتتالية مع قيمة الدالة الخطية المكافئة عندما $x = 1$. المقطع y هو قيمة الدالة الخطية المكافئة عندما $x = 0$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. $a_n = 112 + 8n$; QR 176

خطأ شائع

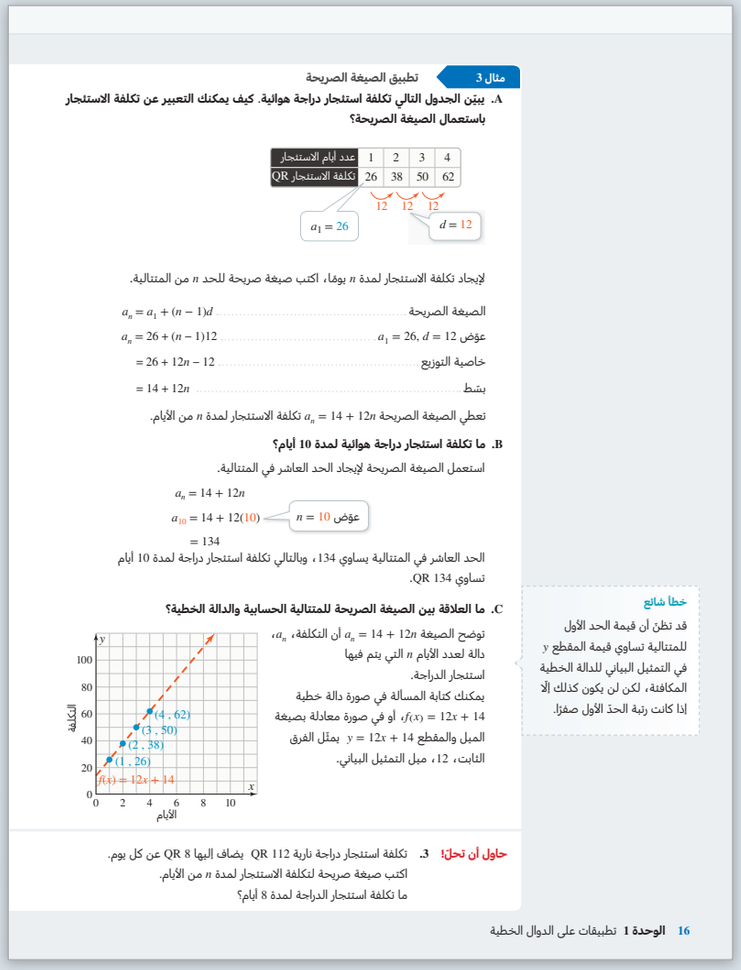
حاول أن تحل 3 قد يعيد بعض الطلاب كتابة الصيغة الصريحة بطريقة غير صحيحة، وذلك بإضافة 8 إلى كل من الفرق الثابت والحد الثابت. ركز على أن إضافة QR 8 في اليوم تزيد من قيمة d بمقدار 8، لكنها لا تزيد الحد الثابت في الصيغة الصريحة.

استعمل مع **الأمثلة 1 و 2 و 3**

عادات التفكير

برّر منطقيًا هل يمكن أن يكون الفرق الثابت لصيغة ارتدادية سالبًا؟ وضّح إجابتك.

[نعم؛ يكون الفرق الثابت سالبًا عندما تكون المتتالية متناقصة.]



مثال 3 تطبيق الصيغة الصريحة

A. يبيّن الجدول التالي تكلفة استئجار دراجة هوائية. كيف يمكنك التعبير عن تكلفة الاستئجار باستعمال الصيغة الصريحة؟

عدد أيام الاستئجار	1	2	3	4
تكلفة الاستئجار QR	26	38	50	62

12 12 12

$a_1 = 26$ $d = 12$

لإيجاد تكلفة الاستئجار لمدة n يومًا، اكتب صيغة صريحة للحد n من المتتالية.

الصيغة الصريحة ..... $a_n = a_1 + (n-1)d$

عوّض $a_1 = 26, d = 12$ ..... $a_n = 26 + (n-1)12$

خاصية التوزيع ..... $= 26 + 12n - 12$

بسّط ..... $= 14 + 12n$

تعطي الصيغة الصريحة $a_n = 14 + 12n$ تكلفة الاستئجار لمدة n من الأيام.

B. ما تكلفة استئجار دراجة هوائية لمدة 10 أيام؟

استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد الحد العاشر في المتتالية.

$a_n = 14 + 12n$

$a_{10} = 14 + 12(10)$ ← عوّض $n = 10$

$= 134$

الحد العاشر في المتتالية يساوي 134، وبالتالي تكلفة استئجار دراجة لمدة 10 أيام تساوي QR 134.

C. ما العلاقة بين الصيغة الصريحة للمتتالية الحسابية والدالة الخطية؟

توضح الصيغة $a_n = 14 + 12n$ أن التكلفة، a_n، دالة لعدد الأيام n التي يتم فيها استئجار الدراجة.

يمكنك كتابة المسألة في صورة دالة خطية $f(x) = 12x + 14$، أو في صورة معادلة بصيغة الميل والمقطع $y = 12x + 14$ يمثّل الفرق الثابت، 12، ميل التمثيل البياني.

خطأ شائع

قد تظن أن قيمة الحد الأول للمتتالية تساوي قيمة المقطع y في التمثيل البياني للدالة الخطية المكافئة، لكن لن يكون كذلك إلّا إذا كانت رتبة الحدّ الأول صفرًا.

حاول أن تحلّ! **3.** تكلفة استئجار دراجة نارية QR 112 يضاف إليها QR 8 عن كل يوم. اكتب صيغة صريحة لتكلفة الاستئجار لمدة n من الأيام. ما تكلفة استئجار الدراجة لمدة 8 أيام؟

16 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 3**

القراءة **مستوى 1** خلال قراءة المثال، اطلب من الطلاب التركيز على ترتيب الأعداد أو الحدود في المتتالية.

س: ما معنى كلمة "العاشر" المذكورة في الجزء B؟ [تدل على رتبة الحد 10 في المتتالية.]

س: ما معنى "الحد الخامس والستون"؟ [الحد الذي رتبته 65 في المتتالية.]

التحدث **مستوى 2** ساعد الطلاب في فهم مضمون المثال بالطلب منهم العمل ضمن مجموعات لتأليف إعلان تجاري لشركة تأجير الدراجات، باستعمال المعلومات المعطاة في الجدول، ثم عرض إعلاناتهم في الصف.

س: ما معنى استئجار شيء؟ [دفع رسوم؛ استعمال شيء يخص فرد آخر لمدة محددة من الزمن.]

س: ما العلاقة بين تكلفة استئجار دراجة وعدد أيام الاستئجار؟ [بعد اليوم الأول، تكلفة استئجار دراجة كل يوم إضافي هي QR 12.]

الكتابة **مستوى 3** راجع الملاحظة أعلاه تحت عنوان "خطأ شائع". اطلب إلى الطلاب النظر إلى التمثيل البياني والتركيز على القيمة الابتدائية والمقطع y. ثم اطلب منهم كتابة توضيح يبين سبب صحة ذلك.

س: هل من الممكن الحصول على متتالية ودالة خطية متناظرة معها، حيث يكون المقطع y والقيمة الابتدائية للمتتالية متساويين؟ [نعم]

س: هل للمقطع y معنى في الموقف المذكور في المسألة؟ [كلا؛ إذا استأجر شخص دراجة لمدة 0 يوم، لن يكون ملزمًا بدفع QR 14.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 كتابة الصيغة الصريحة بمعلومية الصيغة الارتدادية

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لإيجاد معلومات عن المتتالية تفيد في كتابة الصيغة الصريحة؟

[يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لحساب قيمة a_1 وتحديد الفرق الثابت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. **a.** $a_n = 13 - 3n$

b. $a_n = -3.4 + 2.4n$

مثال 5 كتابة الصيغة الارتدادية بمعلومية الصيغة الصريحة

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لإيجاد معلومات عن المتتالية تفيد في كتابة الصيغة الارتدادية؟ [يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لتمييز قيمة a_1 والفرق الثابت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. **a.** $a_n = a_{n-1} + 3,\ a_1 = 11$

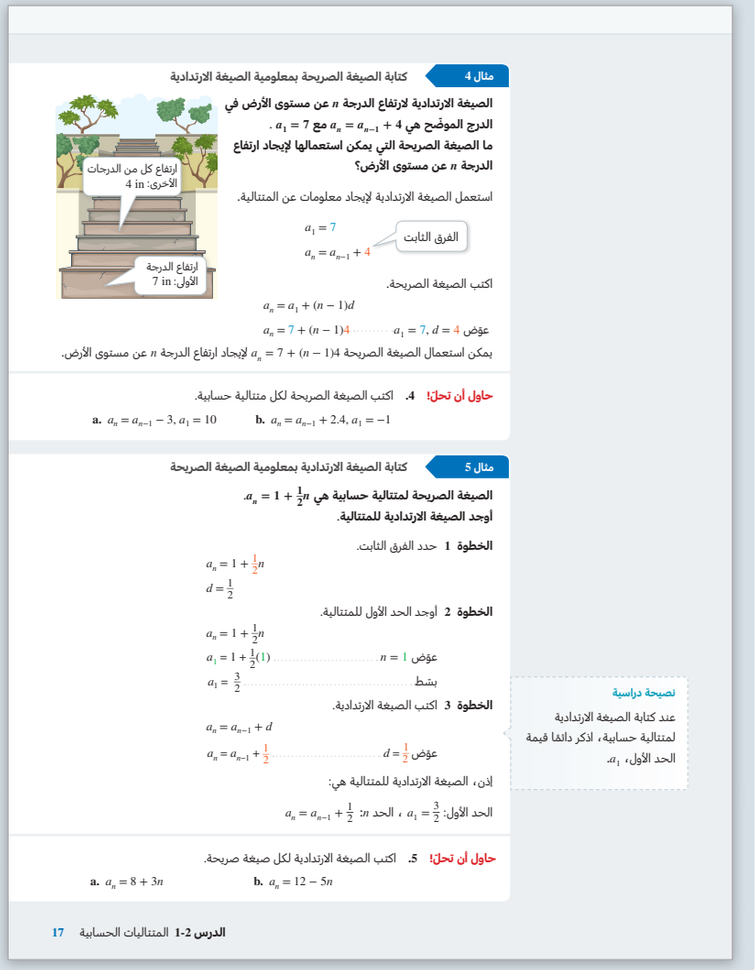
b. $a_n = a_{n-1} - 5,\ a_1 = 7$

استعمل مع **المثالين 4 و 5**

عادات التفكير

تواصل بدقة وضّح كيف يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لإيجاد قيمة أي حد في متتالية حسابية.

[إذا كنت تعرف الحد الأول في متتالية حسابية والفرق الثابت، يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لإيجاد قيمة أي حد في المتتالية. أوجد الحد الثاني في المتتالية بجمع الحد الأول والفرق الثابت. كرر هذه العملية مع الحد الثاني لإيجاد الحد الثالث، وهكذا إلى أن تصل إلى الحد الذي تريد إيجاد قيمته.]



مثال 4 كتابة الصيغة الصريحة بمعلومية الصيغة الارتدادية

الصيغة الارتدادية لارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض في الدرج الموضّح هي $a_n = a_{n-1} + 4$ مع $a_1 = 7$. ما الصيغة الصريحة التي يمكن استعمالها لإيجاد ارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض؟

استعمل الصيغة الارتدادية لإيجاد معلومات عن المتتالية.

$a_1 = 7$

$a_n = a_{n-1} + 4$ ← الفرق الثابت

اكتب الصيغة الصريحة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = 7 + (n-1)4$ ..... عوّض $a_1 = 7,\ d = 4$

يمكن استعمال الصيغة الصريحة $a_n = 7 + (n-1)4$ لإيجاد ارتفاع الدرجة n عن مستوى الأرض.

حاول أن تحلّ! **4.** اكتب الصيغة الصريحة لكل متتالية حسابية.

a. $a_n = a_{n-1} - 3,\ a_1 = 10$ **b.** $a_n = a_{n-1} + 2.4,\ a_1 = -1$

مثال 5 كتابة الصيغة الارتدادية بمعلومية الصيغة الصريحة

الصيغة الصريحة لمتتالية حسابية هي $a_n = 1 + \frac{1}{2}n$. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية.

الخطوة 1 حدد الفرق الثابت.

$a_n = 1 + \frac{1}{2}n$

$d = \frac{1}{2}$

الخطوة 2 أوجد الحد الأول للمتتالية.

$a_n = 1 + \frac{1}{2}n$

$a_1 = 1 + \frac{1}{2}(1)$ ..... عوّض $n = 1$

$a_1 = \frac{3}{2}$ ..... بسّط

الخطوة 3 اكتب الصيغة الارتدادية.

$a_n = a_{n-1} + d$

$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ ..... عوّض $d = \frac{1}{2}$

إذن، الصيغة الارتدادية للمتتالية هي:

الحد الأول: $a_1 = \frac{3}{2}$ ، الحد n: $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$

نصيحة دراسية

عند كتابة الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية، اذكر دائمًا قيمة الحد الأول، a_1.

حاول أن تحلّ! **5.** اكتب الصيغة الارتدادية لكل صيغة صريحة.

a. $a_n = 8 + 3n$ **b.** $a_n = 12 - 5n$

الدرس 1-2 المتتاليات الحسابية 17

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم المتتاليات الحسابية

س: ما الفرق بين الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية؟

[تسمح الصيغة الصريحة بحساب قيمة أي حد في المتتالية من المدخلة n مباشرة. في حين تسمح الصيغة الارتدادية بحساب قيمة أي حد في المتتالية عبر سلسلة من الحسابات الارتدادية التي تتضمن الحدود السابقة.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد يتحقق بعض الطلاب من أول زوج من الفروق فقط عندما يحاولون تحديد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم لا، ويستنتجون أنها حسابية. ذكرهم بضرورة التحقق من الفرق بين كل حدين متتاليين، وبضرورة أن يكون هذا الفرق ثابتًا.

الإجابات

1. المتتالية الحسابية هي نمط خطي. التمثيل البياني لمتتالية حسابية هي سلسلة من النقاط تقع على امتداد مستقيم يمكن وصفه باستعمال دالة خطية.

2. عند كتابة الصيغة، خلط الطالب بين قيمة a_1 وقيمة d.
الصيغة الصحيحة هي $a_n = 3 + 5(n - 1)$ أو $a_n = -2 + 5n$.

3. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: من المفيد استعمال الصيغة الارتدادية إذا كنت تريد وصف نمط المتتالية أو كنت تريد إيجاد الحد التالي في متتالية بمعلومية الحد السابق.

4. تحدّد الصيغة الارتدادية حدًّا في متتالية وعلاقته بالحد الذي يسبقه. تحدد الصيغة الصريحة حدًا وعلاقته برتبة الحد. كلتا الصيغتين تتضمن الفرق الثابت.

5. نعم

6. كلا

7. $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 81$

8. $a_n = a_{n-1} - 8$, $a_1 = 47$

9. $a_n = 5n$; QR 55

ملخص المفهوم المتتاليات الحسابية

لفظيًا

المتتالية الحسابية قائمة أعداد تتبع نمطًا معيّنًا. الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت ويسمى الفرق الثابت.

الصيغ

الصيغة الارتدادية

تُستعمل لوصف المتتالية وإيجاد بضع حدود تالية

$a_n = a_{n-1} + d$ (الفرق الثابت، الحد n للمتتالية، الحد السابق في المتتالية)

الصيغة الصريحة

تُستعمل لإيجاد حد معين في المتتالية

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ (الفرق الثابت، الحد n للمتتالية، الحد الأول من المتتالية)

الحد الأول من المتتالية هو a_1.

عدديًا

1, 7, 13, 19, 25, . . .

استعمل الصيغة الارتدادية لوصف المتتالية وإيجاد الحدين التاليين.

$a_n = a_{n-1} + 6$

a_1 1، a_2 7، a_3 13، a_4 19، a_5 25 (+6 بين كل حدين)

الفرق الثابت يساوي 6

$a_6 = a_5 + 6 = 25 + 6 = 31$

$a_7 = a_6 + 6 = 31 + 6 = 37$

الحدان التاليان هما 31 و 37

استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس عشر من المتتالية.

$a_n = 1 + (n - 1)6$

$a_{15} = 1 + (14)6$

$a_{15} = 85$

الحد الأول يساوي 1

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما العلاقة بين المتتاليات الحسابية والدوال الخطية؟

2. حلّل الخطأ يستخدم طالب الصيغة الصريحة $a_n = 5 + 3(n - 1)$ للمتتالية 3, 8, 13, 18, 23, . . . لإيجاد الحد الثاني عشر منها. اشرح الخطأ الذي وقع فيه الطالب.

3. المصطلحات ما الحالات التي يكون فيها استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية مفيدًا أكثر من استعمال صيغتها الصريحة؟

4. تواصل بدقّة حدّد أوجه الشبه والاختلاف بين الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة لمتتالية حسابية.

طبّق فهمك

حدّد ما إذا كانت كل متتالية متتالية حسابية أم لا.

5. 15, 13, 11, 9, . . .

6. 4, 7, 10, 14, . . .

اكتب الصيغة الارتدادية لكل متتالية.

7. 81, 85, 89, 93, 97, . . .

8. 47, 39, 31, 23, 15, . . .

9. يتقاضى متجر عبر الإنترنت مبلغ QR 5 لشحن علبة واحدة ومبلغ QR 10 لشحن علبتين. اكتب الصيغة الصريحة لمتتالية حسابية تمثّل المبلغ الذي يتقاضاه المتجر عبر الإنترنت لشحن n من العلب. استعمل الصيغة الصريحة لتحديد المبلغ الذي يتقاضاه المتجر عبر الإنترنت عند شحن 11 علبة.

18 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10–33, 37–39, 43–48	10–16, 20–26, 30–48

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	17–24, 47	1
	10–12	2
2	25–30, 46	1
	14, 16, 45	3
3	25–30, 46	1
	13, 15, 45	3
4	31-36	1
	43, 44, 48	3
5	37–42	1

الإجابات

10. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكن القول إن قيم الحدود تتناقص كلما تزايدت رتبة الحد.

11. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: مجال المتتاليات الحسابية هو الأعداد الطبيعية. مجال الدوال الخطية هو كل الأعداد الحقيقية.

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عند إيجاد الفرق الثابت، طرح الطالب الأعداد بترتيب غير صحيح. بدلًا من طرح الحد التالي من الحد السابق، طرح الطالب الحد السابق من الحد التالي:

$22 - 29 = -7$, $15 - 22 = -7$

$8 - 15 = -7$, $1 - 8 = -7$

إذن، الفرق الثابت هو -7

13. الصيغة الصريحة؛ يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة الحد بالاستناد إلى رتبة الحد. لاستعمال الصيغة الصريحة، تحتاج فقط إلى تعويض 500 عن n. إذا استعملت الصيغة الارتدادية لإيجاد قيمة الحد a_{500} بمعلومية a_1، عليك إضافة الفرق الثابت 499 مرة؛ نعم، إذا علمت قيمة الحد a_{499}، ما تحتاج إليه لإيجاد الحد a_{500} باستعمال الصيغة الارتدادية هو التعويض عن قيمة الحد a_{499}.

14. $a_n = a_{n-1} + 3, a_1 = 2.$

15. كلا؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: رتب الحدود أعداد صحيحة موجبة دائمًا. بما أن 2.5 ليس عددًا صحيحًا موجبًا، لا يمكن أن يكون رتبة لحد في متتالية حسابية، وبالتالي تعويض هذه القيمة في الصيغة الصريحة لا يعطي حدًّا في المتتالية.

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. فكّر وثابر في الحل ماذا يمكنك القول عن حدود المتتالية الحسابية عندما يكون الفرق الثابت سالبًا؟

11. روابط في الرياضيات قارن بين مجال متتالية حسابية ومجال دالة خطية. وضّح إجابتك.

12. حلّل الخطأ أوجد خطأ الطالب في تحديد الفرق الثابت للمتتالية التالية وصحّحه:

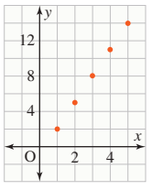
29, 22, 15, 8, 1, ...

الفرق الثابت للمتتالية هو 7، بما أنّ:
$29 - 22 = 7$, $22 - 15 = 7$, $15 - 8 = 7$, $8 - 1 = 7$

✗

13. برّر منطقيًا إذا عُلِمَ كل من الفرق الثابت والحد الأول من المتتالية الحسابية، أيّ الصيغتين - الارتدادية أم الصريحة - أكثر إفادةً في تحديد a_{500}؟ وضّح إجابتك. هل تتغير إجابتك في حال كنت تعلم قيمة الحد a_{499}؟ وضّح إجابتك.

14. برّر منطقيًا يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمتتالية الحسابية. اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية إذا ازدادت قيمة y لكل نقطة بمقدار 3



15. استعمل البنية هل ثمة معنى للصيغة الصريحة لمتتالية إذا كان $n = 2.5$؟ وضّح إجابتك.

16. مهارات التفكير العليا إذا كانت الصيغة الارتدادية التالية التي تصف متتالية فيبوناتشي.

$a_1 = 1, a_2 = 1$

$a_{(n+1)} = a_n + a_{(n-1)}$

a. أوجد أوّل 6 حدود في المتتالية.

b. هل متتالية فيبوناتشي متتالية حسابية؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب

حدّد ما إذا كانت كل متتالية متتالية حسابية أم لا. إذا كانت كذلك، فاذكر الفرق الثابت، d. انظر المثال 1

17. 1, 15, 29, 43, 57, . . .

18. 77, 64, 51, 38, 25, . . .

19. 1, −2, 3, −4, 5, . . .

20. 3, 6, 9, 12, 15, . . .

21. 3, 6, 9, 15, 18, . . .

22. 37, 34, 31, 29, 26, . . .

23. 93, 86, 79, 72, 65, . . .

24. 45, 54, 63, 72, 81, . . .

اكتب الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة لكل متتالية حسابية. انظر المثال 2 و 3

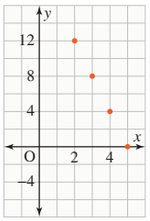
25. 12, 19, 26, 33, 40, . . .

26. −4, 5, 14, 23, 32, . . .

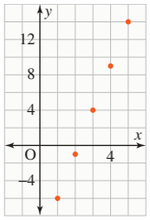
27. 62, 57, 52, 47, 42, . . .

28. −15, −6, 3, 12, 21, . . .

29.



30.



اكتب الصيغة الصريحة لكل صيغة ارتدادية. انظر المثال 4

31. $a_n = a_{n-1} + 15, a_1 = 8$

32. $a_n = a_{n-1} + 6, a_1 = 9$

33. $a_n = a_{n-1} - 2, a_1 = -1$

34. $a_n = a_{n-1} - 21, a_1 = 56$

35. $a_n = a_{n-1} + 1, a_1 = 12$

36. $a_n = a_{n-1} - 7, a_1 = -3$

اكتب الصيغة الارتدادية لكل صيغة صريحة وأوجد الحد الأول من المتتالية. انظر المثال 5

37. $a_n = 10 + 8n$

38. $a_n = 108 - n$

39. $a_n = -29 + 12n$

40. $a_n = 35 + 52n$

41. $a_n = \frac{7}{2} - 3n$

42. $a_n = 7 + \frac{1}{4}n$

16. a. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3$
$a_5 = 5, a_6 = 8$

b. كلا؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: الفرق بين الحدين الأول والثاني (0) لا يساوي الفرق بين الحدين الثاني والثالث (2)

17. نعم، 14

18. نعم، −13

19. كلا

20. نعم، 3

21. كلا

22. كلا

23. نعم، −7

24. نعم، 9

25. $a_n = 7n + 5, a_n = a_{n-1} + 7, a_1 = 12$

26. $a_n = 9n - 13, a_n = a_{n-1} + 9, a_1 = -4$

27. $a_n = -5n + 67, a_n = a_{n-1} - 5, a_1 = 62$

28. $a_n = 9n - 24, a_n = a_{n-1} + 9, a_1 = -15$

29. $a_n = -4n + 16, a_n = a_{n-1} - 4, a_1 = 12$

30. $a_n = 5n - 11, a_n = a_{n-1} + 5, a_1 = -6$

31. $a_n = -7 + 15n$

32. $a_n = 3 + 6n$

33. $a_n = 1 - 2n$

34. $a_n = 77 - 21n$

35. $a_n = 11 + n$

www.jnob-jo.com

الإجابات

36. $a_n = 4 - 7n$

37. $a_n = a_{n-1} + 8,\ a_1 = 18$

38. $a_n = a_{n-1} - 1,\ a_1 = 107$

39. $a_n = a_{n-1} + 12,\ a_1 = -17$

40. $a_n = a_{n-1} + 52,\ a_1 = 87$

41. $a_n = a_{n-1} - 3,\ a_1 = \frac{1}{2}$

42. $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4},\ a_1 = 7\frac{1}{4}$

43. $a_n = -6 + 7n$؛ المفتاح الأبيض الخمسون من اليسار.

44. $a_n = 500 - 3n$؛ 479 تذكرة.

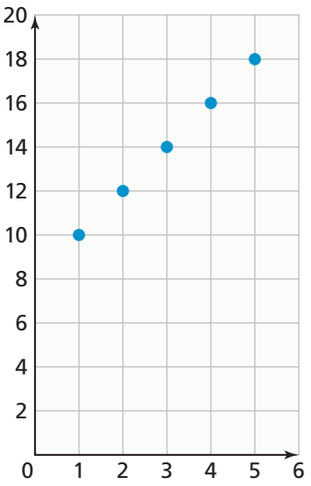
45. 5 500؛ تمّ إكمال المستوى؛
$a_n = 2\,250 + 3\,250n,\ a_n = a_{n-1} + 3\,250,$
$a_1 = 5\,500$

46. n; 5; 9

48. **الجزء A** $a_n = a_{n-1} + 2;\ a_1 = 10$

الجزء B $a_n = 8 + 2n$

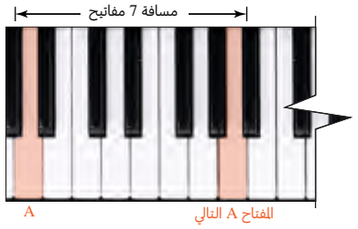
الجزء C



الجزء D $y = 2x + 8$؛ إحدى صيغتي المتتالية؛ قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: بما أن عدد الصفوف يجب أن يكون عددًا كليًّا، من الأفضل استعمال صيغة متتالية لتمثيل الموقف أفضل تمثيل. يتضمن النموذج الخطي عدة نقاط إضافية لا تمثل الصفوف.

طبّق

43. فكّر وثابر في الحل العلامة الموسيقية التي تمثل النغمة ذات الحدة الدنيا والتي يقع مفتاحها أقصى يسار لوحة مفاتيح البيانو هي العلامة A. يقع مفتاح العلامة A الأكبر حدة مباشرة بعد الحدة الدنيا بسبعة مفاتيح بيضاء إلى اليمين، وهكذا يمتد النمط على اللوحة كلها. اكتب الصيغة الصريحة لمتتالية حسابية تمثل موضع كل مفتاح A على البيانو، بالعد بدءًا من اليسار. إذا كان للبيانو 52 مفتاحًا أبيض، فما موضع المفتاح الذي ينتج التردد الأكبر للعلامة A؟



44. فكّر وثابر في الحل بعد الدقيقة الأولى من بيع تذاكر لحضور مباراة رياضية، بقيت 497 تذكرة. بعد الدقيقة الثانية، بقيت 494 تذكرة. بافتراض أن النمط بقي مستمرًّا، اكتب الصيغة الصريحة لمتتالية حسابية تمثل عدد التذاكر المتبقية بعد كل دقيقة.
كم عدد التذاكر المتبقية بعد الدقيقة السابعة؟

45. برّر منطقيًّا في لعبة فيديو، يجب أن تحرز 5 500 نقطة لإكمال المستوى 1 وللانتقال إلى كل مستوى إضافي، يجب أن تحرز 3 250 نقطة إضافية. ما قيمة a_1 من المتتالية الحسابية التي تمثل هذا الموقف؟ ما الذي تعبر عنه n؟
اكتب الصيغة الصريحة التي تمثل هذا الموقف.
اكتب الصيغة الارتدادية التي تمثل هذا الموقف.

تدرّب على اختبار

46. املأ الفراغات لإكمال الصيغة العامة التي تمثل المتتالية أدناه.
14, 23, 32, 41, 50, ...

a___ = _____ + _____ n

47. اختبار SAT/ACT أي المتتاليات متتالية حسابية؟

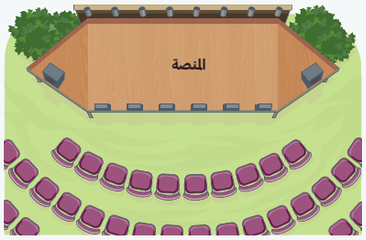
Ⓐ 1, 3, 5, 7, 11,...

Ⓑ 4, 6, 9, 13, 18, ...

Ⓒ 8, 15, 22, 29, 36, ...

Ⓓ 3, 6, 12, 24, 48, ...

48. مهمة أدائية تطلب اللجنة المنظّمة لحفلة في الهواء الطلق تجهيز 14 صفًّا من المقاعد. يزيد عدد المقاعد في كل صف عن عدد المقاعد في الصف الواقع أمامه بمقدار مقعدين.



الجزء A اكتب الصيغة الارتدادية التي تمثّل عدد المقاعد في الصف n.

الجزء B اكتب الصيغة الصريحة التي تمثّل عدد المقاعد في الصف n.

الجزء C مثّل المتتالية لأول 5 صفوف تمثيلًا بيانيًا.

الجزء D ما الدالة الخطية التي تمثّل المتتالية؟ ما الذي يمثّل الموقف أفضل تمثيل، الدالة الخطية أم واحدة من الصيغتين اللتين كتبتهما؟ وضّح إجابتك.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

مخططات الانتشار وخطوط التطابق

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ مطابقة دالة مع مجموعة بيانات خطية مبيّنة في مخطط انتشار واستعمال الدوال التي تمت مطابقتها.

✔ تفسير ميل خط الاتجاه في سياق البيانات.

الفهم الأساس

عندما تشير البيانات في مخطط انتشار إلى دالة خطية، يمكن لمستقيم أن يتطابق مع هذه البيانات ويمكن أيضًا كتابة دالة خطية لتمثيل هذه العلاقة.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- تفسير الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لدالة خطية.
- استعمال الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لكتابة الدالة التي يمثلها.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- مطابقة دالة مع بيانات ممثلة في مخططات الانتشار التي تشير إلى ترابط خطي وكتابة معادلة خط الاتجاه.
- تفسير خطوط الاتجاه في سياق مواقف من واقع الحياة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تحليل خطوط التطابق لتحديد النموذج الأفضل الذي يمثّل البيانات.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أنه عندما تشير البيانات في مخطط الانتشار إلى ترابط خطي، يمكن لدالة خطية أن تتطابق مع البيانات.
- يفسّر الطلاب خطوط الاتجاه في سياق مسائل من واقع الحياة، مثل: العلاقة بين زمن التنزيل وسرعة الإنترنت والمسافة بين الأشجار في الهكتار الواحد.

بناء المصطلحات

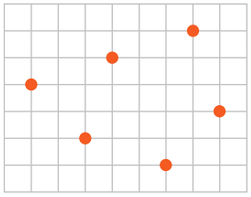
المصطلحات الجديدة

العربية | الإنجليزية

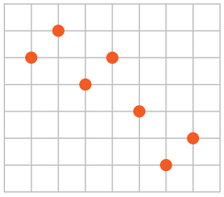
- **ترابط موجب** | *positive association*
- **ترابط سالب** | *negative association*
- **لا يوجد ترابط** | *no association*
- **خط الاتجاه** | *trend line*
- **ارتباط موجب** | *positive correlation*
- **ارتباط سالب** | *negative correlation*

نشاط المصطلحات

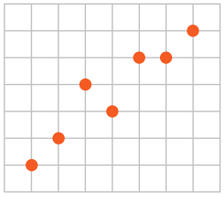
اطلب من عدة طلاب التوجه إلى مقدمة غرفة الصف. اطلب منهم الوقوف بطريقة تظهر أنهم يعرفون بعضهم بعضًا، ثم اطلب منهم الوقوف بطريقة تظهر أنهم لا يعرفون بعضهم بعضًا. أرِ الطلاب الصور الثلاث أدناه واجعلهم يحدّدون أيها تبيّن ترابط موجب وأيها تبيّن ترابط سالب وأيها تبيّن عدم وجود ترابط.



[لا يوجد ترابط]



[ترابط سالب]



[ترابط موجب]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

11F.5.1 يرسم مُخَطّط الإنتشار بين متغيرين ويتعرّف على الإرتباط الموجب والسالب؛ يرسم ويفسر ويكتب معادلة خط التطابق الأفضل ويفسر قيمة معامل الإرتباط.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يدرك الطلاب الكميات وعلاقاتها عندما يدركون معنى أن المقطع *y* لخط الاتجاه الممثّل لمبيعات السيارات سالب.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب مخطط انتشار لتحديد العلاقة بين مجموعتي بيانات. هذا الربط يهيئ الطلاب لفهم العلاقات والاتجاهات العامة بين مجموعتي البيانات.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما العلاقة بين الجدول والتمثيل البياني ؟

[كلاهما يوضحان قياسات شاشة التلفاز بالإنش وأسعارها.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ماذا تلاحظ بالنسبة للنقاط على التمثيل البياني ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تتوزّع النقاط بشكل تصاعدي من اليسار إلى اليمين.]

س: لماذا البيانات ممثّلة بمجموعة نقاط بدلًا من مستقيم ؟

[تُصنع التلفازات بقياسات محددة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: عدّد كل ما يمكنك من مواقف يكون فيها التمثيل البياني للبيانات مجموعة من النقاط بدلًا من مستقيم. وضّح لماذا لا يمكن تمثيل كل موقف بمستقيم.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عدد السيارات الكهربائية المبيعة خلال السنوات العشر الأخيرة.

عندما يكون المجال أو المدى مكوناً من أعداد كليّة فلا يمكننا تمثيل الموقف بمستقيم.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف يمكنك تخمين سعر تلفاز قياس شاشته معطى ؟

[حدّد قياس الشاشة على المحور الأفقي. حرّك إصبعك بشكل مستقيم إلى أعلى حتى يبلغ النقطة. ثم حرّك إصبعك بشكل مستقيم إلى اليسار حتى يصل إلى المحور *y*.

هناك، يمكن إيجاد تكلفة تلفاز قياس شاشته معطى.]

س: ماذا يمكنك أن تستنتج من هذا التمثيل البياني ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: كلما كان قياس شاشة التلفاز أكبر كان سعره أغلى.]

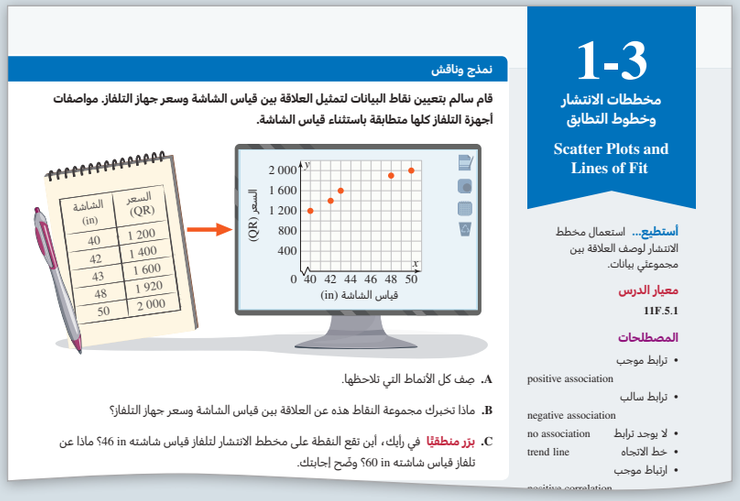
عادات التفكير

استعمل مع **نمذج وناقش**

استعمل الأدوات المناسبة كيف يمكن لجدول قيم أن يساعدك على تحديد ما إذا كانت هناك إمكانية لنمذجة بيانات بدالة خطية أم لا ؟

[إذا احتوت القيم على فرق ثابت أو كانت الفروق الثابتة متساوية، تكون الدالة خطية.]

كتاب الطالب، صفحة 21



1-3

مخططات الانتشار وخطوط التطابق

Scatter Plots and Lines of Fit

نمذج وناقش

قام سالم بتعيين نقاط البيانات لتمثيل العلاقة بين قياس الشاشة وسعر جهاز التلفاز. مواصفات أجهزة التلفاز كلها متطابقة باستثناء قياس الشاشة.

السعر (QR)	الشاشة (in)
1 200	40
1 400	42
1 600	43
1 920	48
2 000	50

السعر (QR)
2 000
1 600
1 200
800
400
0 40 42 44 46 48 50
قياس الشاشة (in)

A. صِف كل الأنماط التي تلاحظها.

B. ماذا تخبرك مجموعة النقاط هذه عن العلاقة بين قياس الشاشة وسعر جهاز التلفاز؟

C. **برّر منطقيًا** في رأيك، أين تقع النقطة على مخطط الانتشار لتلفاز قياس شاشته 46 in؟ ماذا عن تلفاز قياس شاشته 60 in؟ وضّح إجابتك.

استطيع... استعمال مخطط الانتشار لوصف العلاقة بين مجموعتي بيانات.

معيار الدرس
11F.5.1

المصطلحات
- ترابط موجب positive association
- ترابط سالب negative association
- لا يوجد ترابط no association
- خط الاتجاه trend line
- ارتباط موجب positive correlation

نموذج من أعمال الطلاب

A. تبدو النقاط كأنها تقع تقريبًا على مستقيم.

B. كلما ازداد قياس الشاشة، ازداد سعر الجهاز.

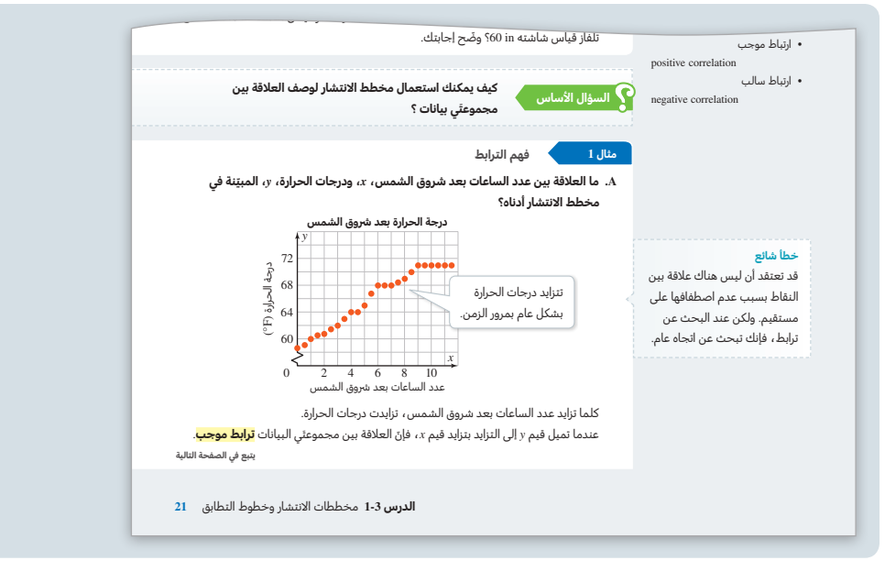
C. QR 1 800؛ QR 2 400؛ يمكنني تحديد قيمة تقريبية للمتغير *y* لأي قيمة للمتغير *x* بتقدير مواقع النقاط بناء على مواقع النقاط الأخرى في مخطط الانتشار.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب بمخططات الانتشار. ذكّرهم بأن كل محور يمثّل مجموعة بيانات. وضّح أن النقاط قد تشتمل على نمط يوضح علاقة بين مجموعتي البيانات.


تلفاز قياس شاشته in 60؟ وضّح إجابتك.

السؤال الأساس

كيف يمكنك استعمال مخطط الانتشار لوصف العلاقة بين مجموعتي بيانات ؟

مثال 1 فهم الترابط

٨. ما العلاقة بين عدد الساعات بعد شروق الشمس، x، ودرجات الحرارة، y، المبيّنة في مخطط الانتشار أدناه؟

درجة الحرارة بعد شروق الشمس

كلما تزايد عدد الساعات بعد شروق الشمس، تزايدت درجات الحرارة.

عندما تميل قيم y إلى التزايد بتزايد قيم x، فإن العلاقة بين مجموعتي البيانات **ترابط موجب**.

يتبع في الصفحة التالية

خطأ شائع

قد تعتقد أن ليس هناك علاقة بين النقاط بسبب عدم اصطفافها على مستقيم. ولكن عند البحث عن ترابط، فإنك تبحث عن اتجاه عام.

- ارتباط موجب positive correlation
- ارتباط سالب negative correlation

الدرس 3-1 مخططات الانتشار وخطوط التطابق 21

مثال 1 فهم الترابط

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

الجزء A

س: ماذا تلاحظ بالنسبة للعلاقة بين درجة الحرارة والزمن من خلال النظر إلى التمثيل البياني ؟

[تزداد درجة الحرارة بمرور الزمن.]

س: ما نوع الترابط المبيّن في مخطط الانتشار ؟

[ترابط موجب: يزداد عدد الساعات بعد شروق الشمس كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين، وكذلك الأمر بالنسبة لدرجة الحرارة.]

س: لماذا يبدأ الزمن من الصفر، بينما الأمر ليس كذلك بالنسبة لدرجة الحرارة ؟

[تم تمثيل الزمن الابتدائي عند الصفر، لكن درجة الحرارة كانت أكبر من الصفر في ذلك الوقت.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

الجزء B

س: بالنظر إلى التمثيل البياني، كيف تعرف أن درجة الجرارة تتناقص بمرور الزمن ؟

[التمثيل البياني من اليسار إلى اليمين، لذا تتحرك النقاط نزولًا.]

س: لماذا لا تقع النقاط على خط مستقيم ؟

[لم تتناقص درجة الحرارة بنفس المقدار كل ساعة.]

س: ما نوع الترابط المبيّن في مخطط الانتشار ؟

[ترابط سالب: تتناقص درجة الحرارة بتزايد عدد الساعات بعد غروب الشمس.]

الجزء C

س: ماذا تلاحظ بالنسبة للتمثيل البياني ؟

[ليس هناك اتجاه عام في البيانات، فالنقاط تبدو منتشرة عشوائيًا.]

س: لماذا ليس لهطول المطر أي علاقة بعدد الساعات بعد غروب الشمس ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: على الأرجح، تتفاوت كميات هطول المطر عندما تهب عاصفة وتتغير شدة الهطول.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

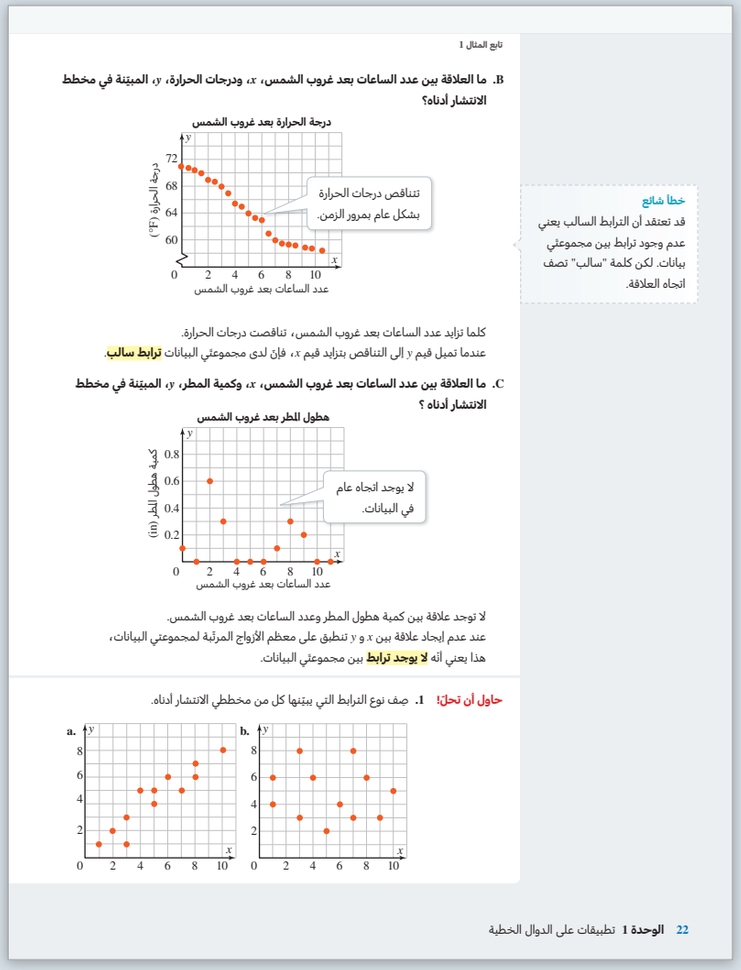
1. **a.** ترابط موجب
   b. لا يوجد ترابط

استعمل مع **المثال 1**

عادات التفكير

برّر منطقيًا ما هي خصائص مجموعتَي البيانات التي يمكنها مساعدتك في تحديد ما إذا كان الترابط بين مجموعتَي البيانات سالب أم موجب، أم لا يوجد ترابط بينهما ؟

[إذا كانت كلتا مجموعتَي البيانات متزايدتين أو متناقصتين، يكون الترابط بينهما موجب. أما إذا كانت إحدى المجموعتين متزايدة والأخرى متناقصة، فإن الترابط بينهما يكون سالبًا. في حال انعدام كلتا الحالتين، لا يكون هناك ترابط بين مجموعتي البيانات.]



تابع المثال 1

B. ما العلاقة بين عدد الساعات بعد غروب الشمس، x، ودرجات الحرارة، y، المبيّنة في مخطط الانتشار أدناه؟

درجة الحرارة بعد غروب الشمس

كلما تزايد عدد الساعات بعد غروب الشمس، تناقصت درجات الحرارة.
عندما تميل قيم y إلى التناقص بتزايد قيم x، فإن لدى مجموعتي البيانات **ترابط سالب**.

C. ما العلاقة بين عدد الساعات بعد غروب الشمس، x، وكمية المطر، y، المبيّنة في مخطط الانتشار أدناه ؟

هطول المطر بعد غروب الشمس

لا توجد علاقة بين كمية هطول المطر وعدد الساعات بعد غروب الشمس.
عند عدم إيجاد علاقة بين x و y تنطبق على معظم الأزواج المرتّبة لمجموعتي البيانات، هذا يعني أنه **لا يوجد ترابط** بين مجموعتي البيانات.

حاول أن تحلّ! 1. صِف نوع الترابط التي يبيّنها كل من مخططي الانتشار أدناه.

a. b.

خطأ شائع

قد تعتقد أن الترابط السالب يعني عدم وجود ترابط بين مجموعتي بيانات. لكن كلمة "سالب" تصف اتجاه العلاقة.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم المقصود بالترابط.

- اجعل الطلاب يرسمون مجموعات بيانات تُظهر كل ترابط مما يلي. يمكنهم تعيين النقاط على شبكة إحداثيات يدويًا أو باستعمال أدوات الأنشطة اليدوية.
  - ترابط موجب.
  - ترابط سالب.
  - لا يوجد ترابط.

س: ما وجه الاختلاف بين البيانات التي يكون بينها الترابط موجبًا والبيانات التي يكون بينها الترابط سالبًا ؟

[من اليسار إلى اليمين، تتجه نقاط البيانات إلى الأعلى في حالة الترابط الموجب وإلى الأسفل في حالة الترابط السالب.]

س: كيف تعرف أنه لا يوجد ترابط بين مجموعتي بيانات ؟

[من اليسار إلى اليمين، لا تتزايد نقاط البيانات ولا تتناقص بنمط ثابت.]

www.jnob-jo.com

مثال 2 فهم الارتباط

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: باستعمال التمثيل البياني، ما العلاقة بين البيانات على مخطط الانتشار والبيانات في النموذج ؟

[البيانات هي نقاط في مجموعة، بينما النموذج هو خط التطابق الأفضل مع البيانات والأقرب لها.]

س: لماذا يُستعمل خط الاتجاه ؟

[يُستعمل خط الاتجاه لنمذجة البيانات عندما تتبع نمطًا خطيًّا.]

س: ما وجه الاختلاف بين الارتباط والترابط ؟

[يبيّن خط الاتجاه الارتباط، بينما يصف ميل خط الاتجاه الترابط.]

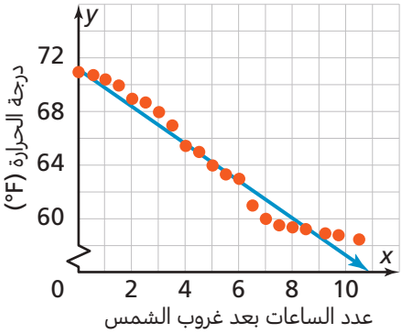
س: متى لا تكون الدالة الخطية نموذجًا جيدًا للبيانات ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عند عدم وجود ترابط بين البيانات لا يكون هناك نمط. النمذجة بواسطة مستقيم تشير ضمنًا إلى وجود نمط.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. يمكن نمذجة العلاقة برسم خط اتجاه يمثّل التطابق الأفضل مع البيانات.
يبيّن مخطط الانتشار علاقة خطية مع ارتباط سالب.

درجة الحرارة بعد غروب الشمس



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت دالة خطية هي النمذجة الأفضل لمجموعة معينة من نقاط البيانات ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان خط الاتجاه يمر بكافة نقاط البيانات تقريبًا، عندئذ تكون الدالة الخطية نمذجة جيدة.]

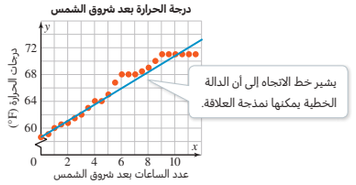
تطبيق

مثال 2 فهم الارتباط

كيف يمكن نمذجة العلاقة بين عدد الساعات بعد شروق الشمس، x، ودرجات الحرارة، y؟

تقترب نقاط البيانات في مخطط الانتشار من أن تكوّن خطًّا مستقيمًا.
ارسم **خط الاتجاه** الذي يمثّل خط التطابق الأفضل مع البيانات لتحديد الدالة الخطية التي يمكنها نمذجة العلاقة.

درجة الحرارة بعد شروق الشمس

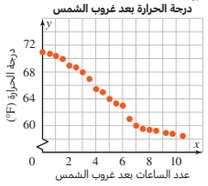


يشير مخطط الانتشار إلى علاقة خطية. إذن هناك **ارتباط موجب** بين عدد الساعات بعد شروق الشمس ودرجات الحرارة.
عند نمذجة بيانات بينها ترابط سالب بمستقيم، يكون هناك **ارتباط سالب**.
إن لم يكن هناك ترابط بين البيانات، فإنه لا يمكن نمذجتها بدالة خطية.

خطأ شائع
قد تعتقد أن الارتباط السالب يعني أن البيانات ليست مرتبطة فيما بينها بشكل جيد، في حين يشير الارتباط السالب إلى اتجاه الترابط فقط.

حاول أن تحلّ! **2.** كيف يمكن نمذجة العلاقة بين عدد الساعات بعد غروب الشمس، x، ودرجات الحرارة y ؟ إذا كان بالإمكان نمذجة هذه العلاقة بدالة خطية، حدد نوع الارتباط بين مجموعتي البيانات.

درجة الحرارة بعد غروب الشمس



الدرس 3-1 مخططات الانتشار وخطوط التطابق 23

www.jnob-jo.com

مثال 3 كتابة معادلة خط الاتجاه

طرح أسئلة هادفة

س: ما عدد نقاط البيانات المعطاة التي يجب أن يمر بها خط الاتجاه ؟

[بالرغم من أن خط الاتجاه قد يمر بنقطة أو أكثر من نقاط البيانات المعطاة، لكن ليس عليه أن يمر بأي منها.]

س: كيف تعرف أن خط الاتجاه الذي رسمته جيد ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: عندما يكون عدد النقاط التي فوقه مساويًا تقريبًا لعدد النقاط التي تحته.]

س: هل يمكن لمستقيم يمر بثلاث نقاط بين $x = 7$ و $x = 11$ مع وجود نقطتين تحته ونقطتين فوقه أن يكون خط اتجاه جيدًا ؟

[كلا، قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: كلما ازدادت عدد السنوات ازداد عدد السيارات الكهربائية المبيعة، مما يدل على ارتباط موجب. إذن، يجب أن يكون لخط الاتجاه ميل موجب.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $y = \frac{-4}{3}x + 71\frac{1}{3}$

b. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: الهدف من خط الاتجاه هو نمذجة البيانات، وهذا يعني أن خط الاتجاه قد يمر أو لا يمر بنقاط البيانات المعطاة.

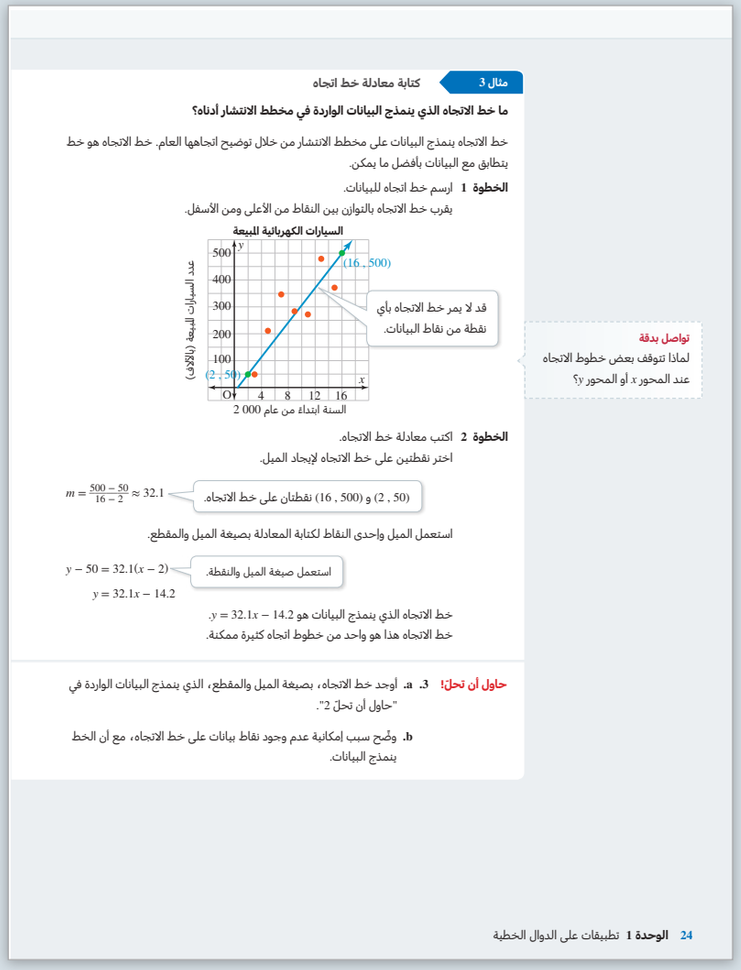
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ماذا عليك أن تفعل أولًا لتتمكن من إيجاد معادلة خط الاتجاه ؟

[ارسم خط اتجاه للبيانات المعطاة.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 قد لا يكتب بعض الطلاب معادلة خط التطابق الأفضل بشكل صحيح لاعتقادهم أنهم يجب أن يكتبوا معادلة خط التطابق باستعمال نقطتين من نقاط البيانات المعطاة. ذكّر الطلاب بأن الهدف من خط الاتجاه هو نمذجة البيانات، وهذا يعني أن خط الاتجاه قد يمر وقد لا يمر بنقاط البيانات المعطاة.



مثال 3 كتابة معادلة خط اتجاه

ما خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات الواردة في مخطط الانتشار أدناه؟

خط الاتجاه ينمذج البيانات على مخطط الانتشار من خلال توضيح اتجاهها العام. خط الاتجاه هو خط يتطابق مع البيانات بأفضل ما يمكن.

الخطوة 1 ارسم خط اتجاه للبيانات.

يقرب خط الاتجاه بالتوازن بين النقاط من الأعلى ومن الأسفل.

السيارات الكهربائية المبيعة

عدد السيارات المبيعة (بالآلاف)

السنة ابتداء من عام 2 000

(16 , 500)

(2 , 50)

قد لا يمر خط الاتجاه بأي نقطة من نقاط البيانات.

تواصل بدقة

لماذا تتوقف بعض خطوط الاتجاه عند المحور x أو المحور y؟

الخطوة 2 اكتب معادلة خط الاتجاه.

اختر نقطتين على خط الاتجاه لإيجاد الميل.

$m = \frac{500 - 50}{16 - 2} \approx 32.1$ — (2 , 50) و (16 , 500) نقطتان على خط الاتجاه.

استعمل الميل واحدى النقاط لكتابة المعادلة بصيغة الميل والمقطع.

$y - 50 = 32.1(x - 2)$ — استعمل صيغة الميل والنقطة.

$y = 32.1x - 14.2$

خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات هو $y = 32.1x - 14.2$.

خط الاتجاه هذا هو واحد من خطوط اتجاه كثيرة ممكنة.

حاول أن تحل! **3. a.** أوجد خط الاتجاه، بصيغة الميل والمقطع، الذي ينمذج البيانات الواردة في "حاول أن تحل 2".

b. وضّح سبب إمكانية عدم وجود نقاط بيانات على خط الاتجاه، مع أن الخط ينمذج البيانات.

24 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اجعل الطلاب يستكشفون كتابة معادلة خط الاتجاه للبيانات الواردة في الجدول. توضّح البيانات عدد اللوحات التي يعرضها معرض فني كل أسبوع بعد الافتتاح.

عدد الأسابيع بعد الافتتاح	1	2	3	4	5
عدد اللوحات	2	5	7	10	12

س: ما هي معادلة خط الاتجاه ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $y = 2.5x - 0.3$]

س: هل يمكن أن تكون معادلة ما نموذجًا جيدًا إذا تضمنت مقطع y سالبًا ؟

[نعم؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: معادلة خط الاتجاه هي مجرد نموذج للبيانات ولا تعطي قيمًا فعلية. قد يكون المقطع y سالبًا ويبقى قريبًا من المقطع y الحقيقي الذي يكون له معنى في هذه الحالة، أي يساوي الصفر.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 تفسير خطوط الاتجاه

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا يعني ميل خط الاتجاه ؟

[يمثّل الميل تغير زمن التنزيل عندما تزداد سرعة التنزيل. لكل زيادة مقدارها 1 KB/s، هناك تناقص في زمن التنزيل مقداره 0.13 min]

س: ماذا يعني المقطع y لخط الاتجاه؟ هل للمقطع y معنى في هذا السياق ؟

[إنه يمثّل الزمن اللازم لتنزيل ملف عندما تكون سرعة الإنترنت 0 KB/s، لذا ليس للمقطع y أي معنى، إذ لا يمكن تنزيل أي ملف عندما تكون سرعة الإنترنت 0]

س: كيف يمكنك استعمال معادلة خط الاتجاه لوضع توقعات ؟

[عوّض سرعة الإنترنت في المعادلة وحُل لإيجاد الزمن اللازم للتنزيل. أو عوّض الزمن اللازم للتنزيل في المعادلة وحُل لإيجاد سرعة الإنترنت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. المقطع x يساوي 86.154 تقريبًا. هذا ليس ممكنًا في الواقع لأن ذلك يعني أن تنزيل ملف حجمه 100 MB يتم آنيًا، في حين أن تنزيل أي ملف يحتاج على الأقل إلى جزء من الثانية.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا يمكن لخط اتجاه أن يمثّل شيئًا ليس ممكنًا في الواقع ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تمتد المستقيمات في الاتجاهين إلى ما لانهاية، بينما خط الاتجاه قد يمثّل موقفًا من واقع الحياة على جزء من المجال.]

عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 2 و 3 و 4**

ابنِ الحجج الرياضية ما الحجة التي يمكنك أن تبنيها للدفاع عن توقع مبني على خط اتجاه؟

[خط الاتجاه يتتبع الاتجاه العام للبيانات، لذا يمكن لتوقع مبني على خط الاتجاه أن يعطيك تقديرًا تقريبيًّا.]

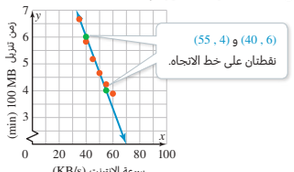
تطبيق

مثال 4 تفسير خطوط الاتجاه

يبيّن الجدول أدناه الزمن اللازم لتنزيل 100 MB بسرعات إنترنت مختلفة. على افتراض أن الاتجاه العام يستمر، أوجد الزمن الذي يستغرقه تنزيل ملف حجمه 100 MB إذا كانت سرعة الإنترنت 75 KB/s

سرعة الإنترنت (KB/s)	35	40	45	50	55	60
زمن تنزيل 100 MB (min)	6.65	5.82	5.17	4.65	4.23	3.88

الخطوة 1 أنشئ مخطط انتشار للبيانات وارسم خط اتجاه.



الخطوة 2 أوجد معادلة خط الاتجاه.

اختر نقطتين على خط الاتجاه لإيجاد الميل: (4, 55) و (6, 40).

$$m = \frac{6-4}{40-55} = \frac{2}{-15} \approx -0.13$$

استعمل الميل وإحدى النقاط لكتابة معادلة خط الاتجاه.

$$y - 6 = -0.13(x - 40)$$

الدالة بصيغة الميل والمقطع.

$$y = -0.13x + 11.2$$

إذن، معادلة خط الاتجاه هي $y = -0.13x + 11.2$.

الخطوة 3 استعمل معادلة النموذج الخطي لإيجاد قيمة y عندما $x = 75$.

عوّض $x = 75$

$$y = -0.13x + 11.2$$
$$= -0.13(75) + 11.2$$
$$= 1.45$$

إذن، الزمن المُقدّر للتنزيل هو 1.45 ثانية.

بزر منطقيًا
عندما يتضمن شكل الانتشار انقطاعًا في المحور y، هل يمكنك تفسير خط الاتجاه عبر المدى بأكمله بالنظر إلى تمثيله البياني؟

حاول أن تحل! **4.** ما المقطع x لخط الاتجاه؟ هل هذا ممكن في موقف من الحياة اليومية؟ وضّح إجابتك.

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الكتابة **مستوى 2** اطلب من الطلاب قراءة البيانات الواردة في الجدول، والإشارة إلى الوحدات عند قراءتها. اطلب منهم الانتباه جيدًا إلى الوحدات المستعملة لقياس سرعة الإنترنت وإلى عدد الوحدات المنزّلة في الدقيقة.

س: ما هو الكيلوبايت ؟

[1024 بايت، تقريبًا 1000 بايت.]

س: ما هو الميجابايت؟

[1 048 576 بايت، تقريبًا مليون بايت.]

س: هل هو أمر مهم أن نفهم الوحدات التي تقاس بها المتغيرات عند محاولة حل مسألة ؟ وضح إجابتك.

[نعم؛ إذ يجب أن تكون المتغيرات قابلة للتحويل إلى نفس الوحدات لكي يكون للإجابة معنى.]

التحدث **مستوى 3** "الاتجاه" هو الميل العام أو النزعة السائدة، أو الأمر الشائع في الوقت الراهن. من الاتجاهات السائدة حاليًا أن الهواتف الذكية تصبح أكبر حجمًا، وأن الناس يعمّرون أكثر من ذي قبل، وأن الشبان يميلون إلى تغيير ألوان شعرهم.

س: اكتب في دفترك وصفًا لاتجاه سائد لاحظته في مدرستك أو حيك.

[راجع عمل الطلاب.]

س: استعمل الاتجاه لوضع توقع عن شيء قد يحدث خلال السنوات القليلة القادمة.

[راجع عمل الطلاب.]

س: هل الاتجاه الذي وصفته قابل للنمذجة عدديًا و/أو بمعادلة ؟

[راجع عمل الطلاب.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم مخططات الانتشار وخطوط التطابق

س: كيف يمكنك تحديد نوع الترابط بين مجموعتَي بيانات ؟

[انظر إلى الجدول الذي يمثل المعادلة أو إلى تمثيلها البياني أو إلى ميل المستقيم الذي يعبّر عنها لتحديد نوع الترابط. عندما تتزايد قيم y بتزايد قيم x، يكون الترابط بين مجموعتي البيانات موجب. وعندما تتناقص قيم y بتزايد قيم x، يكون الترابط بينهما سالب.]

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 7 قد يعتقد بعض الطلاب أن البيانات لا تظهر ترابط سالب لأن قيمة y هي نفسها عندما $x = 9$ و $x = 10$، ذكّر الطلاب بأن عليهم، عند النظر إلى ترابط، أن يلاحظوا الاتجاه العام للبيانات. إذا ازدادت قيمة أحد المتغيرين بتناقص قيمة المتغير الآخر يكون الترابط بين مجموعتي البيانات سالب.

الإجابات

1. يساعد مخطط الانتشار على توضيح العلاقة بين مجموعتَي بيانات.
2. قد تظهر البيانات ترابطًا سالبًا، لكنها قد تظهر أيضًا عدم وجود ترابط.
3. قيم y تتزايد.
4. كلا، خط الاتجاه يبيّن فقط الاتجاه العام للبيانات. خط الاتجاه الجيد هو الخط الذي عدد نقاط البيانات التي فوقه يساوي تقريبًا عدد نقاط البيانات التي تحته.
5. اختر نقطتين على خط الاتجاه. استعمل هاتين النقطتين لإيجاد ميل خط الاتجاه. ثم استعمل صيغة الميل ونقطة مع إحدى النقطتين على خط الاتجاه لايجاد معادلة خط الاتجاه.
6. ترابط موجب
7. ترابط سالب
8. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $y = 5x + 47$، يمثل الميل الزيادة في الدرجات لكل زيادة مقدارها ساعة دراسة واحدة.

ملخص المفهوم مخططات الانتشار وخطوط الاتجاه

لفظيًا

عندما تميل قيم المتغير y إلى التزايد بتزايد قيم المتغير x، فإن الترابط بين مجموعتي البيانات هو ترابط موجب.

عندما تميل قيم المتغير y إلى التناقص بتزايد قيم المتغير x، فإن الترابط بين مجموعتي البيانات هو ترابط سالب.

بجدول

ترابط موجب

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	3	3	4	6	7	7

ترابط سالب

x	1	2	2	4	5	6	6
y	7	7	5	4	3	3	1

بيانيًا

ترابط موجب

ترابط سالب

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك استعمال مخطط الانتشار لوصف العلاقة بين مجموعتي بيانات؟
2. حلّل الخطأ يقول خالد: إن لم تتزايد قيم y بتزايد قيم x، إذن يجب أن توضح البيانات ترابطًا سالبًا. وضّح خطأ خالد.
3. المصطلحات في مخطط انتشار يوضّح ترابطًا موجبًا، وضّح كيف تتغير قيم y بتزايد قيم x.
4. فكّر وتأمّل في الحل هل يجب أن يمر خط الاتجاه بجميع النقاط في مخطط الانتشار؟ وضّح إجابتك.
5. تواصل بدقة وضّح كيف تكون صيغة الميل ونقطة مفيدة عند كتابة معادلة خط الاتجاه؟

طبّق فهمك

في التمرينين 6 و 7، صِف نوع الترابط بين x و y في كل مجموعة بيانات. وضّح إجابتك.

6.

7.

x	4	6	7	9	10
y	9	7	5	3	3

8. يبيّن الجدول أدناه العلاقة بين عدد الساعات التي يقضيها الطالب في الدراسة، x، والدرجة التي يحصل عليها في الاختبار y. ما معادلة خط الاتجاه التي تنمذج البيانات؟ ماذا يمثل ميل هذا الخط؟

ساعات الدراسة	6	7	7	8	9
درجات الاختبار	77	80	83	87	92

26 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9–18, 21–28	9–15, 18–28

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 16, 26	1
	12	2
	13, 23	3
2	17–19	1
	11	2
3	20–22	1
	9, 27	2
4	10	2
	14, 24, 25	3
	28	4

الإجابات

9. لا، يجب أن تختار نقطتين تقعان على خط الاتجاه. قد تكون هاتان النقطتان أو قد لا تكون من نقاط البيانات المعطاة.

10. الميل موجب؛ الميل سالب.

11. تتناقص قيم x، بالرغم من تزايد قيم y. إذن، للبيانات ارتباط سالب.

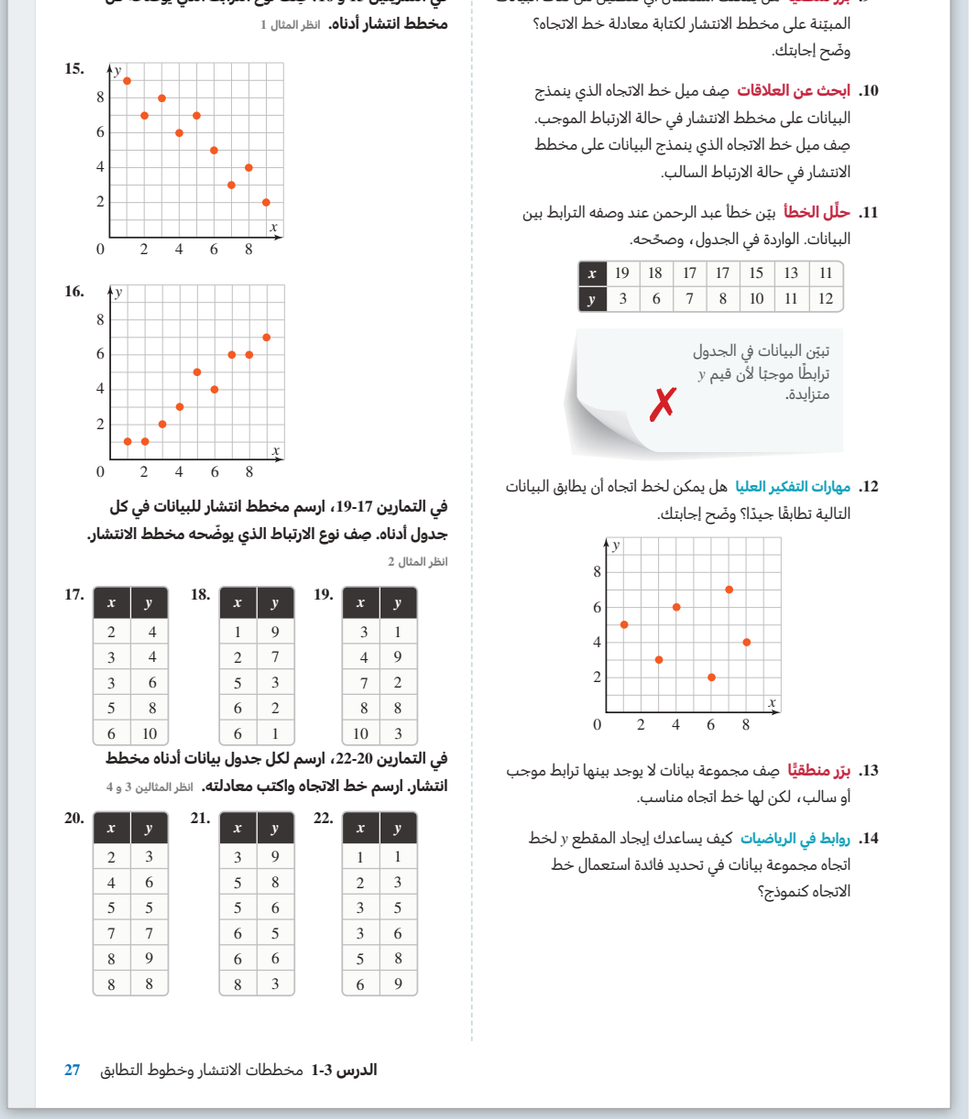
12. كلا، تُظهر البيانات عدم وجود ترابط. يجب أن يوضّح خط الاتجاه اتجاهًا عامًّا للبيانات في مخطط الانتشار. إذا أظهرت البيانات عدم وجود ترابط، لا يكون هناك اتجاه عام للبيانات، وبالتالي خط الاتجاه ليس خيارًا جيدًا لنمذجة البيانات.

13. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: مجموعة بيانات حيث كلما تزايدت قيم x، تبقى قيم y ثابتة. عندما لا تُظهر البيانات ترابط موجب ولا ترابط سالب، يكون خط الاتجاه الثابت خيارًا مناسبًا.

14. يشير المقطع y إلى قيمة y عندما $x = 0$، أو القيمة الابتدائية. تفسير هذه القيمة في السياق قد يساعدك في معرفة ما إذا كان النموذج الخطي ذا معنى أم لا.

15. ترابط سالب.

16. ترابط موجب



تدرَّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

9. برّر منطقيًّا هل يمكنك استعمال أي نقطتين من نقاط البيانات المبيّنة على مخطط الانتشار لكتابة معادلة خط الاتجاه؟ وضّح إجابتك.

10. ابحث عن العلاقات صِف ميل خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات على مخطط الانتشار في حالة الارتباط الموجب. صِف ميل خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات على مخطط الانتشار في حالة الارتباط السالب.

11. حلّل الخطأ بيّن خطأ عبد الرحمن عند وصفه الترابط بين البيانات. الواردة في الجدول، وصحّحه.

x	19	18	17	17	15	13	11
y	3	6	7	8	10	11	12

تبيّن البيانات في الجدول ترابطًا موجبًا لأن قيم y متزايدة. ✗

12. مهارات التفكير العليا هل يمكن لخط اتجاه أن يطابق البيانات التالية تطابقًا جيدًا؟ وضّح إجابتك.

13. برّر منطقيًّا صِف مجموعة بيانات لا يوجد بينها ترابط موجب أو سالب، لكن لها خط اتجاه مناسب.

14. روابط في الرياضيات كيف يساعدك إيجاد المقطع y لخط اتجاه مجموعة بيانات في تحديد فائدة استعمال خط الاتجاه كنموذج؟

تدرَّب

في التمرينين 15 و 16، صِف نوع الترابط الذي يوضّحه كل مخطط انتشار أدناه. انظر المثال 1

15.

16.

في التمارين 17-19، ارسم مخطط انتشار للبيانات في كل جدول أدناه. صِف نوع الارتباط الذي يوضّحه مخطط الانتشار. انظر المثال 2

17.

x	y
2	4
3	4
3	6
5	8
6	10

18.

x	y
1	9
2	7
5	3
6	2
6	1

19.

x	y
3	1
4	9
7	2
8	8
10	3

في التمارين 20-22، ارسم لكل جدول بيانات أدناه مخطط انتشار. ارسم خط الاتجاه واكتب معادلته. انظر المثالين 3 و 4

20.

x	y
2	3
4	6
5	5
7	7
8	9
8	8

21.

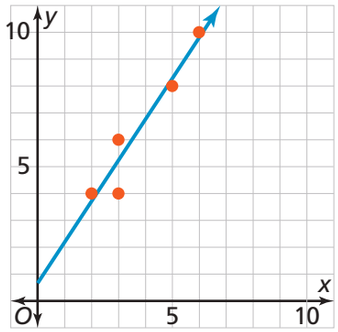
x	y
3	9
5	8
5	6
6	5
6	6
8	3

22.

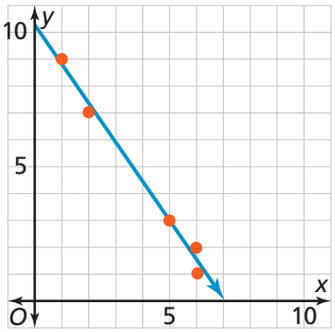
x	y
1	1
2	3
3	5
3	6
5	8
6	9

الدرس 1-3 مخططات الانتشار وخطوط التطابق 27

17. ارتباط موجب.

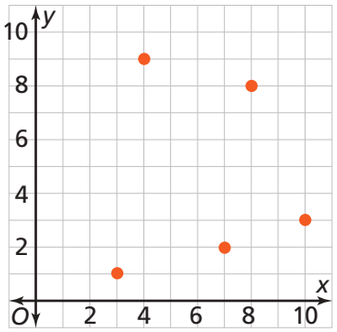


18. ارتباط سالب.

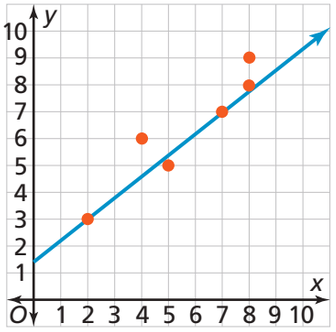


www.jnob-jo.com

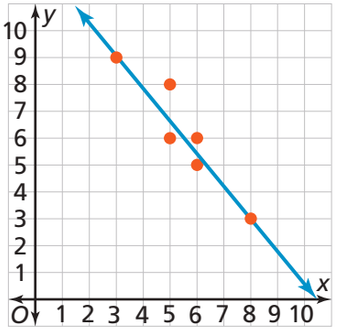
19. لا يوجد ارتباط لأنه لا يوجد ترابط، لذا لا يمكن نمذجة البيانات بدالة خطية.



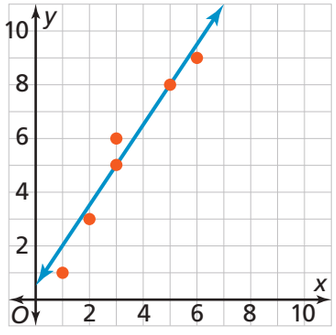
20. $y = 0.8x + 1.4$؛
يمر خط الاتجاه بالنقاط (3 , 2) و (7 , 7)



21. $y = -1.2x + 12.6$؛
يمر خط الاتجاه بالنقاط (9 , 3) و (8 , 3)



22. $y = 1.5x + 0.5$؛
يمر خط الاتجاه بالنقاط (5 , 3) و (8 , 5)



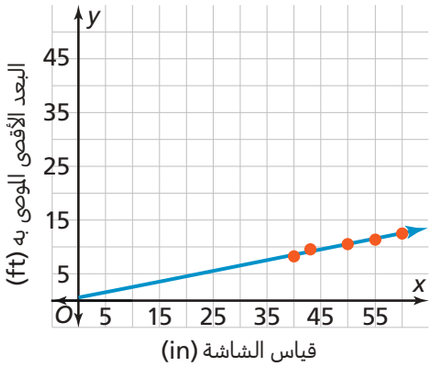
www.jnob-jo.com

الإجابات

23. موجب؛ لأن ارتفاع النبتة يتزايد مع الأيام إذ إن الإنبات يتزايد، لذا قد تُظهر البيانات ترابط موجب.

24. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $y = -7x + 1\ 120$؛ يمثّل الميل تغير عدد الأشجار المزروعة لكل فدان مع ازدياد كثافة التشجير. يمثّل المقطع y عدد الأشجار التي قد تُزرع في كل فدان في حال عدم ترك مساحة خالية حول الأشجار.

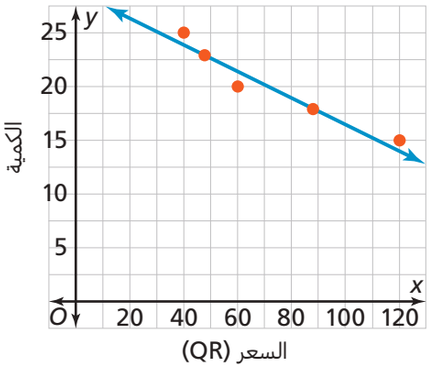
25. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $y = 0.2x + 0.5$؛ يمثّل ميل خط الاتجاه الزيادة بالقدم للبعد الأقصى الموصى به أثناء مشاهدة التلفاز عند زيادة مقدارها 1 in لقياس الشاشة.



26. تتناقص؛ تتزايد

27. B

28. الجزء A



الجزء B قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $y = -0.125x + 29$؛ يمثّل ميل خط الاتجاه التغيير في عدد الطائرات الورقية لكل زيادة في السعر مقدارها QR 1.

الجزء C نعم. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: قد يفضّل الناس تصميمًا معيّنًا لطائرة ورقية، وبالتالي يمكن أن يكون مبيع هذه الطائرة الورقية أكثر من مبيع طائرة أقل سعرًا منها. نعم، يمكن رسم مخططات انتشار ذات عدة متغيرات، منها عدد الطائرات الورقية المبيعة لتصميم معيّن مقابل السعر.

طبّق

23. فكّر وناقش في الحل يراقب أحمد نمو بعض النباتات. ما نوع الترابط الذي توضّحه البيانات في رأيك؟ وضّح إجابتك.

عدد الأيام المنقضية على عملية الإنبات

24. نمذج عند زرع الأشجار بهدف إعادة التشجير تنتج كثافات مختلفة (أي أعداد مختلفة من الأشجار لكل فدّان من الأرض). يبيّن الجدول أدناه المساحة (بالأقدام المربعة) التي يُنصح بتركها خالية حول كل شجرة والكثافة (عدد الأشجار لكل فدّان) المقابلة لكل مساحة.

ما خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات المبيّنة في الجدول أدناه؟ ماذا يمثّل كل من الميل والمقطع y لخط الاتجاه؟

عدد الأشجار لكل فدان (y)	المساحة x, (ft^2)
726	60
680	64
622	70
605	72
544	80
530	81
519	84
484	90
454	96
435	100

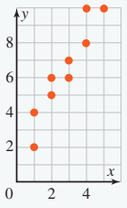
25. فكّر وناقش في الحل يبيّن الجدول أدناه البعد الأقصى الموصى به y، بالقدم، أثناء مشاهدة تلفاز فائق الجودة قياس شاشته x، بالإنش. ما خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات المبيّنة في الجدول ؟ ماذا يمثل ميل خط الاتجاه؟

x	40	43	50	55	60
y	8.3	9	10.4	11.5	12.5

تدرَّب على اختبار

26. عندما يكون هناك ترابط سالب بين مجموعتي بيانات، تميل قيم y إلى أن _____ عندما _____ قيم x.

27. اختبار SAT/ACT أي من المعادلات أدناه قد تمثّل خط اتجاه للبيانات المبيّنة على مخطط الانتشار؟



Ⓐ $y = -2x + 1$ Ⓑ $y = 2x + 1$

Ⓒ $y = -2x - 1$ Ⓓ $y = 2x - 1$

28. مهمة أدائية يسجل متجر أسعار الطائرات الورقية، x، بالريال القطري وعدد الطائرات الورقية، y، المبيعة بكل سعر.

أنواع الطائرات الورقية	السعر	الكمية
	QR 40	25
	QR 48	23
	QR 60	20
	QR 88	18
	QR 120	15

الجزء A أنشئ مخطط انتشار للبيانات.

الجزء B ما خط الاتجاه الذي ينمذج البيانات؟ ماذا يمثّل ميل خط الاتجاه؟

الجزء C ما العوامل الأخرى، عدا السعر، التي قد تؤثر في عدد الطائرات الورقية المبيعة؟ هل يمكنك استعمال أي من هذه العوامل لإنشاء مخطط انتشار آخر؟ وضّح إجابتك.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

تحليل خطوط التطابق

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✔ حساب وتفسير قيمة معامل الارتباط لبيانات خطية.
- ✔ تعيين وتحليل القيم المتبقية لتقييم دقّة التطابق لدالة.
- ✔ التمييز بين الارتباط والسببية.

الفهم الأساس

عندما يطابق خط مجموعة بيانات، كلما كانت نقاط البيانات قريبة من الخط، كان الارتباط أقوى. يمكن أن يُستعمل مخطط القيم المتبقية لتحديد خط التطابق الأفضل، الذي هو خط الاتجاه الأكثر تمثيلًا للبيانات.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- مطابقة دالة لبيانات ممثّلة في مخطط انتشار يظهر ارتباطًا خطيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- يستعمل الطلاب القيم المتبقية لإيجاد خط التطابق الأفضل.
- يحدّد ويفسّر الطلاب درجة الارتباط بين بيانات ممثّلة بمستقيم وخط التطابق الأفضل.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تمثيل دوال تربيعية لبيانات من مسائل حياتية.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أنه كلما كانت نقاط البيانات متجمعة بالقرب من خط الاتجاه، كان الارتباط أقوى، وكلما كانت نقاط البيانات بعيدة عن الخط كان الارتباط أضعف.
- يحدّد الطلاب ما إذا كان الارتباط بين اثنتين من قيم البيانات هو بالضرورة علاقة سببية، وذلك في سياق كميات مرتبطة ببيانات، مثل درجة الحرارة وعدد زوّار الشاطئ.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

العربية | الإنجليزية

- **انحدار خطي** | *linear regression*
- **خط التطابق الأفضل** | *line of best fit*
- **معامل الارتباط** | *correlation coefficient*
- **قيمة متبقية** | *residual*
- **استكمال داخلي** | *interpolation*
- **استكمال خارجي** | *extrapolation*
- **سببية** | *causation*

نشاط المصطلحات

_____ هي عندما يؤدي تغير في أحد المقادير إلى تغير في مقدار آخر. **[السببية]**

تقدير قيمة كمية مجهولة تقع بين كميتين معلومتين يسمى _____.
[استكمال داخلي]

تقدير قيمة تقع خارج مدى قيم معلومة يسمى _____. **[استكمال خارجي]**

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

11F.5.1 يعرف أن البيانات ذات المتغيّرين تمثل أزواجًا مرتبة لقيمتي متغيرين مرتبطين ببعضهما البعض عند كل مشاهدة لهما. يرسم مخطّط انتشار للمتغيّرين لملاحظة الارتباط بينهما. يحدد الارتباط السالب والموجب، يرسم خط التّطابق اللأفضل، يستعمل مصطلح الارتباط الخطي ليشير إلى أن النقاط في مخطّط الانتشار تتجمع حول خط مستقيم.

11F.5.2 يحسب معامل الارتباط الخطي لبيانات بين متغيّرين مستعملا قاعدة بيرسون؛ ويعرف أن المعامل يقع بين 1− ؛ 1 ؛ ويفسّر الارتباط السالب والموجب وقوة الرتباط.

معايير ممارسات الرياضيات

استعمل الأدوات المناسبة استراتجيًا

يربط الطلاب بين إدخال البيانات في حاسبة بيانية واستعمال الارتباط الخطي كطريقة لاحتساب خط التطابق الأفضل.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يرى الطلاب البنية في مواقف مشابهة عندما يصفون العلاقة بين معاملات نموذج خطي والبيانات التي ينمذجها.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يقارن الطلاب دالتين خطيتين لتحديد أيهما الأفضل مطابقة لمجموعة بيانات معطاة. هذا الأمر يهيّئ الطلاب لإيجاد وتحليل خط التطابق الأفضل لمجموعة بيانات ذات متغيّرين.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما الأنماط التي تلاحظها في مخطط الانتشار؟ [بين نقاط البيانات ترابط موجب.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: لماذا من الممكن وجود أكثر من نموذج خطي واحد؟
[يمكن رسم أكثر من مستقيم بحيث يكون نصف نقاط البيانات فوق المستقيم ونصف نقاط البيانات تحته.]

س: ما القيود التي يفرضها الموقف الحياتي على المجال والمدى؟
[بالنسبة للمدى، لا يمكن أن يكون عدد زوار الشاطئ عددًا سالبًا، أما بالنسبة للمجال فهو يرتبط بدرجات الحرارة المألوفة على الأرض.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: صف الاختلاف بين قيم كل نقطة من نقاط البيانات والقيم المناظرة لها على كل من النماذج الخطية.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: أوجه الاختلاف قد تكون متعددة، ولكن عمومًا تكون قيم نقاط البيانات قريبة من القيم على كل من النماذج.]

س: أوجد نموذجًا خطيًّا إضافيًّا يمكن أن يكون تمثيلًا جيدًا. مثّله بيانيًّا واشرحه.
[قد تتنوّع الإجابات: نموذج إجابة: الدالة $f(x) = 14x + 5$ ممثلة باللون الأخضر.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف تعرف إن كان نموذج ما يقدم توقعات جيدة؟
[بعد تعويض أي قيمة من قيم x من مجموعة البيانات، إذا كانت النتيجة قريبة من القيمة y المناظرة لقيمة x، نعتبر النموذج نموذجًا جيدًا.]

عادات التفكير

استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عمّم هل يوجد حدّ لعدد المستقيمات التي يمكن استعمالها لمواءمة مجموعة من النقاط على تمثيل بياني؟

[لا، يمكنك اختيار عدد لانهائي من المستقيمات لمواءمة مجموعة نقاط، ولكنّ بعضها سيكون أكثر دقة من غيره.]

كتاب الطالب، صفحة 29

1-4
تحليل خطوط التطابق
Analyzing Lines of Fit

أستطيع... إيجاد خط التطابق الأفضل لمجموعة بيانات وتقييم دقة تطابقه.

معايير الدرس
11.F.5.1 و 11.F.5.2

المصطلحات
- انحدار خطي linear regression
- خط التطابق الأفضل line of best fit
- معامل الارتباط correlation coefficient
- قيمة متبقية residual
- استكمال داخلي interpolation
- استكمال خارجي extrapolation

السؤال الأساس كيف يمكنك تقييم دقّة تطابق خط التطابق الأفضل لمجموعة بيانات مزدوجة؟

استكشف وبرّر منطقيًّا

يبيّن مخطط الانتشار المجاور عدد رواد الشاطئ في كل يوم من الأيام الستة الأولى من شهر يوليو. يستعمل قائد فريق الإنقاذ بيانات مبنية على توقعات الطقس لتحديد العدد المطلوب من المنقذين وجدولة مواعيد عملهم.

يقارن قائد فريق الإنقاذ بين نموذجين خطيين:

$g(x) = 13x + 25$

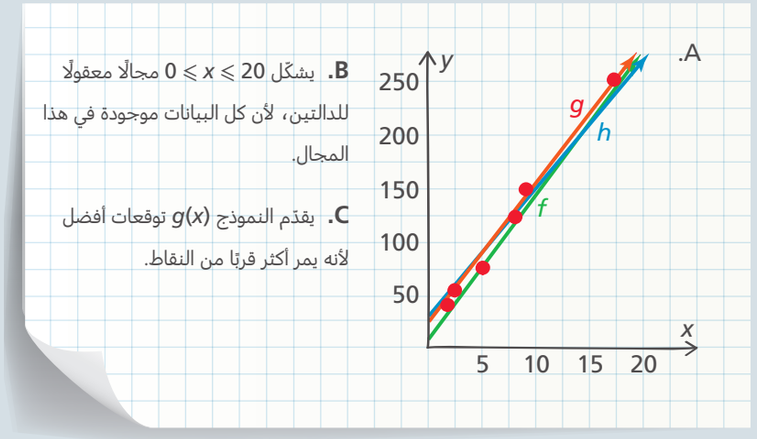
$h(x) = 12x + 30$

A. انسخ مخطط الانتشار ومثّل الدالتين الخطيتين بيانيًا على نفس شبكة الإحداثيات.

B. ما المجال المنطقي لكل دالة؟ وضّح إجابتك.

C. **ابن الحجج الرياضية** أيّ نموذج هو الأفضل لتوقّع عدد رواد الشاطئ على أساس أن درجات الحرارة أعلى من 80°F؟ برّر إجابتك.

نموذج من أعمال الطلاب



A.

B. يشكّل $0 \leq x \leq 20$ مجالًا معقولًا للدالتين، لأن كل البيانات موجودة في هذا المجال.

C. يقدّم النموذج $g(x)$ توقعات أفضل لأنه يمر أكثر قربًا من النقاط.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

ذكّر الطلاب بأنّه يمكن نمذجة بعض البيانات بدالة خطية. اشرح لهم أنه رغم وجود عدة دوال خطية ممكنة يمكن لها أن تنمذج البيانات بصورة جيدة، إلا أنه يوجد خط واحد فقط للتطابق الأفضل لهذه البيانات.

مثال 1 إيجاد خط التطابق الأفضل

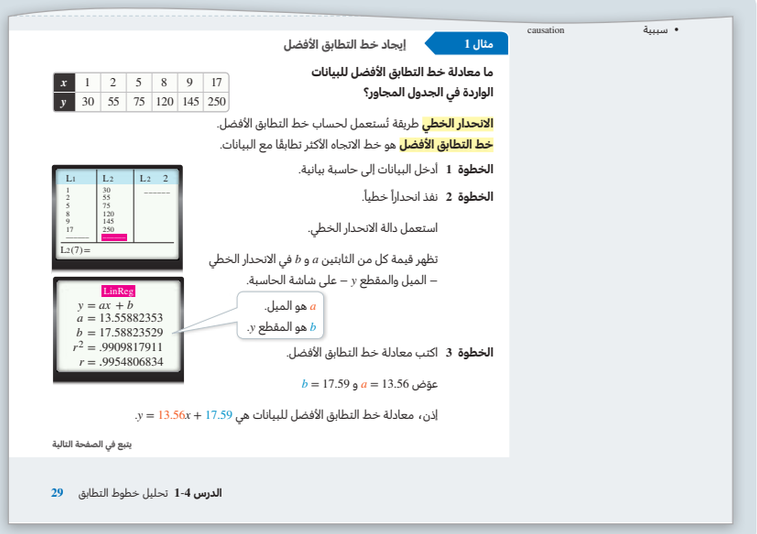
بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ما أوجه المقارنة بين المعادلة الموضّحة على شاشة الانحدار الخطي في الحاسبة البيانية ومعادلة عامة مكتوبة في صيغة الميل والمقطع؟

[في الحاسبة البيانية يمثّل الميل بالمتغير a بدلًا من المتغير m كما في صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$.]

تنويه

يمكن استعمال الآلات الحاسبة ذات الخصائص المتطابقة مع TI-84 أو ما يشبهها.



• سببية causation

مثال 1 إيجاد خط التطابق الأفضل

ما معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات الواردة في الجدول المجاور؟

x	1	2	5	8	9	17
y	30	55	75	120	145	250

الانحدار الخطي طريقة تُستعمل لحساب خط التطابق الأفضل.

خط التطابق الأفضل هو خط الاتجاه الأكثر تطابقًا مع البيانات.

الخطوة 1 أدخل البيانات إلى حاسبة بيانية.

الخطوة 2 نفذ انحداراً خطياً.

استعمل دالة الانحدار الخطي.

تظهر قيمة كل من الثابتين a و b في الانحدار الخطي – الميل والمقطع y – على شاشة الحاسبة.

a هو الميل.

b هو المقطع y.

الخطوة 3 اكتب معادلة خط التطابق الأفضل.

عوّض $a = 13.56$ و $b = 17.59$.

إذن، معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات هي $y = 13.56x + 17.59$.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 4-1 تحليل خطوط التطابق 29

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $y = 0.78x + 4.69$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا تستعمل صيغة الميل والمقطع لكتابة معادلة خط التطابق الأفضل؟
[تعطيك الحاسبة معامل x والثابت، وهما مكوّنان ضروريان لصيغة الميل والمقطع.]

مثال 2 فهم معاملات الارتباط

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يرتبط بين ميل خط التطابق الأفضل ومعامل الارتباط؟
[كلاهما له نفس الإشارة.]

س: كيف يمكنك أن تستعمل قيمة معامل الارتباط لتقييم قوة الارتباط لخط التطابق الأفضل؟
[إذا كانت هذه القيمة قريبة من 1 أو −1 فإن الارتباط قوي. إذا كانت قريبة من الصفر فإن الارتباط ضعيف.]

س: أي خط له الارتباط الأقوى؟
[الخط الثالث له الارتباط الأقوى لأن القيمة 0.995− أقرب إلى 1− مما هي القيمة 0.984 إلى 1]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. ارتباط ضعيف، إن معامل ارتباط قيمته 0.1 قريب من 0 لذا فهو يشير إلى أنّ العلاقة الخطية بين المتغيرين ضعيفة.

b. متوسط، إن معامل ارتباط قيمته 1− هو أقوى علاقة خطية مع ارتباط سالب للبيانات، لذا فإنّ معامل ارتباط قيمته 0.6− ليس قويًّا جدًّا ولا ضعيفًا جدًّا.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

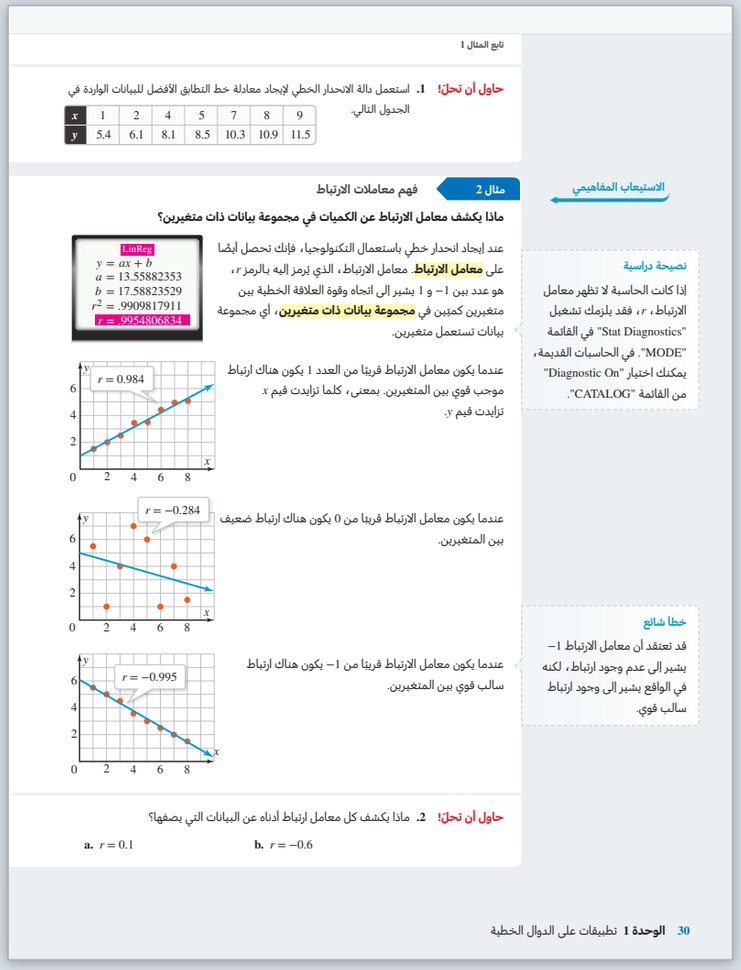
س: هل إشارة معامل الارتباط تشير إلى مدى مواءمة النموذج للبيانات؟
[لا، الإشارة تدل على ما إذا كان بين البيانات التي يصفها خط التطابق الأفضل ارتباط موجب أو سالب، لكنها لا تدل على مدى قوة الارتباط.]

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

تواصل بدقّة ما وجه الاختلاف بين ارتباط سالب قوي وارتباط ضعيف؟

[البيانات التي لها ارتباط سالب قوي يكون لها معامل ارتباط قيمته قريبة من 1−، بينما البيانات التي لها ارتباط ضعيف يكون لها معامل ارتباط قيمته قريبة من 0]



تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! **1.** استعمل دالة الانحدار الخطي لإيجاد معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات الواردة في الجدول التالي.

x	1	2	4	5	7	8	9
y	5.4	6.1	8.1	8.5	10.3	10.9	11.5

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 فهم معاملات الارتباط

ماذا يكشف معامل الارتباط عن الكميات في مجموعة بيانات ذات متغيرين؟

LinReg
$y = ax + b$
$a = 13.55882353$
$b = 17.58823529$
$r^2 = .9909817911$
$r = .995480684$

عند إيجاد انحدار خطي باستعمال التكنولوجيا، فإنك تحصل أيضًا على **معامل الارتباط**. معامل الارتباط، الذي يُرمز إليه بالرمز r، هو عدد بين 1− و 1 يشير إلى اتجاه وقوة العلاقة الخطية بين متغيرين كميين في **مجموعة بيانات ذات متغيرين**، أي مجموعة بيانات تستعمل متغيرين.

عندما يكون معامل الارتباط قريبًا من العدد 1 يكون هناك ارتباط موجب قوي بين المتغيرين. بمعنى، كلما تزايدت قيم x تزايدت قيم y.

عندما يكون معامل الارتباط قريبًا من 0 يكون هناك ارتباط ضعيف بين المتغيرين.

عندما يكون معامل الارتباط قريبًا من 1− يكون هناك ارتباط سالب قوي بين المتغيرين.

نصيحة دراسية
إذا كانت الحاسبة لا تظهر معامل الارتباط، r، فقد يلزمك تشغيل "Stat Diagnostics" في القائمة "MODE". في الحاسبات القديمة، يمكنك اختيار "Diagnostic On" من القائمة "CATALOG".

خطأ شائع
قد تعتقد أن معامل الارتباط 1− يشير إلى عدم وجود ارتباط، لكنه في الواقع يشير إلى وجود ارتباط سالب قوي.

حاول أن تحلّ! **2.** ماذا يكشف كل معامل ارتباط أدناه عن البيانات التي يصفها؟

a. $r = 0.1$ **b.** $r = -0.6$

30 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 وجّه الطلاب لاستعمال حاسباتهم لإيجاد خط التطابق الأفضل. قد يفيدك وضع لائحة بالخطوات التي يجب أن يتبعوها في هذا الإجراء.

x	12	16	25	31	42	56
y	50	46	38	24	14	7

س: هل يهم أي من القيمتين، x أو y تُدخَل في L1 وأي منهما تُدخَل في L2؟ وضّح إجابتك.
[نعم، تمثّل L1 المتغيرات المستقلة، إذن، يجب إدخال قيم x في L1، بينما تمثّل L2 المتغيرات التابعة، إذن يجب إدخال قيم y في L2.]

س: أوجد معادلة خط التطابق الأفضل.
[$y = -1.04x + 61.37$]

www.jnob-jo.com

مثال 3 تفسير التمثيلات البيانية للقيم المتبقية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما المقصود بالقيمة المتبقية؟

[هي الفرق بين قيمة y الفعلية لإحدى نقاط البيانات وقيمة y المناظرة لها على خط التطابق الأفضل، أو القيمة المتوقعة للمتغيّر y.]

س: كيف يمكن للقيمة المتبقية أن تكون موجبة أو سالبة؟

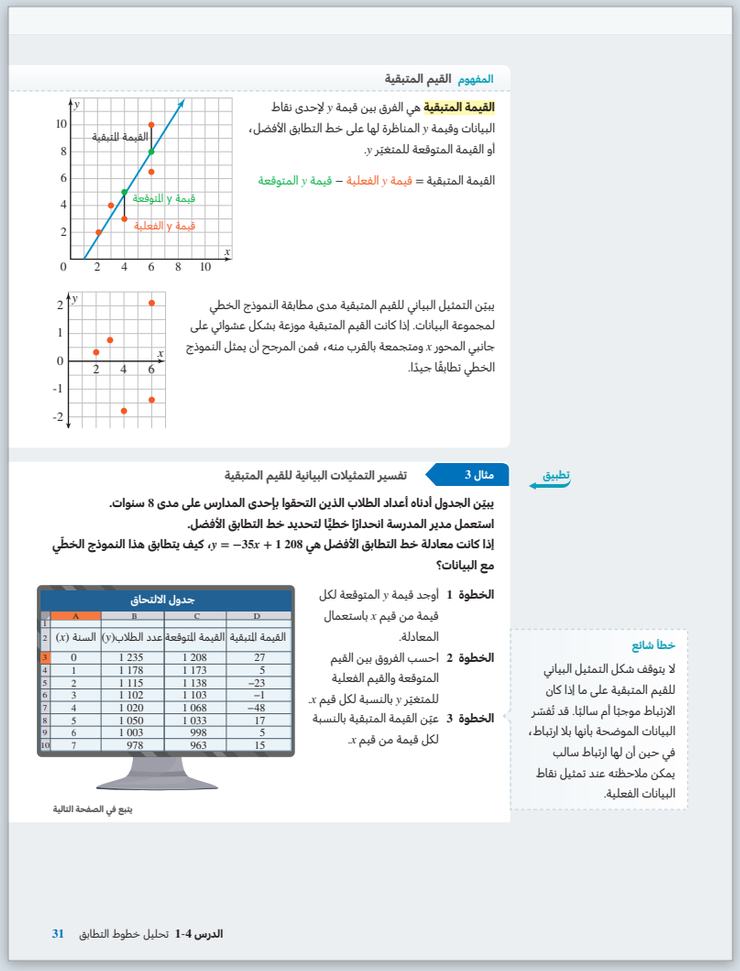
[يمكن للقيمة المتوقعة أن تكون أكبر أو أصغر من القيمة الفعلية، لذا فعندما تُطرح يمكن للفرق أن يكون موجبًا أو سالبًا.]

س: لماذا يمكن لنمط في القيم المتبقية أن يشير إلى أن النموذج لا يمثل تطابقًا جيدًا؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: القيم المتبقية لنموذج خطي هي تقديرات للخطأ، والتي من المفترض أن تكون عشوائية وغير قابلة للتوقع. إذا كوّنت القيم المتبقية نمطًا تصبح قابلة للتوقع، وبالتالي يشير هذا الأمر إلى أن النموذج لا يمثل تطابقًا جيدًا.]

س: ما فائدة رسم تمثيل بياني عند تحليل القيم المتبقية؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: يعرض المخطط القيم المتبقية لإجراء تحليل بصري لها. كل قيمة من القيم المتبقية تمثلها مسافة. إذا كانت القيم المتبقية موزّعة عشوائيًا على كِلا جانبَي المحور x ومتجمعة نسبيًا بالقرب منه، يمكن القول إن النموذج الخطي يمثّل تطابقًا جيدًا للبيانات.]



المفهوم القيم المتبقية

القيمة المتبقية هي الفرق بين قيمة y لإحدى نقاط البيانات وقيمة y المناظرة لها على خط التطابق الأفضل، أو القيمة المتوقعة للمتغيّر y.

القيمة المتبقية = قيمة y الفعلية − قيمة y المتوقعة

يبيّن التمثيل البياني للقيم المتبقية مدى مطابقة النموذج الخطي لمجموعة البيانات. إذا كانت القيم المتبقية موزعة بشكل عشوائي على جانبي المحور x ومتجمعة بالقرب منه، فمن المرجح أن يمثل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا.

تطبيق

مثال 3 تفسير التمثيلات البيانية للقيم المتبقية

يبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين التحقوا بإحدى المدارس على مدى 8 سنوات.
استعمل مدير المدرسة انحدارًا خطيًا لتحديد خط التطابق الأفضل.
إذا كانت معادلة خط التطابق الأفضل هي $y = -35x + 1\,208$، كيف يتطابق هذا النموذج الخطّي مع البيانات؟

جدول الالتحاق

	A	B	C	D
1				
2	السنة (x)	عدد الطلاب (y)	القيمة المتوقعة	القيمة المتبقية
3	0	1 235	1 208	27
4	1	1 178	1 173	5
5	2	1 115	1 138	−23
6	3	1 102	1 103	−1
7	4	1 020	1 068	−48
8	5	1 050	1 033	17
9	6	1 003	998	5
10	7	978	963	15

الخطوة 1 أوجد قيمة y المتوقعة لكل قيمة من قيم x باستعمال المعادلة.

الخطوة 2 احسب الفروق بين القيم المتوقعة والقيم الفعلية للمتغيّر y بالنسبة لكل قيم x.

الخطوة 3 عيّن القيمة المتبقية بالنسبة لكل قيمة من قيم x.

خطأ شائع

لا يتوقف شكل التمثيل البياني للقيم المتبقية على ما إذا كان الارتباط موجبًا أم سالبًا. قد تُفسّر البيانات الموضحة بأنها بلا ارتباط، في حين أن لها ارتباط سالب يمكن ملاحظته عند تمثيل نقاط البيانات الفعلية.

يتبع في الصفحة التالية

www.jnob-jo.com

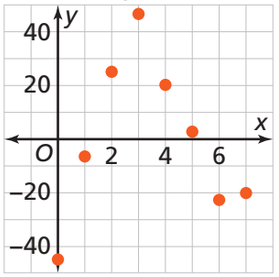
تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
القيمة المتبقية	−45	−6.44	25.12	46.68	20.24	2.8	−22.64	−20.08

مخطط القيم المتبقية



يُظهر مخطط القيم المتبقية أنّ هذه القيم غير متجمعة بالقرب من المحور x، مما يشير إلى أن النموذج الخطي لا يمثل تطابقًا جيدًا لهذه البيانات.

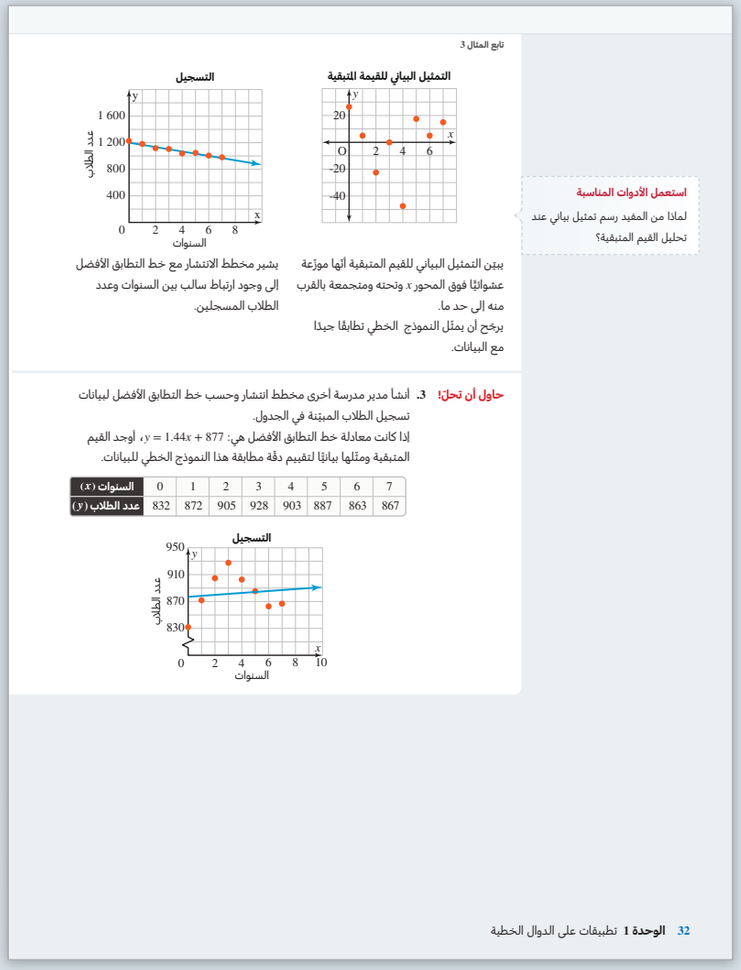
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما أوجه المقارنة بين النماذج؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: مثّل القيم المتبقية بيانيًا. إذا لم تلاحظ نمطًا، تحقّق مما إذا كان مخطط القيم المتبقية يُظهر قيمًا قريبة من المحور x، وذلك لتحديد ما إذا كان خط التطابق الأفضل يمثّل تطابقًا جيدًا للبيانات.]

خطأ شائع

حاول أن تحل 3 ! قد يمثّل بعض الطلاب قيم y المتوقعة استنادًا إلى النموذج بدلًا من الاعتماد على القيم المتبقية. ذكّر الطلاب بأن القيمة المتبقية هي الفرق. في الرياضيات، القيمة المتبقية هي الفرق بين القيمة المتوقعة والقيمة الفعلية.



تابع المثال 3

التسجيل

يشير مخطط الانتشار مع خط التطابق الأفضل إلى وجود ارتباط سالب بين السنوات وعدد الطلاب المسجلين.

التمثيل البياني للقيمة المتبقية

يبيّن التمثيل البياني للقيم المتبقية أنها موزّعة عشوائيًا فوق المحور x وتحته ومتجمعة بالقرب منه إلى حد ما.

يرجّح أن يمثّل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا مع البيانات.

استعمل الأدوات المناسبة

لماذا من المفيد رسم تمثيل بياني عند تحليل القيم المتبقية؟

حاول أن تحلّ! **3.** أنشأ مدير مدرسة أخرى مخطط انتشار وحسب خط التطابق الأفضل لبيانات تسجيل الطلاب المبيّنة في الجدول.

إذا كانت معادلة خط التطابق الأفضل هي: $y = 1.44x + 877$، أوجد القيم المتبقية ومثّلها بيانيًا لتقييم دقّة مطابقة هذا النموذج الخطي للبيانات.

السنوات (x)	0	1	2	3	4	5	6	7
عدد الطلاب (y)	832	872	905	928	903	887	863	867

التسجيل

32 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

مثال 5 الاستكمال الداخلي والاستكمال الخارجي باستعمال نماذج خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا يُسمى الميل والمقطع y معاملات متغيرة؟

[المعاملات المتغيرة هي قيود أو حدود. المقطع y هو الحدّ الذي يُظهر العدد الأصغر من الأميال المقطوعة. الميل هو القيد الذي يُظهر معدّل السرعة التي يتغير بها عدد الأميال المقطوعة بمرور الزمن.]

س: قارن بين الاستكمال الداخلي والاستكمال الخارجي.

[كل منهما هو استعمال لنموذج لتوقّع قيمة ما. الاستكمال الداخلي هو تقدير لقيمة تقع ضمن مجال القيم المعلومة. الاستكمال الخارجي هو توقع لقيمة تقع خارج مجال القيم المعلومة.]

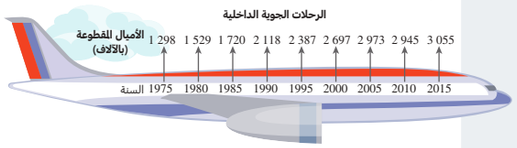
س: أيهما أقل مصداقية، الاستكمال الداخلي أم الاستكمال الخارجي؟

[الاستكمال الخارجي هو الأقل مصداقية وإمكانية الخطأ فيه أكبر، لأن سلوك البيانات خارج مجال القيم المعلومة قد يكون مختلفًا.]

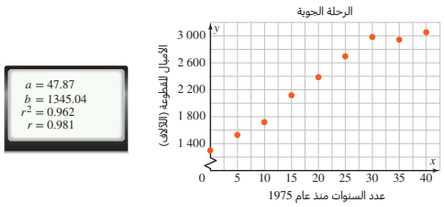
تطبيق

مثال 4 الاستكمال الداخلي والاستكمال الخارجي باستعمال نماذج خطية

بيّن المخطط أدناه بيانات رحلات جوية داخلية سجلتها شركة طيران محلية. كيف يمكنك استعمال البيانات لتقدير عدد الأميال التي قطعها المسافرون جوًا عام 2003؟
إذا استمر اتجاه البيانات هذا، أوجد تقديرًا معقولًا لعدد الأميال التي سيقطعها المسافرون جوًا عام 2030



ضع عيّن نقاط البيانات على مخطط انتشار. استعمل التكنولوجيا لإنشاء انحدار خطي لتحديد خط التطابق الأفضل للبيانات. لقيم x، استعمل عدد السنوات منذ عام 1975



احسب استعمل قيمة كل من a و b من الانحدار الخطي لكتابة معادلة خط التطابق الأفضل.

$$y = 47.87x + 1\,345.04$$

الاستكمال الداخلي	أو	الاستكمال الخارجي
الاستكمال الداخلي هو استعمال نموذج لتقدير قيمة تقع ضمن مدى القيم المعلومة.		**الاستكمال الخارجي** هو استعمال نموذج لتوقع قيمة تقع خارج مدى القيم المعلومة.
قم بالاستكمال الداخلي لتقدير عدد الأميال التي قطعها المسافرون عام 2003، أي بعد 28 عامًا من عام 1975		قم بالاستكمال الخارجي لتوقع عدد الأميال التي سيقطعها الأشخاص عام 2030، أي 55 عامًا بعد 1975
$y = 47.87(28) + 1\,345.04 = 2\,685.4$		$y = 47.87(55) + 1\,345.04 = 3\,977.89$

فسّر يتوقّع النموذج أن المسافرين قطعوا ما مجموعه 2 685 ألف ميل على متن الخطوط الجوية عام 2003، وأنهم سيقطعون ما مجموعه 3 978 ألف ميل عام 2030، وهذا التوقّع ليس حقيقيًا مثل تقدير عام 2003 لأن الاتجاه العام لمجموعة البيانات قد لا يستمر على المنوال ذاته.

يتبع في الصفحة التالية

www.jnob-jo.com

تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. 3 116 230 ميلًا.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: إلى أي درجة هذا التوقع موثوق؟

[هذا التوقّع موثوق لأنه استكمال داخلي ضمن مجال القيم المعلومة. السنة تقع ضمن المجال المعطى 2015-1975]

مثال 5 الارتباط والسببية

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك أن تعرف ما إذا كان تغيّر في كمية ما يسبّب تغيّرًا في كمية أخرى؟

[إذا كان يوجد في مجموعة بيانات ارتباط قوي، وإذا كانت إحدى الكميات تغيّرت نتيجة لتغيير في كمية أخرى، قد تكون السببية احتمالًا ممكنًا.]

س: هل الارتباط هو بالضرورة علاقة سببية؟

[لا، يمكن لكل كمية من الكميتين أن تكون مرتبطة بكمية أخرى ليست من ضمن مجموعة البيانات ولكنها في الواقع تؤثر على إحدى الكميتين أو على كليهما.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. لا، قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: لا يمكن استنتاج أن تزايد عدد السيارات في إحدى المدن يؤدّي إلى تزايد عدد سكانها وذلك بسبب وجود عوامل أخرى قد تساهم في هذا التزايد.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل السببية هي بالضرورة علاقة ارتباط؟

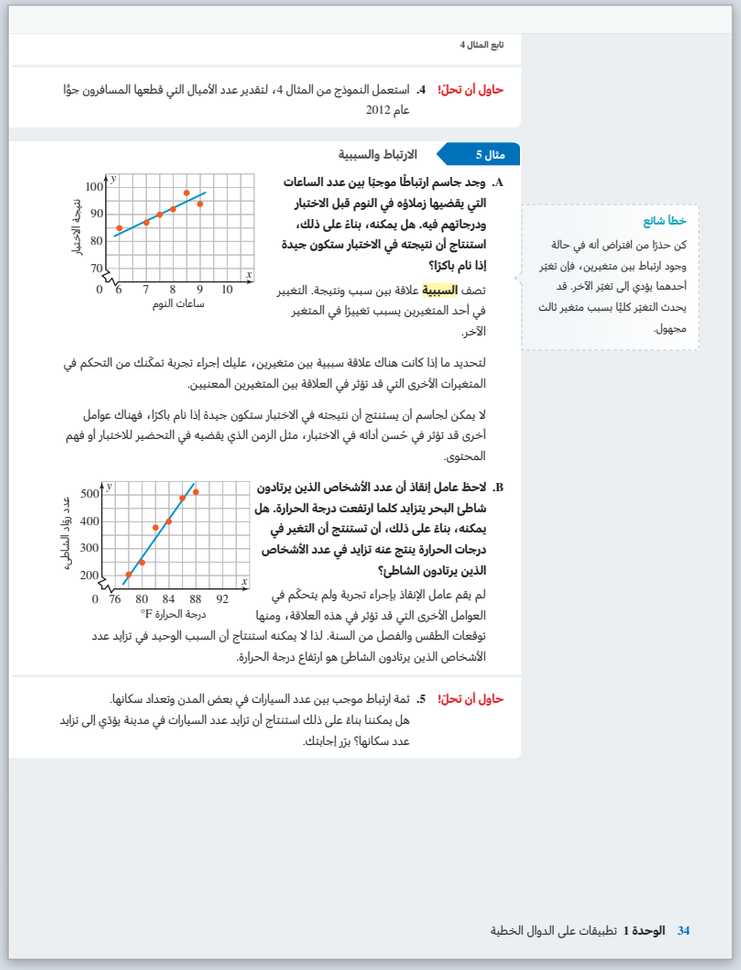
[نعم، إذا كان التغيير في كمية ما سببًا في حدوث تغيير في كمية أخرى، حتمًا يكون بين الكميتين علاقة ارتباط.]

استعمل مع **المثال 5**

عادات التفكير

ابنِ الحجج الرياضية ما الحجة التي يمكنك بناؤها لتشرح لماذا علاقة ما ليست سببية؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: إذا لم يكن للتغيير في مجموعة بيانات تأثير مستمر على مجموعة البيانات الأخرى، لا تكون العلاقة سببية.]



تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! **4.** استعمل النموذج من المثال 4، لتقدير عدد الأميال التي قطعها المسافرون جوًّا عام 2012

مثال 5 الارتباط والسببية

A. وجد جاسم ارتباطًا موجبًا بين عدد الساعات التي يقضيها زملاؤه في النوم قبل الاختبار ودرجاتهم فيه. هل يمكنه، بناءً على ذلك، استنتاج أن نتيجته في الاختبار ستكون جيدة إذا نام باكرًا؟

تصف **السببية** علاقة بين سبب ونتيجة. التغيير في أحد المتغيرين يسبب تغييرًا في المتغير الآخر.

خطأ شائع

كن حذرًا من افتراض أنه في حالة وجود ارتباط بين متغيرين، فإن تغيّر أحدهما يؤدي إلى تغيّر الآخر. قد يحدث التغيّر كليًا بسبب متغير ثالث مجهول.

لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة سببية بين متغيرين، عليك إجراء تجربة تمكّنك من التحكم في المتغيرات الأخرى التي قد تؤثر في العلاقة بين المتغيرين المعنيين.

لا يمكن لجاسم أن يستنتج أن نتيجته في الاختبار ستكون جيدة إذا نام باكرًا، فهناك عوامل أخرى قد تؤثر في حُسن أدائه في الاختبار، مثل الزمن الذي يقضيه في التحضير للاختبار أو فهم المحتوى.

B. لاحظ عامل إنقاذ أن عدد الأشخاص الذين يرتادون شاطئ البحر يتزايد كلما ارتفعت درجة الحرارة. هل يمكنه، بناءً على ذلك، أن تستنتج أن التغير في درجات الحرارة ينتج عنه تزايد في عدد الأشخاص الذين يرتادون الشاطئ؟

لم يقم عامل الإنقاذ بإجراء تجربة ولم يتحكّم في العوامل الأخرى التي قد تؤثر في هذه العلاقة، ومنها توقعات الطقس والفصل من السنة. لذا لا يمكنه استنتاج أن السبب الوحيد في تزايد عدد الأشخاص الذين يرتادون الشاطئ هو ارتفاع درجة الحرارة.

حاول أن تحلّ! **5.** ثمة ارتباط موجب بين عدد السيارات في بعض المدن وتعداد سكانها. هل يمكننا بناءً على ذلك استنتاج أن تزايد عدد السيارات في مدينة يؤدي إلى تزايد عدد سكانها؟ برّر إجابتك.

34 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 5 غالبًا ما يقول علماء الإحصاء: "علاقة الارتباط ليست بالضرورة سببية". اطلب من الطلاب استكشاف مفهومي الارتباط والسببية بكتابة نصّين: أحدهما فيه محاولة لإثبات خطأ هذا القول، والثاني فيه محاولة لإثبات صحة هذا القول. [راجع عمل الطلاب.]

س: هل الارتباط هو بالضرورة علاقة سببية؟

[لا، إنّ وجود ارتباط بين كميتين لا يعني أن حدوث تغيير في إحداهما يسبّب تغييرًا في الكمية الأخرى. مثال على ذلك: العلاقة بين عدد السيارات المبيعة وازدياد عدد السكان.]

س: وضّح كيف تعرف ما إذا كان بين كميتين علاقة سببية.

[حدوث تغيير في إحدى الكميتين يسبّب بالضرورة تغييرًا في الكمية الأخرى. مثال على ذلك: العلاقة بين ارتفاع درجات الحرارة وكمية المثلجات المبيعة.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم النماذج الخطية، وخط التطابق الأفضل، والقيم المتبقية

س: كيف نستفيد من خط التطابق الأفضل؟

[يمكن استعمال خط التطابق الأفضل لتوقّع قيم خارج مجال مجموعة البيانات.]

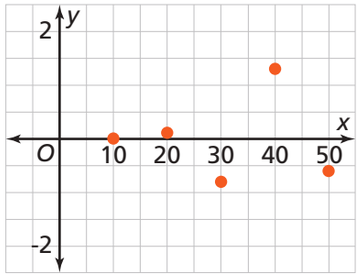
عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد يعتقد بعض الطلاب أنّ وجود نمط في مخطط القيم المتبقية يدلّ على ارتباط قوي وأن النموذج الخطي يمثل تطابقًا جيدًا. ذكّر الطلاب بأنّ وجود النمط يدل في الحقيقة على ارتباط ضعيف. طالما أنّ مخطط القيم المتبقية يُظهِر وجود نمط، فمعنى هذا أنّ النموذج الخطي لا يمثّل تطابقًا جيدًا للبيانات.

الإجابات

1. لاحظ معامل الارتباط لتحدّد دقّة التطابق لخط التطابق الأفضل للبيانات.
2. الاستكمال الداخلي هو استعمال نموذج لتقدير قيمة تقع ضمن مجال القيم المعلومة. الاستكمال الخارجي هو استعمال نموذج لتوقع قيمة تقع خارج مجال القيم المعلومة.
3. إن معامل ارتباط قيمته 0.93– قريب من 1–، لذا فهو يشير إلى وجود ارتباط سالب قوي، وليس إلى وجود ارتباط ضعيف. الارتباط الضعيف يدل على وجوده معامل ارتباط قريب من الصفر.
4. نعم، قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: قد يكون هناك استثناءات نادرة.
5. $y = 0.39x + 3.1$
6. **مخطط القيم المتبقية**



يمثّل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا للبيانات.

7. 93 زائرًا تقريبًا.
8. لا، قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: وفق التعريف، البيانات التي يكون لها ارتباط موجب قوي يكون لها علاقة خطية قوية، ولا يكون لها معامل ارتباط قيمته صغيرة مثل 0.25، لكن، يمكن أن يكون للبيانات ارتباط موجب قوي مع معامل ارتباط قيمته 0.25 لأن خط التطابق الأفضل قد يكون غير خطي.
9. عكس الطالب ترتيب البيانات. يجب أن يُدخل الطالب قيم x في L1 وقيم y في L2. معادلة خط التطابق الأفضل هي $y = 3.94x - 6.86$.
10. التقدير من خلال الاستكمال الداخلي، قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: لأن الاستكمال الداخلي هو استعمال لنموذج لتقدير قيمة تقع ضمن مجال قيم معلومة، من المرجح أن تطابق هذه البيانات نمطًا جرت ملاحظته. الاستكمال الخارجي أقل موثوقية لأن النمط قد لا يتابع نفس السلوك خارج مجال القيم المعلومة.
11. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: عمومًا يمثّل ميل النموذج الخطي تغير نوعي البيانات بالنسبة لبعضهما البعض. يمثّل المقطع y القيمة الابتدائية، أو عندما تكون قيمة المتغير المستقل تساوي صفرًا.

ملخص المفهوم النماذج الخطية، وخط التطابق الأفضل، والقيم المتبقية

لفظيًا

الانحدار الخطي هو طريقة لإيجاد خط التطابق الأفضل أو لإيجاد نموذج خطي لمجموعة بيانات ذات متغيرين.

التمثيل البياني للقيم المتبقية يكشف مدى تطابق النموذج الخطي مع مجموعة البيانات. إذا كانت القيم المتبقية متناظرة إلى حد ما حول المحور x ومتجمعة بالقرب منه، فمن المرجح أن يمثّل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا.

جبريًا

استعمل قيمة كل من a و b في الانحدار الخطي لكتابة معادلة خط التطابق الأفضل. المعادلة هي: $y = 0.542x + 1$.

LinReg
$y = ax + b$
$a = .5416666667$
$b = 1$
$r^2 = .9688779689$
$r = .9843159904$

يصف معامل الارتباط، r، العلاقة بين المتغيرين في مجموعة بيانات ذات متغيرين، وهو عدد يقع بين 1– و 1

بيانيًا

معادلة خط التطابق الأفضل هي: $y = 0.542x + 1$

هذا التمثيل البياني يمثّل القيم المتبقية للبيانات الواردة إلى اليسار.

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف يمكنك تقييم دقّة تطابق خط التطابق الأفضل لمجموعة بيانات مزدوجة؟
2. **المصطلحات** صِف الاختلاف بين الاستكمال الداخلي والاستكمال الخارجي.
3. **حلّل الخطأ** يقول خالد إن معامل الارتباط 0.93– يشير إلى وجود ارتباط ضعيف بين كميتين في مجموعة بيانات. وضّح خطأ خالد وصححه.
4. **ابحث عن العلاقات** وجد سالم أن هناك ارتباطًا قويًا بين أعمار المشاركين في سباقات الماراثون والأزمنة التي يسجّلونها.
هل يستطيع سالم القول أن الأشخاص الأصغر سنًا أسرع من الأشخاص الأكبر سنًا في سباقات الماراثون؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، استعمل الجدول أدناه.

x	10	20	30	40	50
y	7	11	14	20	22

5. استعمل التكنولوجيا لتحديد معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات.
6. ارسم تمثيلًا بيانيًا للقيم المتبقية من خط التطابق الأفضل والبيانات في الجدول. ما مدى دقة مطابقة النموذج الخطي للبيانات؟
7. يبيّن الجدول أدناه عدد زبائن أحد المتاجر، y، بعد x أسبوع من افتتاحه. معادلة خط التطابق الأفضل هي: $y = 7.77x + 38.8$
على افتراض أن هذا الاتجاه سيستمر، ما التوقّع المعقول لعدد زبائن المتجر بعد 7 أسابيع من افتتاحه؟

x	1	2	3	4	5	6
y	46	53	65	71	75	86

الدرس 1-4 تحليل خطوط التطابق 35

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
8–20, 23–30	8–15, 18–30

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	9, 14, 15	1
	11	2
	25	3
2	16–19, 28	1
	8	2
	30	3
3	20, 21	1
	13, 27	3
4	10, 12, 22–24, 29	2
	26	3

الإجابات

12. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: عيّن في المستوى الإحداثي النقطة التي تستعمل إحداثيّها الأول لإجراء التوقع. الإحداثي الثاني لهذه النقطة هو العدد الذي تحاول توقّعه.

13. نموذج منصور أفضل من نموذج أحمد لأن القيم المتبقية في مخطط منصور، في المتوسط، أقرب إلى نقطة الأصل من القيم المتبقية في مخطط أحمد.

14. $y = 1.55x + 16.6$, 46.05

15. $y = -5.73x + 197.2$, 88.33

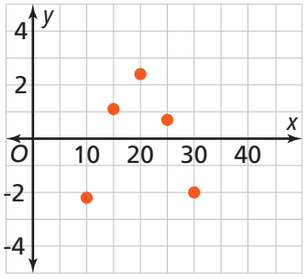
16. ارتباط سالب قوي.

17. ارتباط موجب قوي.

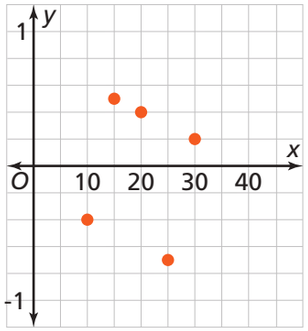
18. ارتباط موجب ضعيف.

19. ارتباط سالب ضعيف.

20. النموذج لا يمثل تطابقًا جيدًا.



21. النموذج يمثل تطابقًا جيدًا.



22. لا، لتحديد ما إذا كان بين فواتير التدفئة وعدد الحيوانات الأليفة علاقة سببية، عليك إجراء اختبار لتحديد عوامل أخرى قد تؤثر على هذه العلاقة.

23. لا، سيكون هناك استثناءات.

تدرَّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

8. فكّر وثابر في الحل إذا كان هناك ارتباط موجب قوي بين كميتين في مجموعة بيانات، هل يمكن أن يكون معامل ارتباط خط التطابق الأفضل لمجموعة البيانات هذه 0.25؟ وضّح إجابتك.

9. حلّل الخطأ أوجد خطأ صالح في تحديده معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات الواردة في الجدول، وصحّحه.

x	3	6	9	12	15	18	21
y	4	17	28	40	55	67	72

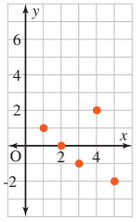
أدخل بيانات y في L1 وبيانات x في L2، ثم نفذ انحدارًا خطيًا.
معادلة خط التطابق الأفضل هي:
$y = 0.25 + 1.83$ ✗

10. مهارات التفكير العليا أيهما قد يكون أكثر دقّة، التقدير من خلال الاستكمال الداخلي أم التوقّع من خلال الاستكمال الخارجي؟ وضّح إجابتك.

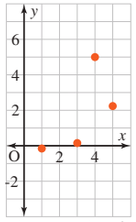
11. عمّم صف العلاقة بين قيمتي a و b في نموذج خطي والبيانات المنمذجة.

12. ابحث عن العلاقات كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني لخط التطابق الأفضل لتوقّع السلوك المستقبلي للكميات في مجموعة بيانات؟

13. ابن الحجج الرياضية كتب كل من أحمد ومنصور معادلة لخط التطابق الأفضل لاختبارات الرياضيات الخمسة الأخيرة. استنادًا إلى التمثيلات البيانية للقيم المتبقية، يقول أحمد إن درجاته تحاذي النموذج الخطي أكثر من درجات منصور. كوّن حجة رياضية تدعم مقولة أحمد أو تدحضها.



تمثيل منصور البياني للقيم المتبقية



تمثيل أحمد البياني للقيم المتبقية

تدرَّب

في التمرينين 14 و 15، استعمل التكنولوجيا لإجراء انحدار خطي لتحديد معادلة خط التطابق الأفضل للبيانات.
قدّر قيمة y عندما $x = 19$. انظر المثالين 1 و 4

14.

x	y
12	35
14	39
16	41
18	44
20	48

15.

x	y
16	105
20	83
24	62
28	34
32	15

في التمارين 16-19، صِف نوع الارتباط الذي يشير إليه كل معامل ارتباط. انظر المثال 2

15. $r = -0.89$ **16.** $r = 0.94$
17. $r = 0.23$ **18.** $r = -0.19$

في التمرينين 20 و 21، مثّل بيانيًا القيم المتبقية لكل نموذج خطي ومجموعة البيانات التي يمثلها. ما مدى دقّة مطابقة النموذج لمجموعة البيانات؟ انظر المثال 3

20. $y = 0.14x + 12.8$

x	y
10	12
15	16
20	18
25	17
30	15

21. $y = -0.58x + 25.2$

x	y
10	19
15	17
20	14
25	10
30	8

في التمرينين 22 و 23، ابن حجة تدعم الحالة المعطاة.
انظر المثال 5

22. إذا كان هناك ارتباط موجب بين متوسط فواتير التدفئة الشهرية للمنازل في أحد الأحياء وعدد الحيوانات الأليفة في المنزل، هل يمكن استخلاص أن عدد الحيوانات الأليفة في المنزل يسبب زيادة في متوسط فواتير التدفئة الشهرية؟ وضّح إجابتك.

23. إذا كان هناك ارتباط موجب بين المستوى التعليمي للمرء والراتب الذي يتقاضاه، هل يمكن استخلاص أن الشخص الحاصل على درجة الدكتوراه يتقاضى دائمًا راتبًا أعلى من الراتب الذي يتقاضاه الشخص الحاصل على درجة البكالوريوس؟ وضّح إجابتك.

www.jnob-jo.com

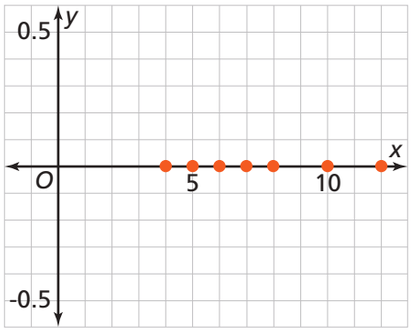
الإجابات

24. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تتزايد درجات الحرارة، ثم تتناقص مع مرور الزمن بعد منتصف الليل. قد لا يمثّل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا لأن النموذج الخطي هو الأفضل للبيانات التي لها معدل تغيّر ثابت، وليس للبيانات التي يكون معدل تغيّرها موجبًا ومن ثمّ يصبح سالبًا.

25. يمثّل الميل التغيّر في عدد الأميال بالتريليونات التي قطعها الأشخاص بالسيارة كل عام، ويمثل المقطع y الأميال بالترليونات المقطوعة بالسيارة في سنة 1975. 3 138 تريليون ميل مقطوع بالسيارة، 3 858 تريليون ميل مقطوع بالسيارة.

26.

مخطط القيم المتبقية



x	4	5	6	7	8	10	12
قيمة متبقية	0	0	0	0	0	0	0

لأنّ كل القيم المتبقية تساوي 0، فإن البيانات خطية بامتياز.

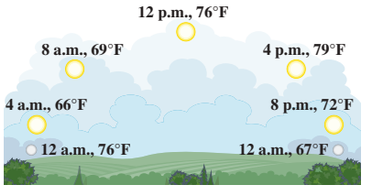
27.
- **a.** ارتباط قوي
- **b.** ارتباط قوي
- **c.** ارتباط ضعيف
- **d.** لا يوجد ارتباط

29. **الجزء A** $y = -2.9x + 7\,465.2$, $r = -0.83$
الجزء B $y = -6.42x + 14\,347.64$, $r = -0.94$
الجزء C للبيانات بين العامين 2010-1940 ارتباط قوي مقارنةً بالبيانات بين العامين 2010-1940 قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: معامل الارتباط للبيانات بين العامين 2010-1940 أقرب إلى 1− من معامل الارتباط للبيانات بين العامين 1980-1940 إذن، للبيانات بين العامين 2010-1940 علاقة خطية أقوى مما هي للبيانات بين العامين 1980-1940

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

24. فكّر وثابر في الحل يوضّح الشكل أدناه درجات الحرارة في أوقات مختلفة من اليوم. كيف يمكنك وصف العلاقة بين درجة الحرارة والوقت؟ هل يطابق النموذج الخطي هذه البيانات مطابقةً جيدة؟ وضّح إجابتك.



25. نمذج يوضّح الجدول أدناه عدد الأميال التي قطعها سكان إحدى الدول بالسيارة سنويًا من عام 1975 إلى عام 2015، معادلة خط التطابق الأفضل هي : $y = 0.048x - 93.198$. ماذا يمثّل الميل والمقطع؟ قدّر عدد الأميال التي قطعها سكان هذه الدولة عام 2007، ثم أوجد توقّعًا منطقيًا لعدد الأميال التي سيقطعها سكان هذه الدولة عام 2022

السنة	عدد الأميال المقطوعة بالسيارة (بالترليونات)
1975	1.298
1980	1.529
1985	1.720
1990	2.118
1995	2.387
2000	2.697
2005	2.973
2010	2.945
2015	3.055

26. فكّر وثابر في الحل يوضّح الجدول أدناه حجم الملف y بالميجابايت لصور ملتقطة بدرجات دقّة مختلفة x بالميجابكسل. معادلة خط التطابق الأفضل هي: $y = 0.3x$. استعمل هذه المعادلة لإنشاء تمثيل بياني للقيم المتبقية. ماذا يمكنك أن تستنتج من التمثيل البياني للقيم المتبقية عن البيانات؟

x	4	5	6	7	8	10	12
y	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	3.0	3.6

تدرَّب على اختبار

27. صِف العلاقة بين المتغيرين في مجموعة بيانات مختلفة ممثّلة بمعاملات الارتباط أدناه.

a. $r = -0.91$ **b.** $r = 0.87$

c. $r = 0.54$ **d.** $r = 0.07$

28. اختبار SAT/ACT من المرجح أن يكون أداء الطلاب الذين يتناولون وجبة الإفطار جيدًا في المدرسة. أي مما يلي يمكن استنتاجه من هذه العلاقة؟

Ⓐ هناك علاقة سببية بين الحدثين.

Ⓑ كلما كان تناول الطالب لوجبة الإفطار أمرًا متكرر الحدوث، تحسن أداؤه في المدرسة.

Ⓒ لا يمكن تحديد ما إذا كان الارتباط سببيًا من دون توافر مزيد من الأدلة.

Ⓓ تقديم وجبة إفطار مجانية إلى جميع الطلاب يقلل من الفوارق في أداء الطلاب.

29. مهمة أدائية استعمل الجدول أدناه للإجابة عن الأسئلة.

تناقص أعداد الجرائد

السنة	الجرائد اليومية في إحدى الدول
1940	1 878
1950	1 772
1960	1 763
1970	1 748
1980	1 745
1990	1 611
2000	1 480
2010	1 382

الجزء A استعمل التكنولوجيا لتحديد معادلة خط التطابق الأفضل ومعامل الارتباط للبيانات من عام 1940 إلى عام 1980

الجزء B أوجد خط التطابق الأفضل ومعامل الارتباط للبيانات من عام 1940 إلى عام 2010

الجزء C قارن بين معاملي الارتباط في مجموعتي البيانات. على ماذا يدل كل منهما؟

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-5
خط الانحدار

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✔ كتابة معادلة خط الانحدار باستعمال معامل الارتباط والبيانات لمتغيري المعادلة.
- ✔ توقّع نتائج من بيانات من خلال تفسير معامل الارتباط واستعمال معادلة خط الانحدار.

الفهم الأساس

تساعد معادلة خط الانحدار على تفسير العلاقة التي تربط متغيرَي المعادلة، وذلك بتفسير قيمتَي الميل والمقطع *y*. تُستعمل معادلة خط الانحدار لتوقّع نتائج ذات صلة بمتغيرَي المعادلة.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال مخطط الانتشار لوصف العلاقة بين متغيرين.
- إيجاد خط التطابق الأفضل لمجموعة من البيانات باستعمال الحاسبة البيانية وتقييم مدى مطابقة هذا الخط لهذه البيانات.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إيجاد معامل الارتباط بين متغيرين باستعمال صيغة رياضية.
- كتابة معادلة خط الانحدار لمتغيرين، بينهما ارتباط قوي، باستعمال صيغة رياضية.
- تفسير معامل الارتباط بين متغيرين واستعمال معادلة خط الانحدار لتوقع نتائج من بيانات متصلة بالمتغيرين.
- يحكم الطلاب على معقولية ودقة توقع النتائج الصادرة من استعمال معادلة خط الانحدار.

دقة

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب كيفية ارتباط متغيرين ويفسرون قيمة معامل هذا الارتباط ليستنتجوا مدى قوته.
- يدرك الطلاب أن وجود ارتباط بين متغيرين لا يعني بالضرورة وجود سببية بينهما مهما كانت قوة هذا الارتباط.
- يفسر الطلاب ميل معادلة خط الانحدار والمقطع *y* في سياق موقف حياتي.
- يحكم الطلاب على معقولية ودقة توقع النتائج الصادرة من استعمال معادلة خط الانحدار.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | *English*

- **خط التطابق** | *line of fit*
- **خط التطابق الأفضل** | *line of best fit*
- **القيمة المتبقية** | *residual*
- **ارتباط سالب** | *negative correlation*
- **ارتباط موجب** | *positive correlation*

المصطلحات الجديدة

- **معامل بيرسون** | *pearson coefficient*
- **خط الانحدار** | *regression line*
- **طريقة المربعات الصغرى** | *least squares method*

نشاط المصطلحات

- عمل الطلاب في الدرسين السابقين على مخطط الانتشار وخط التطابق الأفضل وتفسير خط التطابق. أدرك الطلاب أنه يمكنهم استعمال البيانات المتصلة بمتغيرين لرسم خط تطابق، ولكن هذا الخط ليس وحيدًا فهناك عدة خطوط ممكنة لتمثيل نفس مجموعة البيانات. لذلك كان من الضروري رسم خط تطابق يمثّل البيانات بشكل أفضل، وهذا ما سُمي بخط التطابق الأفضل. عرف الطلاب عن خط الانحدار أنه خط التطابق الأفضل حيث مجموع مربع المسافة الرأسية بين كل نقطة من المفردات والنقطة المقابلة لها على هذا الخط يكون أصغر ما يمكن. أخبرهم أن إحدى طرق إيجاد خط الانحدار هي طريقة المربعات الصغرى.
- اطلب من الطلاب أن يعرفوا الخط المستقيم الذي تمثّله كل معادلة بكتابة إحدى المصطلحات التالية: "خط الانحدار" أو "خط التطابق" أو "خط التطابق الأفضل".
- المعادلة $y = ax + b$ التي جرى احتسابها باستعمال الرسم البياني تمثّل _____
- المعادلة $y = ax + b$ التي جرى احتسابها باستعمال الحاسبة البيانية تمثّل _____
- المعادلة $y = ax + b$ التي جرى احتسابها باستعمال طريقة المربعات الصغرى تمثّل _____

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

11F.5.2 يُحسب معامل الارتباط الخطّي لبيانات بين متغيّرين مستعملًا قاعدة بيرسون، ويُعرف أن قيمة المعامل تقع بين 1، 1−، ويُفسّر الارتباط السالب والموجب وقوة الارتباط.

11F.5.3 يوجد معادلة خط الانحدار، للمتغير التابع *y* على المتغير المستقل *x*، مستعملًا طريقة المربعات الصغرى.

معايير ممارسات الرياضيات

كن دقيقًا

يستعمل الطلاب معادلة خط الانحدار لتوقّع نتائج من بيانات معتمدين على قوة الارتباط بين المتغيرين اللذين يمثّلان معادلة خط الانحدار والتي تضمن أن البيانات تتمثل بمعادلة خطية. وهذا يساعد الطلاب على دقة توقّع النتائج التي سوف يحصلون عليها عند استعمالهم لمعادلة خط الانحدار عندما تكون هذه النتائج من ضمن مدى البيانات المعطاة.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة لإيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لسرعة السيارة والوسط الحسابي $\bar{y}$ للمسافة التي تجتازها السيارة مقابل كل سرعة. ينشئ الطلاب مخطط انتشار في المستوى الإحداثي للمفردات (x , y) و $(\bar{x} , \bar{y})$ ثمّ يكتبون معادلة لخط التطابق الأفضل المارّ بالنقطة $(\bar{x} , \bar{y})$ وذلك بصيغة الميل والمقطع على أن يكون عدد النقاط التي تقع أعلاه مساويًا لعدد النقاط التي تقع أسفله.

هذا الأمر يساعد الطلاب على تكوين أفكار لإيجاد خط الانحدار الذي يمثّل علاقة بين كميتين متغيرتين وعلى توقّع نتائج.

يكمل الطلاب العمل في فقرة "نمذج وناقش" في الصفحة 38 من كتاب الطالب.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما المعلومات التي يقدمها لك الجدول؟

[المتغيّر المستقل x = متوسط سرعة السيارة km/h
والمتغيّر التابع y = المسافة التي تجتازها السيارة قبل التوقف.]

س: كيف توجد $\bar{x}$، $\bar{y}$؟

[$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$ ، $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ حيث n يساوي عدد الأزواج.]

س: كيف تكتب معادلة خط التطابق الأفضل إذا كان يمرّ بالنقطة المعطاة $(\bar{x} , \bar{y})$؟

[إذا كان يمرّ بنقطة ثانية في مخطط الانتشار يكون لديّ نقطتان، وبالتالي يمكن بسهولة كتابة المعادلة باستعمال صيغة الميل والمقطع، وإذا لم توجد نقطة ثانية يمكن استعمال أيّ نقطة تقع على هذا الخط وإيجاد المعادلة أيضًا.]

س: هل يمكن كتابة أكثر من معادلة لخط التطابق الأفضل؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: يُمكن إنشاء خط التطابق الأفضل بأكثر من طريقة، إذن يمكن كتابة أكثر من معادلة لخط التطابق الأفضل.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: إذا لم يوجد نقطة ثانية في مخطط الانتشار تمر بخط التطابق الأفضل، هل هناك إمكانية للحصول على أكثر من خط تطابق؟

[عندما لا توجد نقطة ثانية تمر بخط الانتشار، ارسم أي خط مستقيم يمر بالنقطة $(\bar{x} , \bar{y})$ ومن ثم عيّن نقطة ثانية على هذا الخط. بما أن هناك إمكانية لرسم عدة خطوط مستقيمة مارة بنقطة واحدة، فإنك سوف تحصل على عدة خطوط تطابق حيث يكون عدد النقاط أعلى هذا الخط مساويًا لعدد النقاط أسفله.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: وضّح لماذا يجب إيجاد النقطة $(\bar{x} , \bar{y})$ لكتابة معادلة خط التطابق الأفضل؟

[لأنها تمثّل النقطة الوسطى لنقاط مخطط الانتشار حيث ستنحدر جميع نقاط مخطط الانتشار إلى الخط المستقيم الذي تقع عليه هذه النقطة. أما إذا اخترت نقطة من نقاط مخطط الانتشار فإنك لا تحصل على خط تطابق يمثل نقاط مخطط الانتشار بشكل دقيق لأن هذه النقطة لا تمثل النقطة الوسطى لنقاط مخطط الانتشار.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل كل البيانات التي تعبّر عن ارتباط يمكن تمثيلها بخط التطابق الأفضل؟

[لا، ليس كل نوع من الارتباط يمكن تمثيله بخط التطابق الأفضل. البيانات التي تعبّر فقط عن ارتباط قوي يمكن تمثيلها بخط التطابق الأفضل الذي يمثّل بدالة خطية.

كتاب الطالب، صفحة 38

1-5
خط الانحدار
The Regression Line

استطيع... استعمال قيم معامل الارتباط بين متغيرين يمثلان كميتين مختلفتين لإيجاد مُعادلة خط الانحدار، وتوقع نتائج.

معايير الدرس
11F.5.2 و 11F.5.3

المصطلحات
- معامل بيرسون pearson coefficient
- خط الانحدار regression line
- طريقة المربعات الصغرى least squares method

السؤال الأساس
كيف تساعد قيم معامل الارتباط بين كميتين متغيرتين على كتابة معادلة خط الانحدار وتوقع نتائج؟

نمذج وناقش

يُبيّن الجدول أدناه المسافة y بالمتر التي تجتازها سيارة متوسط سرعتها x (km/h) بين لحظة ضغط السائق على الفرامل ولحظة توقفها الكامل تفاديًا لحادث محتمل.

x = متوسط سرعة السيارة (km/h)	20	30	40	50	60	70
y = المسافة التي تجتازها السيارة (m)	56	92	140	208	294	398

A. أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لمتوسط سرعة السيارة والوسط الحسابي $\bar{y}$ للمسافة المجتازة.

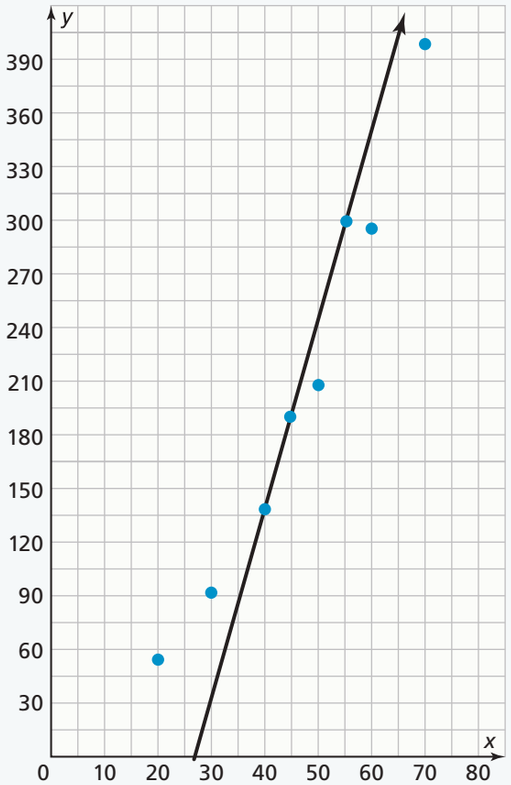
B. أنشئ مخطط انتشار في المستوى الاحداثي يبيّن نقاط الجدول (x , y) والنقطة $(\bar{x} , \bar{y})$.

C. **استعمل البنية** إذا علمت أن خط التطابق الأفضل يمر دائمًا بالنقطة $(\bar{x} , \bar{y})$، اكتب معادلة هذا الخط بصيغة الميل والمقطع بحيث يكون عدد النقاط التي تقع أعلاه مساويًا لعدد النقاط التي تقع أسفله.

نموذج من أعمال الطلاب

A. $\bar{x} = 45, \bar{y} = 198$

B.



C. خط التطابق الأفضل يمر بالنقطة (198 , 45) وبالنقطة (300 , 55).

فتكون المعادلة بصيغة الميل والمقطع: $y = 10.2x - 261$.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

بعد أن تعلّم الطلاب سابقًا طريقة رسم خط التطابق الأفضل، وبعد أن أدركوا أن هناك إمكانية لرسم أكثر من خط تطابق، عرّف الطلاب على خط الانحدار الذي يمثّل بشكل دقيق كيفية انحدار بيانات مخطط الانتشار الذي يمثّل ارتباطًا قويًا. اذكر لهم أن خط الانحدار هو خط التطابق الأفضل بحيث يكون مجموع القيم المتبقية أصغر ما يمكن. وضّح لهم أنّ هناك معادلة تساعد على تحديد خط الانحدار بشكل دقيق، مما يضمن تحديد خط انحدار واحد.

مثال 1 إيجاد معامل الارتباط

طرح أسئلة هادفة

س: ما المتغيّر المستقل؟ ما المتغيّر التابع؟

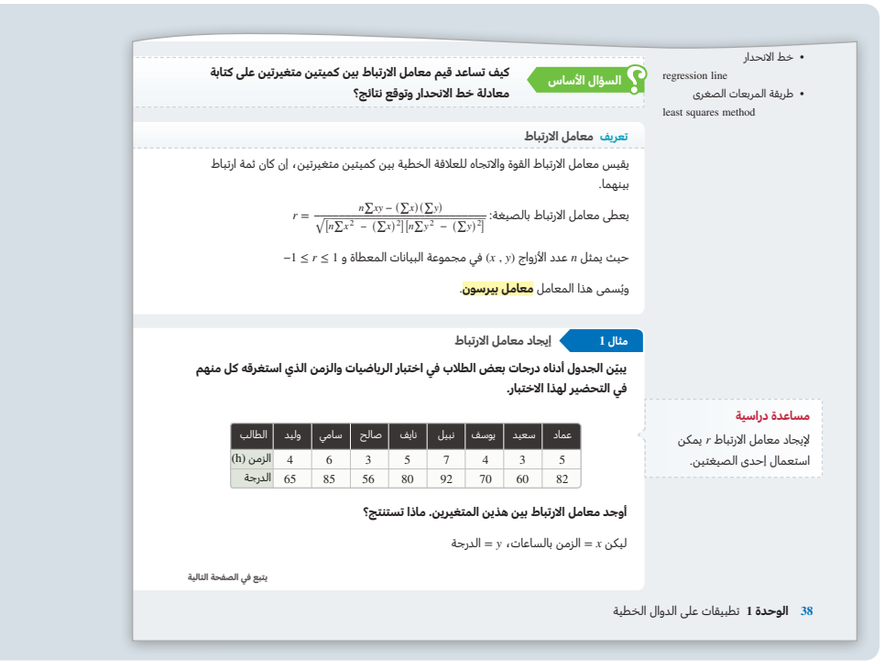
[x = الزمن بالساعات هو المتغيّر المستقل، y = الدرجة هي المتغيّر التابع.]

س: ما صيغة معامل الارتباط (معامل بيرسون)؟

$$[r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}]$$

س: ما أهمية إيجاد معامل الارتباط بين متغيرين؟

[لمعرفة قوة واتجاه العلاقة بين كميتين متغيرتين.]



- خط الانحدار
regression line
- طريقة المربعات الصغرى
least squares method

السؤال الأساس

كيف تساعد قيم معامل الارتباط بين كميتين متغيرتين على كتابة معادلة خط الانحدار وتوقع نتائج؟

تعريف معامل الارتباط

يقيس معامل الارتباط القوة والاتجاه للعلاقة الخطية بين كميتين متغيرتين، إن كان ثمة ارتباط بينهما.

يعطى معامل الارتباط بالصيغة: $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$

حيث يمثل n عدد الأزواج (x, y) في مجموعة البيانات المعطاة و $-1 \le r \le 1$

ويُسمى هذا المعامل **معامل بيرسون**.

مثال 1 إيجاد معامل الارتباط

يبيّن الجدول أدناه درجات بعض الطلاب في اختبار الرياضيات والزمن الذي استغرقه كل منهم في التحضير لهذا الاختبار.

الطالب	وليد	سامي	صالح	نايف	نبيل	يوسف	سعيد	عماد
الزمن (h)	4	6	3	5	7	4	3	5
الدرجة	65	85	56	80	92	70	60	82

مساعدة دراسية

لإيجاد معامل الارتباط r يمكن استعمال إحدى الصيغتين.

أوجد معامل الارتباط بين هذين المتغيرين. ماذا تستنتج؟

ليكن x = الزمن بالساعات، y = الدرجة

يتبع في الصفحة التالية

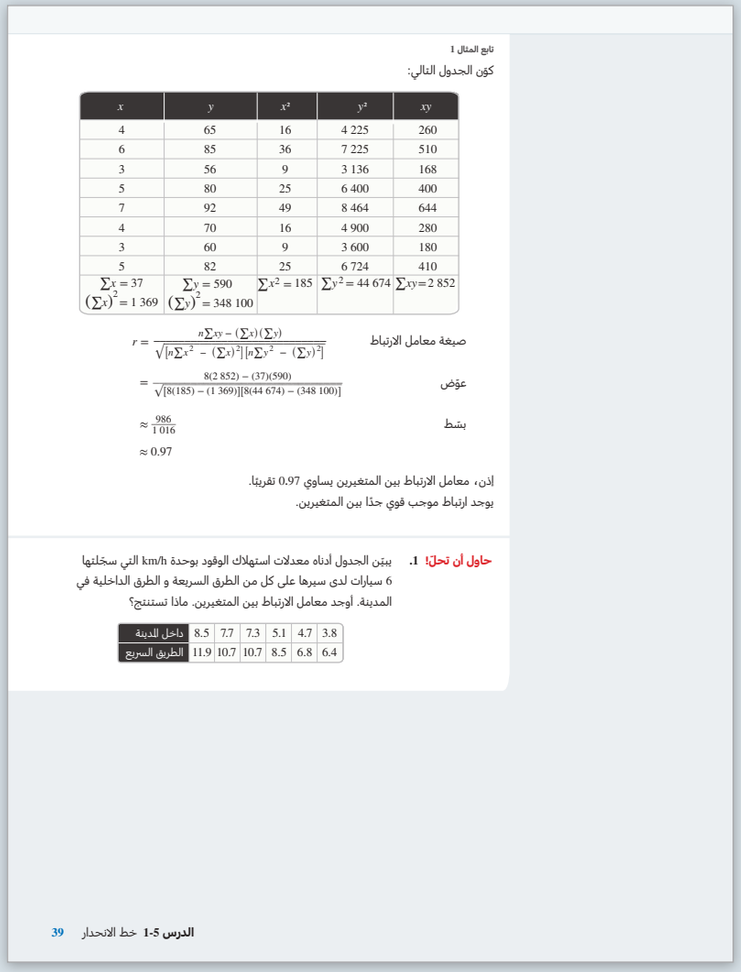
38 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. ليكن x استهلاك الوقود داخل المدينة و y استهلاك الوقود على الطريق السريع.
كوّن جدولًا مماثلًا للجدول في المثال (1) لإيجاد قيم المقادير الواردة في صيغة معامل بيرسون، ثمّ عوّض لتجد أن $r \approx 0.983$.
إذن، يوجد علاقة موجبة قوية بين استهلاك الوقود داخل المدينة واستهلاك الوقود على الطريق السريع.



تابع المثال 1

كوّن الجدول التالي:

x	y	x^2	y^2	xy
4	65	16	4 225	260
6	85	36	7 225	510
3	56	9	3 136	168
5	80	25	6 400	400
7	92	49	8 464	644
4	70	16	4 900	280
3	60	9	3 600	180
5	82	25	6 724	410
$\sum x = 37$	$\sum y = 590$	$\sum x^2 = 185$	$\sum y^2 = 44\,674$	$\sum xy = 2\,852$
$(\sum x)^2 = 1\,369$	$(\sum y)^2 = 348\,100$			

صيغة معامل الارتباط $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$

عوّض $= \frac{8(2\,852) - (37)(590)}{\sqrt{[8(185) - (1\,369)][8(44\,674) - (348\,100)]}}$

بسّط $\approx \frac{986}{1\,016}$

≈ 0.97

إذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي 0.97 تقريبًا.
يوجد ارتباط موجب قوي جدًا بين المتغيرين.

حاول أن تحلّ! **1.** يبيّن الجدول أدناه معدلات استهلاك الوقود بوحدة km/h التي سجّلتها 6 سيارات لدى سيرها على كل من الطرق السريعة و الطرق الداخلية في المدينة. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين. ماذا تستنتج؟

داخل المدينة	8.5	7.7	7.3	5.1	4.7	3.8
الطريق السريع	11.9	10.7	10.7	8.5	6.8	6.4

الدرس 5-1 خط الانحدار 39

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 قد يواجه الطلاب صعوبة في تفسير معامل الارتباط من ناحية تحديد المتغير المستقل والمتغير التابع. لمساعدتهم على تخطي هذه الصعوبة، اطرح عليهم السؤال التالي:

حدد المتغير المستقل والمتغير التابع لكل زوج من المتغيرات التالية؟

س: عدد الساعات المستغرق في التحضير للاختبار ودرجة التحصيل.
[عدد الساعات المستغرق للمذاكرة = المتغير المستقل، ودرجة التحصيل = المتغير التابع.]

س: عدد حوادث السير والسرعة.
[السرعة = المتغير المستقل، وعدد حوادث السير = المتغير التابع.]

س: درجات تحصيل الطلاب في مادة الرياضيات ومادة العلوم.
[تصلح كل من درجات الطلاب في مادة الرياضيات ودرجات الطلاب في مادة العلوم أن تكون المتغير المستقل والمتغير التابع.]

www.jnob-jo.com

مثال 2 كتابة معادلة خط الانحدار

طرح أسئلة هادفة

س: ما هو خط الانحدار؟

[هو خط التطابق الأفضل الذي يمرّ بالنقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ حيث $\bar{x}$ يساوي الوسط الحسابي لقيم المتغير المستقل، و $\bar{y}$ يساوي الوسط الحسابي لقيم المتغير التابع ومعادلته بصيغة الميل والمقطع هي: $y = ax + b$]

س: هل يوجد طريقة أخرى لإيجاد b من دون استعمال الصيغة؟

[نعم. عند إيجاد قيمة a نعوّض عن $\bar{y}$ و $\bar{x}$ في المعادلة $y = ax + b$ أي $\bar{y} = a\bar{x} + b$ وبالتالي $b = \bar{y} - a\bar{x}$.]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 كتابة معادلة خط الانحدار

يبيّن الجدول أدناه درجات بعض الطلاب في اختبار قياسي لمادتي الرياضيات والفيزياء حيث الدرجة العظمى 10

رياضيات	7	6	5	5	6	3	7	7	5	4
فيزياء	6	6	6	4	7	4	6	5	6	4

خط الانحدار هو خط التطابق الأفضل بحيث يكون مجموع مربع المسافة الرأسية بين كل نقطة من المفردات والنقطة المقابلة لها على هذا الخط أصغر ما يمكن. (سبق وأشرنا إلى المسافة الرأسية في الدرس السابق تحت مسمّى القيمة المتبقية)، إحدى طرق إيجاد خط الانحدار هي **طريقة المربعات الصغرى**.

تُكتب معادلة خط الانحدار في صورة $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

A. أوجد معامل الارتباط بين المادتين.

ليكن x = الرياضيات، y = الفيزياء

كوّن الجدول التالي.

x	y	x^2	y^2	xy
7	6	49	36	42
6	6	36	36	36
5	6	25	36	30
5	4	25	16	20
6	7	36	49	42
3	4	9	16	12
7	6	49	36	42
7	5	49	25	35
5	6	25	36	30
4	4	16	16	16
$\sum x = 55$ $(\sum x)^2 = 3\,025$	$\sum y = 54$ $(\sum y)^2 = 2\,916$	$\sum x^2 = 319$	$\sum y^2 = 302$	$\sum xy = 305$

يتبع في الصفحة التالية

40 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثال 2**

القراءة **مستوى 1** اطلب إلى الطلاب قراءة مقدمة المثال 2

س: على ماذا تدل كلمة "انحدار"؟

[الاتجاه الذي تتبعه مجموعة من البيانات.]

س: ما الاتجاه الذي تتبعه البيانات في التمثيل البياني الوارد في المثال 2؟

[من اليسار إلى اليمين نحو الأعلى، مما يعني أنه كلما ازدادت قيم المتغير x، ازدادت قيم المتغير y]

الكتابة **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب قراءة الجزء A من المثال 2

اكتب تعريف كل ما يلي:

- ارتباط موجب قوي
- ارتباط ضعيف
- ارتباط سالب قوي

أنشىء ثلاثة أعمدة في دفترك. في العمود الأول، اكتب مثالًا على ارتباط موجب قوي، وفي المثال الثاني اكتب مثالًا على ارتباط ضعيف، وفي المثال الثالث اكتب مثالًا على ارتباط سالب قوي.

التحدث **مستوى 3** في مجموعات صغيرة اطلب من الطلاب مناقشة مصطلح "طريقة المربعات الصغرى"

س: إلى ماذا تشير المربعات الصغرى؟

[إلى تصغير مجموع مربع المسافة الرأسية بين كل نقطة من المفردات والنقطة المقابلة لها على خط الانحدار إلى أقصى حدّ ممكن.]

س: إذا كان الارتباط بين المتغيرين ضعيفًا جدًا، هل يمكنك توقع درجة أي طالب بعد التجربة، إذا كانت درجته قبل التجربة لم ترد ضمن البيانات؟

[لا، لأنه في هذه الحالة يكون التوقع غير دقيق.]

www.jnob-jo.com

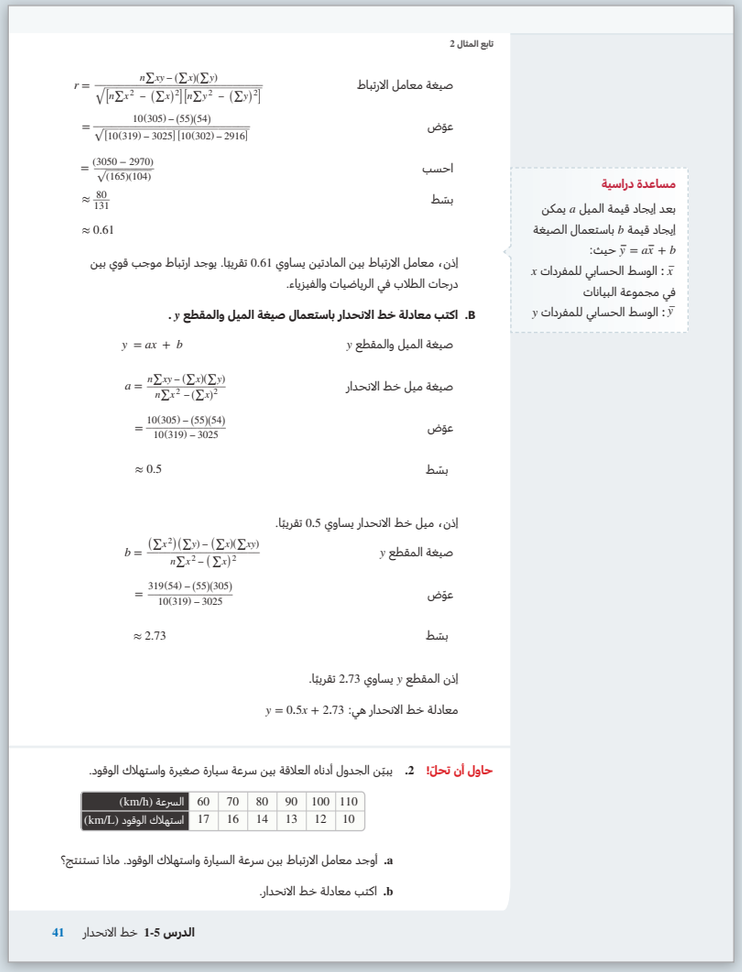
تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. لتكن x سرعة السيارة و y استهلاك الوقود.

$r = -0.994$، إذن توجد علاقة سالبة قوية بين سرعة السيارة واستهلاك الوقود.

b. $y = -0.137x + 25.324$



تابع المثال 2

صيغة معامل الارتباط $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$

عوّض $= \frac{10(305) - (55)(54)}{\sqrt{[10(319) - 3025][10(302) - 2916]}}$

احسب $= \frac{(3050 - 2970)}{\sqrt{(165)(104)}}$

بسّط $\approx \frac{80}{131}$

≈ 0.61

إذن، معامل الارتباط بين المادتين يساوي 0.61 تقريبًا. يوجد ارتباط موجب قوي بين درجات الطلاب في الرياضيات والفيزياء.

B. اكتب معادلة خط الانحدار باستعمال صيغة الميل والمقطع y.

صيغة الميل والمقطع y $y = ax + b$

صيغة ميل خط الانحدار $a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

عوّض $= \frac{10(305) - (55)(54)}{10(319) - 3025}$

بسّط ≈ 0.5

إذن، ميل خط الانحدار يساوي 0.5 تقريبًا.

صيغة المقطع y $b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

عوّض $= \frac{319(54) - (55)(305)}{10(319) - 3025}$

بسّط ≈ 2.73

إذن المقطع y يساوي 2.73 تقريبًا.

معادلة خط الانحدار هي: $y = 0.5x + 2.73$

مساعدة دراسية

بعد إيجاد قيمة الميل a يمكن إيجاد قيمة b باستعمال الصيغة $\bar{y} = a\bar{x} + b$ حيث:

$\bar{x}$: الوسط الحسابي للمفردات x في مجموعة البيانات

$\bar{y}$: الوسط الحسابي للمفردات y

حاول أن تحلّ! 2. يبيّن الجدول أدناه العلاقة بين سرعة سيارة صغيرة واستهلاك الوقود.

السرعة (km/h)	60	70	80	90	100	110
استهلاك الوقود (km/L)	17	16	14	13	12	10

a. أوجد معامل الارتباط بين سرعة السيارة واستهلاك الوقود. ماذا تستنتج؟

b. اكتب معادلة خط الانحدار.

الدرس 1-5 خط الانحدار 41

www.jnob-jo.com

مثال 3 استعمال خط الانحدار لتوقع نتائج

طرح أسئلة هادفة

س: ما أهمية إيجاد معامل الارتباط عند توقّع نتائج باستعمال معادلة خط الانحدار؟

[عندما يكون معامل الارتباط قويًا جدًّا، أي أقرب ما يكون إلى العدد 1 أو إلى العدد 1−، يكون توقّع النتائج باستعمال خط الانحدار ذا مدلول أفضل وتتضاءل قيمة الخطأ.]

س: هل معامل الارتباط لدرجات الطلاب قبل الدورة وبعدها تعتبر مؤشرًا جيدًا للتوقّع؟

[$r \approx 0.976$ هي قيمة موجبة قريبة جدًّا من العدد 1، وبالتالي فإن استعمال خط الانحدار سيعطي توقّعًا قويًا مع هامش خطأ صغير جدًّا.]

تطبيق

مثال 3 استعمال خط الانحدار لتوقع نتائج

لاختبار فائدة المشاركة في دورة تعليمية عبر الإنترنت أثناء التحضير للامتحانات، تم توزيع اختبارات متشابهة على 10 طلاب قبل الدورة وبعدها، وذلك بهدف رصد تحسّن درجات المشاركين في هذه التجربة.

يبيّن الجدول أدناه درجات الطلاب قبل الدورة التعليمية وبعدها حيث الدرجة العظمى 100

قبل (x)	24	6	80	56	8	54	56	54	6	56
بعد (y)	46	16	96	84	28	68	84	68	16	84

إذا كانت درجة طالب 60 قبل مشاركته في التجربة، أوجد درجته بعدها.

ضَع ◀ بما أن الدرجة 60 ليست من ضمن البيانات، نحصل على درجة الطالب بعد مشاركته في التجربة بالتوقع. نتأكد أولًا مما ستكون دقة هذا التوقع بإيجاد قيمة معامل الارتباط بين مجموعتي البيانات ثم نكتب معادلة خط الانحدار لإيجاد القيمة المتوقعة لدرجة الطالب بعد مشاركته في التجربة.

احسب ◀ **الخطوة 1** كوّن الجدول التالي:

x	y	x^2	y^2	xy
24	46	576	2 116	1 104
6	16	36	256	96
80	96	6 400	9 216	7 680
56	84	3 136	7 056	4 704
8	28	64	784	224
54	68	2 916	4 624	3 672
56	84	3 136	7 056	4 704
54	68	2 916	4 624	3 672
6	16	36	256	96
56	84	3 136	7 056	4 704
$\sum x = 400$ $(\sum x)^2 = 160\,000$	$\sum y = 590$ $(\sum y)^2 = 348\,100$	$\sum x^2 = 22\,352$	$\sum y^2 = 43\,044$	$\sum xy = 30\,656$

الخطوة 2 أوجد قيمة معامل الارتباط r

صيغة معامل الارتباط
$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

عوّض
$$= \frac{10(30\,656) - (400)(590)}{\sqrt{[10(22\,352) - (160\,000)][10(43\,044) - (348\,100)]}}$$

بسّط
$$\approx \frac{70\,560}{72\,324}$$

$$\approx 0.976$$

إذن، معامل الارتباط يساوي 0.976 تقريبًا.

يوجد ارتباط موجب قوي جدًا بين المتغيرين.

يتبع في الصفحة التالية

www.jnob-jo.com

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

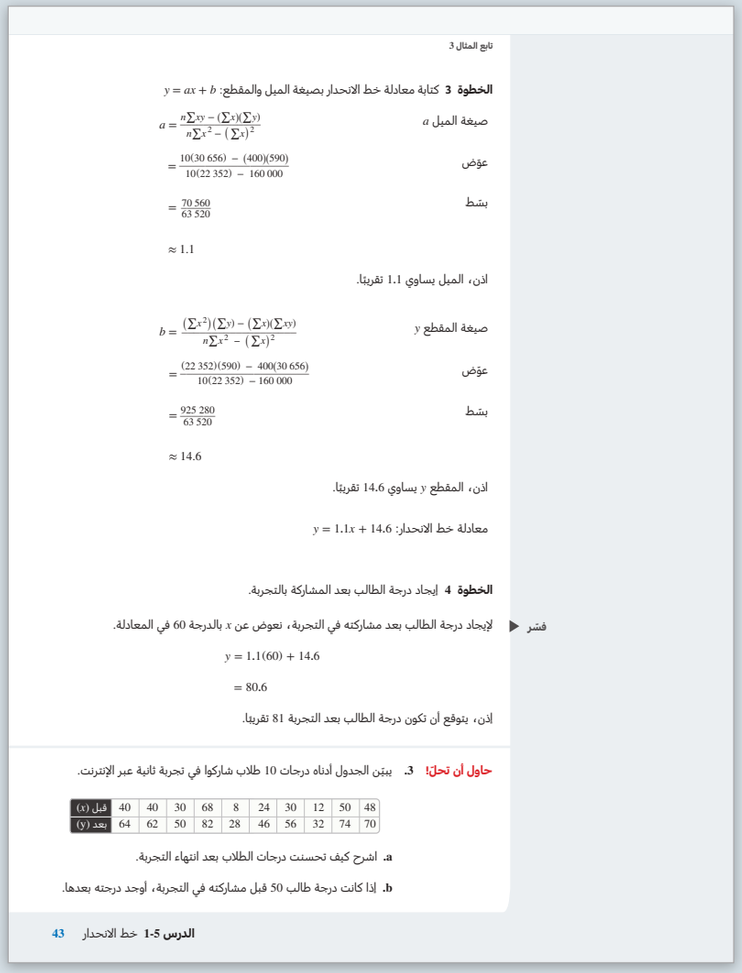
3. a. لدراسة كيفية تحسّن درجات الطلاب بعد إنتهاء التجربة يجب إيجاد معامل الارتباط بين المتغيّر x الذي يساوي درجات الطلاب قبل البدء بالدورة والمتغير y الذي يساوي درجات الطلاب بعد انتهاء الدورة. إذا كانت العلاقة موجبة قوية، تكون قد تحسّنت درجاتهم. أما إذا كانت موجبة ضعيفة فيكون التحسّن طفيفًا. وإذا كانت سالبة فلا يوجد أيّ تحسّن.

$r \approx 0.984$، إذن، يوجد علاقة موجبة قوية.

b. نحسب قيمة a و b ثم نكتب معادلة خط الانحدار $y = ax + b$ وبعد ذلك نعوّض بالعدد 50 عن x في المعادلة $y = 0.954x + 23$.

لنوجد درجة طالب بعد التجربة وكانت درجته قبلها تساوي 50،

نعوّض بالعدد 50 عن x، $y = 0.954 \times 50 + 23$، فتكون الدرجة 71 تقريبًا.



تابع المثال 3

الخطوة 3 كتابة معادلة خط الانحدار بصيغة الميل والمقطع: $y = ax + b$

صيغة الميل a

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

عوّض

$$= \frac{10(30\,656) - (400)(590)}{10(22\,352) - 160\,000}$$

بسّط

$$= \frac{70\,560}{63\,520}$$

$$\approx 1.1$$

اذن، الميل يساوي 1.1 تقريبًا.

صيغة المقطع y

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

عوّض

$$= \frac{(22\,352)(590) - 400(30\,656)}{10(22\,352) - 160\,000}$$

بسّط

$$= \frac{925\,280}{63\,520}$$

$$\approx 14.6$$

اذن، المقطع y يساوي 14.6 تقريبًا.

معادلة خط الانحدار: $y = 1.1x + 14.6$

الخطوة 4 إيجاد درجة الطالب بعد المشاركة بالتجربة.

فسّر ◀ لإيجاد درجة الطالب بعد مشاركته في التجربة، نعوض عن x بالدرجة 60 في المعادلة.

$$y = 1.1(60) + 14.6$$

$$= 80.6$$

إذن، يتوقع أن تكون درجة الطالب بعد التجربة 81 تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 3. يبيّن الجدول أدناه درجات 10 طلاب شاركوا في تجربة ثانية عبر الإنترنت.

قبل (x)	40	40	30	68	8	24	30	12	50	48
بعد (y)	64	62	50	82	28	46	56	32	74	70

a. اشرح كيف تحسنت درجات الطلاب بعد انتهاء التجربة.

b. إذا كانت درجة طالب 50 قبل مشاركته في التجربة، أوجد درجته بعدها.

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم خط الانحدار

س: متى ينمذج خط الانحدار العلاقة بين متغيرين؟ وكيف يتم إيجاده؟

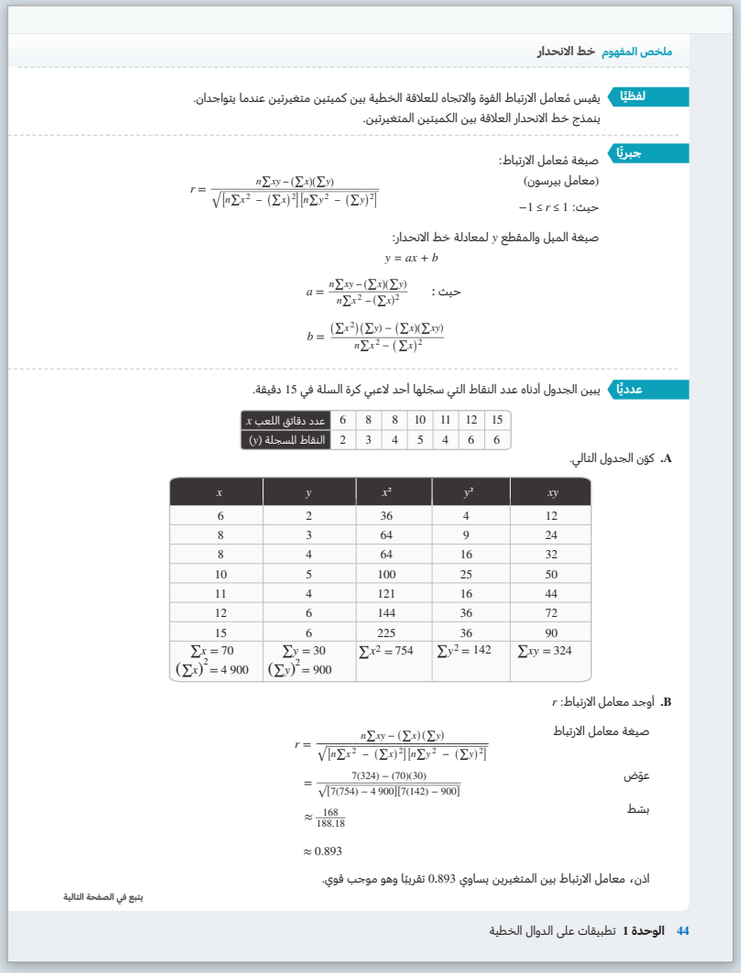
[عندما يكون معامل الارتباط بين المتغيرين قويًا جدًا (موجبًا أو سالبًا)، يتم إيجاد خط الانحدار باستعمال المعادلة: $y = ax + b$ حيث $a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

و $b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$]

خطأ شائع

التمرين b-6 قد يخطئ الطلاب في كتابة المقام عند إيجاد قيمة كل من a و b فيكتبون مقامين مختلفين.

ذكّر الطلاب بأنّ المقام للميل a هو نفسه للمقطع y وهو: $n\sum x^2 - (\sum x)^2$



ملخص المفهوم خط الانحدار

لفظيًا يقيس مُعامل الارتباط القوة والاتجاه للعلاقة الخطية بين كميتين متغيرتين عندما يتواجدان.
ينمذج خط الانحدار العلاقة بين الكميتين المتغيرتين.

جبريًا صيغة مُعامل الارتباط:
(معامل بيرسون)

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

حيث: $-1 \le r \le 1$

صيغة الميل والمقطع y لمعادلة خط الانحدار:

$$y = ax + b$$

حيث: $a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

عدديًا يبين الجدول أدناه عدد النقاط التي سجّلها أحد لاعبي كرة السلة في 15 دقيقة.

عدد دقائق اللعب x	6	8	8	10	11	12	15
النقاط المسجلة (y)	2	3	4	5	4	6	6

A. كوّن الجدول التالي.

x	y	x^2	y^2	xy
6	2	36	4	12
8	3	64	9	24
8	4	64	16	32
10	5	100	25	50
11	4	121	16	44
12	6	144	36	72
15	6	225	36	90
$\sum x = 70$ $(\sum x)^2 = 4\,900$	$\sum y = 30$ $(\sum y)^2 = 900$	$\sum x^2 = 754$	$\sum y^2 = 142$	$\sum xy = 324$

B. أوجد معامل الارتباط: r

صيغة معامل الارتباط $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$

عوّض $= \frac{7(324) - (70)(30)}{\sqrt{[7(754) - 4\,900][7(142) - 900]}}$

بسّط $\approx \frac{168}{188.18}$

≈ 0.893

اذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي 0.893 تقريبًا وهو موجب قوي.

يتبع في الصفحة التالية

44 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

الإجابات

1. يقيس معامل الارتباط r القوة والاتجاه للعلاقة الخطية بين كميتين متغيّرتين. فإذا اقتربت r من العدد 1 تكون العلاقة الخطية موجبة وقوية جدًّا. وإذا اقتربت r من العدد 1− تكون العلاقة الخطية سالبة وقوية جدًّا، أما إذا اقتربت r من الصفر فتكون العلاقة الخطية ضعيفة جدًّا (موجبة أو سالبة).

2. نحسب معامل الارتباط قبل كتابة معادلة خط الانحدار لنتأكد من وجود علاقة خطية مقبولة بين كميتين متغيرتين.

3. قيمة معامل الارتباط تدلّ على مدى قوة واتجاه العلاقة الخطية بين كميتين متغيرتين وليس لها علاقة مع الميل لمعادلة خط الانحدار. فلكل منهما صيغة مختلفة عن الآخر، وبالتالي ما قاله محمد خطأ.

4. عندما نتأكد من وجود علاقة خطية قوية بين كميتين متغيرتين، نوجد عندها معادلة خط الانحدار بصيغة الميل والمقطع $y = ax + b$، وإذ نعوّض بقيمة معينة عن x نوجد قيمة مناظرة للمتغيّر y وهذا يعطينا التوقّع المطلوب.

5. كوّن الجدول التالي:

x	y	x^2	y^2	xy
3	5	9	25	15
2	1	4	1	2
5	7	25	49	35
6	4	36	16	24
4	3	16	9	12
$\sum x = 20$ $(\sum x)^2 = 400$	$\sum y = 20$ $(\sum y)^2 = 400$	$\sum x^2 = 90$	$\sum y^2 = 100$	$\sum xy = 88$

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{5(88) - (20)(20)}{\sqrt{[5(90) - 400][5(100) - 400]}} \approx 0.566$$

إذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي 0.566
يوجد ارتباط موجب متوسط بين المتغيرين.

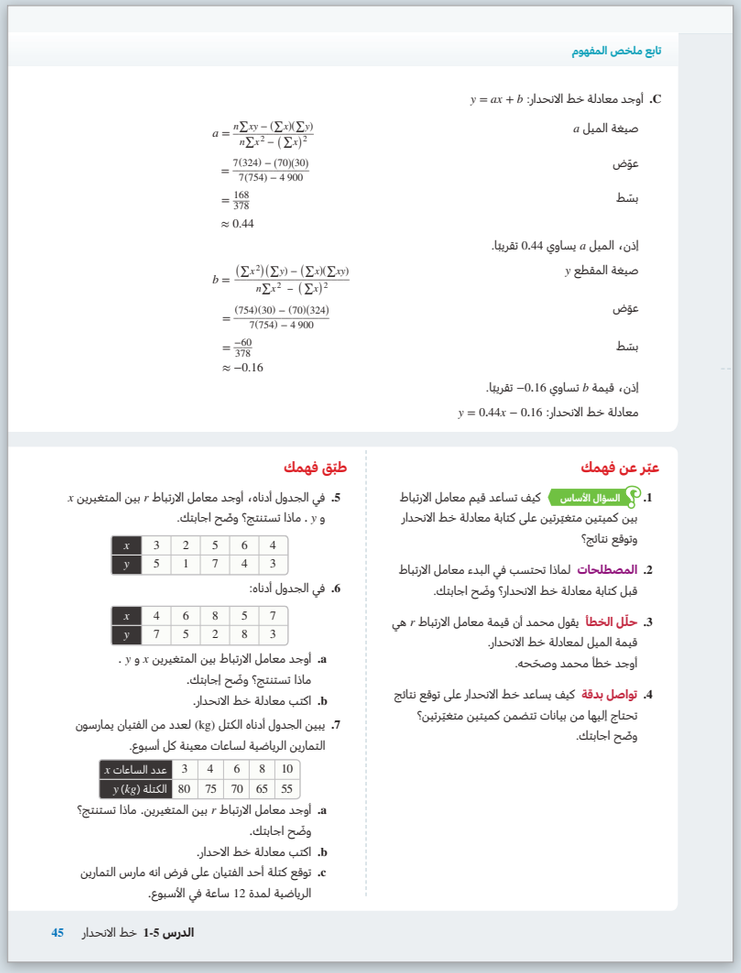
6. a.

x	y	x^2	y^2	xy
4	7	16	49	28
6	5	36	25	30
8	2	64	4	16
5	8	25	64	40
7	3	49	9	21
$\sum x = 30$ $(\sum x)^2 = 900$	$\sum y = 25$ $(\sum y)^2 = 625$	$\sum x^2 = 190$	$\sum y^2 = 151$	$\sum xy = 135$

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{5(135) - (30)(25)}{\sqrt{[5(190) - 900][5(151) - 625]}} \approx -0.93$$

إذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي 0.93−
يوجد ارتباط سالب قوي جدًّا بين المتغيرين.



تابع ملخص المفهوم

C. أوجد معادلة خط الانحدار: $y = ax + b$

صيغة الميل a

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

عوّض

$$= \frac{7(324) - (70)(30)}{7(754) - 4\,900}$$

بسّط

$$= \frac{168}{378}$$

$$\approx 0.44$$

إذن، الميل a يساوي 0.44 تقريبًا.

صيغة المقطع y

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

عوّض

$$= \frac{(754)(30) - (70)(324)}{7(754) - 4\,900}$$

بسّط

$$= \frac{-60}{378}$$

$$\approx -0.16$$

إذن، قيمة b تساوي 0.16− تقريبًا.

معادلة خط الانحدار: $y = 0.44x - 0.16$

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف تساعد قيم معامل الارتباط بين كميتين متغيّرتين على كتابة معادلة خط الانحدار وتوقع نتائج؟
2. **المصطلحات** لماذا تحتسب في البدء معامل الارتباط قبل كتابة معادلة خط الانحدار؟ وضّح اجابتك.
3. **حلّل الخطأ** يقول محمد أن قيمة معامل الارتباط r هي قيمة الميل لمعادلة خط الانحدار. أوجد خطأ محمد وصححه.
4. **تواصل بدقة** كيف يساعد خط الانحدار على توقع نتائج تحتاج إليها من بيانات تتضمن كميتين متغيّرتين؟ وضّح اجابتك.

طبّق فهمك

5. في الجدول أدناه، أوجد معامل الارتباط r بين المتغيرين x و y . ماذا تستنتج؟ وضّح اجابتك.

x	3	2	5	6	4
y	5	1	7	4	3

6. في الجدول أدناه:

x	4	6	8	5	7
y	7	5	2	8	3

   a. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y . ماذا تستنتج؟ وضّح إجابتك.
   b. اكتب معادلة خط الانحدار.

7. يبين الجدول أدناه الكتل (kg) لعدد من الفتيان يمارسون التمارين الرياضية لساعات معينة كل أسبوع.

عدد الساعات x	3	4	6	8	10
الكتلة y (kg)	80	75	70	65	55

   a. أوجد معامل الارتباط r بين المتغيرين. ماذا تستنتج؟ وضّح اجابتك.
   b. اكتب معادلة خط الانحدار.
   c. توقع كتلة أحد الفتيان على فرض انه مارس التمارين الرياضية لمدة 12 ساعة في الأسبوع.

الدرس 1-5 خط الانحدار 45

b. صيغة الميل والمقطع: $y = ax + b$

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5(135) - 30(25)}{5(190) - 900} = -1.5$$

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{190(25) - 30(135)}{5(190) - 900} = 14$$

معادلة خط الانحدار هي $y = -1.5x + 14$

7. a.

x	y	x^2	y^2	xy
3	80	9	6 400	240
4	75	16	5 625	300
6	70	36	4 900	420
8	65	64	4 225	520
10	55	100	3 025	550
$\sum x = 31$ $(\sum x)^2 = 961$	$\sum y = 345$ $(\sum y)^2 = 119\,025$	$\sum x^2 = 225$	$\sum y^2 = 24\,175$	$\sum xy = 2\,030$

www.jnob-jo.com

الإجابات

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{5(2\,030) - 31(345)}{\sqrt{[5(225) - 961][5(24\,175) - 119\,025]}}$$

$$\approx -0.99$$

إذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي -0.99، وبالتالي يوجد ارتباط سالب قوي جدًّا بين المتغيرين.

b. صيغة الميل والمقطع: $y = ax + b$

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{5(2\,030) - (31)(345)}{5(225) - 961} \approx -3.32$$

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{255(345) - (31)(2\,030)}{5(225) - 961} \approx 89.60$$

معادلة خط الانحدار هي:

$$y = -3.32x + 89.60$$

c. نعوّض $x = 12$ في معادلة خط الانحدار:

$$y = -3.32(12) + 89.6 = 49.76$$

إذن، كتلة الفتى تساوي 50 kg تقريبًا.

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
8-23	8-23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15	1
	10	3
2	16	1
	8,13,21	2
	12	3
3	11,17,18	2
	9,14,19,20,22,23	3

8. ميل خط الانحدار في المعادلة: $y = 0.087x + 46.1$ يمثل ازدياد طول الزنبرك بمقدار 0.087 cm لكل 1 g من الكتلة.

9. لا يمكن باستعمال معادلة خط الانحدار توقّع امتداد الزنبرك لأن كتلته 800 g هي خارج البيانات المعطاة.

10. ليس هناك أيّ علاقة سببية بين طول الأذرع وسرعة الجري. طول الأذرع مرتبط بأعمار الطلاب وليس بسرعة الجري.

11. $x = 18$؛ الخطأ الذي وقع فيه عبدالله أنه اعتبر $y = 18$، والصحيح أن $x = 18$.
أي إن $y = 0.08(18) + 1.77 = 3.21$.
يصبح عدد الخطوات التي يقطعها العدّاء 3 خطوات تقريبًا.

12. لا، ليس من الضروري أن يمرّ خط الانحدار بإحدى نقاط البيانات.
قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكن أن يمرّ خط الانحدار بنقطة محددة إذا كان عدد النقاط فرديًّا.

13. لا، يمكن أن لا يُعتبر خط الانحدار التمثيل الأفضل للعلاقة بين المتغيرين.

14. كلما كان معامل الارتباط قويًا، ازدادت معقولية التوقّع للنتيجة ضمن البيانات المعطاة. أما خارج هذه البيانات لا تكون معقولية التوقّع مضمونة.

15. معامل الارتباط: $r \approx -0.787$
إذن، يوجد ارتباط سالب قوي بين المتغيرين.

تدرَّب وحُل مسائل

عزز فهمك

8. برّر منطقيًّا معادلة خط الانحدار التي تربط كتلة جسم (x grams) عُلّق في زنبرك و امتداد الزنبرك (y cm) هي $y = 0.087x + 46.1$.
فسّر معنى ميل خط الإنحدار في سياق هذه المسألة.

9. ابن الحجج الرياضية افترض أن البيانات التي من خلالها أُنشئت معادلة خط الانحدار الواردة في السؤال رقم 8 هي على الشكل التالي:
(100 , 55) , (200 , 63) , (300 , 72) , (400 , 82) , (500 , 89)
هل تستطيع أن تتوقع امتداد الزنبرك الذي ينتج عن تعليق جسم كتلته 800 g؟

10. مهارات التفكير العليا إذا كان الارتباط بين طول ذراع مجموعة من الطلاب و سرعة الجري لديهم قوي جدًّا، هل هذا يعني أن الأذرع القصيرة تُسبب بطأ في سرعة الجري، أو هل هذا يعني أن سرعة الجري المرتفعة تسبب ازديادًا في طول الذراع؟

11. حلّل الخطأ معادلة خط الانحدار التي تربط عدد الخطوات (بالأقدام) التي تقطعها مجموعة من العدّائين بسرعة جريهم هي $y = 0.08x + 1.77$ حيث يمثّل x السرعة (ft/s) ويمثّل y عدد الخطوات بالأقدام.
قال عبدالله:" أتوقع من هذه المعادلة أن عدد الخطوات التي يقطعها عدّاء سرعة جريه 18 ft/s هو 202 خطوة".
أوجد الخطأ عند عبدالله وصحّحه.

12. فكر وثابر في الحل هل من الضروري أن يمر خط الانحدار بإحدى نقاط البيانات؟ إذا كانت إجابتك لا، اشرح متى يمر خط الانحدار بإحدى نقاط البيانات.

13. روابط في الرياضيات إذا كانت مجموعة البيانات ذات متغيرين الممثلة في المستوى الإحداثي تتبع شكل منحنى، هل يكون خط الانحدار التمثيل الأفضل للعلاقة بين المتغيرين؟

14. برّر منطقيًّا عند استخدامك معادلة خط الانحدار لتتوقع نتائج، كيف تحكم على معقولية توقعك؟

تدرّب

15. يبيّن الجدول أدناه عدد ساعات الدراسة في اليوم لبعض الطلاب وعدد ساعات النوم المقابلة لها.

عدد ساعات الدراسة (x)	2	4	2	3	3	1
عدد ساعات النوم (y)	7	5	6	5	7	8

أوجد مُعامل الارتباط بين المتغيرين x و y . ماذا تستنتج؟
انظر المثال 1

16. يبيّن الجدول أدناه الدرجات التي نالها 8 طلاب عند إجابتهم عن نموذجين من الأسئلة في مادة الرياضيات حيث الدرجة العظمى 10

درجة النموذج الأول (x)	6	5	8	8	7	6	10
درجة النموذج الثاني (y)	8	7	7	10	6	8	10

a. أوجد مُعامل الارتباط بين المتغيرين x و y . ماذا تستنتج؟

b. اكتب معادلة خط الانحدار. انظر المثال 2

17. يبيّن الجدول أدناه كمية المياه المستهلكة (Liter) المرتبطة بعدد الأفراد في كل منزل.

عدد الأفراد (x)	2	3	4	5	3	5	6
كمية المياه (y)	200	250	300	400	350	450	500

a. أوجد مُعامل الارتباط r بين المتغيرين x و y . ماذا تستنتج؟ وضّح إجابتك.

b. اكتب معادلة خط الانحدار.

c. إذا كان عدد الأفراد في المنزل 10، أوجد كمية المياه المتوقع استهلاكها. انظر المثال 3

www.jnob-jo.com

طبّق

18. **نمذج** يبين الجدول أدناه طول وعرض 10 أوراق أشجار.

الطول (mm)	العرض (mm)
128	42
120	30
146	41
152	51
125	37
86	33
149	54
145	42
120	38
104	34

a. أوجد معامل الارتباط بين طول الورقة وعرضها.

b. فسّر معنى معامل الارتباط الذي حصلت عليه في الجزء a.

c. اكتب معادلة خط الانحدار.

d. فسّر معنى معاملي معادلة خط الانحدار.

e. استعمل خط الانحدار لتتوقع عرض ورقة طولها 138 mm.

19. **فكر وثابر في الحل** يبين الجدول أدناه عدد الطلاب وعدد المعلّمين في مجموعة من المدارس.

عدد المعلّمين	عدد الطلاب
84	910
76	496
62	813
110	1 312
49	381
114	753
52	653
92	1 050

a. أوجد معامل الارتباط بين عدد المعلّمين وعدد الطلاب حيث يمثّل x عدد المعلّمين و y عدد الطلاب.

b. فسّر معنى معامل الارتباط الذي حصلت عليه في الجزء a.

c. اكتب معادلة خط الانحدار.

d. استعمل خط الانحدار لتتوقع عدد المعلّمين في مدرسة تحتوي على 600 طالب.

e. ما دقة النتيجة المتوقعة التي حصلت عليها في الجزء d؟

20. **برّر منطقيًّا** يبين الجدول أدناه درجات الحرارة المسجلة لذوبان وغليان 4 أنواع من المعادن.

المعدن	حرارة الغليان (°C)	حرارة الذوبان (°C)
a	1 487	848
b	2 831	1 541
c	3 277	1 677
d	3 377	1 917

هل تستطيع استعمال معادلة خط الانحدار لتتوقع درجة الغليان لمعدن درجة ذوبانه 550°C 3؟ وضّح إجابتك.

تدرّب على اختبار

21. يمثّل خط الانحدار الذي يربط كمية المياه (بالسنتيمترات) التي تروي عددًا من الأراضي الزراعية مع كمية التبن (بالأطنان) التي تنتجه هذه الأراضي بالمعادلة التالية:

$y = 3.667 + 0.038x$

حيث يمثّل x كمية المياه بالسنتيمترات و y كمية التبن بالأطنان. فسّر معنى معاملي هذه المعادلة.

22. **اختبار SAT/ACT** استعمل معادلة خط الانحدار في التمرين السابق لتتوقع كمية التبن التي تنتجها قطعة أرض رُويت باستعمال 28 سنتيمترًا من المياه. حدد الإجابة الصحيحة.

Ⓐ 3.471 ton

Ⓑ 4.731 ton

Ⓒ 460 ton

Ⓓ 640 ton

الإجابات

16. a. معامل الارتباط: $r \approx 0.586$

إذن، يوجد ارتباط موجب متوسط بين المتغيرين.

b. معادلة خط الانحدار: $y = 0.534x + 4.186$

17. a. معامل الارتباط: $r \approx 0.927$

إذن، يوجد ارتباط موجب قوي جدًا بين المتغيرين.

b. معادلة خط الانحدار: $y = 70.833x + 66.667$

c. $x = 10$

$y = 70.833(10) + 66.667 = 774.997$

كمية المياه المتوقع استهلاكها 755 لتر تقريبًا.

18. a. معامل الارتباط: $r \approx 0.787$

b. يوجد ارتباط موجب قوي بين المتغيرين.

c. معادلة خط الانحدار: $y = 2.204x + 38.9$،

باعتبار أن x تمثّل عرض ورقة الشجر (mm)

و y يمثّل طول ورقة الشجر (mm).

d. الميل a = يمثّل مقدار زيادة 2.2 mm في طول الورقة لكل 1 mm من عرضها.

المقطع $y = b$ يمثّل القيمة الصغرى لطول ورقة الشجر، أي 38.9 mm

e. $y = 138$

$138 = 2.204x + 38.9$

$x \approx 44.964$

العرض المتوقع لورقة الشجر هو 45 mm تقريبًا.

19. a. معامل الارتباط: $r \approx 0.679$

b. هناك ارتباط قوي بين عدد الأساتذة وعدد الطلاب.

c. معادلة خط الانحدار: $y = 0.056x + 35.19$

d. $x = 600$

$y = 0.056 \times 600 + 35.19$

$y = 68.79$

إذن، عدد المعلمين المتوقع 69 تقريبًا.

e. لعدد من الطلاب يساوي 600، هناك دقة عالية في عدد المعلمين المتوقّع لأن عدد الطلاب هو ضمن البيانات المعطاة في الجدول.

20. لا، لا يمكننا استعمال معادلة خط الانحدار لأن درجة انصهار المعدن 3 550 °C هي خارج البيانات المعطاة، إذ لا يمكن الجزم في استمرار العلاقة الخطية بين درجة الذوبان ودرجة الغليان الانصهار خارج إطار البيانات المعطاة.

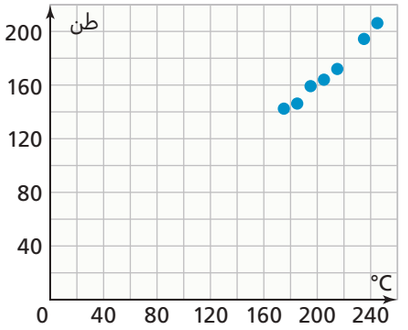
21. $y = 0.038x + 3.667$

يمثل الميل $a = 0.038$ كمية التبن الناتجة من 1 cm من المياه، و يمثل المقطع $b = 3.667$:y كمية التبن الصغرى الناتجة عن عدم استعمال أي كمية من المياه.

www.jnob-jo.com

الإجابات

23. a.



b. معادلة خط الانحدار:

$y = 0.924x - 22.7$

c. $x = 200$

$y = 0.924(200) - 22.7 = 162.1$

إذن، كمية مشتقات الحليب الناتجة عن حرارة 200 °C هي 162 طنًّا تقريبًا.

d.

الحرارة x (°C)	الكمية y (بالأطنان)	القيمة المتوقعة	القيمة المتبقية
175	142.4	139	3.4
185	146.2	148.2	–2
195	159.2	157.5	1.7
205	164.1	166.7	–2.6
215	172.1	175.96	–3.86
225	186.2	185.2	1
235	194.3	194.4	–0.1
245	206.2	203.7	2.5

e. نلاحظ أن القيم المتبقية للكميات التي حصل عليها أحمد جميعها موجبة، بينما تلك التي حصل عليها ناصر جميعها سالبة.

23. مهمة أدائية يبين الجدول أدناه درجات الحرارة المسجلة في إحدى المصانع لإنتاج كميات (بالأطنان) من مشتقات الحليب.

الحرارة (°C)	الكمية (بالأطنان)
175	142.4
185	146.2
195	159.2
205	164.1
215	172.1
225	186.2
235	194.3
245	206.2

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. اكتب معادلة خط الانحدار الذي يربط متغيري الحرارة وكمية مشتقات الحليب، حيث يمثل x الحرارة و y كمية مشتقات الحليب.

c. توقع كمية مشتقات الحليب التي تنتج عن حرارة 200°C

d. احسب القيمة المتبقية لكل مفردة في البيانات.

e. افترض أن أحمد فاس كميات مشتقات الحليب الناتجة عن درجات الحرارة 175°C, 195°C, 225°C, 245°C، بينما فاس ناصر كميات الحليب الناتجة عن الدرجات الأخرى المسجلة.
ماذا تلاحظ حول القيم المتبقية للكميات التي حصل عليها أحمد والكميات التي حصل عليها ناصر؟

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

ما العلاقة بين الدوال الخطية والمتتاليات الحسابية وخطوط التطابق لبيانات مزدوجة؟ وكيف يمكن استعمال كل منها في نمذجة مواقف وحل مسائل؟

عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمين أمثلة تدعم إجاباتهم. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- عندما يكون ناتج قسمة التغير في قيمة y على التغير في قيمة x ثابتًا، تكون الدالة دالة خطية ويكون تمثيلها البياني مستقيمًا.
- يمكن استعمال الدوال الخطية لتوقع قيمة متغير واحد كالمسافة، بمعلومية قيمة متغير آخر كالزمن.
- بحسب تعريف المتتالية الحسابية، تقع كل النقاط الممثلة لها على نفس المستقيم في المستوى الإحداثي.
- عندما يمكن نمذجة علاقة ما بدالة خطية، يمثل خط التطابق الأفضل هذه العلاقة ويدل معامل الارتباط على قوة واتجاه هذه العلاقة.
- يمكن كذلك نمذجة خطوط التطابق لبيانات مزدوجة بدالة خطية، كما في حالة خط الانحدار.
- يمكن استعمال معادلات هذه الخطوط لوضع التوقعات أو إتخاذ القرارات في مواقف حياتية.

الإجابات

2. علاقة موجبة
3. القيمة المتبقية
4. المتتالية
5. خط الانحدار
6. معامل الارتباط
7. الدالة الخطية

الوحدة 1

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. ما العلاقة بين الدوال الخطية والمتتاليات الحسابية وخطوط التطابق لبيانات مزدوجة؟ وكيف يمكن استعمال كل منها في نمذجة مواقف وحل مسائل؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. عندما تتزايد y مع تزايد x، يكون بين مجموعتي البيانات _____.
3. _____ هي الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة المتوقعة.
4. _____ هي مجموعة أعداد مرتبة غالبًا ما تشكل نمطًا.
5. خط الاتجاه الذي يمذج العلاقة بين متغيرين معروضين على مخطط الانتشار هو _____.
6. يقيس _____ القوة والاتجاه للعلاقة بين متغيرين في نموذج خطي.
7. تُمثل _____ بيانيًا بمستقيم.

- الدالة الخطية
- معامل الارتباط
- علاقة موجبة
- القيمة المتبقية
- المتتالية
- خط الانحدار
- معامل الارتباط
- حد المتتالية

مراجعة الوحدة 1

الوحدة 1 مراجعة الوحدة 49

www.jnob-jo.com

الإجابات

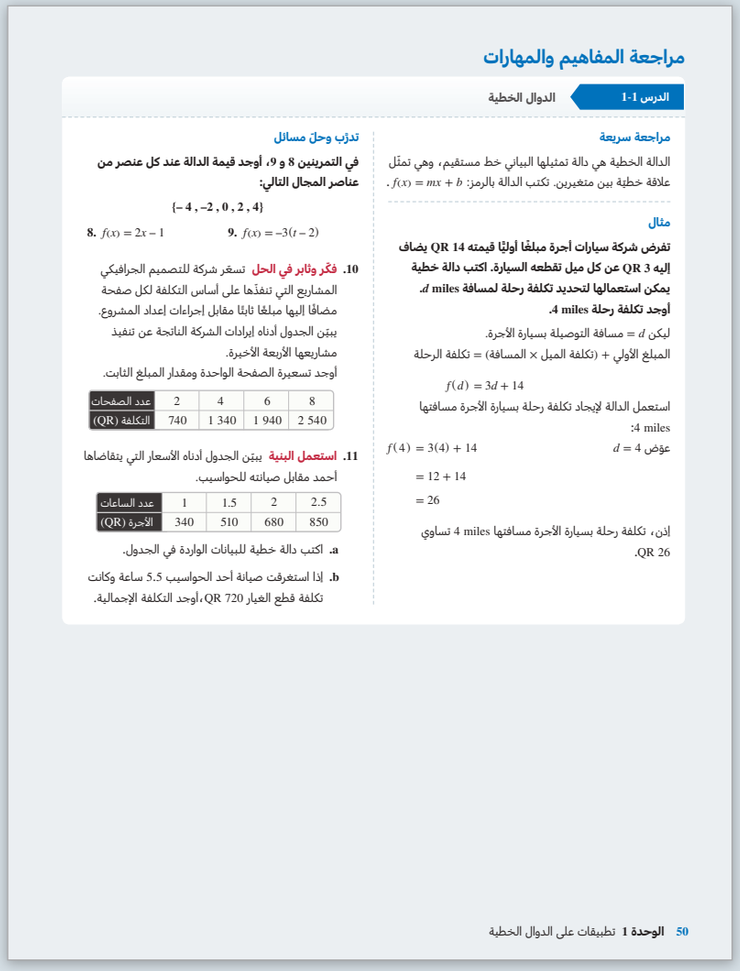
8. $\{-9, -5, -1, 3, 7\}$

9. $\{18, 12, 6, 0, -6\}$

10. معدل تكلفة الصفحة QR 300؛ مقدار المبلغ الثابت QR 140.

11. **a.** $y = 340x$

b. $y = 340(5.5) + 720 = \text{QR } 2\,590$



مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-1 الدوال الخطية

مراجعة سريعة

الدالة الخطية هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم، وهي تمثّل علاقة خطية بين متغيرين. تكتب الدالة بالرمز: $f(x) = mx + b$.

مثال

تفرض شركة سيارات أجرة مبلغًا أوليًا قيمته QR 14 يضاف إليه QR 3 عن كل ميل تقطعه السيارة. اكتب دالة خطية يمكن استعمالها لتحديد تكلفة رحلة لمسافة d miles. أوجد تكلفة رحلة 4 miles.

ليكن d = مسافة التوصيلة بسيارة الأجرة.

المبلغ الأولي + (تكلفة الميل × المسافة) = تكلفة الرحلة

$f(d) = 3d + 14$

استعمل الدالة لإيجاد تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 miles:

عوّض $d = 4$ $\quad f(4) = 3(4) + 14$

$= 12 + 14$

$= 26$

إذن، تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 miles تساوي QR 26.

تدرّب وحل مسائل

في التمرينين 8 و 9، أوجد قيمة الدالة عند كل عنصر من عناصر المجال التالي:

$\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

8. $f(x) = 2x - 1$ **9.** $f(x) = -3(t - 2)$

10. فكّر وثابر في الحل تسعّر شركة للتصميم الجرافيكي المشاريع التي تنفذّها على أساس التكلفة لكل صفحة مضافًا إليها مبلغًا ثابتًا مقابل إجراءات إعداد المشروع. يبيّن الجدول أدناه إيرادات الشركة الناتجة عن تنفيذ مشاريعها الأربعة الأخيرة.

أوجد تسعيرة الصفحة الواحدة ومقدار المبلغ الثابت.

عدد الصفحات	2	4	6	8
التكلفة (QR)	740	1 340	1 940	2 540

11. استعمل البنية يبيّن الجدول أدناه الأسعار التي يتقاضاها أحمد مقابل صيانته للحواسيب.

عدد الساعات	1	1.5	2	2.5
الأجرة (QR)	340	510	680	850

a. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول.

b. إذا استغرقت صيانة أحد الحواسيب 5.5 ساعة وكانت تكلفة قطع الغيار QR 720، أوجد التكلفة الإجمالية.

50 **الوحدة 1** تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

الإجابات

12. كلا، $-3 = 48 - 45$ و $-4 = 45 - 41$، إذن، لا يوجد فرق ثابت.

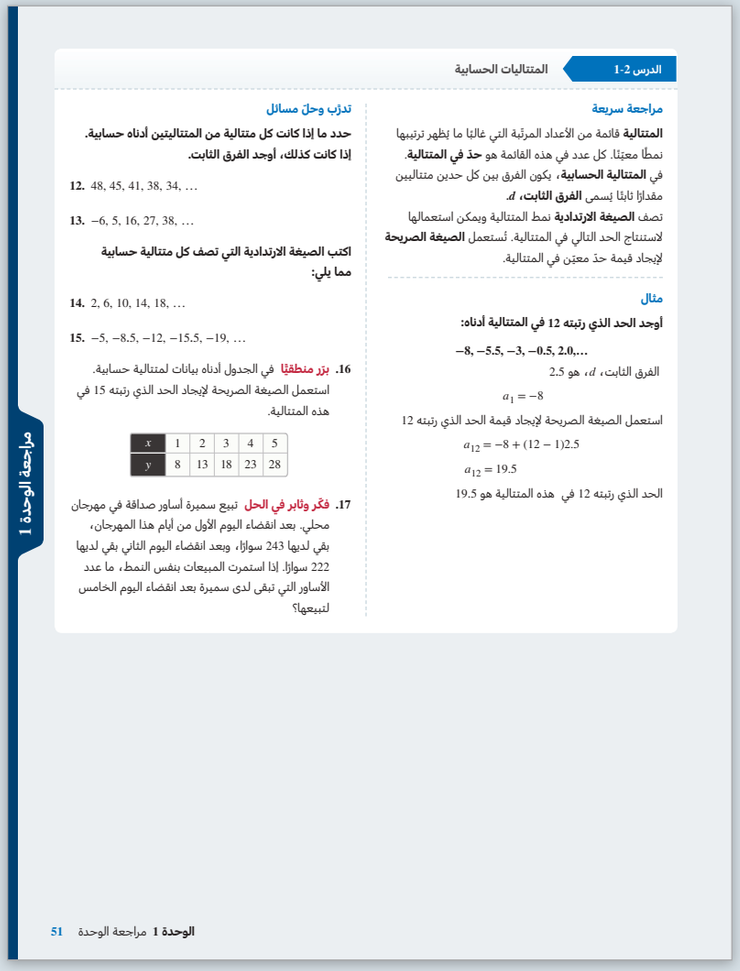
13. نعم، 11

14. $a_1 = 2; a_n = a_{n-1} + 4$

15. $a_1 = -5; a_n = a_{n-1} - 3.5$

16. $a_n = 8 + 5(n - 1)$ أو $a_n = 5n + 3$؛ 78

17. يبقى لدى سميرة 159 سوارًا بعد انقضاء اليوم الخامس لتبيعها.



الدرس 2-1 المتتاليات الحسابية

مراجعة سريعة

المتتالية قائمة من الأعداد المرتّبة التي غالبًا ما يُظهر ترتيبها نمطًا معيّنًا. كل عدد في هذه القائمة هو **حدّ في المتتالية**.
في **المتتالية الحسابية**، يكون الفرق بين كل حدين متتاليين مقدارًا ثابتًا يُسمى **الفرق الثابت**، d.
تصف **الصيغة الارتدادية** نمط المتتالية ويمكن استعمالها لاستنتاج الحد التالي في المتتالية. تُستعمل **الصيغة الصريحة** لإيجاد قيمة حدّ معيّن في المتتالية.

مثال

أوجد الحد الذي رتبته 12 في المتتالية أدناه:

$-8, -5.5, -3, -0.5, 2.0, \ldots$

الفرق الثابت، d، هو 2.5

$a_1 = -8$

استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة الحد الذي رتبته 12

$a_{12} = -8 + (12 - 1)2.5$

$a_{12} = 19.5$

الحد الذي رتبته 12 في هذه المتتالية هو 19.5

تدرّب وحلّ مسائل

حدد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليتين أدناه حسابية. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت.

12. 48, 45, 41, 38, 34, …

13. −6, 5, 16, 27, 38, …

اكتب الصيغة الارتدادية التي تصف كل متتالية حسابية مما يلي:

14. 2, 6, 10, 14, 18, …

15. −5, −8.5, −12, −15.5, −19, …

16. برّر منطقيًا في الجدول أدناه بيانات لمتتالية حسابية. استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الذي رتبته 15 في هذه المتتالية.

x	1	2	3	4	5
y	8	13	18	23	28

17. فكّر وتأبّر في الحل تبيع سميرة أساور صداقة في مهرجان محلي. بعد انقضاء اليوم الأول من أيام هذا المهرجان، بقي لديها 243 سوارًا، وبعد انقضاء اليوم الثاني بقي لديها 222 سوارًا. إذا استمرت المبيعات بنفس النمط، ما عدد الأساور التي تبقى لدى سميرة بعد انقضاء اليوم الخامس لتبيعها؟

الوحدة 1 مراجعة الوحدة 51

الوحدة 1 مراجعة الوحدة

www.jnob-jo.com

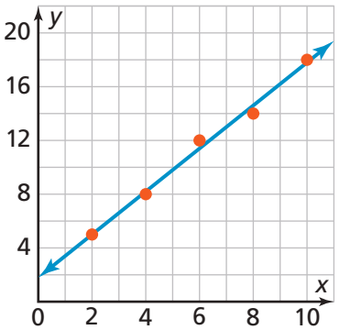
الإجابات

18. لا يوجد ترابط

19. ترابط سالب

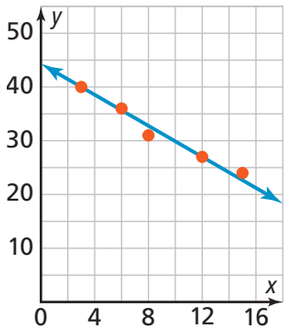
20. يجب أن يقع خط التطابق الأفضل بحيث يكون معدل المسافة بين نقاط البيانات والمستقيم أقل ما يمكن.

21.



قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $y = 1.6x + 1.8$

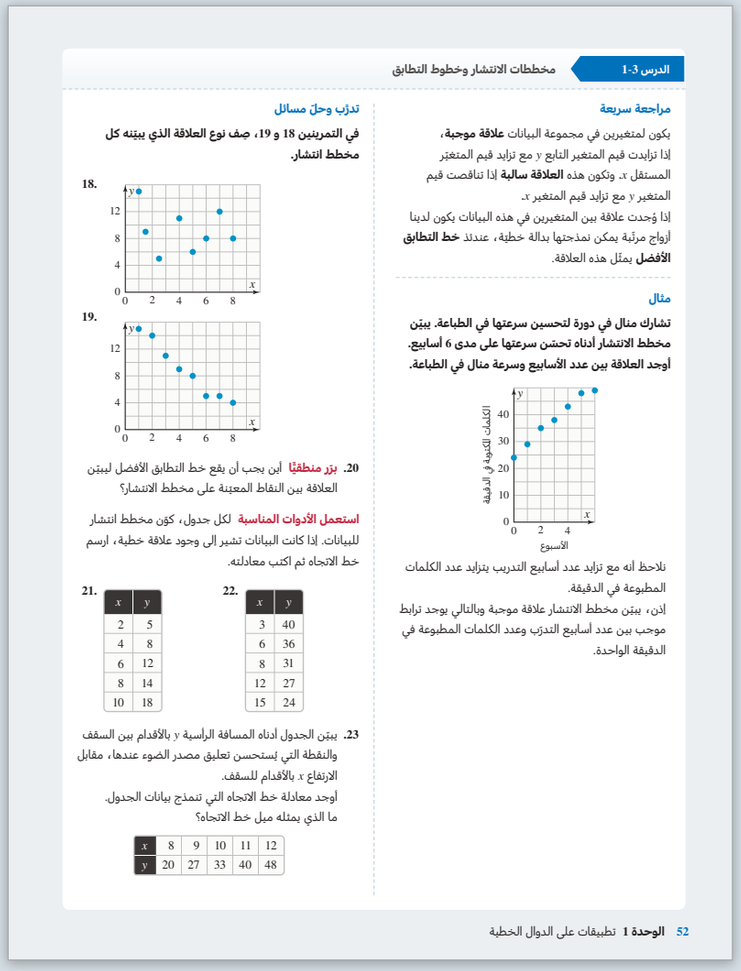
22.



قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $y = -\frac{13}{9}x + 44\frac{1}{3}$

23. $y = \frac{20}{3}x - 33\frac{1}{3}$

يمثّل ميل خط الاتجاه التغير في المسافة بين مصدر الضوء والسقف التي يُستحسن تعليق الضوء عندها، عند كل تزايد مقداره قدم واحد في ارتفاع السقف.



الدرس 3-1 مخططات الانتشار وخطوط التطابق

مراجعة سريعة

يكون لمتغيرين في مجموعة البيانات **علاقة موجبة**، إذا تزايدت قيم المتغير التابع y مع تزايد قيم المتغيّر المستقل x. وتكون هذه **العلاقة سالبة** إذا تناقصت قيم المتغير y مع تزايد قيم المتغير x.

إذا وُجدت علاقة بين المتغيرين في هذه البيانات يكون لدينا أزواج مرتّبة يمكن نمذجتها بدالة خطية، عندئذ **خط التطابق الأفضل** يمثّل هذه العلاقة.

مثال

تشارك منال في دورة لتحسين سرعتها في الطباعة. يبيّن مخطط الانتشار أدناه تحسن سرعتها على مدى 6 أسابيع. أوجد العلاقة بين عدد الأسابيع وسرعة منال في الطباعة.

نلاحظ أنه مع تزايد عدد أسابيع التدريب يتزايد عدد الكلمات المطبوعة في الدقيقة.

إذن، يبيّن مخطط الانتشار علاقة موجبة وبالتالي يوجد ترابط موجب بين عدد أسابيع التدرّب وعدد الكلمات المطبوعة في الدقيقة الواحدة.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 18 و 19، صِف نوع العلاقة الذي يبيّنه كل مخطط انتشار.

18.

19.

20. برز منطقيًا أين يجب أن يقع خط التطابق الأفضل ليبيّن العلاقة بين النقاط المعيّنة على مخطط الانتشار؟

استعمل الأدوات المناسبة لكل جدول، كوّن مخطط انتشار للبيانات. إذا كانت البيانات تشير إلى وجود علاقة خطية، ارسم خط الاتجاه ثم اكتب معادلته.

21.

x	y
2	5
4	8
6	12
8	14
10	18

22.

x	y
3	40
6	36
8	31
12	27
15	24

23. يبيّن الجدول أدناه المسافة الرأسية y بالأقدام بين السقف والنقطة التي يُستحسن تعليق مصدر الضوء عندها، مقابل الارتفاع x بالأقدام للسقف.

أوجد معادلة خط الاتجاه التي تنمذج بيانات الجدول.

ما الذي يمثله ميل خط الاتجاه؟

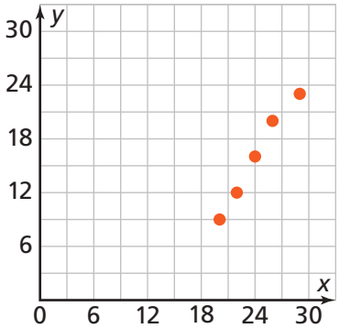
x	8	9	10	11	12
y	20	27	33	40	48

52 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

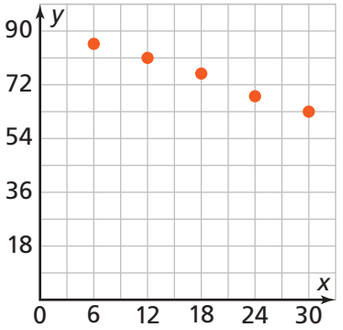
www.jnob-jo.com

الإجابات

24. $y = 1.8x - 27.2$

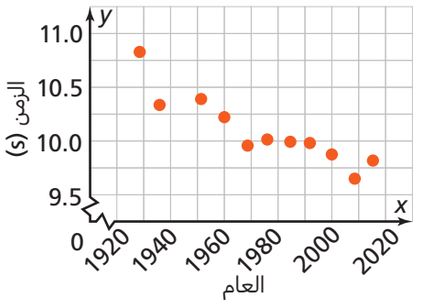


25. $y = -0.93x + 91.4$



26. الاستكمال الداخلي والخارجي هما طريقتان لإجراء توقعات حول قيم مجموعة بيانات. من جهة ثانية، يتم إجراء التوقعات في الاستكمال الداخلي ضمن مدى القيم المعلومة في حين أنه يتم إجراء التوقعات في الاستكمال الخارجي خارج مدى القيم المعلومة. لا تؤديان نفس دقة التوقع.

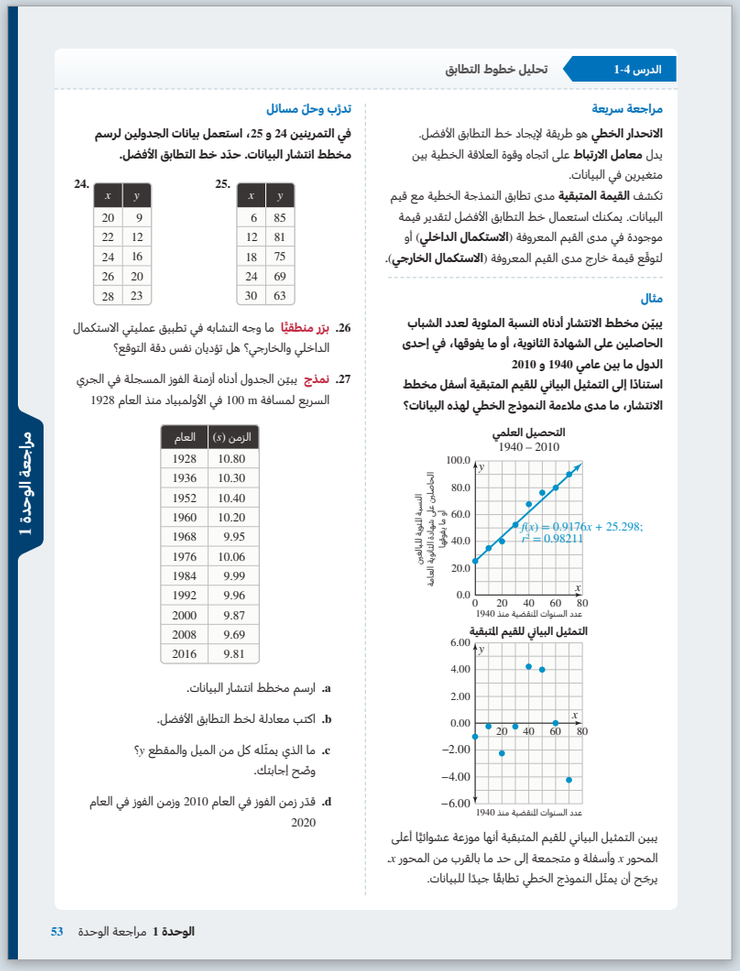
27. a.



b. $y = -0.0099x + 29.7664$

c. يدل الميل على أن الزمن القياسي المسجل يتناقص بمقدار 0.0099 ثانية تقريبًا في العام. يمثّل المقطع y كم سيكون الزمن القياسي المسجل في العام 0

d. بالنسبة إلى النموذج، الزمن القياسي المسجل في العام 2010 كان 9.8674 ثانية، والزمن القياسي المسجل في العام 2020 هو 9.7684 ثانية.



الدرس 1-4 تحليل خطوط التطابق

مراجعة سريعة

الانحدار الخطي هو طريقة لإيجاد خط التطابق الأفضل.

يدل **معامل الارتباط** على اتجاه وقوة العلاقة الخطية بين متغيرين في البيانات.

تكشف **القيمة المتبقية** مدى تطابق النمذجة الخطية مع قيم البيانات. يمكنك استعمال خط التطابق الأفضل لتقدير قيمة موجودة في مدى القيم المعروفة (**الاستكمال الداخلي**) أو لتوقّع قيمة خارج مدى القيم المعروفة (**الاستكمال الخارجي**).

مثال

يبيّن مخطط الانتشار أدناه النسبة المئوية لعدد الشباب الحاصلين على الشهادة الثانوية، أو ما يفوقها، في إحدى الدول ما بين عامي 1940 و 2010

استنادًا إلى التمثيل البياني للقيم المتبقية أسفل مخطط الانتشار، ما مدى ملاءمة النموذج الخطي لهذه البيانات؟

التحصيل العلمي
1940 – 2010

التمثيل البياني للقيم المتبقية

يبين التمثيل البياني للقيم المتبقية أنها موزعة عشوائيًا أعلى المحور x وأسفله و متجمعة إلى حد ما بالقرب من المحور x. يرجح أن يمثّل النموذج الخطي تطابقًا جيدًا للبيانات.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 24 و 25، استعمل بيانات الجدولين لرسم مخطط انتشار البيانات. حدّد خط التطابق الأفضل.

24.

x	y
20	9
22	12
24	16
26	20
28	23

25.

x	y
6	85
12	81
18	75
24	69
30	63

26. برّر منطقيًا ما وجه التشابه في تطبيق عمليتي الاستكمال الداخلي والخارجي؟ هل تؤديان نفس دقة التوقع؟

27. نمذج يبيّن الجدول أدناه أزمنة الفوز المسجلة في الجري السريع لمسافة 100 m في الأولمبياد منذ العام 1928

العام	الزمن (s)
1928	10.80
1936	10.30
1952	10.40
1960	10.20
1968	9.95
1976	10.06
1984	9.99
1992	9.96
2000	9.87
2008	9.69
2016	9.81

a. ارسم مخطط انتشار البيانات.

b. اكتب معادلة لخط التطابق الأفضل.

c. ما الذي يمثّله كل من الميل والمقطع y؟ وضّح إجابتك.

d. قدّر زمن الفوز في العام 2010 وزمن الفوز في العام 2020

الوحدة 1 مراجعة الوحدة 53

مراجعة الوحدة 1

www.jnob-jo.com

28. a.

x	y	x^2	y^2	xy
4	12	16	144	48
5	10	25	100	50
6	8	36	64	48
8	5	64	25	40
10	4	100	16	40
$\sum x = 33$ $(\sum x)^2 = 1089$	$\sum y = 39$ $(\sum y)^2 = 1\,521$	$\sum x^2 = 241$	$\sum y^2 = 349$	$\sum xy = 226$

$$r = \frac{5(226) - (33)39}{\sqrt{[5(241) - 1089][5(349) - 1521]}}$$
$$= \frac{1130 - 1287}{\sqrt{116}\sqrt{224}} = \frac{-157}{\sqrt{25\,984}} = \frac{-157}{161.2} \approx -0.974$$

يوجد علاقة سالبة قوية بين المتغيرين x و y.

b. معادلة خط الانحدار: $y = ax + b$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{-157}{116} \approx -1.35$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{(241)(39) - (33)(226)}{116}$$
$$= \frac{9\,399 - 7\,458}{116}$$
$$\approx 16.7$$

إذن، معادلة خط الانحدار تساوي: $y = -1.35x + 16.7$

c. عوّض العدد $x = 7$ في المعادلة:

$$y = -1.35(7) + 16.7 = 7.25$$

يحتاج 7 عمال لمدة 7 ايام كي ينجزوا هذا السور.

29. a. الميل يساوي -0.45 بما أن قيمة الميل سالبة فهذا يعني أن كلما ازداد سعر الكتاب فإن البيع يتناقص.

b. عوّض العدد $x = 40$ في المعادلة:

$$y = -1.35x + 48$$
$$y = -0.45(40) + 48 = 30$$

إذن، عدد الكتب المبيعة يساوي 30 كتابًا.

نلاحظ أن عدد الكتب المبيعة بسعر QR 40 في الجدول يساوي 35، وهذا يفسر أن خط الانحدار لا يمر بالضرورة بكل النقاط المعينة في المستوى الإحداثي.

الدرس 1-5 خط الانحدار

مراجعة سريعة

يقيس معامل الارتباط القوة والاتجاه بين كميتين متغيرتين عندما يتواجدان في مجموعة بيانات واحدة ويُرمز إليه بالحرف r، حيث $-1 \le r \le 1$

يمكن إيجاد قيمة r باستعمال **طريقة بيرسون**:

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

حيث n عدد الأزواج (x, y) في البيانات.

تربط **معادلة خط الانحدار** $y = ax + b$ بين المتغيرين x و y

ويمكن إيجادها بطريقة **المربعات الصغرى** حيث:

$$a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

والتمثيل البياني لهذه المعادلة هو خط التطابق الأفضل. تساعدنا هذه المعادلة على توقع نتائج استنادًا إلى بيانات معطاة.

مثال

يبيّن الجدول أدناه عدد أكياس الأرز المتبقية في أحد المتاجر على مدى 6 أيام متتالية.

عدد الأيام (x)	1	2	3	4	5	6
عدد أكياس الأرز (y)	12	11	10	8	7	7

A. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين. ماذا تستنتج؟

نبدأ بتكوين الجدول أدناه:

x	1	2	3	4	5	6	$\sum x = 21$
y	12	11	10	8	7	7	$\sum y = 55$
x^2	1	4	9	16	25	36	$\sum x^2 = 91$
y^2	144	121	100	64	49	49	$\sum y^2 = 527$
xy	12	22	30	32	35	42	$\sum xy = 173$

$(\sum x)^2 = 441$

$(\sum y)^2 = 3\,025$

صيغة معامل الارتباط $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$

تدرّب وحلّ مسائل

28. يبيّن الجدول أدناه عدد العمال وعدد الأيام اللازمة لإنهاء بناء سور حول حديقة.

عدد العمال (x)	4	5	6	8	10
عدد الأيام (y)	12	10	8	5	4

a. أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين x و y، ماذا تستنتج؟

b. اكتب معادلة خط الانحدار.

c. قدّر عدد الأيام التي ينجز فيها 7 عمال بناء هذا السور.

29. فكّر وثابر في الحل يبيّن الجدول أدناه عدد الكتب المبيعة في إحدى المكتبات وسعر كل كتاب.

سعر الكتاب (x)	20	30	40	50	60
عدد الكتب المبيعة (y)	40	30	35	25	20

a. معادلة خط الانحدار التي تربط المتغيرين هي $y = -0.45x + 48$

فسّر معنى ميل خط الانحدار في سياق هذه المسألة.

b. استعمل معادلة خط الانحدار لايجاد عدد الكتب المبيعة إذا كان سعر الكتاب الواحد QR 40.

قارن النتيجة التي حصلت عليها مع عدد الكتب المبيعة في الجدول والمناظر للسعر QR 40.

54 الوحدة 1 تطبيقات على الدوال الخطية

www.jnob-jo.com

عوّض $r = \frac{6(173) - (21)(55)}{\sqrt{[6(91) - 441][6(527) - 3\,025]}}$

بسّط $\approx \frac{-117}{119.9}$

الحل ≈ -0.976

إذن، معامل الارتباط بين المتغيرين يساوي 0.975– تقريبًا.
يوجد ارتباط سالب قوي بين المتغيرين.

B. اكتب معادلة خط الانحدار.

معادلة خط الانحدار $y = ax + b$

صيغة ميل خط الانحدار $a = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

عوّض $a = \frac{6(173) - (21)(55)}{6(91) - 441}$

بسّط $\approx \frac{-117}{105}$

الحل ≈ -1.114

إذن، الميل a يساوي 1.114– تقريبًا.

صيغة المقطع y $b = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

عوّض $b = \frac{(91)(55) - (21)(173)}{6(91) - 441}$

بسّط $\approx \frac{1\,372}{105}$

الحل ≈ 13.067

إذن، المقطع y يساوي 13.067 تقريبًا.

معادلة خط الانحدار هي $y = -1.114x + 13.067$

C. أوجد عدد أكياس الأرز بعد مرور 10 أيام.

لإيجاد عدد الأكياس بعد مرور 10 أيام نعوّض $x = 10$ في معادلة خط الانحدار

$y = -1.114(10) + 13.067$

$y = 1.927$

إذن، بعد 10 أيام سوف يبقى في المتجر 2 من أكياس الأرز تقريبًا.

www.jnob-jo.com