معادلة المستقيم والصيغ

مقدمة الوحدة

الوحدة 1

معادلة المستقيم والصيغ

السؤال الأساس

ماذا نعني بالصيغ الجبرية ؟ وما أهمية وجود صيغ مختلفة للمعادلات الخطية ؟

نظرة عامة على الوحدة

1-1 الصيغ الجبرية Algebraic Formulas

1-2 صيغة الميل والمقطع Slope-Intercept Form

1-3 صيغة الميل ونقطة Point-Slope Form

1-4 الصيغة القياسية Standard Form

1-5 المستقيمات المتوازية والمتعامدة Parallel and Perpendicular Lines

2 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

مصطلحات الوحدة

- صيغة
- معادلة متعددة المتغيرات
- صيغة الميل والمقطع
- المقطع y
- صيغة الميل ونقطة
- الصيغة القياسية للمعادلة الخطية
- المستقيمان المتوازيان
- المستقيمان المتعامدان
- مقلوب

Topic Vocabulary

- formula
- literal equation
- slope-intercept form
- y-intercept
- point-slope form
- standard form of a linear equation
- parallel lines
- perpendicular lines
- reciprocal

الوحدة 1

3 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

السؤال الأساس للوحدة

ماذا نعني بالصيغ الجبرية ؟ وما أهمية وجود صيغ مختلفة للمعادلات الخطية ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 40 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

معادلة المستقيم والصيغ

مشروع STEM

الوحدة 1 مشروع STEM

هل تعلم ؟

تستغرق أشعة الشمس 8 دقائق و 19 ثانية في قطع مسافة 149.6 مليون كيلومتر حتى تصل إلى الأرض. تكفي كمية الطاقة الشمسية التي تصل إلى الأرض في غضون ساعة واحدة لتلبية احتياجات سكان العالم من الطاقة لمدة سنة واحدة.

تقود الاستثمارات العامة والخاصة التطوّرات في مجال الطاقة الشمسية في دولة قطر التي تهدف إلى إنتاج 20% من طاقتها الكهربائية مع حلول العام 2030

درجة انحدار اللوح الشمسي تعتمد على موقع الدولة، وما إذا كانت في الجزء الجنوبي أو الشمالي من الكرة الأرضية.

الشعاع الأفقي
الشعاع الرئيسي
الانحدار أو الميل

ترتبط درجة انحدار السقف ارتباطًا وثيقًا بالميل. درجة انحدار السقف 12 : 3، لذا فإن السقف يرتفع (أو ينخفض) بمقدار وحدة لكل 4 وحدات في الاتجاه الأفقي.

تؤثر درجة انحدار السقف في العديد من الأشياء، بما في ذلك تركيب الألواح الشمسية.

تتكون الألواح الشمسية من مجموعة من الخلايا الشمسية. تحوّل الخلايا الشمسية ضوء الشمس إلى كهرباء.

الخلايا الشمسية في اللوح الشمسي مرتبة بحيث تنقل الطاقة الشمسية على طول مسار محدّد.

مهمّتك: صمّم سقفًا منحدِرًا

حلّل أنت وزملاؤك أنواعًا من الأسقف لتحديد درجة انحدارها. ثم صمّم سقفًا يتميّز بدرجة انحدار مناسبة لتركيب الألواح الشمسية.

4 الوحدة 1 مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعرّف الطلاب إلى العلاقة بين انحدار سقف منزل وميل المستقيم الذي ينمذج هذا الانحدار، ويستعملون ما يعرفونه عن المعادلات الخطية لتصميم سقف منحدر مناسب لتثبيت ألواح الطاقة الشمسية عليه.

تقديم المشروع

مهّد للموقف بمناقشة لماذا من الضروي أن يكون السقف منحدرًا. في المناطق ذات المناخات الباردة، تمنع الأسقف المائلة المنحدرة تراكم الثلوج بشكل كبير.
وفي مناطق مثل جزيرة برمودا، تكون الأسقف المنحدرة مفيدة في تجميع المياه.
في يومنا هذا، يُبنى السقف منحدرًا في بعض المنازل الحديثة من أجل استعمال ألواح الطاقة الشمسية. إنّ انحدار الألواح الشمسية مع الخط الأفقي ووجهة تركيبها أهم عاملين للحصول على أقصى كمية من الطاقة الشمسية. ويختلف الانحدار الأمثل للألواح بحسب موقعها الجغرافي وفصول السنة.

س: ما أنماط الأسقف المختلفة التي سبق لك أن رأيتها ؟
[نموذج إجابة: سقف مستوٍ، سقف منحدر، سقف جوانبه منحدرة والجزء العلوي منه مستوٍ.]

س: ما الأسباب التي تجعل بعض الناس يفضّلون السقف المستوي وبعضهم الآخر يفضّلون السقف المنحدر ؟
[نموذج إجابة: السقف المستوي، لكي يكون لديهم سطح يمكن بناء عليه طوابق أخرى مستقبلا أو لإنشاء حديقة. أما السقف المنحدر، لكي لا يتراكم الثلج على السطح.]

س: إذا قررت بناء منزل، ما نوع السقف الذي قد تختارونه ؟ لماذا ؟
[قد تتنوع الإجابات. مثلً: نختار السقف المستوي لإنشاء حديقة عليه أو لإنشاء صالة لاستقبال الزوار في الهواء الطلق عندما يسمح الطقس بذلك.]

س: لنفترض أنك تنوي بناء منزل وتخطط لتثبيت ألواح شمسية على سطحه. هل يغيّر هذا الأمر مخططك للسقف ؟ لماذا ؟
[قد تتنوع الإجابات.]

اجعل الطلاب يقرؤون المهمة التي سيُطلب منهم إكمالها.

تنفيذ المشروع

يمكن للمعلم عرض فيديو قصير لأسقف مائلة يتم تركيبها بزوايا ميل وتصميمات مختلفة، تتناسب مع تركيب ألواح الطاقة الشمسية، أو ألواح بغرض زيادة الإنارة داخل المنشآت.

إنهاء المشروع

قد ترغب في التخطيط ليوم يتشارك فيه الطلاب التصاميم التي أنجزوها لأسقفهم.
شجّع الطلاب على شرح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-1
الصيغ الجبرية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ إعادة ترتيب صيغ ومعادلات لتوضيح مقدار الفائدة البسيطة من خلال عزل المتغير باستعمال نفس التبرير المنطقي المستعمل في حل المعادلات.

✔ استعمال الصيغ والمعادلات لحل المسائل.

الفهم الأساس

المعادلات متعددة المتغيرات هي معادلات بمتغيرين أو أكثر، ويمكن حلها بإعادة كتابتها لتوضيح المتغير الذي يشير إلى الفائدة.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- حل معادلات خطية بمتغير واحد باستعمال خصائص المساواة.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- حل صيغ ومعادلات متعددة المتغيرات باستعمال نفس التبرير المنطقي المستعمل في حل المعادلات، وذلك بإعادة ترتيب الصيغ لتوضيح مقدار الفائدة البسيطة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يستعمل الطلاب صيغًا ومعادلات متعددة المتغيرات لحل مسائل تتضمن مسافة، ومحيطًا، وتحويل درجات حرارة.
- يحدد الطلاب الخطوات المطلوبة لإيجاد المتغير الذي يشير إلى الفائدة البسيطة في صيغة أو معادلة متعددة المتغيرات.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **عزل** | *isolate*
- **فائدة بسيطة** | *simple interest*
- **متغير** | *variable*

المصطلحات الجديدة

- **صيغة** | *formula*
- **معادلة متعددة المتغيرات** | *literal equation*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح "صيغة" وذلك بأن أطلب من الطلاب ذكر أمثلة على الصيغ التي استعملوها في صفوف الرياضيات السابقة.

س: ماذا تلاحظ بشأن هذه الصيغ كلها ؟
ما الفرق بينها وبين المعادلات بمتغير واحد ؟
[تأكد من أن يشير الطلاب إلى أن الصيغة تتضمن متغيرين أو أكثر. استعمل هذا الفرق لتعريف الطلاب بمصطلح معادلة متعددة المتغيرات، حيث الصيغة أحد الأمثلة عليها.]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.1.5 يُولد صيغًا من مضامين فيزيائية ويعيد ترتيب صيغ تربط بين متغيرين أو أكثر.

معايير ممارسات الرياضيات

فكّر في المسائل وثابر في حلها

يربط الطلاب بين إعادة ترتيب صيغة لتوضيح مقدار الفائدة البسيطة والتبرير المنطقي الذي يستعملونه لحل المعادلات.

نمذج

يمثل الطلاب العلاقات بين الكميات في مسائل تتضمن المسافة والمحيط ودرجة الحرارة باستعمال صيغ ومعادلات متعددة المتغيرات.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يكتب الطلاب معادلة متعددة المتغيرات لتمثيل نموذج.
يعيد الطلاب كتابة معادلة متعددة المتغيرات في صورة مكافئة لها، ويستعملون هذه الصورة لحل المسألة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن الصورة ؟
[تمثّل الصورة مستطيلًا له طولان وعرضان، وطوله أكبر من عرضه.]

س: كيف يمثل ما رسمه جابر محيط المستطيل ؟
[المحيط هو المسافة حول المستطيل، لذا، فإن رسم الأضلاع جنبًا إلى جنب يعطي قطعة مستقيمة طولها يساوي محيط المستطيل.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكنك نمذجة الرسم بمعادلة ؟
[يمكن تمثيل كل ضلع بمتغير. المحيط يساوي ناتج جمع هذه المتغيرات.]

س: ماذا تلاحظ بشأن الرسمين اللذين رسمتهما ؟
[للقطع المستقيمة نفس الطول، أي إنها متكافئة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اطلب من الطلاب كتابة معادلات تمثل محيطات ثلاثة مضلعات، الأول بثلاثة أضلاع متساوية، والثاني بأربعة أضلاع متساوية، والثالث بخمسة أضلاع متساوية.
كيف يمكنك وضع قاعدة عامة لإيجاد محيط مضلع له n من الأضلاع المتساوية ؟
[$P = 3s$، $P = 4s$، $P = 5s$، حيث s يمثل طول ضلع واحد.
إذا كان عدد أضلاع المضلع هو n وطول كل ضلع يساوي s،
فالمعادلة التي تمثل محيط المضلع هي: $P = ns$]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

أدِر نقاش حول استعمال المعادلات متعددة المتغيرات كنماذج للمحيط.
قد لا يدرك الطلاب أن المربع حالة خاصة من المستطيل.

س: ما الطرائق التي استعملتها لتحديد ما إذا كانت المعادلات متكافئة ؟
[أنشأتُ جدولًا وقارنتُ قيم المخرجات لنفس قيم المدخلات.
قيم المخرجات هي نفسها في كل المعادلات.]

س: ماذا لاحظت بشأن العلاقة بين المعادلات ؟
[يمكن إعادة كتابة المعادلات باستعمال خصائص المساواة، حيث كل المعادلات متكافئة.]

عادات التفكير — استعمل مع **نمذج وناقش**

ابنِ الحجج الرياضية ما الحجة الرياضية التي تدعم إجابتك في الجزء C ؟

[يمكنك استعمال العمليات العكسية لإعادة كتابة المعادلة بدلالة المتغير المجهول.]

كتاب الطالب، صفحة 5

1-1
الصيغ الجبرية
Algebraic Formulas

أستطيع... إعادة كتابة معادلات متعددة المتغيرات واستعمالها لحل المسائل.

معيار الدرس
9.1.5

المصطلحات
- صيغة formula
- معادلة متعددة المتغيرات literal equation

نمذج وناقش

رسم جابر مستطيلًا. ثم رسم طول كل ضلع من طرف إلى آخر ليكوّن قطعة مستقيمة لتمثيل المحيط كما في الشكل أدناه.

A. اكتب صيغة تمثّل محيط النموذج الموضّح أعلاه.

B. أعِد ترتيب الأضلاع لتتمكن من تمثيل المحيط بصيغة مختلفة. هل هذه الصيغة مكافئة للصيغة الأولى ؟

C. **استعمل البنية** بكم طريقة يمكنك التعبير عن العلاقة بين الجزأين A و B ؟ أي منها مفيدة أكثر من الأخرى ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. $P = \ell + w + \ell + w$

B. $P = \ell + \ell + w + w$

C. 6؛ تبدو الصيغتان
$P = \ell + \ell + w + w$ و $P = w + w + \ell + \ell$
مفيدتان أكثر من الصيغ الأخرى لأنهما تجمعان الطولين والعرضين معًا،
ويمكن إعادة كتابة هاتين المعادلتين في الصورة $P = 2\ell + 2w$.
تتضمن المعادلات الأخرى $\ell = \frac{1}{2}(P - 2w)$ و $w = \frac{1}{2}(P - 2\ell)$

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

ذكّر الطلاب أن بإمكانهم استعمال خصائص المساواة لإعادة كتابة المعادلات.
وضّح لهم أنه بالإمكان تطبيق نفس الخصائص لإعادة كتابة المعادلات متعددة المتغيرات.

السؤال الأساس: ما فائدة إعادة كتابة المعادلات متعددة المتغيرات في حل المسائل ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 إعادة كتابة المعادلات متعددة المتغيرات

بريد عبد العزيز استثمار مبلغ من المال في أحد المصارف بنسبة فائدة بسيطة على المبلغ الأصلي ليكسب مبلغًا معيّنًا من المال. ما المعادلة التي يمكنه استعمالها لإيجاد زمن الاستثمار ؟

الصيغة هي معادلة تحدد العلاقة بين كمية وكمية أخرى أو أكثر.
استعمل صيغة الفائدة البسيطة، $I = prt$ لإيجاد قيمة t.
الصيغة $I = prt$ هي **معادلة متعددة المتغيرات** لأن الأحرف تمثّل كلًّا من المتغيرات والثوابت المعلومة.

I = الفائدة
p = المبلغ الأصلي
r = نسبة الفائدة
t = الزمن بالسنوات

$I = prt$
$\frac{I}{pr} = \frac{prt}{pr}$
$\frac{I}{pr} = t$

كما في المعادلات الخطية، يمكنك استعمال خصائص المساواة في حل المعادلات لإيجاد قيمة المتغير المجهول.

المصطلحات
المعادلة متعددة المتغيرات هي معادلة معبّر عنها باستعمال أحرف.

إذن، $\frac{I}{pr} = t$
عند كتابة المعادلة بهذه الطريقة، يستطيع عبدالعزيز استعمال قيم I, p, r المعلومة لإيجاد قيمة t.

حاول أن تحلّ! 1. ما المعادلة التي يستطيع عبدالعزيز استعمالها لحساب المبلغ الأصلي ؟

الدرس 1-1 الصيغ الجبرية 5

مثال 1 إعادة كتابة المعادلات متعددة المتغيرات

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تعرف المتغير المطلوب إيجاد قيمته ؟
[أجد قيمة المتغير الذي يمثّل الكمية التي أحاول إيجادها.]

س: ما فائدة إعادة كتابة معادلة متعددة المتغيرات ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: سيكون احتمال الخطأ أقل لأن كل الحسابات يمكن إجراؤها في أحد طرفي المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $p = \frac{I}{rt}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك إعادة كتابة المعادلة لإيجاد نسبة الفائدة مباشرة ؟
[اقسم كمية الفائدة I على المبلغ الأصلي P والزمن t.]

www.jnob-jo.com

مثال 2 استعمال المعادلات متعددة المتغيرات لحل المسائل

طرح أسئلة هادفة

س: هل يمكن استعمال أي من المعادلتين لحل المسألة ؟ وضّح إجابتك.
[نعم، المعادلتان متكافئتان. لإيجاد قيمة s أولًا يكفي أن تعوّض وتبسّط.
أما إذا استعملت المعادلة الأولى، فيجب عليك حل المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. 10 mph

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

استعمل البنية ما وجه الشبه بين حل معادلات تتضمن أعدادًا وحل معادلات تتضمن متغيرات فقط ؟

[في الحالتين، يمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد قيمة المتغير المجهول.]

مثال 3 إعادة كتابة صيغة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما السمة المميزة لشكل الإطار ؟
[إنه مستطيل. لذا، ستستعمل صيغة محيط المستطيل.]

س: كيف تساعد إعادة كتابة المعادلة في خطوات الحل ؟
[يصبح تعويض قيمة كل من P و ℓ وإجراء الحسابات لإيجاد قيمة w أسهل.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. $h = \frac{2A}{b}$; 4 cm

مثال 2 استعمال المعادلات متعددة المتغيرات لحل المسائل

سيلتقي جاسم أصدقاءه بعد نصف ساعة عند بحيرة تبعد عن منزله مسافة 6 mi، ما متوسط السرعة التي يجب أن يقود بها دراجته للوصول في الموعد المحدّد ؟

الخطوة 1 حُل باستعمال صيغة المسافة لإيجاد s.

$d = st$ — تذكّر أن المسافة = السرعة • الزمن.

$\frac{d}{t} = s$

الخطوة 2 أوجد السرعة، التي يجب أن يقود بها جاسم دراجته للوصول في الموعد المحدّد.

$\frac{d}{t} = s$

$\frac{6}{0.5} = s$ — عوّض $d = 6$ و $t = 0.5$

$12 = s$

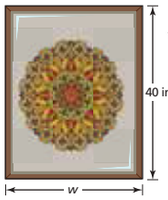
إذن، يحتاج جاسم إلى قيادة دراجته بمتوسط سرعة يبلغ 12 mi/h ليصل إلى البحيرة في الموعد المحدّد.

بزر منطقيًا
ما العلاقة بين بنية المعادلة متعددة المتغيرات ووحدات متوسط السرعة ؟

حاول أن تحلّ! **2.** يرغب جاسم الآن في الذهاب إلى متجر يبعد عن منزله مسافة 2.5 mi علمًا أن هذا المتجر يغلق أبوابه بعد 15 دقيقة. احسب متوسط السرعة التي يجب أن يقود بها جاسم دراجته للوصول إلى المتجر قبل أن يغلق أبوابه.

مثال 3 إعادة كتابة صيغة

يصنع عامل في متجر إطارات للصور إطارًا مستطيل الشكل محيطه 144 in وطوله 40 in، كيف يمكنه تحديد عرض الإطار ؟



الخطوة 1 أعد كتابة صيغة محيط المستطيل $P = 2\ell + 2w$ لإيجاد w.

$P - 2\ell = 2\ell + 2w - 2\ell$

$\frac{P - 2\ell}{2} = \frac{2w}{2}$

$\frac{P - 2\ell}{2} = w$

إذن، صيغة العرض بدلالة ℓ و P هي $w = \frac{P - 2\ell}{2}$.

الخطوة 2 استعمل المعادلة متعددة المتغيرات لإيجاد قيمة w عندما $P = 144$ و $\ell = 40$.

$w = \frac{P - 2\ell}{2}$

$w = \frac{144 - 2(40)}{2}$

$w = \frac{144 - 80}{2} = 32$

إذن، عرض الإطار يساوي 32 in

خطأ شائع
لا تقسم 2ℓ على 2 في الطرف الأيسر فقط، بل اقسم المقدار كله $P - 2\ell$ على 2، لأن الطرف الأيسر من المعادلة بأكمله هو مقدار واحد ويجب قسمته على 2

حاول أن تحلّ! **3.** أعد كتابة صيغة مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$ لإيجاد الارتفاع h، ثم أوجد ارتفاع المثلث عندما $A = 18\ cm^2$ و $b = 9$ cm.

6 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثال 3**

الاستماع **مستوى 1** وزّع على الطلاب بطاقات تتضمّن: صيغة مركّب كيميائي، وصيغة محيط المستطيل، وعبوة مياه غازية. اقرأ الجمل الآتية التي تُستعمل فيها كلمة "صيغة" لوصف كل صورة، ثم اطلب من الطلاب رفع البطاقة التي تمثّل الجملة التي يسمعونها.

لن تبوح الشركة بسر صيغة منتجها من المياه الغازية.

نسي خالد صيغة محيط المستطيل.

كتب المعلم صيغة مركّب كيميائي على السبورة.

س: ما التعريف العام لكلمة "صيغة" ؟
[إنها تعني تجميع الأشياء معًا بطريقة معينة.]

التحدث **مستوى 2** ناقش معنى المصطلح متعددة المتغيرات في الرياضيات.

س: في رأيك، ما أوجه الاختلاف بين المتغيرات في معادلة متعددة المتغيرات مثل $P = 2\ell + 2w$ ؟
[تمثل المتغيرات قيمًا محددة. في هذه المعادلة مثلًا، P يمثل المحيط، و ℓ يمثل الطول، و w يمثل العرض.]

س: متى يكون من المفيد إيجاد معادلة متعددة المتغيرات لإيجاد قيمة ℓ أو w ؟
[عندما يكون المحيط والطول (أو العرض) معلومَين، والمطلوب إيجاده قيمة المتغير الآخر.]

الكتابة **مستوى 3** اعرض نموذجًا من عمل الطلاب على السبورة:
أجيبوا عن الأسئلة الآتية في دفاتركم: $\frac{P - 2\ell}{2} = \frac{(2w)}{2}$
$P - \ell = w$

س: هل المعادلة الناتجة مكافئة للمعادلة الأصلية ؟ وضّح إجابتك.
[كلّا؛ المعادلة $P - \ell = w$ لا تكافئ المعادلة $P - 2\ell = 2w$]

س: اكتب مثالًا يوضح قسمة طرفي معادلة ما على عدد.
[راجع عمل الطلاب.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 تطبيق الصيغ

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: لماذا تحتاج إلى إعادة كتابة الصيغة ؟
[لتسهيل إيجاد درجة الحرارة بالفهرنهايت.]

س: ما الخطوات التي ستنفذها لإيجاد قيمة F ؟ وضّح إجابتك.
[أولًا، اضرب طرفي المعادلة في مقلوب الكسر، ثم أضف 32 إلى طرفي المعادلة. لحل معادلة، استعمل العمليات العكسية لعزل المتغير.]

س: كيف يمكنك تطبيق الصيغة ؟ وضّح إجابتك.
[حُل لإيجاد F، ثم عوّض قيمة C المعطاة ثم بسّط. يمثل المتغير F درجة الحرارة بالفهرنهايت.]

خطأ شائع

مثال 4 قد يحاول الطلاب توزيع الكسر قبل الحل لإيجاد قيمة F. شجعهم على الضرب في مقلوب الكسر بدلًا من توزيعه. في الطريقتين، سنحصل على معادلتين متكافئتين، لكن حذف الكسر يقلل من احتمال الخطأ.

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. $C = \frac{5}{9}(5 - 32) = -15$ إذن $C = -15\ C°$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما بعض المواقف التي يكون من المفيد فيها تحويل درجة الحرارة ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: من المفيد تحويل درجة الحرارة من نظام إلى آخر عند السفر إلى بلد يكون نظام درجات الحرارة فيه مختلفاً عن النظام المعتمد في بلد آخر.]

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

برّر منطقيًّا ما العلاقة بين المتغيرين في صيغة تحويل درجة الحرارة ؟

[كلاهما وحدتان لقياس درجة الحرارة. وحدة الدرجة المئوية تعطي نفس درجة الحرارة التي تعطيها وحدة الفهرنهايت باستعمال عدد أصغر.]

تطبيق **مثال 4** تطبيق الصيغ

وفقًا لوصفة ليلى لإعداد الخبز، ينبغي لها إعداد الخبز في درجة حرارة 190°C لمدة 30 دقيقة. يقيس فرنها درجة الحرارة بوحدة الفهرنهايت °F. ما درجة الحرارة بوحدة الفهرنهايت °F، التي يجب أن تضبط الفرن عليها ؟

ضَع ▶ أعِد كتابة الصيغة لإيجاد درجة الحرارة بالفهرنهايت التي تساوي درجة الحرارة 190°C

احسب ▶ **الخطوة 1** حُل لإيجاد F.

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$
$$\frac{9}{5} \times C = \frac{9}{5} \times \frac{5}{9}(F - 32)$$
$$\frac{9}{5}C = F - 32$$
$$\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$$
$$\frac{9}{5}C + 32 = F$$

القسمة على كسر اعتيادي مماثلة للضرب في مقلوب هذا الكسر.

الخطوة 2 استعمل صيغة F لإيجاد درجة الحرارة بالفهرنهايت المكافئة للدرجة 190°C

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$
$$F = \frac{9}{5}(190) + 32 = 374$$

فسّر ▶ إذن، يجب أن تضبط ليلى الفرن على درجة حرارة 374°F

حاول أن تحلّ! **4.** بلغت درجة الحرارة في إحدى ليالي الشتاء بالفهرنهايت 5°F، كم يساوي ذلك بوحدة الدرجة المئوية °C ؟

الدرس 1-1 الصيغ الجبرية 7

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب متابعة العمل مع صيغة المسافة.

سيلتقي جاسم صديقه مرة أخرى عند البحيرة. سيغادر مكان عمله الذي يبعد مسافة 10 mi عن البحيرة. إذا قاد دراجته بمتوسط سرعة 30 mph، ما الزمن اللازم لوصوله إلى البحيرة ؟

س: استعمل صيغة المسافة لإيجاد الزمن t.
[$t = \frac{d}{s}$]

س: أوجد الزمن اللازم لوصول جاسم إلى البحيرة.
[$\frac{1}{3}$ h أو 20 min]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 وضح للطلاب أنّ هناك مقياسًا آخر لقياس درجة الحرارة يدعى مقياس "كلفن".

- صيغة التحويل من الدرجة المئوية إلى درجة كلفن هي: $K = C + 273.15$

س: ما صيغة تحويل الكلفن إلى فهرنهايت ؟ اكتب الصيغة من دون استعمال الأقواس.
[$F = \frac{9}{5}K - 459.67$]

س: ما صيغة تحويل الفهرنهايت إلى كلفن ؟
[$K = \frac{5}{9}(F + 459.67)$]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الصيغ الجبرية

س: كيف يمكنك استعمال معادلة متعددة المتغيرات لحل مسألة ؟

[حُل المعادلة لإيجاد صيغة المتغير بدلالة المتغيرات الأخرى، ثم عوّض القيم المعلومة في المعادلة وبسّط.]

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 8 لإيجاد الوسط الحسابي، قد لا يقسم الطلاب مجموع درجات الاختبارات على 3، ذكّر الطلاب أنه لإيجاد الوسط الحسابي لدرجات عدد من الاختبارات، يجب عليهم قسمة مجموع الدرجات على عدد الاختبارات المعطى.

الإجابات

1. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: يمكن إعادة استعمال المعادلة أو الصيغة الناتجة بحيث يمكن حلها بخطوة واحدة، ثم تعويض القيم المختلفة لإعادة استعمال المعادلة أو الصيغة.

2. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: أوجه الشبه: تستعمل نفس خصائص المساواة لحل كل منهما.

أوجه الاختلاف: يوجد حل عددي للمعادلة $2x + 1 = 9$، هو $x = 4$، بينما حل $2x + c = d$ هو $x = \frac{d - c}{2}$.

عوّض $c = 1$ و $d = 9$ تحصل على: $x = \frac{9 - 1}{2}$ أي $x = 4$

3. المعادلة متعددة المتغيرات هي معادلة تتضمن متغيرين أو أكثر. الصيغة هي شكل من أشكال المعادلات متعددة المتغيرات التي تربط العلاقة بين الكميات.

4. كان على حمد أن يضيف $\frac{1}{k}$ بدلًا من 1، ثم ضرب طرفي المعادلة في k. يمكن لحمد أيضًا أن يبدأ الحل بضرب طرفي المعادلة في k، ثم إضافة 1 إلى الطرفين.

5. $x = y - 12$

6. $m = \frac{5}{4}n - 7$

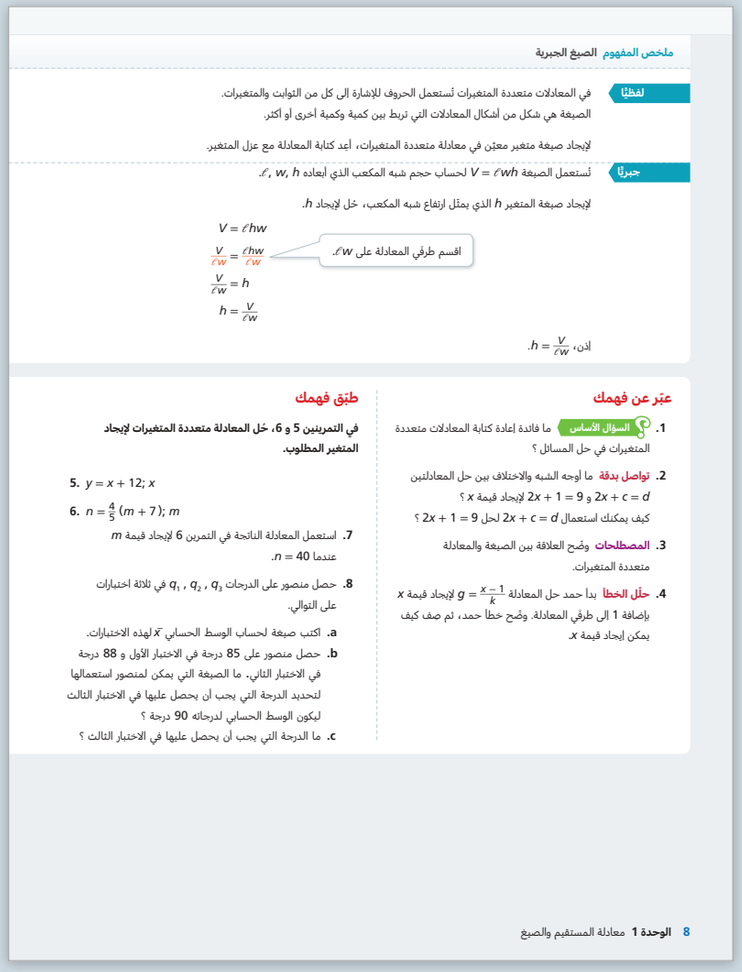
7. $m = 43$

8. **a.** $\bar{x} = \left(\frac{1}{3}\right)(q_1 + q_2 + q_3)$

b. $q_3 = 3\bar{x} - q_1 - q_2$

$= 3(90) - 85 - 88$

$= 97$



ملخص المفهوم الصيغ الجبرية

لفظيًا

في المعادلات متعددة المتغيرات تُستعمل الحروف للإشارة إلى كل من الثوابت والمتغيرات. الصيغة هي شكل من أشكال المعادلات التي تربط بين كمية وكمية أخرى أو أكثر.

لإيجاد صيغة متغير معيّن في معادلة متعددة المتغيرات، أعد كتابة المعادلة مع عزل المتغير.

جبريًا

تُستعمل الصيغة $V = \ell wh$ لحساب حجم شبه المكعب الذي أبعاده ℓ, w, h.

لإيجاد صيغة المتغير h الذي يمثّل ارتفاع شبه المكعب، حُل لإيجاد h.

$V = \ell hw$

$\frac{V}{\ell w} = \frac{\ell hw}{\ell w}$ اقسم طرفي المعادلة على ℓw.

$\frac{V}{\ell w} = h$

$h = \frac{V}{\ell w}$

إذن، $h = \frac{V}{\ell w}$.

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما فائدة إعادة كتابة المعادلات متعددة المتغيرات في حل المسائل ؟
2. **تواصل بدقة** ما أوجه الشبه والاختلاف بين حل المعادلتين $2x + c = d$ و $2x + 1 = 9$ لإيجاد قيمة x ؟ كيف يمكنك استعمال $2x + c = d$ لحل $2x + 1 = 9$ ؟
3. **المصطلحات** وضّح العلاقة بين الصيغة والمعادلة متعددة المتغيرات.
4. **حلّل الخطأ** بدأ حمد حل المعادلة $g = \frac{x - 1}{k}$ لإيجاد قيمة x بإضافة 1 إلى طرفي المعادلة. وضّح خطأ حمد، ثم صف كيف يمكن إيجاد قيمة x.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حُل المعادلة متعددة المتغيرات لإيجاد المتغير المطلوب.

5. $y = x + 12; x$
6. $n = \frac{4}{5}(m + 7); m$
7. استعمل المعادلة الناتجة في التمرين 6 لإيجاد قيمة m عندما $n = 40$.
8. حصل منصور على الدرجات q_1, q_2, q_3 في ثلاثة اختبارات على التوالي.
   a. اكتب صيغة لحساب الوسط الحسابي $\bar{x}$ لهذه الاختبارات.
   b. حصل منصور على 85 درجة في الاختبار الأول و 88 درجة في الاختبار الثاني. ما الصيغة التي يمكن لمنصور استعمالها لتحديد الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار الثالث ليكون الوسط الحسابي لدرجاته 90 درجة ؟
   c. ما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار الثالث ؟

8 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-18, 19-27(*odds*), 28-35	9-12, 13-17(*odds*), 13-35

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	13-27	1
	9, 33	2
	11-12	3
2	32	3
3	28	1
	10, 34	2
	31	3
4	29-30	3
	35	4

الإجابات

9. a. $x = \frac{c-b}{a}$

b. 4; 12

10. $s = \frac{p}{3}$؛ 3.5 ft في 6.65 ft؛
إذن المساحة تساوي $23.275\ ft^2$

11. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: لم يحل ناصر المعادلة لإيجاد x لأنه يظهر المتغير x في طرفي الحل؛
الحل الصحيح هو: $x = \frac{4}{k+3}$

12. a. صحيحة أحيانًا

b. صحيحة أحيانًا

c. صحيحة دائمًا

13. $c = \frac{b}{a}$

14. $y = a - k$

15. $f = \frac{h}{dg}$

16. $x = w(a-b)$ أو $x = wa - wb$

17. $y = 4 - \frac{2x}{3}$

18. $n = 2x + y$

19. $b = \frac{1}{2ac}$

20. $u = \frac{3}{5(y-5)}$

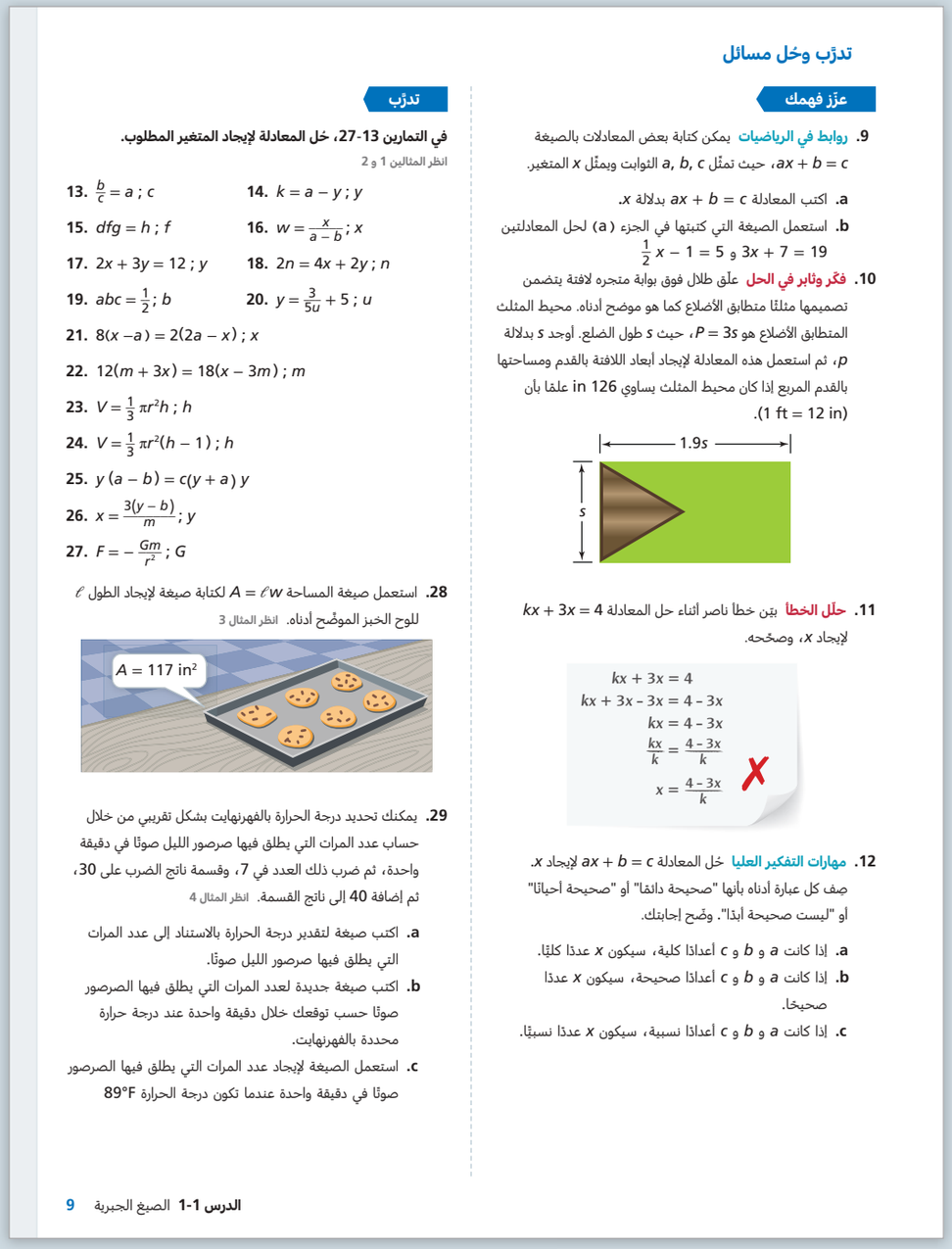
21. $x = \frac{6a}{5}$

22. $m = -\frac{3x}{11}$

23. $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

24. $h = \frac{3V}{\pi r^2} + 1$

25. $y = \frac{ac}{a-b-c}$



تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

9. روابط في الرياضيات يمكن كتابة بعض المعادلات بالصيغة $ax + b = c$، حيث تمثّل a, b, c الثوابت ويمثّل x المتغير.

a. اكتب المعادلة $ax + b = c$ بدلالة x.

b. استعمل الصيغة التي كتبتها في الجزء (a) لحل المعادلتين $3x + 7 = 19$ و $\frac{1}{2}x - 1 = 5$

10. فكّر وثابر في الحل علّق طلال فوق بوابة متجره لافتة يتضمن تصميمها مثلثًا متطابق الأضلاع كما هو موضح أدناه. محيط المثلث المتطابق الأضلاع هو $P = 3s$، حيث s طول الضلع. أوجد s بدلالة p، ثم استعمل هذه المعادلة لإيجاد أبعاد اللافتة بالقدم ومساحتها بالقدم المربع إذا كان محيط المثلث يساوي 126 in علمًا بأن (1 ft = 12 in).

11. حلّل الخطأ بيّن خطأ ناصر أثناء حل المعادلة $kx + 3x = 4$ لإيجاد x، وصحّحه.

$$kx + 3x = 4$$
$$kx + 3x - 3x = 4 - 3x$$
$$kx = 4 - 3x$$
$$\frac{kx}{k} = \frac{4-3x}{k}$$
$$x = \frac{4-3x}{k}$$

12. مهارات التفكير العليا حُل المعادلة $ax + b = c$ لإيجاد x. صِف كل عبارة أدناه بأنها "صحيحة دائمًا" أو "صحيحة أحيانًا" أو "ليست صحيحة أبدًا". وضّح إجابتك.

a. إذا كانت a و b و c أعدادًا كلية، سيكون x عددًا كليًا.

b. إذا كانت a و b و c أعدادًا صحيحة، سيكون x عددًا صحيحًا.

c. إذا كانت a و b و c أعدادًا نسبية، سيكون x عددًا نسبيًا.

تدرَّب

في التمارين 13-27، حُل المعادلة لإيجاد المتغير المطلوب.
انظر المثالين 1 و 2

13. $\frac{b}{c} = a$; c

14. $k = a - y$; y

15. $dfg = h$; f

16. $w = \frac{x}{a-b}$; x

17. $2x + 3y = 12$; y

18. $2n = 4x + 2y$; n

19. $abc = \frac{1}{2}$; b

20. $y = \frac{3}{5u} + 5$; u

21. $8(x - a) = 2(2a - x)$; x

22. $12(m + 3x) = 18(x - 3m)$; m

23. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; h

24. $V = \frac{1}{3}\pi r^2(h - 1)$; h

25. $y(a - b) = c(y + a)$; y

26. $x = \frac{3(y-b)}{m}$; y

27. $F = -\frac{Gm}{r^2}$; G

28. استعمل صيغة المساحة $A = \ell w$ لكتابة صيغة لإيجاد الطول ℓ للوح الخبز الموضّح أدناه. انظر المثال 3

29. يمكنك تحديد درجة الحرارة بالفهرنهايت بشكل تقريبي من خلال حساب عدد المرات التي يطلق فيها صرصور الليل صوتًا في دقيقة واحدة، ثم ضرب ذلك العدد في 7، وقسمة ناتج الضرب على 30، ثم إضافة 40 إلى ناتج القسمة. انظر المثال 4

a. اكتب صيغة لتقدير درجة الحرارة بالاستناد إلى عدد المرات التي يطلق فيها صرصور الليل صوتًا.

b. اكتب صيغة جديدة لعدد المرات التي يطلق فيها الصرصور صوتًا حسب توقعك خلال دقيقة واحدة عند درجة حرارة محددة بالفهرنهايت.

c. استعمل الصيغة لإيجاد عدد المرات التي يطلق فيها الصرصور صوتًا في دقيقة واحدة عندما تكون درجة الحرارة 89°F

الدرس 1-1 الصيغ الجبرية 9

26. $y = \frac{mx}{3} + b$

27. $G = -\frac{Fr^2}{m}$

28. $\ell = \frac{117}{w}$

29. a. $T = \frac{7}{30}c + 40$

b. $c = \frac{30}{7}(T - 40)$

c. 210

www.jnob-jo.com

الإجابات

30. $b = 212 - \frac{1.72}{1\,000}h,\ h = -\frac{1\,000}{1.72}(b - 212);$
$\approx 12\,791$ ft

31. **a.** $b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$
b. 22 ft
c. قد تتنوع الإجابات.
نموذج إجابة: حُل $22 - 2d = 6$؛ 8 ft

32. الصيغة التي تمثل الخانة A3 هي:
"= D3 / (B3 * C3)"

33. $c = \frac{ad}{b}$

34. D

35. **الجزء A** $h = 2r$؛ الارتفاع يساوي ضعف طول نصف القطر.

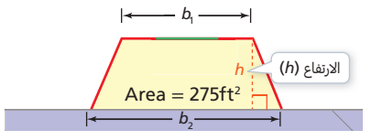
الجزء B مساحة العلبة التي تحقق هدف الشركة المصنعة هي $A = 4\pi r^2$

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

30. **نمذج** يغلي الماء عند درجات حرارة مختلفة على ارتفاعات مختلفة. تبلغ درجة حرارة غليان الماء 212°F عند مستوى سطح البحر (0 ft) لكنها تنخفض بمقدار 1.72°F تقريبًا لكل 1 000 ft من الارتفاع. اكتب صيغة لدرجة الغليان عند ارتفاع محدد. ثم حُل الصيغة لإيجاد الارتفاع عندما تكون درجة غليان الماء 190°F

31. **برّر منطقيًّا** صيغة مساحة شبه المنحرف هي: $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$.



a. حُل الصيغة لإيجاد طول إحدى القاعدتين، b_1 أو b_2.
b. استعمل الصيغة لإيجاد b_1، إذا علمتَ أن ارتفاع شبه المنحرف يساوي 11 ft وأن b_2 يساوي 28 ft
c. كيف يمكنك إيجاد المسافة d بين طرف القاعدة b_1 وطرف القطعة المستقيمة الخضراء على كل من جهتيها، علمًا أن طول القطعة الخضراء هو 6 ft ؟ أوجد هذه المسافة.

32. **استعمل الأدوات المناسبة** صيغة الخانة D2 موضَّحة في جدول البيانات أدناه. استعمل البيانات الواردة في الصف 3 لكتابة صيغة تمثّل الخانة A3.

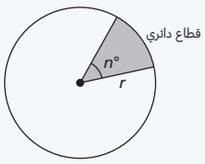
= A2*B2*C2

	A	B	C	D
1	الطول	العرض	الارتفاع	الحجم
2	3	4	5	60
3		10	12	600
4	6	12	13	936

تدرَّب على اختبار

33. حُل المعادلة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ لإيجاد c.

34. **اختبار SAT/ACT** إذا كانت صيغة مساحة قطاع دائري من دائرة هي $A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$، ما الصيغة التي تعبر عن n بدلالة المتغيرات الأخرى ؟



Ⓐ $n = \frac{\pi r^2 A}{360}$
Ⓑ $n = \frac{360}{\pi r^2 A}$
Ⓒ $n = 360\pi r^2 A$
Ⓓ $n = \frac{360A}{\pi r^2}$
Ⓔ $n = \frac{A}{360\pi r^2}$

35. **مهمة أدائية** يمكن للشركة المصنّعة توفير بعض المال من خلال صنع علبة كبيرة الحجم باستعمال أقل كمية من المعدن. بالنسبة إلى علبة طول نصف قطرها r وارتفاعها h، سيتحقق هذا الهدف عندما $2\pi r^3 = \pi r^2 h$

الجزء A حُل المعادلة لإيجاد h. ما العلاقة بين ارتفاع وطول نصف قطر العلبة التي تحقق هدف الشركة المصنّعة ؟

الجزء B إذا كانت مساحة ملصق العلبة $A = 2\pi rh$، استعمل النتيجة من الجزء A لكتابة صيغة بمعلومية مساحة الملصق لعلبة تحقق هدف الشركة المصنّعة.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

الدرس 1-2
صيغة الميل والمقطع

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ كتابة معادلات خطية بمتغيرين مستعملين صيغة الميل والمقطع لتمثيل العلاقة بين كميتين.

✔ تفسير الميل والمقطع لنموذج خطي.

الفهم الأساس

عند كتابة معادلة خطية بصيغة الميل والمقطع: $y = mx + b$، فإن m هي الميل، والمستقيم يقطع المحور y عند النقطة $(0 , b)$، إذن المقطع y يساوي b.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال المعادلات الخطية لتمثيل علاقات تتضمن معدّلات تغير ثابتة.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال صيغة الميل والمقطع لتمثيل معادلة خطية بيانيًا واستعمال هذا التمثيل لكتابة معادلة بصيغة الميل والمقطع.
- تفسير الميل والمقطع y لمعادلة خطية مكتوبة بصيغة الميل والمقطع.

لاحقًا في هذا الصف، سيتمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلة خط التطابق الأفضل بصيغة الميل والمقطع لمجموعة بيانات معطاة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يمثل الطلاب بيانيًا معادلات خطية بتعيين المقطع y ثم استعمال الميل لتعيين نقطة ثانية. ويحدد الطلاب أيضًا كل من الميل والمقطع y للتمثيل البياني ويستعملونهما لكتابة معادلة بصيغة الميل والمقطع.
- يقوم الطلاب بتحديد وتفسير وتطبيق الميل والمقطع y بدلالة الموقف المعطى.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

العربية | **الإنجليزية**

- **الميل** | *slope*
- **صيغة الميل والمقطع** | *slope-intercept form*
- **المقطع y** | *y-intercept*

نشاط المصطلحات

راجع مع الطلاب المصطلح "معادلة خطية". ثمّ اطلب منهم رسم التمثيل البياني لمعادلة خطية. اسألهم عن العلاقة بين شكل التمثيل البياني الذي رسموه وتسمية المعادلة التي يمثلها. (خطية) استعمل النشاط التالي لتشجيع الطلاب على توخي الدقة في استعمال المصطلحات أثناء وصفهم التمثيل البياني لمعادلة خطية.

اختر تمثيلين بيانيين لطالبين يُظهران ميلين ومقطعين مختلفين.

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلين البيانيين ؟ ما أوجه الاختلاف ؟

إذا لم يستعمل الطلاب المصطلحين ميل و المقطع y في إجاباتهم زوّدهم بهما. قدّم للطلاب المصطلح "صيغة الميل والمقطع" على أنه صيغة لمعادلة خطية صيغتها $y = mx + b$، حيث m هو الميل و b هو المقطع y.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

9.2.1 يتعرف ويرسم خطوطًا مستقيمة في صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة وفي الصيغة القياسية، يربط بين المعاملات والثوابت في الصيغة القياسية وبين مقطعي المحورين.

9.2.2 يكتب معادلة لخط مستقيم بمعلومية تمثيله البياني أو من نقطتين تقعان عليه، أو من ميله ومن نقطة تقع عليه.

تطبيق ممارسات الرياضيات

نمذج

يمثل الطلاب موقفًا بمعادلة مكتوبة بصيغة الميل والمقطع.

يفسر الطلاب الميل والمقطع y في موقف معطى، كتناقص الرصيد في بطاقة هدية.

استعمل البنية

يدرك الطلاب نمطًا مفاده أنّ المعامل الأساسي m في معادلة صيغتها $y = mx + b$ يمثل ميل المستقيم وأنّ b يمثل المقطع y.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب العلاقة بين كميتين: الدفعة الأسبوعية والزمن. يربط الطلاب العلاقة بين هذه الكميات والنقاط على مستقيم وهذا يهيئ الطلاب لفهم وتفسير معنى كل من الميل والمقطع y.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ عن المخطط ؟

[يبيّن المخطط أن علي يسدد دفعة أولى كبيرة وبعد ذلك دفعات متساوية على مدى 5 أسابيع متتالية.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: على ماذا تدل الألواح الخضراء ؟

[المبلغ الذي ينبغي على علي تسديده لكل دفعة.]

س: كيف يمكن أن تمثل المبلغ المستحق على علي بمرور الزمن ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كوّن جدولًا يبيّن كم يبقى عليه أن يسدّد بعد كل دفعة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: غيّر قيمة واحدة أو أكثر من القيم الواردة في الشكل وارسم تمثيلًا باستعمال قيود مختلفة.

[تحقق من عمل الطلاب.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف يمكن تلخيص العلاقة بين الدفعة الأولى والدفعات الأسبوعية وثمن الدراجة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الدفعات الأسبوعية الخمس زائدًا الدفعة الأولى تساوي ثمن الدراجة.]

س: أي من هذه العناصر يمكن اعتباره مجهولًا أو متغيرًا ؟

[الدفعة الأولى، الدفعة الأسبوعية، الزمن.]

س: كيف يمكن تحديد كل متغير استنادًا إلى الشكل ؟

[الدفعة الأولى: المقطع y، الدفعة الأسبوعية: الإحداثي y، الزمن: الإحداثي x.]

عادات التفكير — استعمل مع **نمذج وناقش**

ابحث عن العلاقات ما الذي تلاحظه حول العلاقة بين قيمة الدفعة الأولى وعدد الدفعات الأسبوعية والزمن المستغرق لتسديد القرض ؟

[زيادة الدفعة الأولى أو عدد الدفعات الأسبوعية تخفض (تقلّل) قيمة الدفعة الأسبوعية اللازمة لسداد ثمن الدراجة.]

كتاب الطالب، صفحة 11

1-2
صيغة الميل والمقطع
Slope-Intercept Form

أستطيع... كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا باستعمال صيغة الميل والمقطع.

معايير الدرس
9.2.1 و 9.2.2

المصطلحات
- صيغة الميل والمقطع slope-intercept form
- المقطع y y-intercept

نمذج وناقش

يريد علي شراء دراجة بمبلغ 440 1 QR. ويفكر في خيارَين للدفع. تبيّن الصورة الخيار A الذي يتضمن سداد دفعة أولية، ثم دفعات أسبوعية أقل ومتساوية. يتضمن الخيار B سداد 6 دفعات متساوية على مدار 6 أسابيع.

السعر الكامل — الدفعة الأولية — الأسبوع 1 — الأسبوع 2 — الأسبوع 3 — الأسبوع 4 — الأسبوع 5 — الدفعات الأسبوعية

A. ما العوامل التي ينبغي لعلي أخذها في الاعتبار قبل المفاضلة بين الخيار A والخيار B ؟

B. **تواصل بدقة** افترض أن عليًا يمكنه تعديل الخيار A وأنه لا يزال يسدّد ثمن الدراجة على مدار 5 أسابيع. صف العلاقة بين الدفعة الأولية والدفعات الأسبوعية.

السؤال الأساس **ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية عن مستقيم ؟**

نموذج من أعمال الطلاب

A. يجب أن يأخذ علي بعين الاعتبار مدخوله الثابت ومصاريفه الثابتة.

B. إذا كانت الدفعة الأولية كبيرة، فستكون الدفعات الأسبوعية، التي على علي دفعها، صغيرة. وإذا كانت الدفعة الأولية صغيرة، فستكون الدفعات الأسبوعية كبيرة.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب على صيغة الميل والمقطع للمعادلة الخطية $y = mx + b$. وضّح لهم أن المقطع y الذي يساوي b والميل m يمكن استعمالهما لتمثيل أي معادلة خطية بيانيًّا.

مثال 1 تمثيل معادلة خطية بيانيًّا

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما العلاقة بين قيمة b في المعادلة والتمثيل البياني ؟

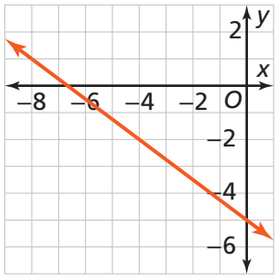
[تمثل القيمة b في المعادلة $y = mx + b$ المقطع y للتمثيل البياني. المستقيم يقطع المحور y عند النقطة $(0 , b)$.]

س: كيف يتغير التمثيل البياني إذا كبرت قيمة معامل x في المعادلة ؟

[المعامل يمثل الميل، إذن كلما ازدادت قيمة m جعلت المستقيم أكثر انحدارًا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

.1



عادات التفكير استعمل مع **المثال 1**

برّر منطقيًّا ما الذي تمثله الأعداد في معادلة خطية بصيغة الميل والمقطع ؟

[يمثل العدد المضروب في المتغير x ميل المستقيم. يمثل العدد المضاف إلى المتغير x المقطع y.]

السؤال الأساس ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية عن مستقيم ؟

مثال 1 تمثيل معادلة خطية بيانيًّا

ما التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = \frac{4}{5}x + 2$ ؟

المعادلة بصيغة الميل والمقطع. يمكنك استعمال الميل و**المقطع y** لتمثيل المستقيم بيانيًّا.

$$y = \frac{4}{5}x + 2$$

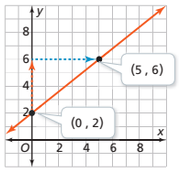
الخطوة 1 حدّد المقطع y في المعادلة. المقطع y يساوي 2، لذا عيّن النقطة $(0 , 2)$.

الخطوة 2 استعمل الميل لتمثيل نقطة ثانية.

$$m = \frac{4}{5} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

ابدأ عند $(0 , 2)$، وتحرك 4 وحدات إلى الأعلى ثم 5 وحدات إلى اليمين لتحديد موقع نقطة ثانية هي النقطة $(5 , 6)$.

الخطوة 3 ارسم مستقيمًا يمرّ بهاتين النقطتين.



استعمل البنية
فكّر في العلاقة بين قيمة معامل x وميل المستقيم.

حاول أن تحلّ! **1.** مثّل بيانيًّا معادلة المستقيم $y = -\frac{3}{4}x - 5$.

الدرس 2-1 صيغة الميل والمقطع 11

www.jnob-jo.com

مثال 2 كتابة معادلة مستقيم من تمثيل بياني

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك معرفة ما إذا كان الميل موجبًا أو سالبًا ؟

[عند التحرك من اليسار إلى اليمين : إذا كان اتجاه المستقيم إلى الأعلى فإن الميل موجب، بينما إذا كان اتجاه المستقيم إلى الأسفل فإن الميل سالب.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. $y = \frac{2}{3}x - 2$

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يحسب بعض الطلاب قيمة الميل كما يلي $\frac{3-0}{0-(-2)} = \frac{3}{2}$. ذكر الطلاب بأنّ الميل يقيس شدة انحدار المستقيم، لذا نقرأ التغير في الارتفاع أولاً عندما يكون الميل كسرًا.

مثال 3 فهم صيغة الميل والمقطع

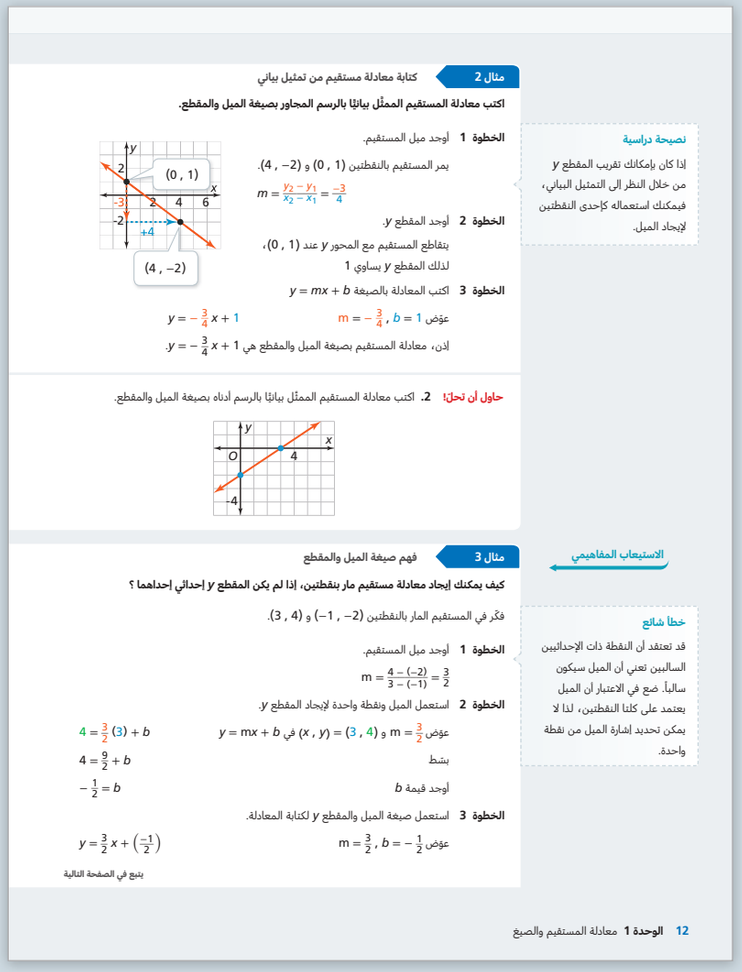
بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: عند كتابة معادلة مستقيم مار بنقطتين، هل يغير في الإجابة اختيارنا للنقطة التي نعوّض إحداثيّها عن (x_1 , y_1) والنقطة التي نعوّضها عن (x_2 , y_2) ؟

[لا: نحصل على نفس المعادلة.]

س: هل يمكن استعمال أي من النقطتين لإيجاد المقطع y ؟

[نعم، يمكن استعمال الميل وأي نقطة على المستقيم لإيجاد المقطع y.]



مثال 2 كتابة معادلة مستقيم من تمثيل بياني

اكتب معادلة المستقيم الممثّل بيانيًا بالرسم المجاور بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم.

يمر المستقيم بالنقطتين (1 , 0) و (4 , −2).

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{4}$

الخطوة 2 أوجد المقطع y.

يتقاطع المستقيم مع المحور y عند (1 , 0)، لذلك المقطع y يساوي 1

الخطوة 3 اكتب المعادلة بالصيغة $y = mx + b$

عوّض $m = -\frac{3}{4}$, $b = 1$ $\quad y = -\frac{3}{4}x + 1$

إذن، معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع هي $y = -\frac{3}{4}x + 1$.

نصيحة دراسية: إذا كان بإمكانك تقريب المقطع y من خلال النظر إلى التمثيل البياني، فيمكنك استعماله كإحدى النقطتين لإيجاد الميل.

حاول أن تحل! 2. اكتب معادلة المستقيم الممثّل بيانيًا بالرسم أدناه بصيغة الميل والمقطع.

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 3 فهم صيغة الميل والمقطع

كيف يمكنك إيجاد معادلة مستقيم مار بنقطتين، إذا لم يكن المقطع y إحداثي إحداهما ؟

فكّر في المستقيم المار بالنقطتين (−2 , −1) و (4 , 3).

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم.

$m = \frac{4-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{2}$

الخطوة 2 استعمل الميل ونقطة واحدة لإيجاد المقطع y.

عوّض $m = \frac{3}{2}$ و $(x , y) = (3 , 4)$ في $y = mx + b$ $\quad 4 = \frac{3}{2}(3) + b$

بسّط $\quad 4 = \frac{9}{2} + b$

أوجد قيمة b $\quad -\frac{1}{2} = b$

الخطوة 3 استعمل صيغة الميل والمقطع y لكتابة المعادلة.

عوّض $m = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{3}{2}x + \left(\frac{-1}{2}\right)$

يتبع في الصفحة التالية

خطأ شائع: قد تعتقد أن النقطة ذات الإحداثيين السالبين تعني أن الميل سيكون سالباً. ضع في الاعتبار أن الميل يعتمد على كلتا النقطتين، لذا لا يمكن تحديد إشارة الميل من نقطة واحدة.

12 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

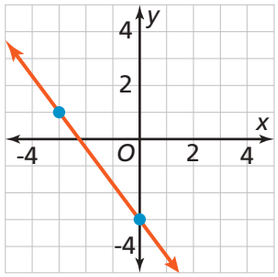
استعمل مع المثال 2 ساعد الطلاب على تحديد ما إذا كان التغيّر في y (التغير الرأسي) والتغيّر في x (التغير الأفقي) موجبًا أم سالبًا. وضّح كيف تحدد إشارات كل تغيّر على الإشارة النهائية للميل.

س: هل التغيّر في y موجب أم سالب عند الانتقال من اليسار إلى اليمين ؟ وماذا عن التغيّر في x ؟

[سالب، موجب.]

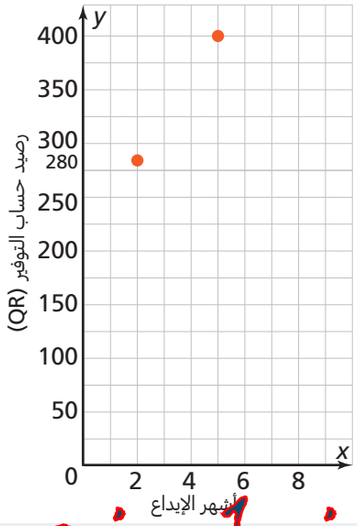
س: هل الميل موجب أم سالب ؟وضّح اجابتك.

[سالب، ناتج قسمة قيمة سالبة على قيمة موجبة هو قيمة سالبة.]



الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 حصلت أمينة على مبلغ من المال بمناسبة نجاحها في المدرسة. وضعت أمينة هذا المبلغ في حساب توفير لدى أحد المصارف وأضافت قيمة ثابتة في نهاية كل شهر لمدة 8 أشهر. يبيّن التمثيل البياني المجاور رصيد حساب التوفير بعد مرور شهرين وبعد مرور 5 أشهر على حصولها على هذا المبلغ.



س: حدّد القيمة الأساسية لمبلغ المال الذي حصلت عليه أمينة عند نجاحها.

[200 QR، المقطع y يساوي 200]

س: حدّد القيمة الثابتة الشهرية التي كانت تودعها أمينة.

[40 QR، ميل المستقيم يساوي 40]

س: أوجد الزمن اللازم ليصبح رصيد أمينة 1 400 QR.

[30 شهرًا.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$

مثال 4 تفسير الميل والمقطع y

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تمثل النقطة $(2 , 80)$ في الموقف المعطى ؟
[المبلغ المتبقي في رصيد بطاقة الهدايا.]

س: هل ينمذج المستقيم هذا الموقف لكل قيمة من قيم x ؟
[لا. نموذج إجابة: النقطة $(1.5 , 86)$ ليس لها أي معنى في سياق المسألة لأن بلال لا يستطيع شراء 1.5 كوب من القهوة.]

س: كيف يمكنك تحديد عدد أكواب القهوة المجانية التي يستطيع بلال الحصول عليها باستعمال بطاقة الهدايا ؟
[ارسم المستقيم المار بالنقطتين ثم حدد قيمة x عندما تكون قيمة y أصغر من 12]

عادات التفكير استعمل مع **المثال 4**

إبن الحجج الرياضية كيف تقارن بين ميل مستقيم معطى بصيغة الميل والمقطع عندما يكون معامل x كسرًا، وعندما يكون معامل x عددًا كليًا ؟

[المستقيم الذي معامل x في معادلته كسر موجب يكون أصغر من 1 أقل انحدارًا من المستقيم الذي ميله عدد كلي موجب.]

تابع المثال 3

إذن، معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-2 , -1)$ و $(4 , 3)$ بصيغة الميل والمقطع هي:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

حاول أن تحلّ! **3.** اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5 , 4)$ و $(-1 , 6)$ بصيغة الميل والمقطع.

تطبيق

مثال 4 تفسير الميل والمقطع y

تلقّى بلال بطاقة هدايا من المقهى الذي يرتاده. كان يحتسي كوبًا من القهوة كل مرة يزور فيها هذا المقهى. يبيّن التمثيل البياني نقطتين تمثّلان الرصيد المتبقي في البطاقة بعد شراء عدد من أكواب القهوة. كيف يستطيع بلال أن يحدّد عدد أكواب القهوة التي يمكن شراؤها باستعمال بطاقة الهدايا إذا لم يكن يعلم القيمة الأصلية للبطاقة ؟

الخطوة 1 فسّر معنى النقطتين.

$(2 , 80)$: بعد شراء كوبين من القهوة بقي في رصيد بطاقة الهدايا QR 80

$(4 , 56)$: بعد شراء 4 أكواب من القهوة بقي في رصيد بطاقة الهدايا QR 56

الخطوة 2 أوجد الميل، ثم فسّر معناه.

استعمل النقطتين $(4 , 56)$ و $(2 , 80)$.

$$m = \frac{80 - 56}{2 - 4}$$

$$= -12$$

الميل يساوي -12، وهذا يعني أن الرصيد في بطاقة الهدايا يقل بمقدار QR 12 في كل مرة يشتري فيها بلال كوبًا من القهوة. أي إن ثمن كوب واحد من القهوة هو QR 12.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 1-2 صيغة الميل والمقطع 13

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الكتابة **مستوى 1** اكتب عدة كلمات على السبورة، بعضها ذات صلة مع كلمة ميل وبعضها لا. (تلة، سطح مائل، كرسي، إشارة، انحدار، رافعة، أرضية، إلخ...). قدّم للطلاب جدولًا مكوّنًا من عمودين [يشير عنوان أحدهما إلى كلمة "مرتبط بالميل" وعنوان الآخر "غير مرتبط".] اطلب من الطلاب كتابة كل كلمة في العمود المناسب.

س: استخرج من الجدول الكلمات التي تعطي معنى كلمة "ميل" في الرياضيات.
[راجع عمل الطلاب.]
نموذج إجابة: انحدار

التحدث **مستوى 2** اطرح على الطلاب تحدّيًا تطلب فيه منهم أن يقفوا وأن يميلوا بأجسادهم يمينًا أو يسارًا. يسّر مناقشة حول كلمة ميل.

س: ما معنى أن يميل الشخص يسارًا ؟
[ألّا يقف بشكل مستقيم، بل أن يحني جسمه نحو اليسار.]

س: ما معنى كلمة ميل في سياق المسألة ؟
[نسبة التغيّر الرأسي إلى التغيّر الأفقي.]

س: ما معنى كلمة ميل في علم الفيزياء ؟
[انحدار.]

القراءة **مستوى 3** اطلب من الطلاب التناوب على قراءة الخطوتين 2 و 3 من المثال بصوت عال أمام زملائهم في الصف. شجّعهم على التفكير في ما يعنيه كل من الميل والمقطع y في سياق الموقف المعطى.

س: ماذا يمثل المقطع y ؟
[الرصيد الأصلي لبطاقة الهدايا.]

س: ماذا يمثل الميل ؟
[يتناقص الرصيد في بطاقة الهدايا بمقدار QR 12 في كل مرة يشتري بلال كوبا من القهوة.]

س: لماذا يجب أن يعرف بلال هذه المعلومة ؟
[لمعرفة عدد الأكواب التي يمكنه أن يشتريها بهذه البطاقة.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. $y = -12x + 104$. لإيجاد المقطع x نأخذ $y = 0$

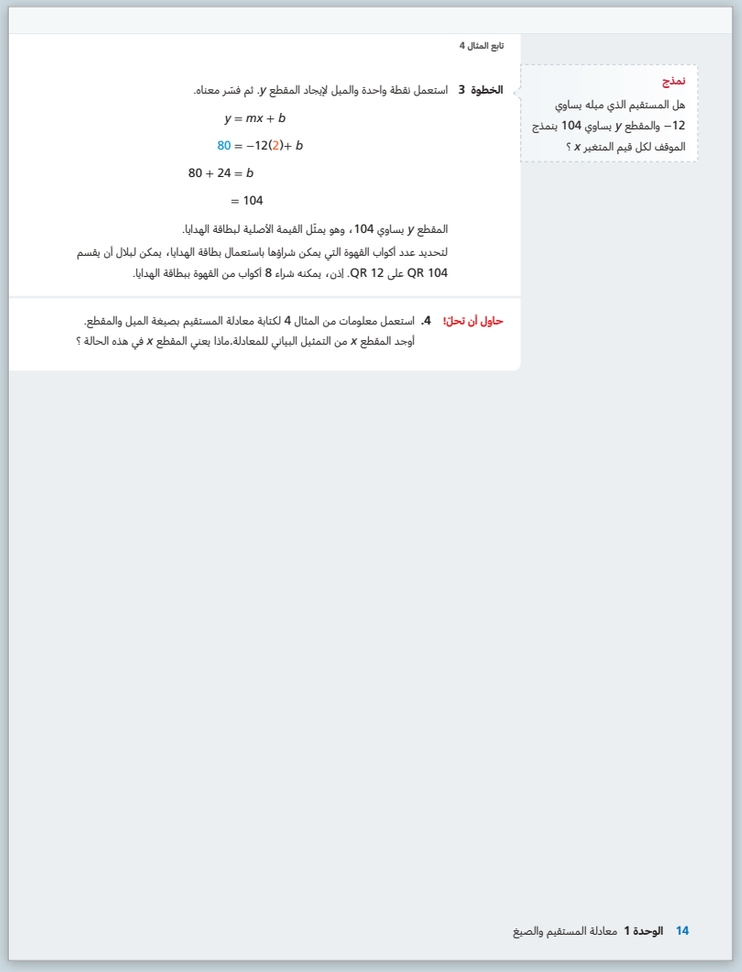
إذن: $-12x + 104 = 0$ حيث $x \approx 8.7$

أي أن المقطع x هو عدد أكواب القهوة المجانية التي يستطيع بلال شراؤها باستعمال البطاقة. بما أنه لا يستطيع شراء كسر عشري من الأكواب فإنّ عدد الأكواب يساوي 8 فقط.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكن تحديد المقطع x باستعمال معادلة مكتوبة بصيغة الميل والمقطع ؟

[عوّض $y = 0$ في المعادلة ثم حل لإيجاد قيمة x.]



تابع المثال 4

نمذج

هل المستقيم الذي ميله يساوي -12 والمقطع y يساوي 104 ينمذج الموقف لكل قيم المتغير x ؟

الخطوة 3 استعمل نقطة واحدة والميل لإيجاد المقطع y. ثم فسّر معناه.

$$y = mx + b$$

$$80 = -12(2) + b$$

$$80 + 24 = b$$

$$= 104$$

المقطع y يساوي 104، وهو يمثّل القيمة الأصلية لبطاقة الهدايا.

لتحديد عدد أكواب القهوة التي يمكن شراؤها باستعمال بطاقة الهدايا، يمكن لبلال أن يقسم QR 104 على QR 12. إذن، يمكنه شراء 8 أكواب من القهوة ببطاقة الهدايا.

حاول أن تحلّ! **4.** استعمل معلومات من المثال 4 لكتابة معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.
أوجد المقطع x من التمثيل البياني للمعادلة.ماذا يعني المقطع x في هذه الحالة ؟

14 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية

س: ما العلاقة بين المعادلات والتمثيلات البيانية ؟

[كلاهما يمثّلان نفس مجموعة النقاط. ميل المستقيم في التمثيل البياني يمثله معامل x في المعادلة، ونقطة تقاطع المستقيم مع المحور y يمثلها الثابت b في المعادلة.]

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

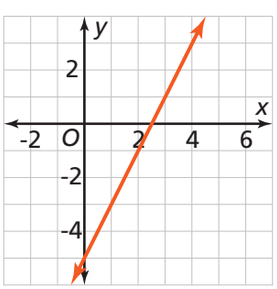
خطأ شائع

التمرين 10 قد يخطئ بعض الطلاب باستعمالهم النقطة $(0 , -2)$ بدلًا من النقطة $(-2 , 0)$ عند تفسيرهم لقيمة b. احرص على أن يتحقق الطلاب من صحة المعادلة عند استعمالهم الإحداثي الذي يمثل المقطع y.

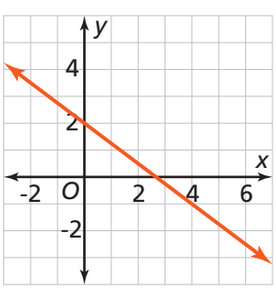
الإجابات

1. $y = mx + b$. هي معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع، ويمكن من خلالها معرفة ميل المستقيم والمقطع y، وبالتالي يمكن تمثيل المستقيم بيانيًا بسهولة.
2. التمثيل البياني لكل من المعادلتين هو مستقيم. يقع على كل منهما النقطة $(0 , 1)$. التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x + 1$ له ميل يساوي 2، ومقطع y يساوي 1، التمثيل البياني للمعادلة $y = -2x + 1$ له ميل يساوي -2 ومقطع y يساوي 1
3. عكس أحمد الوحدات الرأسية والأفقية في الميل عندما أراد تعيين النقطة الثانية والتي يجب أن تكون $(3 , 6)$ بدلًا من $(2 , 7)$.
4. عوّض إحداثيات النقطتين في الصيغة: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

5.



6.

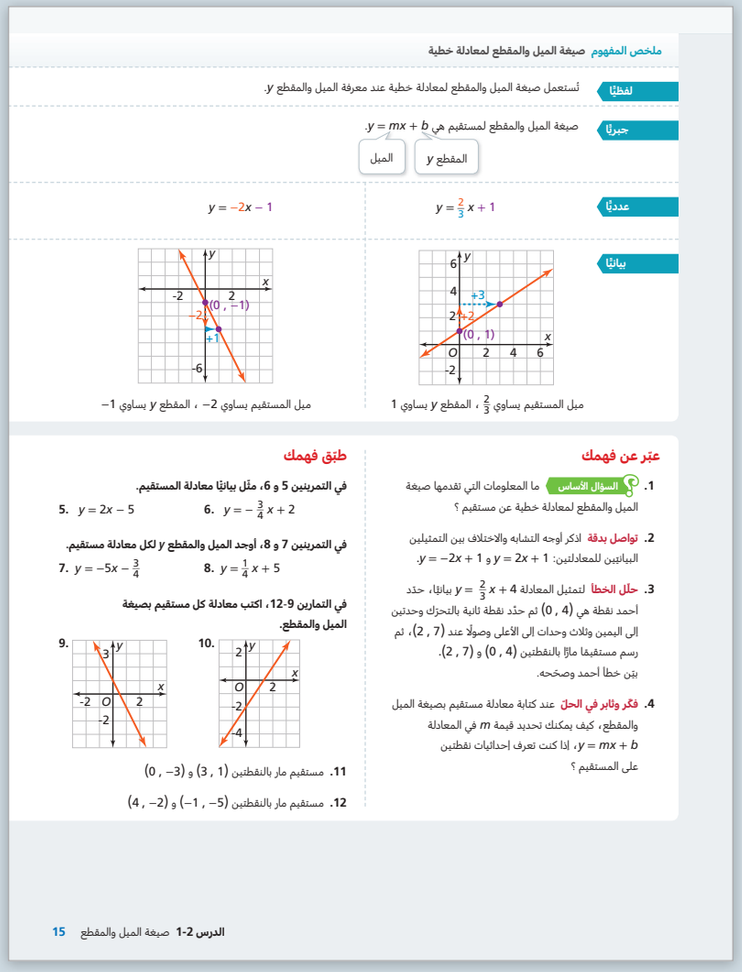


7. الميل $= -5$ ، المقطع y هو $-\frac{3}{4}$
8. الميل $= \frac{1}{4}$ ، المقطع y هو 5

9. $y = -2x + 1$
10. $y = \frac{3}{2}x - 2$
11. $y = \frac{4}{3}x - 3$
12. $y = 0.6x - 4.4$

13. a. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: سوف تتحرك لبنى 3 وحدات إلى الأسفل و 4 وحدات إلى اليمين لإيجاد النقطة الثانية. أما آمنة فسوف تتحرك 3 وحدات إلى الأعلى و 4 وحدات إلى اليسار لإيجاد النقطة الثانية.
   b. نعم. ستجد كل من لبنى وآمنة نقطتين مختلفتين ولكن تقعان كلاهما على نفس المستقيم باستعمال المعادلة المعطاة.
14. معادلة المستقيم L هي: $y = 1.25x + 4.25$، إذن، $c = -3.4$ و $b = 4.25$.
    نوجد الميل: $m = \frac{0 + 4.25}{-3.4 - 0} = -1.25$
    فتكون المعادلة: $y = -1.25x - 4.25$
15. يجب أن يعين ناصر المقطع y عند $(0 , -6)$ وليس عند $(0 , 6)$. النقطة الثانية يجب أن تكون $(4 , -9)$.
16. معادلة المستقيم: $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

17. $b = 6, n = 2.5, p = 4.5$



ملخص المفهوم صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية

لفظيًا تُستعمل صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية عند معرفة الميل والمقطع y.

جبريًا صيغة الميل والمقطع لمستقيم هي $y = mx + b$.
الميل — المقطع y

عدديًا $y = \frac{2}{3}x + 1$ — $y = -2x - 1$

بيانيًا
ميل المستقيم يساوي $\frac{2}{3}$ ، المقطع y يساوي 1
ميل المستقيم يساوي -2 ، المقطع y يساوي -1

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية عن مستقيم ؟
2. **تواصل بدقة** اذكر أوجه التشابه والاختلاف بين التمثيلين البيانيين للمعادلتين: $y = 2x + 1$ و $y = -2x + 1$.
3. **حلل الخطأ** لتمثيل المعادلة $y = \frac{2}{3}x + 4$ بيانيًا، حدّد أحمد نقطة هي $(4 , 0)$ ثم حدّد نقطة ثانية بالتحرك وحدتين إلى اليمين وثلاث وحدات إلى الأعلى وصولًا عند $(7 , 2)$، ثم رسم مستقيمًا مارًا بالنقطتين $(4 , 0)$ و $(7 , 2)$. بيّن خطأ أحمد وصحّحه.
4. **فكر وثابر في الحل** عند كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع، كيف يمكنك تحديد قيمة m في المعادلة $y = mx + b$، إذا كنت تعرف إحداثيات نقطتين على المستقيم ؟

طبّق فهمك

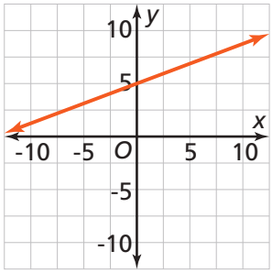
في التمرينين 5 و 6، مثّل بيانيًا معادلة المستقيم.
5. $y = 2x - 5$
6. $y = -\frac{3}{4}x + 2$

في التمرينين 7 و 8، أوجد الميل والمقطع y لكل معادلة مستقيم.
7. $y = -5x - \frac{3}{4}$
8. $y = \frac{1}{4}x + 5$

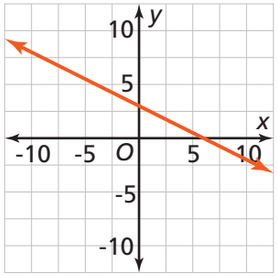
في التمارين 9-12، اكتب معادلة كل مستقيم بصيغة الميل والمقطع.
9.
10.
11. مستقيم مار بالنقطتين $(3 , 1)$ و $(0 , -3)$
12. مستقيم مار بالنقطتين $(-1 , -5)$ و $(4 , -2)$

الدرس 2-1 صيغة الميل والمقطع 15

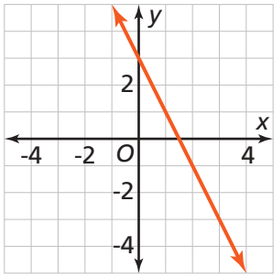
18.



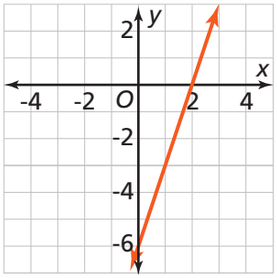
19.



20.



21.



www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

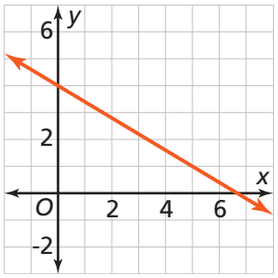
أساسي	متقدم
13-27, 29, 31, 33, 35-40	13-17, 19, 21, 23, 25, 27-40

تحليل التمارين

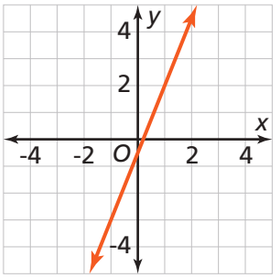
المثال	التمارين	عمق المعرفة
1	18–23	1
	13, 15	3
2	24–27, 39	1
	14, 16, 36	2
3	28–31, 38	1
	32, 33	2
	17, 37	3
4	34	2
	35, 40	3

الإجابات

22.



23.



24. $y = -\frac{1}{3}x + 1$

25. $y = 2x + 3$

26. $y = -2x + 3$

27. $y = 3x - 3$

28. $y = \frac{1}{2}x + 1$

29. $y = -2x - 5$

30. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

31. $y = \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}$

32. $y = 2x - \frac{3}{4}$

33. $y = -1.5x + 4.5$

34. $y = -4x + 25$
يمثل المقطع y المسافة الكلية وهي 25 km

تدرَّب وحُل مسائل

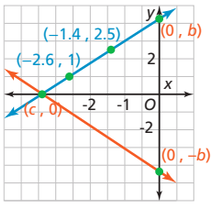
عزّز فهمك

13. **استعمل البنية** رسمت كل من لبنى وآمنة تمثيلًا بيانيًا لمعادلة المستقيم $y = -\frac{3}{4}x + 2$. استعملت لبنى المعادلة $y = \frac{-3}{4}x + 2$، لرسم التمثيل البياني، بينما استعملت آمنة المعادلة $y = \frac{3}{-4}x + 2$.

a. وضّح كيف يؤدي ذلك إلى استعمال خطوات مختلفة لإنشاء التمثيلين البيانيين.

b. هل سيبدو التمثيلان البيانيان متشابهين ؟ وضّح إجابتك.

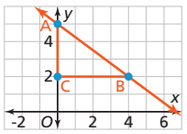
14. **فكّر وثابر في الحل** يمر المستقيم L بالنقطتين $(-1.4 , 2.5)$, $(-2.6 , 1)$، كما هو مبيّن أدناه. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0 , -b)$ و $(c , 0)$.



15. **حلّل الخطأ** بيّن الخطأ الذي وقع فيه ناصر عند تمثيل معادلة المستقيم $y = -\frac{3}{4}x - 6$ بيانيًا، وصحّحه.

1. عيّن المقطع y بيانيًا عند $(0 , 6)$.
2. عيّن نقطة ثانية وذلك بالتحرك من النقطة $(0 , 6)$ بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل و 4 وحدات يمينًا وصولًا إلى النقطة $(4 , 3)$.
3. صِل النقاط بمستقيم.

16. **روابط في الرياضيات** تشكّل النقاط $A(0 , 5)$ و $B(4 , 2)$ و $C(0 , 2)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية في المستوى الإحداثي. أوجد معادلة المستقيم الذي يشكّل الوتر جزءًا منه.



17. **مهارات التفكير العليا** يمر المستقيم $y = -0.5x + b$ بالنقاط $(7 , n)$, $(4 , 4)$, $(3 , p)$, $(1 , 5.5)$. أوجد b, n, p.

تدرَّب

في التمارين 18-23، مثّل بيانيًا معادلة كل مستقيم. انظر المثال 1

18. $y = \frac{3}{2}x + 5$

19. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

20. $y = -2x + 3$

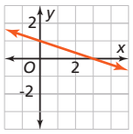
21. $y = 3x - 6$

22. $y = -\frac{3}{5}x + 4$

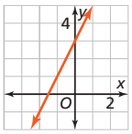
23. $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

في التمارين 24-27، اكتب معادلة كل مستقيم بصيغة الميل والمقطع. انظر المثال 2

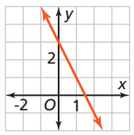
24.



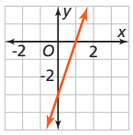
25.



26.



27.



في التمارين 28-33، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقاط المعطاة بصيغة الميل والمقطع. انظر المثال 3

28. $(0 , 1), (2 , 2)$

29. $(-2 , -1), (0 , -5)$

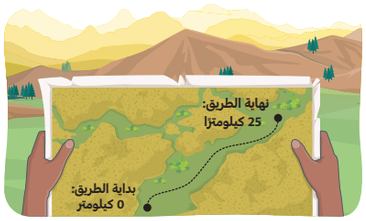
30. $(4 , 0), (0 , 2)$

31. $(-2 , -6), (1 , 2)$

32. $\left(\frac{3}{8} , 0\right), \left(\frac{5}{8} , \frac{1}{2}\right)$

33. $(2 , 1.5), (0 , 4.5)$

34. ينوي محمد قطع المسافة المبيّنة في الرسم بسرعة 4 km/h، اكتب معادلة خطية تمثّل المسافة المتبقية التي يجب على محمد أن يقطعها بعد x من الساعات ليصل إلى نهاية الطريق. ماذا يمثّل المقطع y في المعادلة ؟ انظر المثال 4



www.jnob-jo.com

الإجابات

35. بناءً على المعطيات يمكن للطالب أن يحلّ هذه المسألة بطريقتين:

إذا افترضنا أن الدفعة الأولى في الخطة B وهي QR 0 تعني أن الدفعات الأسبوعية المتساوية تدفع لأول مرة في الأسبوع الأول، وإذا افترضنا أن y يمثل المبلغ المتبقي للدفع في كل أسبوع وأن x ترتيب الأسبوع، تمثّل الخطتان بالمعادلتين التاليتين:

$$y_A = 3\,360 - (720 + 240(x - 1))$$
$$= -240x + 2\,880$$

$$y_B = 3\,360 - 280x$$
$$= -280x + 3\,360$$

تتم الدفعة الأخيرة للخطتين في نفس الأسبوع ($y_A = 0$ يعني أن $x = 12$ كما أنّ $y_B = 0$ يعني أن $x = 12$).

أما الحلّ الثاني الذي يمكن أن يفكّر فيه الطلاب فهو أن الدفعات المتساوية في الخطة B تبدأ في الأسبوع الثاني (لأن الدفعة الأولى تساوي QR 0).

في هذه الحالة، تمثل الخطتين بالمعادلتين التاليتين:

$$y_A = 3\,360 - (720 + 240(x - 1))$$
$$= -240x + 2\,880$$

$$y_B = 3\,360 - (0 + 280(x - 1))$$
$$= -280x + 3\,640$$

تتم الدفعة الأخيرة للخطة A في الأسبوع 12 فيما تتم الدفعة الأخيرة للخطة B في الأسبوع 13

36. $y = -6x + 8$

37. المعادلة التي تمثل مسار سيف هي:
$y = -7.5x + 15$، سرعة سلطان هي 5 km/h،
المعادلة التي تمثل مسار سلطان هي:
$y = -5x + 10$، كلاهما يصل إلى الشاطئ عند $y = 0$.

38. D , E

39. C

40. **الجزء A** $y = -\frac{5}{8}x + 15$
الجزء B المقطع y يعطي مستوى الصلصة في العبوة عندما تكون ممتلئة، أي 15 in.
الجزء C لا، لأن المستوى سيكون بعد 18 ساعة عند $3\frac{3}{4}$ in، لأنه إذا عوضنا $x = 18$ نجد أنّ $y = 3\frac{3}{4}$.

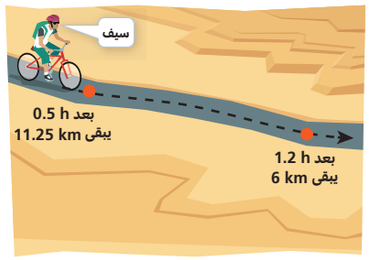
تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

35. **فكّر وثابر في الحلّ** تريد فاطمة شراء جهاز كمبيوتر جديد ثمنه QR 3 360، وتفكّر في خطتين للدفع تتضمّنان دفعات أسبوعية. أي خطة ستؤدي إلى دفع ثمن الكمبيوتر بصورة أسرع ؟ وضّح إجابتك.

36. **نمذج** يتنافس سعيد في سباق طوله 8 km حيث يركض بمعدّل سرعة ثابت قدره 6 km/h، اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل المسافة المتبقية التي على سعيد اجتيازها لإنهاء السباق.

37. **ابن الحجج الرياضية** قرّر سيف وسلطان الذهاب إلى الشاطئ بدراجتيهما. اقترح سيف على سلطان أن يغادرا منزليهما في الوقت نفسه على أن يصلا إلى الشاطئ في الوقت نفسه أيضًا. يبيّن الرسم التخطيطي أدناه نقطتين مرّ بهما سيف أثناء قيادته الدراجة.



اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل المسافة التي قطعها من منزله وصولًا إلى الشاطئ. إذا كان منزل سلطان أقرب إلى الشاطئ من منزل سيف بمقدار 5 km، أوجد السرعة التي يجب أن يقود بها سلطان لتنجح خطتهما.

تدرَّب على اختبار

38. أي من العبارات التالية حول التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{3}{4}x - 1$ صحيحة ؟ اختر كل ما ينطبق.

A. ميل المستقيم يساوي -1

B. يتقاطع المستقيم مع النقطة $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$

C. يتقاطع المستقيم مع النقطة $(0, 1)$

D. المقطع y يساوي -1

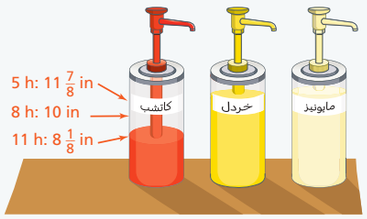
E. ميل المستقيم يساوي $\frac{3}{4}$

F. المقطع y يساوي $\frac{3}{4}$

39. **اختبار SAT/ACT** ما معادلة المستقيم الذي ميله -3 والمقطع y يساوي 2 ؟

Ⓐ $y = 2x - 3$ Ⓑ $y = 2x + 3$
Ⓒ $y = -3x + 2$ Ⓓ $y = -3x - 2$
Ⓔ $y = -3x - 3$

40. **مهمة أدائية** يقيس سالم مستوى صلصة الطماطم (كاتشب) على فترات زمنية مختلفة الساعات، وذلك بعد ملء عبوة توزيع صلصة الطماطم في مطعم الوجبات الخفيفة الذي يعمل فيه.



الجزء A بافتراض أن صلصة الطماطم تُستعمل بمعدل ثابت، اكتب معادلة خطية يمكن استعمالها لتحديد مستوى الصلصة في علبة التوزيع بعد x من الساعات.

الجزء B كيف يمكنك استعمال المعادلة من الجزء A لإيجاد مستوى الصلصة عندما تكون علبة التوزيع ممتلئة ؟

الجزء C إذا كان سالم قد ملأ علبة توزيع الصلصة قبل فتح المطعم مباشرة، وبقي المطعم مفتوحًا مدة 18 ساعة، فهل يحتاج إلى إعادة ملء علبة التوزيع قبل موعد إغلاق المطعم ؟ وضّح إجابتك.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 3-1
صيغة الميل ونقطة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ كتابة وتمثيل معادلات خطية في صيغة الميل ونقطة.

✔ تحليل صيغ مختلفة لمعادلة مستقيم لتفسير الميل والمقطع y لنموذج خطي في سياق بيانات معطاة.

الفهم الأساس

تستعمل صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية لكتابة معادلة مستقيم باستعمال ميله ونقطة تقع عليه.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة وتمثيل معادلات خطية بيانيًا باستعمال صيغة الميل والمقطع.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلة مستقيم في صيغة الميل ونقطة بمعلومية ميله ونقطة تقع عليه.
- تمثيل معادلات خطية بيانيًا مستعملًا صيغة الميل ونقطة.
- استعمال صيغة الميل ونقطة وصيغة الميل والمقطع لتحليل وتفسير الميل والمقطع y لنموذج خطي.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلة في الصيغة القياسية وتمثيلها بيانيًا.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يدرك الطلاب أن المعادلات الخطية تُكتب في صيغ مختلفة مثل صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة، وذلك وفقًا للبيانات المعطاة.
- يستعمل الطلاب الميل ونقطة معطاة على مستقيم لكتابة معادلة هذا المستقيم في صيغة الميل ونقطة.
- يجد الطلاب أيضًا ميل المستقيم باستعمال أي نقطتين معلومتين عليه، ويستعملون هذا الميل وإحدى النقاط التي تقع على المستقيم لكتابة معادلة المستقيم في صيغة الميل ونقطة.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **صيغة الميل والمقطع** | *slope-intercept form*

المصطلحات الجديدة

- **صيغة الميل ونقطة** | *point-slope form*

نشاط المصطلحات

راجع مع الطلاب صيغة الميل والمقطع وعرّفهم على صيغة الميل ونقطة. ثم اطلب إليهم أن يجدوا أوجه الشبه والاختلاف بين هذين المصطلحين وكيف يرتبط ذلك بصيغة المعادلة الخطية التي يصفونها.

اطلب منهم أن يحددوا كل معادلة أدناه ما إذا كانت بصيغة الميل ونقطة أو بصيغة الميل والمقطع.

$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$	[صيغة الميل ونقطة]
$y = mx + b$	[صيغة الميل والمقطع]
$y = 8x - 2$	[صيغة الميل والمقطع]
$y - y_1 = m(x - x_1)$	[صيغة الميل ونقطة]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين :

9.2.1 يتعرف ويرسم خطوطًا مستقيمة في صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة وفي الصيغة القياسية، يربط بين المعاملات والثوابت في الصيغة القياسية وبين مقطعي المحورين.

9.2.2 يكتب معادلة لخط مستقيم بمعلومية تمثيله البياني أو من نقطتين تقعان عليه، أو من ميله ومن نقطة تقع عليه.

تطبيق ممارسات الرياضيات

أبن الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب تمثيلًا بيانيًا لتقدير قيمة المقطع y لمستقيم ثم يستعملون التبرير التناسبي لدعم تقديرهم.

كن دقيقًا

يهتم الطلاب بمعاني الأرقام الملحقة بالمتغيرات في كل من x_1 و x_2 و y_1 و y_2 في صيغة الميل وصيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية.

www.jnob-jo.com

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يقارن الطلاب معادلتين مختلفتين ليدركوا أن هناك صيغًا مختلفة للمعادلة التي تمثل نفس المستقيم. يشير الطلاب إلى أن بعض هذه الصيغ لها قيود. هذا الأمر يهيّء الطلاب للتعرف على معادلات خطية في صيغ مختلفة مثل صيغة الميل ونقطة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما أوجه التشابه بين المعادلتين ؟ ما أوجه الاختلاف ؟

[كلاهما تمتلك نفس المتغيرات ونفس الميل. معادلة خليفة مكتوبة في صيغة الميل والمقطع. معادلة سيف اعتمدت صيغة الميل وهي غير معرّفة عند $x = 4$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر.]

س: لماذا تُكتب معادلات المستقيم غالبًا في صيغة $y = mx + b$ ، كما فعل خليفة ؟

[لأن المعادلة تمثل جميع النقاط التي تقع على المستقيم ولا تتضمن نقطة تكون عندها المعادلة غير معرّفة.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ماذا تلاحظ عن الميل في المعادلتين ؟

[الميل هو نفسه في كلا المعادلتين، وهذا أمر منطقي، لأن كلتيهما تمثل نفس المستقيم.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اذكر جميع الخطوات التي يجب اتباعها عند إعادة كتابة معادلة سيف الأصلية لتصبح مكافئة لمعادلة خليفة.

[اضرب كل طرف من أطراف معادلة سيف في $(x - 4)$، وزّع -5 على $(x - 4)$ ثم حل بالنسبة للمتغير y.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

أدر نقاش عن العلاقة بين المعادلتين.

س: كيف يساعدك إنشاء جدول من القيم في الربط بين المعادلتين ؟

[يبيّن الجدول القيم التي تجعل كل معادلة صحيحة.]

س: كيف تقارن بين قيم x و y المتناظرة في كل جدول ؟

[هذه القيم هي نفسها ما عدا عندما تكون $x = 4$.]

س: لماذا لا نستعمل المعادلات التي في صورة $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ مثل $-5 = \frac{y - 2}{x - 4}$ لتمثيل المستقيمات ؟

[لهذه المعادلات قيود تتطلب استثناء نقطة من المستقيم.]

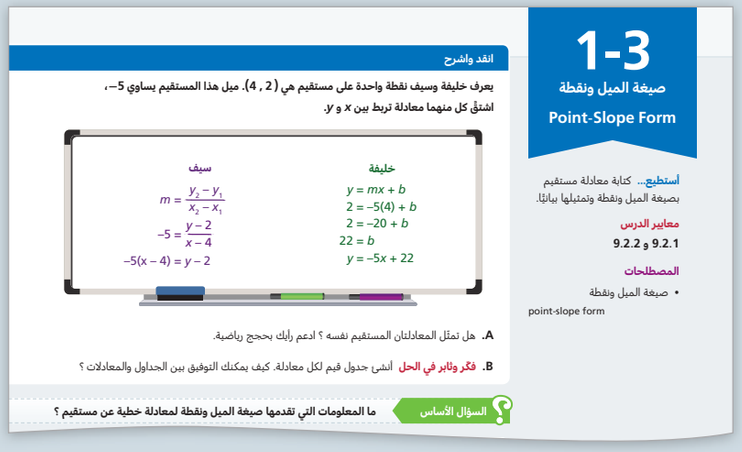
عادات التفكير — استعمل مع **انقد واشرح**

نمذج كيف يمكنك إعادة كتابة معادلة سيف لتبيّن ما إذا كانت معادلتا سيف وخليفة متماثلتين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : حلّ معادلة سيف بالنسبة للمتغير y لتحدد ما إذا كانت المعادلتان متماثلتين مع الأخذ بعين الاعتبار القيد الموجود على معادلة سيف الأصلية.]

ملاحظة: نبّه الطلاب إلى ضرورة الرجوع للمعادلة الأصلية عند وضع القيود، ولا يمكن الاعتماد على المعادلة النهائية.

كتاب الطالب، صفحة 18



1-3
صيغة الميل ونقطة
Point-Slope Form

أستطيع... كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة وتمثيلها بيانيًا.

معايير الدرس
9.2.1 و 9.2.2

المصطلحات
- صيغة الميل ونقطة point-slope form

انقد واشرح

يعرف خليفة وسيف نقطة واحدة على مستقيم هي (2 , 4). ميل هذا المستقيم يساوي 5–، اشتقّ كل منهما معادلة تربط بين x و y.

خليفة	سيف
$y = mx + b$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$2 = -5(4) + b$	$-5 = \frac{y - 2}{x - 4}$
$2 = -20 + b$	$-5(x - 4) = y - 2$
$22 = b$	
$y = -5x + 22$	

A. هل تمثّل المعادلتان المستقيم نفسه ؟ ادعم رأيك بحجج رياضية.

B. **فكّر وثابر في الحل** أنشئ جدول قيم لكل معادلة. كيف يمكنك التوفيق بين الجداول والمعادلات ؟

السؤال الأساس ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية عن مستقيم ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. المعادلتان تمثلان نفس المستقيم. إذا قمت بحل معادلة سيف بالنسبة للمتغير y، تحصل على نفس المعادلتين

$-5 = \frac{y - 2}{x - 4}$

x	0	2	4
y	22	12	غير معرّف

B. $y = -5x + 22$

x	0	2	4
y	22	12	2

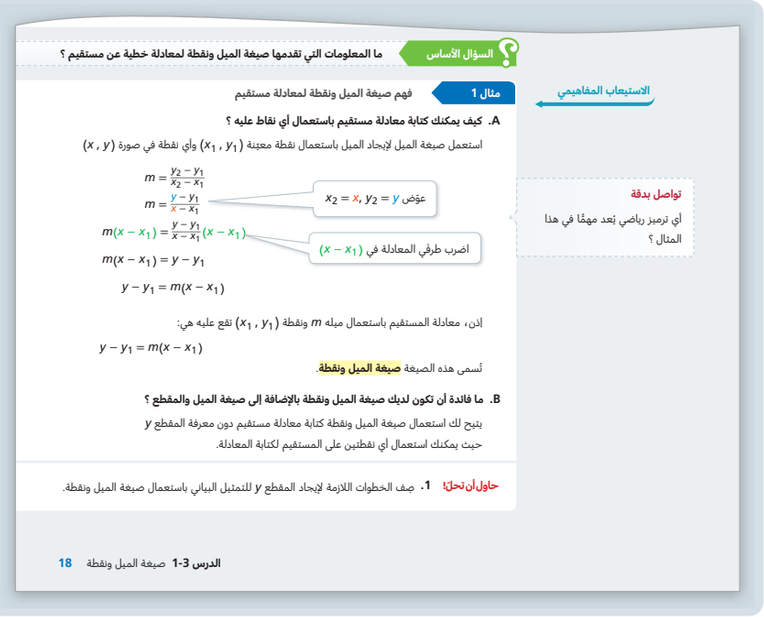
يبين الجدولان أن معادلة سيف غير معرّفة عند $x = 4$ لكن المدخلات والمخرجات متماثلة بالنسبة للقيم الأخرى.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب على صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية. ذكّرهم بأن معادلة نفس المستقيم يمكن كتابتها في صيغ مختلفة. كل صيغة مفيدة في حالات مختلفة.



السؤال الأساس: ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية عن مستقيم ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 فهم صيغة الميل ونقطة لمعادلة مستقيم

A. كيف يمكنك كتابة معادلة مستقيم باستعمال أي نقاط عليه ؟

استعمل صيغة الميل لإيجاد الميل باستعمال نقطة معينة (x_1 , y_1) وأي نقطة في صورة (x , y)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

عوّض $x_2 = x, y_2 = y$

$$m(x - x_1) = \frac{y - y_1}{x - x_1}(x - x_1)$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x - x_1)$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

إذن، معادلة المستقيم باستعمال ميله m ونقطة (x_1 , y_1) تقع عليه هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

تُسمى هذه الصيغة **صيغة الميل ونقطة**.

B. ما فائدة أن تكون لديك صيغة الميل ونقطة بالإضافة إلى صيغة الميل والمقطع ؟

يتيح لك استعمال صيغة الميل ونقطة كتابة معادلة مستقيم دون معرفة المقطع y حيث يمكنك استعمال أي نقطتين على المستقيم لكتابة المعادلة.

حاول أن تحلّ: 1. صِف الخطوات اللازمة لإيجاد المقطع y للتمثيل البياني باستعمال صيغة الميل ونقطة.

تواصل بدقة

أي ترميز رياضي يُعد مهمًا في هذا المثال ؟

الدرس 3-1 صيغة الميل ونقطة 18

مثال 1 فهم صيغة الميل ونقطة لمعادلة مستقيم

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك معرفة الاختلاف بين تمثيل كل من النقطة المحددة، والنقاط المتغيرة في صيغة الميل ونقطة ؟

[المتغيران x و y يستعملان لإحداثيات أي نقطة. بينما تُمثل النقطة المحددة بمتغيرات في الرمز السفلي.]

س: لماذا أعيدت كتابة صيغة الميل في صيغة الميل ونقطة ؟

[إن التحويل من صيغة الميل إلى صيغة الميل ونقطة يحذف المقام ويوضح قيمة الميل وإحداثيي نقطة تقع على المستقيم.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. استعمل الميل وأي نقطة تقع على المستقيم لتكتب معادلة المستقيم في صيغة الميل ونقطة. عوّض $x = 0$ في المعادلة لتوجد المقطع y.

www.jnob-jo.com

مثال 2 كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة

طرح أسئلة هادفة

س: في الجزء A، لماذا لم يتم التعويض عن x و y بقيم محددة عندما كُتبت المعادلة في صيغة الميل ونقطة ؟

[x و y بقيا في المعادلة لأنهما يمثلان إحداثيات أي نقطة تقع على المستقيم.]

س: في الجزء B، لماذا يمكنك استعمال صيغة الميل ونقطة عندما تُعطى نقطتان تقعان على المستقيم ؟

[يمكنك استعمال النقطتين لتحسب الميل. ثم يمكنك استعمال الميل وإحدى النقطتين لتكتب المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

.2 $y + 1 = -\frac{4}{5}(x - 2)$ أو $y - 3 = -\frac{4}{5}(x + 3)$

مثال 3 رسم التمثيل البياني لمعادلة خطية بصيغة الميل ونقطة

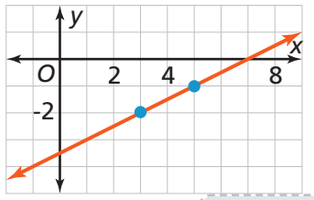
استعمل واربط التمثيلات الرياضية

س: كيف يمكنك استعمال المعادلة بصيغة الميل ونقطة لتمثل المستقيم بيانيًا ؟

[يساعدك استعمال صيغة الميل ونقطة على تحديد ميل المستقيم ونقطة تقع عليه، حيث يتم تعيين النقطة وبعد ذلك، يمكنك استعمال الميل لتعيين النقطة الثانية ورسم المستقيم المارّ بالنقطتين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

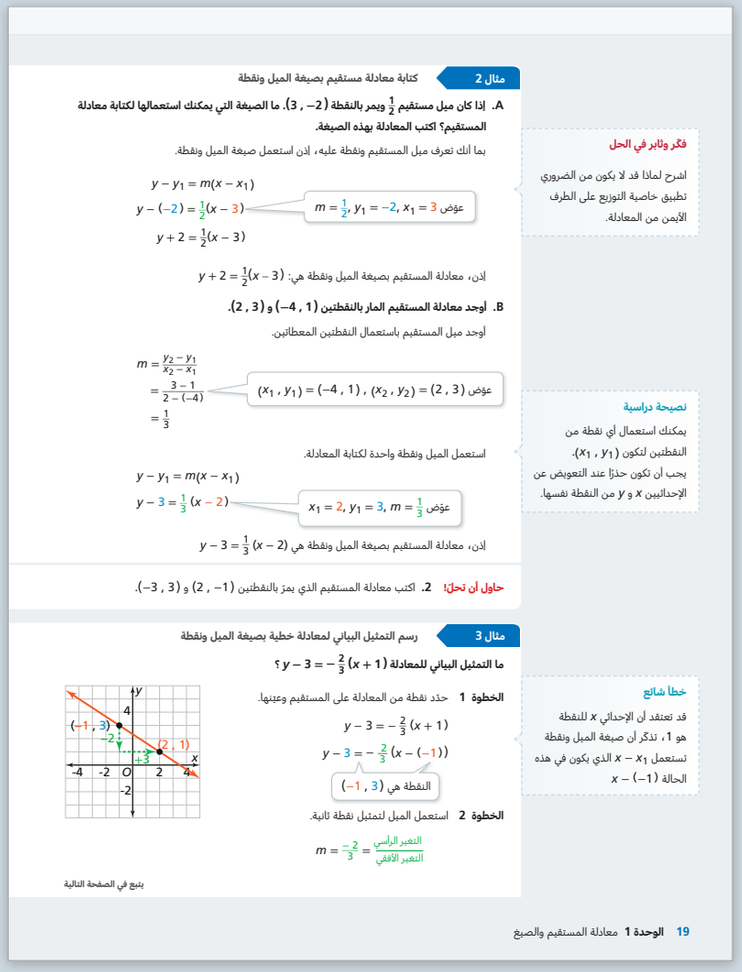
.3



عادات التفكير استعمل مع **المثال 1 و 2**

عمّم لماذا لا يمكن كتابة معادلة مستقيم رأسي في صيغة الميل ونقطة ؟

[الميل هو ناتج قسمة التغيّر في y على التغيّر في x. لإيجاد ميل مستقيم رأسي، عليك أن تقسم على صفر، وهذا غير ممكن.]



مثال 2 كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة

A. إذا كان ميل مستقيم $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(3 , -2)$. ما الصيغة التي يمكنك استعمالها لكتابة معادلة المستقيم؟ اكتب المعادلة بهذه الصيغة.

بما أنك تعرف ميل المستقيم ونقطة عليه، إذن استعمل صيغة الميل ونقطة.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 3)$ عوض $m = \frac{1}{2}, y_1 = -2, x_1 = 3$

$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$

إذن، معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة هي: $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$

B. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2 , 3)$ و $(-4 , 1)$.

أوجد ميل المستقيم باستعمال النقطتين المعطاتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{3 - 1}{2 - (-4)}$ عوض $(x_1 , y_1) = (-4 , 1) , (x_2 , y_2) = (2 , 3)$

$= \frac{1}{3}$

استعمل الميل ونقطة واحدة لكتابة المعادلة.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$ عوّض $x_1 = 2, y_1 = 3, m = \frac{1}{3}$

إذن، معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة هي $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$

حاول أن تحلّ! **2.** اكتب معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $(2 , -1)$ و $(-3 , 3)$.

مثال 3 رسم التمثيل البياني لمعادلة خطية بصيغة الميل ونقطة

ما التمثيل البياني للمعادلة $y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$ ؟

الخطوة 1 حدّد نقطة من المعادلة على المستقيم وعيّنها.

$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$

$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-1))$

النقطة هي $(-1 , 3)$

الخطوة 2 استعمل الميل لتمثيل نقطة ثانية.

$m = \frac{-2}{3} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

يتبع في الصفحة التالية

فكر وتأمل في الحل

اشرح لماذا قد لا يكون من الضروري تطبيق خاصية التوزيع على الطرف الأيمن من المعادلة.

نصيحة دراسية

يمكنك استعمال أي نقطة من النقطتين لتكون (x_1 , y_1). يجب أن تكون حذرًا عند التعويض عن الإحداثيين x و y من النقطة نفسها.

خطأ شائع

قد تعتقد أن الإحداثي x للنقطة هو 1، تذكّر أن صيغة الميل ونقطة تستعمل $x - x_1$ الذي يكون في هذه الحالة $x - (-1)$

19 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في كتابة معادلة مستقيم باستعمال صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية.

- اطلب من الطلاب التدرّب على كتابة معادلات بصيغة الميل ونقطة.

.1 مستقيم يمر بالنقطة $(4 , 5)$ وميله -2

.2 مستقيم يمر بالنقطة $(-2 , -3)$ وميله 7

س: في أي جزء من صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية تُعوض قيمة الميل ؟

[m]

س: في أي جزء من صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية تُعوض قيم إحداثيات النقطة ؟

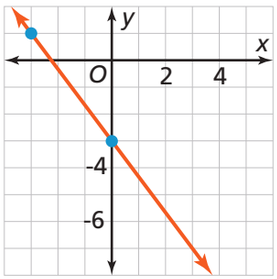
[يُعوض عن x_1 بالإحداثي الأول ويُعوض عن y_1 بالإحداثي الثاني.]

س: اكتب كل معادلة في صيغة الميل ونقطة.

[1. $y - 5 = -2(x - 4)$; 2. $y + 3 = 7(x + 2)$]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا معادلة المستقيم الممثل بيانيًا بصيغة الميل ونقطة.



س: كيف اخترت نقطة لتستعملها في معادلتك ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : أي نقطة تقع على المستقيم هي اختيار صحيح.]

س: اكتب المعادلة.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 3)$]

www.jnob-jo.com

مثال 4 تطبيقات المعادلات الخطية

طرح أسئلة هادفة

س: كيف توجد نقطتين، استنادًا إلى البيانات المعطاة في المخطط ؟

[اختر قيمة لعدد الضيوف على المحور x، مثل 50، واقرأ القيمة المناظرة لها على الشوكة، QR 2900، واستعمل نفس الطريقة لتوجد نقطة أخرى تربط بين عدد الضيوف والتكلفة.]

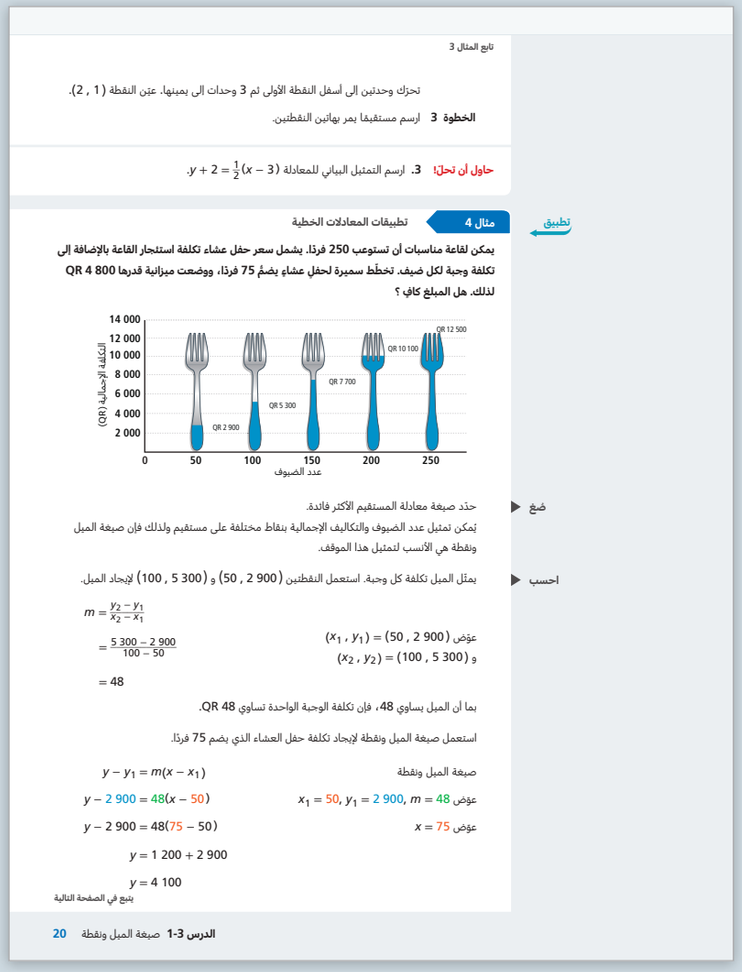
س: ما القيود التي يجب أن تضعها على المعادلة لتمثيل هذا الموقف ؟

[عدد الضيوف يجب أن يكون بين 0 و 250، بما أن القيم لهذا الموقف منفصلة، فإن الأعداد الكلية فقط يجب أن تؤخذ بعين الإعتبار بالنسبة لعدد الضيوف.]

عادات التفكير استعمل مع **المثال 3 و 4**

فكّر وثابر في الحل متى تكون كتابة معادلة مستقيم في صيغة الميل ونقطة أكثر ملاءمةً من كتابتها في صيغة الميل ومقطع ؟

[من السهل كتابة المعادلة في صيغة الميل ونقطة عندما تعرف الميل ونقطة تقع على المستقيم.]



تابع المثال 3

تحرّك وحدتين إلى أسفل النقطة الأولى ثم 3 وحدات إلى يمينها. عيّن النقطة (2 , 1).

الخطوة 3 ارسم مستقيمًا يمر بهاتين النقطتين.

حاول أن تحلّ! **3.** ارسم التمثيل البياني للمعادلة $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$.

تطبيق **مثال 4** تطبيقات المعادلات الخطية

يمكن لقاعة مناسبات أن تستوعب 250 فردًا. يشمل سعر حفل عشاء تكلفة استئجار القاعة بالإضافة إلى تكلفة وجبة لكل ضيف. تخطّط سميرة لحفلٍ عشاءٍ يضمُّ 75 فردًا، ووضعت ميزانية قدرها QR 4 800 لذلك. هل المبلغ كافٍ ؟

ضع حدّد صيغة معادلة المستقيم الأكثر فائدة.

يُمكن تمثيل عدد الضيوف والتكاليف الإجمالية بنقاط مختلفة على مستقيم ولذلك فإن صيغة الميل ونقطة هي الأنسب لتمثيل هذا الموقف.

احسب يمثّل الميل تكلفة كل وجبة. استعمل النقطتين (50 , 2 900) و (100 , 5 300) لإيجاد الميل.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{5\,300 - 2\,900}{100 - 50}$ عوّض $(x_1 , y_1) = (50 , 2\,900)$ و $(x_2 , y_2) = (100 , 5\,300)$

$= 48$

بما أن الميل يساوي 48، فإن تكلفة الوجبة الواحدة تساوي QR 48.

استعمل صيغة الميل ونقطة لإيجاد تكلفة حفل العشاء الذي يضم 75 فردًا.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - 2\,900 = 48(x - 50)$ عوّض $x_1 = 50, y_1 = 2\,900, m = 48$

$y - 2\,900 = 48(75 - 50)$ عوّض $x = 75$

$y = 1\,200 + 2\,900$

$y = 4\,100$

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 1-3 صيغة الميل ونقطة 20

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

القراءة **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب قراءة موقف المسألة عند بداية المثال والقسم الخاص بالصيغة.
اطلب إليهم التفكير بأي كلمة لا يفهمونها (معادلة خطية، نقاط البيانات، الأنسب.)

س: ماذا تعني النقاط ؟

[زوج مرتب معرّف بعدد الضيوف وكلفة الضيف الواحد.]

س: ما معنى الأنسب ؟

[الأسهل للفهم.]

التحدث **مستوى 3** ناقش أوجه الاختلاف بين صيغة الميل ونقطة وصيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية.
يسّر مناظرة صفّية ليعبر الطلاب عن رأيهم حول الصيغة الأنسب لمعادلة خطية، ويدافعوا عن هذا الرأي.

س: متى يكون استعمال صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية هو الخيار الأنسب ؟

[عندما تُعطى نقطتان أو ميل ونقطة.]

س: متى يكون استعمال صيغة الميل والمقطع لمعادلة خطية هو الخيار الأنسب ؟

[عندما يُعطى الميل والمقطع y.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $y = 48x + 500$؛ يمثل مقطع y كلفة استئجار القاعة.

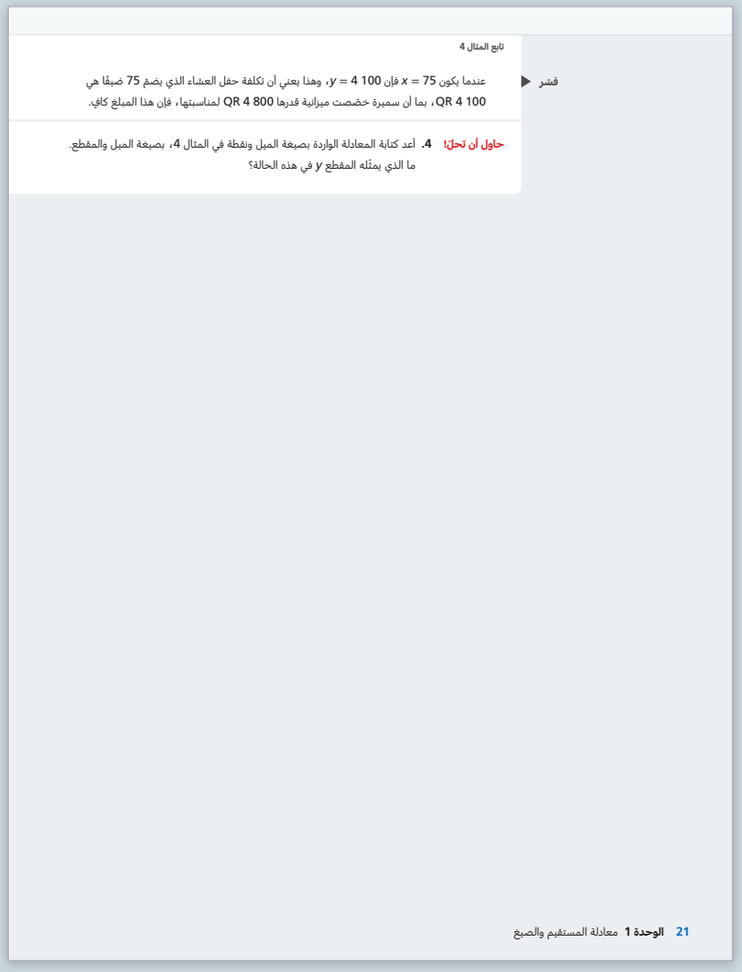
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل يتغير ميل المستقيم عندما تكتب معادلة المستقيم في صيغة أخرى ؟ وضّح إجابتك.

[لا، الميل لا يتغيّر لأن المعادلات تمثل نفس المستقيم.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 4 بعض الطلاب يعكسون المتغير المستقل x والمتغير التابع y عند تفسيرهم للبيانات. ذكّر هؤلاء الطلاب بأن يفكروا أي متغير يتبع الآخر. في المثال 4، التكلفة الكلية تتبع عدد الضيوف.



تابع المثال 4

فسّر

عندما يكون $x = 75$ فإن $y = 4\,100$، وهذا يعني أن تكلفة حفل العشاء الذي يضمّ 75 ضيفًا هي QR 4 100، بما أن سميرة خصّصت ميزانية قدرها QR 4 800 لمناسبتها، فإن هذا المبلغ كافٍ.

حاول أن تحلّ! **4.** أعد كتابة المعادلة الواردة بصيغة الميل ونقطة في المثال 4، بصيغة الميل والمقطع. ما الذي يمثّله المقطع y في هذه الحالة؟

21 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية

س: كيف يمكنك أن تستعمل صيغة الميل ونقطة عندما تُعطى نقطتان بدلاً من نقطة وميل ؟
[استعمل النقطتين لإيجاد الميل، ثم اختر إحدى النقطتين لكتابة صيغة الميل ونقطة.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 10 لحساب ميل المستقيم قد يحسب الطلاب المسافة الأفقية بين النقطة المعطاة ونقطة أخرى ، ثم يقسمونه على الارتفاع الرأسي بين النقطتين. ذكّر الطلاب بأن الميل يساوي الارتفاع الرأسي مقسومًا على المسافة الأفقية.

الإجابات

1. تبيّن صيغة الميل ونقطة: $y - y_1 = m(x - x_1)$، أن الميل هو m والنقطة (x_1 , y_1) تقع على المستقيم.

2. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة. ثم عوّض أي قيمة للمتغير x في هذه المعادلة لإيجاد قيمة للمتغير y فتحصل على إحداثيي نقطة.

3. لم يُعِد ناصر كتابة $y - 2 = \frac{2}{3}(x + 3)$ على الشكل $y - 2 = \frac{2}{3}(x - (-3))$، واستعمل -3 عند التعويض عن x_1 في صيغة الميل ونقطة وذلك بدلًا من التعويض بالعدد 3

4. يمكنك استعمال النقطة المعلومة والميل لكتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة. بينما لكتابة المعادلة بصيغة الميل والمقطع فإننا نستعمل الميل المعلوم ونكون بحاجة لإيجاد المقطع y.

5. $y - 5 = -3(x - 1)$

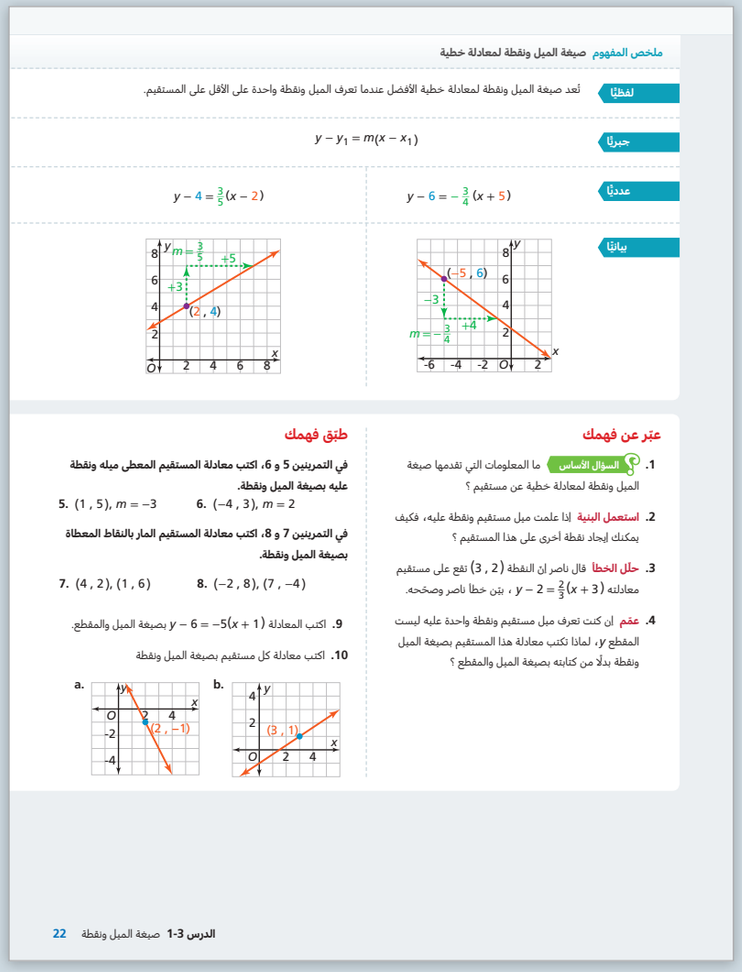
6. $y - 3 = 2(x + 4)$

7. $y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 4)$ أو $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 1)$

8. $y - 8 = -\frac{4}{3}(x + 2)$ أو $y + 4 = -\frac{4}{3}(x - 7)$

9. $y = -5x + 1$

10. **a.** $y + 1 = -2(x - 2)$
b. $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 3)$



ملخص المفهوم صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية

لفظيًا تُعد صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية الأفضل عندما تعرف الميل ونقطة واحدة على الأقل على المستقيم.

جبريًا $y - y_1 = m(x - x_1)$

عدديًا $y - 6 = -\frac{3}{4}(x + 5)$ ، $y - 4 = \frac{3}{5}(x - 2)$

بيانيًا

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما المعلومات التي تقدمها صيغة الميل ونقطة لمعادلة خطية عن مستقيم ؟
2. **استعمل البنية** إذا علمت ميل مستقيم ونقطة عليه، فكيف يمكنك إيجاد نقطة أخرى على هذا المستقيم ؟
3. **حلل الخطأ** قال ناصر إن النقطة $(3 , 2)$ تقع على مستقيم معادلته $y - 2 = \frac{2}{3}(x + 3)$ ، بيّن خطأ ناصر وصحّحه.
4. **عمّم** إن كنت تعرف ميل مستقيم ونقطة واحدة عليه ليست المقطع y، لماذا تكتب معادلة هذا المستقيم بصيغة الميل ونقطة بدلًا من كتابته بصيغة الميل والمقطع ؟

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، اكتب معادلة المستقيم المعطى ميله ونقطة عليه بصيغة الميل ونقطة.

5. $(1 , 5), m = -3$ 6. $(-4 , 3), m = 2$

في التمرينين 7 و 8، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقاط المعطاة بصيغة الميل ونقطة.

7. $(4 , 2), (1 , 6)$ 8. $(-2 , 8), (7 , -4)$

9. اكتب المعادلة $y - 6 = -5(x + 1)$ بصيغة الميل والمقطع.

10. اكتب معادلة كل مستقيم بصيغة الميل ونقطة

a. b.

الدرس 1-3 صيغة الميل ونقطة 22

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
11–24, 26, 27, 29, 31, 33, 35–41	11–13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27–41

تحليل التمارين

المثال	التمارين	عمق المعرفة
1	13	3
2	14-17, 22-27, 40	1
	18, 19	2
	11, 36	3
3	28-33	1
	20, 21, 39	2
	12	3
4	34, 35	1
	37, 38	3
	41	4

الإجابات

11. **a.** $y - 1 = -\frac{3}{10}(x - 5)$ أو

$y - 4 = -\frac{3}{10}(x + 5)$

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $\frac{5}{2}$.

c. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :
من التمثيل البياني أعلاه يتضح أن المقطع y يقع في منتصف المسافة بين النقطتين المعلومتين، إذن المقطع y هو منتصف الإحداثيين y للنقطتين فيكون المقطع y هو $y = \frac{(4+1)}{2} = \frac{5}{2}$

d. صيغة الميل والمقطع : $y = -\frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$

12. عكس جاسم قيمتي x و y. فالنقطة التي مثلها في الخطوة الأولى يجب أن تكون $(8 , -5)$ وليس $(-5 , 8)$
في الخطوة الثانية، يجب تمثيل نقطة ثانية بتحريك النقطة $(8 , -5)$ 3 وحدات إلى الأسفل و 4 وحدات إلى اليمين ليحصل على النقطة $(12 , -8)$.

13. **a.** $y - b = m(x - 0)$

b. الصيغة المبسطة للمعادلة $y - b = m(x - 0)$ بعد حلها بالنسبة للمتغير y هي: $y = mx + b$.
إذن، صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة هما طريقتان لتمثيل نفس المستقيم.

14. $y - 1 = 2(x - 3)$

15. $y + 2 = -4(x - 2)$

16. $y + 8 = -\frac{3}{4}(x - 2)$

17. $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 1)$

18. $y - 2 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)$

19. $y - 7.5 = 1.5(x - 3.5)$

20. $y - 4 = -2(x - 2)$

21. $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 1)$

22. $y - 6 = 2(x - 3)$ أو $y - 4 = 2(x - 2)$

23. $y + 4 = (x - 2)$ أو $y + 7 = (x + 1)$

24. $y + 8 = \frac{3}{2}(x - 1)$ أو $y + 5 = \frac{3}{2}(x - 3)$

25. $y + 3 = 5(x + 7)$ أو $y - 12 = 5(x + 4)$

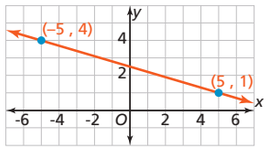
26. $y - 6 = \frac{8}{5}(x - 1)$ أو $y + 2 = \frac{8}{5}(x + 4)$

27. $y - \frac{3}{2} = -(x - 1)$ أو $y + \frac{1}{2} = -(x - 3)$

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

11. استعمل التمثيل البياني للمستقيم الموضَّح أدناه للإجابة عن كل مما يلي:



a. اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة.

b. قدّر قيمة المقطع y للمستقيم.

c. **ابن الحجج الرياضية** ادعم تقديرك لقيمة المقطع y باستعمال التبرير التناسبي.

d. أعد كتابة صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع لتتحقق من تقديرك.

12. **حلّل الخطأ** صِف خطأ جاسم عند تمثيله المعادلة $y + 5 = -\frac{3}{4}(x - 8)$ بيانيًا وصححه.

1. عيّن نقطة بيانيًا عند $(8 , -5)$.
2. عيّن نقطة ثانية بتحريك 3 وحدات إلى الأسفل ثم 4 وحدات إلى اليمين من $(8 , -5)$ عند $(5 , -1)$.
3. صِل النقاط بمستقيم.

13. **مهارات التفكير العليا** في صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$، المقطع y يقع عند النقطة $(0 , b)$.

a. ما المعادلة التي تحصل عليها عندما تعوّض بقيمة $(0 , b)$ عن (x_1 , y_1) في صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$ ؟

b. كيف ترتبط صيغة الميل والمقطع بصيغة الميل ونقطة ؟

تدرَّب

في التمارين 14-19، اكتب معادلة المستقيم المعطى ميله ونقطة عليه بصيغة الميل ونقطة. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

14. $(3 , 1), m = 2$

15. $(2 , -2), m = -4$

16. $(2 , -8), m = -\frac{3}{4}$

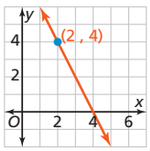
17. $(-1 , 4), m = \frac{2}{3}$

18. $\left(-\frac{1}{2} , 2\right), m = -1$

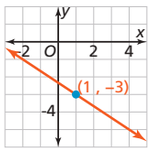
19. $(3.5 , 7.5), m = 1.5$

في التمرينين 20 و 21، اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم. انظر المثالين 2 و 3

20.



21.



في التمارين 22-27، اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المار بالنقاط المعطاة. انظر المثال 2

22. $(2 , 4), (3 , 6)$

23. $(-1 , -7), (2 , -4)$

24. $(3 , -5), (1 , -8)$

25. $(-4 , 12), (-7 , -3)$

26. $(-4 , -2), (1 , 6)$

27. $\left(3 , -\frac{1}{2}\right), \left(1 , \frac{3}{2}\right)$

في التمارين 28-33، ارسم التمثيل البياني لكل معادلة مما يلي: انظر المثال 3

28. $y + 2 = -3(x + 2)$

29. $y - 2 = 4(x - 1)$

30. $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

31. $y - 3 = \frac{2}{5}(x + 1)$

32. $y - 1 = \frac{5}{4}(x + 2)$

33. $y + 5 = \frac{1}{2}(x + 3)$

في التمرينين 34 و 35، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقاط المعطاة في كل جدول بصيغة الميل ونقطة، ثم اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع. انظر المثال 4

34.

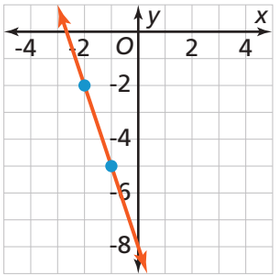
x	y
15	100
20	115
25	130
30	145
35	160

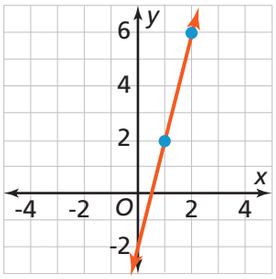
35.

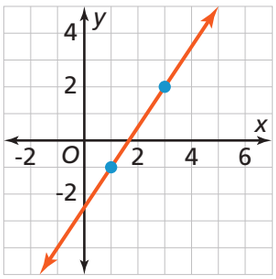
x	y
−4	−21
−2	−18
0	−15
2	−12
4	−9

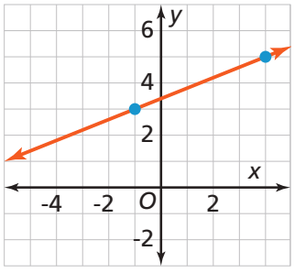
www.jnob-jo.com

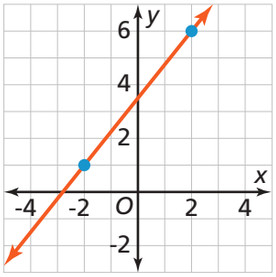
الإجابات

28.


29.


30.


31.


32.


تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

36. **نمذج** استأجر حمد دراجة هوائية لمدة 5.5 ساعة بمبلغ إجمالي قدره QR 93.75. اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة لنمذجة تكلفة استئجار الدراجة الهوائية لعدد x من الساعات. كيف يمكن لحمد حساب رسوم الخدمة التي تُدفع لمرة واحدة باستعمال معادلة المستقيم ؟

37. **فكّر وثابر في الحل** اقترضت لطيفة مبلغًا من المال من شقيقها لتشتري هاتفًا جديدًا، على أن تردّ له ما اقترضته بمبالغ أسبوعية ثابتة. بعد أسبوعين، بقي على لطيفة أن تدفع لشقيقها مبلغ QR 456، وبعد خمسة أسابيع، بقي عليها أن تدفع له مبلغ QR 228.

a. أوجد المبلغ الأصلي الذي اقترضته لطيفة.

b. أوجد المبلغ الذي تدفعه كل أسبوع.

c. لماذا تُعدُّ كل من صيغة الميل ونقطة وصيغة الميل والمقطع مفيدة في الإجابة عن السؤالين أعلاه ؟

38. **عمّم** تشمل التكلفة الإجمالية لطباعة بطاقات دعوة إلى عشاء حفل تخرج، تكلفة طباعة البطاقات بالإضافة إلى رسوم تصميم البطاقة والتي تُدفع لمرة واحدة.

عدد البطاقات	25	50	75	100
إجمالي التكلفة (QR)	400	560	720	880

اكتب معادلة بصيغة الميل ونقطة، ومعادلة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل الحالة. أي جزء من المعادلتين يمثّل تكلفة طباعة البطاقة الواحدة؟ أيُّ الصيغتين أسهل لإيجاد معلومات حول رسوم تصميم البطاقة ؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب على اختبار

39. يُمثّل المستقيم الذي معادلته $y - 5 = \frac{9}{7}(x + 4)$ بيانيًا،

بالنظر إلى المعادلة، يمكنك أن تعلم أن التمثيل البياني لديه ميل يساوي _____ ويمر بالنقطة _____.

باستعمال الميل والنقطة، يمكنك تعيين نقطة ثانية _____ ثم تمثيل المستقيم المار بالنقطتين بيانيًا.

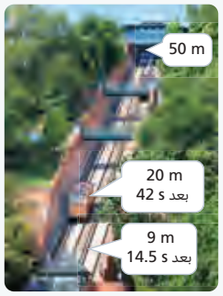
40. **اختبار SAT/ACT** مستقيم ميله -2 ويمرّ بالنقطة $(3 , -2)$. أي مما يلي يمثّل معادلة هذا المستقيم ؟

Ⓐ $y + 2 = -2(x - 3)$ Ⓑ $y - 2 = -2(x - 3)$

Ⓒ $y - 2 = -2(x + 3)$ Ⓓ $y + 2 = 2(x - 3)$

Ⓔ $y - 2 = 2(x + 3)$

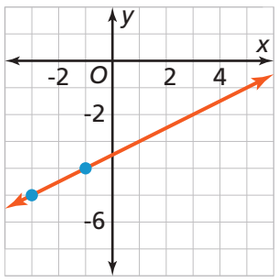
41. **مهمة أدائية** قطار ينقل الركّاب صعودًا على سفح تلّ بمعدل ثابت إلى ارتفاع 50 m، ويوضّح الشكل أدناه ارتفاع القطار في كلّ من موقعين مختلفين.



الجزء A اكتب معادلة بصيغة الميل ونقطة لتمثيل ارتفاع القطار بدلالة الزمن. كيف يمكنك استعمال هذه المعادلة لإيجاد معدل الازدياد في ارتفاع القطار بالأمتار في الثانية ؟

الجزء B ما الارتفاع الذي يبدأ عنده القطار حركته ؟ اكتب معادلة مستقيم بصيغة تقدم المعلومات كجزء من المعادلة. وضّح تبريرك المنطقي.

36. $y - 93.75 = 12.50(x - 5.5)$
يستطيع حمد كتابة المعادلة بصيغة الميل والمقطع $y = 12.50x + 25$. ويمثل المقطع y رسوم الخدمة لمرة واحدة وقيمتها QR 25.

33.


34. $y - 100 = 3(x - 15)$; $y = 3x + 55$

35. $y + 21 = \frac{3}{2}(x + 4)$; $y = \frac{3}{2}x - 15$

www.jnob-jo.com

الإجابات

37. **a.** إذا كان x عدد الأسابيع و y المبلغ المتبقي

$$y - 456 = \left(\frac{456 - 228}{2 - 5}\right)(x - 2)$$

$$y = -76x + 608$$

عندما $x = 0$ فإن $y = 608$

إذن، المبلغ الأصلي هو QR 608.

b. يمثل ميل المعادلة معدل تناقص الميل أسبوعيًا أي المبلغ الذي تدفعه لطيفة كل أسبوع وهو QR 76.

c. يمكن لكلا الصيغتين أن تكون مفيدة لإيجاد القيمة المدفوعة في كل أسبوع والتي هي قيمة الميل. وحدها صيغة الميل والمقطع تعطينا القيمة الأصلية المقترضة والتي تمثل المقطع y.

38. $y = 6.4\,x + 240$; $y - 400 = 6.4(x - 25)$

تكلفة طباعة البطاقة الواحدة تساوي ميل المستقيم أي QR 6.4. صيغة الميل والمقطع تعطي معلومات عن رسوم تصميم البطاقة QR 240 والتي تمثل المقطع y.

39. الميل يساوي $\frac{9}{7}$ ويمر بالنقطة $(-4\ ,\ 5)$ تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: $(3\ ,\ 14)$.

40. الإجابة A.

41. **الجزء A** $y - 20 = 0.4(x - 42)$

الميل يمثّل معدل التزايد في الارتفاع أي 0.4 m/sec

الجزء B 3.2 m، صيغة الميل والمقطع هي: $y = 0.4x + 3.2$ ، حيث المقطع y يمثّل الارتفاع الذي يبدأ عنده القطار حركته.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-4
الصيغة القياسية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ كتابة معادلات خطية في الصيغة القياسية وتمثيلها بيانيًا.

✔ استعمال معادلات خطية بالصيغة القياسية لتفسير مقاطع x و y في سياق بيانات معطاة.

الفهم الأساس

تساعد الصيغة القياسية لمعادلة خطية في التعرف على مقاطع x و y، وتساعد هذه المقاطع على رسم المستقيم وعلى فهم القيود في سياق مسألة من واقع الحياة.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلات خطية في صيغتي الميل والمقطع والميل ونقطة وتمثيلهما بيانيًا وتفسيرهما.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلات خطية في الصيغة القياسية باستعمال مقاطع x و y وتمثيلها بيانيًا.
- استعمال الصيغة القياسية لمعادلة خطية للتعرف على القيود ضمن السياق المنمذج.

لاحقًا في المرحلة الثانوية، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال معادلات خطية بصيغ مختلفة لحل أنظمة معادلات خطية مستعملين المصفوفات.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أن الصيغة القياسية لمعادلة خطية يمكن أن تُستعمَل لتحديد مقاطع x و y.
- يطبّق الطلاب ما يعرفونه عن الصيغة القياسية لمعادلة خطية ليفسروا C، في الصورة $Ax + By = C$، على أنها قيد ضمن السياق المنمذج.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **مقطع x** | *x-intercept*
- **مقطع y** | *y-intercept*

المصطلحات الجديدة

- **الصيغة القياسية لمعادلة خطية** | *standard form of a linear equation*

نشاط المصطلحات

عمل الطلاب في الدرسين السابقين على صيغتي الميل والمقطع والميل ونقطة لمعادلة خطية. عرّف الطلاب على الصيغة القياسية لمعادلة خطية على أنها صيغة أخرى لمعادلة خطية. اطلب من الطلاب أن يفكروا في السياقات التي سمعوا واستعملوا فيها كلمة "قياسية" (قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الصيغة القياسية للعدد). ناقش معنى كلمة "قياسية" في سياق وصف صيغة معادلة.

ما اسم الصيغة التي كُتبت بها معادلة في الصورة $Ax + By = C$

A. صيغة الميل والمقطع

B. الصيغة القياسية

C. الصيغة التحليلية

D. صيغة الميل ونقطة

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين :

9.2.1 يتعرف ويرسم خطوطا مستقيمة في صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة وفي الصيغة القياسية، يربط بين المعاملات والثوابت في الصيغة القياسية وبين مقطعي المحورين.

9.2.2 يكتب معادلة لخط مستقيم بمعلومية تمثيله البياني أو من نقطتين تقعان عليه، أو من ميله ومن نقطة تقع عليه.

تطبيق ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة كمّية و تجريديّة

يهتم الطلاب بما تعنيه الكميات في المسألة عندما يحددون ما تعنيه إشارة الميل حول الكميات في مسائل تتضمن مخاليط.

ابنِ الحجج الرياضية

يبني الطلاب حججًا رياضية باستعمال معرفتهم السابقة ليوضّحوا لماذا تُعدّ المعادلة المكتوبة في الصيغة القياسية مفيدة لملاحظة قيود مسألة ما، الأمر الذي لا تتيحه صيغة الميل والمقطع.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب التراكيب المختلفة لقيم x و y التي يمكن أن تكوّن منها قائمة تضم 24 فلم حركة أو فلم دراما، ويمثلون بيانيًّا هذه التراكيب. يتعرف الطلاب إلى فكرة القيد التي تهيئهم لتعلم طريقة كتابة معادلة مستقيم في الصيغة القياسية.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما الاستراتيجيات التي يمكن أن يكون عبد الله قد استعملها ليحدد التراكيب المختلفة من أفلام الحركة والدراما ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: استعمال جدول لسرد التراكيب، إنشاء قائمة من 24 فلمًا.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكنك تحديد النقطتين اللتين يجب أن تعيّنهما على التمثيل البياني ؟

[اختر نقطتين مجموع إحداثياتهما يساوي 24]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: أنشىء تمثيلًا بيانيًّا يوضّح تراكيب ممكنة من أفلام الحركة والدراما لقائمة مكوّنة من 30 فلمًا.

[يقع المقطع y في هذا التمثيل عند النقطة $(0 , 30)$ والمقطع x عند النقطة $(30 , 0)$، $y = -x + 30$.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

ساعد الطلاب على تطوير فهم واضح للعلاقة بين المتغيرات في معادلة خطية.

س: ماذا تمثل النقطتان $(24 , 0)$ و $(0 , 24)$ على المستقيم؟

[تمثل النقطة $(24 , 0)$ قائمة مكونة من أفلام الحركة فقط. تمثل النقطة $(0 , 24)$ قائمة مكونة من أفلام الدراما فقط.]

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

برّر منطقيًّا لماذا من الأسهل استعمال تمثيل بياني بدلًا من استعمال جدول للإجابة عن السؤال ؟ هل هناك أي سلبيات لاستعمال التمثيل البياني ؟

[يعرّف التمثيل البياني كل التراكيب الممكنة، بينما يعرّف الجدول عددا محدودًا منها. لكن، قد يكون من الصعب التركيز على تراكيب معيّنة عند استعمال التمثيل البياني.]

كتاب الطالب، صفحة 25

1-4
الصيغة القياسية
Standard Form

استطيع... كتابة المعادلات الخطية بالصيغة القياسية وتمثيلها بيانيًّا.

معايير الدرس
9.2.1 و 9.2.2

المصطلحات
• الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

استكشف وبرّر منطقيًّا

يُعد عبدالله قائمة من الأفلام للأشهر المقبلة بحيث يكون مجموع أرقام الأفلام يساوي 24، ولأنه يفضل أفلام الحركة والدراما، ينشئ قائمته من هذين النوعين من الأفلام.

A. حدّد تركيبتين مختلفتين من أفلام الحركة والدراما يمكن أن يستعملهما عبدالله لإنشاء قائمته.

B. مثّل هاتين التركيبتين في المستوى الإحداثي، وارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين اللتين تمثلانهما.

C. **نمذج** هل يمكنك استعمال المستقيم لإيجاد نقاط أخرى ذات صلة ؟ وضّح إجابتك.

القائمة

الحركة 1	الدراما 13
الحركة 2	الحركة 14
الدراما 3	الحركة 15
الدراما 4	الدراما 16
الحركة 5	الدراما 17
الدراما 6	الحركة 18
الحركة 7	الدراما 19
الدراما 8	الحركة 20
الدراما 9	الدراما 21
الحركة 10	الحركة 22
الدراما 11	الحركة 23
الحركة 12	الحركة 24

نموذج من أعمال الطلاب

A. 12 فيلم حركة و12 فيلم دراما أو 16 فيلم حركة و 8 أفلام دراما.

B.

C. نعم، يمر المستقيم بنقاط أخرى حيث مجموع عدد أفلام الحركة وعدد أفلام الدراما يساوي 24

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب على الصيغة القياسية لمعادلة خطية. ذكّرهم بأن المستقيمات يمكن أن تُمثَّل بصيغ متعددة، حيث يزودنا كل منها بنوع محدّد من المعلومات. وضح لهم أن الصيغة القياسية للمستقيم مفيدة لأن المعادلة مكتوبةٌ بهذه الصيغة توضّح القيد.

مثال 1 فهم الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

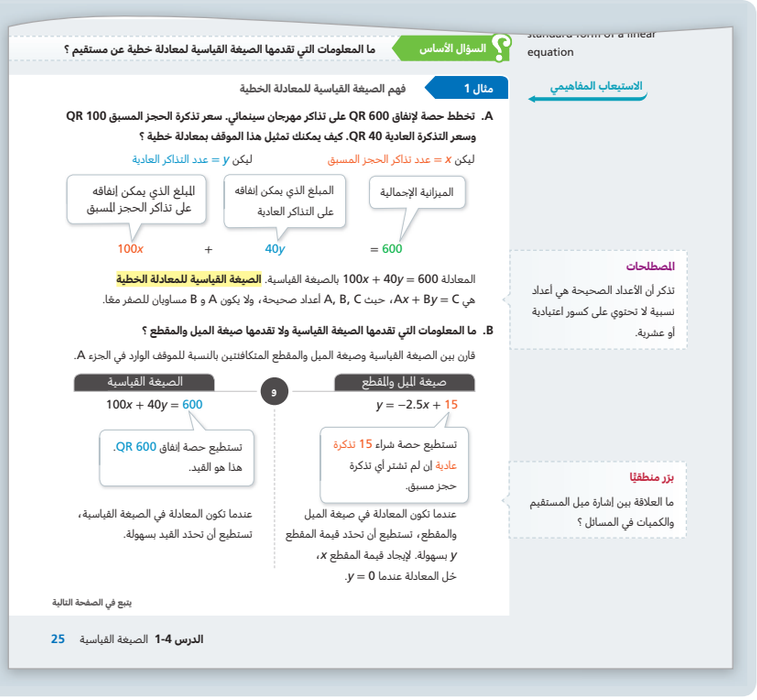
طرح أسئلة هادفة

س: في الجزء A، لماذا المقدار $100x + 40y$ مكافىء للتكلفة الكلية QR 600 ؟

[يمثل الحدّ $100x$ المبلغ الذي أُنفق على شراء تذاكر الحجز المسبق ويمثل الحد $40y$ المبلغ الذي أُنفق على شراء التذاكر العادية. المبلغ الكلي الذي سوف يتم انفاقه هو QR 600، إذن سوف تنفق حصة QR 600 على تراكيب (مجموع عدد) التذاكر.]

س: في الجزء B، ما المعلومات التي يقدّمها المقطعين x و y في هذا المثال ؟

[يوضّح المقطع x عدد تذاكر الحجز المسبق التي يمكن شراؤها إذا لم يتم شراء أي تذكرة عادية. يوضّح المقطع y عدد التذاكر العادية التي يمكن شراؤها إذا لم يتم شراء أي تذكرة من تذاكر الحجز المسبق.]



standard form of a linear equation

السؤال الأساس: ما المعلومات التي تقدمها الصيغة القياسية لمعادلة خطية عن مستقيم ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 فهم الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

A. تخطط حصة لإنفاق QR 600 على تذاكر مهرجان سينمائي. سعر تذكرة الحجز المسبق QR 100 وسعر التذكرة العادية QR 40. كيف يمكنك تمثيل هذا الموقف بمعادلة خطية ؟

ليكن x = عدد تذاكر الحجز المسبق ليكن y = عدد التذاكر العادية

الميزانية الإجمالية = 600 ، المبلغ الذي يمكن إنفاقه على التذاكر العادية $40y$ + ، المبلغ الذي يمكن إنفاقه على تذاكر الحجز المسبق $100x$

المعادلة $100x + 40y = 600$ بالصيغة القياسية. **الصيغة القياسية للمعادلة الخطية** هي $Ax + By = C$، حيث A, B, C أعداد صحيحة، ولا يكون A و B مساويان للصفر معًا.

B. ما المعلومات التي تقدمها الصيغة القياسية ولا تقدمها صيغة الميل والمقطع ؟

قارن بين الصيغة القياسية وصيغة الميل والمقطع المتكافئتين بالنسبة للموقف الوارد في الجزء A.

صيغة الميل والمقطع	و	الصيغة القياسية
$y = -2.5x + 15$		$100x + 40y = 600$
تستطيع حصة شراء 15 تذكرة عادية إن لم تشتر أي تذكرة حجز مسبق.		تستطيع حصة إنفاق QR 600. هذا هو القيد.
عندما تكون المعادلة في صيغة الميل والمقطع، تستطيع أن تحدّد قيمة المقطع y بسهولة. لإيجاد قيمة المقطع x، خل المعادلة عندما $y = 0$.		عندما تكون المعادلة في الصيغة القياسية، تستطيع أن تحدّد القيد بسهولة.

المصطلحات
تذكر أن الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية لا تحتوي على كسور اعتيادية أو عشرية.

بزر منطقيًا
ما العلاقة بين إشارة ميل المستقيم والكميات في المسائل ؟

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 1-4 الصيغة القياسية 25

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. من السهل إيجاد المقطع x للتمثيل البياني للمعادلات في الجزء B باستعمال الصيغة القياسية لأنه يمكنك تعويض 0 عن y وأن تحلّ بالنسبة للمتغير x.

مثال 2 التمثيل البياني لمعادلة خطية بالصيغة القياسية

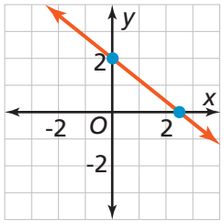
طرح أسئلة هادفة

س: عند تمثيل مستقيم مكتوب في الصيغة القياسية، لماذا من المفيد إيجاد المقطعين x و y أولًا ؟

[المقطعان هما النقطتان الأسهل حسابهما لأن في كل حالة تكون قيمة أحد المتغيرين تساوي صفرًا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2.



مثال 3 العلاقة بين الصيغة القياسية والمستقيمات الأفقية والرأسية

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ما شكل التمثيل البياني للمعادلة $1.5y = -3$ ؟ وضّح قيم y لأي قيم x معطاة.

[التمثيل البياني مستقيم أفقي عند $y = -2$ وقيمة y تساوي -2 لكل قيمة من قيم x.]

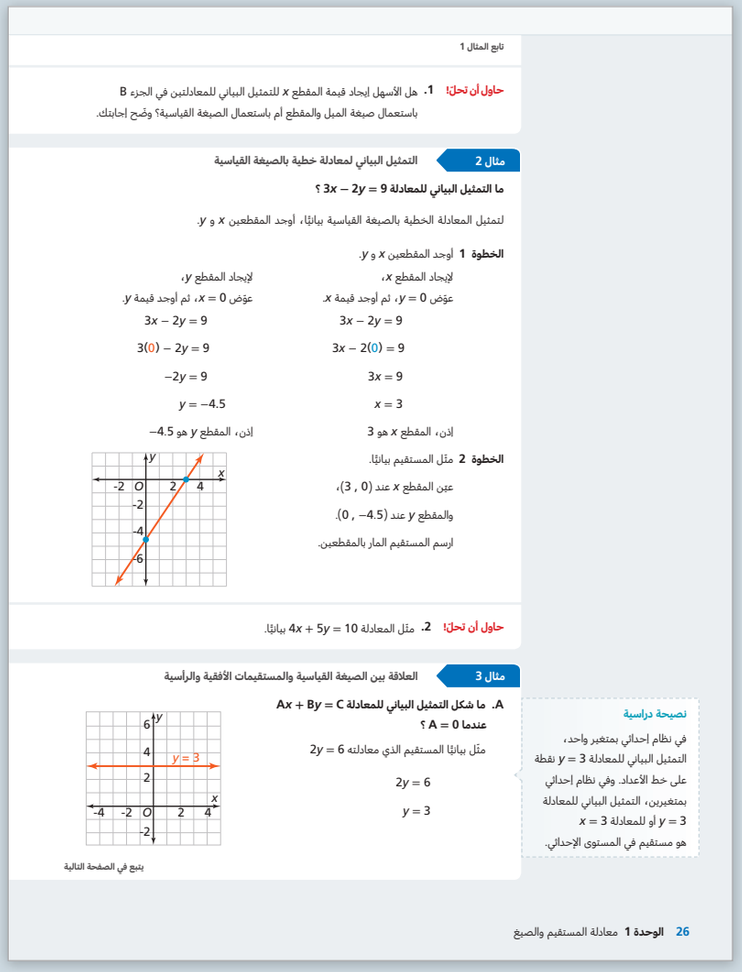
س: ما شكل التمثيل البياني للمعادلة $0.5\ x = -4$ ؟ وضّح قيم x لأي قيم y معطاة.

[التمثيل البياني مستقيم رأسي عند $x = -8$ وقيمة x تساوي -8 لكل قيمة من قيم y.]

عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 1, 2, 3**

عمّم إذا كانت المعادلة الخطية مكتوبة في الصيغة القياسية، هل يمكنك دائمًا إيجاد المقطعين x و y ؟ وضّح إجابتك.

[نعم، يمكن إيجاد مقطع x بتعويض 0 عن y وإيجاد المقطع y بتعويض 0 عن x]



تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! 1. هل الأسهل إيجاد قيمة المقطع x للتمثيل البياني للمعادلتين في الجزء B باستعمال صيغة الميل والمقطع أم باستعمال الصيغة القياسية؟ وضّح إجابتك.

مثال 2 التمثيل البياني لمعادلة خطية بالصيغة القياسية

ما التمثيل البياني للمعادلة $3x - 2y = 9$ ؟

لتمثيل المعادلة الخطية بالصيغة القياسية بيانيًا، أوجد المقطعين x و y.

الخطوة 1 أوجد المقطعين x و y.

لإيجاد المقطع x، عوّض $y = 0$، ثم أوجد قيمة x.

$3x - 2y = 9$

$3x - 2(0) = 9$

$3x = 9$

$x = 3$

إذن، المقطع x هو 3

لإيجاد المقطع y، عوّض $x = 0$، ثم أوجد قيمة y.

$3x - 2y = 9$

$3(0) - 2y = 9$

$-2y = 9$

$y = -4.5$

إذن، المقطع y هو -4.5

الخطوة 2 مثّل المستقيم بيانيًا.

عيّن المقطع x عند $(3 , 0)$،

والمقطع y عند $(0 , -4.5)$.

ارسم المستقيم المار بالمقطعين.

حاول أن تحلّ! 2. مثّل المعادلة $4x + 5y = 10$ بيانيًا.

مثال 3 العلاقة بين الصيغة القياسية والمستقيمات الأفقية والرأسية

A. ما شكل التمثيل البياني للمعادلة $Ax + By = C$ عندما $A = 0$ ؟

مثّل بيانيًا المستقيم الذي معادلته $2y = 6$

$2y = 6$

$y = 3$

نصيحة دراسية

في نظام إحداثي بمتغير واحد، التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ نقطة على خط الأعداد. وفي نظام إحداثي بمتغيرين، التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ أو للمعادلة $x = 3$ هو مستقيم في المستوى الإحداثي.

بتبع في الصفحة التالية

26 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطرح أمام الطلاب تحدّيًا تطلب فيه منهم أن يكتبوا المعادلتين التاليتين في الصيغة القياسية وتمثيلهما بيانيًا باستعمال المقاطع x و y.

1. $\frac{3}{4}x - 8 = -3y$
2. $5 + \frac{1}{2}y = 3.5x$

س: ما الخطوات التي عليك اتباعها لتكتب المعادلتين في الصيغة القياسية ؟

[أستعمل خصائص التساوي لأنقل المتغيرات إلى الجانب الأيسر والثوابت إلى الجانب الأيمن، ثم أضرب المعادلة الأولى بالعدد 4 والمعادلة الثانية بالعدد 2 لألغي الكسور والكسور العشرية.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 اطلب إلى الطلاب التدرّب على أن يكتبوا في الصيغة القياسية معادلة مستقيم في سياق معيّن معطى. يريد أحمد أن يرسل إلى أخيه الذي يعيش خارج البلاد بعض الأغراض. قرر أحمد أن يرسل صندوقًا يحتوي على 64 أونصة من الحلوى من نوعين. النوع الأول من الحلوى معبأ في عبوّات تحتوي كل منها على 2 أونصة، والنوع الثاني معبأ في عبوّات تحتوي كل منها على 8 أونصة.

س: ماذا يمثل كل من المتغيرين x و y ؟

[عدد العبوّات من كل نوع من الحلوى.]

س: ما المعادلة التي تمثل هذا الموقف ؟

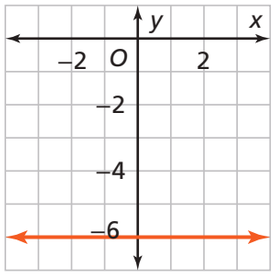
[$2x + 8y = 64$]

www.jnob-jo.com

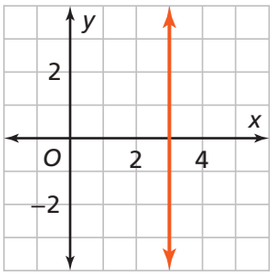
تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a.



b.



مثال 4 استعمال الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: عند كتابتك للمعادلة، كيف تحدد ماذا يمثل كل من x و y ؟

[بما أن عدد الكيلوجرامات من كل نوع من المكسرات يمثل الكميتين المجهوليتين، جرى تمثيل هاتين الكميتين بالمتغيرين x و y.]

س: لماذا شكل التمثيل البياني قطعة مستقيمة بدلًا من أن يكون مستقيمًا ؟

[لأنه لا يمكن أن يكون عدد الكيلوجرامات من اللوز أو من الكاجو أصغر من صفر.]

عادات التفكير استعمل مع **المثال 4**

نمذج كيف تحدد ما إذا كانت كل نقطة واقعة على التمثيل البياني حلًا للمسألة ؟

[كل نقطة تقع على التمثيل البياني هي حلّ إذا كان سياق المسألة لا يضع قيودًا على القيم. لكن من المهم التأكد مما إذا كانت الحلول الممكنة منطقية بالنسبة لسياق المسألة.]

تابع المثال 3

لا تتضمن المعادلة $y = 3$ المتغير x، لذا فإن x لا يؤثر في قيم y.
قيمة y هي 3 لكل قيم x، لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ هو مستقيم أفقي.

في المستوى الإحداثي، المعادلة ذات المتغير الواحد تعني أن المتغير الآخر لا يؤثر في المعادلة أو التمثيل البياني.

عندما $A = 0$، يكون التمثيل البياني للمعادلة $Ax + By = C$ مستقيمًا أفقيًا.

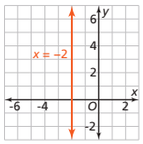
B. ما شكل التمثيل البياني للمعادلة $Ax + By = C$ عندما $B = 0$ ؟

مثّل المعادلة $3x = -6$ بيانيًا.

$3x = -6$

$x = -2$

قيمة x هي -2، بغض النظر عن قيمة y.



عندما $B = 0$، يكون التمثيل البياني للمعادلة $Ax + By = C$ مستقيمًا رأسيًا.

حاول أن تحلّ! **3.** ارسم التمثيل البياني لكل معادلة.

a. $3y = -18$ **b.** $4x = 12$

تطبيق

مثال 4 استعمال الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

تريد خولة إعداد خليط من المكسرات. لديها QR 160 لشراء خليط من اللوز والكاجو، وتريد أن يتضمن خليط المكسرات نفس الكمية تقريبًا من النوعين.
كيف يمكن لخولة تحديد كم كيلوجرامًا يجب أن تشتري من كل نوع ؟

ضع ▶ اكتب معادلة تمثّل هذا الموقف ثم مثّلها بيانيًا.

$$\text{QR } 160 = y \text{ كيلوجرام} \times \text{سعر الكاجو} + x \text{ كيلوجرام} \times \text{سعر اللوز}$$
$$160 = 40y + 32x$$

احسب ▶ أوجد المقطعين x و y للمعادلة $32x + 40y = 160$

$32x + 40(0) = 160$ $\quad$ $32(0) + 40y = 160$

$x = 5$ $\quad$ $y = 4$

ارسم القطعة المستقيمة الواصلة بين المقطعين.

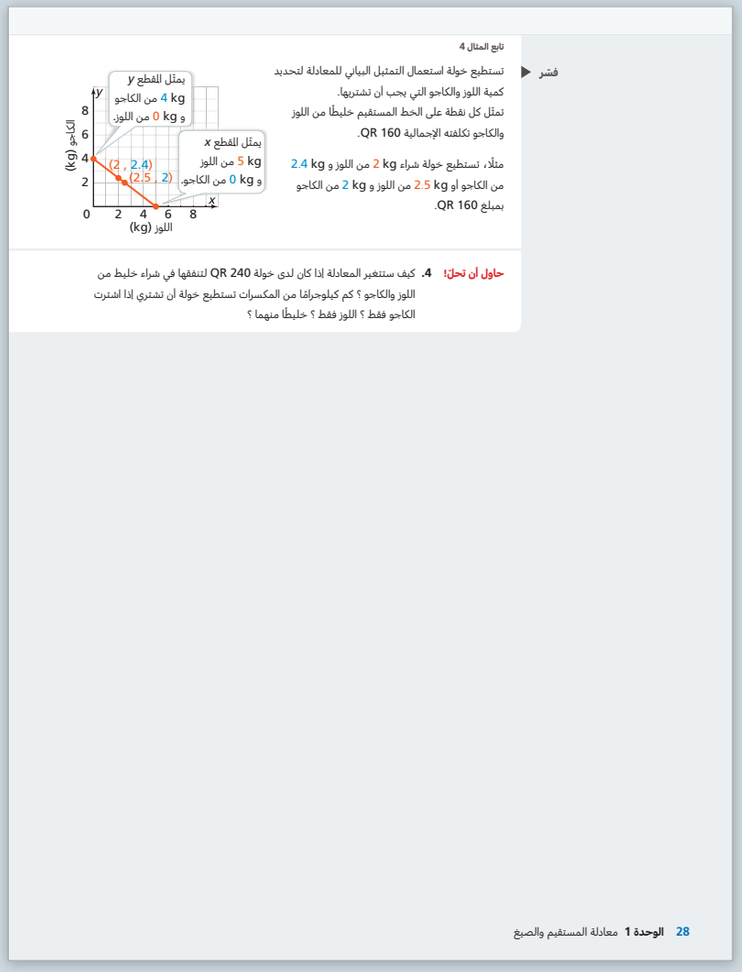
يتبع في الصفحة التالية

www.jnob-jo.com

تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. $32x + 40y = 240$, $y = 6$, $x = 7.5$



تابع المثال 4

فسّر ▶ تستطيع خولة استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد كمية اللوز والكاجو التي يجب أن تشتريها.
تمثّل كل نقطة على الخط المستقيم خليطًا من اللوز والكاجو تكلفته الإجمالية QR 160.

مثلًا، تستطيع خولة شراء 2 kg من اللوز و 2.4 kg من الكاجو أو 2.5 kg من اللوز و 2 kg من الكاجو بمبلغ QR 160.

حاول أن تحلّ! **4.** كيف ستتغير المعادلة إذا كان لدى خولة QR 240 لتنفقها في شراء خليط من اللوز والكاجو ؟ كم كيلوجرامًا من المكسرات تستطيع خولة أن تشتري إذا اشترت الكاجو فقط ؟ اللوز فقط ؟ خليطًا منهما ؟

28 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الاستماع مستوى 2

س: أي مستقيمين يلتقيان عندما نتحدث عن المقطع y ؟
[المحور y والمستقيم الذي جرى تمثيله.]

س: أي مستقيمين يلتقيان عندما نتحدث عن المقطع x ؟
[المحور x والمستقيم الذي جرى تمثيله.]

الكتابة مستوى 3

س: كيف تمثّل المعادلة خليطا من اللوز والكاجو ؟
[يمثل المتغيران x و y المكسرات. اضرب كلا من x و y في سعر الكيلوجرام العائد لكل منهما، ثم اجمع ناتجي الضرب واجعل ذلك يساوي المبلغ الذي جرى إنفاقه.]

س: كيف يمثل التمثيل البياني خليطًا من اللوز والكاجو ؟
[يوضح التمثيل البياني نفس العلاقة التي توضحها المعادلة و لكن في صورة رسم.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

س: كيف يمكن استعمال الصورة الجبرية للصيغة القياسية لتحديد المقطعين x و y؟
[المقطع x هو $\frac{C}{A}$ والمقطع y هو $\frac{C}{B}$.]

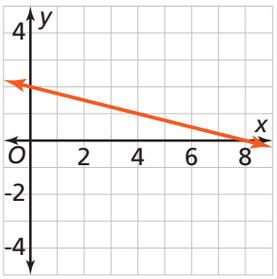
عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

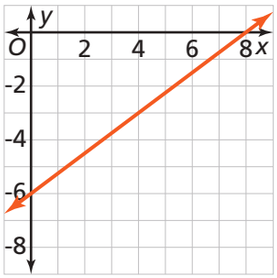
خطأ شائع

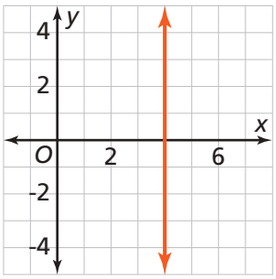
التمرين 3 قد ينسى بعض الطلاب حذف القيم الكسرية أو القيم الكسرية العشرية عند إعادة كتابة المعادلات في الصيغة القياسية. ذكّر هؤلاء الطلاب بأن A و B و C يجب أن تكون أعدادًا صحيحة. في هذه الحالة، على راشد أن يضرب طرفي المعادلة في 2.

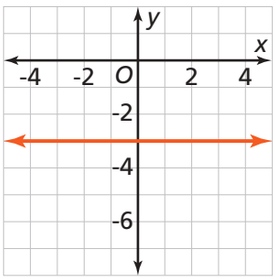
الإجابات

1. الصيغة القياسية للمعادلة الخطية هي: $Ax + By = C$ حيث A و B كلاهما لا يساويان الصفر معاً. وحيث A, B, C هي اعداد صحيحة. تساعد الصيغة القياسية في تحديد المقاطع بسهولة. يمكن حل المعادلة بالنسبة للمتغير x أو y لإيجاد المقطع x أو المقطع y. الصيغة القياسية تساعد أكثر على رؤية القيود عن طريق البحث.
2. كل منهما هي صيغة لمعادلة خطية. الصيغة القياسية لا تعطي المقطع y كما تعطيه صيغة الميل والمقطع y. لكن يمكنك إيجاد المقطع y في الصيغة القياسية وذلك بالتعويض عن $x = 0$ ثم الحل بالنسبة للمتغير y. من السهل إيجاد الميل باستعمال صيغة الميل والمقطع y. الصيغة القياسية تحدد القيود.
3. لم يستعمل راشد الأعداد الصحيحة لكل المعاملات. يجب أن تكون المعادلة بالصيغة: $3x + 2y = 8$
4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عندما تريد صنع مزيج من عنصرين وتحتاج الى تكوين ناتج اجمالي.

5.


6.


7.


8.


9. $12x + 8y = 48$
حيث x كمية العنب الأحمر و y كمية العنب الأخضر.

ملخص المفهوم الصيغة القياسية للمعادلة الخطية

لفظيًا تفيد الصيغة القياسية للمعادلة الخطية في:
- إيجاد المقطعين x و y بسهولة.
- كتابة معادلة مستقيم رأسي أو أفقي.

يمثّل المقطع x قيمة المتغير x عندما $y = 0$، ويمثّل المقطع y قيمة المتغير y عندما $x = 0$.

جبريًا $Ax + By = C$، حيث A, B, C أعداد صحيحة، وكلا A و B لا يساويان الصفر معًا.

عدديًا $2x - 3y = -3$

بيانيًا
للمقطع y يساوي 1
المقطع x يساوي $-\frac{3}{2}$

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما المعلومات التي تقدمها الصيغة القياسية لمعادلة خطية عن مستقيم ؟
2. **تواصل بدقة** ما أوجه الشبه والاختلاف بين الصيغة القياسية للمعادلة الخطية وصيغة الميل والمقطع ؟
3. **حلّل الخطأ** يقول راشد إن المعادلة $y = -1.5x + 4$ بالصيغة القياسية هي $1.5x + y = 4$ أوجد خطأ راشد وصححه.
4. **استعمل البنية** صِف موقفًا تكون فيه الصيغة القياسية للمعادلة الخطية أكثر فائدة من صيغة الميل والمقطع.

طبّق فهمك

في التمارين 5-8، استعمل المقطعين x و y لتمثيل المعادلة بيانيًا.

5. $x + 4y = 8$
6. $3x - 4y = 24$
7. $5x = 20$
8. $-3y = 9$

9. لدى هدى 48 QR لتنفقها في شراء كمية من العنب الأخضر والأحمر. ما المعادلة التي تستطيع هدى استعمالها لرسم مستقيم في المستوى الإحداثي يوضح الكميتين المختلفتين من العنب الأخضر والأحمر التي تستطيع شراءها بمبلغ 48 QR ؟

عنب
أخضر QR 8/kg
أحمر QR 12/kg

الدرس 1-4 الصيغة القياسية 29

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
فردي 10-28, 29-39 41-46	فردي 10-14, 15-27 29-46

تحليل التمارين

المثال	التمارين	عمق المعرفة
1	33-36, 42, 45	2
	11, 14	3
2	13, 15-22	1
	10, 29-32, 44	2
	12	3
3	23–28	1
4	37-40	1
	41	2
	43, 46	3

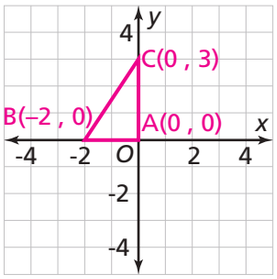
الإجابات

10. **a.** $A = 6 ; B = -8 ; 6x - 8y = 24$
b. $A = 8 ; B = 12 ; 8x + 12y = 24$

11. يستطيع صالح حل المعادلة $2x + 5y = 15$ وإيجاد y بدلالة x فيجد المعادلة الثانية نفسها: $y = -\frac{2}{5}x + 3$

12. نسي الطالب الإبقاء على الإشارة السالبة للحد $-6y$ في الخطوة الثانية. إذن المقطع y هو -2

13. $B(-2 , 0) , C(0 , 3)$. تحقق من رسوم التمثيلات البيانية عند الطلاب.



14. أوجد الميل بإيجاد قيمة y من المعادلة $5x + 2y = 10$ وكتابتها بصيغة الميل والمقطع y فتكون: $y = -\frac{5}{2}x + 5$. الميل هو $-\frac{5}{2}$
العلاقة بين الميل و المعاملات هي: $m = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{2}$

15. المقطع x هو 5، المقطع y هو 2

16. المقطع x هو -8، المقطع y هو 6

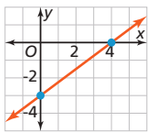
17. المقطع x هو 12، المقطع y هو 24

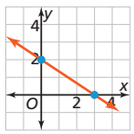
18. المقطع x هو 4، المقطع y هو -8

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. **استعمل البنية** إذا كان $C = 24$، أوجد قيم A و B التي تحقق المعادلة $Ax + By = C$ لكل تمثيل بياني.
اكتب الصيغة القياسية لكل معادلة.

a.


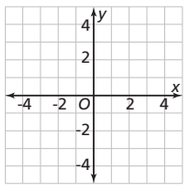
b.


11. **ابن الحجج الرياضية** مثّل صالح المعادلتين الخطيتين $y = -\frac{2}{5}x + 3$ و $2x + 5y = 15$ بيانيًا. بدا التمثيلان البيانيان متطابقين، فاعتقد صالح أن المعادلتين تمثّلان نفس المستقيم. ما الحجة الرياضية التي يستطيع صالح بناءها لإثبات تكافؤ الصيغتين ؟

12. **حلّل الخطأ** صِف الخطأ الذي ارتكبه الطالب عند إيجاده المقطعين x و y للمستقيم الذي معادلته $4x - 6y = 12$، ثم صححه.

$4x - 6(0) = 12$	$4(0) - 6y = 12$
$4x = 12$	$6y = 12$
$x = 3$	$y = 2$
المقطع x هو 3	المقطع y هو 2

13. **روابط في الرياضيات** تمثّل النقطة A أحد رؤوس المثلث ABC. تمثّل النقطة B المقطع x للمعادلة $6x - 4y = -12$، وتمثّل النقطة C المقطع y. ماذا تمثّل النقطتان B و C ؟
ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.



14. **مهارات التفكير العليا** اعتبر المستقيم الذي معادلته $5x + 2y = 10$، ما العلاقة بين ميل هذا المستقيم وقيمة كل من A, B, C في الصيغة القياسية $Ax + By = C$ ؟

تدرَّب

في التمارين 15-18، حدّد المقطعين x و y للتمثيل البياني لكل معادلة. انظر المثالين 1 و 2

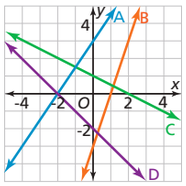
15. $2x + 5y = 10$ **16.** $3x - 4y = -24$
17. $10x + 5y = 120$ **18.** $2x - y = 8$

في التمارين 19-22، مثّل كل معادلة بيانيًا. انظر مثال 2

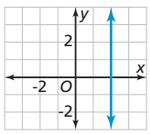
19. $2x - 4y = 8$ **20.** $3x + 5y = 15$
21. $3x - 6y = -12$ **22.** $8x + 12y = -24$

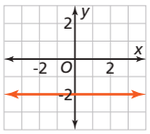
في التمارين 23-26، حدّد المستقيم الذي يمثّل كل معادلة. انظر مثال 2

23. $4x + 4y = -8$
24. $3x - 2y = -6$
25. $x + 2y = 2$
26. $3x - y = 3$



في التمرينين 27 و 28، ما العلاقة بين التمثيل البياني لكل معادلة والصيغة القياسية $Ax + By = C$ ؟ انظر مثال 3

27.


28.


في التمارين 29-32، مثّل كل معادلة بيانيًا. انظر مثال 3

29. $4x = 10$ **30.** $-6y = 3$
31. $3y = -15$ **32.** $-9x = -27$

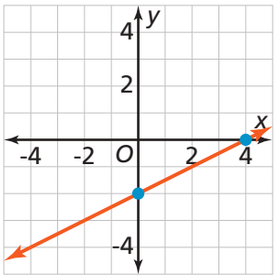
في التمارين 33-36، اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

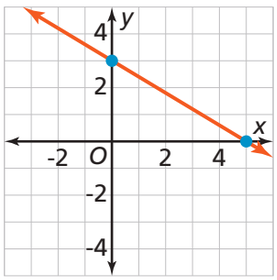
33. $y = 4x - 18$ **34.** $y = 2x + \frac{3}{7}$
35. $y = -\frac{1}{2}x - 10$ **36.** $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 6)$

في التمارين 37-40، اكتب معادلة بالصيغة القياسية للمستقيم المار بكل زوج من النقاط المعطاة.

37. $(0 , 2), (8 , 0)$ **38.** $(6 , 0), (0 , 4)$
39. $(3 , 0), (0 , -7)$ **40.** $(2 , -3), (2 , 9)$

30 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

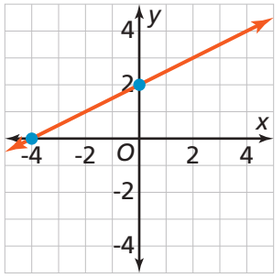
19.


20.


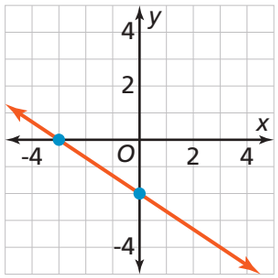
www.jnob-jo.com

الإجابات

21.



22.



23. D

24. A

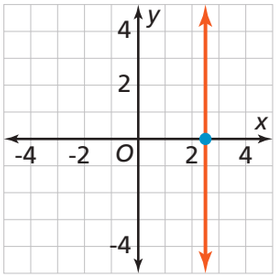
25. C

26. B

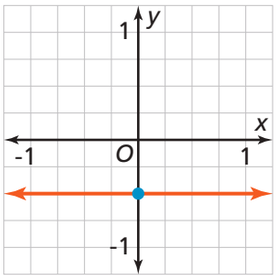
27. $B = 0$; $Ax = C$; $x = 2$

28. $A = 0$; $By = C$; $y = -2$

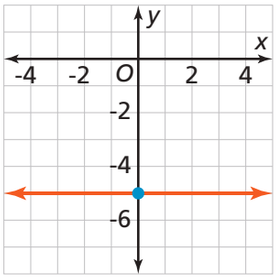
29.



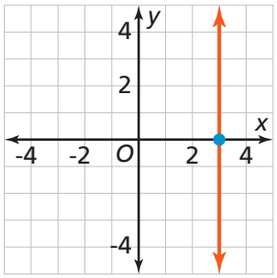
30.



31.



32.



ملاحظة للتمارين 33-40: عند كتابة الصيغة القياسية لمستقيم $Ax + By = C$ يُفضل أن تكون قيمة A موجبة.

33. $4x - y = 18$

34. $14x - 7y = -3$

35. $x + 2y = -20$

36. $2x - 3y = -15$

37. $2x + 8y = 16$

38. $4x + 6y = 24$

39. $7x - 3y = 21$

40. $x = 2$

www.jnob-jo.com

الإجابات

41. تستطيع بدرية شراء 10 Kg من جبنة شيدر و 6 Kg من الجبنة السويسرية. المعادلة الخطية بالصيغة القياسية $12x + 20y = 120$ وهذه المعادلة تعطي خليطا من النوعين.

42. $4x + \frac{8}{3}y = 24$ أي المعادلة بالصيغة القياسية هي: $x + 2y = 6$ حيث x هي كمية دقيق القمح بالكيلوجرام و y كمية دقيق الشوفان بالكيلوجرام.

43. يمكن استعمال المعادلة: $48x + 40y = 1\,200$ حيث x تمثل عدد القبعات و y تمثل عدد القمصان. وبما أن عدد القبعات يجب أن يكون عددًا صحيحًا موجبًا، وعدد القمصان يجب أن يكون عددًا صحيحًا موجبًا، عدد صحيح موجب فإن حلول المعادلة يجب أن تكون اعدادا صحيحة موجبة.

44. A ; B ; D

45. E

46. الجزء A. المانجو والأناناس،
المعادلة: $6x + 9y = 96$
المانجو والفراولة،
المعادلة: $6x + 12y = 96$
الأناناس والفراولة،
المعادلة: $9x + 12y = 96$

الجزء B. مانجو: $10\frac{2}{3}$ أكواب، اناناس: 16 كوباً
مانجو: 8 أكواب، فراولة: 16 كوباً
أناناس: 8 أكواب، فراولة: $10\frac{2}{3}$ أكواب

الجزء C. تحتاج فاطمة إلى إضافة مانجو وأناناس أو مانجو وفراولة. بما أن فاطمة سوف تحتاج الى سائل إضافي على كل كوب لإعداد العصير إذن هي بحاجة إلى 12 كوباً من الفاكهة لتحصل على الأقل 24 كوبًا من الخليط. المدى بالأكواب لعصير المانجو والأناناس ولعصير المانجو والفراولة يتضمن على الأقل 12 كوبًا.

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

41. **نمذج** تُعد بدرية وجبة صغيرة. لديها QR 120 لتنفقها في شراء كمية جبن الشيدر والجبن السويسري. كم كيلوجرامًا من الجبن تستطيع بدرية أن تشتري إذا اشترت جبن الشيدر فقط ؟ الجبن السويسري فقط ؟ خليطًا منهما ؟ ما المعادلة الخطية بالصيغة القياسية التي تستطيع بدرية استعمالها لنمذجة هذا الموقف ؟

42. **نمذج** سعر 4 باوند من دقيق القمح QR 16 وسعر 5 باوند من دقيق الشوفان QR 40. لدى مطر QR 24 ويريد شراء كمية من النوعين. اكتب معادلة خطية بالصيغة القياسية يستطيع مطر استعمالها لنمذجة هذا الموقف.

43. **فكّر وثابر في الحل** يعمل عمر مشرفًا على مخيم صيفي، ولديه ميزانية مقدارها QR 1 200 لإنفاقها في شراء القبعات والقمصان الرياضية الخاصة بالمخيم الصيفي.

ما المعادلة التي يستطيع عمر استعمالها لتحديد عدد القبعات والقمصان الرياضية التي يستطيع شراءها مقابل QR 1 200 ؟ إذا قام عمر بتمثيل المعادلة الخطية بيانيًا، فهل ستمثّل كل نقطة على التمثيل البياني حلًا ممكنًا ؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب على اختبار

44. أي من المعادلات التالية تمثيلها البياني هو نفس التمثيل البياني للمعادلة $2x + 3y = 12$ ؟ اختر كل ما ينطبق.

Ⓐ $y = -\frac{2}{3}x + 4$ Ⓑ $x + \frac{3}{2}y = 6$

Ⓒ $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$ Ⓓ $-2x - 3y = -12$

Ⓔ $y - 2 = -\frac{2}{3}x + 4$

45. **اختبار SAT/ACT** ما الصيغة القياسية للمعادلة $\frac{3}{8}x + \frac{2}{3}y = 5$ ؟

Ⓐ $y = -\frac{9}{16}x + \frac{15}{2}$ Ⓑ $y + \frac{3}{2} = -\frac{9}{16}(x - 16)$

Ⓒ $\frac{3}{8}x + \frac{2}{3}y = 5$ Ⓓ $3x + \frac{16}{3}y = 40$

Ⓔ $9x + 16y = 120$

46. **مهمة أدائية** لدى فاطمة مبلغ QR 96 وتريد شراء نوعين من الفاكهة لإعداد خليط من العصير. يوضح الجدول أدناه تكلفة الكوب الواحد من كل نوع من الفاكهة.

الفاكهة	تكلفة الكوب (QR)
مانجو	6
أناناس	9
فراولة	12

الجزء A ما الأزواج الممكنة من أنواع الفاكهة التي تستطيع فاطمة شراءها ؟ اكتب معادلة خطية بالصيغة القياسية لنمذجة عدد أكواب الفاكهة التي تستطيع فاطمة شراءها لكل خليط ممكن من الفاكهة.

الجزء B ما كميات الفاكهة الممكنة، بالأكواب، التي تستطيع فاطمة شراءها لكل خليط في الجزء A ؟

الجزء C تريد فاطمة إضافة كوب من السائل إلى كل كوب من الفاكهة لإكمال إعداد العصير. إذا احتاجت إلى إعداد 24 كوبًا من العصير على الأقل، فأي خليط فاكهة ستسمح لها ميزانيتها بإعداده ؟ وضّح تبريرك المنطقي.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-5

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ كتابة معادلة لتمثيل مستقيم متوازي مع مستقيم آخر أو متعامد مع مستقيم آخر.

✔ تمثيل المستقيمات بيانيًا لتبيان فهمهم للعلاقة بين ميول المستقيمات المتوازية وميول المستقيمات المتعامدة.

✔ حل مسائل من واقع الحياة تتضمن مستقيمات متوازية أو متعامدة.

الفهم الأساس

تساعد معادلات المستقيمات على توضيح ما إذا كانت هذه المستقيمات متوازية أو متعامدة. المستقيمان المتوازيان يكون لهما نفس الميل ولكن يختلفان في المقطع x والمقطع y. أما المستقيمان المتعامدان فميل كل منهما هو معكوس مقلوب الآخر.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة معادلة مستقيم في صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة والصيغة القياسية وتمثيلها بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال الميل و/ أو مقطعي معادلة مستقيم لكتابة معادلات مستقيمات متوازية ومتعامدة.

لاحقًا في المرحلة الثانوية، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال معادلات خطية لنمذجة دوال خطية ممثلة بمتتاليات حسابية وبيانات في مخططات الانتشار.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أن للمستقيمين المتوازيين نفس الميل ولكنهما يختلفان في المقاطع، وأن ميل كل من المستقيمين المتعامدين هو معكوس مقلوب الآخر.
- يكتب الطلاب معادلات لمستقيمات متوازية ومتعامدة ويطبقون ذلك لنمذجة مسائل من واقع الحياة.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

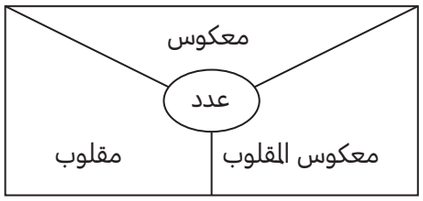
- **مستقيمات متوازية** | *parallel lines*
- **مستقيمات متعامدة** | *perpendicular lines*
- **مقلوب** | *reciprocal*

المصطلحات الجديدة

- **معكوس المقلوب** | *opposite reciprocal*

نشاط المصطلحات

راجع مع الطلاب المصطلحات "مستقيمات متوازية"، "مستقيمات متعامدة" و"مقلوب". ثم عرّف الطلاب على المصطلح "معكوس المقلوب" من خلال الطلب إليهم أن يستذكروا معنى المصطلح "معكوس" عندما يُستخدم في الرياضيات. بعد ذلك، اطلب من الطلاب إكمال المنظم البياني لمساعدتهم على فهم الاختلاف بين المصطلحات "معكوس"، "مقلوب"، و"معكوس المقلوب".



نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين :

9.2.3 يحدّد توازي أو تعامد مستقيمين بمعلومية معادلة كل منهما، ويكتب معادلة مستقيم موازي أو عمودي على مستقيم معلوم.

9.4.1 يعرف التعريفات الدقيقة للزاوية و الدائرة و المستقيمات المتوازية والمتعامدة والقطعة المستقيمة بناءا على البديهيات (النقطة، المستقيم، المستوى) والمسافة على المستقيم والمسافة حول قوس الدائرة.

تطبيق ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية وإستعملها

يستعمل الطلاب فهمهم للعلاقة بين المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة ليحددوا طرقًا لكتابة معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم آخر أو متعامد معه.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يبحث الطلاب عن اختصارات لكتابة معادلات لمستقيمات متوازية ولمستقيمات متعامدة مدركين أن المستقيمين المتوازيين لهما نفس الميل وأن المستقيمين المتعامدين ميل كل منهما هو معكوس مقلوب الآخر.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس ينظر الطلاب إلى الرسوم البيانية لثلاثة معادلات مستقيمات لها نفس الميل وتختلف في المقاطع y ، وذلك لمقارنة مستقيمات هذه المعادلات. هذا العمل سوف يهيئهم لفهم وادراك العلاقة بين الميول والمقاطع لمستقيمات متوازية ولمستقيمات متعامدة.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ حول صيغ المعادلات المعروضة على شاشة الحاسبة ؟
[المعادلات الثلاث كُتبت في صيغة الميل والمقطع.]

س: ماذا تستطيع أن تحدد من المعادلات المكتوبة في صيغة الميل والمقطع ؟
[الميول هي نفسها، قيمتها 3، ولكن المقاطع y مختلفة.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلات البيانية للمستقيمات ؟ ما أوجه الاختلاف ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة. تميل المستقيمات نحو الأعلى ونحو اليمين، ولكن ارتفاعات هذه المستقيمات عن المحور y مختلفة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: كيف تختلف التمثيلات البيانية للمستقيمات الثلاث إذا جرى تبديل قيمة الميل وقيمة المقطع y في كل معادلة ؟
[تتقاطع المستقيمات الثلاث عند النقطة $(0 , 3)$ ولكنها تميل في زوايا مختلفة.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: لماذا لم تتقاطع المستقيمات أبدًا ؟
[لأن لها نفس الميل.]

س: كيف يمكنك أن تكتب معادلة مستقيم لا يتقاطع مع أي من هذه المستقيمات ؟
[اكتب معادلة اي مستقيم قيمة ميله 3]

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

ابحث عن العلاقات ما المفاهيم التي تعلمتها سابقًا وساعدتك في تحليل هذه المسألة ؟

[صيغة الميل والمقطع، تمثيل المستقيمات بيانيًّا، معنى المستقيمات المتوازية.]

كتاب الطالب، صفحة 32

1-5 المستقيمات المتوازية والمتعامدة

Parallel and Perpendicular Lines

استطيع... كتابة معادلات المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

معايير الدرس 9.2.3 و 9.4.1

المصطلحات

استكشف وبرّر منطقيًّا

مثّل بيانيًّا المعادلات الثلاث المجاورة مستعملًا حاسبة الرسوم البيانية.

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 = 3X+1
\Y2 = 3X+2
\Y3 = 3X+4
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =

A. **ابحث عن العلاقات** اختر أي مستقيمين من المستقيمات التي رسمتها. ما العلاقة بينهما ؟

B. هل تنطبق إجابتك عن الجزء A على أي مستقيمين ؟ وضح إجابتك.

C. اكتب مجموعة أخرى من ثلاث معادلات أو أكثر تربط بينها نفس العلاقات التي تربط بين المعادلات الثلاث الأولى.

السؤال الأساس **كيف تساعدك معادلتا مستقيمين على تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك ؟**

نموذج من أعمال الطلاب

A. $y = 3x + 1$ و $y = 3x + 2$ لهما نفس الميل ويختلفان في المقطع y.

B. نعم، المستقيمات الثلاث لها نفس الانحدار ولكن تتقاطع مع المحور y عند نقاط مختلفة.

C. يجب أن يكون ميل كل معادلة مساويًا للعدد 3، سوف تتغير مقاطع y، ولكن يجب أن تختلف عن مقاطع y في المعادلات الثلاث الأصلية.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب على المستقيمات المتوازية والمتعامدة. وضّح لهم أنهم يستطيعون استعمال معادلات المستقيمات لتحديد ما إذا كانت هذه المستقيمات متوازية، متعامدة، أم غير ذلك.

مثال 1 كتابة معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم معطى

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا تُعتبر صيغة الميل ونقطة مفيدة عند كتابة معادلة مستقيم مواز لمستقيم آخر ومار بنقطة معلومة ؟

[عند استعمالك صيغة الميل ونقطة، يمكنك تحديد ميل المستقيم. المستقيم الموازي للمستقيم المعطى الآخر له نفس الميل. يمكنك استعمال هذا الميل ونقطة يمر بها المستقيم الجديد لتكتب المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $y = -\frac{2}{3}x + 3$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الذي تحتاج إلى معرفته لتكتب معادلة مستقيم مواز لمستقيم آخر ؟

[ميل المستقيم المعطى ونقطة يمر بها المستقيم الجديد.]

معايير الدرس
9.2.3 و 9.4.1

المصطلحات
- المستقيمان المتوازيان parallel lines
- المستقيمان المتعامدان perpendicular lines
- مقلوب reciprocal

السؤال الأساس
كيف تساعدك معادلتا مستقيمين على تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك ؟

مثال 1 كتابة معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم معطى

اكتب بصيغة الميل و المقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة (8 , 9) والموازي للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x - 2$

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر. وإذا كان هذان المستقيمان المتوازيان غير رأسيين، فإن لهما الميل نفسه ولكن يختلفان في المقطع y.

الخطوة 1 حدّد ميل المستقيم المعلوم، $y = \frac{3}{4}x - 2$.

بما أن ميل المستقيم المعلوم يساوي $\frac{3}{4}$، فميل المستقيم الموازي له يساوي $\frac{3}{4}$ أيضًا.

الخطوة 2 اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة، مستعملًا النقطة المعلومة وميل المستقيم الموازي.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 9 = \frac{3}{4}(x - 8)$

$y - 9 = \frac{3}{4}x - 6$

$y = \frac{3}{4}x + 3$

حوّل من صيغة الميل ونقطة إلى صيغة الميل والمقطع.

إذن، معادلة المستقيم هي $y = \frac{3}{4}x + 3$

تواصل بدقة
وضّح أهمية استعمال المفردة "غير رأسي" عند مناقشة ميول المستقيمات المتوازية.

حاول أن تحلّ! **1.** اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة (5 , 3−) والموازي للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{2}{3}x$.

الدرس 5-1 المستقيمات المتوازية والمتعامدة 32

www.jnob-jo.com

مثال 2 فهم ميلي مستقيمين متعامدين

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: في الجزء A، كيف يمكنك تحديد الزوايا القائمة من خلال معاينتك للتمثيل البياني ؟
[الزوايا القائمة مشار إليها برمز المربع.]

س: ماذا تستنتج عن المستقيمين في التمثيل البياني اللذين يشكلان زاوية قائمة ؟
[تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: المستقيمان متعامدان . المستقيمان يتقاطعان.]

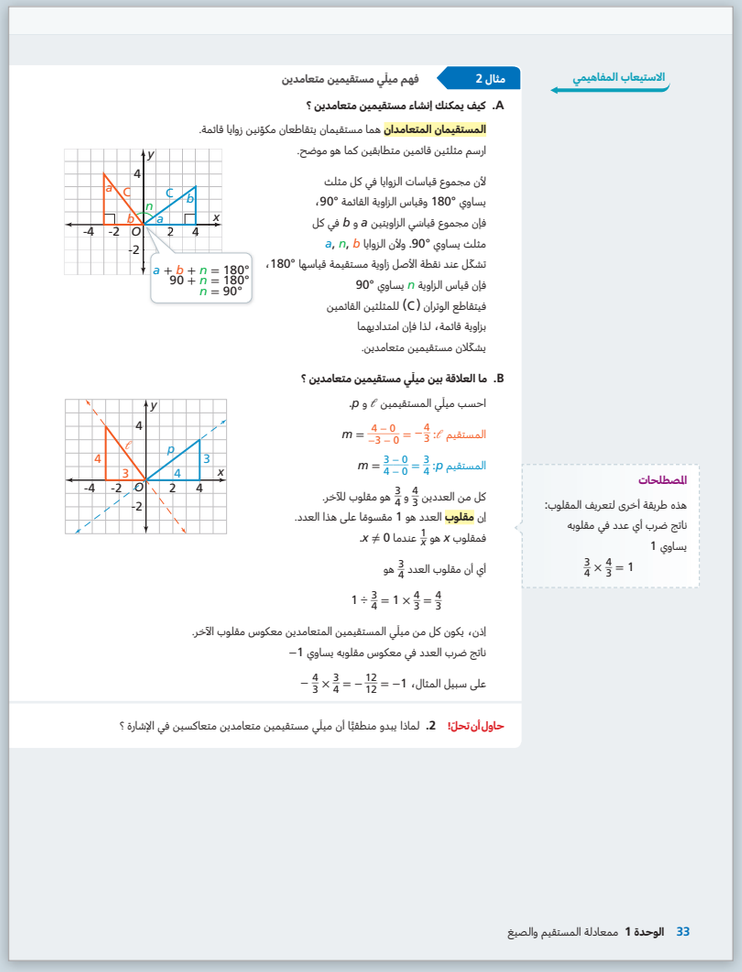
س: في الجزء B، وضّح كيف أن ناتج ضرب الميلين لمستقيمين متعامدين يساوي دائمًا 1–
[إشارتا الميلين معكوستان، إذن ناتج ضربهما سالب. ناتج ضرب أي عدد في مقلوبه يساوي 1 إذن ناتج ضرب الميلين لمستقيمين متعامدين يساوي دائما 1–]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. لكي يتقاطع مستقيمان مكوّنين زاوية قياسها °90 ، يجب أن يكون ميل المستقيم الأول موجب والآخر ميله سالب مقلوب الأول.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك استعمال الميل لتبيّن أن مستقيمًا رأسيًا ومستقيمًا أفقيًا متعامدان ؟
[لا يمكننا استعمال الميل لأن ميل المستقيم الرأسي هو $\frac{1}{0}$ أو غير معرف.]



الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 فهم ميلي مستقيمين متعامدين

A. كيف يمكنك إنشاء مستقيمين متعامدين ؟

المستقيمان المتعامدان هما مستقيمان يتقاطعان مكوّنين زوايا قائمة.

ارسم مثلثين قائمين متطابقين كما هو موضح.

لأن مجموع قياسات الزوايا في كل مثلث يساوي °180 وقياس الزاوية القائمة °90، فإن مجموع قياسي الزاويتين a و b في كل مثلث يساوي °90. ولأن الزوايا a, n, b تشكّل عند نقطة الأصل زاوية مستقيمة قياسها °180، فإن قياس الزاوية n يساوي °90 فيتقاطع الوتران (C) للمثلثين القائمين بزاوية قائمة، لذا فإن امتداديهما يشكّلان مستقيمين متعامدين.

$a + b + n = 180°$
$90 + n = 180°$
$n = 90°$

B. ما العلاقة بين ميلي مستقيمين متعامدين ؟

احسب ميلي المستقيمين ℓ و p.

المستقيم ℓ: $m = \frac{4-0}{-3-0} = -\frac{4}{3}$

المستقيم p: $m = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$

كل من العددين $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{3}$ هو مقلوب للآخر.

إن **مقلوب** العدد هو 1 مقسومًا على هذا العدد.

فمقلوب x هو $\frac{1}{x}$ عندما $x \neq 0$.

أي أن مقلوب العدد $\frac{3}{4}$ هو

$1 \div \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

إذن، يكون كل من ميلي المستقيمين المتعامدين معكوس مقلوب الآخر.

ناتج ضرب العدد في معكوس مقلوبه يساوي 1–

على سبيل المثال، $-\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = -\frac{12}{12} = -1$

المصطلحات
هذه طريقة أخرى لتعريف المقلوب: ناتج ضرب أي عدد في مقلوبه يساوي 1
$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$

حاول أن تحلّ! 2. لماذا يبدو منطقيًا أن ميلي مستقيمين متعامدين متعاكسين في الإشارة ؟

33 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 2**

القراءة مستوى 1 اطلب من الطلاب قراءة الجزء A. اطلب منهم أن يشيروا إلى أجزاء التمثيل البياني التي جرى وصفها أثناء القراءة (مثلا: زوايا قائمة، مثلثات قائمة، زوايا مستقيمة، نقطة الأصل، الأوتار.)

س: ما نوع الزاوية n ؟
[زاوية قائمة.]

س: كيف يساعدك الرسم على فهم العلاقة بين مستقيمين متعامدين ؟
[يوضّح الرسم بيانيًا وجبريًا أن المستقيمين المتعامدين يتقاطعان ليشكلا زاوية قائمة.]

الاستماع مستوى 2 اطلب من الطلاب الإصغاء إليك أثناء قراءتك لتعريفي "معكوسين" أو "معكوسي المقلوبين". اطلب من الطلاب الإصغاء إليك وأنت تقرأ بصوت عالٍ أزواج الأعداد التالية. اطلب منهم تحديد ما إذا كان كل عددين مقلوبين أم معكوسي المقلوبين.

س: 2 و $\frac{1}{2}$
[مقلوبان.]

س: 5 و $-\frac{1}{5}$
[معكوسا المقلوبان.]

س: $\frac{1}{3}$ و 3–
[معكوسا المقلوبان.]

س: $\frac{1}{4}$ و 4
[مقلوبان.]

الكتابة مستوى 3 يحتوي هذا المثال عدة مصطلحات رياضية مهمة. تأكد من أن الطلاب أدركوا معنى كل من المصطلحات بالطلب إليهم كتابة قصة قصيرة في دفاترهم تصف كيف ترتبط هذه المصطلحات بعضها ببعض، أو يمكنك الطلب من الطلاب كتابة تعريف كل مصطلح مما يلي:

معكوس	متعامد
مقلوب	ميل
زاوية قائمة	يتقاطع

اطلب من الطلاب أن يتشاركوا أعمالهم.

www.jnob-jo.com

مثال 3 كتابة معادلة مستقيم عمودي على مستقيم معطى

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا من المهم إيجاد ميل المستقيم المعطى قبل كتابة معادلة المستقيم العمودي عليه ؟

[تتضمن معادلة المستقيم الجديد ميلًا يساوي مقلوب معكوس ميل المستقيم المعطى.]

س: كيف تفيدك الصيغ المختلفة لمعادلات المستقيمات في المسائل التي تتضمن مستقيمات متعامدة ؟

[يبيّن كل من صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة ميل المستقيم المعطى. استعمل صيغة الميل ونقطة لتوجد معادلة المستقيم الجديد، في حال لم تكن النقطة المعطاة هي المقطع y . بخلاف ذلك، استعمل صيغة الميل والمقطع.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)$

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3. قد يخلط بعض الطلاب بين ميلي المستقيمين المتوازيين وميلي المستقيمين المتعامدين، ويستعملون الميل 2 في المعادلة الجديدة. اطلب إليهم أن يضربوا الميلين ليتأكدوا مما إذا كان ناتج الضرب يساوي 1−

مثال 4 تصنيف المستقيمات

طرح أسئلة هادفة

س: لكي تصنف مستقيمين على أنهما متوازيان أو متعامدان أم غير ذلك، بماذا عليك أن تفكر ؟

[أقارن الميلين. إذا كانا متساويين، فإن المستقيمان متوازيان وإذا كان كلا منهما مقلوب معكوس الآخر، فالمستقيمان متعامدان.]

س: كيف يبدو التمثيل البياني لمستقيمين غير متوازيين ولمستقيمين غير متعامدين ؟

[المستقيمان يتقاطعان في أي زاوية ما عدا °90]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. **a.** غير ذلك

b. متوازيان

مثال 3 كتابة معادلة مستقيم عمودي على مستقيم معلوم

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (1 , 7) والعمودي على المستقيم الذي معادلته $y = -\frac{1}{4}x + 11$.

الخطوة 1 استعمل ميل المستقيم المعلوم لإيجاد ميل المستقيم العمودي عليه.

$y = -\frac{1}{4}x + 11$ ، $m = -\frac{1}{4}$

بما أن ميل المستقيم العمودي على المستقيم المعلوم هو معكوس مقلوب $-\frac{1}{4}$ لذا فإن ميل المستقيم العمودي المطلوب يساوي $\frac{4}{1}$ أو 4.

الخطوة 2 اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة، مستعملًا النقطة المعطاة وميل المستقيم العمودي.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 7 = 4(x - 1)$ عوّض $x_1 = 1, y_1 = 7, m = 4$.

يمر التمثيل البياني للمعادلة $y - 7 = 4(x - 1)$ بالنقطة (1 , 7) وهو عمودي على التمثيل البياني للمستقيم $y = -\frac{1}{4}x + 11$.

فكّر وثابر في الحل

فكّر في فائدة الصيغ المختلفة لمعادلة المستقيم لتحدّد الصيغة التي ستستعملها.

حاول أن تحلّ! 3. اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (4 , 5) والعمودي على المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 3$.

مثال 4 تصنيف المستقيمات

هل التمثيلان البيانيان لمعادلتي المستقيمين $3y = -4x + 6$ و $y = -\frac{3}{4}x - 5$ متوازيان أم متعامدان، أم غير ذلك ؟

الخطوة 1 حدّد ميل كل مستقيم.

$3y = -4x + 6$ ، $y = -\frac{3}{4}x - 5$

$\frac{3y}{3} = \frac{-4x + 6}{3}$ ، $y = -\frac{3}{4}x - 5$

$y = -\frac{4}{3}x + 2$

أعد كتابة معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.

ميلا المستقيمين هما $-\frac{4}{3}$ و $-\frac{3}{4}$

الخطوة 2 قارن ميلي المستقيمين.

ميلا المستقيمين $-\frac{4}{3}$ و $-\frac{3}{4}$ ليسا متساويين، وليس أحدهما معكوس مقلوب الآخر.

إذن، التمثيلان البيانيان للمعادلتين $3y = -4x + 6$ و $y = -\frac{3}{4}x - 5$ ليسا متوازيين ولا متعامدين.

خطأ شائع

قد يختلط عليك الأمر بخصوص علاقة الميلين في مستقيمين متعامدين. انتبه إلى أن كلًا من ميلي المستقيمين المتعامدين يكون معكوس مقلوب الآخر، لا مقلوبًا له.

حاول أن تحلّ! 4. هل التمثيلان البيانيان لمعادلتي المستقيمين متوازيان أم متعامدان، أم غير ذلك ؟

a. $y = 2x + 6 , y = \frac{1}{2}x + 3$ **b.** $y = -5x , 25x + 5y = 1$

استعمل مع **الأمثلة 1-4**

عادات التفكير

تواصل بدقة لماذا عليك أن تستعمل المصطلح غير رأسي عند عملك على المستقيمات المتوازية والمتعامدة ؟

[ميول المستقيمات الرأسية غير معرفة، إذا عند الحديث عن العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين وميلي مستقيمين متعامدين، عليك أن تكون دقيقًا وتحدد بأن المستقيمات هي غير رأسية.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب التدرّب على إيجاد معكوس مقلوب كل من القيم التالية:

a. 6 **b.** −4 **c.** $-\frac{7}{5}$ **d.** $\frac{2}{3}$

س: كيف تتأكد أن كل من العددين مقلوب الآخر ؟

[ناتج ضربهما يساوي 1]

س: كيف تتأكد من أن عددًا ما ومقلوبه كل منهما معكوس الآخر ؟

[واحد منهما يكون موجبًا والثاني يكون سالبًا.]

س: أوجد معكوس المقلوب.

[$-\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{3}{2}$]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب استكشاف ماذا يحدث عندما يستعملون ما يعرفونه عن المستقيمات المتوازية لحل هذه المسألة.

هل يمكن للنقاط (5 , 2), (6 , 6) , (1 , 4) , (0 , 0) أن تكون رؤوسًا لمتوازي الأضلاع ؟

س: وضّح كيف تحل هذه المسألة ؟

[عين النقاط على شبكة إحداثيات ثم صل بينها. احسب وقارن ميلي كل زوج من الأضلاع المتقابلة.]

س: هل الشكل متوازي أضلاع ؟

[نعم ؛ الأضلاع المتقابلة لها ميول متساوية : $4 , \frac{2}{5}$]

www.jnob-jo.com

مثال 5 حل مسألة حياتية

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك إيجاد ميلي المستقيمين اللذين يمثلان الممرين ؟
[اختر نقطتين على المساربن واستعمل صيغة الميل.]

س: ما الذي يوضّحه التمثيل البياني عن موقع الممرين الجديدين ؟
[سيتم استخدام إحداثيات النافورة وبقعة تناول الطعام كنقاط لإيجاد المعادلتين التي تمثلان الممرين.]

س: ما الشيء المفيد الذي يجب أن تعرفه عند كتابتك معادلة كل ممر جديد ؟
[من المفيد أن تعرف في أي نقطة يمرّ الممران الجديدان، وأي طريق يتوازى أو يتعامد معهما.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. **a.** $y - 3 = 2(x - 6)$

b. $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 6)$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما العلاقة بين الممرين الجديدين ؟
[أنهما متعامدان لأن كلاً من ميلهما معكوس مقلوب الآخر.]

عادات التفكير استعمل مع **مثال 5**

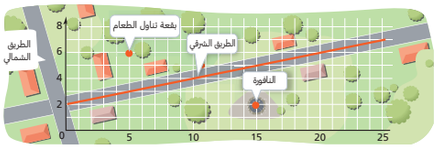
استعمل البنية وضّح فوائد استعمال صيغة الميل والمقطع عند تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين.

[يمكنك تحديد ميل المستقيم من صيغة الميل والمقطع، وهذا يساعدك على تحديد ما إذا كان ميلي المستقيمين متساويين أو أن أحدهما معكوس مقلوب الآخر. في حال كان للمستقيمين نفس الميل، يمكنك بسرعة تحديد ما إذا كانت المعادلتان تمثلان المستقيم نفسه، وذلك بالتحقق من قيم المقطع y.]

تطبيق

مثال 5 حل مسألة حياتية

يخطط مهندس زراعي لإنشاء ممرين جديدين في منتزه. سيمر الممر الجديد A بالنافورة ويكون عموديًا على الطريق الشرقي. أما الممر الجديد B فسيمر ببقعة تناول الطعام في الهواء الطلق ويكون موازيًا للممر A. ما المعادلتان، بصيغة الميل ونقطة، اللتان تمثّلان هذين الممرين الجديدين ؟



ضع ▶ أوجد ميل المستقيم الذي يمثّل الطريق الشرقي. ثم اكتب المعادلتين للممرين الجديدين.

يمر الطريق الشرقي بالنقطتين $(0 , 2)$ و $(5 , 3)$.

$m = \frac{3-2}{5-0} = \frac{1}{5}$

إذن، ميل المستقيم الذي يمثّل الطريق الشرقي هو $\frac{1}{5}$.

احسب ▶ أوجد معادلة الممر A.

الميل هو معكوس مقلوب ميل الطريق الشرقي.

$y - 2 = -5(x - 15)$

تقع النافورة عند النقطة $(15 , 2)$.

أوجد معادلة الممر B.

الميل هو نفسه ميل الممر A.

$y - 6 = -5(x - 5)$

تقع بقعة تناول الطعام عند النقطة $(5 , 6)$.

فسّر ▶ معادلة المستقيم الذي يمثّل الممر A هي: $y - 2 = -5(x - 15)$

معادلة المستقيم الذي يمثّل الممر B هي: $y - 6 = -5(x - 5)$

حاول أن تحلّ! **5.** تمثّل المعادلة $y = 2x + 7$ الطريق الشمالي على الخريطة.

a. أوجد المعادلة لممر يمر بالنقطة $(6 , 3)$ ويوازي الطريق الشمالي.

b. أوجد المعادلة لممر يمر بالنقطة نفسها ويكون والطريق الشمالي متعامدين.

35 **الوحدة 1** ممعادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم المستقيمات المتوازية والمتعامدة

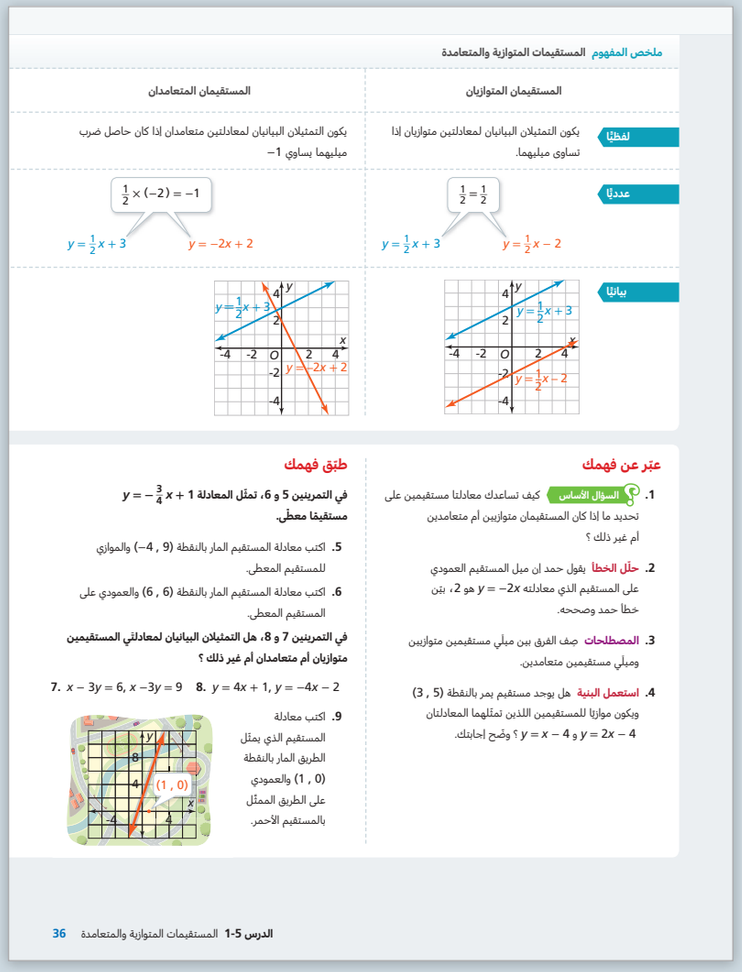
س: كيف يحدد كل من الوصف اللفظي والمعادلات والتمثيلين البيانيين ما إذا كان المستقيمان متعامدين أو متوازيين ؟

[بالنسبة للمستقيمين المتوازيين، يبيّن كل من الوصف اللفظي والمعادلات أن الميلين متساويين. يبيّن التمثيل البياني أن المستقيمان لا يتقاطعان أبدًا. بالنسبة للمستقيمين المتعامدين، يبيّن كل من الوصف اللفظي والمعادلات أن كلًا من الميلين هو معكوس مقلوب الآخر، أي إنّ ناتج ضربهما يساوي -1، يبيّن التمثيل البياني أن المستقيمين يتقاطعان مكوّنين زاوية قائمة.]

خطأ شائع

التمرين 6 قد ينسى بعض الطلاب أن يستعملوا معكوس مقلوب الميل لكتابة معادلة المستقيم. اطلب منهم التحقق من عملهم بتمثيل المستقيم الأصلي والمستقيم الجديد والتأكيد على أنهما يتقاطعان مكوّنين زاوية قائمة.

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**



ملخص المفهوم المستقيمات المتوازية والمتعامدة

	المستقيمان المتوازيان	المستقيمان المتعامدان
لفظيًا	يكون التمثيلان البيانيان لمعادلتين متوازيان إذا تساوى ميليهما.	يكون التمثيلان البيانيان لمعادلتين متعامدان إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1
عدديًا	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ، $y=\frac{1}{2}x+3$ ، $y=\frac{1}{2}x-2$	$\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ ، $y=\frac{1}{2}x+3$ ، $y=-2x+2$
بيانيًا	$y=\frac{1}{2}x+3$ ، $y=\frac{1}{2}x-2$	$y=\frac{1}{2}x+3$ ، $y=-2x+2$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تساعدك معادلتا مستقيمين على تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك ؟
2. حلّل الخطأ يقول حمد إن ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $y=-2x$ هو 2، بيّن خطأ حمد وصححه.
3. المصطلحات صِف الفرق بين ميلي مستقيمين متوازيين وميلي مستقيمين متعامدين.
4. استعمل البنية هل يوجد مستقيم يمر بالنقطة $(3 , 5)$ ويكون موازيًا للمستقيمين اللذين تمثّلهما المعادلتان $y=2x-4$ و $y=x-4$ ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، تمثل المعادلة $y=-\frac{3}{4}x+1$ مستقيمًا معطًى.

5. اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-4 , 9)$ والموازي للمستقيم المعطى.
6. اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(6 , 6)$ والعمودي على المستقيم المعطى.

في التمرينين 7 و 8، هل التمثيلان البيانيان لمعادلتي المستقيمين متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك ؟

7. $x-3y=6, x-3y=9$
8. $y=4x+1, y=-4x-2$
9. اكتب معادلة المستقيم الذي يمثّل الطريق المار بالنقطة $(0 , 1)$ والعمودي على الطريق الممثّل بالمستقيم الأحمر.

الدرس 5-1 المستقيمات المتوازية والمتعامدة 36

الإجابات

1. في صيغة الميل والمقطع، سوف يحدد معامل x ميل المستقيم. إذا كان الميل في عدد من المستقيمات هو نفسه، فإن هذه المستقيمات تكون متوازية. وإذا كان ميل أحد المستقيمات هو معكوس مقلوب ميل مستقيم آخر فإن المستقيمين متعامدان. وإلا فإن المستقيمان غير متوازيين و غير متعامدين.
2. اعتبر حمد ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم المعطى هو معكوس وهذا خطأ، يجب أن يكون معكوس المقلوب أي إن معكوس مقلوب العدد -2 هو $\frac{1}{2}$.
3. المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل، ولكن في المستقيمين المتعامدين يكون ميل أحدهما هو معكوس مقلوب الميل للمستقيم الآخر.
4. لا يوجد. ليكون المستقيمان متوازيين، لا بد من أن يكون ميلاهما متساويين. المستقيمان المعطيان ميلاهما غير متساويين.
5. $y=-\frac{3}{4}x+6$ أو $y-3=-\frac{3}{4}(x-4)$
6. $y=\frac{4}{3}x-2$ أو $y-2=\frac{4}{3}(x-3)$
7. متوازيان.
8. غير ذلك.
9. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ أو $y+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}(x-3)$

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

ضمن المستوى	متقدم
10-24, 26, 28-34	10-15, 17, 19-34

تحليل التمارين

المثال	التمارين	عمق المعرفة
1	15-18	1
	33	2
	10, 14	3
2	19	1
	12	2
3	20-23	1
	11	3
4	24-28, 32	1
	13	3
5	30	1
	29, 31	3
	34	4

الإجابات

10. 4

11. يجب أن يكون الميل يساوي $-\frac{1}{4}$ وليس $\frac{1}{4}$. عندها نكتب ما يلي:

$$y-5=-\frac{1}{4}[x-(-8)]$$
$$y-5=-\frac{1}{4}x-2$$
$$y-5+5=-\frac{1}{4}x-2+5$$
$$y=-\frac{1}{4}x+3$$

12. $m=3$

13. **a.** لا، لأن ميل أي ضلع من أضلاع المستطيل ينبغي أن يساوي معكوس مقلوب الضلع المجاور له. ميل AD هو $-\frac{1}{6}$ ، وميل AB هو 5.

b. يجب تغيير إحداثيي D إلى $D(5, 1)$ وتغيير إحداثيي C إلى $C(4, -4)$ وعندها يصبح الميلان $-\frac{1}{5}$. أي إنّ m_2 هي معكوس مقلوب m_1.

14. معاملا المتغيرين x , y متساويان، إذن عند تحويل كل معادلة إلى صيغة الميل والمقطع سوف نحصل على نفس الميل في المعادلتين وعندها يكون المستقيمان متوازيين.

15. $y=\frac{1}{5}x-5$

16. $y=3x+1$

17. $y=2$

18. $y=-\frac{2}{3}x+8$

19. ميل المستقيم (A) يساوي 2 ميل المستقيم (B) يساوي $-\frac{1}{2}$. بما أن $-\frac{1}{2}$ هو معكوس مقلوب 2 إذن المستقيمان متعامدان.

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. **استعمل البنية** إذا مر مستقيم بالنقطتين $A(n, 4)$ و $B(6, 8)$ وكان موازيًا للمستقيم الذي معادلته $y=2x-5$، أوجد قيمة n.

11. **حلّل الخطأ** بيّن خطأ عامر عند كتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-8, 5)$ والعمودي على المستقيم الذي معادلته $y=4x+2$، ثم صحح هذا الخطأ.

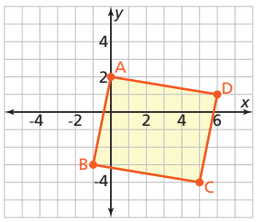
$$y-5=\frac{1}{4}(x-(-8))$$
$$y-5=\frac{1}{4}x+2$$
$$y-5+5=\frac{1}{4}x+2+5$$
$$y=\frac{1}{4}x+7$$

12. **برّر منطقيًا** إذا كان التمثيلان البيانيان للمعادلتين $4x+12y=8$ و $y=mx+5$ متعامدين، أوجد قيمة m.

13. **روابط في الرياضيات** في المستطيل، تكون الزوايا الأربع زوايا قائمة، ويكون كل ضلعين متقابلين متوازيين.

a. هل الشكل الموضّح أدناه مستطيل ؟ وضّح إجابتك.

b. إن لم يكن مستطيلًا، فكيف يمكن تغيير مواقع النقاط بحيث يصبح مستطيلًا ؟



14. **مهارات التفكير العليا** وضّح كيف يمكنك أن تحدّد ما إذا كان التمثيلان البيانيان للمعادلتين $5x-3y=2$ و $5x-3y=8$ متوازيين أم لا من دون إجراء أي عمليات حسابية.

تدرَّب

في التمارين 15-18، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطى. انظر المثال 1

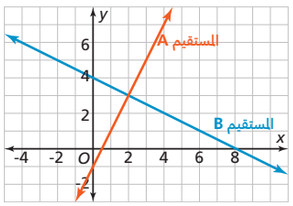
15. $(5, -4)$, $y=\frac{1}{5}x-4$

16. $(2, 7)$, $3x-y=5$

17. $(-3, 2)$, $y=-4$

18. $(6, 4)$, $2x+3y=18$

19. استعمل ميلي المستقيمين A و B لتثبت أنهما متعامدان. انظر المثال 2



في التمارين 20-23، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والعمودي على المستقيم المعطى. انظر المثالين 3 و 5

20. $(-6, -3)$, $y=-\frac{2}{5}x$

21. $(0, 3)$, $3x-4y=-8$

22. $(-2, 5)$, $x=3$

23. $(4, 3)$, $4x-5y=30$

في التمارين 24-27، بيّن ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك. انظر المثال 4

24. $y=2x+1$
$2x-y=3$

25. $y=\frac{1}{2}$
$y=-3$

26. $x=4$
$y=4$

27. $-2x+5y=-4$
$y=-\frac{5}{2}x+6$

28. أكمل الجدول التالي بما هو مناسب.

	معادلة المستقيم	ميل المستقيم الموازي	ميل المستقيم العمودي
a.	$y=\frac{1}{2}x+6$		
b.	$x=-4.2$		
c.	$3x+4y=3$		
d.	$y=3$		
e.	$y=x$		

---

20. $y=\frac{5}{2}x+12$

21. $y=-\frac{4}{3}x+3$

22. $y=5$

23. $y=-\frac{5}{4}x+8$

24. متوازيان (لهما نفس الميل)

25. متوازيان

26. متعامدان

27. متعامدان

28.

	معادلة المستقيم	ميل المستقيم الموازي	ميل المستقيم العمودي
a.	$y=\frac{1}{2}x+6$	$\frac{1}{2}$	-2
b.	$x=-4.2$	غير معرف	0
c.	$3x+4y=3$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
d.	$y=3$	0	غير معرف
e.	$y=x$	1	-1

www.jnob-jo.com

الإجابات

29. **a.** قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y = -\frac{1}{2}x + 3$ يجب أن يكون الميل يساوي $-\frac{1}{2}$

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن أن يحدد الفنان معادلة كل مستقيم في الرسم. إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية والأضلاع المتجاورة متعامدة، فإن الشكل سيكون مستطيلا.

30. $y - 5 = -\frac{2}{9}(x - 8)$

31. **a.** $y = 125x + 23$

b. نعم. لأن الميل لكل مستقيم هو نفسه ولكن المقطع y في كليهما مختلفان. إذن المستقيمان متوازيان.

c. بما أن الميل لكل مستقيم هو نفسه، وأن أحلام وفاطمة تودعان في المصرف نفس المبلغ QR 125 في كل اسبوع، وأن المقطعين y في كليهما مختلفان، فهذا يعني أن أحلام بدأت مع QR 72 في حسابها المصرفي.

32. C

33. A

34. **الجزء A** $y = \frac{5}{2}$

الجزء B

a. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b. $y = \frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$

c. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{40}{3}$

d. $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

الجزء C تحقق من عمل الطلاب.

قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

اختر نقطة عشوائية (تمثّل المرآة (1)) يكون إحداثياها عددين صحيحين (للتسهيل) مثلًا $(-4 , -2)$.

ارسم المستقيم (1) الذي يمر بالمرآة (1) ونقطة انطلاق الليزر ، وعليه فإن معادلة المستقيم هي:

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{4}{3}$$

ارسم المستقيم (2) المتعامد مع المستقيم (1) عند المرآة (1):
اختر نقطة عشوائية (تمثّل المرآة (2)) تقع على المستقيم (2) ويكون إحداثياها عددين صحيحين مثلًا: $(-3 , -8)$، وعليه فإن معادلة المستقيم هي

$$y = -6x - 26$$

ارسم المستقيم (3) المتعامد مع المستقيم (2) عند المرآة (2):

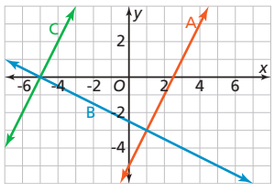
اختر نقطة عشوائية (تمثّل المرآة (3)) تقع على المستقيم (3) ويكون إحداثياها عددين صحيحين بحيث تقع النقطة في الربع الرابع من المستوى الإحداثي مثلًا: $(3 , -7)$، وعليه فإن معادلة المستقيم هي

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{15}{2}$$

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

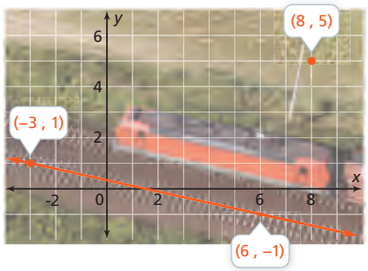
29. **استعمل البنية** يرسم فنان مخططًا لمشهد يريد رسمه على جدار. ويريد أن يتضمن رسمه شكلًا مستطيلًا.



a. أوجد معادلة المستقيم D الذي سيجعل الشكل مستطيلًا.

b. وضّح كيف يمكن للفنان أن يستعمل الجبر ليتأكد من أن الشكل مستطيل.

30. **برر منطقيًا** يبني فريق من العاملين في السكك الحديدية مسارًا جديدًا لسكة حديدية بحيث أنه يوازي المسار الموضح بالمستقيم الأحمر، ويمر بالنقطة $(8 , 5)$.
أوجد معادلة المستقيم الذي يمثّل المسار الجديد.



31. **فكّر وثابر في الحل** تعمل كل من أحلام وفاطمة في وظيفة بدوام جزئي خلال فصل الصيف. تُودع أحلام نفس المبلغ في حسابها المصرفي نهاية كل أسبوع. تمثّل المعادلة $y = 125x + 72$ رصيدها المصرفي في أي أسبوع خلال فصل الصيف. وتُودع فاطمة نفس المبلغ أسبوعيًا في حسابها المصرفي.
إذا كان رصيد فاطمة في نهاية الأسبوع الثالث QR 398
وكان رصيدها في نهاية الأسبوع السادس QR 773:

a. اكتب معادلة تمثّل رصيد فاطمة المصرفي في أي أسبوع معطى من فصل الصيف.

b. هل سيكون التمثيل البياني للمعادلة التي تمثّل رصيد فاطمة موازٍ للتمثيل البياني للمعادلة التي تمثّل رصيد أحلام ؟ وضّح إجابتك.

c. ماذا يعني توازي التمثيلين البيانين للمستقيمين في هذه الحالة ؟

تدرَّب على اختبار

32. أي من المستقيمات التالية عمودي على المستقيم $y = \frac{1}{4}x - 3$ ؟ اختر كل ما ينطبق.

Ⓐ $y = 4x$ Ⓑ $4x - y = -2$

Ⓒ $y = -4x + 6$ Ⓓ $8x - 2y = 3$

Ⓔ $y = 4x + 9$

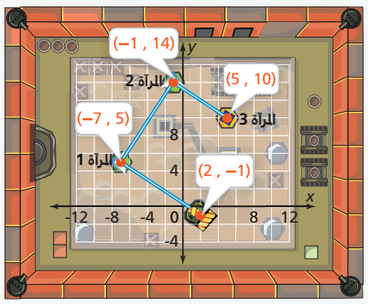
33. **اختبار SAT/ACT** يمر مستقيم بالنقطتين $(6 , a)$ و $(9 , -4)$ ويوازي المستقيم $2x - 3y = 6$، ما قيمة a ؟

Ⓐ -6 Ⓑ -3

Ⓒ -2 Ⓓ 3

Ⓔ 6

34. **مهمة أدائية** صُممت لعبة فيديو لنمذجة مسار ضوء الليزر.
فوُضع الليزر عند النقطة $(-1 , 2)$ وتم توجيهه نحو المرآة 1، ووُضعت مرايا أخرى عند النقاط الموضحة بحيث تعكس كل مرآة شعاع الليزر الساقط عليها بزاوية قياسها $90°$



الجزء A بعد انعكاسه عن المرايا الثلاث، عند أي نقطة سيتقاطع الشعاع مع المحور y ؟

الجزء B اكتب معادلة تمثّل مسار الشعاع بين المواقع التالية:

a. الليزر والمرآة 1

b. المرآة 1 والمرآة 2

c. المرآة 2 والمرآة 3

d. المرآة 3 والمحور y.

الجزء C غيّر مواقع المرايا بحيث يصطدم شعاع الليزر بهدف يقع في الربع الرابع، ثم اكتب إحداثيات مواقع المرايا ومعادلات المستقيمات التي ستمثّل مسار الشعاع.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة

الوحدة 1

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. ماذا نعني بالصيغ الجبرية ؟ وما أهمية وجود صيغ مختلفة للمعادلات الخطية ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. _____ هي معادلة تحدد العلاقة بين كمية وكمية أخرى أو أكثر.
3. المستقيمان المتعامدان يكون ميل أحدهما معكوس _____ ميل المستقيم الآخر.
4. _____ للمعادلة الخطية هي $Ax + By = C$، حيث الرموز A, B, C أعداداً صحيحة.
5. يتماثل مستقيمان _____ غير رأسيين، في الميل ويختلفان في المقطع y.
6. _____ للمعادلة الخطية هي $y = mx + b$.

- متوازيان
- متعامدان
- صيغة الميل ونقطة
- معادلة متعددة المتغيرات
- مقلوب
- صيغة الميل والمقطع
- الصيغة القياسية
- المقطع y

مراجعة الوحدة 1

الوحدة 1 مراجعة الوحدة 40

تقديم السؤال الأساس

ماذا نعني بالصيغ الجبرية ؟ وما أهمية وجود صيغ مختلفة للمعادلات الخطية ؟

عند كتابة الطلاب إجاباتهم عن السؤال الأساس، شجعهم على تضمينها أمثلة تدعمها. ركّز على النقاط الآتية عند مناقشة الإجابات.

- تتضمن الصيغ والمعادلات متعددة المتغيرات متغيرين أو أكثر. لعزل المتغير المطلوب إيجاده، يمكن استعمال نفس الطرائق المستعملة في حل المعادلات.
- من المفيد استعمال صيغة الميل ونقطة عند معرفة الميل والمقطع y.
- إذا أُعطيت إحداثيات نقطتين في المسألة، احسب الميل واستعمل إحدى النقطتين وصيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم لإيجاد المقطع y.
- عندما تعطى الميل ونقطة غير المقطع y، استعمل صيغة الميل ونقطة.
- يمكن استعمال الصيغة القياسية لمعادلة المستقيم لكتابة معادلات مستقيمات أفقية ورأسية.
- لإيجاد المقطع x أو المقطع y لمستقيم، استعمل الصيغة القياسية لمعادلة المستقيم.
- تحدد ميول المستقيمات ما إذا كانت المستقيمات متوازية أم متعامدة أم غير ذلك.

الإجابات

2. معادلة متعددة المتغيرات
3. مقلوب
4. الصيغة القياسية
5. متوازيان
6. صيغة الميل والمقطع

www.jnob-jo.com

الإجابات

7. في الخطوة الأخيرة، أضاف ماجد العدد 5 بدلًا من طرحه.

$$a = \frac{3}{4}(b + 5)$$
$$a = \frac{3}{4}b + \frac{15}{4}$$
$$a - \frac{15}{4} = \frac{3}{4}b$$
$$\frac{4}{3}\left(a - \frac{15}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}b\right)$$
$$\frac{4}{3}a - 5 = b$$

8. $y = \frac{k}{x}$

9. $c = \frac{ab - 2}{3b}$

10. $d = \frac{8}{33}c$

11. $v_f = at + v_i = 14$ m

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-1 الصيغ الجبرية

مراجعة سريعة

تُستعمل في المعادلات حروف لتمثيل الثوابت والمتغيرات.

الصيغة هي شكل من أشكال المعادلات تربط بين كمية وكمية أخرى أو أكثر.

عند حل المعادلة لإيجاد أحد متغيراتها، أعِد كتابتها بطريقة تؤدي إلى عزل هذا المتغير.

مثال

أوجد ارتفاع أسطوانة حجمها $1\,650\ cm^3$ وطول نصف قطرها 6 cm

أعِد كتابة صيغة حجم الأسطوانة بدلالة h.

$$V = \pi r^2 h$$
$$\frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2}$$
$$\frac{V}{\pi r^2} = h$$

لإيجاد ارتفاع الأسطوانة عوّض $r = 6,\ v = 1\,650,\ \pi = 3.14$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$
$$h = \frac{1\,650}{(3.14)(6)^2} = \frac{1\,650}{(3.14)(36)} = \frac{1\,650}{113.04} \approx 14.60$$

إذن، ارتفاع الأسطوانة يساوي 14.60 cm تقريبًا.

تدرّب وحلّ مسائل

7. **حلل الخطأ** حلّ ماجد المعادلة $a = \frac{3}{4}(b + 5)$ لإيجاد قيمة b كما يلي:

$$a = \frac{3}{4}(b + 5)$$
$$\frac{4}{3}a = \frac{3}{4}(b + 5)\frac{4}{3}$$
$$\frac{4}{3}a = b + 5$$
$$b = \frac{4}{3}a + 5$$

بيّن خطأ ماجد وصحّحه.

في التمارين 8-10، حل المعادلة لإيجاد قيمة المتغير المطلوب.

8. $xy = k\ ,\ y$

9. $a = \frac{2}{b} + 3c\ ,\ c$

10. $6(2c + 3d) = 5(4c - 3d)\ ,\ d$

11. **نمذج** الصيغة المستعملة لإيجاد متوسط التسارع هي $a = \frac{V_f - V_i}{t}$، حيث V_f السرعة المتجهة النهائية، و V_i السرعة المتجهة الابتدائية، و t الزمن بالثواني. أعِد كتابة المعادلة في صورة صيغة للسرعة المتجهة النهائية، V_f، ثم أوجد السرعة المتجهة النهائية لشخص تزداد سرعته بمعدل 2 m/s لمدة 5 ثوانٍ إذا علمت أن سرعته المتجهة الابتدائية هي 4 m/s

41 **الوحدة 1** معادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

الدرس 1-2 صيغة الميل والمقطع

مراجعة سريعة

صيغة الميل والمقطع للمعادلة الخطية هي $y = mx + b$، حيث m هو ميل المستقيم والمقطع y هو b. تكون صيغة الميل والمقطع مفيدة عندما يكون الميل والمقطع y للمستقيم معلومين.

مثال

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0 , 4) و (2 , 3).

استعمل صيغة الميل. $m = \frac{4-3}{0-2} = -\frac{1}{2}$

يتقاطع المستقيم مع المحور y عند النقطة (0 , 4). $b = 4$

اكتب المعادلة بصيغة الميل والمقطع $y = mx + b$

عوض $m = -\frac{1}{2}$, $b = 4$. $y = -\frac{1}{2}x + 4$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 12 و 13، مثّل بيانيًا كل معادلة.

12. $y = 3x - 1$ **13.** $y = -1.5x + 3.5$

في التمرينين 14 و 15، اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم المار بالنقطتين المعطاتين.

14. (2 , 0), (4 , 6) **15.** (−1 , 8), (5 , −2)

16. **نمذج** يرغب عبدالرحمن في شراء كمبيوتر لوحي جديد بسعر QR 4 600. سدّد دفعة بقيمة QR 1 000 وسيسدّد أقساطًا شهرية بقيمة QR 200. اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع يمكن أن يستعملها عبد الرحمن لتحديد مقدار ما سيدين به بعد n أشهر.

الدرس 1-3 صيغة الميل ونقطة

مراجعة سريعة

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1 , y_1) وميله m و (x , y) أي نقطة تقع على المستقيم هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

تُعد صيغة الميل ونقطة مفيدة عندما تعرف الميل ونقطة مختلفة عن $(0 , b)$.

مثال

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5 , 1) , (2 , 2).

أوجد ميل المستقيم. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $(x_2 , y_2) = (5 , 1)$ و $(x_1 , y_1) = (2 , 2)$ $= \frac{1-2}{5-2}$

$= -\frac{1}{3}$

المعادلة بصيغة الميل ونقطة. $y - y_1 = m(x - x_1)$

عوض $m = -\frac{1}{3}$ و $(x_1 , y_1) = (2 , 2)$ $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 17 و 18، اكتب معادلة بصيغة الميل ونقطة للمستقيم المار بالنقطة المعطاة والميل المعطى.

17. (4 , −2), $m = 0.5$ **18.** (−2 , 5), $m = -3$

في التمرينين 19 و 20، اكتب معادلة بصيغة الميل ونقطة للمستقيم المار بالنقطتين المعطاتين.

19. (3 , 1), (−5 , −2) **20.** (1.5 , 4), (−2.5 , 6)

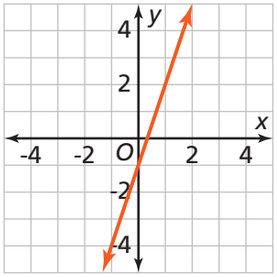
21. **بزر منطقيًا** اشترى إبراهيم بطاقة بمبلغ QR 720 تمنحه 20 زيارة إلى صالة الألعاب الرياضية الجديدة وتتضمن رسومًا تُدفع مرة واحدة مقابل الاستخدام غير المحدود للساونا. وبعد 5 زيارات، تبقى في بطاقة إبراهيم مبلغ QR 495، وبعد 11 زيارة، تبقى في بطاقته QR 297. اكتب معادلة يمكن أن يستعملها إبراهيم لتحديد تكلفة كل زيارة ورسوم استعمال الساونا.

مراجعة الوحدة 1

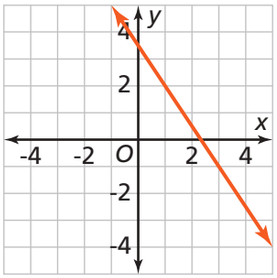
الوحدة 1 مراجعة الوحدة 42

الإجابات

.12



.13



14. $y = 3x - 6$

15. $y = -\frac{5}{3}x + 6\frac{1}{3}$

16. $y = -200x + 3\,600$

17. $y + 2 = 0.5(x - 4)$

18. $y - 5 = -3(x + 2)$

19. $y - 1 = \frac{3}{8}(x - 3)$

20. $y - 4 = -0.5(x - 1.5)$

21. $y - 495 = -33(x - 5)$; QR 60

www.jnob-jo.com

الإجابات

22. $A = 3, B = 5, 3x + 5y = 15$

23. $y - 4x = -5$

24. $y + 5x = 23$

25. المقطع x: 6؛ المقطع y: -10

26. المقطع x: 24؛ المقطع y: 8

27. $5x + 6y = 100$

28. $-\frac{1}{3}$

29. $y = -3x + 7$

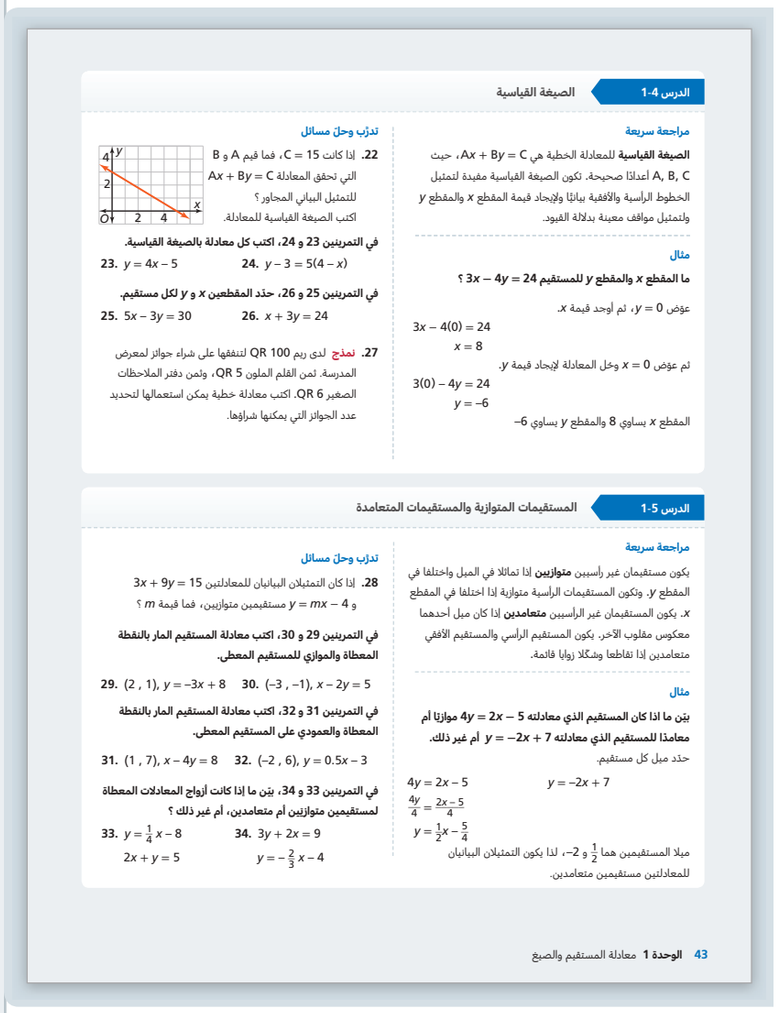
30. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

31. $y - 7 = -4(x - 1)$

32. $y - 6 = -2(x + 2)$

33. غير ذلك

34. متوازيان



الدرس 1-4 الصيغة القياسية

مراجعة سريعة

الصيغة القياسية للمعادلة الخطية هي $Ax + By = C$، حيث A, B, C أعدادًا صحيحة. تكون الصيغة القياسية مفيدة لتمثيل الخطوط الرأسية والأفقية بيانيًا ولإيجاد قيمة المقطع x والمقطع y ولتمثيل مواقف معينة بدلالة القيود.

مثال

ما المقطع x والمقطع y للمستقيم $3x - 4y = 24$ ؟

عوّض $y = 0$، ثم أوجد قيمة x.

$3x - 4(0) = 24$

$x = 8$

ثم عوّض $x = 0$ وحل المعادلة لإيجاد قيمة y.

$3(0) - 4y = 24$

$y = -6$

المقطع x يساوي 8 والمقطع y يساوي -6

تدرّب وحل مسائل

22. إذا كانت $C = 15$، فما قيم A و B التي تحقق المعادلة $Ax + By = C$ للتمثيل البياني المجاور؟ اكتب الصيغة القياسية للمعادلة.

في التمرينين 23 و 24، اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

23. $y = 4x - 5$ **24.** $y - 3 = 5(4 - x)$

في التمرينين 25 و 26، حدّد المقطعين x و y لكل مستقيم.

25. $5x - 3y = 30$ **26.** $x + 3y = 24$

27. نمذج لدى ريم QR 100 لتنفقها على شراء جوائز لمعرض المدرسة. ثمن القلم الملون QR 5، وثمن دفتر الملاحظات الصغير QR 6. اكتب معادلة خطية يمكن استعمالها لتحديد عدد الجوائز التي يمكنها شراؤها.

الدرس 1-5 المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

مراجعة سريعة

يكون مستقيمان غير رأسيين **متوازيين** إذا تماثلا في الميل واختلفا في المقطع y. وتكون المستقيمات الرأسية متوازية إذا اختلفا في المقطع x. يكون المستقيمان غير الرأسيين **متعامدين** إذا كان ميل أحدهما معكوس مقلوب الآخر. يكون المستقيم الرأسي والمستقيم الأفقي متعامدين إذا تقاطعا وشكّلا زوايا قائمة.

مثال

بيّن ما اذا كان المستقيم الذي معادلته $4y = 2x - 5$ موازيًا أم معامدًا للمستقيم الذي معادلته $y = -2x + 7$ أم غير ذلك.

حدّد ميل كل مستقيم.

$4y = 2x - 5$ $\qquad$ $y = -2x + 7$

$\frac{4y}{4} = \frac{2x - 5}{4}$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

ميلا المستقيمين هما $\frac{1}{2}$ و -2، لذا يكون التمثيلان البيانيان للمعادلتين مستقيمين متعامدين.

تدرّب وحل مسائل

28. إذا كان التمثيلان البيانيان للمعادلتين $3x + 9y = 15$ و $y = mx - 4$ مستقيمين متوازيين، فما قيمة m ؟

في التمرينين 29 و 30، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطى.

29. $(2, 1), y = -3x + 8$ **30.** $(-3, -1), x - 2y = 5$

في التمرينين 31 و 32، اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والعمودي على المستقيم المعطى.

31. $(1, 7), x - 4y = 8$ **32.** $(-2, 6), y = 0.5x - 3$

في التمرينين 33 و 34، بيّن ما إذا كانت أزواج المعادلات المعطاة لمستقيمين متوازيين أم متعامدين، أم غير ذلك ؟

33. $y = \frac{1}{4}x - 8$, $2x + y = 5$ **34.** $3y + 2x = 9$, $y = -\frac{2}{3}x - 4$

43 الوحدة 1 معادلة المستقيم والصيغ

www.jnob-jo.com

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مقدمة الوحدة

الوحدة 2

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

السؤال الأساس

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

نظرة عامة على الوحدة

2-1 العلاقات والدوال — 2-1 Relations and Functions

2-2 الدوال الخطية — 2-2 Linear Functions

2-3 تحويل الدوال الخطية — 2-3 Transforming Linear Functions

2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين — 2-4 Linear Inequalities in Two Variable

2-5 أنظمة المتباينات الخطية — 2-5 Systems of Linear Inequalities

44 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الوحدة 2

مصطلحات الوحدة

- علاقة
- دالة
- مجال
- مدى
- متصل
- متقطع
- واحد لواحد
- رمز الدالة
- دالة خطية
- تحويل
- إزاحة
- متباينة خطية ذات متغيرين
- حل متباينة خطية ذات متغيرين
- نظام متباينات خطية
- حل نظام متباينات خطية

Topic Vocabulary

- relation
- function
- domain
- range
- continuous
- discrete
- one-to-one
- function notation
- linear function
- transformation
- translation
- linear inequality in two variables
- solution of a linear inequality in two variables
- system of linear inequalities
- solution of a system of linear inequalities

45 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

السؤال الأساس للوحدة

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 83 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مشروع STEM

الوحدة 2 مشروع STEM

هل تعلم ؟

يتكون ثنائي أكسيد الكربون، الذي صيغته الكيميائية CO_2، من ذرة كربون وذرتي أوكسجين. ينتج كوكب الأرض غاز ثنائي أكسيد الكربون، CO_2، بشكل طبيعي، كما انه ينتج عن احتراق الوقود الأحفوري. الاسم الشائع لثنائي أكسيد الكربون في حالته الصلبة هو "الثلج الجاف".

يبلغ متوسط المسافة التي تقطعها هذه السيارة الهجينة داخل المدينة باستهلاك جالون واحد من البنزين 59 mpg

يبلغ متوسط المسافة التي تقطعها هذه السيارة الكبيرة المتعددة الأغراض داخل المدينة باستهلاك جالون واحد من البنزين 10 mpg

الوسط الحسابي لإنتاج النفط في دولة قطر 774 928 6 برميل تقريبًا في اليوم خلال السنوات العشر الأخيرة.

كم تستعمل من النفط الخام عندما تملأ خزان سيارتك بالكامل بالبنزين؟

خزانان ممتلئان

10 جالونًا

10 جالونًا

19 جالونًا من البنزين

1 برميل = 42 جالونًا من النفط الخام غير المكرّر

مهمتك: كفاءة استهلاك السيارات للوقود

تقوم أنت وزملاؤك في الصف بتحليل كفاءة استهلاك السيارات للوقود.

إذا أردتم تصميم سيارة لطرحها في الأسواق في عام 2029، ما معدل استهلاك السيارة للوقود الذي ستبنون تصميمكم عليه ؟

46 الوحدة 2 مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، سيقوم الطلاب بتحليل بيانات تاريخية تتعلق بكفاءة استهلاك السيارات للوقود. يمكن للطلاب المهتمين إجراء بحث عن أنواع أخرى من المركبات، مثل سيارات النقل الصغيرة أو الشاحنات.

تقديم المشروع

اعرض الموقف عبر مناقشة الاتجاهات في مجموعات بيانات وما يمكن أن يتعلمه الناس من تحليلها. يمكن استعمال الأسئلة الآتية لتوجيه النقاش.

س: اذكر بعض الأسباب التي تدفع إلى تحليل البيانات.

[قد يساعد الأداء السابق في توقع الأداء المستقبلي، كما في إحصائيات البيسبول. قد يساعد النمط الشرائي في مواسم التخفيضات متجرًا على تركيز استراتيجيته التسويقية. قد تكشف درجات الاختبارات عن أنماط في التعلم.]

س: اذكر أمثلة لبيانات تتوقع أن تتناقص بمرور الزمن.

[درجة الحرارة اليومية العليا من الصيف إلى الشتاء؛ الأزمنة القياسية في الجري من بداية موسم السباق إلى نهاية موسم السباق.]

س: اذكر أمثلة لبيانات تتوقع أن تتزايد بمرور الزمن.

[عدد السكان؛ درجة الحرارة اليومية العليا من الشتاء إلى الصيف؛ عدد مرات مشاركة عداء في سباقات الجري بمرور الزمن.]

اطلب من الطلاب قراءة المهمة التي سيُطلب منهم إنجازها.

تنفيذ المشروع

في هذه الوحدة:

- يمثّل الطلاب، في المستوى الإحدائي، البيانات التي جمعوها عن استهلاك السيارات للوقود نسبة إلى المسافات التي تقطعها.
- يستعمل الطلاب هذه البيانات لكتابة دالة خطية تنمذج الموقف.

إنهاء المشروع

قد ترغب في تخصيص يوم يتشارك فيه الطلاب تقديراتهم وتوقعاتهم.
شجّع الطلاب على توضيح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

يمكنك أن تطلب من الطلاب تنفيذ المشروع في أي وقت تشاء أثناء دراسة الوحدة 2.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-2
العلاقات والدوال

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ فهم أن العلاقة تمثّل دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

✔ تحديد مجال منطقي وتمييز القيود على المجال وفقًا للسياق في مسائل من واقع الحياة.

الفهم الأساس

تمثّل العلاقة دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

ترابط

سابقًا في هذا الصف، تمكّن الطلاب من :

- استعمال معادلات خطية لتمثيل العلاقات الخطية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- معرفة أن العلاقة تمثّل دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.
- تمييز القيود على مجال دالة خطية تبعًا للسياق في مسائل من واقع الحياة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال رمز الدالة لتمثيل قاعدة دالة، وإيجاد قيم الدوال، وكتابة دوال لنمذجة موقف من واقع الحياة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن الدالة هي علاقة بين المدخلة (المجال x) والمخرجة (المدى y) ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط.
- يطبّق الطلاب مفهوم المجال والمدى في سياق واقع الحياة، مثل قطع الملابس وأسعارها، لتمييز القيود المنطقية على المجال.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

العربية | الإنجليزية

- **علاقة** | *relation*
- **دالة** | *Function*
- **مجال** | *domain*
- **مدى** | *range*
- **متصل** | *continuous*
- **متقطع** | *discrete*
- **واحد لواحد** | *one-to-one*

نشاط المصطلحات

اعرض عددًا من أرقام الهواتف، كل منها مرتبط باسم صاحبه.

س: لنفترض أن نظام الهاتف يعمل بشكل جيد وطلب أحمد رقم هاتف سمير، هاتف مَن يجب أن يرن ؟

[هاتف سمير.]

كرر الخطوات أعلاه لعدد من الأسماء وأرقام الهواتف.

س: إذا طلب أحمد رقم هاتف سمير ورَنّ هاتف راشد، هل يعمل نظام الهاتف بشكل جيد ؟

[كلا]

استعمل الكلمات التالية : مجال، مدى، علاقة، دالة، لوصف العلاقة بين أرقام الهاتف والهواتف التي ترن في النظام الذي يعمل بشكل جيد وفي النظام الذي لا يعمل بشكل جيد.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين :

9.3.1 يدرك مفهوم الدالة ويستعمل صيغة الدالة ويميز العلاقة التي تمثّل دالة أحادية.

9.3.2 يدرك أن الدوال يمكن تمثيلها بمخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة أو جداول أو تمثيلات بيانية أو كلمات أو معادلات.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يحدّد الطلاب القيود على مجالَي موقفين من واقع الحياة : رسوم شحن سلعة بدلالة وزن السلعة، وقطع الملابس ودلالة تكلفتها.

ابحث عن البنية واستعملها

يلاحظ الطلاب البنية في مواقف مشابهة عندما يلاحظون أن التمثيلين البيانيين لموقفين مختلفين من واقع الحياة لهما مجالان محددان بالأعداد الكلية الموجبة لأن سياق الكلام في كلا المسألتين لا يسمح بوجود كميات سالبة.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب طرقًا مختلفة لتنظيم المقاعد في القاعة الدراسية. تساعدهم هذه البنية وهذا التنظيم في فهم العلاقات والدوال والتفكير فيهما.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ في المعلومات المعطاة في الصورة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يجلس الطلاب في صفين ويتكوّن كل صف من خمسة طلاب.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الأشياء التي يجب أن تأخذها في الحسبان عند التفكير في عدد الصفوف وعدد المقاعد في غرفة الصف ؟

[طول وعرض الغرفة وأبعاد المقعد.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ارسم غرفة صف مستطيلة الشكل تتضمن طاولة حاسوب تشغل $\frac{3}{5}$ طول الجدار الخلفي وخزانة تشغل $\frac{1}{4}$ طول جدار جانبي. ثم ارسم صفوفًا من المقاعد.

[تحقق من عمل الطلاب.]

س: ما عدد الصفوف وعدد المقاعد المنطقي في غرفة الصف ؟

[قد تتنوع الإجابات، ولكن يجب أن تكون أقل من إجابات الجزء A.]

س: كيف سيبدو التمثيل البياني للعلاقة بين عدد الصفوف وعدد المقاعد ؟

[ستظهر مجموعة نقاط لا يمكن وصلها بمستقيم.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف يمكنك تنظيم النتائج التي توصلت إليها ؟

[يمكنك إنشاء جدول تكتب في أحد أعمدته أعدادًا مختلفة من الصفوف، وفي العمود الآخر عدد المقاعد الإجمالي في كل صف.]

س: هل يمكنك استعمال التمثيل البياني لمستقيم لعرض النتائج التي توصلت إليها ؟ وضّح إجابتك.

[كلا؛ فالمستقيم يمثّل كل القيم الممكنة، في حين عدد المقاعد أو الصفوف لا يمكن أن يكون إلا عددًا كليًّا.]

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

نمذج ما النماذج الأخرى التي يمكنك استعمالها لتمثيل معلومات الطلاب ؟ اختر أحد النماذج وصفه. وضّح كيف ستمثّل المعلومات.

[التمثيل بالأعمدة؛ يمكن كتابة عدد الصفوف على امتداد المحور الأفقي، وكتابة عدد المقاعد في كل صف على امتداد المحور الرأسي.]

كتاب الطالب، صفحة 47

2-1 العلاقات والدوال
Relations and Functions

استكشف وبرّر منطقيًّا

رتّبت المقاعد في قاعة دراسية في صفوف أفقية كما في الشكل أدناه.

أستطيع... تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

معايير الدرس
9.3.1 و 9.3.2

المصطلحات
- علاقة relation
- دالة function
- مجال domain
- مدى range
- متصل continuous
- متقطع discrete
- واحد لواحد one-to-one

A. ما العدد المنطقي للصفوف في القاعة الدراسية ؟ وما العدد المنطقي للمقاعد ؟

B. **ابحث عن البنية** ما عدد الصفوف الذي سيكون عدد مستحيل ؟ وما عدد المقاعد الذي سيكون عدد مستحيل ؟ وضّح إجابتك.

C. ما الذي تكشفه إجاباتك في الجزأين A و B عن شكل التمثيل البياني الذي يربط بين عدد الصفوف وعدد المقاعد ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. العدد المنطقي للصفوف 3-8؛ العدد المنطقي للمقاعد 5 أمثال عدد الصفوف.

B. لا يمكن أن يكون عدد الصفوف أقل من 1؛ لا يمكن أن يكون عدد المقاعد عددًا أوليًّا أو أكبر مما تستوعبه غرفة الصف. لا يمكن توزيع عدد أولي من المقاعد بالتساوي على الصفوف.

C. يتضمن التمثيل البياني النقاط (15 , 3)، (10 , 2)، (5 , 1)، وهكذا، حيث تتزايد قيمة x بمقدار 1 وتتزايد قيمة y بمقدار 5، ولا يمكن الوصل بين هذه النقاط بمستقيم.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على مجال ومدى الدالة. ذكرهم بأنهم سبق لهم أن تعرفوا على العلاقات والدوال، موضحًا لهم أن المجال والمدى يساعدان على تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثّل دالة أم لا.

السؤال الأساس: ما الدالة ؟ وما أهمية المجال والمدى في تعريف الدالة ؟

مثال 1 معرفة المجال والمدى

ما مجال الدالة ومداها ؟

x	1	2	3	4	5
y	11	12	13	13	13

المدخلات

المخرجات

العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **الدالة** علاقة ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط.

مجال الدالة هو مجموعة المدخلات. **مدى** الدالة هو مجموعة المخرجات. اصطلاحًا، المدخلات هي قيم x والمخرجات هي قيم y.

مجال هذه الدالة هو مجموعة قيم x، وهي {1 , 2 , 3 , 4 , 5}.

مدى الدالة هو مجموعة قيم y، وهي {11, 12, 13}.

حاول أن تحلّ! 1. حدّد مجال ومدى كل دالة أدناه.

a.

x	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	4

b.

x	−3	−1	1	3	4
y	1	3	−2	2	6

الدرس 1-2 العلاقات والدوال 47

مثال 1 معرفة المجال والمدى

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك وصف المدخلات والمخرجات المكتوبة في الجدول ؟

[تظهر كل مدخلة مرة واحد في الجدول. تظهر إحدى المخرجات عددًا من المرات.]

س: ما الطريقة الأخرى التي يمكنك من خلالها تمثيل الدالة الموضحة في الجدول ؟

[في صورة نقاط (x , y) على تمثيل بياني.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. **a.** المجال : {2, 3, 4, 5, 6}؛ المدى : {0, 1, 2, 3, 4}

b. المجال : {−3, −1, 1, 3, 4}؛ المدى : {−2, 1, 2, 3, 6}

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الفرق بين المجال والمدى ؟ وضح إجابتك.

[المجال هو قيم المدخلات في علاقة ما. المدى هو قيم المخرجات في علاقة ما. حيث تتحدّد قيم المدى تبعًا لقيم المجال.]

تنويه

يمكن استبدال كلمة مجال الدالة f بالرمز D_f وكلمة مدى الدالة f بالرمز R_f.

خطأ شائع

حاول أن تحل! 1 قد يعتقد بعض الطلاب أن قيم x هي المدى وقيم y هي المجال. ذكر الطلاب بأن قيم x هي مدخلات الدالة وقيم y هي مخرجات الدالة.

www.jnob-jo.com

مثال 2 تحليل المجال والمدى المنطقيين

طرح أسئلة هادفة

س: ما الذي عليك التفكير فيه لتحديد المجال المنطقي لموقف ما ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قد يكون من المنطقي استعمال الأعداد الحقيقية أو الكلية أو الصحيحة أو الكسور، وكذلك معرفة العددين الأصغر والأكبر في المجال.]

س: كيف تحدّد ما إذا كنت ستمثل موقفًا ما بيانيًا بمستقيم أم بنقاط ؟

[استعمل المستقيم عندما يتضمن المجال كل الأعداد الحقيقية في فترة ما.

استعمل النقاط عندما يمكن استعمال قيم محددة فقط، مثل الأعداد الصحيحة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** المجال المنطقي : الأعداد الصحيحة الموجبة حيث يبدأ من جولة واحدة إلى عدد الجولات التي يلعبها اللاعب، لأن اللاعب لا يمكن أن يلعب جزءًا كسريًا أو عددًا سالبًا من الجولات.

المدى المنطقي : مضاعفات العدد 17 بما أن تكلفة كل جولة هي QR 17، وأن كل مدخلة عدد صحيح موجب، فإن كل مخرجة ستكون 17 مضروبًا في أي عدد صحيح موجب.

b. المجال المنطقي : كل الأعداد الحقيقية غير السالبة، لأن السيارة يمكنها قطع أي عدد حقيقي غير سالب من الأميال.

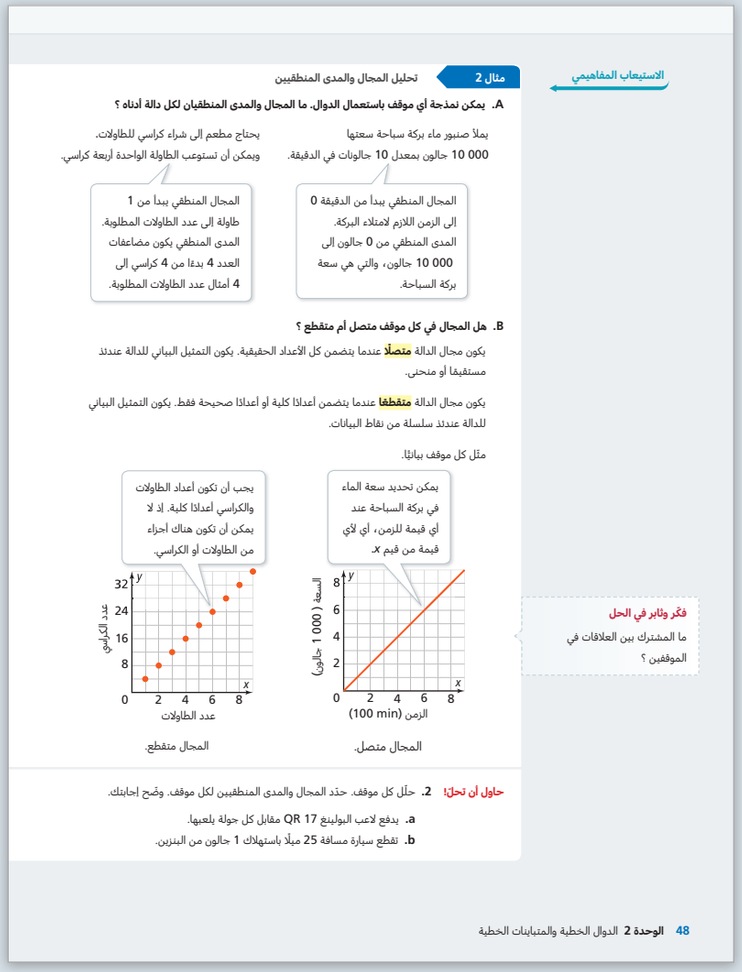
المدى المنطقي : كل الأعداد الحقيقية غير السالبة. بما أن السيارة تقطع مسافة 25 ميلًا بجالون واحد من البنزين، ويمكنها قطع أي عدد حقيقي موجب من الأميال، ستكون المخرجات 25 مضروبًا في أي عدد حقيقي غير سالب.

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

فكّر وثابر في الحل كيف تؤثر خصائص موقف ما في مجال الدالة التي تصفه ؟

[تنظّم معاملات متغيرة كل موقف مجال الدالة التي تصفه.]



الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 تحليل المجال والمدى المنطقيين

A. يمكن نمذجة أي موقف باستعمال الدوال. ما المجال والمدى المنطقيان لكل دالة أدناه ؟

يملأ صنبور ماء بركة سباحة سعتها 10 000 جالون بمعدل 10 جالونات في الدقيقة.

المجال المنطقي يبدأ من الدقيقة 0 إلى الزمن اللازم لامتلاء البركة. المدى المنطقي من 0 جالون إلى 10 000 جالون، والتي هي سعة بركة السباحة.

يحتاج مطعم إلى شراء كراسي للطاولات. ويمكن أن تستوعب الطاولة الواحدة أربعة كراسي.

المجال المنطقي يبدأ من 1 طاولة إلى عدد الطاولات المطلوبة. المدى المنطقي يكون مضاعفات العدد 4 بدءًا من 4 كراسي إلى 4 أمثال عدد الطاولات المطلوبة.

B. هل المجال في كل موقف متصل أم متقطع ؟

يكون مجال الدالة **متصلًا** عندما يتضمن كل الأعداد الحقيقية. يكون التمثيل البياني للدالة عندئذ مستقيمًا أو منحنى.

يكون مجال الدالة **متقطعًا** عندما يتضمن أعدادًا كلية أو أعدادًا صحيحة فقط. يكون التمثيل البياني للدالة عندئذ سلسلة من نقاط البيانات.

مثّل كل موقف بيانيًا.

يمكن تحديد سعة الماء في بركة السباحة عند أي قيمة للزمن، أي لأي قيمة من قيم x.

يجب أن تكون أعداد الطاولات والكراسي أعدادًا كلية. إذ لا يمكن أن تكون هناك أجزاء من الطاولات أو الكراسي.

السعة (1 000 جالون)

الزمن (100 min)

المجال متصل.

عدد الكراسي

عدد الطاولات

المجال متقطع.

فكّر وثابر في الحل

ما المشترك بين العلاقات في الموقفين ؟

حاول أن تحلّ! **2.** حلّل كل موقف. حدّد المجال والمدى المنطقيين لكل موقف. وضّح إجابتك.

a. يدفع لاعب البولينغ QR 17 مقابل كل جولة يلعبها.

b. تقطع سيارة مسافة 25 ميلًا باستهلاك 1 جالون من البنزين.

48 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تحديد المجال المنطقي لموقف من واقع الحياة.

- اطلب من الطلاب مراجعة كيفية تحديد المدخلة (المجال) والمخرجة (المدى) في مواقف من واقع الحياة. حدّد المدخلة والمخرجة لكل موقف.

س: تتقاضى شركة QR 40 مقابل غسل كل سيارة.

[المدخلة : عدد السيارات المغسولة؛ المخرجة : كمية المال المكتسب.]

س: سعر جالون واحد من البنزين QR 8.39.

[المدخلة : عدد جالونات البنزين؛ المخرجة : كمية المال المنفق.]

س: يحتوي صندوق مشابك الورق على 100 مشبك ورق.

[المدخلة : عدد صناديق مشابك الورق؛ المخرجة : العدد الكلي لمشابك الورق.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 ساعد الطلاب في استكشاف كيفية تحديد القيود على مجال دالة ما عند قراءتهم وصفًا مكتوبًا للموقف.

س: يتتبع صاحب متجر نفقاته الشهرية مدة سنة. يربط صاحب المتجر بين ترتيب الشهر بالنسبة لبقية أشهر السنة والنفقات. ما القيود على المجال ؟

[المجال هو أعداد كلية فقط من 1 إلى 12]

س: يسجّل مرصد أحوال جوية درجة الحرارة القصوى كل يوم لمدة سنة. يربط المرصد ترتيب اليوم بالنسبة لبقية أيام السنة ودرجة الحرارة القصوى. ما القيود على المجال ؟

[المجال هو أعداد كلية فقط من 1 إلى 365]

www.jnob-jo.com

مثال 3 تصنيف العلاقات والدوال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة في الجزء B دالة واحد لواحد باستعمال تمثيل بياني ؟

[عيّن كل زوج من قيم المدخلات والمخرجات في مستوى إحداثي. إذا لاحظت نقطتين لهما نفس القيمة y، فإن الدالة ليست دالة واحد لواحد.]

س: هل يمكن لدالة أن تكون دالة واحد لمتعدد ؟

[كلا؛ إذا كانت العلاقة علاقة واحد لمتعدد، فإنها ليست دالة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. لا تمثل دالة **b.** نعم تمثل دالة وهي دالة واحد لواحد

مثال 4 تحديد القيود على المجال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك تحديد مجموعة القيم التي تمثل المدخلات ومجموعة القيم التي تمثل المخرجات من خلال النظر إلى المخطط ؟

[القيم التي إلى اليسار (وزن الطلب) ترتبط بكل القيم التي إلى اليمين (تكاليف الشحن). إذن، القيم التي إلى اليسار هي قيم المدخلات والقيم التي إلى اليمين هي قيم المخرجات.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. كل الأعداد في المجال يجب أن تكون أكبر من 0 وأقل من أو تساوي 200

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

استعمل الأدوات المناسبة ما مميزات استعمال مخططات سهمية عند تحليل الدوال ؟

[اقد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إنشاء مخطط سهمي أسهل من رسم تمثيل بياني. يمكنك معرفة ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا إذا كان سهم واحد فقط ينطلق من كل عنصر في المجال. يمكنك معرفة ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد إذا كان كل سهم يشير إلى عنصر واحد فقط في المدى.]

مثال 3 تصنيف العلاقات والدوال

هل تمثّل كل علاقة أدناه دالة ؟ إذا كانت دالة، هل هي دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد ؟

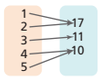
تكون الدالة **واحد لواحد** إذا لم يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه في المدى. عندما يرتبط عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه في المدى، فالدالة **ليست واحد لواحد**.

A. {(1 , 2) , (5 , 6) , (7 , –1) , (8 , 0)}

العلاقة تمثّل دالة لأن كل عنصر في المجال {8 , 7 , 5 , 1} يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى {6 , 2 , 0 , –1}.

بما أن عناصر المجال لا تتشارك أي قيمة من قيم المدى، إذن الدالة واحد لواحد.

B.



العلاقة تمثّل دالة، لأن كل عنصر من المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المدى.

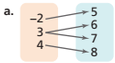
بما أن أكثر من عنصر واحد من المجال يرتبط بعنصر واحد من المدى، فإن الدالة ليست دالة واحد لواحد.

خطأ شائع

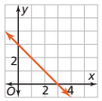
يمكن أن يرتبط عنصران أو أكثر من مجال الدالة بعنصر واحد في المدى، لكن لا يمكن أن يرتبط عنصران أو أكثر من المدى بعنصر واحد فقط من عناصر المجال.

حاول أن تحلّ! **3.** هل تمثّل كل علاقة أدناه دالة ؟ إذا كانت دالة، هل هي دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد ؟

a.

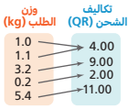


b.



مثال 4 تحديد القيود على المجال

بيّن المخطط المجاور رسوم الشحن في صورة دالة لأوزان عدة طلبات عبر الإنترنت. وفقًا للموقف، ما القيود على مجال الدالة إن وجدت ؟



يجب أن يكون وزن الطلب أكبر من الصفر، لذا يقتصر مجال الدالة على القيم الأكبر من الصفر.

تطبيق

بزر منطقيًا

فكّر في العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

حاول أن تحلّ! **4.** ينفق أحمد 200 QR على شراء الملابس شهريًا. يربط أحمد المبلغ الذي ينفقه كل شهر بعدد قطع الملابس التي يشتريها. ما القيود على المجال ؟

الدرس 2-1 العلاقات والدوال 49

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 3**

القراءة **مستوى 1** اقتراح : اطلب من الطلاب الاستماع إليك وأنت تقرأ التعاريف الآتية لكلمة دالة : فضل أو جراة أو عنصر تابع لعنصر أو عناصر أخرى.

س: ما معنى كلمة دالة في العبارة : "له عليّ دالة" ؟

[فضل]

س: ما معنى كلمة دالة الواردة في بداية المثال 3 ؟

[عامل تابع لعامل آخر]

س: أي من عناصر الدالة تابعة للعناصر الأخرى ؟

[عناصر مدى الدالة تابعة لعناصر المجال.]

الكتابة **مستوى 2** وزّع عشوائيًا على الطلاب بطاقات تتضمّن المفردات الآتية : سبب، قلم، قطر، أخ، لبنان، نتيجة، ورقة، أخت. تحدَّ الطلاب في التحدث فيما بينهم إلى أن يجد كل منهم الزميل الذي لديه بطاقة لها علاقة ببطاقته. (اكتب عددًا أكبر من البطاقات بحسب عدد الطلاب في الصف إذا لزم الأمر.)

س: ما معنى كلمة علاقة ؟

[رابط]

س: ناقش كيفية استعمال كلمة "علاقة" في هذا المثال.

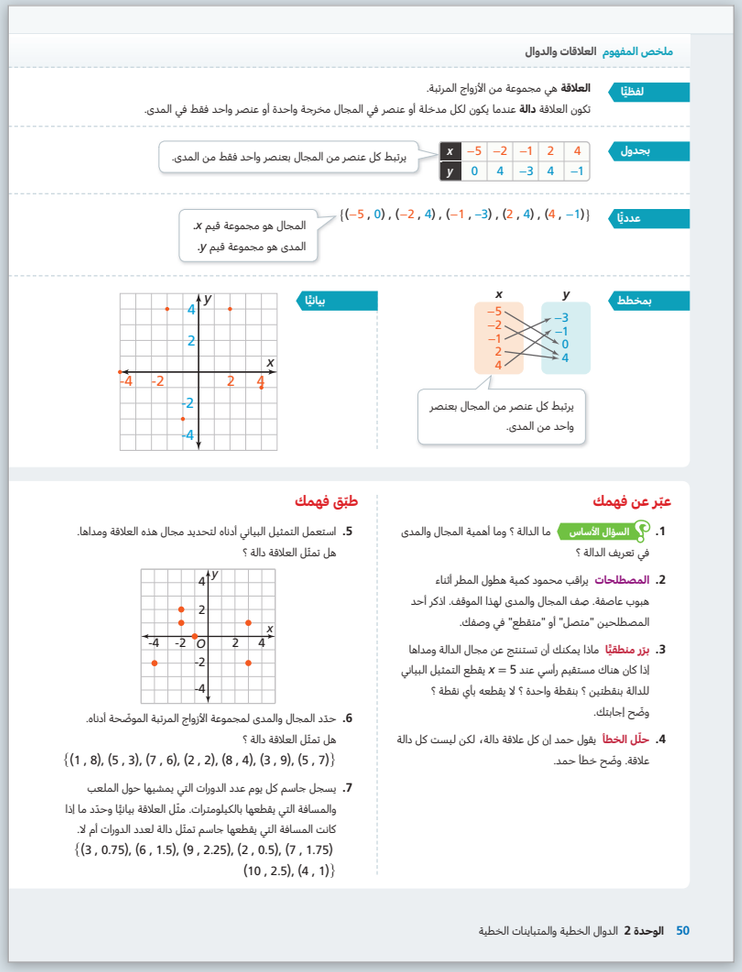
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : توضح العلاقة الرابط بين مجموعتين من الأعداد.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم العلاقات والدوال

س: ما التمثيل (التمثيلات) الأفضل لعرض الدوال المتصلة ؟ وضح إجابتك.

[التمثيل البياني هو الأفضل لعرض الدوال المتصلة.
في التمثيلات الأخرى، يجب أن تعرض بيانات كل نقاط الدالة. للدالة المتصلة عدد غير منته من النقاط، مما يعني أنه ليس بالإمكان عرض كل النقاط بشكل مستقل.]



ملخص المفهوم العلاقات والدوال

لفظيًا **العلاقة** هي مجموعة من الأزواج المرتبة.
تكون العلاقة **دالة** عندما يكون لكل مدخلة أو عنصر في المجال مخرجة واحدة أو عنصر واحد فقط في المدى.

بجدول

x	−5	−2	−1	2	4
y	0	4	−3	4	−1

يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المدى.

عدديًا {(−5 , 0) , (−2 , 4) , (−1 , −3) , (2 , 4) , (4 , −1)}

المجال هو مجموعة قيم x.
المدى هو مجموعة قيم y.

بمخطط

يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد من المدى.

بيانيًا

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** ما الدالة ؟ وما أهمية المجال والمدى في تعريف الدالة ؟
2. **المصطلحات** يراقب محمود كمية هطول المطر أثناء هبوب عاصفة. صف المجال والمدى لهذا الموقف. اذكر أحد المصطلحين "متصل" أو "متقطع" في وصفك.
3. **برّر منطقيًا** ماذا يمكنك أن تستنتج عن مجال الدالة ومداها إذا كان هناك مستقيم رأسي عند $x = 5$ يقطع التمثيل البياني للدالة بنقطتين ؟ بنقطة واحدة ؟ لا يقطعه بأي نقطة ؟ وضّح إجابتك.
4. **حلّل الخطأ** يقول حمد إن كل علاقة دالة، لكن ليست كل دالة علاقة. وضّح خطأ حمد.

طبّق فهمك

5. استعمل التمثيل البياني أدناه لتحديد مجال هذه العلاقة ومداها. هل تمثّل العلاقة دالة ؟

6. حدد المجال والمدى لمجموعة الأزواج المرتبة الموضّحة أدناه. هل تمثّل العلاقة دالة ؟
{(1 , 8), (5 , 3), (7 , 6), (2 , 2), (8 , 4), (3 , 9), (5 , 7)}
7. يسجل جاسم كل يوم عدد الدورات التي يمشيها حول الملعب والمسافة التي يقطعها بالكيلومترات. مثّل العلاقة بيانيًا وحدّد ما إذا كانت المسافة التي يقطعها جاسم تمثّل دالة لعدد الدورات أم لا.
{(3 , 0.75), (6 , 1.5), (9 , 2.25), (2 , 0.5), (7 , 1.75)
(10 , 2.5), (4 , 1)}

50 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد يعتقد بعض الطلاب أن النقطة (2 , 2) هي السبب في أن هذه العلاقة ليست دالة. شجّع الطلاب على المواءمة بين عناصر المجال وعناصر المدى، وسوف يلاحظون بعد ذلك أن العلاقة ليست دالة لأن العنصر 5 في المجال مرتبط بقيمتين مختلفتين في المدى.

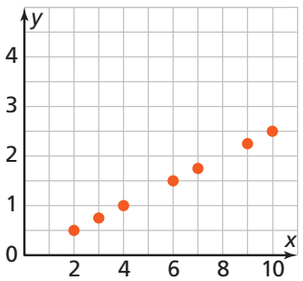
الإجابات

1. الدالة هي علاقة ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط. من المهم معرفة المجال والمدى لتحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. كي تكون العلاقة دالة يجب أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.
2. المدى والمجال أعداد حقيقية موجبة متصلة بالإضافة إلى العدد 0؛ يمكن لكمية هطول المطر ومقدار الزمن أن يكونا كسورًا من أعداد كلية.
3. يقطعه في نقطتين : المجال يتضمن العنصر 5 والعلاقة ليست دالة.
يقطعه في نقطة واحدة : المجال يتضمن العنصر 5، في هذه الحالة يمكن للعلاقة أن تكون دالة، ولكن هذا يتوقف على النقاط الأخرى.
لا يقطعه في أي نقطة : المجال لا يتضمن العنصر 5 لكن يمكن للعلاقة أن تكون دالة. هذا يتوقف على النقاط الأخرى.
4. كل دالة علاقة، لأنه بالإمكان كتابة أي دالة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة. كل علاقة ليست دالة بالضرورة، لأنه يمكن لقيم مجال بعض العلاقات أن ترتبط بأكثر من قيمة في مداها.
5.

x	−4	−2	−2	−1	3	3
y	−2	2	1	0	−2	1

{(−4 , −2), (−2 , 2), (−2 , 1), (−1 , 0), (3 , −2), (3 , 1)}
المجال : {−4, −2, −1, 3} والمدى : {−2, 0, 1, 2} ؛ العلاقة ليست دالة.

6. المجال : {1, 2, 3, 5, 7, 8} ؛ المدى : {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} ؛ العلاقة ليست دالة.
7.



العلاقة تمثل دالة.

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
8-17, 19, 21, 23-29	8-13, 15, 17-29

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	8, 13, 14	1
2	15, 16	2
3	17-19	2
	9, 26	3
4	20-23, 28	1
	11, 25, 27	2
	10, 12, 24, 29	3

الإجابات

8. **a.** المجال : $1 \le x \le 3$، المدى $0 \le y \le 4$

b. المجال : $x \ge 0$؛ المدى : $y \ge 1$

9. نعم يمكن تحديده؛ المجال هو {3, 4, 5, 6, 7} أي أنه يتضمن 5 قيم فقط. يتضمن المدى 6 قيم، أي يجب ربط قيمة واحدة على الأقل في المجال بأكثر من قيمة في المدى. إذن العلاقة ليست دالة.

10. يمكن أن تكون n أي قيمة باستثناء 1 و 2 و 3

11. يبين كل من التمثيل البياني والجدول أن العلاقة تمثل دالة لأنه يمكن ملاحظة ما إذا كانت أي من المدخلات مرتبطة بأكثر من مخرجة واحدة.

12. **a.** العلاقة لا تمثل دالة لأن قيمة واحدة من قيم المدخلات ترتبط بأكثر من قيمة من قيم المخرجات. يمكن للربط من y إلى x أن يكون دالة أو لا يكون، وذلك بالاعتماد على ما إذا كانت كل قيم y مرتبطة بأكثر من قيمة لـ x أم لا.

b. يمكن للعلاقة أن تمثل دالة أو لا، فذلك يتوقف على ما إذا كانت إحدى قيم x مرتبطة بأكثر من قيمة لـ y. لا يمكن للربط من y إلى x أن يكون دالة لأن إحدى قيم y على الأقل مرتبطة بأكثر من قيمة لـ x.

c. تمثل العلاقة دالة لأن كل مدخلة مرتبطة بمخرجة واحدة فقط. يمثل الربط من y إلى x دالة أيضًا لأن كل قيم y مرتبطة بقيمة x واحدة فقط.

13. المجال : {5, 8, 10, 12, 14}،
المدى : {6, 11}، العلاقة تمثل دالة لأن كل مدخلة مرتبطة بمخرجة واحدة فقط.

14. المجال : {A, B, C, D}،
المدى : {السد، الريان، العربي، الغرافة، الدحيل}
العلاقة لا تمثل دالة لأن المدخلة A ترتبط بأكثر من مخرجة.

15. المجال المنطقي : كل الأعداد الحقيقية الموجبة،
المدى المنطقي : 910

16. المجال المنطقي : الأعداد الكلية،
المدى المنطقي : مضاعفات العدد 150

17. المجال المنطقي : الأعداد الكلية،
المدى المنطقي : مضاعفات العدد 2000

18. دالة، واحد لواحد.

19. دالة، ليست واحد لواحد.

20. ليست دالة.

21. ليست دالة.

22. الأعداد الكلية الأصغر من أو تساوي 40،
قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

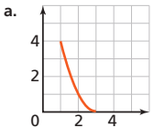
الأجر الأسبوعي	عدد الساعات
960	20
1100	23
1325	28
1690	35
2040	40

23. كل الأعداد الكلية من 10 إلى 20

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

8. **استعمل البنية** حدّد مجال ومدى كل دالة أدناه.

a.


b.

9. **ابن الحجج الرياضية** إذا كان مجال العلاقة هو كل الأعداد الكلية الواقعة بين 2.5 و 7.5، ومداها يتضمن 6 قيم مختلفة، فهل يمكنك تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا ؟ وضّح تبريرك المنطقي.

10. **حلّل الخطأ** طلب المعلّم من ماجد أن يذكر كل قيم n التي تجعل العلاقة أدناه دالة. أوجد خطأ ماجد وصحّحه.

{(2 , 8) , (6 , 0) , (4 , 2), (2n , n)}
يمكن أن تكون n أي قيمة باستثناء 6 , 4 , 2

11. **تواصل بدقة** صِف تمثيلين مختلفين يبيّن كل منهما علاقة ودالة أيضًا. وضّح إجابتك.

12. **مهارات التفكير العليا** يمكن وصف العلاقات التي تربط بين قيم المجال وقيم المدى إما بأنها علاقة واحد لواحد وإما بأنها ليست علاقة واحد لواحد.

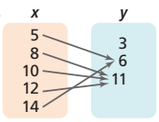
a. إذا ارتبطت قيمة واحدة من قيم x بقيم متعددة من قيم y (علاقة واحد لمتعدد)، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وإذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

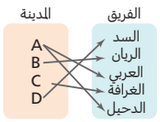
b. إذا لم تكن العلاقة علاقة واحد لواحد، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وإذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

c. إذا كانت العلاقة علاقة واحد لواحد، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ إذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب

في التمرينين 13 و 14، حدّد مجال كل علاقة أدناه ومداها. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك. انظر المثالين 1 و 3

13.


14.


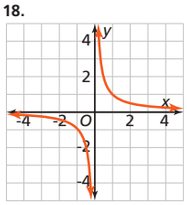
في التمارين 15-17، حلّل كل موقف. حدّد المجال والمدى المنطقيين لكل موقف. انظر المثال 2

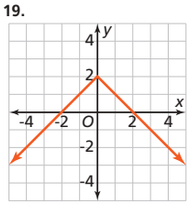
15. طائرة تطير بسرعة 910 km/h

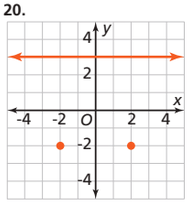
16. سعر التذكرة لحضور حدث رياضي QR 150.

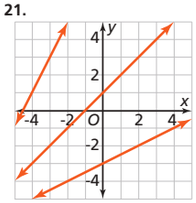
17. يستهلك شخص ما 2 000 سعرة حرارية كل يوم.

في التمارين 18-21، حدّد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. إذا كانت كذلك، صنّف الدالة ما إذا كانت دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد. انظر المثال 3

18.


19.


20.


21.


في التمرينين 22 و 23، حدّد القيود على المجال. انظر المثال 4

22. يتقاضى حسن في عمله أجره بالساعة. قام بتصميم جدول يتضمن عدد الساعات التي يعملها كل أسبوع والمبلغ الذي تقاضاه مقابل ذلك.

23. يسبح جاسم في بركة سباحة، طولها 50 مترًا، من 10 إلى 20 مرة يوميًا، ويسجّل عدد المرات والزمن الذي تستغرقه كل مرة بالدقائق.

www.jnob-jo.com

الإجابات

24. **a.** المجال : {اللغة العربية، الرياضيات، التاريخ، علم الأحياء، مختبر الأحياء}
المدى : {0, 45, 60, 90}
العلاقة تمثل دالة.

b. المجال : {اللغة العربية، الرياضيات، التاريخ، علم الأحياء، مختبر الأحياء}
المدى : {45, 60}
العلاقة تمثل دالة.

c. كلا؛ قد تتنوع الإجابات. العنصر 45 في الأسبوع 1 يتطابق مع أكثر من زمن في الأسبوع 2، أي أن زمن حصص الأسبوع 2 لا يمثل دالة لزمن الحصص في الأسبوع 1

25. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :
{(مانعة , A) , (تحذيرية , B) , (إرشادية , D)}

26. **a.** المجال : $\left\{t : \frac{1}{2} \le t \le 2\right\}$،
المدى : $\{s : 48 \le s \le 72\}$ العلاقة تمثل دالة.

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : جدول.

الزمن (h)	السرعة (km/h)
0	48
$\frac{1}{4}$	52
$\frac{1}{2}$	56
1	64
$1\frac{1}{2}$	72

c. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اخترت هذا النموذج لأن القطار زادت سرعته بعد نصف ساعة، ثم أصبحت سرعته ثابتة. يمكن للجدول أن يكون الطريقة الأبسط لنمذجة المعلومات.

27. **a.** لا
b. نعم
c. نعم
d. نعم
e. لا

28. E

29. الجزء A

التكلفة (QR)	الزمن (ساعات)
40	1
120	3
400	11
400	20

الجزء B نعم؛ التكلفة دالة للزمن لأن كل قيمة للزمن مرتبطة بقيمة واحدة فقط للتكلفة.

الجزء C كلا؛ لا يمثل الزمن دالة للتكلفة لأن قيمة التكلفة 400 ترتبط بأكثر من قيمة للزمن.

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

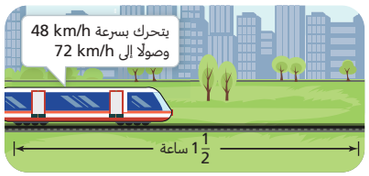
24. **نمذج** يوضح الجدول أدناه عدد الدقائق التي يقضيها عيسى في كل حصة لمدة أسبوعين.

الحصة	الأسبوع 1 الزمن (min)	الأسبوع 2 الزمن (min)
اللغة العربية	60	60
الرياضيات	90	60
التاريخ	45	45
علم الأحياء	45	45
مختبر الأحياء	0	60

a. بالنسبة إلى حصص عيسى في الأسبوع الأول، حدّد المجال والمدى. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.
b. بالنسبة إلى حصص عيسى في الأسبوع الثاني، حدّد المجال والمدى. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.
c. هل زمن حصص عيسى في الأسبوع الثاني يمثّل دالة لزمن حصصه في الأسبوع الأول ؟ وضّح إجابتك.

25. **فكّر وثابر في الحل** إذا كانت أسماء لوحات المرور تمثّل المجال وتمثّل أنواع اللوحات (تحذيرية أو إرشادية أو مانعة) المدى، أنشئ قائمة من 3 لوحات تشكّل دالة.

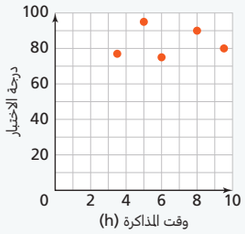
26. **برّر منطقيًّا** بعد أن تحرك القطار مدة $\frac{1}{2}$ ساعة، زادت سرعته وتحرك بمعدل ثابت مدة $1\frac{1}{2}$ ساعة.



a. ما المجال ؟ وما المدى ؟
b. كيف يمكنك تمثيل العلاقة بين الزمن والسرعة ؟
c. لماذا مثّلت العلاقة بهذه الطريقة ؟

تدرَّب على اختبار

27. يوضح التمثيل البياني أدناه الزمن الذي يقضيه بعض الطلاب في المذاكرة ودرجاتهم في الاختبار الأخير. حدّد ما إذا كان بالإمكان إضافة كل نقطة من نقاط البيانات الموضحة في الأجزاء من (a) إلى (e) إلى التمثيل البياني بحيث يبقى التمثيل البياني يمثّل دالة.



	نعم	لا
a. درجة أحمد 85 وذاكر 8 h	❑	❑
b. درجة منصور 97 وذاكر 9 h	❑	❑
c. درجة علي 77 وذاكر 4.5 h	❑	❑
d. درجة فيصل 80 وذاكر 7.5 h	❑	❑
e. درجة فارس 90 وذاكر 6 h	❑	❑

28. **اختبار SAT/ACT** بالنسبة إلى علاقة تكون فيها قيم y دالة لقيم x، حيث $y = 4$ عندما $x = 6$، أي مما يلي لا يمثّل ارتباطًا آخر ممكنًا في العلاقة ؟

Ⓐ $x = 3$ ترتبط مع $y = 2$
Ⓑ $x = 1$ ترتبط مع $y = 6$
Ⓒ $x = 0$ ترتبط مع $y = 0$
Ⓓ $x = 4$ ترتبط مع $y = 6$
Ⓔ $x = 6$ ترتبط مع $y = 2$

29. **مهمة أدائية** تكلفة استئجار دراجة هوائية QR 40 في الساعة، والأجرة اليومية القصوى QR 400.

الجزء A أنشئ جدولًا يوضح تكلفة استئجار الدراجة مدة ساعة واحدة و 3 ساعات و 11 ساعة و 20 ساعة.

الجزء B هل التكلفة تمثّل دالة للزمن ؟ وضّح إجابتك.

الجزء C هل الزمن يمثّل دالة للتكلفة ؟ وضّح إجابتك.

52 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 2-2
الدوال الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ كتابة وإيجاد قيم دوال خطية باستعمال رمز الدالة.

✔ تمثيل دالة خطية بيانيًا وربط مجال الدالة بتمثيلها البياني.

✔ تفسير الدوال الممثلة بتمثيلات بيانية وجداول وأوصاف لفظية ورمز الدالة بدلالة موقف ما.

الفهم الأساس

يمكن تمثيل الدوال الخطية بعدة طرق، وذلك باستعمال الكلمات والجداول والتمثيلات البيانية والقواعد. إن رمز الدالة هو طريقة لكتابة قاعدة الدالة f.
إن مخرجة الدالة $f(x)$، تقرأ " f عند x "، تعني بأن f هي دالة للمدخلة x.

ترابط

سابقًا في هذا الصف، تمكّن الطلاب من:

- كتابة وحل معادلات خطية.
- التمييز بين العلاقات والدوال.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال رمز الدالة لتمثيل الدوال الخطية.
- إيجاد قيم دوال خطية لمدخلات في مجالاتها.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تمثيل تحويلات لدوال خطية باستعمال رمز الدالة.

دقة

يركّز هذا الدرس على مجموعة متنوعة من المهارات الإجرائية والتطبيق.

- يكتب الطلاب قاعدة دالة خطية باستعمال رمز الدالة ويجدون قيمة دوال باستعمال رمز الدالة.
- يربط الطلاب مجال الدالة بالعلاقة الكمية التي تصفها. مثلًا، تحديد مجال دالة مرتبطة بالزمن للمتباينة $0 < x < 24$ لأنه يوجد 24 ساعة في اليوم الواحد.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **مجال** | *domain*
- **عنصر** | *element*
- **مدى** | *range*

المصطلحات الجديدة

- **رمز الدالة** | *function notation*
- **دالة خطية** | *linear function*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح (دالة) على أنها قاعدة تربط كل عنصر في المجال مع عنصر واحد فقط في المدى.

اعرض على الطلاب التمثيل البياني للمستقيم $y = x + 1$.

اطلب من الطلاب استعمال التمثيل البياني لتمييز عنصر في المجال وتبيان كيفية ربطه بعنصر في المدى. بعدها بيّن للطلاب كيفية تمثيل نفس الدالة المعروضة في التمثيل البياني باستعمال رمز الدالة، أي $f(x) = x + 1$.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

9.3.3 يجد قيمة دالة عند قيمة في مجالها، ويكتب قاعدة دالة خطية لبيانات معطاة.

9.3.4 يمثّل بيانيًا ويحلل الدوال الخطية ويستخدمها في حل المسائل.

معايير ممارسات الرياضيات

نمذج

يستعمل الطلاب الجداول والرسومات والقواعد لتمثيل العلاقات الخطية في مواقف من واقع الحياة، مثل معرفة درجة الحرارة، والتي تتزايد بمعدل ثابت على مدى فترة زمنية تبلغ 24 ساعة.

كن دقيقًا

يفهم الطلاب معاني الرموز المستعملة في صيغة الدالة ويرون ميزة اختيار حروف تتعلق بمعنى المسألة، مثل اختيار $d(t)$ لتمثيل المسافة كدالة للزمن.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يقدم الطلاب توقعات حول العدد النهائي للأحجية باستعمال الأنماط. هذا يساعد الطلاب على فهم كيفية نمذجة المعادلات أو الدوال بناء على الأنماط خلال هذا الدرس.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: ماذا تلاحظ عن الأحجية ؟ ماذا تتوقع أن يحدث ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تحتوي الأحجية على نمط، وقد يتم إنشاء نمط من الأعداد الصحيحة الأصلية والأعداد الصحيحة الناتجة.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما النمط الذي تتعرف عليه من حل الأحجية ؟

[ناتج ضرب العدد الصحيح الأصلي مضروب بالعدد 2 يساوي العدد الصحيح الجديد.]

س: لماذا من المهم إيجاد نمط ؟

[يمكن أن يساعدك النمط على تحديد الأعداد التالية.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب معادلة تمثل النمط.

[$y = 2x$، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد.]

س: اكتب معادلة تمثل الأحجية.

[$y = \frac{9x - x}{4}$ ، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

أدر مناقشة صفية حول أهمية الأنماط وكيف تساعد عند إجراء التوقعات.

س: كيف تمثل نمطًا أو توقعًا ؟

[يمكنك كتابة معادلة لنمذجة نمط أو توقع.]

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

ابنِ الحجج الرياضية هل من الممكن إيجاد مثال مضاد ؟

[لا، لأن القاعدة صحيحة دائمًا.]

كتاب الطالب، صفحة 53

2-2 الدوال الخطية Linear Functions

أستطيع... تحديد الدوال الخطية وكتابتها وإيجاد قيمها وتمثيلها بيانيًّا.

معايير الدرس 9.3.3 و 9.3.4

المصطلحات
- رمز الدالة function notation
- دالة خطية linear function

الاستيعاب المفاهيمي

السؤال الأساس كيف يمكنك تحديد دالة خطية ؟

مثال 1 إيجاد قيم دوال باستعمال رمز الدالة

A. كيف يمكنك تمثيل قاعدة دالة ؟

استكشف وبرّر منطقيًّا

يعرض المخطط البياني المجاور خطوات حلّ أحجية رياضية.

A. جرّب حلّ الأحجية مع ستة أعداد صحيحة مختلفة.

B. سجّل كل عدد تجرّبه والنتيجة التي تحصل عليها.

C. توقّع العدد النهائي عند آخر عملية مع أي عدد. وضّح إجابتك.

D. **استعمل البنية** هل سيكون توقعك صحيحًا لجميع الأعداد ؟ وضّح إجابتك.

فكر في عدد

اضرب ذلك العدد في 9

اطرح العدد الأصلي من ناتج الضرب

اقسم الآن حاصل الطرح على 4

نموذج من أعمال الطلاب

A. و B.

$1 \rightarrow 2 : 1(9) - 1 = 8 , \frac{8}{4} = 2$

$2 \rightarrow 4 : 2(9) - 2 = 16 , \frac{16}{4} = 4$

$3 \rightarrow 6 : 3(9) - 3 = 24 , \frac{24}{4} = 6$

$5 \rightarrow 10 : 5(9) - 5 = 40 , \frac{40}{4} = 10$

$6 \rightarrow 12 : 6(9) - 6 = 48 , \frac{48}{4} = 12$

$-1 \rightarrow -2 : -1(9) - (-1) = -8 , \frac{-8}{4} = -2$

C. دائمًا ما يساوي العدد النهائي ضعف العدد الأصلي.

D. نعم، لأنه مهما كان العدد الذي تختاره، فإنك تضربه في ثمانية ثم تقسم الناتج على أربعة، وهي العملية التي تكافئ ضرب العدد الأصلي في اثنين.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

قدّم الدوال الخطية للطلاب. ذكّر الطلاب بأنه يمكنهم تمثيل قاعدة دالة باستعمال رمز الدالة. وضِّح لهم أنهم سيقومون بتحديد الدوال الخطية وإيجاد قيمها وتمثيلها بيانيًّا وكتابتها في هذا الدرس.

مثال 1 إيجاد قيم دوال باستعمال رمز الدالة

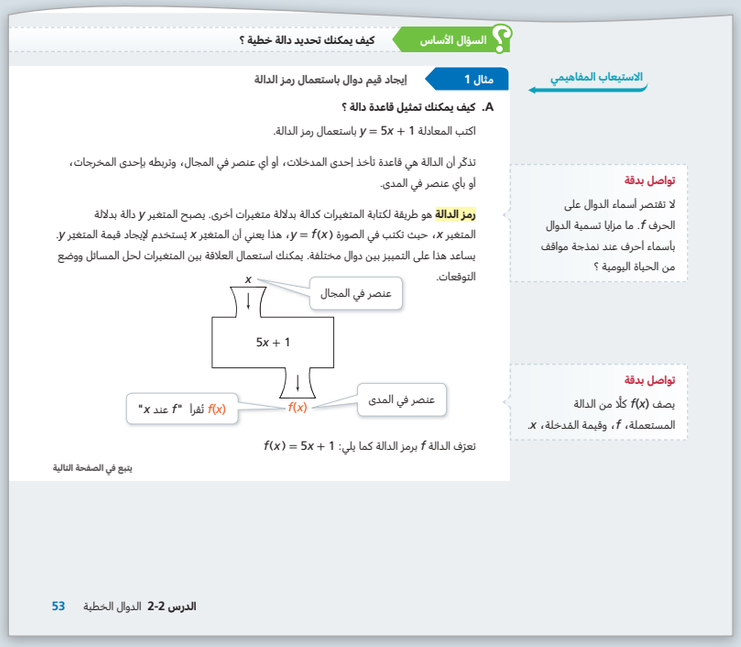
طرح أسئلة هادفة

س: متى تستعمل رمز الدالة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عندما تحتاج إلى كتابة متغير ما في صورة دالة لمتغير آخر.]

س: ما الطريقة الأخرى للتفكير بالمجال والمدى ؟

[عناصر المجال هي قيم x، وعناصر المدى هي قيم $f(x)$ أو قيم y.]



السؤال الأساس: كيف يمكنك تحديد دالة خطية ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 إيجاد قيم دوال باستعمال رمز الدالة

A. كيف يمكنك تمثيل قاعدة دالة ؟

اكتب المعادلة $y = 5x + 1$ باستعمال رمز الدالة.

تذكّر أن الدالة هي قاعدة تأخذ إحدى المدخلات، أو أي عنصر في المجال، وتربطه بإحدى المخرجات، أو بأي عنصر في المدى.

رمز الدالة هو طريقة لكتابة المتغيرات كدالة بدلالة متغيرات أخرى. يصبح المتغير y دالة بدلالة المتغير x، حيث نكتب في الصورة $y = f(x)$، هذا يعني أن المتغير x يستخدم لإيجاد قيمة المتغير y. يساعد هذا على التمييز بين دوال مختلفة. يمكنك استعمال العلاقة بين المتغيرات لحل المسائل ووضع التوقعات.

تعرّف الدالة f برمز الدالة كما يلي: $f(x) = 5x + 1$

يتبع في الصفحة التالية

تواصل بدقة

لا تقتصر أسماء الدوال على الحرف f. ما مزايا تسمية الدوال بأسماء أحرف عند نمذجة مواقف من الحياة اليومية ؟

تواصل بدقة

يصف $f(x)$ كلًّا من الدالة المستعملة، f، وقيمة المدخلة، x.

الدرس 2-2 الدوال الخطية 53

www.jnob-jo.com

تابع مثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. $g(4) = -11$
   b. $h(4) = 43$

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

طرح أسئلة هادفة

س: ما الطريقة التي يمكنك استعمالها لتحديد العلاقة بين القيم؟
[لاحظ النمط من قيمة إلى أخرى في الجدول.]

س: لماذا يمكنك استعمال صيغة الميل والمقطع لنمذجة الدالة الخطية؟
[المتغير y في صيغة الميل والمقطع يمثل مخرجة الدالة $f(x)$. لذا يمكنك كتابة $f(x) = mx + b$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $f(x) = 6.5x$
   b. $f(x) = 3x - 2$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

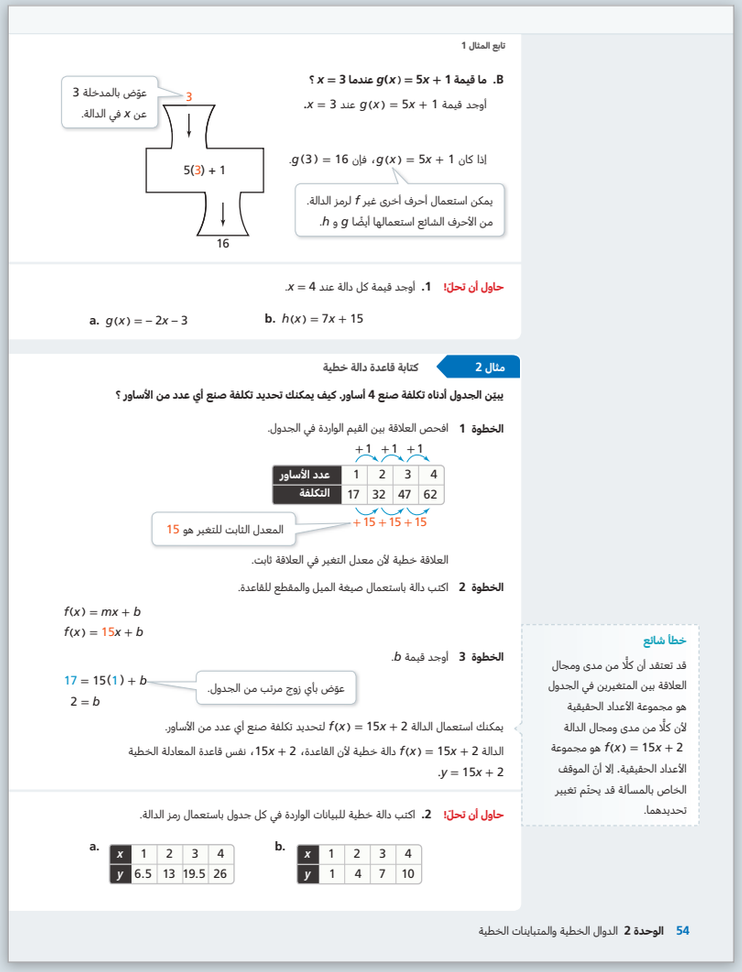
س: ماذا تلاحظ في ما يتعلق بالأنماط في الجداول والتي تساعدك على كتابة الدوال الخطية ؟
[في فقرة حاول أن تحل $2(a)$ ، تزداد القيم y بمقدار 6.5،
وفي فقرة حاول أن تحل $2(b)$، تزداد القيم y بمقدار 3]

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

ابحث عن العلاقات ماذا تكشف العلاقة بين القيم x والقيم y عن الدالة ؟

[يمكن أن تساعد العلاقة بين قيم x وقيم y في تحديد ما إذا كانت دالة ما خطية أم لا.]



تابع المثال 1

B. ما قيمة $g(x) = 5x + 1$ عندما $x = 3$ ؟

أوجد قيمة $g(x) = 5x + 1$ عند $x = 3$.

إذا كان $g(x) = 5x + 1$، فإن $g(3) = 16$.

عوّض بالمدخلة 3 عن x في الدالة.

3 → $5(3) + 1$ → 16

يمكن استعمال أحرف أخرى غير f لرمز الدالة. من الأحرف الشائع استعمالها أيضًا g و h.

حاول أن تحلّ! 1. أوجد قيمة كل دالة عند $x = 4$.

a. $g(x) = -2x - 3$ b. $h(x) = 7x + 15$

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

يبيّن الجدول أدناه تكلفة صنع 4 أساور. كيف يمكنك تحديد تكلفة صنع أي عدد من الأساور ؟

الخطوة 1 افحص العلاقة بين القيم الواردة في الجدول.

عدد الأساور	1	2	3	4
التكلفة	17	32	47	62

+1 +1 +1

+15 +15 +15

المعدل الثابت للتغير هو 15

العلاقة خطية لأن معدل التغير في العلاقة ثابت.

الخطوة 2 اكتب دالة باستعمال صيغة الميل والمقطع للقاعدة.

$f(x) = mx + b$
$f(x) = 15x + b$

الخطوة 3 أوجد قيمة b.

$17 = 15(1) + b$ عوّض بأي زوج مرتب من الجدول.
$2 = b$

يمكنك استعمال الدالة $f(x) = 15x + 2$ لتحديد تكلفة صنع أي عدد من الأساور.

الدالة $f(x) = 15x + 2$ دالة خطية لأن القاعدة، $15x + 2$، نفس قاعدة المعادلة الخطية $y = 15x + 2$.

خطأ شائع

قد تعتقد أن كلًّا من مدى ومجال العلاقة بين المتغيرين في الجدول هو مجموعة الأعداد الحقيقية لأن كلًّا من مدى ومجال الدالة $f(x) = 15x + 2$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية. إلا أنّ الموقف الخاص بالمسألة قد يحتّم تغيير تحديدهما.

حاول أن تحلّ! 2. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول باستعمال رمز الدالة.

a.

x	1	2	3	4
y	6.5	13	19.5	26

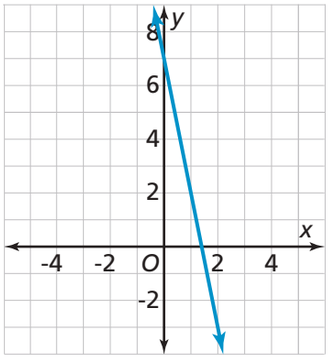
b.

x	1	2	3	4
y	1	4	7	10

54 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب اكتشاف كتابة قاعدة دالة خطية استنادًا إلى تمثيلها البياني.



س: ما قاعدة الدالة التي تحدد التمثيل البياني السابق ؟
[$f(x) = -5x + 7$، اختر نقطتين من التمثيل البياني مثل $(1 , 2)$ و $(2 , -3)$.
أوجد الميل بين النقطتين. استعمل الميل وإحدى النقطتين لإيجاد قيمة المقطع y.]

س: اذكر خمس قيم لكل من المجال والمدى.
[المجال = $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ؛ المدى = $\{-8, -3, 2, 7, 12\}$]

www.jnob-jo.com

مثال 3 تحليل دالة خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا يمثل العدد 0 في كل من مجال ومدى التمثيل البياني للدالة ؟

[بالنسبة للمجال، 0 يمثل الساعة 6:00 A.M، بالنسبة للمدى، يمثل 0 درجة فهرنهايت.]

س: ماذا يمثل المحور x ؟

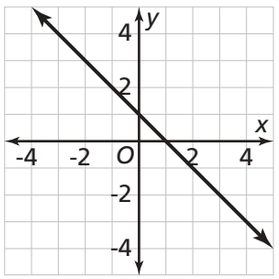
[يمثل المحور x الزمن أو عدد الساعات في اليوم.]

س: ماذا يمثل المحور y ؟

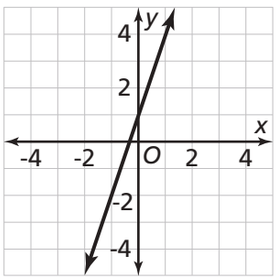
[يمثل المحور y درجة الحرارة الخارجية بالفهرنهايت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a.



b.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تمثيل الدالتين بيانيًا ؟

[في الجزء a، ابدأ برسم المقطع y الذي يساوي 1، ثم تحرك وحدة واحدة إلى الأسفل و وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، ثم ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين.

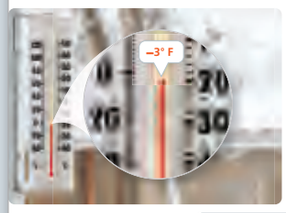
في الجزء b، ابدأ برسم المقطع y الذي يساوي 1، ثم تحرك 3 وحدات إلى الأعلى و وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، ثم ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين.]

خطأ شائع

حاول أن تحل 3a قد يمثل بعض الطلاب $y = x + 1$ بيانيًا لأنهم ينسون مراعاة إشارة الميل. اطلب من الطلاب أن يفكروا في ما إذا يجب أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة عندما يكون الميل سالبًا. ثم اطلب منهم التحقق لمعرفة ما إذا كانت التمثيلات البيانية التي رسموها تشير إلى الاتجاه الذي يدعم إجابتهم أم لا.

تطبيق

مثال 3 تحليل دالة خطية



A. يسجّل سامي درجة الحرارة الخارجية في إحدى المدن الباردة. عند الساعة 6:00 a.m. كانت الحرارة −3°F، ثم بدأت تزداد بمعدل 2°F كل ساعة خلال الساعات الست اللاحقة. افترض أن الحرارة تستمر بالارتفاع بنفس المعدل، أوجد درجة الحرارة عند الساعة 2:00 p.m.

الخطوة 1 اكتب دالة تنمذج الموقف.

درجة الحرارة عند الساعة 6:00 a.m.

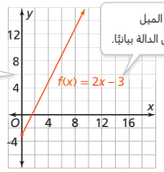
ارتفاع بمقدار 2°F كل ساعة.

$f(x) = 2x - 3$

الخطوة 2 مثّل هذه الدالة بيانيًا.

استعمل صيغة الميل والمقطع لتمثيل الدالة بيانيًا.

المدى لهذه الدالة هو مجموعة درجات الحرارة المنطقية والتي هي أكبر من −3



الخطوة 3 أوجد قيمة y عند $x = 8$ (حيث 8 عدد الساعات المنقضية من الساعة 6:00 a.m. إلى الساعة 2:00 p.m.)

$$y = 2(8) - 3$$
$$= 13$$

إذا واصلت درجة الحرارة ارتفاعها بالمعدل نفسه، فسوف تبلغ 13°F عند الساعة 2:00 p.m.

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 3$ هو خط مستقيم. **الدالة الخطية** هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم.

B. هل استعمال الدالة الخطية يمثّل واقعيًا درجة الحرارة للمجال $0 < x < 24$ ؟ وضّح إجابتك.

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 3$ له ميل يساوي 2، ويمثّل ارتفاعًا في درجة الحرارة بمقدار 2°F كل ساعة. إلا أن درجة الحرارة لن تواصل ارتفاعها على الأرجح بعد الغروب. بالتالي، الدالة الخطية واقعية لجزء من اليوم فقط.

نمذج

ما الذي يجعل الدالة نموذجًا جيدًا على مجال معطى ؟

حاول أن تحلّ! 3. مثّل كل دالة أدناه بيانيًا.

a. $f(x) = -x + 1$ b. $g(x) = 3x + 1$

الدرس 2-2 الدوال الخطية 55

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 يواجه بعض الطلاب صعوبات في فهم مجال ومدى الدالة الخطية ورسم تمثيل لها. اطلب من الطلاب التدرّب على إيجاد مدى الدالة عندما يكون مجالها معلومًا، والتدرب كذلك على رسم تمثيلها البياني.

س: أوجد مدى للدالة $f(x) = -2x + 4$، علمًا أن مجالها هو $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

[$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$]

س: مثل f بيانيًا باستعمال المقطعين x و y.

[تحقق من عمل الطلاب. يجب أن يكون التمثيل البياني خطًا مستقيمًا يمرّ بالنقاط $(4 , 0)$ و $(0 , 2)$.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحل المسائل

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يرتبط المجال والمدى بالتمثيل البياني ؟

[يتمثل المجال بالمحور t مع عرض الزمن بالدقائق. يتم تمثيل المدى بالمحور $d(t)$ والذي يوضح عدد الأميال انطلاقًا من قاعدة الجبل.]

س: كيف يساعدك النموذج الخطي على إيجاد قيمة دالة ما في زمن معين ؟

[يمكنك استعمال التمثيل البياني لإيجاد المسافة التي يبعدها المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل في زمن معين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. تبقى الدالة $d(t)$ تربط المسافة المقطوعة من قاعدة الجبل بعدد الدقائق التي يقطعها المصعد الكهربائي. ستكون المعادلة $d(t) = \frac{1}{15}t + 0.5$. تبقى نقطة بداية التمثيل البياني، أي $(0, 0.5)$، نفسها، ولكن لن يكون للمستقيم نفس حدة الانحدار. سيتغير المجال من $\{t : 0 \le t \le 15\}$ إلى $\{t : 0 \le t \le 22.5\}$.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك وصف أي تغيير قد يحدث للمجال والمدى، دون إجراء أي عمليات حسابية ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : بما أن المصعد الهوائي يتحرك ببطء أكبر، فسيستغرق الوصول إلى القمة زمنًا أطول، وبالتالي سيزداد المجال ليشمل مقدارًا أطول من الزمن. لن تتغير المسافة من قاعدة الجبل إلى قمة المصعد الهوائي، وبالتالي سيبقى المدى كما هو.]

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

برر منطقيًا كيف ترتبط المعادلة الخطية بالدالة الخطية ؟

[يمكن نمذجة الدالة الخطية بمعادلة خطية.]

تطبيق

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحلّ المسائل

ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع يبعد عن قاعدة الجبل مسافة 0.5 km ويكمل طريقه صعودًا بسرعة ثابتة. كم يبعد المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل بعد مرور 10 min ؟

ضع اكتب دالة خطية لتمثيل المسافة التي سيقطعها المصعد الهوائي من قاعدة الجبل.

ليكن t = الزمن بالدقائق.

$$\frac{6\text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} = \frac{0.1\text{ km}}{\text{min}}$$

سرعة المصعد معطاة بعدد الكيلومترات المقطوعة في الساعة، لذا عليك تحويل السرعة إلى عدد الكيلومترات المقطوعة في الدقيقة.

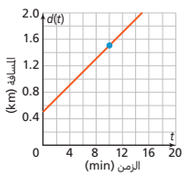
المسافة المقطوعة = معدل سرعة المصعد × الزمن المستغرق في الصعود + المسافة من القاعدة

$$d(t) = 0.1 \times t + 0.5$$

احسب تُمثّل المسافة التي تفصل المصعد عن قاعدة الجبل في أي وقت بالدالة الخطية $d(t) = 0.1t + 0.5$.

أوجد قيمة الدالة عند $t = 10$.

$$d(10) = 0.1(10) + 0.5$$
$$= 1 + 0.5$$
$$= 1.5$$



فسّر بعد 10 دقائق يكون المصعد الهوائي قد قطع 1.5 km من ارتفاع سفح الجبل.

حاول أن تحلّ! **4.** في المثال 4، كيف تتغير الدالة والتمثيل البياني والمعادلة إذا كانت سرعة المصعد الهوائي 4 km/h ؟ ما تأثير ذلك في المجال ؟

56 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الاستماع **مستوى 1** قبل عرض المثال على الطلاب، اقرأ الفقرة الأولى جهرًا. خلال استماع الطلاب، اطلب إليهم الإشارة إلى عبارة غير مألوفة بالنسبة إليهم.

[مصعد هوائي]

س: ما معنى مصعد هوائي ؟

[مصعد ينقلك إلى أعلى الجبل]

س: من يستعمله عادة ؟

[المتزلجون]

س: ما المسافة التي يجب أن تقطعها في الجبل حتى تصل إلى المصعد الهوائي ؟

[0.5 mi]

الكتابة **مستوى 2** اطلب من الطلاب دراسة كلمة قاعدة. أطوِ قطعة ورق إلى أربعة أرباع واكتب كلمة قاعدة في مركز الورقة. اطلب من الطلاب كتابة تعريفين مختلفين للكلمة على جزئين من الورقة. في الجزئين الآخرين، اطلب منهم رسم صورة لكيفية استعمال الكلمة في المثال، وصورة لكيفية استعمال الكلمة بطريقة رياضية.

س: ما المسافة التي تمثلها القاعدة في المسألة ؟

[0 mi]

التحدث **مستوى 3** اطلب من الطلاب قراءة نص المسألة ودراسة التوضيحات الموجودة في الصورة.

س: ما وحدات القياس التي تلاحظها في نص المسألة والصورة ؟

[أميال، دقائق، أميال في الساعة.]

س: ما أهمية ملاحظة وحدات القياس الموجودة في المسألة ؟

[لحل المسألة، على وحدات القياس أن تكون موحدة. في هذه الحالة، يجب تحويل أميال بالساعة إلى أميال بالدقيقة لأن t معطاة بوحدة زمن بالدقيقة.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الدوال الخطية

س: ما وجه العلاقة بين المجال والمدى بالدالة الخطية ؟

[المجال هو قيم المدخلة والمدى هو قيم المخرجة للدالة الخطية.]

س: ما بعض الطرائق التي يمكن من خلالها تمثيل الدوال الخطية ؟

[الكلمات والقواعد والجداول والتمثيلات البيانية.]

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد ينسى بعض الطلاب توزيع اشارة السالب على حدَّي المقدار $(x - 2)$. اطلب من الطلاب مقارنة $f(6) = -6 - 2$ و $f(6) = -(6 - 2)$ لتوضيح الدالة التي عليهم احتسابها.

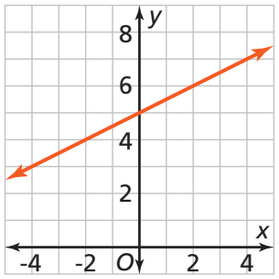
الإجابات

1. الدالة الخطية هي دالة، تمثيلها البياني مستقيم أو يقع على طول مستقيم، ويمكن كتابتها بالصيغة $y = mx + b$، حيث m و b عددان ثابتان.
2. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن نمذجة حركة شخص يركض بمعدل ثابت بدالة خطية. لا يمكن نمذجة حركة مجموعة من الاشخاص يركضون بسرعات مختلفة بدالة خطية.
3. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن تمثيل الدالة الخطية بالكلمات والقواعد والجداول والرسوم البيانية. المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى تتضمن متغيرين.
4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : لم تحول نجلاء الدقائق إلى ساعات بشكل صحيح. يجب أن تكون الدالة مكتوبة في الصورة $f(x) = 20x$.

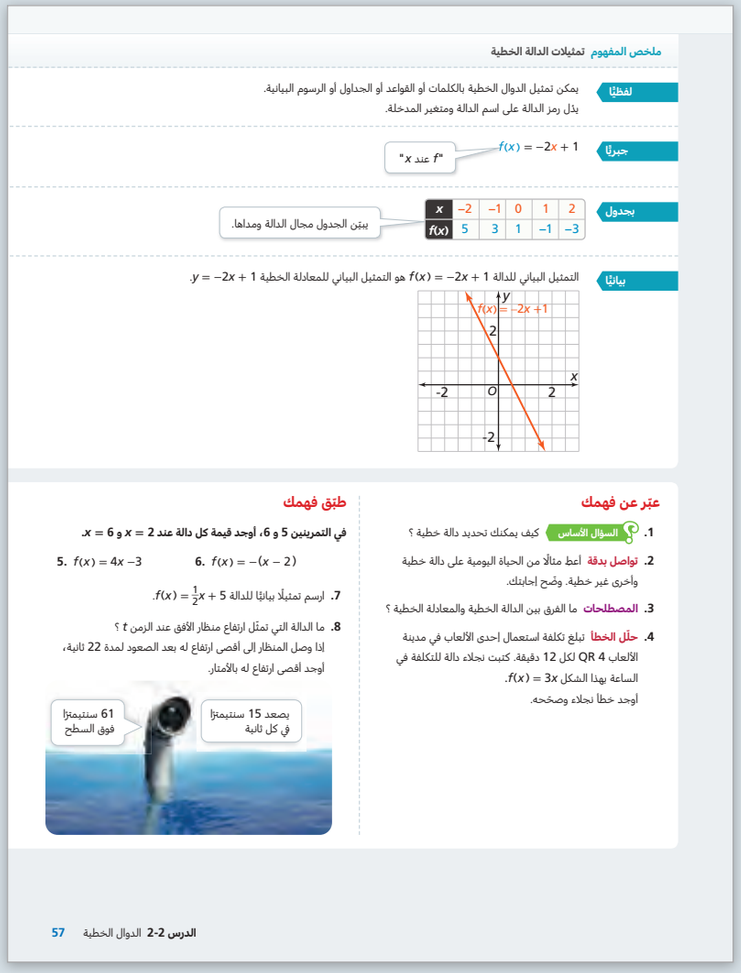
5. $f(2) = 5, f(6) = 21$

6. $f(2) = 0, f(6) = -4$

7.



8. $f(t) = 15t + 61$, 3.91 m



ملخص المفهوم تمثيلات الدالة الخطية

لفظيًا يمكن تمثيل الدوال الخطية بالكلمات أو القواعد أو الجداول أو الرسوم البيانية. يدل رمز الدالة على اسم الدالة ومتغير المدخلة.

جبريًا $f(x) = -2x + 1$ — "f عند x"

بجدول

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	5	3	1	−1	−3

يبيّن الجدول مجال الدالة ومداها.

بيانيًا التمثيل البياني للدالة $f(x) = -2x + 1$ هو التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = -2x + 1$.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك تحديد دالة خطية ؟
2. تواصل بدقة أعط مثالًا من الحياة اليومية على دالة خطية وأخرى غير خطية. وضّح إجابتك.
3. المصطلحات ما الفرق بين الدالة الخطية والمعادلة الخطية ؟
4. حلّل الخطأ تبلغ تكلفة استعمال إحدى الألعاب في مدينة الألعاب 4 QR لكل 12 دقيقة. كتبت نجلاء دالة للتكلفة في الساعة بهذا الشكل $f(x) = 3x$. أوجد خطأ نجلاء وصحّحه.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد قيمة كل دالة عند $x = 2$ و $x = 6$.

5. $f(x) = 4x - 3$
6. $f(x) = -(x - 2)$
7. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.
8. ما الدالة التي تمثّل ارتفاع منظار الأفق عند الزمن t ؟ إذا وصل المنظار إلى أقصى ارتفاع له بعد الصعود لمدة 22 ثانية، أوجد أقصى ارتفاع له بالأمتار.

الدرس 2-2 الدوال الخطية 57

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-21, 23, 25, 27-34	9-13, 15, 17, 19-34

تحليل التمارين

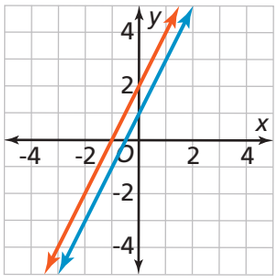
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	13-18	1
	33	2
2	19-21, 32	1
	12, 30	3
3	22-27	1
	9	2
	10	3
4	29, 31, 34	2
	11, 28	3

9. a. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

b. $\frac{1}{3}$

10. a. يجب أن يكون مدى $h(x)$ أكبر من مدى $g(x)$ بمقدار 1

b.



المدى على المجال $0 < x < 5$ هو $1 < y < 11$ للدالة $g(x)$ و $2 < y < 12$ للدالة $h(x)$.

11. a. QR 8, $\frac{5}{16}$ lb, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{13}{16}$

b. QR $8 \times \frac{5}{16} =$ QR 2.5 ؛ كلا، تكلفة الوعاء لا تتغير. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان وزن سلطة البطاطس 7, 9, 11, 13 oz، فإن تكلفة الوعاء سوف تبقى QR $8 \times \frac{5}{16} =$ QR 2.5

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: الخطأ هو في إيجاد المقطع y عبر إيجاد y عندما $x = 1$. الحل هو عند $x = 0$، فإن $y = 10 - 9$، أي $y = 1$ لذا $y = 9x + 1$

13. $f(5) = 21$

14. $f(5) = -12$

15. $f(5) = 20$

16. $f(5) = -0.5$

17. $f(5) = -9$

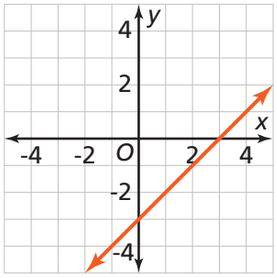
18. $f(5) = 4$

19. $y = 5x - 1$

20. $y = -2.5x + 4$

21. $y = -\frac{3}{2}x - 1$

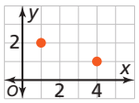
22.



تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

9. استعمل البنية النقطتان المبيّنتان على الرسم البياني معطاتان بالدالة f.



a. استعمل النقطتين لإيجاد المعادلة التي تمثّل الدالة f.

b. أوجد $f(6)$.

10. مهارات التفكير العليا لتأخذ الدالتين $g(x) = 2x + 1$ و $h(x) = 2x + 2$ على المجال $0 < x < 5$

a. من دون إيجاد قيمة الدالتين أو رسمهما بيانيًا، كيف يمكننا المقارنة بين مدى كل منهما ؟

b. مثّل الدالتين بيانيًا وصِف مدى كل منهما في المجال المعطى.

11. فكّر وثابر في الحل يستطيع الزبائن في متجر للأطعمة الصحية شراء كمية غير محدودة من سلطة البطاطس. لا يدفع الزبون مقابل وزن الوعاء.

a. يوضّح الجدول أدناه وزن الوعاء مع الطعام وتكلفته. إذا كان 1 oz = 0.0625 lb، أوجد سعر 1 lb من سلطة البطاطس. أوجد وزن الوعاء بالباوند. أوجد وزن الوعاء وسلطة البطاطس بالباوند.

الوزن (oz)	5	7	9	11	13
التكلفة (QR)	■	1	2	3	4

b. إذا كان المتجر يحاسب الزبون على وزن الوعاء، أوجد المبلغ الذي سيدفعه الزبون مقابل الوعاء. هل تكلفة الوعاء ثابتة أم أنها تختلف باختلاف كمية سلطة البطاطس المشتراة ؟ وضّح إجابتك.

12. حلّل الخطأ بيّن خطأ خالد عند إيجاده قاعدة الدالة للبيانات الواردة في الجدول أدناه، ثم صحّح هذا الخطأ.

x	1	2	3	4
y	10	19	28	37

كلما ازداد x بمقدار 1، يزداد y بمقدار 9. عندما يكون $x = 1$، فإن $y = 10$، إذن، $y = 9x + 10$.

تدرَّب

في التمارين 13-18، أوجد قيمة $f(5)$ لكل دالة. انظر المثال 1

13. $f(x) = 6 + 3x$

14. $f(x) = -2(x + 1)$

15. $f(a) = 3(a + 2) - 1$

16. $f(h) = -\frac{h}{10}$

17. $f(m) = 1 - 4\left(\frac{m}{2}\right)$

18. $f(m) = 2(m - 3)$

في التمارين 19-21، اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول. انظر المثال 2

19.

x	0	1	2	3	4
y	−1	4	9	14	19

20.

x	0	1	2	3	4
y	4	1.5	−1	−3.5	−6

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	−1	$-2\frac{1}{2}$	−4

في التمارين 22-25، ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالة خطية. انظر المثال 3

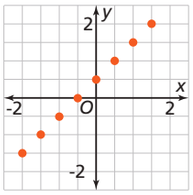
22. $g(x) = x - 3$

23. $h(x) = 3 - x$

24. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

25. $f(x) = 0.75(10 - x) + 1$

استعمل التمثيل البياني أدناه لحلّ التمرينين 26 و 27. انظر المثال 3



26. هل الدالة المبيّنة دالة خطية ؟ وضّح إجابتك.

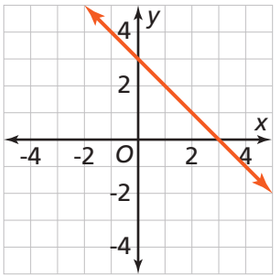
27. حدّد مجال الدالة ومداها.

28. تريد ريم شراء سلك معدني لصنع سياج طوله 20 m يحيط بمنطقة مستطيلة الشكل. استعمل الصيغة $2(l + w) = 20$ لكتابة دالة للطول، بدلالة العرض. مثّل الدالة بيانيًا. ما المجال المنطقي للموقف ؟ وضّح إجابتك. انظر المثال 4

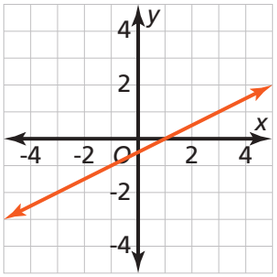
www.jnob-jo.com

الإجابات

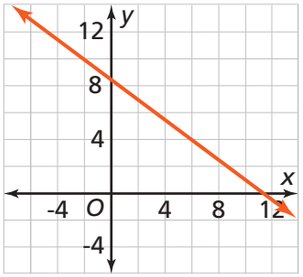
23.



24.



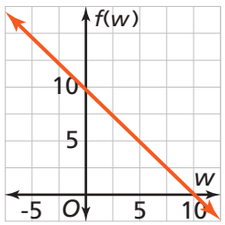
25.



26. نعم، عند زيادة مقدارها وحدة واحدة في قيم x، تزداد قيم y بمعدل ثابت. أيضًا، بالإمكان وصل نقاط التمثيل البياني بمستقيم. إذن، الدالة المبيَّنة خطية.

27. المجال: $\{-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5\}$
المدى: $\{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$

28. $f(w) = -w + 10$



المجال: $0 < w < 10$، كل قيمة خارج الفترة تعني أن الطول أو العرض كان سالبًا أو يساوي الصفر وهذا ليس ممكنًا.

www.jnob-jo.com

الإجابات

29. a. $f(t) = -1 + 1.5\,t$

b. كلا. أعلى ارتفاع للمياه، بعد 5 h، هو
$f(5) = -1 + 1.5(5) = 6.5$ ft

30. a. $f(t) = 60t + 30$

$f(t) = mt + b$

$m = \frac{(120 - 90)}{(1.5 - 1)} = 60$

$f(0.5) = 60(0.5) + b = 60$

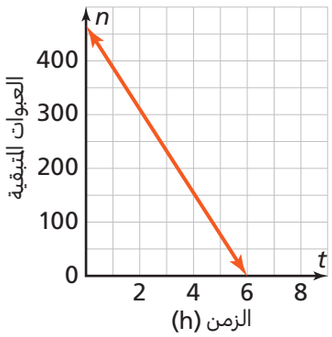
$b = 30$

المجال هو $\{x: 0.5 \le x\}$.

b. QR 675
$f(4.25) = 30 + 60(4.25) = 285$

التكلفة الإجمالية تساوي مجموع رسوم العمل مقابل 4 h و 15 min وتكلفة قطع الغيار: 285 + 390 = 675

31. a. المجال: $\{t : 0 \le t \le 5.96\}$
المدى: $\{n : 0 \le n \le 465\}$



b. باع جميع عبوات المياه في الساعة 3:58 P.M تقريبًا لأن العبوات تنفد بعد مرور 5.96 h بعد الساعة 10:00 A.M، يتم بيع 78 عبوة في الساعة ويفتح المتجر أبوابه لمدة 7.5 ساعات، أي يجب أن يكون لديهم على الأقل 585 = 78(7.5) عبوة مياه في بداية يوم العمل التالي.

34. الجزء A
$c(n) = 5\,250 + 54n,\ r(n) = 159n$
اطرح التكلفة من الربح:

$p(n) = 159n - (5\,250 + 54n)$
$= 105n - 5\,250$

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

29. نمذج يقيس المقياس المبيّن في الصورة أدناه مستوى ارتفاع مياه النهر مقارنةً بالوسط الحسابي لمستواها. أشار المقياس في البداية إلى أنّ مستوى المياه أقل بمقدار 1 ft من وسط مستواها البالغ 10 ft ثم بدأت المياه بالارتفاع بمعدل ثابت مقداره 1.5 ft في الساعة.

a. مثّل الدالة الخطية بيانيًا لتبيّن التغيير الذي يحدث في مستوى المياه بمرور الزمن.

b. هل سيصل مستوى مياه النهر إلى 7 ft فوق المعدل الطبيعي بعد 5 ساعات ؟ وضّح إجابتك.

30. استعمل البنية يتقاضى صاحب ورشة تصليح سيارات من عملائه مقابل ساعات الخدمة الأجور التالية. تتم محاسبة العملاء مقابل خدمة نصف ساعة على الأقل.

ورشة تصليح السيارات					
الساعات	0.5	1	1.5	2	2.5
رسوم العمل (QR)	60	90	120	150	180

a. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول.

b. استغرق إصلاح إحدى السيارات 4 h و 15 min وتطلب دفع QR 390 مقابل قطع الغيار. أوجد التكلفة الإجمالية.

31. بزر منطقيًا يفتح متجر أبوابه في أحد المعارض من الساعة 10:00 a.m. إلى الساعة 5:30 p.m. ولديه 465 عبوة مياه للبيع. يبلغ متوسط المبيعات 1.3 عبوة مياه في الدقيقة.

a. مثّل بيانيًا عدد العبوات المتبقية بدلالة عدد الساعات. أوجد المجال والمدى.

b. بهذا المعدل، في أي وقت ستُباع جميع عبوات المياه ؟ ما عدد عبوات المياه المطلوبة في بداية اليوم التالي ؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب على اختبار

32. فكّر في الدالة $f(x) = 3(x - 1) - 0.4(9 - x)$.
صِل كل مقدار بقيمته المكافئة.

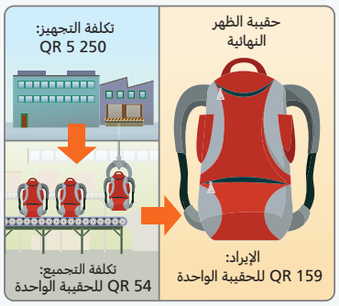
I. $f(2) + f(4)$	A. 3.4
II. $f(5)$	B. 3.6
III. $f(7) - f(6)$	C. 7.2
IV. $f(3)$	D. 10.4

33. اختبار SAT/ACT اكتب دالة خطية بالاستناد إلى بيانات الجدول. أي من النقاط أدناه ليست جزءًا من الدالة ؟

x	$f(x)$
0	180
1	174
2	168
3	162
4	156

Ⓐ (12 , 108)
Ⓑ (30 , 0)
Ⓒ (−15 , 270)
Ⓓ (21 , 54)
Ⓔ (9 , 120)

34. مهمة أدائية يحسب جابر تكاليف وأرباح مشروعه التجاري المتمثل في إنتاج n من حقائب الظهر للنزهات البرية. تتمثل أرباح جابر في العائد مطروحة منه النفقات.

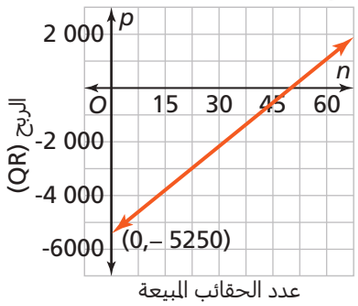


الجزء A اكتب دالة تمثّل الربح الذي سيحققه جابر من بيع n حقيبة من حقائب الظهر.

الجزء B مثّل دالة الربح بيانيًا. أوجد المجال المنطقي لهذه الدالة لعام واحد إذا كان عائده يتراوح بين QR 4 000 و QR 30 000 ؟ هل الدالة متقطعة أم متصلة ؟ وضّح إجابتك.

الجزء C كم ستبلغ أرباحه إذا باع 43 حقيبة ظهر ؟ وضّح إجابتك.

الجزء B



المجال: $\{n : 25 \le n \le 189\}$، دالة العائد هي $r(n) = 159n$.

إذن، إذا كان يبيع بين QR 4000 و QR 30 000، فإن عدد الحقائب التي يبيعها هو $\frac{4\,000}{159} < n < \frac{30\,000}{159}$ أو $25 < n < 189$ تقريبًا.
المدى: $\{p : -5250 \le p \le 14\,595\}$،
المجال هو $25 < n < 189$، إذن، المدى المنطقي لدالة الربح هو
$105(25) - 5\,250 < p < 105(189) - 5\,250$،
أو $-2\,625 < p < 14\,595$
$p(150) = 105(150) - 5250 = 10500$
الدالة متقطعة لأن المجال يتألف من أعداد كلية.

الجزء C
إذا باع 43 حقيبة، سيكون ربحه سالبًا لأن
$p(43) = \text{QR } 105(43) - \text{QR } 5\,250 = -\text{QR } 735$

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

الدرس 3-2
تحويل الدوال الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ تمثيل تحويلات الدوال الخطية بيانيًا عن طريق ضرب أو جمع قيم محددة من k إلى مدخلة أو مخرجة دالة.

✔ تفسير الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لدالة خطية واستعمالها لكتابة الدالة التي يمثّلها التمثيل البياني.

الفهم الأساس

يعمل تحويل الدالة على نقل كل نقطة في التمثيل البياني الخاص بها إلى موقع جديد. تؤدي إضافة k إلى مخرجة الدالة إلى إزاحة رأسية، وتؤدي إضافة k إلى مدخلة الدالة إلى إزاحة أفقية.

ضرب مخرجة الدالة في $k > 1$ يسبب تمددًا رأسيًا، ويؤدي ضرب مدخلة الدالة في $k > 1$ إلى تضيُّق أفقي.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال صيغة الدالة لتمثيل الدوال الخطية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تحديد تأثير k على التمثيل البياني لدالة خطية عن طريق استبدال $f(x)$ بالمقادير $f(kx)$, $kf(x)$, $f(x+k)$, $f(x)+k$ لقيم محددة من k.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تحديد العلاقة بين الدوال الخطية.

دقة

يركّز هذا الدرس على الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية.

- يفهم الطلاب أن استبدال $f(x)$ بالمقدار $f(x)+k$ أو بالمقدار $f(x+k)$ يؤدي إلى إزاحة رأسية أو أفقية فيما ينتج عن كل من $kf(x)$ أو $f(kx)$ تمدد أو تضيُّق.
- يستعمل الطلاب تمثيلًا بيانيًا لكتابة دالة خطية هي تحويل لدالة أخرى.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **أفقي** | *horizontal*
- **رأسي** | *vertical*

المصطلحات الجديدة

- **تحويل** | *transformation*
- **إزاحة** | *translation*

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب استذكار مفهوم التحويلات من دروس الهندسة. ناقش أنواع التحويلات التي يتذكرونها. [الانعكاس والدوران والإزاحة] ركز على مصطلح الإزاحة واطلب من الطلاب التفكير في كيفية تطبيق هذا التحويل الخاص على التمثيل البياني للدالة الخطية.

اطلب من الطلاب إكمال النشاط التالي.

1. إزاحة كل نقطة من التمثيل البياني إلى اليسار أو إلى اليمين تمثّل _____.
[إزاحة أفقية]

2. إزاحة كل نقطة من التمثيل البياني إلى أعلى أو إلى أسفل تمثّل _____.
[إزاحة رأسية]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.3.5 يمثّل بيانيًا صورة دالة خطية تحت تأثير تحويلات هندسية، ويصف تأثير التحويلات الهندسية على الدالة.

معايير ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية الكلية والأنماط في الرياضيات عندما يدركون أنه عندما تكون k موجبة، فإن إزاحة التمثيل البياني للدالة يكون إلى الأعلى مقدار k من الوحدات، وعندما تكون k سالبة، تكون إزاحة التمثيل البياني إلى الأسفل مقدار k من الوحدات.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يُجري الطلاب تعميمات عندما يدركون أن ضرب مخرجة دالة خطية f في k يُمدد / يضيّق تمثيلها البياني رأسيًا.

www.jnob-jo.com

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب كيف ترتبط التمثيلات البيانية والمعادلات لمستقيمين. هذا النشاط يهيئ الطلاب لتعلّم تحويلات الدوال الخطية.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بالتمثيل البياني للمستقيمين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : المستقيمان متوازيان.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما العلاقة بين نقطة على المستقيم f ونقطة لها نفس الإحداثي x على المستقيم g ؟

[الإحداثي y على المستقيم g أكبر بمقدار وحدتين.]

س: ما وجه الشبه و الإختلاف بين معادلتَي المستقيمين ؟

[للمعادلتين نفس الميل، المقطع y مختلف.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: انسخ التمثيلين البيانيين f و g. أضف التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x - 1$.
صِف أوجه المقارنة بين h وكل من f و g.

[تحقق من التمثيلات البيانية للطلاب. المقطع y للدالة h أصغر بوحدتين من المقطع y للدالة f وأصغر بأربع وحدات من المقطع y للدالة g. المقطع x للدالة h يقع على بعد وحدة واحدة إلى يمين المقطع x للدالة f ويقع على بعد وحدتين إلى يمين المقطع x للدالة g.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف تكتب معادلة الدالة n إذا كانت n تمثّل إزاحة للدالة g بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى ؟

[$n(x) = 2x + 6$، كل قيمة y تُزاح 3 وحدات إلى الأعلى:
$n(x) = (2x + 3) + 3$]

س: كيف تتغير قيم x من g إلى n بالنسبة إلى قيم y المناظرة لها ؟

[قيم x للدالة n هي إزاحة بمقدار 1.5 وحدة إلى يسار قيم x للدالة g عندما تكون قيم y للدالتين n و g هي نفسها.
مثال على ذلك: إذا كان $x = 2.5$، فإن $g(2.5) = 8$، وإذا كان $x = 1$،
فإن $n(1) = 8$]

س: هل تعتقد أنه يمكن كتابة معادلة مكافئة لمعادلة الدالة n تصف إزاحة الدالة g إلى اليسار ؟

[نعم، أضف 1.5 إلى الإحداثي x في الدالة g.
إذن، $n(x) = 2(x + 1.5) + 3 = 2x + 6$.]

عادات التفكير — استعمل مع **انقد واشرح**

عمّم هل تنطبق نفس الحجج الرياضية على معادلات أزواج أخرى من المستقيمات المتوازية ؟

[لا، لا تنطبق هذه القاعدة على زوج من المستقيمات المتوازية الأفقية أو الرأسية.]

كتاب الطالب، صفحة 61

2-3
تحويل الدوال الخطية
Transforming Linear Functions

أستطيع... تحويل الدوال الخطية.

معايير الدرس
9.3.5

المصطلحات
• تحويل transformation
• إزاحة translation

تطبيق

انقد واشرح

يقول عبدالله إن التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f بعد تحريك كل النقاط رأسيًا. في حين يقول حمد إن التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f بعد تحريك كل النقاط أفقيًا.

A. أعطِ حجة تدعم صحة قول عبدالله.

B. أعطِ حجة تدعم صحة قول حمد.

C. **ابحث عن العلاقات** ما الذي تعرفه عن المعادلات الخطية يمكن أن يدعم صحة قول أي منهما ؟

$g(x) = 2x - 3$ $f(x) = 2x + 1$

السؤال الأساس: كيف يؤثر تعديل المدخلة أو المخرجة لقاعدة دالة خطية على تحويل تمثيلها البياني ؟

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

سَجّل موقعا اثنين من صغار السلاحف البحرية وهما يزحفان على رمال الشاطئ، بنفس السرعة، نحو البحر. لكن السلحفاة A بدأت متقدمة بمسافة 2 ft عن نقطة انطلاق السلحفاة B.

نموذج من أعمال الطلاب

A. المقطع y للدالة f أقل بوحدتين من المقطع y للدالة g.

B. المقطع x للدالة f يبعد وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع x للدالة g.

C. يمكن كتابة المعادلات الخطية المتكافئة بطرق مختلفة، لذلك من الممكن أن يؤدي تحويل أفقي للدالة f وتحويل رأسي للدالة f إلى معادلة مكافئة لمعادلة الدالة g.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

قدّم للطلاب مفهوم تحويلات الدوال الخطية. وضّح لهم أن الثابت k المضاف إلى مدخلة أو مخرجة الدالة يؤدي إلى إزاحة التمثيل البياني للدالة أفقيًّا أو رأسيًّا. ضرب مدخلة أو مخرجة الدالة في ثابت يؤدي إلى تضيُّق التمثيل البياني للدالة أو تمدده.

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

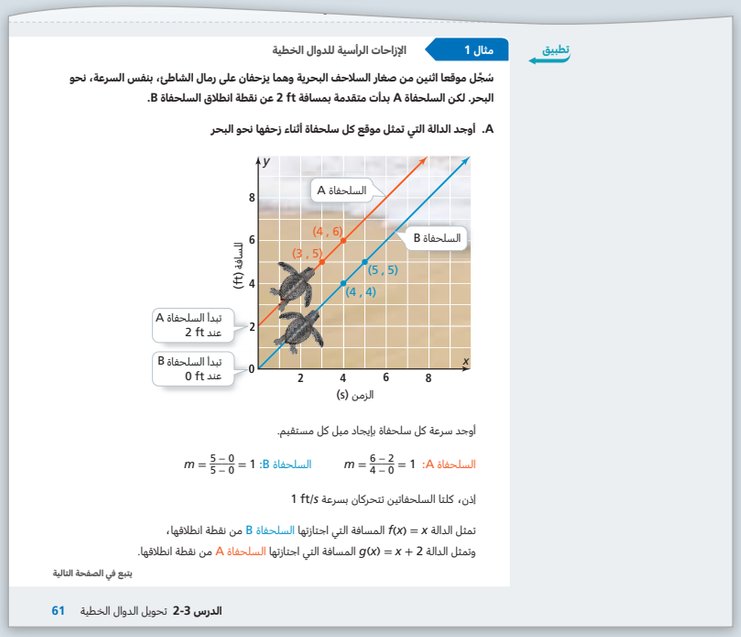
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا تعني إضافة الثابت k إلى مخرجة الدالة ؟

[يُضاف الثابت إلى قيمة y للدالة الأصلية.]

س: كيف تصف الإزاحة الرأسية مقدار وحدتين لموقع السلحفاة A على الشاطئ مقارنة بموقع السلحفاة B ؟

[سوف تكون السلحفاة A أقرب دائمًا إلى الماء بمترين مقارنةً بالسلحفاة B.]



تطبيق

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

سُجّل موقعا اثنين من صغار السلاحف البحرية وهما يزحفان على رمال الشاطئ، بنفس السرعة، نحو البحر. لكن السلحفاة A بدأت متقدمة بمسافة 2 ft عن نقطة انطلاق السلحفاة B.

A. أوجد الدالة التي تمثل موقع كل سلحفاة أثناء زحفها نحو البحر

أوجد سرعة كل سلحفاة بإيجاد ميل كل مستقيم.

السلحفاة A: $m = \frac{6-2}{4-0} = 1$ السلحفاة B: $m = \frac{5-0}{5-0} = 1$

إذن، كلتا السلحفاتين تتحركان بسرعة 1 ft/s

تمثل الدالة $f(x) = x$ المسافة التي اجتازتها السلحفاة B من نقطة انطلاقها،

وتمثل الدالة $g(x) = x + 2$ المسافة التي اجتازتها السلحفاة A من نقطة انطلاقها.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية 61

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. إزاحة 3 وحدات إلى الأسفل.
   b. إزاحة 1.5وحدة إلى الأعلى.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

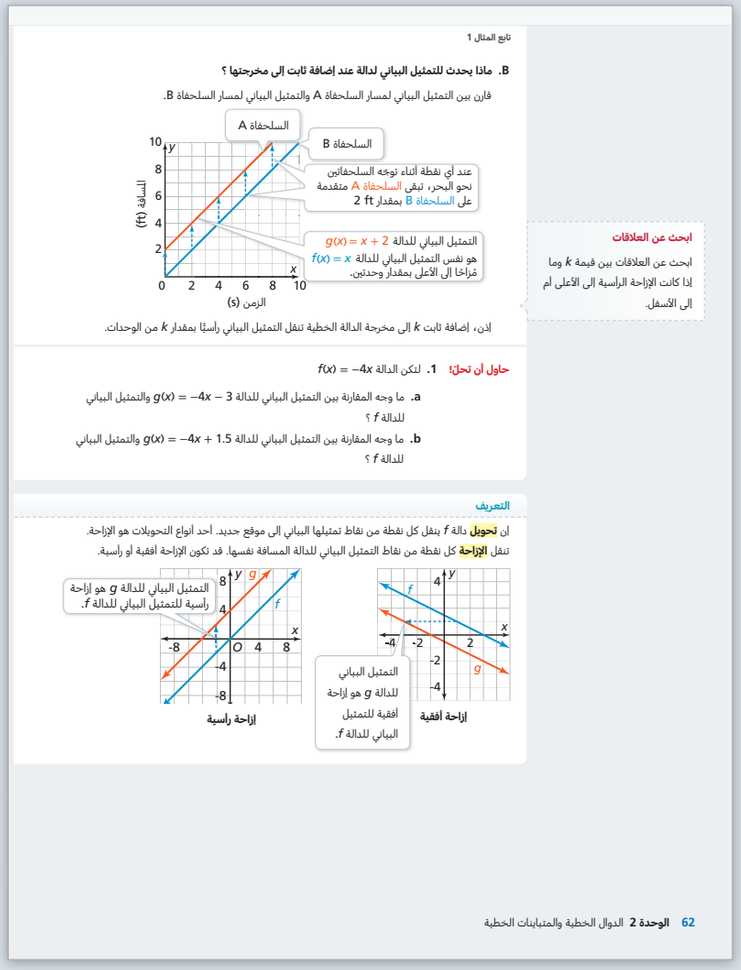
س: هل الميل السالب للدالة f يغير اتجاه إزاحة الدالة g ؟
[لا، قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الميل السالب لا يغير اتجاه الإزاحة. يعتمد الاتجاه كليًا على إشارة k.]

تعريف

طرح أسئلة هادفة

س: ما وجه الشبه بين الإزاحات الرأسية والإزاحات الأفقية ؟ ما وجه الاختلاف ؟
[كلاهما ينتج مستقيمات موازية للمستقيم الأصلي، ولكن تأتي النتائج من أنواع مختلفة من الحركة.]

س: هل يمكنك تحديد ما إذا كان للمستقيم إزاحة رأسية أم أفقية بمجرد النظر إلى التمثيل البياني ؟
[لا، يمكن اعتبار المستقيم نفسه إما إزاحة رأسية أو أفقية لمستقيم معيّن اعتمادًا على صيغة معادلة الإزاحة.]



تابع المثال 1

B. ماذا يحدث للتمثيل البياني لدالة عند إضافة ثابت إلى مخرجتها ؟

قارن بين التمثيل البياني لمسار السلحفاة A والتمثيل البياني لمسار السلحفاة B.

إذن، إضافة ثابت k إلى مخرجة الدالة الخطية تنقل التمثيل البياني رأسيًا بمقدار k من الوحدات.

ابحث عن العلاقات
ابحث عن العلاقات بين قيمة k وما إذا كانت الإزاحة الرأسية إلى الأعلى أم إلى الأسفل.

حاول أن تحلّ! 1. لتكن الدالة $f(x) = -4x$

a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = -4x - 3$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = -4x + 1.5$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

التعريف

إن **تحويل** دالة f ينقل كل نقطة من نقاط تمثيلها البياني إلى موقع جديد. أحد أنواع التحويلات هو الإزاحة.
تنقل **الإزاحة** كل نقطة من نقاط التمثيل البياني للدالة المسافة نفسها. قد تكون الإزاحة أفقية أو رأسية.

62 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 استعمل هذا النشاط لتبسيط المثال إلى خطوات ذات صعوبة متصاعدة.

- لكل من السلحفاتين A و B، اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تنمذج مسارها.

1. معادلة مسار السلحفاة B [$y = x$]
2. معادلة مسار السلحفاة A [$y = x + 2$]

س: ما وجه الشبه في المعادلتين ؟
[لديهما نفس الميل.]

س: ما وجه الاختلاف بين المعادلتين ؟
[المقطعان y فيهما مختلفان.]

س: ماذا يعني أن المقطع y لمعادلة مسار السلحفاة A يساوي 2 بينما المقطع y لمعادلة مسار السلحفاة B يساوي 0 ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبدأ السلحفاة A من موقع أقرب إلى الماء بمترين مقارنة بالموقع الذي تبدأ منه السلحفاة B.]

س: ماذا يعني أن كلا المستقيمين لهما نفس الميل ؟
[تتحرك كلتا السلحفاتين بنفس السرعة.]

س: إذا كانت كلتا السلحفاتين تتحرك بنفس السرعة، فماذا تعرف عن المسافة بين السلحفاتين ؟
[المسافة بين السلحفاتين ثابتة.]

www.jnob-jo.com

مثال 2 الإزاحات الأفقية للدوال الخطية

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ماذا تلاحظ عن قيم $f(x)$ و $g(x)$ ؟

[بالنسبة لقيم x المتناظرة، فإن قيمة $g(x)$ تساوي 10 وحدات أكثر من قيمة $f(x)$.]

س: ماذا تعني إضافة ثابت إلى مدخلة الدالة ؟

[يُضاف الثابت إلى x قبل حساب قيمة الدالة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** نحصل على الدالة g بإزاحة الدالة f بمقدار 4 وحدات إلى اليمين

b. نحصل على الدالة g بإزاحة الدالة f بمقدار 9.5 وحدات إلى اليسار

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

استعمل الأدوات المناسبة كيف يساعدك النظر إلى جدول القيم في فهم الإزاحات ؟

[إذا قارنت قيم y للدالة الأصلية مع قيم y للدالة المحولة، يمكنك تحديد التحويل الذي تم إجراؤه.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يعتقد بعض الطلاب أنه عند إضافة عدد موجب إلى مدخلة المعادلة، فإن التمثيل البياني للمستقيم يجب أن يُزاح إلى اليمين. إذا كان k موجبًا، فإن قيمة y تزداد ويُزاح التمثيل البياني للدالة إلى اليسار.

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 الإزاحات الأفقية للدوال الخطية

كيف تؤثر إضافة ثابت k إلى مدخلة الدالة الخطية في تمثيلها البياني ؟

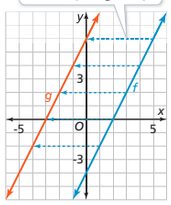
لنأخذ التمثيل البياني لكل من الدالتين $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = 2(x + 5) - 4$.

الخطوة 1 أنشئ جدولًا يضم قيم $f(x) = 2x - 4$ وقيم $g(x) = 2(x + 5) - 4$

x	$f(x) = 2x - 4$	$x + 5$	$g(x) = 2(x + 5) - 4$
−4	−12	1	$2(1) - 4 = -2$
−3	−10	2	$2(2) - 4 = 0$
−2	−8	3	$2(3) - 4 = 2$
0	−4	5	$2(5) - 4 = 6$
1	−2	6	$2(6) - 4 = 8$
2	0	7	$2(7) - 4 = 10$
3	2	8	$2(8) - 4 = 12$

الخطوة 2 مثّل بيانيًا الدالتين $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = 2(x + 5) - 4$.

التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f مزاحًا 5 وحدات إلى اليسار.



إذن، إضافة ثابت k إلى مدخلة الدالة الخطية تنقل التمثيل البياني أفقيًا بمقدار k من الوحدات.

خطأ شائع

قد تعتقد أن قيمة k الموجبة في الدالة $g(x) = 2(x + k) - 4$ تنقل التمثيل البياني في اتجاه موجب، أي إلى اليمين. غير أن قيمة k الموجبة تنقل التمثيل البياني إلى اليسار.

حاول أن تحل! 2. لتكن الدالة $f(x) = 3x + 7$

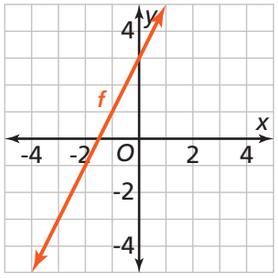
a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 3(x - 4) + 7$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 3(x + 9.5) + 7$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية 63

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطرح أمام الطلاب تحديًا تطلب فيه منهم كتابة معادلة لتحويل محدّد.



س: كيف يمكنك تحويل f لتحصل على مستقيم متعامد على f ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قم بإجراء تمدد أو تضيّق للمستقيم حول أحد المقطعين x و y.]

س: اكتب الدالة والتحويل الرأسي للدالة.

[الدالة : $f(x) = 2x + 3$، التحويل : $g(x) = -\frac{1}{4}f(x)$ أو $g(x) = f\left(-\frac{1}{4}x\right)$]

www.jnob-jo.com

مثال 3 تمدد وتضيّق الدوال الخطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلين البيانيين للدالتين h و f ؟ ما أوجه الاختلاف ؟
[لهما نفس المقطع x، ولكن يختلفان بالميل والمقطع y.]

س: عندما تكون قيمة الدالة g مكافئة لناتج ضرب الدالة f في الثابت k، هل يكون للتمثيلين البيانيين للدالتين f و g دائمًا نفس المقطع x ؟
[نعم، قيمة y المناظرة للمقطع x في الدالة f تساوي 0، بغض النظر عن قيمة k، $0(k) = 0$]

س: ما الذي يعنيه القول إنّ المقطع y يتم تغييره بمعامل مقداره 4 ؟
[المقطع y للدالة f يساوي 1، لذا، المقطع y للدالة g يساوي 1×4 أو 4]

الجزء B

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلين البيانيين للدالتين h و f ؟ ما أوجه الاختلاف ؟
[لهما نفس المقطع y، ولكن يختلفان في الميل والمقطع x.]

س: عندما تكون قيمة الدالة g مكافئة لناتج ضرب مدخلة الدالة f في الثابت k هل يكون للتمثيلين البيانيين دائمًا نفس المقطع y ؟
[نعم، قيمة x المناظرة للمقطع y في الدالة f تساوي 0، بغض النظر عن قيمة k، $0(k) + 1 = 1$]

س: ما الذي يعنيه القول إن الميل يتغير بمعامل مقداره 3 ؟
[ميل الدالة f يساوي 1، لذا فإن ميل الدالة g يساوي ناتج ضرب 3 في 1، أي يساوي 3]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. **a.** هو تضيُّق رأسي، مع تغيير الميل والمقطع y بمعامل مقداره 0.25
b. هو تمدد أفقي، مع تغيير الميل بمعامل مقداره 0.5

مثال 3 تمدد وتضيّق الدوال الخطية

A. كيف يؤثر ضرب مخرجة دالة خطية في ثابت على تمثيلها البياني ؟

قارن بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 1$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x + 1)$.

x	$f(x) = x + 1$	$g(x) = 4(x + 1)$
−3	−2	−8
−2	−1	−4
−1	0	0
0	1	4
1	2	8

التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f بمعامل يساوي 4، وتتغير قيمة كل من الميل والمقطع y بمقدار نفس المعامل.

يؤثر ضرب مخرجة دالة خطية f في عدد حقيقي k في تمثيلها البياني رأسيًا.

إذا كان $|k| > 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تمددًا رأسيًا**.

إذا كان $0 < |k| < 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تضيّقًا رأسيًا**.

B. كيف يؤثر ضرب مدخلة دالة خطية في ثابت على تمثيلها البياني ؟

قارن بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 1$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = (3x) + 1$.

x	$f(x) = x + 1$	$g(x) = (3x) + 1$
0	1	1
1	2	4
2	3	7
3	4	10
6	7	19

التمثيل البياني للدالة g هو تضيّق أفقي للتمثيل البياني للدالة f بمعامل يساوي 3 (لكل قيمة y، فإن قيمة x للنقطة التي تقع على التمثيل البياني للدالة g تساوي $\frac{1}{3}$ قيمة x لنظيرتها على التمثيل البياني للدالة f)، ويتغير الميل بمقدار نفس المعامل، لكن المقطع y لا يتغير.

يؤثر ضرب مدخلة دالة خطية f في عدد حقيقي k في تمثيلها البياني أفقيًا.

إذا كان $|k| > 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تضيّقًا أفقيًا**.

إذا كان $0 < |k| < 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تمددًا أفقيًا**.

حاول أن تحلّ! 3. لتكن الدالة $f(x) = x - 2$

a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 0.25(x - 2)$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 0.5x - 2$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

عمّم
هل صحيح دائمًا أنه لأي دالة خطية f، فإن التمثيل البياني لكل من الدالتين f و kf يختلفان في قيمة المقطع y ؟

64 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 3**

القراءة **مستوى 1** إقرأ المثال وراجع معاني المصطلحات مدخلة ومخرجة وتمدد لمساعدة الطلاب على فهم المثال.

س: ما العلاقة بين المصطلحين مدخلة ومخرجة ؟
[المدخلات هي قيم يتم تعويضها في دالة عن x للحصول على مخرجة $f(x)$.]

س: أعط مرادفاً وضداً لكلمة تمدد.
[مطّ، زمٌّ.]

س: أعط مرادفاً وضداً لكلمة تضيّق.
[ضغط، توسُّع.]

الكتابة **مستوى 2** اعرض على السبورة جدولاً من صفّين وعمودين.

	kx	$kf(x)$
$k < 1$	تمدد أفقي	تضيّق رأسي
$k > 1$	تضيّق أفقي	تمدد رأسي

إملأ خلايا الجدول بعبارات تضيّق رأسي، تضيّق أفقي، تمدد رأسي، تمدد أفقي. ثم اطلب من الطلاب استعمال الجدول السابق لكتابة إجابات الأسئلة الآتية.

س: $f(x) = 3x + 4$ و $g(x) = 3\left(\frac{1}{4}x\right) + 4$، ما نوع التحويل g ؟
[تمدد أفقي.]

س: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ و $h(x) = 5\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$، ما نوع التحويل h ؟
[تمدد رأسي.]

التحدث **مستوى 3** في الجزء B من المثال 3، انظر إلى الجملة التي تبدأ ب "التمثيل البياني للدالة g". اطلب من الطلاب تبادل الأدوار في توضيح كيفية رؤية التغير في الميل (وعدم التغير في المقطع y) في التمثيل البياني وفي المعادلة.

س: ما المعامل k في المثال ؟
[3]

س: استعمل التمثيل البياني لتوضيح كيفية تغير الميل بالمعامل.
[ميل الدالة f هو التغير وحدة واحدة إلى الأعلى ثم وحدة واحدة إلى اليمين. أما ميل الدالة g هو التغير 3 وحدات إلى الأعلى ثم وحدة واحدة إلى اليمين. إذن، ينحدر ميل الدالة g بمقدار ثلاث أمثال ميل الدالة f.]

س: استعمل المعادلة لتوضح أن المقطع y لا يتغير.
[إن ضرب أي عدد بالعدد 0 يساوي 0، لذا فإن ضرب x بالعدد 3 يعطي 0 عندما يساوي x العدد 0]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم تحويلات الدوال الخطية

س: لماذا يكون k دائمًا أكبر من الصفر في أمثلة التمدد والتضيّق ؟

[إذا كان k أصغر من الصفر، فإن الضرب في قيمة سالبة يغير ميل المستقيم.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 7 قد يشير بعض الطلاب إلى أن التمثيلات البيانية لها نفس المقطع y. ذكّر الطلاب بأنه عندما يتم ضرب المخرجة في k فإن المقاطع x تبقى هي نفسها، ولكن يتم تغيير المقطع y بالمعامل k.

الإجابات

1. يساعدك تحديد التحويلات لدالة خطية على تحديد مقدار إزاحة التمثيل البياني للمستقيم أفقيًا أو رأسيًا وما إذا كان الميل والمقطع y للتمثيل البياني سيتغير أم لا.
2. المستقيم له نفس الميل، أُزيح فقط رأسيًا أو أفقيًا.
3. عند إضافة عدد إلى المعادلة $y = f(x)$، فإنه يتم إزاحة المستقيم رأسيًا، ولكن عندما تتم إضافة عدد إلى x، فإنه يتم إزاحة المستقيم أفقيًا.
4. يغيّر ضرب مخرجة دالة خطية في الثابت k كل من الميل والمقطع y لأنه يتم ضرب كل من الحد x والحد الثابت في k. عند ضرب المدخلة في الثابت k فإنه يتم فقط ضرب الحد x في k، لذا فإن المقطع y لا يتغير.
5. إزاحة الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليسار لنحصل على الدالة g.
6. إزاحة الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى لنحصل على الدالة g.
7. يتم تغيير الميل والمقطع y بمعامل مقداره 4
8. يتم تغيير الميل بمعامل مقداره 4، ولا يتغير المقطع y.
9. يتم إزاحة التمثيل البياني إلى الأعلى 300 وحدة.

ملخص المفهوم تحويلات الدوال الخطية

	الإزاحات	التمدد والتضيّق
لفظيًا	الإزاحات تحرك كل نقاط التمثيل البياني المسافة نفسها أفقيًا أو رأسيًا.	يؤثر التمدد والتضيّق في التمثيل البياني أفقيًا أو رأسيًا.
جبريًا	**إزاحة رأسية بمقدار k وحدة:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) + k$ هو إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. **إزاحة أفقية بمقدار k وحدة:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = -2(x + k) + 2$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -2x + 2$.	**تمدد رأسي بمعامل k:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = k(-x + 2)$ هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -x + 2$ عندما $\lvert k\rvert > 1$. **تضيّق أفقي بمعامل k:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = k(-x) + 2$ هو تضيّق أفقي للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -x + 2$ عندما $\lvert k\rvert > 1$.
بيانيًا		

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يؤثر تعديل المدخلة أو المخرجة لقاعدة دالة خطية على تحويل تمثيلها البياني ؟
2. المصطلحات لماذا تُعدّ إضافة ثابت k إلى مخرجة الدالة أو طرحه منها إزاحة للدالة ؟
3. حلّل الخطأ إن إضافة عدد إلى دالة خطية أو طرحه منها يحرّك المستقيم دائمًا إما إلى أعلى أو إلى أسفل. بيّن الخطأ في هذا التبرير.
4. استعمل البنية لماذا ضرب مدخلة دالة خطية في عدد يغير الميل فقط، بينما ضرب المخرجة في عدد يغيّر كلًّا من الميل والمقطع y ؟

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، لتكن $f(x) = 4x + 1$، صِف وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f.

5. $g(x) = 4(x + 3) + 1$ 6. $g(x) = (4x + 1) + 3$

في التمرينين 7 و 8، لتكن $f(x) = x + 2$، صِف كيف يؤثر $k = 4$ في الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g مقارنةً بالتمثيل البياني للدالة f.

7. $g(x) = 4(x + 2)$ 8. $g(x) = (4x) + 2$

9. تنمذج الدالة $f(x) = 30x$ الحد الأدنى لراتب كل موظف في شركة بدلالة عدد ساعات العمل (x). قررت هذه الشركة منح كل موظف مكافأة قيمتها 300 QR عند توقيع العقد. كيف تؤثر إضافة هذا المبلغ في التمثيل البياني لراتب الموظف ؟

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية 65

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10–24, 26, 28, 30–37	10–16, 19–21, 23–37

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	11, 15, 16, 27, 29, 35	1
	14	3
2	17, 18, 28, 30	1
	12, 33	2
3	19–26, 31, 32, 36, 37	1
	10, 13	2
	14, 34	3

الإجابات

10. التحويل هو تمدد رأسي معامله 4؛ $4f(x)$

11. لا تغير الإزاحات ميل المستقيم، لذلك يكون المستقيم الأصلي والمستقيم الذي تمّت إزاحته متوازيين دائمًا.

12. رسم الطالب g إلى اليسار من f مقدار 4 وحدات. يجب عليه أن يرسم g إلى اليمين من f مقدار 4 وحدات.

13. $h(x), h(x) = 2x - 6$ تساوي $f(4x - 6)$.

14.

	التحويل	الوصف	الدالة
a.	$f(x) - 5$	التمثيل البياني للدالة f تمت إزاحته بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل.	$2x - 4$
b.	$g(x) + 4$	التمثيل البياني للدالة g تمت إزاحته بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى.	$\frac{1}{3}x + 6$
c.	$3g(x)$	تم تغيير التمثيل البياني للدالة g مع الميل والمقطع y بمعامل تمدد رأسي مقداره 3	$x + 6$
d.	$\frac{1}{2}f(x)$	تم تغيير التمثيل البياني للدالة f مع الميل والمقطع y بمعامل تضيق رأسي مقداره $\frac{1}{2}$	$x + \frac{1}{2}$

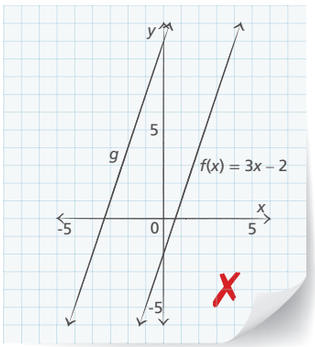
تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. **بزر منطقيًّا** صِف تحويل الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ الذي يجعل الميل يساوي 2 والمقطع y يكون -8

11. **ابحث عن العلاقات** لماذا تنتج عن إزاحات التمثيلات البيانية للدوال الخطية مستقيمات متوازية ؟

12. **حلّل الخطأ** رسم طالب التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3x - 2$، ثم رسم في نفس المستوى الإحداثي التمثيل البياني للدالة g التي هي تحويل للدالة f وذلك بطرح 4 من مدخلة f.
بيّن خطأ الطالب في رسمه التمثيل البياني للدالة g وصحّحه.



13. **ابحث عن العلاقات** لتكن الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$، افترض أنك طرحت 6 من مدخلة f لإنشاء دالة جديدة g، ثم ضربت مدخلة g في 4 لإنشاء دالة h. أوجد المعادلة التي تمثّل h.

14. **استعمل البنية** صِف كل تحويل، ثم اكتب معادلة دالة التحويل.

$f(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$

	التحويل	الوصف	الدالة
a.	$f(x) - 5$		
b.	$g(x) + 4$		
c.	$3g(x)$		
d.	$\frac{1}{2}f(x)$		

تدرَّب

في التمارين 15-22، لتكن $f(x) = 3x + 5$، صِف كيف تقارن بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

15. $g(x) = (3x + 5) + 8$ $\qquad$ **16.** $g(x) = (3x + 5) - 4$

17. $g(x) = 3(x + 10) + 5$ $\qquad$ **18.** $g(x) = 3(x - 1) + 5$

19. $g(x) = 3(0.1x) + 5$ $\qquad$ **20.** $g(x) = 5(3x + 5)$

21. $g(x) = 3(2x) + 5$ $\qquad$ **22.** $g(x) = 8(3x + 5)$

في التمارين 23-28، لتكن $f(x) = 2x + 3$، صِف كيف تؤثر قيمة k على الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g مقارنةً بالتمثيل البياني للدالة f. انظر المثال 3

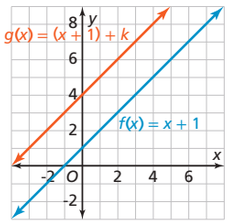
23. $g(x) = 3(2x + 3)$ $\qquad$ **24.** $g(x) = 2(0.5x) + 3$

25. $g(x) = \frac{1}{6}(2x + 3)$ $\qquad$ **26.** $g(x) = 2\left(\frac{1}{8}\right)x + 3$

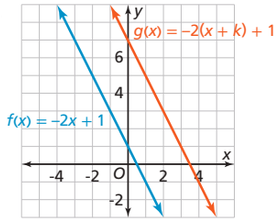
27. $g(x) = (2x + 3) - 3$ $\qquad$ **28.** $g(x) = 2(x + 0.5) + 3$

في التمرينين 29 و 30، أوجد قيمة k في الدالة g. ثم صِف التمثيل البياني للدالة g باعتبارها تحويلًا للتمثيل البياني للدالة f.

29.



30.



15. 8 وحدات إلى الأعلى

16. 4 وحدات إلى الأسفل

17. 10 وحدات إلى اليسار

18. وحدة واحدة إلى اليمين

19. تمدد أفقي بمعامل مقداره 0.1

20. تمدد رأسي بمعامل مقداره 5

21. تضيُّق أفقي بمعامل مقداره 2

22. تمدد رأسي بمعامل مقداره 8

23. يتغيّر الميل والمقطع y بمعامل مقداره 3

24. يتغير الميل بمعامل مقداره 0.5، لم يتغير المقطع y.

25. يتغير الميل والمقطع y بمعامل مقداره $\frac{1}{6}$

26. يتغيّر الميل بمعامل مقداره $\frac{1}{8}$ ، لم يتغير المقطع y.

27. لم يتغيّر الميل، ينقص المقطع y مقدار 3 وحدات.

28. لم يتغيّر الميل، يزداد المقطع y وحدة واحدة.

29. $k = 3$، إزاحة رأسيّة إلى الأعلى.

30. $k = 3$، إزاحة أفقية إلى جهة اليمين.

www.jnob-jo.com

الإجابات

31. **a.** $f(x) = 160x + 400,$
$g(x) = 320x + 400$

b. ميل g يساوي ضعف ميل f، والمقطع y في g هو نفس المقطع y في f.

32. كلاهما إجابته صحيحة؛
بما أن $m = 1$، فإن $g(x) = x + b + k$.
بالتجميع نجد أن $g(x) = (x + k) + b$.
أي أننا نحصل على الإجابة نفسها.

33. **a.** إزاحة إلى الأسفل.
b. إزاحة إلى اليمين.
c. يتغيّر الميل ويصبح موجبًا والمقطع y بمعامل مقداره k.
d. يصبح الميل موجبًا.

34. A

35. B

36. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1 , 7)$ و $(2.5 , 1)$. معادلة هذا المستقيم هي $y = -4x + 11$.

المعادلة	التحويل
$y = -4x + 6$	إزاحة 5 وحدات إلى الأسفل
$y = -12x + 33$	تمدد رأسي بمعامل مقداره 3
$y = -4x + 3$	نموذج إجابة: إزاحة 8 وحدات إلى الأسفل

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

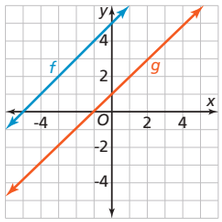
31. **روابط في الرياضيات** التكلفة الإجمالية لاستئجار جرار زراعي لفترة زمنية بالساعات تساوي قيمة استئجاره لهذه الفترة مضافًا إليها مبلغًا للتأمين قدره QR 400.

32. .

a. تمثّل الدالة f التكلفة الإجمالية لاستئجار الجرار.
وتمثل الدالة g التكلفة إذا تمت مضاعفة الإيجار في الساعة.
اكتب كلتا الدالتين.

b. ما وجه المقارنة بين الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g والميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة f ؟

33. **ابن الحجج الرياضية** قال جابر إن التمثيل البياني للدالة g أدناه يمثّل إزاحة رأسية للدالة $f(x) = x + 1$ بمقدار 4 وحدات. في حين قال صالح إن التمثيل البياني للدالة g يمثل إزاحة أفقية للدالة f بمقدار 4 وحدات. أيّهما على صواب ؟ وضّح إجابتك.



34. **مهارات التفكير العليا** التمثيل البياني لدالة خطية f له ميل سالب. صِف تأثير كل تحويل مما يلي في التمثيل البياني للدالة إذا كانت قيمة $k < 0$.

a. إضافة k إلى مخرجات f
b. إضافة k إلى مدخلات f
c. ضرب مخرجات f في k
d. ضرب مدخلات f في k

تدرَّب على اختبار

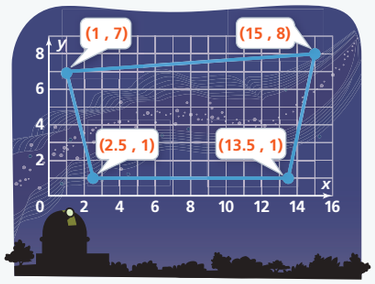
35. كيف نتج التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{2}{5}x + 6$ من تحوّل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2}{5}x$ ؟

Ⓐ تحرك 6 وحدات إلى الأعلى
Ⓑ تحرك 6 وحدات إلى الأسفل
Ⓒ تحرك 6 وحدات إلى اليسار
Ⓓ تحرك 6 وحدات إلى اليمين

36. **اختبار SAT/ACT** أيّ من العبارات التالية تصف أوجه الاختلاف بين التمثيل البياني للدالة f والتمثيل البياني لمخرجة الدالة f مضروبة في 3 ؟

Ⓐ يتغير الميل بمعامل يساوي 3، ولا يتغير المقطع y
Ⓑ يتغير الميل والمقطع y بمعامل يساوي 3
Ⓒ لا يتغير الميل، ويتغير المقطع y بمعامل يساوي 3
Ⓓ الميل والمقطع y لا يتغيران.

36. **مهمة أدائية** يستعمل أعضاء نادي العلوم التحويلات على شبكات الإحداثيات لتتبع حركة الكوكبات النجمية في السماء.
اختر ضلعًا من أضلاع الكوكبة النجمية الموضّحة أدناه ثم حدّد سلسلة من التحويلات تريد تطبيقها على هذا الضلع لتحريكه.



انسخ الجدول وأكمله لتسجيل التحويلات ودوال هذه التحويلات.

الدالة	التحويل

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 2-4

المتباينات الخطية ذات المتغيرين

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ تمثيل حلول متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًا.

✔ تمثيل قيود المتباينات وتفسير الحلول كخيارات قابلة أو غير قابلة للتطبيق في سياق النمذجة.

الفهم الأساس

يوضح التمثيل البياني للمتباينة ذات متغيرين الحلول في صورة نصف مستوى يقع فوق المستقيم الحدودي أو تحته. يكون المستقيم الحدودي جزءًا من الحل عندما يكون رمز المتباينة ≤ أو ≥ ولا يكون جزءًا من الحل عندما يكون رمز المتباينة < أو >.

ترابط

في الوحدة السابقة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال صيغة الميل والمقطع لتمثيل معادلة خطية بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تمثيل متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًا لمساعدتهم على تحديد حلول المتباينة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- حل أنظمة متباينات خطية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن حل المتباينة هو نصف مستوى، وأن الحل يتضمن المستقيم الحدودي أو لا يتضمنه بحسب رمز المتباينة المستعمل.
- يمثل الطلاب المتباينات بيانيًا لإيجاد الحلول لمسائل الربح وتفسير الحل في السياق.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **معادلة خطية ذات متغيرين** | *linear equation in two variables*

المصطلحات الجديدة

- **متباينة خطية ذات متغيرين** | *linear inequality in two variables*
- **حل متباينة ذات متغيرين** | *solution of an inequality in two variables*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح "معادلة خطية ذات متغيرين"، واطلب إلى الطلاب إعطاء مثال عليه، ثم اطلب إليهم استبدال رمز المعادلة برمز المتباينة. وضّح لهم أن المعادلة قد أصبحت الآن متباينة خطية ذات متغيرين. اطلب إلى الطلاب تصنيف كل مما يأتي إلى معادلة خطية بمتغير واحد، أو معادلة خطية ذات متغيرين، أو متباينة خطية بمتغير واحد، أو متباينة خطية ذات متغيرين.

$x + 2 = 10$ [**معادلة خطية بمتغير واحد**]

$y > 2x + 3$ [**متباينة خطية ذات متغيرين**]

$3x - 5 = y$ [**معادلة خطية ذات متغيرين**]

$x - 10 < 3$ [**متباينة خطية بمتغير واحد**]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.2.4 يمثّل بيانيًا منطقة الحل لمتباينة خطية، ومنطقة الحل لمتباينات خطية آنية.

تطبيق ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية واستعملها

يرى الطلاب أن التمثيل البياني للمتباينة يتألف من مستقيم ونصف مستوى يقع فوق المستقيم أو تحته.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يلاحظ الطلاب البنية في وضعيات مشابهة عندما يميزون أن التظليل يقع فوق المستقيم عندما يكون رمز المتباينات < أو ≥ وتحت المستقيم عندما يكون رمز المتباينات > أو ≤.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يتعرف الطلاب على استعمال المتباينات الخطية لنمذجة حلول للمسائل. يساعد ذلك في تحضير الطلاب على تعلم كيفية حل متباينات خطية ذات متغيرين باستعمال التمثيلات البيانية.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تعرف من المعلومات المعطاة ؟

[الارتفاع الأقصى للمقطورة مع حمولتها وارتفاع المقطورة من دون الحمولة.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكن أن يكون للمسألة أكثر من حل ؟

[أبعاد حمولات المقطورة لا تكون متساوية دائمًا. هناك أكثر من ارتفاع ممكن طالما أنه أقل من 2.65 m]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ماذا يمكن أن تفعل بنموذجك لتبيّن عددًا من الحلول الممكنة ؟

[مثّل المتباينة بيانيًا في مستوى إحداثي.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يمكنك استعمال نفس نوع النموذج في حال كانت لديك قيمتان مجهولتان ؟

[نعم؛ يمكنك استعمال المتباينات لإيجاد حلول متباينات ذات المتغيرين. القيم x والقيم y التي تحقق المتباينة الخطية ستكون حلاً للمسألة. غالبًا ما تستعمل طريقة التمثيل البياني لإيجاد هذه الحلول.]

عادات التفكير استعمل مع **نمذج وناقش**

فكّر وثابر في الحل إذا نُقلت الحمولة إلى مقطورة مسطحة أخرى ارتفاعها الأقصى 3.5 m كم يجب أن يكون ارتفاع المقطورة المسطحة الجديدة لئلا يتعدى ارتفاع المقطورة والحمولة معًا الارتفاع الكلي ؟

[**يجب أن يكون الارتفاع أصغر من أو يساوي 3.5 m**]

كتاب الطالب، صفحة 69

نمذج وناقش

2-4
المتباينات الخطية ذات المتغيرين
Linear Inequalities in Two Variables

استطيع... تمثيل حلول متباينة خطية ذات متغيرين بيانيًا.

معايير الدرس
9.2.4

المصطلحات
- متباينة خطية ذات متغيرين linear inequality in two variables

يبلغ الارتفاع الأقصى المسموح به لمقطورة مسطحة مع حمولتها 4 أمتار و 15 سنتيمترًا، تبيّن الصورة المجاورة ارتفاع المقطورة من دون الحمولة. فما الارتفاعات الممكنة لحمولة المقطورة ؟

1.5 m

A. ما نوع النموذج الذي يمكن أن يمثّل هذا الموقف ؟ وضّح إجابتك.

B. هل بإمكان النموذج الذي اخترته أن يوضّح كل الارتفاعات الممكنة للحمولة دون تجاوز الارتفاع الأقصى المسموح به ؟ وضّح إجابتك.

C. **برّر منطقيًا** فسّر حلول النموذج. ما عدد هذه الحلول ؟ وضّح إجابتك.

نموذج من أعمال الطلاب

A. يمكن استعمال متباينة لنمذجة الحالة لأن هناك عدة ارتفاعات ممكنة لحمولة المقطورة.

B. كلا، تعطي المتباينة الواحدة كل الارتفاعات الممكنة من دون حد أقصى.

C. يمكن أن يبلغ ارتفاع حمولة المقطورة 2.65 أمتار؛ وبالتالي عدد الحمولات الممكنة غير منتهٍ؛ أي قياس أصغر من أو يساوي 2.65 أمتار؛ يحقق المتباينة.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على كيفية رسم التمثيلات البيانية للمتباينات الخطية ذات المتغيرين.
ذكرهم أن التمثيل البياني لمستقيم حدودي لمتباينة يشبه التمثيل البياني لمعادلة مستقيم.
يساعد ذلك الطلاب على فهم كيفية تمثيل متباينة خطية بيانيًا بهدف تحديد حلول المتباينة.

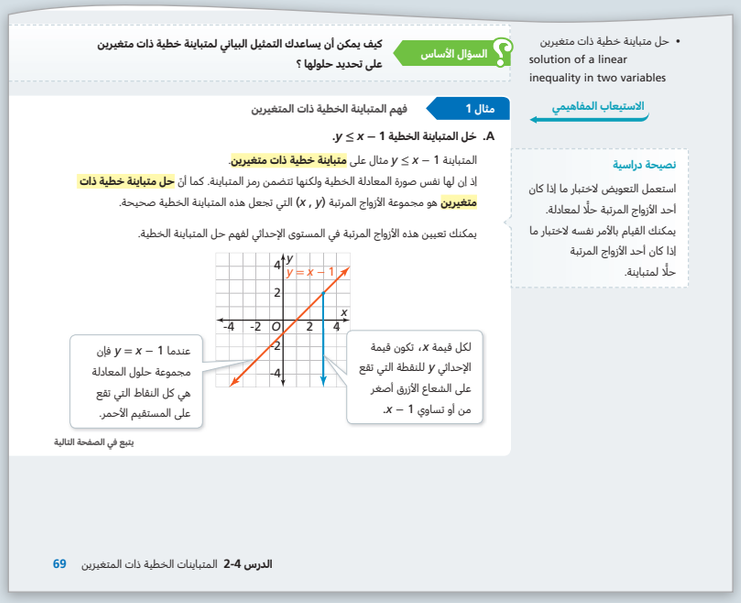
مثال 1 فهم المتباينة الخطية ذات المتغيرين

طرح أسئلة هادفة

الجزء A

س: ما أوجه الاختلاف بين التمثيلين البيانيين للمتباينتين الخطيتين في الجزئين A و B ؟
[يحتوي التمثيل البياني في الجزء A على مستقيم متصل مع تظليل نصف المستوى الواقع تحت المستقيم، في حين يحتوي التمثيل البياني في الجزء B على مستقيم متقطع مع تظليل النصف الواقع فوق المستقيم.]

س: ماذا تعرف عن حلول المتباينة الخطية من التمثيل البياني في الجزء A ؟
[يتضمن نصف المستوى المظلل والمستقيم المتصل كل النقاط التي تشكل حلولًا للمتباينة الخطية.]



• حل متباينة خطية ذات متغيرين
solution of a linear inequality in two variables

السؤال الأساس
كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين على تحديد حلولها ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 فهم المتباينة الخطية ذات المتغيرين

A. حل المتباينة الخطية $y \le x - 1$.

المتباينة $y \le x - 1$ مثال على **متباينة خطية ذات متغيرين**.
إذ إن لها نفس صورة المعادلة الخطية ولكنها تتضمن رمز المتباينة. كما أن **حل متباينة خطية ذات متغيرين** هو مجموعة الأزواج المرتبة (x , y) التي تجعل هذه المتباينة الخطية صحيحة.

يمكنك تعيين هذه الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي لفهم حل المتباينة الخطية.

لكل قيمة x، تكون قيمة الإحداثي y للنقطة التي تقع على الشعاع الأزرق أصغر من أو تساوي $x - 1$.

عندما $y = x - 1$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي كل النقاط التي تقع على المستقيم الأحمر.

نصيحة دراسية
استعمل التعويض لاختبار ما إذا كان أحد الأزواج المرتبة حلًا لمعادلة.
يمكنك القيام بالأمر نفسه لاختبار ما إذا كان أحد الأزواج المرتبة حلًا لمتباينة.

بتبع في الصفحة التالية

الدرس 2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين 69

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

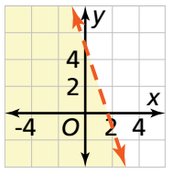
الجزء B

س: ماذا تعرف عن حلول المتباينة الخطية من التمثيل البياني في الجزء B ؟

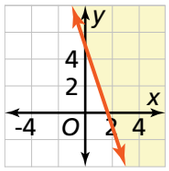
[يتضمن نصف المستوى المظلل كل النقاط التي تشكل حلولًا للمتباينة الخطية. حلول المتباينة الخطية لا تتضمن النقاط الواقعة على المستقيم المتقطع.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. كل النقاط في المنطقة الواقعة تحت المستقيم المتقطع الذي مقطعه y هو 5 وميله -3



b. كل النقاط الواقعة على المستقيم المتصل الذي مقطعه y هو 5 وميله -3 وكل النقاط الواقعة في المنطقة التي فوقه.



خطأ شائع

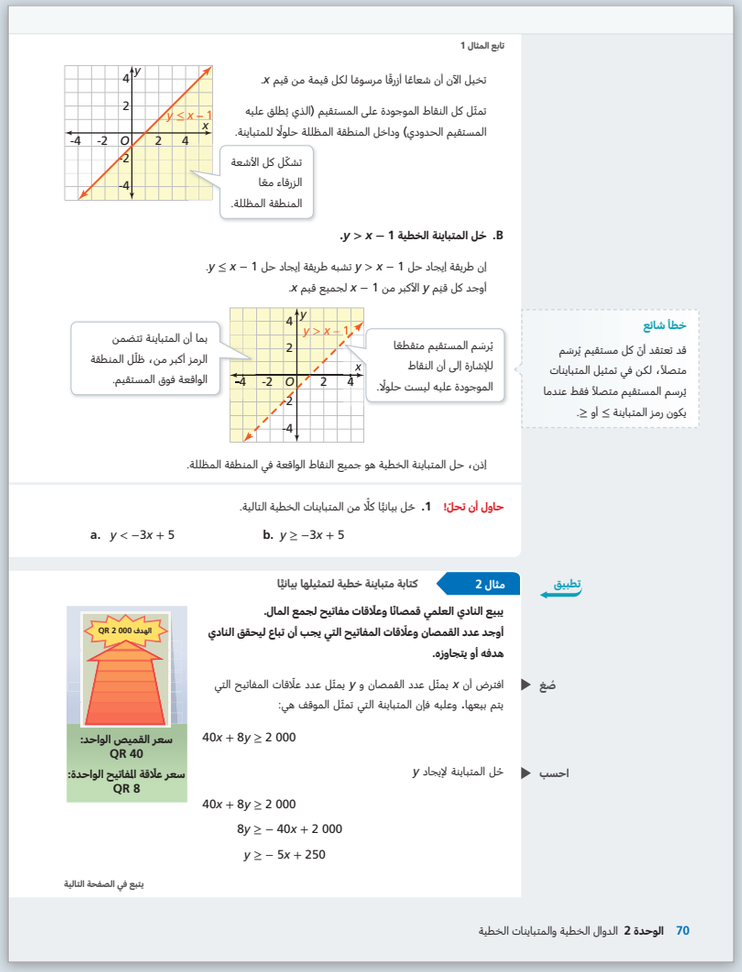
حاول أن تحل! 1 قد يعتقد بعض الطلاب أن كل الأزواج المرتبة الواقعة على المستقيم الحدودي هي حلول للمتباينة دائمًا. ذكرهم بأن الأزواج المرتبة الواقعة على المستقيم الحدودي لا تكون حلولًا للمتباينة الخطية إلا إذا كان رمز المتباينة الخطية المستعمل هو $\leq$ أو $\geq$، أي إن المستقيم الحدودي متصل.

مثال 2 كتابة متباينة خطية لتمثيلها بيانيًّا

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا يمثل المقطعان x و y ؟

[عندما لا يبيع النادي العلمي أي قميص، يجب أن يبيع 250 علاقة مفاتيح على الأقل. وعندما لا يبيع أي علاقة مفاتيح، يجب أن يبيع 50 قميصًا على الأقل.]



تابع المثال 1

تخيل الآن أن شعاعًا أزرقًا مرسومًا لكل قيمة من قيم x.

تمثّل كل النقاط الموجودة على المستقيم (الذي يُطلق عليه المستقيم الحدودي) وداخل المنطقة المظللة حلولًا للمتباينة.

تشكّل كل الأشعة الزرقاء معًا المنطقة المظللة.

B. حل المتباينة الخطية $y > x - 1$.

إن طريقة إيجاد حل $y > x - 1$ تشبه طريقة إيجاد حل $y \leq x - 1$.

أوجد كل قيم y الأكبر من $x - 1$ لجميع قيم x.

بما أن المتباينة تتضمن الرمز أكبر من، ظلّل المنطقة الواقعة فوق المستقيم.

يُرسم المستقيم متقطعًا للإشارة إلى أن النقاط الموجودة عليه ليست حلولًا.

إذن، حل المتباينة الخطية هو جميع النقاط الواقعة في المنطقة المظللة.

حاول أن تحل! 1. حلّل بيانيًا كلًّا من المتباينات الخطية التالية.

a. $y < -3x + 5$ b. $y \geq -3x + 5$

خطأ شائع

قد تعتقد أنّ كل مستقيم يُرسم متصلًا، لكن في تمثيل المتباينات يُرسم المستقيم متصلًا فقط عندما يكون رمز المتباينة $\leq$ أو $\geq$.

تطبيق

مثال 2 كتابة متباينة خطية لتمثيلها بيانيًا

يبيع النادي العلمي قمصانًا وعلّاقات مفاتيح لجمع المال.

أوجد عدد القمصان وعلّاقات المفاتيح التي يجب أن تباع ليحقق النادي هدفه أو يتجاوزه.

الهدف 2 000 QR

سعر القميص الواحد: QR 40

سعر علّاقة المفاتيح الواحدة: QR 8

ضع ▶ افترض أن x يمثّل عدد القمصان و y يمثّل عدد علّاقات المفاتيح التي يتم بيعها. وعليه فإن المتباينة التي تمثّل الموقف هي:

$$40x + 8y \geq 2\,000$$

احسب ▶ حل المتباينة لإيجاد y

$$40x + 8y \geq 2\,000$$
$$8y \geq -40x + 2\,000$$
$$y \geq -5x + 250$$

يتبع في الصفحة التالية

70 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

فكّر وثابر في الحل ما وجه الشبه والاختلاف بين التمثيل البياني للمتباينة $y < 3x$ والتمثيل البياني للمتباينة $y \geq 3x$ ؟

[للتمثيلان البيانيان نفس المستقيم الحدودي. التمثيل البياني للمتباينة $y < 3x$ متقطع ومظلل تحت المستقيم، بينما التمثيل البياني للمتباينة $y \geq 3x$ متصل ومظلل فوق المستقيم.]

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 2**

القراءة مستوى 1 اطلب إلى الطلاب قراءة الجملة الأولى في نص مسألة المثال 2 مع التركيز على عبارة "جمع المال" والإشارة إليها أثناء القراءة.

س: ماذا قد يتبادر إلى ذهنك عند سماعك كلمة "جمع" ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عملية حسابية بين عددين أو أكثر.]

س: ما المفاتيح التي تساعدك على تصور معنى "جمع المال" في سياق المسألة ؟ [يبيع النادي سلعًا لجمع المال.]

س: ما معنى كلمة "جمع المال" في هذا السياق ؟

[كسب المال.]

التحدث مستوى 2 اطلب إلى الطلاب مناقشة المصطلح "مستقيم حدودي" ضمن مجموعات صغيرة.

س: ماذا يتبادر إلى ذهنك عادة عندما تسمع كلمتي "مستقيم حدودي" ؟ [قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : مستقيم مرسوم على خريطة يفصل الولايات أو الدول.]

س: ما المشترك في إجاباتكم ؟ [تتضمن حدودًا.]

س: كيف يساعدك ذلك على فهم كيفية استعمال المستقيم الحدودي في سياق المثال ؟

[يفصل المستقيم الحدودي النقاط التي هي جزء من الحل عن النقاط التي ليست جزءًا من الحل.]

الكتابة مستوى 3 قد لا يفهم الطلاب معنى المفردتين "يتجاوز" و"استبعاد". اطلب إليهم كتابة معنى يتجاوز (يتخطى أو يتعدى الحدود) واستبعاد (إغلاق أو ابتعاد) في دفاترهم، ثم اطلب إليهم الإجابة على الأسئلة الآتية كتابة.

س: لماذا يريد النادي العلمي تجاوز هدفه ؟

[للحصول على أموال أكثر.]

س: أعط مثالين عن زوجين مرتبين يمكن أن يتم استبعادهما من الحل.

[أي زوج مرتب لا يحقق هدف النادي أو يتضمن عددًا سالبًا من القمصان أو من علاقات المفاتيح.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. كلا؛ سيجمع QR 840 فقط.

مثال 3 كتابة متباينة خطية من تمثيلها البياني

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا سيتغير في المتباينة الخطية إذا كانت المنطقة المظللة تقع تحت المستقيم الحدودي ؟

[سيتغير رمز المتباينة الخطية من ≥ إلى ≤] .

س: كيف تحدد رمز المتباينة عند كتابة متباينة الخطية من تمثيل بياني ؟

[استعمل ≥ أو ≤ عندما يكون المستقيم الحدودي متصلًا.
استعمل > أو < عندما يكون المستقيم الحدودي متقطعًا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

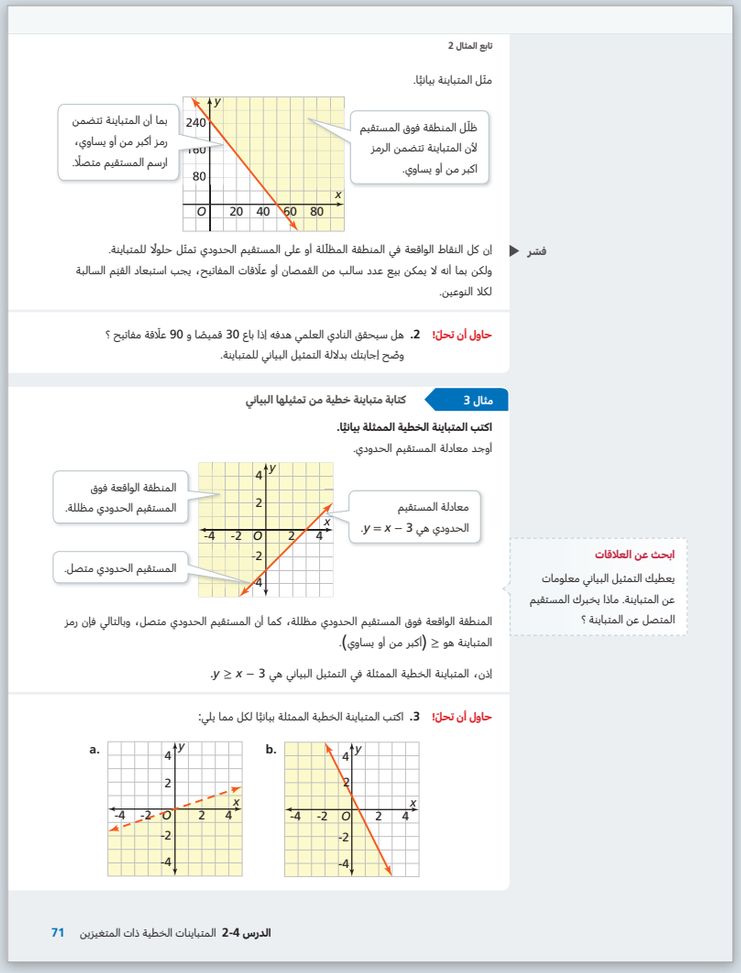
3. **a.** $y < \frac{1}{3}x$ **b.** $y \le -2x + 1$

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة اذكر طريقتين يمكن التحقق من خلالهما مما إذا كانت نقطة معينة هي ضمن حل متباينة خطية أو لا.

[عوض الإحداثيين x و y في المتباينة الخطية لتتحقق ما إذا كانت تعطي عبارة صحيحة أم لا. عيّن النقطة على التمثيل البياني للمتباينة الخطية وتحقق مما إذا كانت تقع في المنطقة المظللة أم لا.]



تابع المثال 2

مثّل المتباينة بيانيًا.

ظلّل المنطقة فوق المستقيم لأن المتباينة تتضمن الرمز اكبر من أو يساوي.

بما أن المتباينة تتضمن رمز أكبر من أو يساوي، ارسم المستقيم متصلًا.

فسّر ان كل النقاط الواقعة في المنطقة المظلّلة أو على المستقيم الحدودي تمثّل حلولًا للمتباينة. ولكن بما أنه لا يمكن بيع عدد سالب من القمصان أو علّاقات المفاتيح، يجب استبعاد القيم السالبة لكلا النوعين.

حاول أن تحلّ! **2.** هل سيحقق النادي العلمي هدفه إذا باع 30 قميصًا و 90 علّاقة مفاتيح ؟ وضّح إجابتك بدلالة التمثيل البياني للمتباينة.

مثال 3 **كتابة متباينة خطية من تمثيلها البياني**

اكتب المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا.

أوجد معادلة المستقيم الحدودي.

المنطقة الواقعة فوق المستقيم الحدودي مظللة.

معادلة المستقيم الحدودي هي $y = x - 3$.

المستقيم الحدودي متصل.

ابحث عن العلاقات يعطيك التمثيل البياني معلومات عن المتباينة. ماذا يخبرك المستقيم المتصل عن المتباينة ؟

المنطقة الواقعة فوق المستقيم الحدودي مظللة، كما أن المستقيم الحدودي متصل، وبالتالي فإن رمز المتباينة هو ≥ (أكبر من أو يساوي).

إذن، المتباينة الخطية الممثلة في التمثيل البياني هي $y \ge x - 3$.

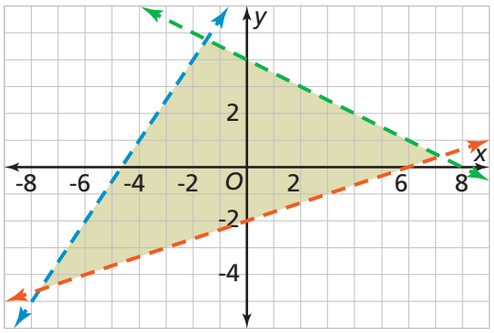
حاول أن تحلّ! **3.** اكتب المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا لكل مما يلي:

a. **b.**

الدرس 4-2 المتباينات الخطية ذات المتغيرين 71

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 تحدّ الطلاب في كتابة متباينات تشكّل مثلثًا عند تمثيلها في نفس المستوى الإحداثي.



س: ما المتباينات الخطية التي تشكّل محيط المثلث ؟

[$y < \frac{3}{2}x + 7$, $y < -\frac{1}{2}x + 4$, $y > \frac{1}{3}x - 2$]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم كيفية تمثيل متباينة خطية بمتغير واحد بيانيًا في المستوى الإحداثي. اطلب إليهم التدرب باستعمال الأزواج المرتبة لاكتشاف المتباينات من التمثيلات البيانية.

س: اذكر متباينة خطية تحتوي حلولها الأزواج المرتبة الآتية:
$(-2 , 6)$, $(-4 , 10)$, $(-6 , 6)$, $(-8 , 4)$, $(-10 , -10)$ والأزواج المرتبة الآتية ليست حلولًا لها: $(-1 , 12)$, $(0 , 10)$, $(5 , 6)$. ثم مثّل المتباينة بيانيًا.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : التمثيل البياني للمتباينة هو مستقيم رأسي متصل معادلته $x = -2$ مع تظليل المنطقة الواقعة إلى يسار المستقيم الحدودي.]

س: كيف اكتشفت المتباينة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كل قيم y تبدو مناسبة، لكن قيم x يجب أن تكون أصغر من أو تساوي -2]

www.jnob-jo.com

مثال 4

المتباينات الخطية ذات المتغير الواحد في المستوى الإحداثي

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما وجه المقارنة بين التمثيلات البيانية على خط الأعداد والتمثيلات البيانية في المستوى الإحداثي عندما تكون هناك قيمة مجهولة واحدة ؟

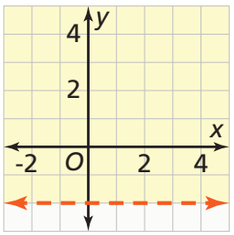
[توجد في كلا التمثيلين البيانيين أجزاء مظللة وأجزاء غير مظللة. عند حل المتباينة الخطية لإيجاد قيمة x يكون خط الأعداد أفقيًا، في حين يكون المستقيم الحدودي في المستوى الإحداثي رأسيًا. عند حل المتباينة الخطية لإيجاد y يكون خط الأعداد رأسيًا في حين يكون المستقيم الحدودي في المستوى الإحداثي أفقيًا.]

س: ما وجه الشبه بين الدائرة المغلقة والمستقيم المتصل ؟ وبين الدائرة المفتوحة والمستقيم المتقطع ؟

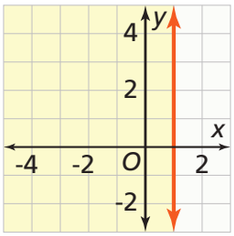
[النقاط في الدائرة المغلقة والمستقيم المتصل هي جزء من الحل. النقاط على الدائرة المفتوحة والمستقيم المتقطع ليست جزءًا من الحل.]

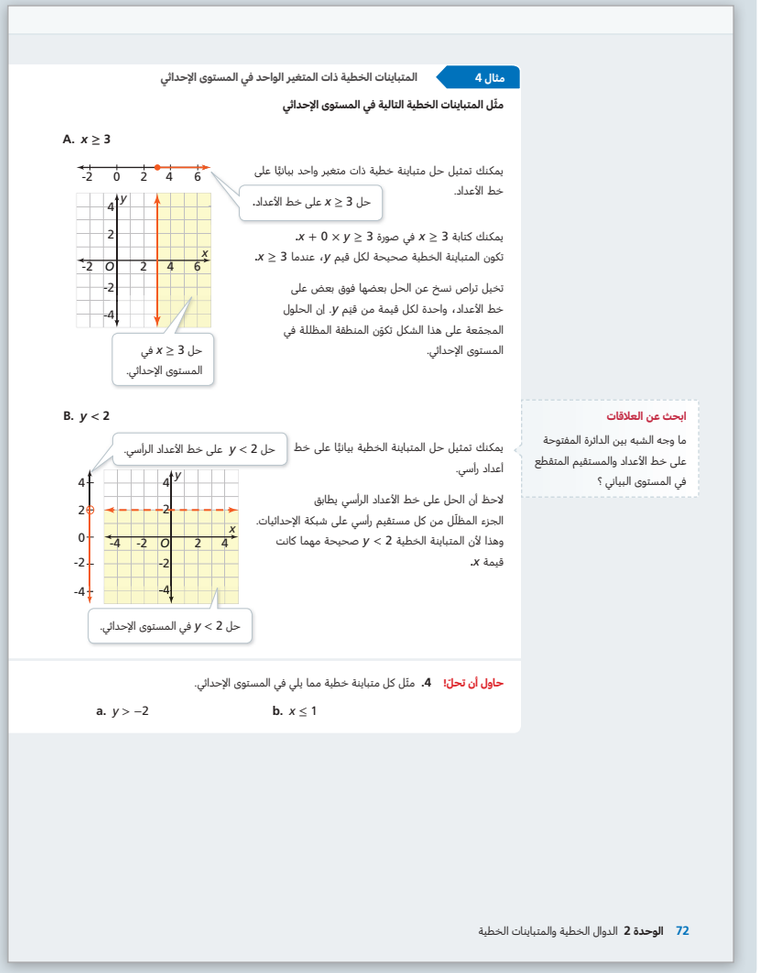
حاول أن تحلّ! الإجابات

4. **a.**



b.





مثال 4 المتباينات الخطية ذات المتغير الواحد في المستوى الإحداثي

مثّل المتباينات الخطية التالية في المستوى الإحداثي

A. $x \geq 3$

يمكنك تمثيل حل متباينة خطية ذات متغير واحد بيانيًا على خط الأعداد.

حل $x \geq 3$ على خط الأعداد.

يمكنك كتابة $x \geq 3$ في صورة $x + 0 \times y \geq 3$.
تكون المتباينة الخطية صحيحة لكل قيم y، عندما $x \geq 3$.

تخيل تراص نسخ عن الحل بعضها فوق بعض على خط الأعداد، واحدة لكل قيمة من قيم y. إن الحلول المجمّعة على هذا الشكل تكوّن المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي.

حل $x \geq 3$ في المستوى الإحداثي.

B. $y < 2$

يمكنك تمثيل حل المتباينة الخطية بيانيًا على خط أعداد رأسي.

حل $y < 2$ على خط الأعداد الرأسي.

لاحظ أن الحل على خط الأعداد الرأسي يطابق الجزء المظلّل من كل مستقيم رأسي على شبكة الإحداثيات. وهذا لأن المتباينة الخطية $y < 2$ صحيحة مهما كانت قيمة x.

حل $y < 2$ في المستوى الإحداثي.

ابحث عن العلاقات

ما وجه الشبه بين الدائرة المفتوحة على خط الأعداد والمستقيم المتقطع في المستوى البياني ؟

حاول أن تحلّ! 4. مثّل كل متباينة خطية مما يلي في المستوى الإحداثي.

a. $y > -2$ b. $x \leq 1$

72 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم المتباينات الخطية ذات المتغيرين

س: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين ومتباينتيهما الخطيتين ؟

[$y \geq -\frac{2}{3}x + 1$ تعني أن y أكبر من أو يساوي $-\frac{2}{3}x + 1$ ، أي أن المستقيم الحدودي للتمثيل البياني متصل والتظليل فوقه.

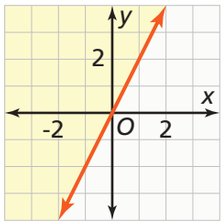
$y < -\frac{2}{3}x + 1$ تعني أن y أصغر من $-\frac{2}{3}x + 1$ ، أي أن المستقيم الحدودي للتمثيل البياني متقطع والتظليل تحته.]

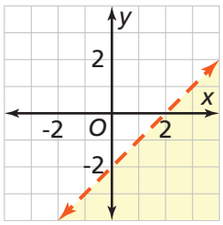
عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

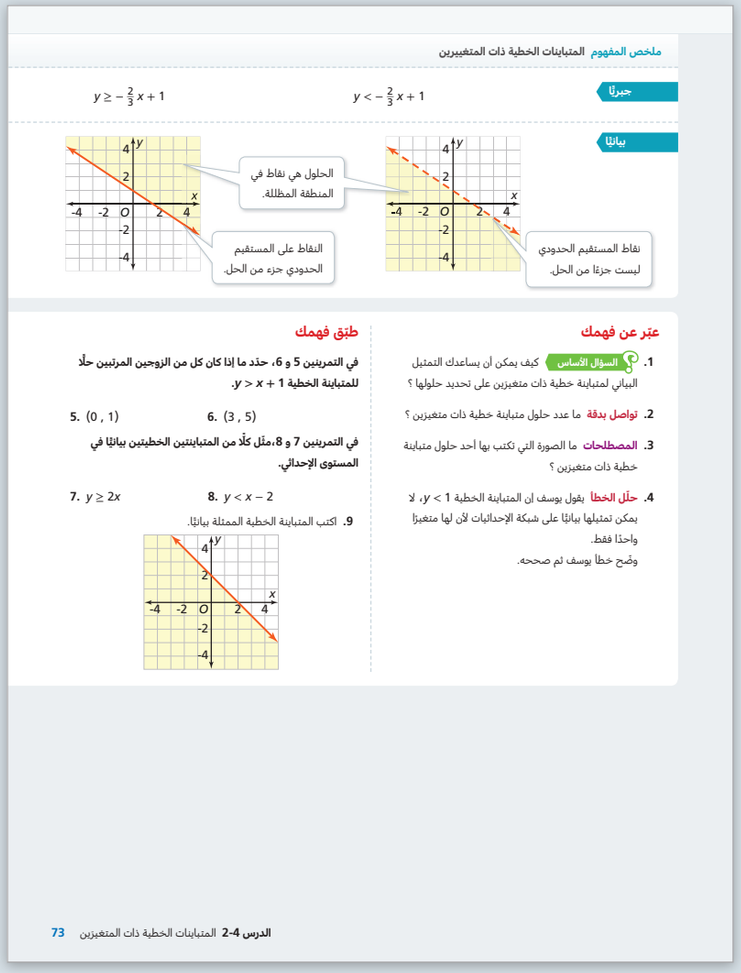
التمرين 5 قد يقول بعض الطلاب إن الزوج المرتب $(0 , 1)$ هو أحد حلول المتباينة لأن قيمة y في الزوج المرتب تساوي $x + 1$. ذكرهم بأن ذلك صحيح عندما يتضمن رمز المتباينة رمز المساواة $(\leq)$ وهذا يعني أن النقطة $(0 , 1)$ تقع على المستقيم الحدودي.

الإجابات

1. المنطقة المظلّلة مع أي نقطة على المستقيم المتصل يحتوي على كل حلول المتباينة الخطية.
2. عدد لانهائي من الحلول.
3. زوج مرتب (x , y)
4. يمكن تمثيل $y < 1$ على شبكة إحداثيات. ارسم المستقيم الأفقي المنقّط (غير متصل) $y = 1$ ثم ظلّل المنطقة الموجودة تحت هذا المستقيم.
5. لا
6. نعم
7. 

8. 

9. $y \leq -x + 2$



ملخص المفهوم المتباينات الخطية ذات المتغيرين

جبريًا: $y < -\frac{2}{3}x + 1$ ، $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$

بيانيًا

الحلول هي نقاط في المنطقة المظللة.

نقاط المستقيم الحدودي ليست جزءًا من الحل.

النقاط على المستقيم الحدودي جزء من الحل.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين على تحديد حلولها ؟
2. تواصل بدقة ما عدد حلول متباينة خطية ذات متغيرين ؟
3. المصطلحات ما الصورة التي تكتب بها أحد حلول متباينة خطية ذات متغيرين ؟
4. حلّل الخطأ يقول يوسف إن المتباينة الخطية $y < 1$، لا يمكن تمثيلها بيانيًا على شبكة الإحداثيات لأن لها متغيرًا واحدًا فقط. وضّح خطأ يوسف ثم صححه.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حدّد ما إذا كان كل من الزوجين المرتبين حلًا للمتباينة الخطية $y > x + 1$.

5. $(0 , 1)$ 6. $(3 , 5)$

في التمرينين 7 و 8، مثّل كلًا من المتباينتين الخطيتين بيانيًا في المستوى الإحداثي.

7. $y \geq 2x$ 8. $y < x - 2$

9. اكتب المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا.

الدرس 4-2 المتباينات الخطية ذات المتغيرين 73

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-25, 28-33	10-21, 24-33

تحليل التمارين

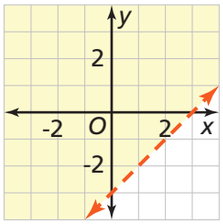
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16–19, 31	1
	11, 15	2
2	20, 21	1
	10, 28, 30, 33	2
	12, 29	3
3	24–27, 32	1
	13	2
4	22, 23	1
	14	2

الإجابات

10. كلتاهما؛ حيث يمكن استعمال المتباينة الخطية الأولى للتمثيل البياني، أما المتباينة الخطية الثانية يمكن اعادة كتابتها فتصبح المتباينة الخطية الأولى. التمثيل البياني في الرسم يمثل المتباينتين الخطيتين.

11. اعتقد راشد أن المتباينة الخطية $1 \le 1$ ليست صحيحة. والحقيقة أن $1 \le 1$ هي صحيحة لأن الرمز $\le$ يعني اصغر من أو يساوي وبالتالي العدد 1 هو أصغر أو يساوي العدد 1. إذن $(1 , 1)$ هو حل للمتباينة الخطية.

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < y + 3$ هو نفسه التمثيل البياني للمتباينة الخطية $y > x - 3$. المتباينة الخطية $y > x + 3$ والمتباينة السابقة لهما مستقيم حدودي غير متصل ميله 1 المستقيم الحدودي للمتباينة الخطية $y > x - 3$ يمر بالنقطة $(0 , -3)$ وكذلك المستقيم الحدودي للمتباينة الخطية $y < x + 3$ يمر بالنقطة $(0 , 3)$. منطقة الحل للمتباينة الخطية $y > x - 3$ تقع فوق المستقيم الحدودي ومنطقة الحل للمتباينة الخطية $y < x + 3$ تقع تحت المستقيم الحدودي.

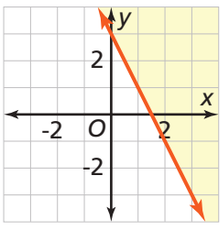


13. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y \ge \frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$

14. التمثيل البياني للمتباينة الخطية بمتغير واحد $x < 4$ على خط الأعداد هو دائرة فارغة عند العدد 4 وسهم موجه ناحية اليسار. التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين حيث $x < 4$ هو مستقيم رأسي غير متصل عند $x = 4$ مع تظليل نصف المستوى الذي إلى يسار المستقيم.

15. عند حل متباينة لإيجاد y ، يمكن تحديد المستقيم الحدودي باستعمال المعادلة الناتجة عن استبدال رمز المساواة برمز المتباينة الخطية. ثم استعمل رمز المتباينة الخطية لتحديد ما اذا كانت قيم y يجب أن تكون أكبر أم أصغر من المستقيم الحدودي. قيم y الأكبر تقع فوق المستقيم، وقيم y الأصغر تقع تحت المستقيم الحدودي.

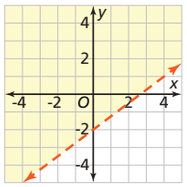
16.



تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. ابحث عن العلاقات أي من المتباينتين الخطيتين، $y > \frac{3}{4}x - 2$ أو $3x - 4y < 8$، يمثّلها التمثيل البياني أدناه ؟ وضّح إجابتك.



11. حلّل الخطأ صِف خطأ راشد في محاولته تحديد ما إذا كان الزوج المرتب $(1 , 1)$ يمثّل حلًّا للمتباينة الخطية $y \le -4x + 5$. صحح هذا الخطأ.

$y \le -4x + 5$
$1 \le -4(1) + 5$
$1 \le -4 + 5$
$1 \le 1$

بما أن 1 ليس أصغر من 1، فالمتباينة غير صحيحة. إذن، $(1 , 1)$ ليس حلًّا للمتباينة.

12. مهارات التفكير العليا ما التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < y + 3$ ؟ ما وجه الاختلاف بينه وبين التمثيل البياني للمتباينة الخطية $y < x + 3$ ؟

13. برّر منطقيًّا اكتب متباينة خطية ذات متغيرين بحيث يمثّل كل من الزوجين المرتبين $(7 , 3)$ و $(3 , -2)$ حلًّا لها.

14. روابط في الرياضيات قارن التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < 4$ على خط الأعداد بتمثيلها البياني في المستوى الإحداثي. ما أوجه التشابه بينهما ؟

15. عمّم وضّح السبب الذي يمكّنك من أن تحدد فوزًا أي جهة من المستقيم الحدودي مظللة عند حل متباينة خطية ذات متغيرين بالنسبة للمتغير y.

تدرَّب

في التمارين 16-23، مثّل كل متباينة خطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. انظر الأمثلة 1, 2, 4

16. $y \ge -2x + 3$ **17.** $y < x - 6$

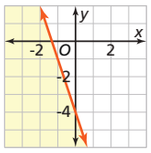
18. $y \le \frac{2}{3}x - 1$ **19.** $y > x - 2$

20. $y < -0.5x + 2$ **21.** $y \ge 1.5x - 4$

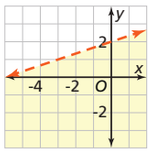
22. $2x > 12$ **23.** $-2y \le 6$

في التمارين 24-27، اكتب المتباينة الخطية المبيّنة في كل من التمثيلات البيانية التالية. انظر المثال 3

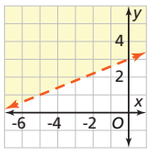
24.



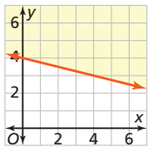
25.



26.

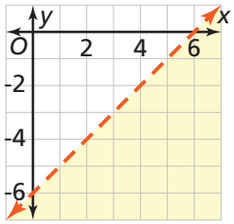


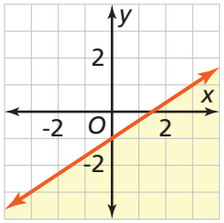
27.

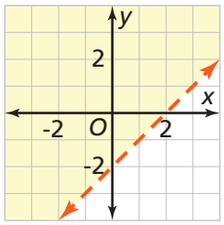


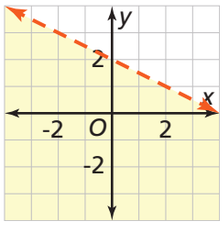
www.jnob-jo.com

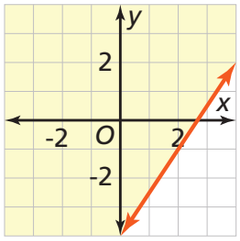
الإجابات

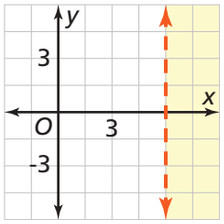
17.


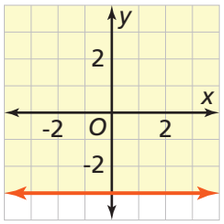
18.


19.


20.


21.


22.


23.


24. $y \le -3x - 4$

25. $y < \frac{1}{3}x + 2$

26. $y > \frac{2}{5}x + 3$

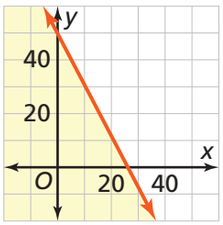
27. $y < -\frac{1}{4}x + 4$

www.jnob-jo.com

الإجابات

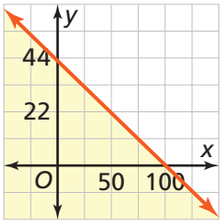
28. **a.** $69x + 36y \le 1\,800$ أو $23x + 12y \le 600$

b.

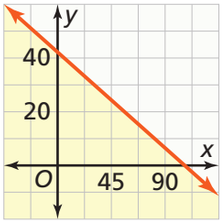


c. 11 أو أقل.

29. **a.** $25x + 60y \le 2\,500$

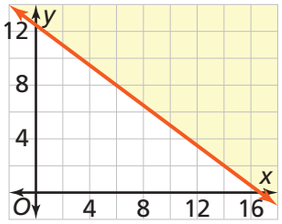


b. $25x + 60y \le 2320$



c. التمثيل البياني في الجزء (b) تحرك إلى الأسفل 3 وحدات. تحرك المقطع y من $41.\overline{6}$ الى $38.\overline{6}$، كما تحرك المقطع x من 100 الى 92.8، عندما يكون الشخص في المصعد، يكون عدد الحلول الممكنة في الربع الأول أقل منه في حال لم يكن الشخص في المصعد.

30. $6x + 8y \ge 100$؛ نعم.



31.

	نعم	لا
a. (2 , 15)	☑	☐
b. (–3 , –15)	☑	☐
c. (0 , –3)	☐	☑
d. (1 , 5)	☑	☐

32. C

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

28. **فكِّر وثابر في الحل** جمعت إحدى المدارس مبلغًا وقدره QR 1 800 لشراء مجموعة من نماذج الجزيئات يستخدمها الطلاب في المختبر لإنشاء نماذجهم.

المجموعة الكبيرة QR 69
المجموعة الصغيرة QR 36

a. اكتب متباينة خطية ذات متغيرين تمثّل أعداد مجموعات النماذج من كل نوع، والتي يمكن للمدرسة شراؤها.

b. مثّل هذه المتباينة بيانيًا.

c. افترض أن المدرسة قرّرت شراء 20 مجموعة من المجموعات الكبيرة. أوجد عدد المجموعات الصغيرة التي تستطيع المدرسة تحمّل تكاليفها.

29. **نمذج** يمكن لمصعد شحن نقل حمولة كتلتها الأقصى 2 500 باوند، أحد الأشخاص كتلته 180 باوند ويريد استعمال المصعد لنقل مجموعة من الصناديق. بعض هذه الصناديق كتلة كل منها 25 باوند والبعض الآخر كتلته 60 باوند.

a. اكتب المتباينة الخطية التي تمثّل الحمولة الإجمالية للمصعد من الصناديق في رحلة واحدة دون وجود الشخص معهم ثم مثّلها بيانيًا.

b. اكتب المتباينة الخطية التي تمثّل الحمولة الإجمالية للمصعد من الصناديق إذا كان الشخص موجودًا معهم. ثم مثّل هذه المتباينة بيانيًا.

c. قارن بين التمثيلين البيانيين للمتباينتين.

30. **فكِّر وثابر في الحل** يقيم فريق كرة القدم في المدرسة حفلًا لنهاية الموسم الرياضي. يحتاج الفريق إلى إعداد مقاعد لمئة شخص على الأقل ويخطط لاستخدام نوعي طاولات مختلفي الأحجام. يمكن أن يجلس إلى الطاولة الصغيرة 6 اشخاص وإلى الطاولة الكبيرة 8 اشخاص. اكتب متباينة خطية تمثّل عدد الطاولات التي يحتاجها الفريق من كل نوع، ثم مثّل المتباينة بيانيًا. إذا كان في المدرسة 5 طاولات صغيرة و 9 طاولات كبيرة، فهل تكون كافية للمدعوين ؟

تدرَّب على اختبار

31. اختر نعم أو لا لتحديد ما إذا كان كل زوج مرتب حلًا للمتباينة الخطية $y > 7x - 3$.

	نعم	لا
a. (2 , 15)	☐	☐
b. (–3 , –15)	☐	☐
c. (0 , –3)	☐	☐
d. (1 , 5)	☐	☐

32. **اختبار SAT/ACT** ما المتباينة الخطية التي يمثّلها التمثيل البياني أدناه ؟

Ⓐ $y > 3x - 4$ Ⓑ $y > 4x - 3$
Ⓒ $y \ge 3x - 4$ Ⓓ $y \ge 4x - 3$

33. **مهمة أدائية** بقي في أحد الهواتف مقدار معيّن من السعة للتخزين. تستخدم الصورة ما متوسطه 3.6 MB من السعة فيما يستخدم الفيديو ما متوسطه 4 MB من السعة.

السعة المتبقية 115 MB — التخزين
التطبيقات — الفيديوهات — الصور — غير ذلك

الجزء A اكتب متباينة خطية لتمثيل عدد الصور الإضافية x وعدد الفيديوهات الإضافية y التي يمكن للهاتف تخزينها.

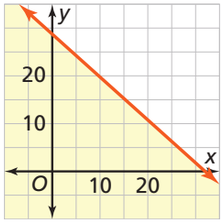
الجزء B مثّل المتباينة بيانيًا. صِف مدى تأثير عدد الصور المخزنة في الهاتف على عدد الفيديوهات التي يمكن تخزينها.

الجزء C هل سيكون التمثيل البياني للمتباينة خارج الربع الأول منطقياً ؟ وضّح إجابتك.

الدرس 2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين 75

33. **الجزء A** $3.6x + 4y \le 115$

الجزء B



كلما تزايد عدد الصور المخزنة، فإن عدد الفيديوهات يتناقص.

الجزء C لا. بالرغم من أنه يمكن اعتبار إضافة عدد سالب من الصور بمثابة حذف للصور، إلا أن التمثيل البياني لا يوفر نموذجًا جيدا، لأنه يسمح فقط حذف أو إضافة لكل نوع من العناصر.
لا يتضمن التمثيل البياني امكانية حذف بعض الصور أو إضافة بعض الصور ولا يتضمن أيضا حذف بعض الفيديوهات أو إضافة بعضها.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

www.jnob-jo.com

الدرس 2-5
أنظمة المتباينات الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ تمثيل حل مجموعة من نظام متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًّا.

✔ تفسير حلول متباينات خطية في سياق منمذج.

الفهم الأساس

يمكن حل أنظمة المتباينات الخطية باستعمال التمثيل البياني. حل نظام متباينات هو تقاطع أنصاف المستويات المقابلة لكل متباينة، مع استبعاد المستقيمات الحدودية في حال لم يتضمن رمز المتباينة إشارة المساواة.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- إنشاء متباينات خطية ذات متغيرين وحلها وتمثيلها بيانيًّا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إنشاء أنظمة متباينات خطية ذات متغيرين وحلها وتمثيلها بيانيًّا.

لاحقًا في المرحلة الثانوية، سيتمكّن الطلاب من:

- حل أنظمة متباينات خطية وتربيعية ذات متغيرين أو أكثر واستعمال البرمجة الخطية لتحديد القيمتين الصغرى والعظمى الممكنتين عندما تمثل المتباينات قيودًا في مسألة من واقع الحياة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يمثل الطلاب متباينتين خطيتين بيانيًّا في نفس مستوى ويحددون الحل في صورة تقاطع أنصاف المستويات المقابلة لكل متباينة.
- يطبق الطلاب ما يعرفونه عن أنظمة المتباينات لتحديد مدى القيم التي تحقق متطلبات كل من التكلفة العظمى والكمية الصغرى.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **نصف مستوى** | *half plane*
- **تقاطع** | *intersection*
- **مستوى** | *plane*

المصطلحات الجديدة

- **نظام متباينات خطية** | *system of linear inequalities*
- **حل نظام متباينات خطية** | *solution of a system of linear inequalities*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلحات "تقاطع" و"مستوى" و"نصف مستوى". وضّح للطلاب أن حل نظام معادلات هو تقاطع المستقيمات وأن حل نظام متباينات هو تقاطع المستويات. اعرض على الطلاب تمثيلًا بيانيًّا لنظام متباينات واطلب إليهم تحديد أنصاف المستويات، ثم تحديد تقاطع أنصاف المستويات.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.2.4 يمثّل بيانيًّا منطقة الحل لمتباينة خطية، ومنطقة الحل لمتباينات خطية آنية.

تطبيق ممارسات الرياضيات

نمذج

يفسّر الطلاب نتائج موقف رياضي عندما يجدون الرابط بين التمثيل البياني لحل ما وسياق زجاجات الماء والقبعات، ويفهمون أن القيم الموجبة وحدها لها معنى.

أبحث عن البنية واستعملها

يلاحظ الطلاب أن التمثيل البياني مكوّن من أجزاء متعددة، بما فيها المستقيم الفاصل وأنصاف المستوى، والتي يمكن استعمالها لكتابة نظام متباينات.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب مدى فهمهم لحلول المتباينات الخطية. يقودهم ذلك إلى تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا وفهم حلوله وماذا تمثل.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: عند تمثيل متباينتين بيانيًّا في مستوى إحداثي، ماذا قد يحدث عندما تقوم بتظليل المناطق التي تشتمل على حلول كلتا المتباينتين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قد تتداخل مناطق الحل أو تتشارك في بعض النقاط.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما العلاقة بين النقاط المختلفة التي اخترتها ومستقيم المتباينة ؟

[إذا كانت النقطة التي اخترتها فوق المستقيم، ستكون قيمة y أكبر من قاعدة الدالة. إذا كانت النقطة التي اخترتها تحت المستقيم، ستكون قيمة y أصغر من قاعدة الدالة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ارسم مستقيمًا آخر في المستوى الإحداثي عند $y = 4$. كيف يمكنك وصف المساحة المحصورة بين المستقيمات الثلاثة ؟

[المساحة المحصورة هي منطقة تداخل بين المنطقة الواقعة تحت المستقيم $y = 4$ والمنطقة الواقعة فوق المستقيم $y = x - 1$ والمنطقة الواقعة فوق المستقيم $y = -2x + 4$.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

وجّه الطلاب إلى مناقشة كيف أن المناطق المتداخلة الناتجة عن التمثيلات البيانية للمتباينات الخطية في نفس المستوى الإحداثي تتضمن حلول نظام المتباينات.

س: كيف يمكنك أن تصف بشكل أكثر تحديدًا المناطق الناتجة عن تقاطع مستقيمين حدوديين لمتباينتين ؟

[بما أن المنطقة تقع بين مستقيمين حدوديين، يتم وصفها بموقعها بدلالة هذين المستقيمين.]

وضّح للطلاب عملية تمثيل متباينتين في مستوى إحداثي بيانيًّا، وأعطهم الفرصة للتحقق من نتائج نصفي مستويين مظللين.

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

برّر منطقيًّا هل تعدّ النقاط على المستقيم جزءًا من المناطق الأربعة المبيّنة في الجزء C ؟ وضح إجابتك.

[كلا؛ النقاط على المستقيم هي النقاط حيث $y = x - 1$ أو $y = -2x + 4$. لا تحقق هذه القيم المتباينتين اللتين تعرّفان المناطق الأربع.]

كتاب الطالب، صفحة 77

2-5 أنظمة المتباينات الخطية

Systems of Linear Inequalities

أستطيع... تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا وحله.

معايير الدرس 9.2.4

المصطلحات
- نظام متباينات خطية system of linear inequalities
- حل نظام متباينات خطية solution of a system of linear inequalities

الاستيعاب المفاهيمي

استكشف وبرّر منطقيًّا

يبيّن التمثيل البياني المجاور المعادلتين $y = x - 1$ و $y = -2x + 4$.

A. اختر نقاطًا فوق المستقيم $y = x - 1$ وأخرى تحته. أي النقاط تُعد حلًّا للمتباينة $y > x - 1$ ؟ وأيها تُعد حلًّا للمتباينة $y < x - 1$ ؟

B. اختر نقاطًا فوق المستقيم $y = -2x + 4$ وأخرى تحته. أي النقاط تُعد حلًّا للمتباينة $y > -2x + 4$ ؟ وأيها تُعد حلًّا للمتباينة $y < -2x + 4$ ؟

C. **ابحث عن العلاقات** يقسّم المستقيمان المستوى الإحداثي إلى أربع مناطق. كيف تصف كل منطقة بدلالة المتباينات في الجزأين A و B ؟

السؤال الأساس كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟

مثال 1 تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا

حل أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًّا.

نموذج من أعمال الطلاب

A. النقاط التي فوق المستقيم هي حلول المتباينة $y > x - 1$. النقاط التي تحت المستقيم هي حلول المتباينة $y < x - 1$.

B. النقاط التي فوق المستقيم هي حلول المتباينة $y > -2x + 1$. النقاط التي تحت المستقيم هي حلول المتباينة $y < -2x + 1$.

C. يمكنك وصف كل منطقة من المناطق الأربع بزوج من المتباينات.

$y > x - 1$ و $y > -2x + 1$

$y > x - 1$ و $y < -2x + 1$

$y < x - 1$ و $y > -2x + 1$

$y < x - 1$ و $y < -2x + 1$

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

وضّح للطلاب أن التمثيل البياني لنظام متباينات هو طريقة لتحليل مجموعة الحلول بصريًّا. ذكرهم بأن كل مستقيم يرسمونه هو مستقيم حدودي وأن عليهم تحديد ما إذا كانت إحداثيات المستقيم متضمّنة في مجموعة الحلول أم لا، وذلك بحسب الرموز المستعملة في المتباينة. يمكن إيجاد حل النظام عندما تحقق النقاط التي تعدّ حلولًا لكلتا المتباينتين.

مثال 1 تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

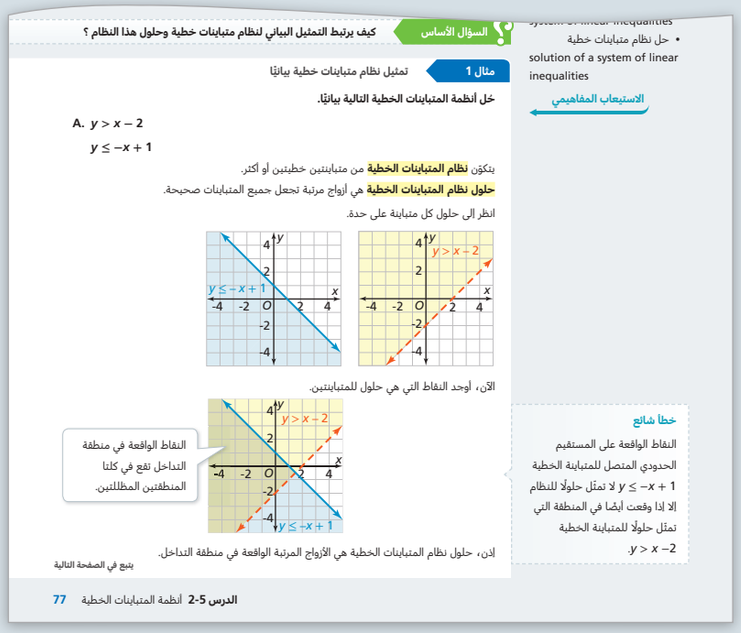
س: كيف يمكنك التحقق من أن المنطقة المظللة في كل تمثيل بياني هي الحل الصحيح للمتباينة التي يمثّلها ؟

[إذا كانت المنطقة المظللة تمثل مجموعة الحلول الصحيحة، فإن النقاط في هذه المنطقة ستحقق المتباينة جبريًا.]

الجزء B

س: أنظمة المعادلات الخطية التي تتضمن مستقيمات متوازية لا تكون لها حلول دائمًا. هل يصح ذلك على أنظمة المتباينات الخطية أيضًا ؟

[كلا؛ يمكن أن يكون لنظام متباينات خطية يتضمن مستقيمات متوازية حل. يعتمد الحل على رمز المتباينة ومناطق التداخل المظللة.]



السؤال الأساس: كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟

• حل نظام متباينات خطية solution of a system of linear inequalities

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا

حل أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

A. $y > x - 2$
$y \le -x + 1$

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** من متباينتين خطيتين أو أكثر.
حلول نظام المتباينات الخطية هي أزواج مرتبة تجعل جميع المتباينات صحيحة.

انظر إلى حلول كل متباينة على حدة.

الآن، أوجد النقاط التي هي حلول للمتباينتين.

النقاط الواقعة في منطقة التداخل تقع في كلتا المنطقتين المظللتين.

إذن، حلول نظام المتباينات الخطية هي الأزواج المرتبة الواقعة في منطقة التداخل.

يتبع في الصفحة التالية

خطأ شائع: النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي المتصل للمتباينة الخطية $y \le -x + 1$ لا تمثّل حلولًا للنظام إلا إذا وقعت أيضًا في المنطقة التي تمثّل حلولًا للمتباينة الخطية $y > x - 2$.

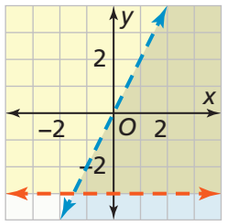
الدرس 2-5 أنظمة المتباينات الخطية 77

www.jnob-jo.com

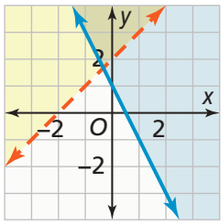
تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a.



b.



مثال 2 كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تلاحظ بشأن المتباينات الخطية الموضّحة في التمثيل البياني ؟

[المستقيم الحدودي الأحمر متقطع والمنطقة المظللة تقع تحت المستقيم؛ المستقيم الحدودي الأزرق متصل والمنطقة المظللة تقع فوق المستقيم.]

س: كيف تكتب متباينة خطية إذا كانت المنطقة المظللة فوق المستقيم الحدودي أو تحته ؟

[إذا كانت المنطقة المظللة فوق المستقيم الحدودي، تكون كل مخرجات المتباينة y أكبر من القاعدة. إذا كانت المنطقة المظللة تحت المستقيم الحدودي، تكون كل مخرجات المتباينة y أصغر من القاعدة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $y \geq 3x + 2$
$y \leq x - 2$

b. $y > -2x$
$y \leq \frac{1}{2}x - 4$

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة ما شكل التمثيل البياني لنظام متباينات خطية لا حلول له ؟

[مستقيمان متوازيان، حيث التظليل عند كل مستقيم يقع في الجهة المعاكسة للمستقيم الآخر ولا يوجد تداخل في التظليل.]

تابع المثال 1

B. $y \geq -x + 2$
$y < -x - 2$

مثّل المتباينتين بيانيًا.

بما أن ميلي المستقيمين الحدوديين متساويان والمقطعين y مختلفان، فإن المستقيمين متوازيان ولا يتقاطعان. وبما أن التمثيلين البيانيين للمتباينتين لا يتداخلان، لذا ليس هناك حل لنظام المتباينات هذا.

حاول أن تحلّ! 1. مثّل بيانيًا كل نظام من أنظمة المتباينات الخطية.

a. $y < 2x$
$y > -3$

b. $y \geq -2x + 1$
$y > x + 2$

مثال 2 كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني

اكتب نظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني المجاور.

اكتب معادلة كل مستقيم باستعمال الميل والمقطع y.

ميل المستقيم الحدودي الأحمر يساوي 2 والمقطع y يساوي 3

ميل المستقيم الحدودي الأزرق يساوي −1 والمقطع y يساوي 4

استعمل البنية

ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من التمثيلات البيانية للمستقيمات ؟ ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من المنطقة المظللة في التمثيل البياني ؟

معادلة المستقيم الحدودي الأحمر هي $y = 2x + 3$

معادلة المستقيم الحدودي الأزرق هي $y = -x + 4$

تقع حلول النظام أسفل المستقيم المتقطع الأحمر، لذا فإن إحدى المتباينات الخطية هي $y < 2x + 3$.

تقع حلول النظام أعلى المستقيم الأزرق المتصل، لذا فإن المتباينة الخطية الأخرى هي $y \geq -x + 4$.

إذن، يبيّن التمثيل البياني نظام المتباينات الخطية : $y < 2x + 3$ و $y \geq -x + 4$.

يتبع في الصفحة التالية

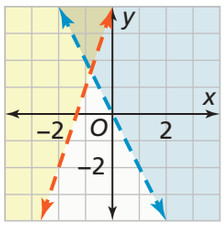
78 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

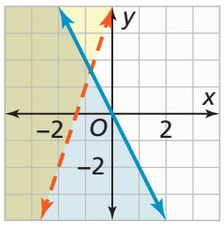
استعمل مع المثال 2 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني. اطلب إليهم التدرب على كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني.

- ما نظام المعادلات المعروض في كل تمثيل بياني ؟

A.



B.



س: ماذا تلاحظ على المستقيمين الحدوديين ؟

[المستقيمان الحدوديان متماثلان، لكن المستقيم الأزرق في التمثيل البياني B متصل في حين أنه في التمثيل البياني A متقطع.]

س: ما الذي يحدد الرمز المستعمل لكتابة كل متباينة خطية ؟

[يتحدد الرمز المستعمل من خلال المنطقة المظللة فوق (< أو ≥) أو تحت (> أو ≤) المستقيم، علمًا بأن اتجاه قراءة المتباينة الخطية يكون من اليسار إلى اليمين.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب إلى الطلاب استكشاف مجموعات خاصة من الحلول لأنظمة متباينات خطية مختلفة.

- مثل النظام الآتي بيانيًا.
$x < -1$ ؛ $y > 3$
- أضف التمثيل البياني للمتباينة أدناه إلى التمثيل البياني لنظام المتباينات الخطية.
$y > -x + 2$

س: ما تأثير المتباينة الخطية الجديدة على مجموعة حلول النظام ؟

[شطرت (قصّت إلى نصفين) المتباينة الجديدة مجموعة الإحداثيات التي كانت موجودة في النظام الأول.]

س: هل المستقيمات الحدودية في التمثيل البياني متصلة أم متقطعة ؟

[كل المستقيمات الحدودية متقطعة لأن رموز المتباينات الخطية هي إما > وإما <.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يرتبك بعض الطلاب في تحديد الرمز الذي يجب استعماله في كتابة المتباينة الخطية. اطلب إليهم التفكير في ما إذا كانت النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي تشكّل حلولًا للمتباينة الخطية (متصل أم متقطع) وفي الجهة التي تم تظليلها من المستقيم الحدودي (فوق أم تحت).

مثال 3 استعمال نظام متباينات خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف تكتب المتباينتين لتمثيل النظام ؟

[اكتب متباينة خطية تصف عدد عبوات المياه x وعدد أزواج الجوارب y؛ اكتب متباينة خطية أخرى تصف القيمة المطبقة على كل من x و y.]

س: هل يمكن اعتبار كل مجموعة الحل المتمثلة بمنطقة التداخل المظللة حلًّا مقبولاً ؟

[كلا؛ يقطع المستقيمان الحدوديان المحور x، حيث يصبح عدد السلع المشتراة سالبًا، وهو أمر غير ممكن.]

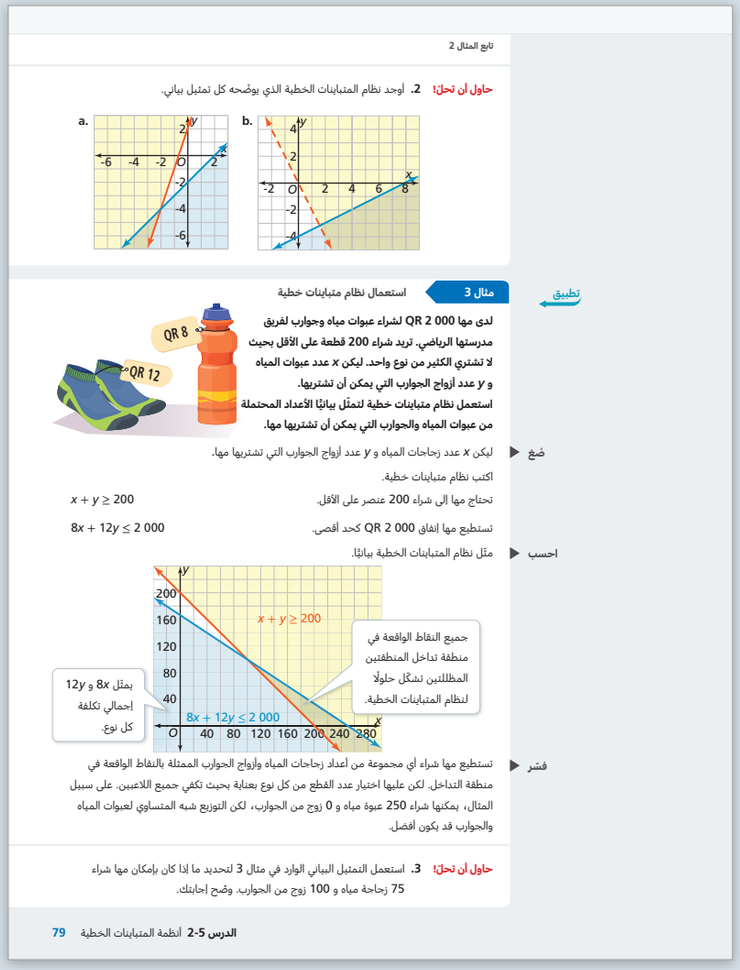
حاول أن تحلّ! الإجابات

3. نعم؛ يعدّ الزوج المرتب $(75 , 100)$ حلًّا للمتباينتين لأنه يقع في منطقة التداخل المظللة.

عادات التفكير استعمل مع **المثال 3**

عمّم ماذا تمثل المنطقة المظللة وغير المتداخلة ؟

[أجزاء من التمثيل البياني التي هي حلول لإحدى المتباينتين وليست حلولًا للمتباينة الخطية الثانية.]



تابع المثال 2

حاول أن تحل! 2. أوجد نظام المتباينات الخطية الذي يوضّحه كل تمثيل بياني.

a. b.

تطبيق

مثال 3 استعمال نظام متباينات خطية

لدى مها QR 2 000 لشراء عبوات مياه وجوارب لفريق مدرستها الرياضي. تريد شراء 200 قطعة على الأقل بحيث لا تشتري الكثير من نوع واحد. ليكن x عدد عبوات المياه و y عدد أزواج الجوارب التي يمكن أن تشتريها.

استعمل نظام متباينات خطية لتمثّل بيانيًا الأعداد المحتملة من عبوات المياه والجوارب التي يمكن أن تشتريها مها.

QR 8 QR 12

صِغ ◀ ليكن x عدد زجاجات المياه و y عدد أزواج الجوارب التي تشتريها مها.

اكتب نظام متباينات خطية.

تحتاج مها إلى شراء 200 عنصر على الأقل. $x + y \geq 200$

تستطيع مها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى. $8x + 12y \leq 2\,000$

احسب ◀ مثّل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.

$x + y \geq 200$

$8x + 12y \leq 2\,000$

جميع النقاط الواقعة في منطقة تداخل المنطقتين المظللتين تشكّل حلولًا لنظام المتباينات الخطية.

يمثّل $8x$ و $12y$ إجمالي تكلفة كل نوع.

فسّر ◀ تستطيع مها شراء أي مجموعة من أعداد زجاجات المياه وأزواج الجوارب الممثلة بالنقاط الواقعة في منطقة التداخل. لكن عليها اختيار عدد القطع من كل نوع بعناية بحيث تكفي جميع اللاعبين. على سبيل المثال، يمكنها شراء 250 عبوة مياه و 0 زوج من الجوارب، لكن التوزيع شبه المتساوي لعبوات المياه والجوارب قد يكون أفضل.

حاول أن تحل! 3. استعمل التمثيل البياني الوارد في مثال 3 لتحديد ما إذا كان بإمكان مها شراء 75 زجاجة مياه و 100 زوج من الجوارب. وضّح إجابتك.

الدرس 2-5 أنظمة المتباينات الخطية 79

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 3**)

الكتابة **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب كتابة إجابات للأسئلة الآتية في دفاترهم، وذلك للربط بين فهمهم لخاصية التوزيع ومعنى كلمة "توزيع".

س: اكتب مثالًا على خاصية التوزيع. وضّح كيف يوضّح مثالك معنى "توزيع".

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $5(x - 9) = 5x - 45$؛ يتم توزيع العدد 5 (باستعمال الضرب)، أو توزيعه بالتساوي على الحدين داخل القوسين.]

س: كيف استُعملت كلمة "توزيع" في المثال ؟

[بالرغم من أنه من المستحسن شراء العدد نفسه من كل نوع، إلا أن مها غير ملزمة بذلك.]

القراءة **مستوى 3** اطلب إلى الطلاب قراءة المثال حتى نهاية الجزء المتعلق بفقرة "صغ". الفت انتباه الطلاب إلى جملة "200 قطعة على الأقل" في نص المسألة وعند كتابة نظام المتباينات. اطلب إلى الطلاب إعادة قراءة الجملة الأولى.

س: هل تنص الجملة الأولى الواردة في نص المسألة على أن مها تستطيع إنفاق QR 2 000 كحد أقصى ؟

[كلا.]

س: عند كتابة نظام المتباينات، لماذا تم تحويل الجملة "لدى مها QR 2 000 لشراء" إلى "تستطيع مها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى" ؟

[إذا كان لدى مها QR 2 000 لشراء سلع يعني أنها لا تستطيع إنفاق أكثر من ذلك. لذا يمكنها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى.]

س: كيف تحول العبارتين "على الأقل" و"حد أقصى" إلى رموز جبرية ؟

["حد أقصى": $\leq$; "على الأقل": $\geq$]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم أنظمة المتباينات الخطية

س: كيف يساعد التمثيل البياني لنظام متباينات خطية عند إيجاد حلول النظام ؟
[يعطي التمثيل البياني تمثيلاً بصريًا لكل النقاط التي تحقق كل المتباينات في النظام.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 7 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تمثيل المستقيم الحدودي بيانيًا عندما يكون معطى في الصورة $y = n$ أو الصورة $x = m$. ذكرهم بأن المستقيم الحدودي $y = n$ هو مستقيم أفقي يقطع المحور y وبأن المستقيم $x = m$ هو مستقيم رأسي يقطع المحور x.

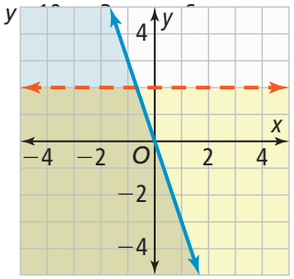
الإجابات

1. المنطقة المظللة المتداخلة تحوي كافة الحلول الممكنة لنظام المتباينات الخطية.
2. $(0, 1)$ ليست حلا للمتباينة الخطية $y > 2x + 1$ إذن $(0, 1)$ ليست حلا لنظام المتباينات الخطية. هذه النقطة موجودة على المستقيم الحدودي للمتباينة $y > 2x + 1$ ولكن المستقيم الحدودي هو منقط (غير متصل) والنقاط التي تنتمي اليه ليست جزءًا من الحل.
3. على الأقل متباينتين خطيتين.
4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الأفضل بواسطة التمثيل البياني. من السهولة استعمال التمثيل البياني لأن كل الحلول تبدو واضحة. أما محاولة وصف الحلول لنظام المتباينات الخطية لفظيًا فهو عمل معقد كثيرًا.

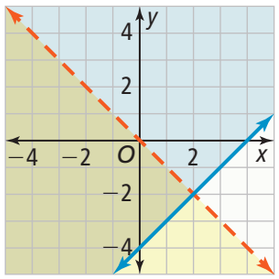
5. $y = 8x + 1$; $y = -3x + 4$

6. y

7.



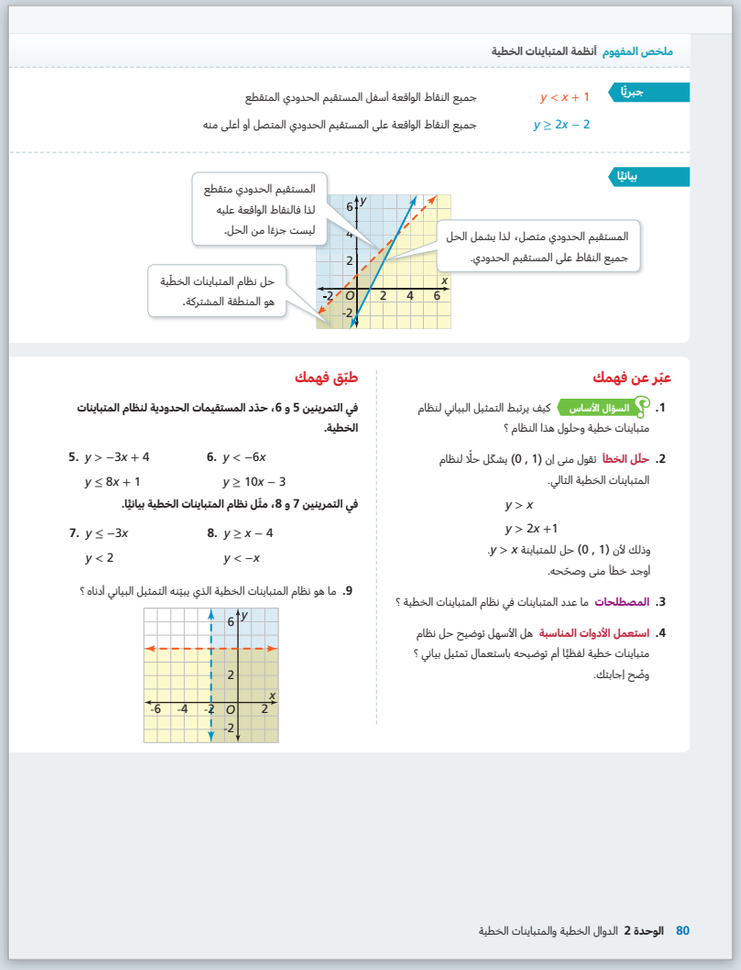
8.



9. $y < 4$
$x > -2$

10. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : وضعية من واقع الحياة لها عدة قيود من الأفضل توصيفها بنظام متباينات خطية. أما الوضعية من واقع الحياة التي لها قيدًا واحدًا فمن الأفضل توصيفها بمتباينة خطية واحدة.

11. استعمل أحمد الرمز الخطأ عند كتابة المتباينة الخطية الثانية إذن بدلا من $y < -2x + 2$ يجب كتابته $y > -2x + 2$



ملخص المفهوم أنظمة المتباينات الخطية

جبريًا
$y < x + 1$ جميع النقاط الواقعة أسفل المستقيم الحدودي المتقطع
$y \geq 2x - 2$ جميع النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي المتصل أو أعلى منه

بيانيًا
المستقيم الحدودي متقطع لذا فالنقاط الواقعة عليه ليست جزءًا من الحل.
المستقيم الحدودي متصل، لذا يشمل الحل جميع النقاط على المستقيم الحدودي.
حل نظام المتباينات الخطية هو المنطقة المشتركة.

عبّر عن فهمك
1. السؤال الأساس كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟
2. حلل الخطأ تقول منى ان (1 , 0) يشكل حلًا لنظام المتباينات الخطية التالي.
$y > x$
$y > 2x + 1$
وذلك لأن (1 , 0) حل للمتباينة $y > x$.
أوجد خطأ منى وصححه.
3. المصطلحات ما عدد المتباينات في نظام المتباينات الخطية ؟
4. استعمل الأدوات المناسبة هل الأسهل توضيح حل نظام متباينات خطية لفظيًا أم توضيحه باستعمال تمثيل بياني ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك
في التمرينين 5 و 6، حدّد المستقيمات الحدودية لنظام المتباينات الخطية.
5. $y > -3x + 4$ ، $y \leq 8x + 1$
6. $y < -6x$ ، $y \geq 10x - 3$
في التمرينين 7 و 8، مثّل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.
7. $y \leq -3x$ ، $y < 2$
8. $y \geq x - 4$ ، $y < -x$
9. ما هو نظام المتباينات الخطية الذي يمثله التمثيل البياني أدناه ؟

80 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

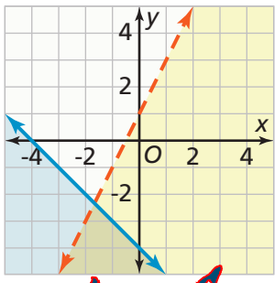
12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كل نظام من المتباينتين الخطيتين يكون مشابهًا لنظام المعادلتين الخطيتين لأن حلولها تتحدد من حيث تقاطع التمثيلات البيانية للمعادلتين أو من حيث تداخل مناطق الحلول للمتباينتين الخطيتين. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كانت المعادلتان في نظام واحد متكافئتين. يمكن أن يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كانت المتباينتان في نظام واحد متكافئتين أو غير متكافئتين.

13. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبين هذه المتباينات الخطية أن كل قيم x و y يجب أن تساوي 0 أو تكون موجبة، لذا تكون حدود الحلول في الربع الأول. إذن يجب إضافة $x \geq 0$ و $y \geq 0$

14. نعم يمكن ذلك. النظام: $y > x + 2, y < x - 2, y < x - 4$ ليس له حلول نظرًا لعدم وجود منطقة تداخل فيها المستويات الثلاثة.

15. نعم. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $x \leq 3$; $x \geq 1$; $y \leq 3$; $y \geq 1$

16.



www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

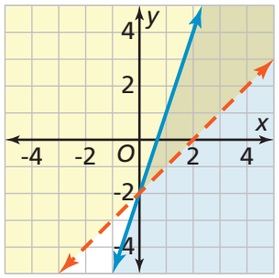
أساسي	متقدم
10-25, 28, 30, 32-37	10-15, 20-37

تحليل التمارين

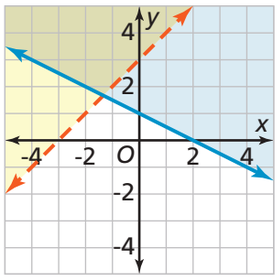
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16-27, 35	1
	37	2
2	28-30	1
	11	3
	38	4
3	10	1
	32-34	2
	13-14	3

الإجابات

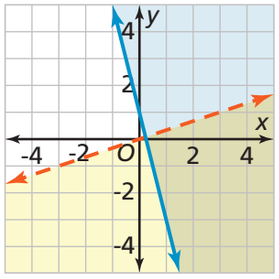
17.



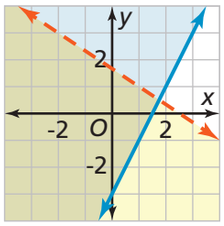
18.



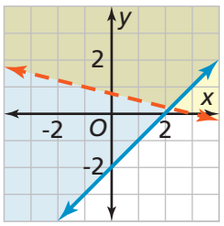
19.



20.



21.

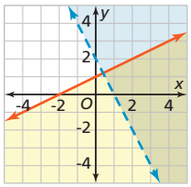


تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. **ابحث عن العلاقات** ما الفرق بين موقفين من الحياة اليومية أحدهما الوصف الأفضل له يكون باستعمال نظام متباينات خطية والآخر الوصف الأفضل له يكون باستعمال متباينة خطية واحدة ؟

11. **حلّل الخطأ** أوجد خطأ أحمد عند كتابة نظام المتباينات الخطية الممثّل في التمثيل البياني أدناه، ثم صحّح هذا الخطأ.



معادلة المستقيم الحدودي الأحمر هي $y = 0.5x + 1$
بما أن الخط متصل، نستعمل ≥ أو ≤.
معادلة المستقيم الحدودي الأزرق هي $y = -2x + 2$
بما أن المستقيم متقطع، نستعمل < أو >.

$y \le 0.5x + 1$
$y < -2x + 2$

12. **روابط في الرياضيات** ما وجه الشبه والاختلاف بين نظام من متباينتين خطيتين في متغيرين ونظام من معادلتين خطيتين في متغيرين ؟

13. **برّر منطقيًا** في مثال 3، ليس للمتباينة الخطية معنى إلا في الربع الأول فقط. ما المتباينتان الخطيتان اللتان يمكنك إضافتهما إلى النظام لتبيّن ذلك ؟ وضّح إجابتك.

14. **مهارات التفكير العليا** هل يمكنك كتابة نظام من ثلاث المتباينتان الخطيتان ليس له حل ؟ وضّح إجابتك.

15. **برّر منطقيًا** هل يمكن أن تكوّن حلول نظام متباينات خطية منطقة مستطيلة الشكل ؟ إن كان ذلك ممكنًا، أعطِ مثالًا.

تدرّب

في التمارين 16-27، مثّل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.

انظر المثالين 1 و 3

16. $y < 2x + 1$
$y \le -x - 4$

17. $y \le 3x - 2$
$y > x - 2$

18. $y \ge -\frac{1}{2}x + 1$
$y > x + 3$

19. $y < \frac{1}{3}x$
$y \ge -4x + 1$

20. $2x + 3y < 5$
$y \ge 2x - 3$

21. $x + 4y > 3$
$x - y \le 2$

22. $y > 0.3x + 2$
$y < -0.2x + 1$

23. $y \le 0.25x - 4$
$y \ge -x - 3$

24. $y < -2x - 5$
$4x - y < 3$

25. $-6x + 4y \ge 8$
$y < -x - 1$

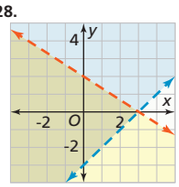
26. $x > 1$
$y < 2x - 3$
$y > x$

27. $y \le -3x$
$y > -x - 2$
$y > 2$

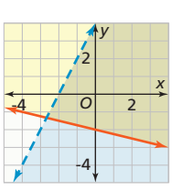
في التمارين 28-31، أوجد نظام المتباينات الخطية المبيّن أدناه في كل تمثيل بياني.

انظر المثالين 2 و 3

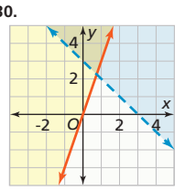
28.



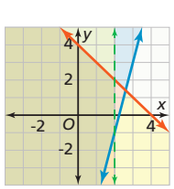
29.



30.

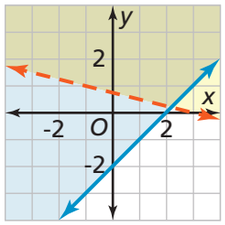


31.

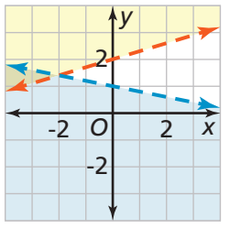


www.jnob-jo.com

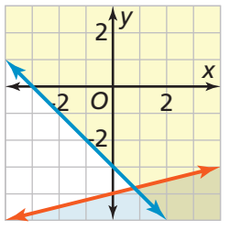
21.



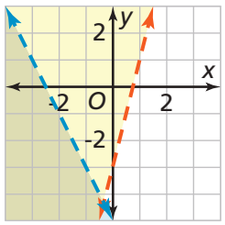
22.



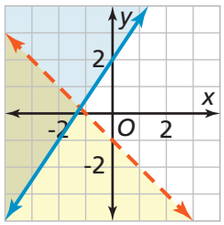
23.



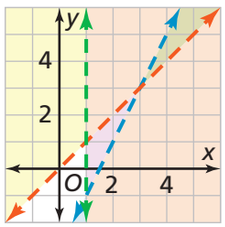
24.



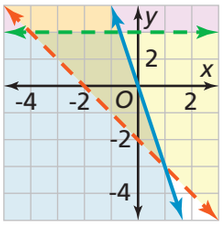
25.



26.



27.



28. $y < -\frac{2x}{3} + 2$
$y > x - 3$

29. $y < 2x + 4$
$y \geq -\left(\frac{1}{4}\right)x - 2$

30. $y \geq 3x$
$y > -x + 3$

31. $y \leq -x + 4$
$y \geq 4x - 9$
$x < 2$

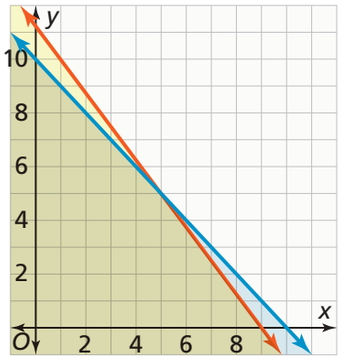
www.jnob-jo.com

الإجابات

.32 $x + y \le 10$

$5x + 4y \le 45$

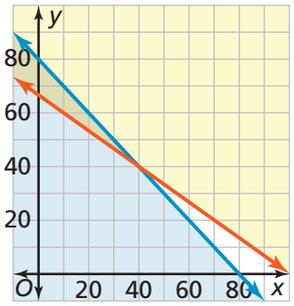
- 4 تذاكر من القسم A و 6 تذاكر من القسم B.
- 5 تذاكر من القسم A و 5 تذاكر من القسم B.
- 2 تذاكر من القسم A و 8 تذاكر من القسم B.



.33 $x + y \le 80$

$2x + 3y \ge 200$ أو $40x + 60y \ge 4000$

أقل عدد من ساعات العمل 0 ساعة كعامل في البناء مع $66\frac{2}{3}$ ساعة كحارس ليلي.



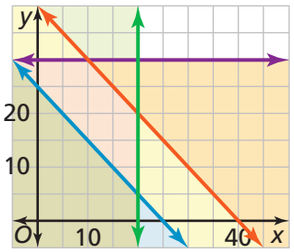
34. $x + y \le 40$

$x \le 20$

$y \le 30$

$x + y \ge 25$

مع تعريف نظام المتباينات الخطية من خلال متباينة إضافية $x \ge y$ وهذا يقلل عدد الحلول الممكنة.



.35 التمثيلان البيانيان لفاطمة ولمنال هما غير صحيحين. الخطوط الحدودية للمتباينتين الخطيتين في النظام المعطى لكل منهما ميل موجب، ولكن أحد المستقيمين الحدوديين يبيّن أن له ميلًا سالبًا.

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

.32 **فكّر وثابر في الحل** تريد مجموعة مكوّنة من 10 أشخاص على الأكثر شراء تشكيلة من التذاكر لمقاعد في القسم A والقسم B لحضور مباراة في كرة القدم، على ألا تزيد تكلفة التذاكر عن QR 450.

مثّل بيانيًا نظام المتباينات الخطية الذي يمثّل تشكيلة التذاكر التي يمكن لهذه المجموعة شراءها.

اذكر ثلاث تشكيلات ممكنة تستطيع المجموعة شراءها.

.33 **نمذج** يتقاضى راشد QR 40 في الساعة من عمله في البناء نهارًا و QR 60 في الساعة من عمله حارسًا ليليًا. هدف راشد هو تحصيل QR 4 000 على الأقل في نهاية الشهر شرط ألا يعمل أكثر من 80 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية ذات متغيرين يمثّل عدد الساعات التي يمكن أن يعملها راشد في كل مهنة لتحقيق هدفه. مثّل هذا النظام بيانيًا ثم أوجد أقل عدد من الساعات يمكن أن يعملها راشد ويحقق هدفه في الوقت نفسه.

.34 **فكّر وثابر في الحل** تخيط خديجة قبعات وأوشحة لبيعها في معرض فني. يمكنها صنع 20 قبعة و 30 وشاحًا كحد أقصى قبل حلول موعد افتتاح المعرض، ولكن لا يمكنها صنع أكثر من 40 قطعة في الإجمال. اكتب نظام متباينات خطية يبيّن الأعداد الممكنة من القبعات والأوشحة التي يمكن أن تحضرها خديجة إلى المعرض إذا أرادت إحضار 25 قطعة على الأقل، ومثّل هذا النظام بيانيًا. كيف تتغير الحلول إذا صنعت خديجة قبعات أكثر من الأوشحة ؟ وضّح إجابتك.

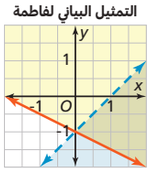
.35 **ابن الحجج الرياضية** مثّلت كل من فاطمة ومنال نظام المتباينات الخطية التالي بيانيًا.

$y \ge \frac{1}{2}x - 1$

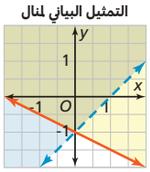
$x - y > 1$

أي تمثيل بياني هو الصحيح ؟ وضّح إجابتك.

التمثيل البياني لفاطمة

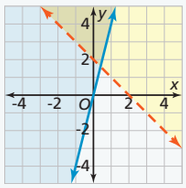


التمثيل البياني لمنال



تدرَّب على اختبار

استعمل التمثيل البياني التالي لحل التمرينين 36 و 37



.36 املأ الفراغات لإكمال نظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني.

y ___ $-x +$ ___

y ___ $4x$

.37 **اختبار SAT/ACT** أي مما يلي حل لنظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني ؟

Ⓐ $(3 , 2)$ Ⓑ $(-3 , 2)$

Ⓒ $(-1 , 4)$ Ⓓ $(1 , -4)$

.38 **مهمة أدائية** وضع ناصر جدولًا أسبوعيًا لممارسة رياضتي الجري والسباحة. لكن لا يمكنه تخصيص أكثر من 12 ساعة في الأسبوع لممارسة الرياضة. يوضّح الشكل أدناه مقادير الزمن التي يريد قضاءها في ممارسة الجري والسباحة.

الجزء A اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل هذا الموقف.

الجزء B مثّل نظام المتباينات بيانيًا. هل هناك حد أدنى لعدد الساعات التي يجب أن يقضيها ناصر في الجري ؟ وضّح إجابتك.

.36 $y > -x + 2$

$y \ge 4x$

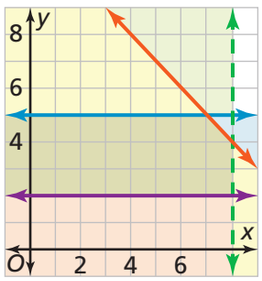
.37 C

.38 **الجزء A** نظام المتباينات الخطية: $x + y \le 12$

$y \ge 2 , x < 8$

$y \le 5$

الجزء B نعم. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبيّن صورة الساعة أن بإمكان ناصر الجري بين 2 ساعة و 5 ساعات كل أسبوع ضمنًا. القيمة الصغرى لساعات الجري أسبوعيًا هي 2 ساعة.



www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مراجعة الوحدة

الوحدة 2

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- الدالة الخطية
- حل نظام متباينات خطية
- المتباينة الخطية ذات المتغيرين
- نظام متباينات خطية

2. يتكون _____ من متباينتين خطيتين أو أكثر.
3. _____ هي متباينة لها نفس صورة المعادلة الخطية ولكنها تتضمن رمز متباينة بديلًا عن رمز المساواة.
4. _____ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل جميع المتباينات صحيحة.
5. تُمثّل _____ بيانيًا بمستقيم.

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-2 العلاقات والدوال

مراجعة سريعة

الدالة هي علاقة ترتبط فيها مدخلة أو عنصر في المجال بمخرجة واحدة أو بعنصر واحد فقط في المدى.

مثال

حدّد المجال والمدى لمجموعة الأزواج المرتبة الموضّحة أدناه. هل تمثّل الأزواج المرتبة دالة ؟ برّر إجابتك.

x	−2	0	3	5	9
y	−3.5	−1.5	1.5	3.5	7.5

المجال هو {−2, 0, 3, 5, 9}.

المدى هو {−3.5, −1.5, 1.5, 3.5, 7.5}.

يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المدى، لذا فإن الأزواج المرتبة تمثّل دالة.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 6 و 7، حدّد المجال والمدى لكل علاقة أدناه. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

6. {(4 , 1), (2 , 3), (0 , 4), (5 , 3)}

7.

x	−1	−5	4	0	2
y	−5	−2	0	3	2

برّر منطقيًا في التمرينين 8 و 9، هل يتضمن المجال المنطقي كل الأعداد الحقيقية ؟ وضّح إجابتك.

8. شرب شخص n مللتر من زجاجة مياه غازية سعتها 590 مللتر.
9. طبعت طابعة p من الصفحات بمعدل 25 صفحة في الدقيقة.

ابن الحجج الرياضية في التمرينين 10 و 11، ما القيود على المجال، إن وجدت ؟ برّر إجابتك.

10. أقلعت طائرة وظلّت ترتفع بسرعة 1000 ft/min مدّة m دقيقة إلى أن بلغت ارتفاع المسار المقرر لها.
11. تتناقص قيمة سيارة ثمنها d ريال بنسبة 10% تقريبًا كل سنة.

الوحدة 2 مراجعة الوحدة 83

مراجعة الوحدة 2

تقديم السؤال الأساس

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمينها أمثلة تدعمها. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- تصف الدالة علاقة، بحيث ترتبط كل قيمة مدخلة بقيمة مخرجة واحدة فقط.
- عندما يكون ناتج قسمة التغير في قيمة y على التغير في قيمة x ثابتًا، تكون الدالة خطية ويكون تمثيلها البياني مستقيمًا.
- يمكن استعمال الدوال الخطية لتوقع قيمة متغير واحد كالمسافة، بمعلومية قيمة متغير آخر كالزمن.
- تبين أنظمة المتباينات الخطية مجال قيم المتغيرات للحل.

الإجابات

2. نظام متباينات خطية
3. المتباينة الخطية ذات المتغيرين
4. حل نظام متباينات خطية
5. الدالة الخطية
6. المجال: {0, 2, 4, 5}؛ المدى: {1, 3, 4}؛ العلاقة دالة لأن لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط.
7. المجال: {−5, −1, 0, 2, 4}؛ المدى: {−5, −2, 0, 2, 3}؛ العلاقة دالة لأن لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط.
8. لا يمكن أن تكون كل الأعداد الحقيقية مجالاً منطقيًا لأن عدد مللترات المياه لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.
9. لا يمكن أن تكون كل الأعداد الحقيقية مجالًا منطقيًا لأن عدد الصفحات المطبوعة لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.
10. القيود على المجال: أن يكون أكبر من الصفر وأقل من ارتفاع منطقي ما.
11. القيود على المجال: أن يكون أكبر من الصفر وأقل من قيمة السيارة الجديدة.

www.jnob-jo.com

الدرس 2-2 الدوال الخطية

مراجعة سريعة

الدالة الخطية هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم، وتمثّل علاقة خطيّة بين متغيرين. تكتب الدالة الخطية بمعلومية **رمز الدالة**: $f(x) = mx + b$ و $f(x)$ تقرأ "f عند x".

مثال

تفرض شركة سيارات أجرة مبلغًا أوليًا قيمته QR 14 يضاف إليه QR 3.50 عن كل ميل تقطعه السيارة. اكتب دالة خطية يمكن استعمالها لتحديد تكلفة رحلة مسافتها x ميل. أوجد تكلفة رحلة مسافتها 4 أميال.

لتكن d مسافة الرحلة.

المبلغ الأولي + تكلفة الميل × المسافة = تكلفة الرحلة

$f(d) = 3.50d + 14$

استعمل الدالة لإيجاد تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 miles.

$f(4) = (3.50)(4) + 14$

$= 28$

إذن، تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 أميال هي QR 28.

تدرّب وحل مسائل

في التمرينين 12 و 13، أوجد قيمة الدالة عند كل عنصر من عناصر المجال {4, 2, 0, −2, −4}.

12. $f(x) = 2x - 1$ 13. $f(t) = -3(t - 2)$

14. **فكّر وثابر في الحل** تسعّر شركة للتصميم الجرافيكي المشاريع التي تنفذّها على أساس التكلفة لكل صفحة بالإضافة إلى مبلغ ثابت تتقاضاه الشركة مقابل إجراءات إعداد المشروع. بيّن الجدول أدناه إيرادات الشركة الناتجة عن تنفيذ مشاريعها الأربعة الأخيرة. أوجد تسعيرة الصفحة الواحدة ومقدار المبلغ الثابت.

التكلفة (QR)	740	1 340	1 940	2 540
عدد الصفحات	2	4	6	8

15. **استعمل البنية** يعمل أحمد في صيانة الحواسيب ويتقاضى أجره بالساعة كما يبيّن الجدول أدناه. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول. إذا استغرقت صيانة أحد الحواسيب 5.5 ساعة وكانت تكلفة قطع الغيار QR 720، أوجد التكلفة الإجمالية.

عدد الساعات	1	1.5	2	2.5
الأجرة (QR)	340	510	680	850

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية

مراجعة سريعة

إن **تحويل** دالة خطية f ينقل كل نقطة من تمثيلها البياني إلى موقع جديد. تحرك **الإزاحات** كل نقاط التمثيل البياني المسافة نفسها أفقيًا أو رأسيًا أو كلاهما. يؤثر **التمدد والتضيّق** في التمثيلات البيانية أفقيًا أو رأسيًا.

مثال

لدينا الدالة $f(x) = 2x - 1$. إذا كانت $g(x) = (2x - 1) + 3$، قارن بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f.

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.

تدرّب وحل مسائل

في التمرينين 16 و 17، إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x$، كيف تؤثر إضافة ثابت إلى مَخرجة الدالة f على تمثيلها البياني ؟

16. $f(x) = x - 2$ 17. $f(x) = x + 5$

في التمرينين 18 و 19، إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = 4x - 5$، قارن بين التمثيل البياني للدالة g و التمثيل البياني للدالة f.

18. $g(x) = 4(x - 3) - 5$ 19. $g(x) = 2(4x - 5)$

20. **برّر منطقيًا** إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = -3x + 9$، كيف يؤثر ضرب مَخرجة الدالة f في 2 على الميل والمقطع y للتمثيل البياني ؟

21. **نمذج** يتقاضى مركز الخدمات في أحد الفنادق مبلغ QR 160 في الساعة مقابل استئجار حاسوب بالإضافة إلى تأمين إلزامي مقداره QR 260. يمكن نمذجة التكلفة الإجمالية لاستئجار حاسوب بالدالة الخطية $f(x) = 160x + 260$. كيف تتغير المعادلة إذا قرّر المركز زيادة مبلغ التأمين بمقدار QR 60 ؟

84 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الإجابات

12. $\{-9, -5, -1, 3, 7\}$

13. $\{18, 12, 6, 0, -6\}$

14. تسعيرة الصفحة الواحدة QR 300؛ مقدار المبلغ الثابت QR 140.

15. $y = 340(5.5) + 720 = \text{QR } 2\,590$

16. إزاحة وحدتين إلى الأسفل.

17. إزاحة 5 وحدات إلى الأعلى.

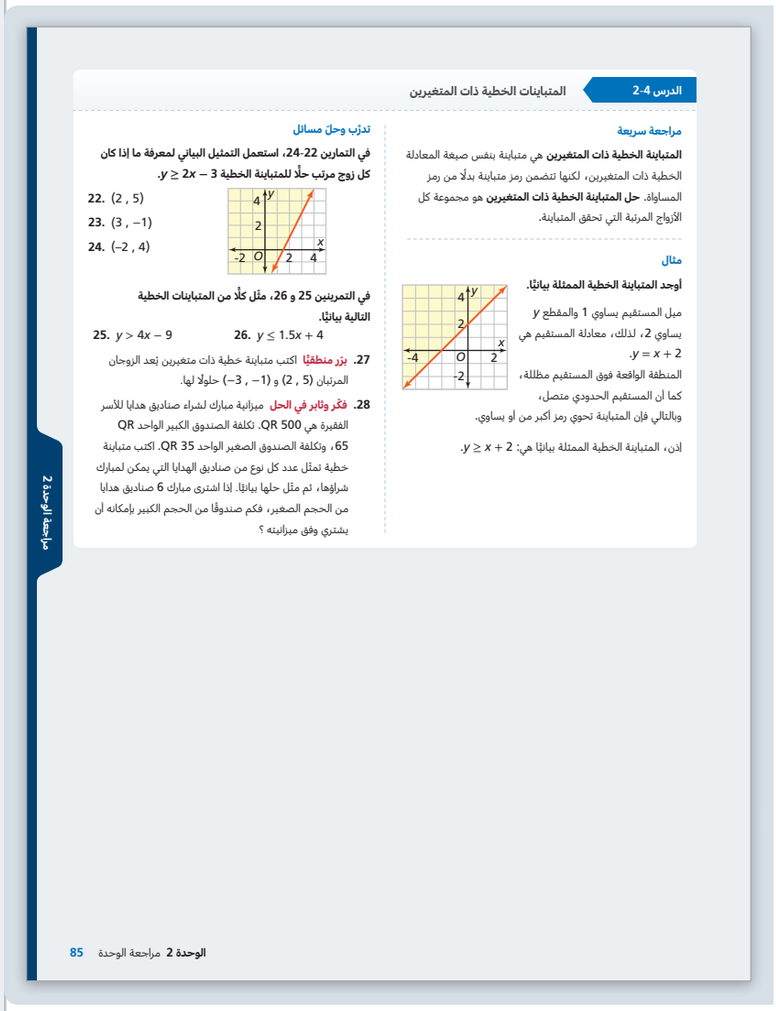
18. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة التمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.

19. التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للدالة f بمعامل تمدد يساوي 2.

20. تتضاعف كل قيمة.

21. $g(x) = 160x + 320$

www.jnob-jo.com



الدرس 2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين

مراجعة سريعة

المتباينة الخطية ذات المتغيرين هي متباينة بنفس صيغة المعادلة الخطية ذات المتغيرين، لكنها تتضمن رمز متباينة بدلًا من رمز المساواة. **حل المتباينة الخطية ذات المتغيرين** هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينة.

مثال

أوجد المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا.

ميل المستقيم يساوي 1 والمقطع y يساوي 2، لذلك، معادلة المستقيم هي $y = x + 2$.

المنطقة الواقعة فوق المستقيم مظللة، كما أن المستقيم الحدودي متصل، وبالتالي فإن المتباينة تحوي رمز أكبر من أو يساوي.

إذن، المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا هي: $y \geq x + 2$.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 22-24، استعمل التمثيل البياني لمعرفة ما إذا كان كل زوج مرتب حلًّا للمتباينة الخطية $y \geq 2x - 3$.

22. (2 , 5)
23. (3 , –1)
24. (–2 , 4)

في التمرينين 25 و 26، مثّل كلًّا من المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

25. $y > 4x - 9$
26. $y \leq 1.5x + 4$

27. **برّر منطقيًّا** اكتب متباينة خطية ذات متغيرين يُعد الزوجان المرتبان (5 , 2) و (1– , 3–) حلولًا لها.

28. **فكّر وثابر في الحل** ميزانية مبارك لشراء صناديق هدايا للأسر الفقيرة هي 500 QR. تكلفة الصندوق الكبير الواحد QR 65، وتكلفة الصندوق الصغير الواحد QR 35. اكتب متباينة خطية تمثّل عدد كل نوع من صناديق الهدايا التي يمكن لمبارك شراؤها، ثم مثّل حلها بيانيًا. إذا اشترى مبارك 6 صناديق هدايا من الحجم الصغير، فكم صندوقًا من الحجم الكبير بإمكانه أن يشتري وفق ميزانيته ؟

الوحدة 2 مراجعة الوحدة 85

مراجعة الوحدة 2

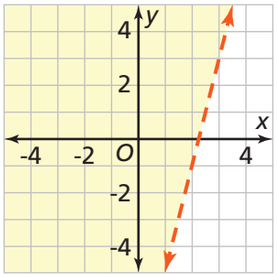
الإجابات

.22 نعم

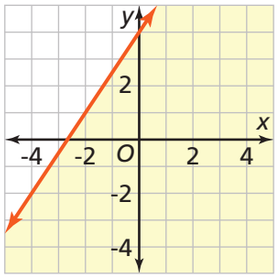
.23 كلا

.24 نعم

.25

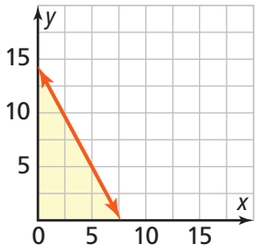


.26



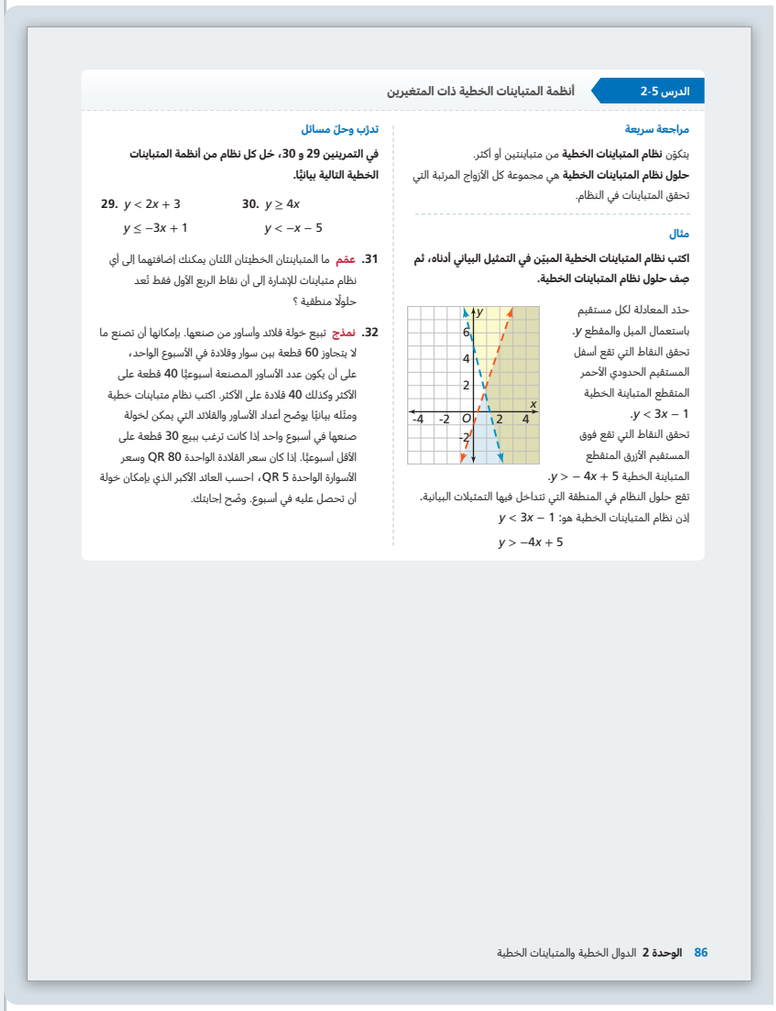
.27 قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y < x + 4$

.28 $65x + 35y \leq 500$



4 صناديق هدايا من الحجم الكبير

www.jnob-jo.com



الدرس 2-5 أنظمة المتباينات الخطية ذات المتغيرين

مراجعة سريعة

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** من متباينتين أو أكثر.

حلول نظام المتباينات الخطية هي مجموعة كل الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينات في النظام.

مثال

اكتب نظام المتباينات الخطية المبيّن في التمثيل البياني أدناه، ثم صِف حلول نظام المتباينات الخطية.

حدّد المعادلة لكل مستقيم باستعمال الميل والمقطع y.

تحقق النقاط التي تقع أسفل المستقيم الحدودي الأحمر المتقطع المتباينة الخطية $y < 3x - 1$.

تحقق النقاط التي تقع فوق المستقيم الأزرق المتقطع المتباينة الخطية $y > -4x + 5$.

تقع حلول النظام في المنطقة التي تتداخل فيها التمثيلات البيانية.

إذن نظام المتباينات الخطية هو: $y < 3x - 1$

$y > -4x + 5$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 29 و 30، حل كل نظام من أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

29. $y < 2x + 3$
$y \le -3x + 1$

30. $y \ge 4x$
$y < -x - 5$

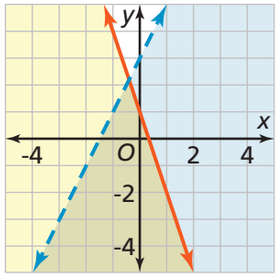
31. **عمّم** ما المتباينتان الخطيتان اللتان يمكنك إضافتهما إلى أي نظام متباينات للإشارة إلى أن نقاط الربع الأول فقط تُعد حلولًا منطقية ؟

32. **نمذج** تبيع خولة قلائد وأساور من صنعها. بإمكانها أن تصنع ما لا يتجاوز 60 قطعة بين سوار وقلادة في الأسبوع الواحد، على أن يكون عدد الأساور المصنعة أسبوعيًا 40 قطعة على الأكثر وكذلك 40 قلادة على الأكثر. اكتب نظام متباينات خطية ومثّله بيانيًا يوضح أعداد الأساور والقلائد التي يمكن لخولة صنعها في أسبوع واحد إذا كانت ترغب ببيع 30 قطعة على الأقل أسبوعيًا. إذا كان سعر القلادة الواحدة 80 QR وسعر الأسوارة الواحدة 5 QR، احسب العائد الأكبر الذي بإمكان خولة أن تحصل عليه في أسبوع. وضّح إجابتك.

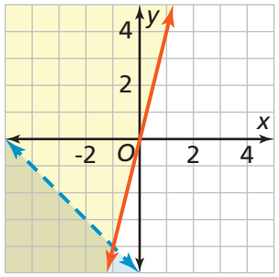
86 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الإجابات

.29



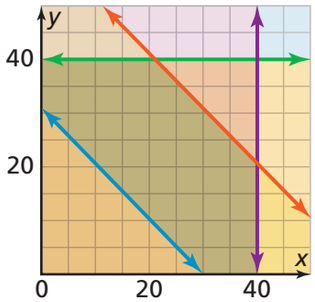
.30



31. $x \ge 0, y \ge 0$

.32

$x + y \le 60$
$x + y \ge 30$
$x \ge 0$
$x \le 40$
$y \ge 0$
$y \le 40$



العائد الأكبر عندما تبيع خولة 40 قلادة و 20 سوارًا، أي 900 QR

www.jnob-jo.com

الإنشاءات الهندسية

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعلم الطلاب كيفية إنشاء مستطيل ذهبي، ويقررون كيف يستعملون مستطيلًا ذهبيًا في تصميم جهاز لوحي وشاشة رقمية.

قد يرغب بعض الطلاب في البحث عن أمثلة أخرى للمستطيلات الذهبية أو عن استعمال النسبة الذهبية في الفن. قد يواجه طلاب آخرون صعوبات في التعامل مع المقدار الجبري $\frac{x}{1} = \frac{1}{(x-1)}$. حاول تركيز النقاش على القيمة الدقيقة للنسبة الذهبية وليس على قيمتها التقريبية 1.618

تقديم المشروع

قدّم المشروع بمناقشة الأنواع المختلفة من الشاشات الرقمية التي يراها الطلاب في حياتهم اليومية. اعرض على الطلاب مستطيلًا ذهبيًا واطلب منهم مقارنته بالمستطيلات الأخرى.

يمكن استعمال الأسئلة أدناه لتوجيه النقاش.

س: ما هي أنواع الشاشات الرقمية التي تراها في يوم واحد ؟
ما الذي يجعلها مختلفة عن بعضها بعضًا غير قياساتها ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : شاشات الهواتف الذكية، شاشات الكمبيوتر، شاشات أجهزة التلفاز؛ هذه الشاشات عبارة عن مستطيلات مختلفة الشكل.]

س: من بين الشاشات الرقمية التي تشاهدها باستمرار، أيّ منها مريحة أكثر للنظر ؟
ما سبب ذلك في رأيك ؟
[قد تتنوع الإجابات. من المتوقع أن يتحدث بعض الطلاب عن قياسات الشاشات الرقمية؛ ابحث عن الطلاب الذين يقدّمون أسبابًا أخرى.]

س: ماذا تعرف عن المستطيل الذهبي ؟
[قد تتنوع الإجابات. ابحث عن الطلاب الذين يتحدثون عن النسب.]

اطلب من الطلاب قراءة المهمة التي سيُطلب منهم إنجازها.

إنهاء المشروع

شجّع الطلاب المهتمين بمعرفة المزيد عن المستطيل الذهبي على التفكير في المعادلة $\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$، عندما $a = 1$. ما قيمة b ؟

قد ترغب في تخصيص يوم يتشارك فيه الطلاب أفكارهم عن الأجهزة اللوحية والشاشات الرقمية. شجّع الطلاب على شرح عملية إنجاز المشروع والنتائج التي توصّلوا إليها.

الوحدة 3 مشروع STEM

هل تعلم؟

اكتشفت النسبة الذهبية، $(1 + \sqrt{5}) : 2$، في الرياضيات منذ ما يقرب من 2400 عام. المستطيل الذي تكون النسبة بين أطوال أضلاعه النسبة الذهبية يسمّى مستطيلًا ذهبيًا.

$$(1 + \sqrt{5}) : 2$$

الباب الرئيسي لقصر تاج محل، الموجود في مدينة آغرا بالهند، على شكل مستطيل ذهبي.

مهمّتك: تصميم جهاز لوحي

تشهد سوق الأجهزة اللوحية نموًا متسارعًا، حيث يُشحن أكثر من 38 مليون جهاز لوحي حول العالم كل ثلاثة أشهر. حيث تجاوز الشحن السنوي 189 مليون جهاز لوحي بحلول عام 2019. في هذا المشروع، ستعمل على تصميم جهاز لوحي مستعملًا النسبة الذهبية في تصميمك.

88 الوحدة 3 مشروع STEM

www.jnob-jo.com

الإنشاءات الهندسية

مقدمة الوحدة

الوحدة 3

الإنشاءات الهندسية

السؤال الأساس

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 3-1 قياس القطع المستقيمة والزوايا — 3-1 Measuring Segments and Angles
- 3-2 الإنشاءات الهندسية الأساسية — 3-2 Basic Constructions
- 3-3 نقطة المنتصف والمسافة — 3-3 Midpoint and Distance
- 3-4 الاستدلال الاستقرائي — 3-4 Inductive Reasoning
- 3-5 كتابة البراهين — 3-5 Writing Proofs

86 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مصطلحات الوحدة

- النقاط المتسامتة
- مستقيم
- مستوى
- نقطة
- مسلّمة
- إنشاء هندسي
- منصّف عمودي
- منصّف الزاوية
- نقطة المنتصف
- تخمين
- مثال مضاد
- استدلال استقرائي
- فقرة برهانية
- برهان
- نظرية
- برهان في جدول من عمودين

Topic Vocabulary

- collinear points
- line
- plane
- point
- postulate
- construction
- perpendicular bisector
- angle bisector
- midpoint
- conjecture
- counterexample
- inductive reasoning
- paragraph proof
- proof
- theorem
- two-column proof

الوحدة 3

87 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

السؤال الأساس للوحدة

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 135 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-3

قياس القطع المستقيمة والزوايا

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ توضيح تعريفي الزاوية والقطعة المستقيمة بدقة باستعمال مصطلحات بديهية مثل: النقطة، والمستقيم، والمستوى.

✔ استعمال القيمة المطلقة ومسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.

✔ استعمال مسلّمة المنقلة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا.

✔ تحديد القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة.

الفهم الأساس

مجموع أطوال جميع أجزاء قطعة مستقيمة يساوي طول هذه القطعة المستقيمة.

مجموع قياسَي زاويتين صغيرتين تكوّنان زاوية كبيرة يساوي قياس نفس الزاوية الكبيرة.

تركيز

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- فهم أن القيمة المطلقة لعدد تساوي المسافة التي يبعدها عن الصفر على خط الأعداد.
- تصنيف الزوايا وفقًا لقياساتها.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تعريف الزاوية والقطعة المستقيمة بدقة.
- إيجاد طول قطعة مستقيمة أو جزء من قطعة مستقيمة باستعمال القيمة المطلقة أو مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.
- إيجاد قياس زاوية باستعمال المنقلة أو مسلّمة جمع قياسات الزوايا.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- إيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- إثبات نظريات هندسية تتضمّن قياسات زوايا وأطوال قطع مستقيمة.

ترابط

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب كيفية إيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا، ويفسرون الرموز التي تمثل التطابق.
- يستعمل الطلاب المسلّمات والجبر لإيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا.

دقة

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **عدد غير نسبي** | *irrational number*
- **عدد نسبي** | *rational number*
- **عدد حقيقي** | *real number*

المصطلحات الجديدة

- **نقاط متسامتة** | *collinear points*
- **مستقيم** | *line*
- **مستوى** | *plane*
- **نقطة** | *point*
- **مسلّمة** | *postulate*

نشاط المصطلحات

ذكّر الطلاب بأن الأعداد النسبية هي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$، وأن الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اطلب من الطلاب تصنيف الأعداد التالية إلى نسبي أو غير نسبي، وتوضيح تبريراتهم المنطقية لهذا التصنيف.

1. 8 **[نسبي]**

2. $-\frac{3}{2}$ **[نسبي]**

3. $\sqrt{18}$ **[غير نسبي]**

4. π **[غير نسبي]**

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.1 يدرك التعريفات الدقيقة للزاوية والدائرة والمستقيمات المتوازية والمتعامدة والقطعة المستقيمة بناءً على البديهيات (النقطة، المستقيم، المستوى) والمسافة على الخط المستقيم والمسافة حول قوس الدائرة.

معايير ممارسات الرياضيات

فكّر في المسائل وثابر في حلها

يوضح الطلاب مدى تطابق المعادلات والمخططات التي تتضمّن أطوال قطع مستقيمة أو قياسات زوايا.

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يفكّر الطلاب في الوحدات ومعنى الكميات عند إيجاد طول قطعة مستقيمة أو قياس زاوية.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يجد الطلاب طول قطعة مستقيمة باستعمال طرق مختلفة، ويقارنون بين هذه الطرق لتحديد الطريقة الأفضل.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن موقعي النقطتين A و B على خط الأعداد ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : تقع النقطة A إلى يسار 0؛ بينما تقع النقطة B إلى يمين 0]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل المسافة بين A و B هي نفس المسافة بين B و A ؟ وضّح إجابتك.

[نعم؛ إحداثيات النقطتين A و B ثابتة، لذا فإن المسافة بينهما هي نفسها بغضّ النظر عن نقطة "البداية".]

س: كم تبعد النقطة A عن 0 ؟ وكم تبعد النقطة B عن 0 ؟ كيف يمكنك استعمال هاتين المسافتين لإيجاد المسافة الإجمالية بين A و B ؟ هل يمكن استعمال هذه الطريقة دائمًا لإيجاد المسافة بين نقطتين ؟

[3 وحدات؛ 5 وحدات؛ أوجد ناتج جمع هاتين المسافتين؛ تُستعمل هذه الطريقة فقط عندما يكون إحداثيا النقطتين متعاكسين.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: إذا كانت نقطة ثالثة C تبعد $3\frac{3}{4}$ وحدات عن كل من A أو B. ما الإحداثيات الممكنة للنقطة C ؟ ما المسافات الممكنة بين A و C ؟ وما المسافات الممكنة بين B و C ؟

[الإحداثيات الممكنة للنقطة C: $8\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $-6\frac{3}{4}$ ؛ المسافات الممكنة بين A و C: $11\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$ ؛ المسافات الممكنة بين B و C: $11\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما المعايير التي استعملتها لتحديد الطريقة التي تفضلها لإيجاد المسافات ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : اختر طريقة لا تستغرق وقتًا طويلًا مثل عدّ الوحدات، وطريقة يمكن استعمالها دائمًا. على سبيل المثال، أوجد في هذه الحالة المسافة بين كل من النقطتين و 0، ثم اجمع المسافتين.]

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عمّم ما الطريقة التي يمكنك تطبيقها لإيجاد المسافة بين أي عددين على خط الأعداد ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : المسافة بين أي عددين على خط الأعداد هي القيمة المطلقة للفرق بينهما.]

كتاب الطالب، صفحة 89

3-1 قياس القطع المستقيمة والزوايا

Measuring Segments and Angles

أستطيع... استعمال خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها.

معيار الدرس 9.4.1

المصطلحات
- النقاط المتسامتة collinear points
- مستقيم line
- مستوى plane
- نقطة point
- مسلّمة postulate

استكشف وبرّر منطقيًّا

حدّد معلم الرياضيات نقطتين على خط الأعداد.

A. عدّد بعضًا من الطرق لإيجاد المسافة بين النقطتين A و B.

B. **ابن الحجج الرياضية** ما الطريقة الأفضل لإيجاد المسافة بين هاتين النقطتين ؟ وضّح إجابتك.

السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. ابدأ من النقطة A، أو -3، ثم عدّ علامات التجزئة حتى تصل إلى النقطة B، أو 5، أو أوجد الفرق بين الإحداثيين 5 و -3

B. أوجد الفرق بين الإحداثيين. إذا كان الفرق موجبًا، فهو يمثّل المسافة بين النقطتين. إذا كان الفرق سالبًا، فإن القيمة المطلقة لهذا الفرق تمثّل المسافة بين النقطتين لأن المسافة لا يمكن أن تكون سالبة. وهذه هي الطريقة الأفضل لأن بالإمكان استعمالها دائمًا بغض النظر عن نوع الإحداثيات.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

سيتعلم الطلاب كيفية إيجاد أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا باستعمال العمليات على الأعداد، والأدوات الهندسية مثل المسطرة والمنقلة، والمسلّمات بما في ذلك مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا.

المفهوم المصطلحات غير المعرَّفة

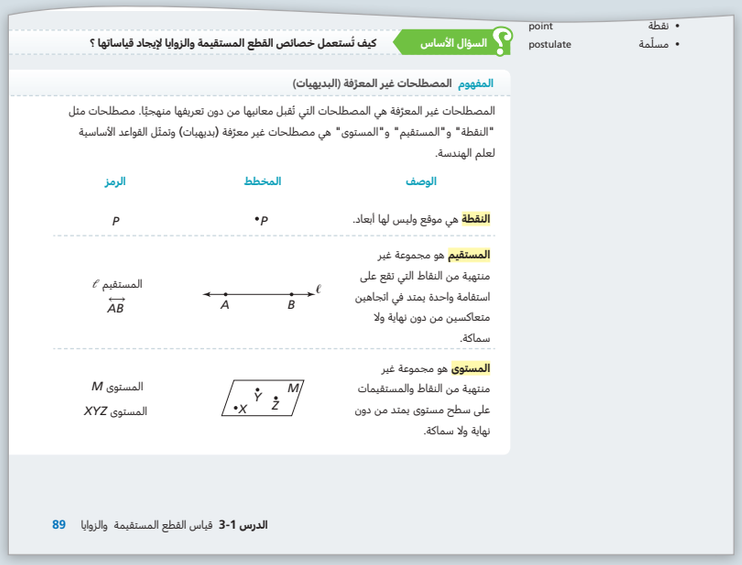
طرح أسئلة هادفة

س: في رأيك، لماذا تعدّ "النقطة" و"المستقيم" و"المستوى" مصطلحات غير معرّفة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنها الأفكار الأساسية التي تُستعمل في تعريف كل الأشكال الهندسية الأخرى.]

س: انظر إلى المستقيم ℓ الذي يمر بالنقطتين A و B. هل تعتقد أن A و B هما النقطتان الوحيدتان على المستقيم ℓ ؟ وضّح إجابتك.
[كلا؛ ينصّ تعريف المستقيم على أنه يتكوّن من مجموعة غير منتهية من النقاط التي تقع على استقامة واحدة.]

س: في رأيك، ما طول المستقيم ℓ ؟ وضّح إجابتك.
[لا يمكن قياسه؛ لأن المستقيم يمتد في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية.]

س: اذكر بعض الأشياء التي نستعملها من واقع الحياة ويمكن استعمالها لتمثيل المستوى. ما الفرق بين هذه الأشياء وبين المستوى ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : ورقة، جدار؛ أبعاد الورقة والجدار منتهية، في حين يمتد المستوى من دون نهاية.]



• نقطة point
• مسلّمة postulate

السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟

المفهوم المصطلحات غير المعرّفة (البديهيات)

المصطلحات غير المعرّفة هي المصطلحات التي تُقبل معانيها من دون تعريفها منهجيًا. مصطلحات مثل "النقطة" و"المستقيم" و"المستوى" هي مصطلحات غير معرّفة (بديهيات) وتمثّل القواعد الأساسية لعلم الهندسة.

الوصف	المخطط	الرمز
النقطة هي موقع وليس لها أبعاد.	P	P
المستقيم هو مجموعة غير منتهية من النقاط التي تقع على استقامة واحدة يمتد في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية ولا سماكة.	A B ℓ	المستقيم ℓ $\overleftrightarrow{AB}$
المستوى هو مجموعة غير منتهية من النقاط والمستقيمات على سطح مستوى يمتد من دون نهاية ولا سماكة.	X Y Z M	المستوى M المستوى XYZ

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 89

www.jnob-jo.com

مثال 1 إيجاد أطوال قطع مستقيمة

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: قارن بين القطعة المستقيمة والشعاع في فقرة المفهوم.
[للقطعة المستقيمة نقطتا نهاية، بينما للشعاع نقطة بداية واحدة ويمتد إلى ما نهايةٍ في الاتجاه الآخر.]

س: قارن بين الشعاعين المتعاكسين والمستقيم.
[الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان متمايزان يتشاركان نفس نقطة البداية ويكوّنان مستقيمًا؛ ويتكوّن المستقيم من عدد لا متناهٍ من النقاط على استقامة واحدة في اتجاهين متعاكسين من دون نهاية.]

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين الشعاعين المتعاكسين والزاوية ؟
[في الحالتين يتشارك الشعاعان نفس نقطة البداية، لكن الشعاعين المتعاكسين يكونان متسامتين، بينما الشعاعان اللذان يكوّنان زاوية لا يكونان متسامتين بالضرورة.]

س: في المثال 1، لماذا يجب أن يكون طول القطعة المستقيمة عددًا موجبًا؟
[الطول مسافة، والمسافة عدد حقيقي موجب دائمًا.]

س: لإيجاد طول $\overline{CD}$، تعدّ وحدات الطول بين C و D. هل يهم إذا قمت بعدّ الوحدات في الاتجاه السالب أو الموجب ؟ وضّح إجابتك.
[كلا؛ عدد وحدات الطول هو نفسه بغض النظر عن اتجاه العدّ.]

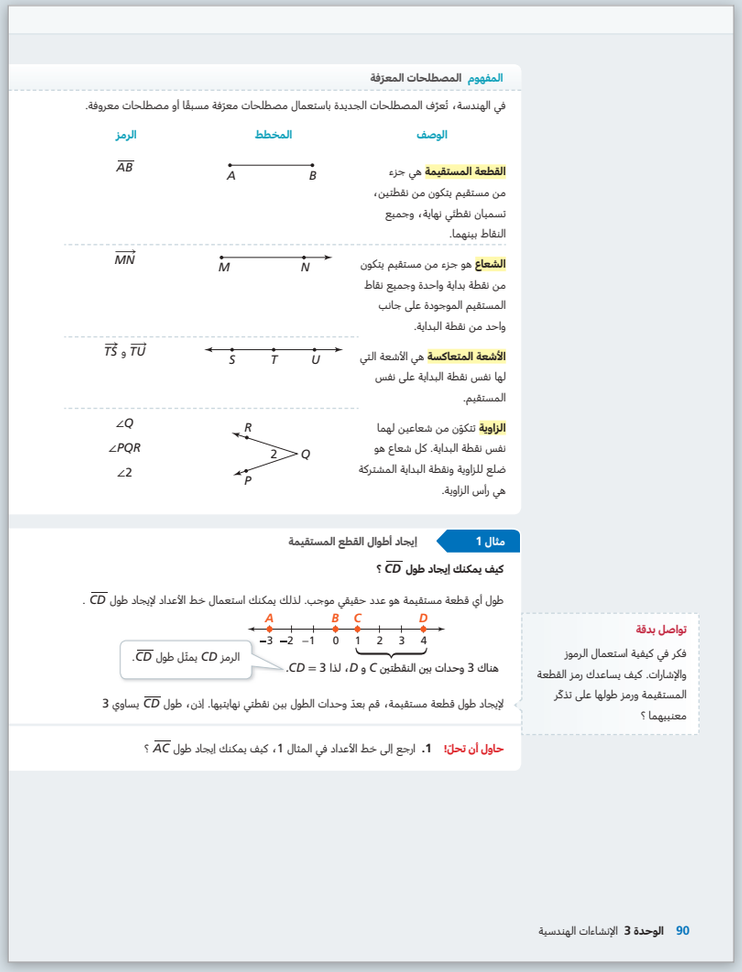
حاول أن تحلّ! الإجابات

1. قم بعدّ وحدات الطول بين النقطتين A و C؛ $AC = 4$.

بناء الطلاقة الاجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ماذا تلاحظ بشأن إحداثي النقطة A ؟ هل يؤثر ذلك في طريقة إيجاد طول $\overline{AC}$ ؟ وضّح إجابتك.
[إحداثي النقطة A عدد سالب. كلا، يمكنك عدّ وحدات الطول بين نقطتي النهاية بغض النظر عن إحداثيي النقطتين.]

س: في رأيك، ما الفرق بين طول $\overline{AC}$ وطول $\overline{CD}$ ؟ وضّح إجابتك.
[يجب أن تكون القطعة المستقيمة AC أطول لأن عدد وحدات الطول بين A و C يبدو أكثر من عددها بين C و D.]



المفهوم المصطلحات المعرّفة

في الهندسة، نُعرّف المصطلحات الجديدة باستعمال مصطلحات معرّفة مسبقًا أو مصطلحات معروفة.

الوصف	المخطط	الرمز
القطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم يتكون من نقطتين، تسميان نقطتي نهاية، وجميع النقاط بينهما.	A B	$\overline{AB}$
الشعاع هو جزء من مستقيم يتكون من نقطة بداية واحدة وجميع نقاط المستقيم الموجودة على جانب واحد من نقطة البداية.	M N	$\overrightarrow{MN}$
الأشعة المتعاكسة هي الأشعة التي لها نفس نقطة البداية على نفس المستقيم.	S T U	$\overrightarrow{TS}$ و $\overrightarrow{TU}$
الزاوية تتكوّن من شعاعين لهما نفس نقطة البداية. كل شعاع هو ضلع للزاوية ونقطة البداية المشتركة هي رأس الزاوية.	R 2 Q P	$\angle Q$ $\angle PQR$ $\angle 2$

مثال 1 إيجاد أطوال القطع المستقيمة

كيف يمكنك إيجاد طول $\overline{CD}$ ؟

طول أي قطعة مستقيمة هو عدد حقيقي موجب. لذلك يمكنك استعمال خط الأعداد لإيجاد طول $\overline{CD}$.

A B C D
−3 −2 −1 0 1 2 3 4

الرمز CD يمثل طول $\overline{CD}$.

هناك 3 وحدات بين النقطتين C و D، لذا $CD = 3$.

لإيجاد طول قطعة مستقيمة، قم بعدّ وحدات الطول بين نقطتي نهايتيها. إذن، طول $\overline{CD}$ يساوي 3

تواصل بدقة
فكر في كيفية استعمال الرموز والإشارات. كيف يساعدك رمز القطعة المستقيمة ورمز طولها على تذكّر معنييهما ؟

حاول أن تحلّ! **1.** ارجع إلى خط الأعداد في المثال 1، كيف يمكنك إيجاد طول $\overline{AC}$ ؟

90 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 في فقرة "حاول أن تحلّ!"، قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في التعامل مع الأعداد السالبة. وضح لهم أن عليهم عدّ الوحدات بين العددين السالبين كما لو أنهما عددان موجبان.

اطلب من الطلاب التدرّب على ذلك من خلال عرض الشكل في المثال 1، ولكن قم بتضمين النقطة K عند -2 والنقطة L عند -1

س: أوجد KD.
[6]

س: أوجد AL.
[2]

س: أوجد KB.
[2]

www.jnob-jo.com

مثال 2 إيجاد طول قطعة مستقيمة

طرح أسئلة هادفة

س: صِف كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين على خط أعداد جبريًا.
[حدّد إحداثيّي النقطتين، ثم اطرح أحد الإحداثيين من الإحداثي الآخر. القيمة المطلقة لناتج الطرح هي المسافة بين النقطتين.]

س: المطلوب في المثال 2 هو إيجاد KL. ماذا يمثل KL، وكيف يمكنك إيجاده ؟
[KL هو عدد يمثل طول $\overline{KL}$؛ أوجد المسافة بين النقطتين K و L.]

س: هل بإمكانك استعمال المقدار $|12 - 16|$ لإيجاد KL ؟ وضّح إجابتك.
[نعم، لأن $|12 - 16| = |-4| = 4$]

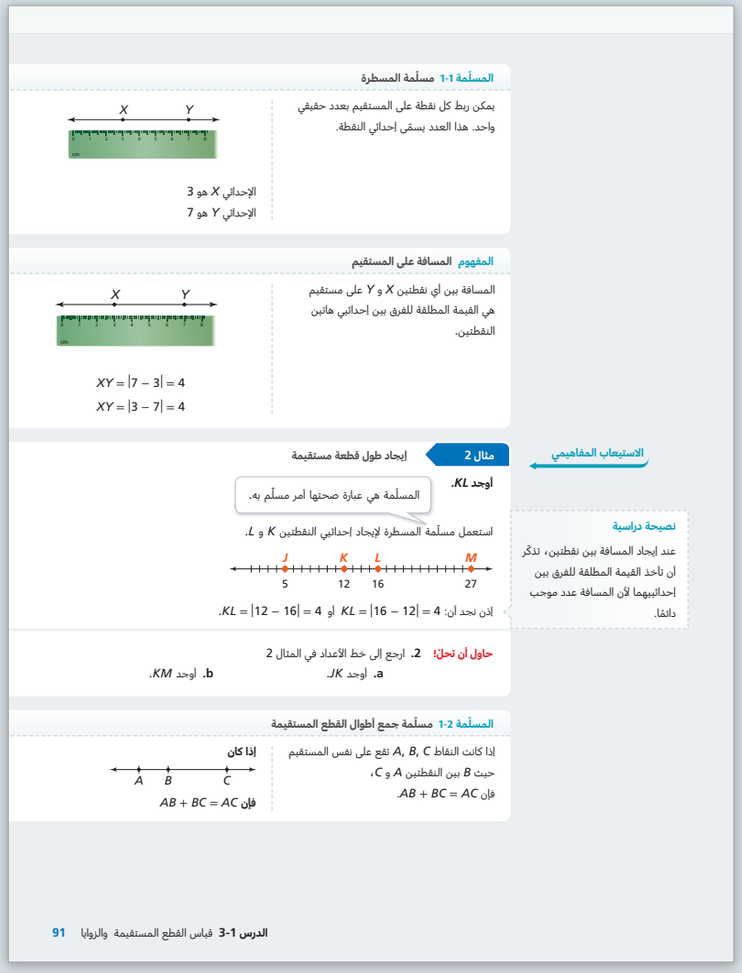
حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. 7 **b.** 15

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: هل يهم الترتيب الذي يُطرح فيه الإحداثيان ؟ وضّح إجابتك.
[كلا، بما أن المسافة هي القيمة المطلقة لناتج الطرح، ستكون المسافة قيمة غير سالبة بغض النظر عن ترتيب عملية الطرح.]

س: في أي ترتيب ستطرح الإحداثيين لإيجاد JK ؟ ولإيجاد KM ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لإيجاد JK، اطرح 5 من 12؛ لإيجاد KM، اطرح 12 من 27؛ إذا طرحت الإحداثي الأصغر من الإحداثي الأكبر يصبح إيجاد طول القطعة المستقيمة أسهل لأن الفرق بين الإحداثيين لا يكون عددًا سالبًا في هذه الحالة.]



المسلّمة 1-1 مسلّمة المسطرة

بمكن ربط كل نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد. هذا العدد يسمّى إحداثي النقطة.

الإحداثي X هو 3
الإحداثي Y هو 7

المفهوم المسافة على المستقيم

المسافة بين أي نقطتين X و Y على مستقيم هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي هاتين النقطتين.

$XY = |7 - 3| = 4$
$XY = |3 - 7| = 4$

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 إيجاد طول قطعة مستقيمة

أوجد KL.

المسلّمة هي عبارة صحتها أمر مسلّم به.

استعمل مسلّمة المسطرة لإيجاد إحداثيي النقطتين K و L.

إذن نجد أن: $KL = |16 - 12| = 4$ أو $KL = |12 - 16| = 4$.

نصيحة دراسية
عند إيجاد المسافة بين نقطتين، تذكّر أن تأخذ القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيهما لأن المسافة عدد موجب دائمًا.

حاول أن تحلّ! 2. ارجع إلى خط الأعداد في المثال 2
a. أوجد JK. **b.** أوجد KM.

المسلّمة 1-2 مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

إذا كانت النقاط A, B, C تقع على نفس المستقيم حيث B بين النقطتين A و C، فإن $AB + BC = AC$.

إذا كان
فإن $AB + BC = AC$

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 91

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب استكشاف هذا المثال الأكثر صعوبةً، والذي يتضمن إيجاد طول قطعة مستقيمة.

تقع النقطة A على خط الأعداد عند -5 والنقطة B عند 7، ما إحداثي النقطة C التي تقع عند $\frac{3}{4}$ المسافة بين A و B ؟

س: ما الذي تحتاج إلى معرفته لتتمكّن من إيجاد إحداثي النقطة C ؟ ما طول $\overline{AB}$ ؟ وضّح إجابتك.
[طول $\overline{AB}$؛ 12؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $|-5 - 7| = |-12| = 12$]

س: ما $\frac{3}{4}$ العدد 12؟ وضّح إجابتك.
[9؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $12\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{36}{4} = 9$]

س: كيف يمكنك إيجاد إحداثي النقطة C ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : أوجد إحداثي النقطة التي تقع بين A و B وتبعد 9 وحدات عن A.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

بناء المهارة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: كيف تعرف أن النقاط F و G و H متسامتة؟
[بما أن F و G و H تقع على نفس المستقيم، فهي متسامتة وفق تعريف النقاط المتسامتة.]

س: ما المعلومة المعطاة عن GH ؟ كيف يمكنك استعمال هذه المعلومة لإيجاد FH ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $GH = 16$ و $GH = 2x + 2$ ؛ ساوِ بين هذين المقدارين وحُل المساواة لإيجاد قيمة x.]

س: في الخطوة 2، كيف تعرف أن بإمكانك استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة لإيجاد FH ؟
[لأن النقاط F و G و H متسامتة، وتقع النقطة G بين النقطتين F و H.]

س: في الخطوة 2، كيف نتجت $5x + 1$ عن $FG + GH$ ؟ ماذا تمثل المعادلة $5x + 1$ ؟
[نتجت عنها لأن $FG = 3x - 1$ و $GH = 2x + 2$ ؛ تجميع الحدود المتشابهة يعطي المقدار الجبري $5x + 1$، الذي يمثّل FH.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. 4 **b.** $JK = 12; KL = 13$

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 3**

ابنِ الحجج الرياضية تقول جميلة : أيًّا تكن القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ على خط الأعداد، فإن $AB = BA$. هل تتفق معها ؟ وضّح إجابتك.

[جميلة على صواب، إذا كان x_A و x_B إحداثيي A و B، فإن $AB = |x_B - x_A|$ و $BA = |x_A - x_B| = |-(x_A - x_B)| = |x_B - x_A| = AB$. إذن $AB = BA$.]

مثال 4 استعمال مسلّمة المنقلة لقياس زاوية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: أي شعاعين يكوّنان $\angle BEC$ ؟
[$\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$]

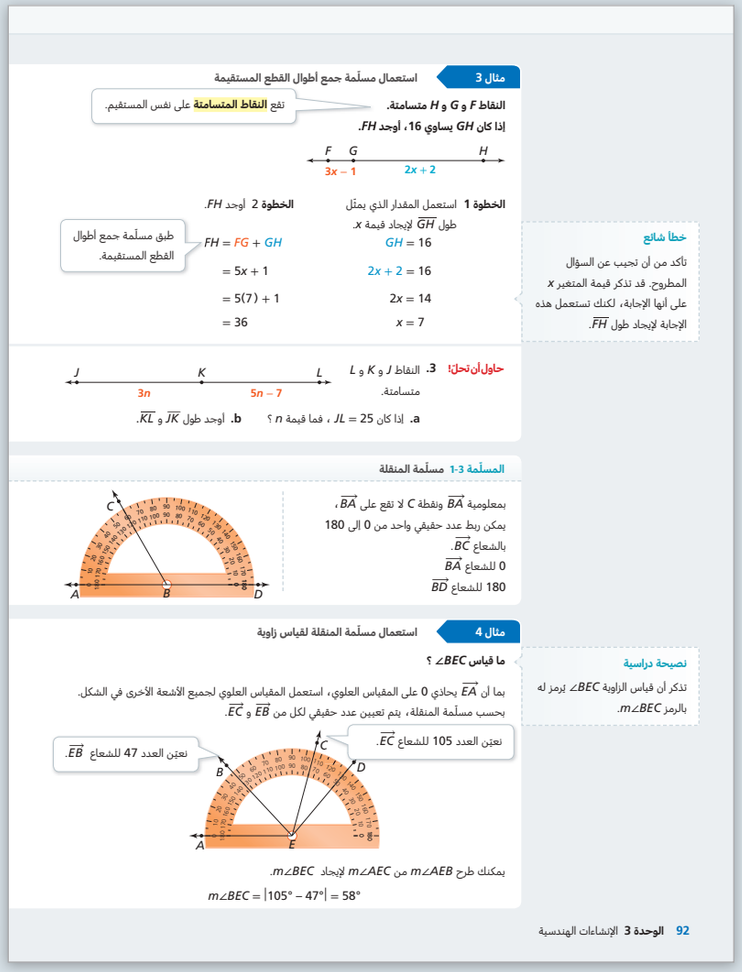
س: أي عدد على المنقلة معيّن للشعاع $\overrightarrow{EB}$ ؟ وأي عدد معيّن للشعاع $\overrightarrow{EC}$ ؟
[47؛ 105؛ $\overrightarrow{EB}$ يحاذي كل من 47 و 133، ولكن بما أن $\overrightarrow{EA}$ يحاذي 0 ويقع 0 في الأعلى، استعمل الأعداد العلوية التي تحاذي $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$، أي 47 و 105.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. 105° **b.** 83°

خطأ شائع

حاول أن تحل! 4 عند قياس زاوية، قد يقوم الطلاب بمحاذاة أحد الشعاعين مع الحافة السفلية للمنقلة. إذا حدث ذلك، وضح أن الفتحة الصغيرة في مركز المنقلة يجب وضعها على رأس الزاوية وأن "نهاية" الشعاع يجب أن يكون بمحاذاة 0، اعرض ذلك باستعمال منقلة كبيرة على السبورة.



مثال 3 استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

النقاط F و G و H متسامتة. تقع النقاط المتسامتة على نفس المستقيم.
إذا كان GH يساوي 16، أوجد FH.

F G H
$3x - 1$ $2x + 2$

الخطوة 1 استعمل المقدار الذي يمثّل طول $\overline{GH}$ لإيجاد قيمة x.

$GH = 16$
$2x + 2 = 16$
$2x = 14$
$x = 7$

الخطوة 2 أوجد FH.

طبق مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.

$FH = FG + GH$
$= 5x + 1$
$= 5(7) + 1$
$= 36$

خطأ شائع
تأكد من أن تجيب عن السؤال المطروح. قد تذكر قيمة المتغير x على أنها الإجابة، لكنك تستعمل هذه الإجابة لإيجاد طول $\overline{FH}$.

حاول أن تحلّ! 3. النقاط J و K و L متسامتة.

J K L
$3n$ $5n - 7$

a. إذا كان $JL = 25$ ، فما قيمة n ؟ b. أوجد طول $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$.

المسلّمة 1-3 مسلّمة المنقلة

بمعلومية $\overrightarrow{BA}$ ونقطة C لا تقع على $\overrightarrow{BA}$، يمكن ربط عدد حقيقي واحد من 0 إلى 180 بالشعاع $\overrightarrow{BC}$.
0 للشعاع $\overrightarrow{BA}$
180 للشعاع $\overrightarrow{BD}$

مثال 4 استعمال مسلّمة المنقلة لقياس زاوية

ما قياس $\angle BEC$ ؟

بما أن $\overrightarrow{EA}$ يحاذي 0 على المقياس العلوي، استعمل المقياس العلوي لجميع الأشعة الأخرى في الشكل. بحسب مسلّمة المنقلة، يتم تعيين عدد حقيقي لكل من $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$.

نصيحة دراسية
تذكر أن قياس الزاوية $\angle BEC$ يُرمز له بالرمز $m\angle BEC$.

نعيّن العدد 105 للشعاع $\overrightarrow{EC}$.
نعيّن العدد 47 للشعاع $\overrightarrow{EB}$.

يمكنك طرح $m\angle AEB$ من $m\angle AEC$ لإيجاد $m\angle BEC$.

$m\angle BEC = |105° - 47°| = 58°$

92 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

www.jnob-jo.com

مثال 5 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا لحلّ المسائل

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: انظر إلى مخطط مسلّمة جمع قياسات الزوايا. ماذا يعني أن النقطة D "داخل" $\angle ABC$ ؟

[تقع النقطة D بين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$]

س: أعد صياغة مسلّمة جمع قياسات الزوايا بأسلوبك الخاص.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إذا قسّم شعاع زاوية إلى زاويتين أصغر منها، فإن ناتج جمع قياسي الزاويتين الصغيرتين يساوي قياس الزاوية الكبيرة.]

س: في مثال 5، انظر إلى المخطط في فقرة "ضع". ماذا تمثل قيمة x ؟ ماذا تمثل قيمة y ؟

[قياس الزاوية التي يكوّنها الكرسي وكاشف الضوء والسجادة؛ قياس الزاوية التي يكوّنها الباب وكاشف الضوء والطاولة.]

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان بإمكان المصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي ؟ الطاولة ؟ وضّح إجابتك.

[أوجد قيمة x؛ إذا كان $x \leq 25°$ ، يمكن للمصمم إضاءة الكرسي. أوجد قيمة y؛ إذا كان $y \leq 25°$، يمكن للمصمم إضاءة الطاولة.]

س: كيف تعرف أن المعادلات في فقرة "احسب" صحيحة ؟

[باستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. نعم، لأن $x = 24°$ و $y = 17°$ ، وكلاهما أقل من $25°$

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذه المسألة والمسألة في مثال 5 ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كل شيء في المسألتين متماثل باستثناء قياس زاوية الشعاع.]

س: ما المعادلة التي يمكنك استعمالها لتحديد ما إذا كان بإمكان المصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي ؟ الطاولة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $x + 33 = 57; y + 57 = 74$]

س: ماذا يجب أن تكون قيمة كل من x و y ليتمكن المصمم من استعمال كاشف الضوء لإضاءة الكرسي والطاولة ؟

[$x \leq 25°$؛ $y \leq 25°$]

تابع المثال 4

حاول أن تحلّ! **4.** ارجع إلى الشكل في المثال 4

a. أوجد $m\angle AEC$. **b.** أوجد $m\angle BED$.

المسلّمة 1-4 مسلّمة جمع قياسات الزوايا

إذا كانت النقطة D تقع داخل $\angle ABC$ فإن مجموع قياس الزاويتين الصغيرتين المتشكلتين ($\angle DBC$ و $\angle ABD$) يساوي قياس الزاوية الكبيرة $\angle ABC$

بمعنى: إذا كانت النقطة D تقع داخل $\angle ABC$، فإن $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$.

إذا كان

فإن $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$

تطبيق

مثال 5 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا في حلّ المسائل

يقوم مصمّم إضاءة بوضع اللمسات الأخيرة على خطة الإضاءة لعمل مسرحي قادم. يمكن لكاشف الضوء أن يدور بزاوية قياسها °25 إلى اليسار أو اليمين من نقطة البداية الموضحة. يكوّن شعاع الضوء الصادر عن كاشف الضوء زاوية قياسها °22

هل يمكن للمصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة كل الأشياء الموجودة على خشبة المسرح ؟

ضع ارسم مخططًا لتمثيل الزاوية التي يكوّنها شعاع الضوء، والزوايا التي قياساتها معطاة، والزوايا التي قياساتها مجهولة.

استعمل مسلّمة جمع قياسات الزوايا لإيجاد قياسي الزاويتين التي يجب أن يدور بهما الضوء إلى اليسار واليمين لإضاءة الكرسي والطاولة.

احسب اكتب معادلات وحلّها لإيجاد قيمة كل من x و y.

$y + 57 = 74$ $\quad$ $x + 22 = 57$

$y = 17$ $\quad$ $x = 35$

فسّر إذن، يمكن لكاشف الضوء الدوران بزاوية قياسها °25 إلى اليمين أو اليسار، لذا يستطيع المصمم استعمال كاشف الضوء لإضاءة الطاولة، لكن لا يمكنه إضاءة الكرسي.

حاول أن تحلّ! **5.** بالرجوع إلى المثال 5، هل يمكن لمصمم الإضاءة استعمال كاشف ضوء بزاوية شعاع قياسها °33 بحيث يدور كاشف الضوء بزاوية قياسها °25 إلى اليسار واليمين لإضاءة كل الأشياء الموجودة على خشبة المسرح ؟

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 93

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثال 5

الاستماع مستوى 1 ارسم المخطط على السبورة من دون قياسات الزوايا. اطلب من الطلاب نسخ هذا المخطط في دفاترهم. ثم اطلب منهم إضافة قياسات الزاوية المناسبة عندما توضح شفهيًا ما تمثله °22 و °57 و °74 و $x°$ و $y°$.

س: كيف يمكنك توضيح أن قياس زاوية شعاع كاشف الضوء يساوي °22 ؟

[ضع علامة القوس في الزاوية الوسطى واكتب بجانبها °22]

س: كيف يمكنك توضيح أن قياس الزاوية التي تكوّنها الطاولة وكاشف الضوء والكرسي يساوي °74 ؟

[ضع علامة قوس كبيرة تمتد عبر الزوايا الثلاث واكتب بجانب الزاوية °74]

القراءة مستوى 2 اكتب كلمة "يدور" على السبورة. اطلب من الطلاب قراءة المطلوب في المثال لكن مع إزالة كلمة يدور. اطلب منهم استعمال أدلة من السياق لتحديد معنى كلمة "يدور". وضّح لهم أن الدوران عبارة عن حركة تؤدي إلى تغيير قياسات الزاوية.

س: ما الكلمة أو الكلمات الأخرى التي يمكن استبدالها بكلمة "يدور" ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يتحرك أو يستدير]

س: لماذا قد تستعمل المصطلح "يدور" في مثال يتعلق بالزوايا ؟

[تقيس الزوايا مقدار دوران جسم أو شكل بين شعاعين، وليس المسافة بين الشعاعين.]

الكتابة مستوى 3 اطلب من الطلاب كتابة توضيح للمعادلات المكتوبة في فقرة "احسب" من المثال وتوضيح كيف تدعم الإجابات.

س: لماذا استعملنا المعادلة $x + 22 = 57$ ؟

[x هو قياس زاوية دوران كاشف الضوء لإضاءة الكرسي. يبين لك حل هذه المعادلة درجة دوران شعاع الضوء المطلوبة لإضاءة الكرسي.]

س: كيف تؤكد النتيجة $y = 17$ أن كاشف الضوء يمكن أن يضيء الطاولة ؟

[يمكن أن يدور كاشف الضوء بمقدار °25 ليضيء الطاولة، التي تبعد بمقدار زاوية دوران قياسها °17 فقط.]

www.jnob-jo.com

مثال 6 استعمال الزوايا المتطابقة والقطع المستقيمة المتطابقة

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تصف الفرق بين التطابق والمساواة ؟
[التطابق يصف الأشكال الهندسية، بينما المساواة تصف المقادير العددية.]

س: يرد في فقرة "المفهوم" أن، $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$. ما عبارة المساواة التي تنتج عن عبارة التطابق هذه ؟
[$PQ = RS$]

س: ما عبارة المساواة التي تنتج عن $\angle FGH \cong \angle JKL$ ؟
[$m\angle FGH = m\angle JKL$]

س: انظر إلى المخطط في المثال 6، إلى ماذا تشير علامات الأقواس ؟ وضّح إجابتك.
[لكل من $\angle XWY$ و $\angle VWZ$ علامة قوس واحدة، وبالتالي هما متطابقتان.]

س: ما قياس الزاوية $\angle VWZ$ ؟ وضّح إجابتك.
[$\angle XWY \cong \angle VWZ$ ؛ $32°$، إذن $m\angle VWZ = m\angle XWY = 32°$]

س: كيف يمكنك معرفة أن بإمكانك استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا لإيجاد $\angle YWV$ ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لأن النقطتين Y وV تقعان داخل $\angle XWZ$]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. a. $41.5°$ **b.** 11 cm

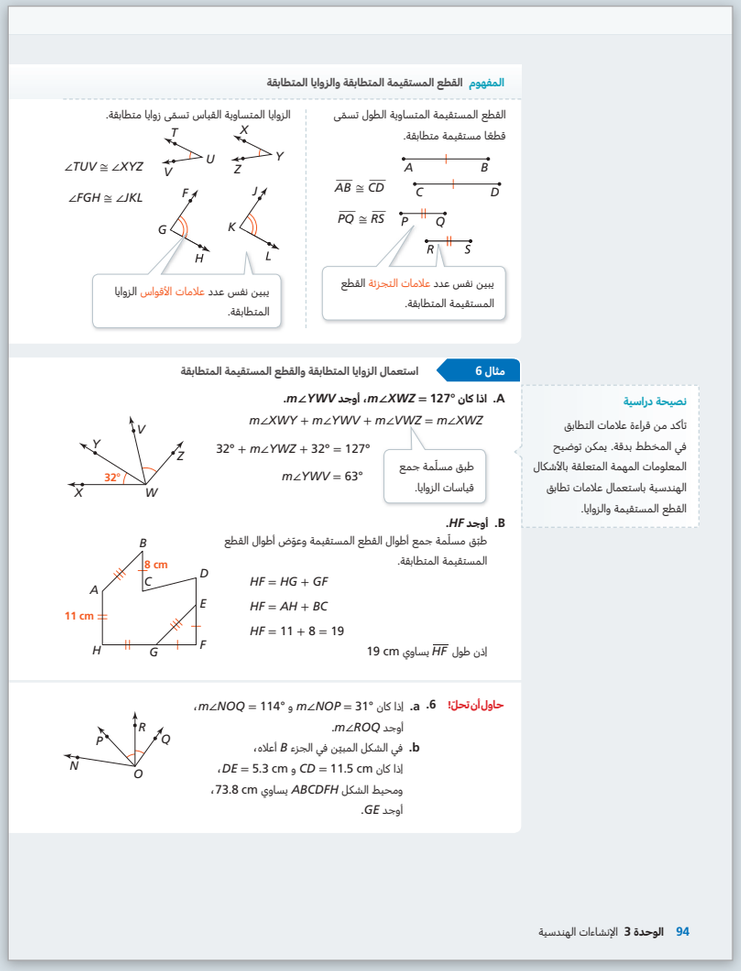
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما المعادلة التي تربط بين $m\angle NOQ$ و $m\angle NOP$ و $m\angle POQ$ ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: $m\angle NOP + m\angle POQ = m\angle NOQ$]

عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 4 و 5 و 6**

استعمل الأدوات المناسبة إذا كانت النقطة M تقع داخل $\angle ABC$، فهل من المفيد استعمال مخطط لمعرفة ما إذا كانت $m\angle ABM = m\angle ABC$ ؟ وضّح إجابتك.

[نعم ؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : من خلال رسم مخطط، يمكنك أن تلاحظ بسهولة أن $m\angle ABM > 0$ و $m\angle MBC > 0$. استنادًا إلى مسلّمة جمع قياسات الزوايا $m\angle ABC = m\angle ABM + m\angle MBC$، إذن $m\angle ABC \neq m\angle ABM$.]



المفهوم القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

القطع المستقيمة المتساوية الطول تسمّى قطعًا مستقيمة متطابقة.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

يبين نفس عدد علامات التجزئة القطع المستقيمة المتطابقة.

الزوايا المتساوية القياس تسمّى زوايا متطابقة.

$\angle TUV \cong \angle XYZ$

$\angle FGH \cong \angle JKL$

يبين نفس عدد علامات الأقواس الزوايا المتطابقة.

مثال 6 استعمال الزوايا المتطابقة والقطع المستقيمة المتطابقة

A. اذا كان $m\angle XWZ = 127°$، أوجد $m\angle YWV$.

$m\angle XWY + m\angle YWV + m\angle VWZ = m\angle XWZ$

$32° + m\angle YWZ + 32° = 127°$

$m\angle YWV = 63°$

طبق مسلّمة جمع قياسات الزوايا.

B. أوجد HF.

طبّق مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة وعوّض أطوال القطع المستقيمة المتطابقة.

$HF = HG + GF$

$HF = AH + BC$

$HF = 11 + 8 = 19$

إذن طول $\overline{HF}$ يساوي 19 cm

نصيحة دراسية

تأكد من قراءة علامات التطابق في المخطط بدقة. يمكن توضيح المعلومات المهمة المتعلقة بالأشكال الهندسية باستعمال علامات تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

حاول أن تحلّ! **6. a.** إذا كان $m\angle NOP = 31°$ و $m\angle NOQ = 114°$، أوجد $m\angle ROQ$.

b. في الشكل المبيّن في الجزء B أعلاه، إذا كان $CD = 11.5$ cm و $DE = 5.3$ cm، ومحيط الشكل $ABCDFH$ يساوي 73.8 cm، أوجد GE.

94 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم قياس القطع المستقيمة والزوايا

س: انظر إلى النقاط على خط الأعداد. ما عدد الأعداد الحقيقة التي رُبطت بها كل من النقاط J و K و L ؟ هل هذا ينطبق على أي نقطة على خط الأعداد ؟ وضّح إجابتك.

[كل نقطة من النقاط J و K و L ترتبط بعدد حقيقي واحد؛ نعم، وفق مسلّمة المسطرة، تُربط كل نقطة بعدد حقيقي واحد.]

س: انظر إلى الأشعة التي تكوّن الزوايا. ما عدد الأعداد الحقيقية على المنقلّة التي تحاذي كل شعاع ؟ ما عدد قياسات كل زاوية ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كل شعاع يحاذي عددين حقيقيين، لكنك تستعمل أحدهما فقط لإيجاد قياس الزاوية. كل زاوية لها قياس واحد فقط.]

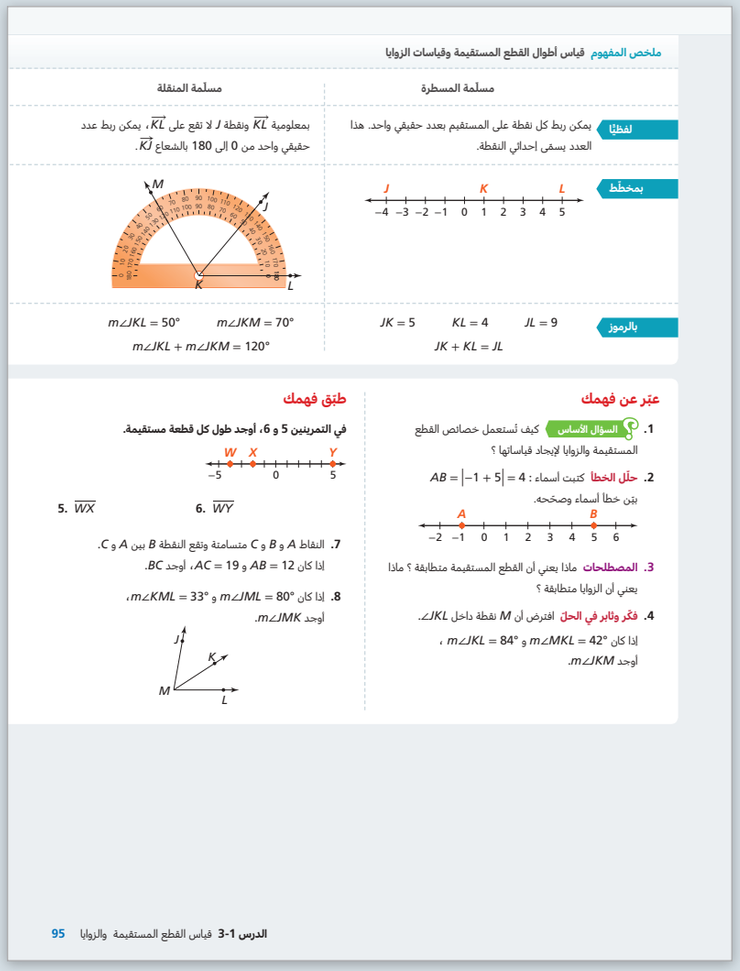
س: انظر إلى الصف الأخير في الجدول. ما أوجه الشبه والاختلاف بين مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : الشبه : ناتج جمع قياسات الأجزاء الصغيرة يساوي قياس الجزء الكبير. الاختلاف : لاستعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة يجب أن يكون هناك ثلاث نقاط متسامتة، وأن تقع إحدى هذه النقاط بين نقطتي النهاية؛ لاستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا، يجب أن تكون هناك نقطة داخل الزاوية.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 5 بما أن إحداثيي W و X عددان سالبان، فقد يعتقد الطلاب أن طول القطعة المستقيمة بينهما يجب أن يكون سالبًا أيضًا. ذكّر الطلاب أن الطول يكون دائمًا عددًا حقيقيًا موجبًا. وضّح لهم أن عليهم الحصول على النتيجة نفسها، وأنها يجب أن تكون موجبة، سواء أكانوا يعدّون وحدات الطول أم يستعملون القيمة المطلقة لإيجاد مسافة.



ملخص المفهوم قياس أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

	مسلّمة المسطرة	مسلّمة المنقلة
لفظيًا	يمكن ربط كل نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد. هذا العدد يسمّى إحداثي النقطة.	بمعلومية $\overleftrightarrow{KL}$ ونقطة J لا تقع على $\overleftrightarrow{KL}$، يمكن ربط عدد حقيقي واحد من 0 إلى 180 بالشعاع $\overrightarrow{KJ}$.
بمخطّط	J K L −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5	M J K L
بالرموز	$JK = 5$ $KL = 4$ $JL = 9$ $JK + KL = JL$	$m\angle JKL = 50°$ $m\angle JKM = 70°$ $m\angle JKL + m\angle JKM = 120°$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تُستعمل خصائص القطع المستقيمة والزوايا لإيجاد قياساتها ؟
2. حلّل الخطأ كتبت أسماء : $AB = |-1 + 5| = 4$ بيّن خطأ أسماء وصحّحه.
3. المصطلحات ماذا يعني أن القطع المستقيمة متطابقة ؟ ماذا يعني أن الزوايا متطابقة ؟
4. فكّر وثابر في الحل افترض أن M نقطة داخل $\angle JKL$. إذا كان $m\angle MKL = 42°$ و $m\angle JKL = 84°$ ، أوجد $m\angle JKM$.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد طول كل قطعة مستقيمة.

W X Y −5 0 5

5. $\overline{WX}$ 6. $\overline{WY}$

7. النقاط A و B و C متسامتة وتقع النقطة B بين A و C. إذا كان $AB = 12$ و $AC = 19$، أوجد BC.
8. إذا كان $m\angle JML = 80°$ و $m\angle KML = 33°$، أوجد $m\angle JMK$.

J K M L

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا 95

الإجابات

1. تربط مسلمة المسطرة أي نقطة على المستقيم بعدد حقيقي واحد فقط على خط الأعداد. القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي نقطتين على مستقيم هي طول القطعة المستقيمة التي تربط هاتين النقطتين. تربط مسلّمة المنقلة عددًا حقيقيًا واحدًا بقياس الزاوية المتكوّنة من شعاع ونقطة لا تقع على الشعاع.
2. وجدت أسماء ناتج جمع الإحداثيين بدلًا من ناتج طرحهما.
3. تكون القطع المستقيمة متطابقة إذا كان لها نفس الطول. تكون الزوايا متطابقة إذا كان لها نفس القياس.
4. 42°
5. 2 وحدة طول
6. 9 وحدات طول
7. 7 وحدات طول
8. 47°

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-27, 30-41	9-20, 23-41

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1, 2	16-21	1
	9, 39	2
	36	3
3	22-25	2
	10, 11, 35, 37	3
4, 5	26, 27, 28	2
	13	3
6	32, 34	1
	12, 15, 29-31, 33, 40	2
	14, 38, 41	4

الإجابات

9. -1 أو 23

10. استنادًا إلى مسلّمة القطع المستقيمة، $AE = AC + CE$، و $AC = AB + BC$، و $CE = CD + DE$، بالتعويض نجد أن، $AE = AB + BC + CD + DE$.

11. 12 أو 52

12. استعمَل بدر رمز المساواة حيث كان عليه استعمال رمز التطابق. القطع المستقيمة والزوايا متطابقة، لكن أطوالها وقياساتها متساوية.

13. 36°

14. $\frac{7}{18}$ وحدة طول

15. 77°

16. 3 وحدات طول

17. $2\frac{2}{3}$ وحدة طول

18. 3 وحدات طول

19. $4\frac{1}{2}$ وحدة طول

20. $1\frac{1}{2}$ وحدة طول

21. $4\frac{5}{6}$ وحدة طول

22. 3 وحدات طول

23. 10 وحدات طول

24. 14 وحدة طول

25. 17 وحدة طول

26. 35°

27. 65°

28. 13°

29. 3 وحدات طول

30. 11 وحدة طول

31. 4 وحدات طول

32. 28°

33. 32°

34. 3 وحدات طول

35. 12 وحدة طول

تدرَّب وحُل مسائل

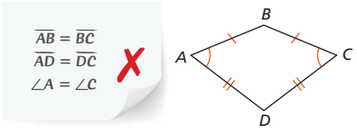
عزِّز فهمك

9. بزّر منطقيًا إحداثي النقطة M على خط الأعداد هو 11، إذا كان $MN = 12$، فما الإحداثيات الممكنة للنقطة N على خط الأعداد ؟

10. ابن الحجج الرياضية كيف يمكنك استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة لإثبات $AE = AB + BC + CD + DE$ ؟

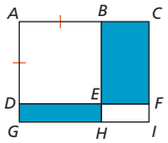
11. مهارات التفكير العليا إذا كانت النقاط C و D و E تقع على نفس المستقيم وكان $CD = 20$ و $CE = 32$، فما الأطوال الممكنة للقطعة المستقيمة DE ؟

12. حلّل الخطأ كتب بدر المعادلات أدناه عن الشكل الهندسي المبيّن. وضّح الأخطاء التي وقع فيها بدر.

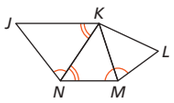


13. فكّر وثابر في الحل تقع النقطة Y داخل $\angle XWZ$. إذا علمت أن $\overrightarrow{WX}$ و $\overrightarrow{WZ}$ شعاعان متعاكسان، و $m\angle XWY = 4\,(m\angle YWZ)$، فما $m\angle YWZ$ ؟

14. روابط في الرياضيات مساحة $ABED$ تساوي 49 وحدة مربعة. إذا كان AG يساوي 9 وحدات و AC يساوي 10 وحدات، فما الكسر الذي يمثّل المنطقة المظللة من مساحة $ACIG$ ؟ اكتب الإجابة في أبسط صيغة ممكنة.

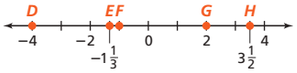


15. ابحث عن العلاقات في المخطط المجاور $m\angle LMN = 116°$، $m\angle JKM = 122°$ و $m\angle JNM = 103°$. أوجد $m\angle NKM$.



تدرَّب

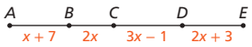
في التمارين 16-21، أوجد طول كل قطعة مستقيمة. انظر المثالين 1 و 2



16. $\overline{DF}$ **17.** $\overline{DE}$ **18.** $\overline{FG}$

19. $\overline{FH}$ **20.** $\overline{GH}$ **21.** $\overline{EH}$

في التمارين 22-25، النقاط A, B, C, D, E متسامتة. انظر المثال 3



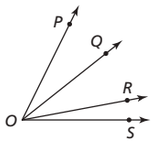
22. إذا كان $AC = 16$، أوجد قيمة x.

23. أوجد AB.

24. أوجد BD.

25. أوجد CE.

في التمارين 26-28، استعمل الشكل المبيّن أدناه. انظر المثالين 4 و 5



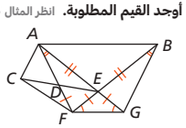
26. إذا كان $m\angle POQ = 24°$ و $m\angle POR = 59°$، أوجد $m\angle QOR$.

27. إذا كان $m\angle POQ = 19°$ و $m\angle QOR = 31°$ و $m\angle ROS = 15°$، أوجد $m\angle POS$.

28. إذا كان $m\angle QOS = 46°$، و $m\angle POR = 61°$، و $m\angle POQ = 28°$، أوجد $m\angle ROS$.

في التمارين 29-34، افترض أن $EG = 3$ و $EB = 8$ و $AF = 7$ و $m\angle EBG = 19°$ و $m\angle EGF = 28°$ و $m\angle CAE = 51°$.

أوجد القيم المطلوبة. انظر المثال 6



29. EF **30.** AG **31.** AD

32. $m\angle EFG$ **33.** $m\angle CAF$ **34.** DF

35. النقاط P, Q, R, S متسامتة. تقع النقطة Q بين P و R ، والنقطة R بين Q و S ، و $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.
إذا كان $PR = 15$ و $PS = 18$، أوجد QR.

www.jnob-jo.com

الإجابات

.36 المدينة B؛ بما أن المسافة إلى المدينة D هي 26 mi، فإن نصف هذه المسافة تساوي 13 mi، و أقرب مدينة إلى 13 mi هي المدينة B.

.37 نعم؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : وفقًا للخطة سيكون ارتفاع المبنى 185 ft، وهو أقل من الارتفاع الأقصى المسموح به.

.38 3؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة :
بما أن $234 - 52 - 68 = 114$، فإن الطول الإجمالي للقطع المستقيمة الأربع مع علامات التجزئة يساوي 114 ft، توجد قطعتان مستقيمتان بعلامة تجزئة واحدة وضلعان بعلامتي تجزئة، وطول الشارع يساوي ناتج جمع طول قطعة مستقيمة بعلامة تجزئة واحدة وطول قطعة مستقيمة بعلامتي تجزئة.
إذن، الطول الإجمالي للشارع يساوي نصف 114 ft أو 57 ft
$57 \div 20 \approx 60 \div 20 = 3$

.41 يجب أن تتضمن خطة الطابق التي يضعها الطلاب أربع غرف وجدارين متساويين في الطول وزاويتين متساويتين في القياس، كما يجب أن توضح معادلاتهم الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة.

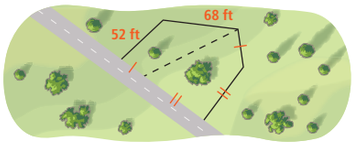
تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

.36 **فكّر وثابر في الحل** يقود جابر سيارته إلى المدينة D لزيارة صديقه. إذا أراد التوقف لتناول الغداء عندما يكون في منتصف الطريق، في أي مدينة يجب أن يتوقف ؟ وضّح إجابتك.

.37 **برّر منطقيًا** يتعين على لجنة التخطيط في إحدى المدن أن تحدد ما إذا كانت ستوافق على تشييد مبنى جديد أم لا. تريد الشركة المعنيّة بتشييد المبنى أن تبني في منطقة من المدينة، ويبلغ الارتفاع الأقصى المسموح به للمبنى 310 ft
توضّح المخططات أن ارتفاع الطابق الأول من المبنى يبلغ 20 ft وأن ارتفاع كل من الطوابق الخمسة عشر التالية يبلغ 11 ft، بما في ذلك المساحة اللازمة للأنظمة الكهربائية وأنظمة الصرف الصحي والأنظمة الأخرى بين كل طابقين. إذا كان مخطط البناء يتطابق مع كل شروط التنظيم المَدني، فهل على لجنة التخطيط الموافقة على مخطط البناء ؟ وضّح إجابتك.

.38 **برّر منطقيًا** تريد لجنة التخطيط في بلدية إحدى المدن زرع شجرة كل 20 ft على طول أحد شوارع المدينة. إذا كان محيط قطعة الأرض المخصصة لذلك 234 ft، فما عدد الأشجار التي يمكن زرعها ؟ وضّح إجابتك.



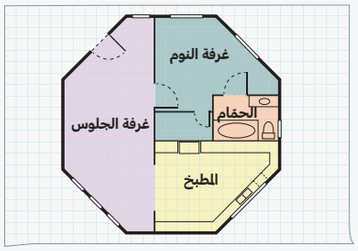
تدرَّب على اختبار

.39 في المخطط المبيّن أدناه، $FH = 2FG$ و $GH = HI$ و $FI = IK$.
أي من العبارات التالية يجب أن تكون صحيحة ؟
اختر كل ما ينطبق.

Ⓐ $FG = HI$ Ⓑ $HI = IJ$
Ⓒ $IK = 3FG$ Ⓓ $FH = GI$
Ⓔ $HJ = JK$ Ⓕ $HK = 2GI$

.40 **اختبار SAT/ACT** تقع النقطة C داخل $\angle ABD$، و $\angle ABC \cong \angle CBD$. إذا كان $m\angle ABC = \left(\frac{5}{2}x + 18\right)$ و $m\angle CBD = (4x)$، فما $m\angle ABD$ ؟
Ⓐ 12 Ⓑ 36 Ⓒ 48 Ⓓ 72 Ⓔ 96

.41 **مهمة إدائية** يقع المعهد الأمريكي للمهندسين المعماريين في مبنى تاريخي ثماني الشكل يسمّى "أوكتاجون" في العاصمة واشنطن. حيث كانت المنازل ذات الثمانية أضلاع شائعة في الولايات المتحدة في منتصف القرن التاسع عشر.



الجزء A صمم مخططًا تراه مناسبًا لطابق واحد في منزل ثماني الشكل. يجب أن يتضمن المخطط أربع غرف على الأقل وجدارين متساويي الطول وزاويتين متساويتي القياس. ارسم مخطط الطابق باستعمال المقياس 1 cm = 1 m. اكتب قياسات زوايا الجدران وأطوال الجدران في مخططك، واستعمل العلامات المناسبة لتمثيل الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة. سمّ كل نقاط تقاطع الجدران في المخطط.

الجزء B اكتب معادلات توضّح الزوايا والقطع المستقيمة المتطابقة في المخطط الذي رسمته.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 3-2
الإنشاءات الهندسية الأساسية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ إنشاء نسخ من قطع مستقيمة وزوايا.

✔ إنشاء قطع مستقيمة ومنصّفات عمودية لقطع مستقيمة ومنصّفات زوايا.

✔ تطبيق الإنشاءات الهندسية على مسائل تتضمن أجزاء من قطع مستقيمة وأجزاء من زوايا.

الفهم الأساس

الإنشاءات الهندسية هي أشكال هندسية تنشأ فقط باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار. تعتبر الإنشاءات الهندسية من الأدوات المفيدة في الهندسة.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- تعلم المصطلحات الأساسية المتعلقة بالمستقيمات والأشعة والقطع المستقيمة والزوايا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إنشاء مستقيمات وأشعة وقطع مستقيمة وزوايا.
- قياس ونسخ قطع مستقيمة وزوايا باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة.
- إنشاء منصّفات زوايا ومنصّفات عمودية لقطع مستقيمة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال الإنشاءات الهندسية للتحقق من النظريات الهندسية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب أنه يمكن التحقق من الخصائص الهندسية باستعمال الأساليب التقليدية للإنشاء الهندسي.
- ينمّي الطلاب مهارة في الإنشاءات الهندسية الأساسية لقياس الزوايا وإيجاد الأطوال.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **متوازي** | *parallel*
- **متعامد** | *perpendicular*

المصطلحات الجديدة

- **إنشاء هندسي** | *construction*
- **منصّف عمودي** | *perpendicular bisector*
- **منصّف الزاوية** | *angle bisector*

نشاط المصطلحات

راجع مفهومي التنصيف والتعامد عبر كتابة أحرف الأبجدية الإنجليزية بالصيغة التاجية (أحرف كبيرة منفصلة)، واترك فراغًا بين الأحرف. بعدها، اطلب من الطلاب كتابة أحرف الأبجدية الإنجليزية على ورقة.

اطلب من الطلاب تحويط الأحرف التي تحتوي على خطوط متعامدة، مثل E و F و H و ... إلخ. استنبط من الطلاب تعريفًا غير رسمي للتعامد.

اطلب من الطلاب تمييز أحرف تتضمن قطعًا مستقيمة منصّفة، مثل A و B و E و ... إلخ. استنبط من الطلاب تعريفًا غير رسمي للتنصيف. إذا سمح لك الوقت، كرر النشاط بتمييز القطع المستقيمة المتوازية الموجودة في الأحرف.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.2 يستعمل الأدوات الهندسية لإنشاء:

- قطعة مستقيمة تطابق قطعة مستقيمة معطاة.
- زاوية تطابق زاوية معطاة.
- منصّفات الزوايا والمنصفات العمودية.

معايير ممارسات الرياضيات

ابن الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب التعريفات للتحقق من إنشاءاتهم الهندسية.

استعمل الأدوات المناسبة استراتيجيًا

ينمّي الطلاب مهارة في تكوين إنشاءات هندسية أساسية باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة، ويطبقون ذلك في حل المسائل.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يختبر الطلاب نسخ أشكال هندسية بسيطة مكونة من دوائر وقطع مستقيمة باستعمال الفرجار ومسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة، هذا يهيّئ الطلاب لتعلم الإنشاءات الهندسية الأساسية.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: كيف يمكنك وصف هذا الرسم ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الرسم هو سبع دوائر مرتبة في شكل يشبه السداسي.]

س: هل يهم كم تكون الدائرة التي ترسمها كبيرة ؟ هل يمكنك مطابقة المخطط بالضبط ؟
[لا تتطلب المسألة المطابقة المضبوطة، ولكن يمكن ضبط الفرجار بطول نصف قطر إحدى الدوائر.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

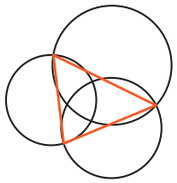
دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الترتيب الذي ستستعمله لرسم الدوائر ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : سأرسم الدائرة المركزية أولًا ثم الدوائر الخارجية.]

س: بعد أن ترسم الدائرة الأولى، كيف تختار أين ستضع رأس الفرجار لرسم الدائرة الثانية ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : سأضع رأس الفرجار عند إحدى نقاط تقاطع المستقيم الأفقي المار بمركز الدائرة مع الدائرة المركزية.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل يمكنك إنشاء رسم مكون من ثلاث دوائر تشكل تقاطعاتها مثلثًا ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تحقق من أن دوائر الطلاب تشكل مثلثًا.]



بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل تقاطعت الدائرة الأخيرة التي رسمتها مع الدوائر الأخرى كما في الرسم المعطى بالضبط ؟ إن لم يكن كذلك، هل تعرف لماذا ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلّا. يمكن لفتحة الفرجار أن تكون قد تغيرت قليلًا حينما رسمت، أو لم أضع رأس الفرجار على نقطة تقاطع الدائرتين بالضبط.]

س: لماذا الدقة مهمة عند رسم الأشكال الهندسية ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : إنها مهمة لأن أخطاء صغيرة قد تؤدي إلى أخطاء كبيرة.]

كتاب الطالب، صفحة 98

3-2 الإنشاءات الهندسية الأساسية
Basic Constructions

أستطيع... استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء أشكال هندسية أساسية.

معيار الدرس 9.4.2

المصطلحات
- إنشاء هندسي construction
- منصّف عمودي perpendicular bisector

استكشف وبرّر منطقيًا

استعمل فرجارًا لإنشاء رسم باستعمال الدوائر فقط، كالرسم المبيّن في الشكل المجاور.

A. ما التعليمات التي يمكنك إعطاؤها لطالب آخر كي يتمكن من إنشاء نسخة مطابقة لرسمك ؟

B. **فكّر وثابر في الحل** استعمل مسطرة لرسم قطع مستقيمة تربط بين النقاط المتتالية التي تتقاطع عندها الدوائر. هل لأيٍّ من القطع التي رسمتها نفس طول قطعة أخرى ؟ إذا كان الأمر كذلك، ما السبب في رأيك ؟

السؤال الأساس **كيف نُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟**

نموذج من أعمال الطلاب

A. ارسم دائرة باستعمال الفرجار. دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار على الدائرة التي رسمتها وارسم دائرة ثانية. ضع رأس الفرجار على إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين وارسم دائرة ثالثة. كرر ذلك حتى تحصل على سبع دوائر مرتبة في الشكل الصحيح.

B. تبدو القطع المستقيمة الستّ بنفس الطول لأن فتحة الفرجار في كل مرة تساوي نصف قطر الدائرة المركزية.

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًا**

تواصل بدقة ما المصطلحات أو المفاهيم الرياضية التي يمكنك استعمالها لوصف رسمك ؟

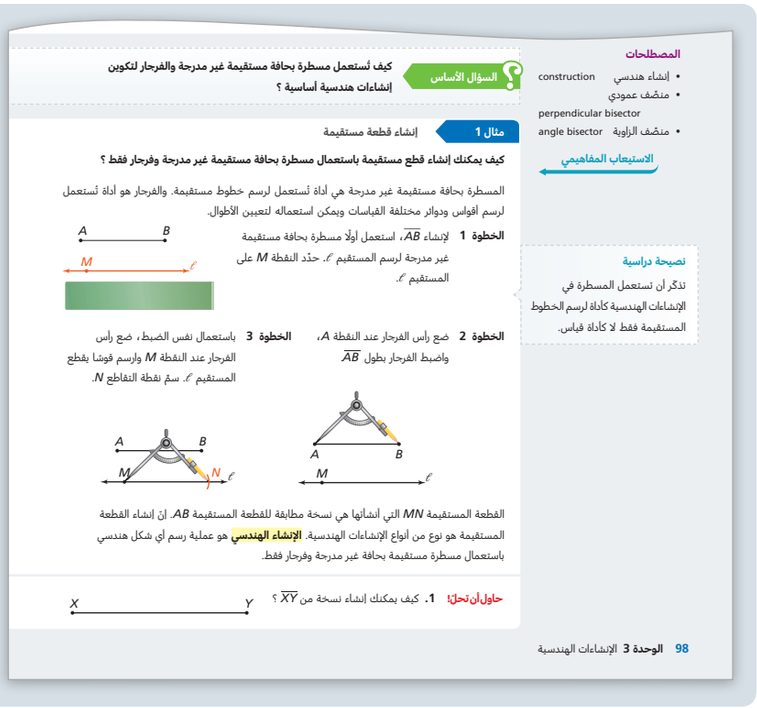
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكنك استعمال مصطلحات مثل نقطة تقاطع ومتناظر وسداسي.]

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على الإنشاءات التقليدية. سيتعلم الطلاب أنه تم اختبار الأفكار الهندسية لقرون مضت عبر إنشاء أشكال هندسية باستعمال الفرجار ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة فقط. بعدها، سيستعمل الطلاب مبادئ الإنشاء التقليدية لحل مسائل من واقع الحياة ومسائل رياضية.



المصطلحات

- إنشاء هندسي construction
- منصّف عمودي perpendicular bisector
- منصّف الزاوية angle bisector

الاستيعاب المفاهيمي

السؤال الأساس: كيف تُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟

مثال 1 إنشاء قطعة مستقيمة

كيف يمكنك إنشاء قطع مستقيمة باستعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار فقط ؟

المسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة هي أداة تُستعمل لرسم خطوط مستقيمة. والفرجار هو أداة تُستعمل لرسم أقواس ودوائر مختلفة القياسات ويمكن استعماله لتعيين الأطوال.

الخطوة 1 لإنشاء $\overline{AB}$، استعمل أولًا مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم المستقيم ℓ. حدّد النقطة M على المستقيم ℓ.

الخطوة 2 ضع رأس الفرجار عند النقطة A، واضبط الفرجار بطول $\overline{AB}$

الخطوة 3 باستعمال نفس الضبط، ضع رأس الفرجار عند النقطة M وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ. سمّ نقطة التقاطع N.

القطعة المستقيمة MN التي أنشأتها هي نسخة مطابقة للقطعة المستقيمة AB. إن إنشاء القطعة المستقيمة هو نوع من أنواع الإنشاءات الهندسية. **الإنشاء الهندسي** هو عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

نصيحة دراسية: تذكّر أن تستعمل المسطرة في الإنشاءات الهندسية كأداة لرسم الخطوط المستقيمة فقط لا كأداة قياس.

حاول أن تحلّ! 1. كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\overline{XY}$ ؟

98 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مثال 1 إنشاء قطعة مستقيمة

طرح أسئلة هادفة

س: كم قطعة مستقيمة يمكنك أن ترسم بين النقطتين A و B ؟

[قطعة مستقيمة واحدة فقط، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين، والقطعة المستقيمة هي جزء من هذا المستقيم.]

س: كيف يمكنك إنشاء قطعة مستقيمة طولها ضعف طول القطعة المستقيمة المعطاة ؟

[عيّن طول القطعة المستقيمة مرتين على المستقيم.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1.

www.jnob-jo.com

مثال 2 إنشاء زاوية متطابقة

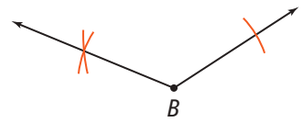
إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن النقطتين B و C مقارنة بالنقطة A ؟
[تقع النقطتان على نفس المسافة من النقطة A.]

س: كيف يمكنك إنشاء زاوية قياسها ضعف قياس $\angle A$ ؟
[أنشئ زاوية أخرى، على الشعاع الذي أنشأته مستعملًا نفس نقطة النهاية وهي النقطة A.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2.



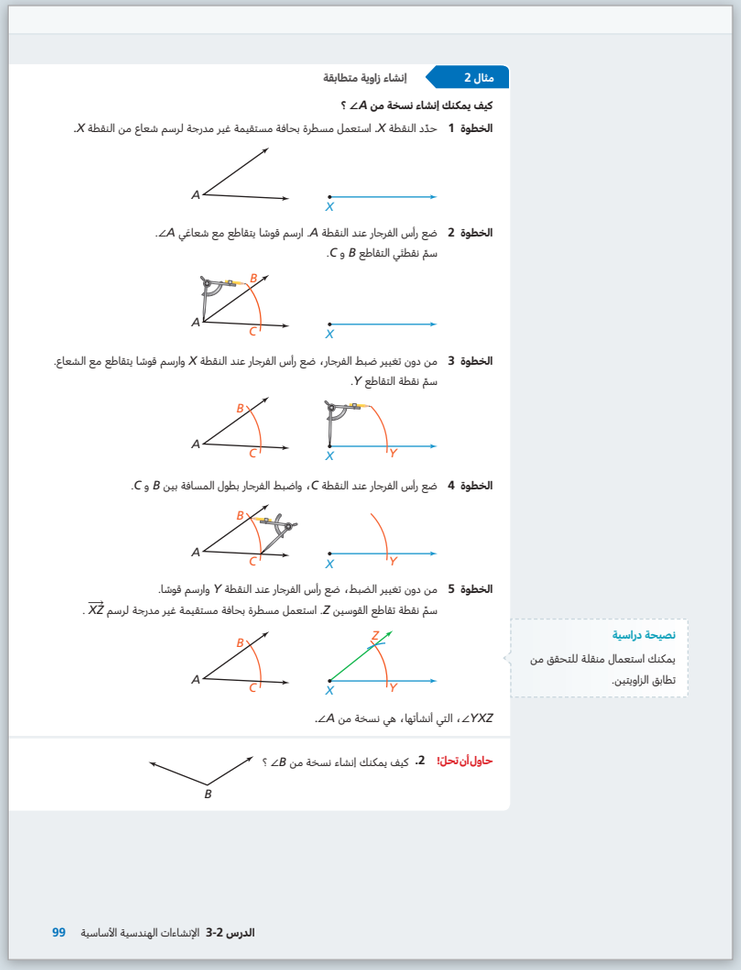
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تبدأ إنشاء نسخة عن زاوية ؟
[ارسم شعاعًا يكون أحد شعاعي الزاوية المنسوخة.]

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

ابنِ الحجج الرياضية يقول بلال إن نسخة قطعة مستقيمة أو نسخة زاوية تكون مطابقة دائمًا للأصل، حتى لو كان اتجاه النسخة مختلفًا عن الاتجاه الأصلي. ابن حجة لدعم أو دحض ما يقوله بلال ؟

[ما يقوله بلال صحيح. يمكنك استعمال تحويلات التطابق لتطابق النسخة مع الأصل.]



مثال 2 إنشاء زاوية متطابقة

كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\angle A$ ؟

الخطوة 1 حدّد النقطة X. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم شعاع من النقطة X.

الخطوة 2 ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ارسم قوسًا يتقاطع مع شعاعي $\angle A$. سمّ نقطتي التقاطع B و C.

الخطوة 3 من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة X وارسم قوسًا يتقاطع مع الشعاع. سمّ نقطة التقاطع Y.

الخطوة 4 ضع رأس الفرجار عند النقطة C، واضبط الفرجار بطول المسافة بين B و C.

الخطوة 5 من دون تغيير الضبط، ضع رأس الفرجار عند النقطة Y وارسم قوسًا. سمّ نقطة تقاطع القوسين Z. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم $\overleftrightarrow{XZ}$.

$\angle YXZ$، التي أنشأتها، هي نسخة من $\angle A$.

نصيحة دراسية
يمكنك استعمال منقلة للتحقق من تطابق الزاويتين.

حاول أن تحلّ: **2.** كيف يمكنك إنشاء نسخة من $\angle B$ ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 99

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 2**

القراءة مستوى 3 اطلب من الطلاب قراءة الخطوتين 2 و 3، اللّتين تطلبان من الطلاب رسم قوس يقطع شعاعين. بعدها استنبط إجابة عن المقصود بكلمة تقاطع. اطلب من الطلاب مقارنة إجاباتهم مع التعريف "مجموعة النقاط المشتركة بين شكلين أو أكثر".

س: في رأيك، ما معنى الحصول على نقاط مشتركة ؟
[النقاط المشتركة بين الشكلين تعني نقاط التقاطع بين الشكلين.]

س: ما عدد نقاط التقاطع بين شعاع وقوس يقطعه ؟
[نقطة واحدة فقط]

www.jnob-jo.com

مثال 3 إنشاء منصّف عمودي

طرح أسئلة هادفة

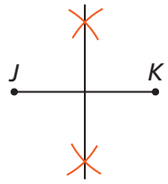
س: هل من الممكن ضبط الفرجار بطريقة غير صحيحة لتنفيذ الخطوة 1 ؟ وضّح إجابتك.
[نعم ؛ يمكنك ضبط الفرجار بفتحة صغيرة جدًّا، مما يؤدي الى عدم تقاطع القوسين الثانيين مع القوسين الأوليين.]

س: كيف يمكنك تغيير هذا الإنشاء لإنشاء مستقيم متعامد مع القطعة المستقيمة ولكن غير منصّف لها ؟
[اضبط الفرجار بفتحة ثابتة وابدأ الإنشاء عبر رسم قوسين أعلى وأسفل المستقيم من أي نقطتين على المستقيم.]

س: كيف يمكنك إنشاء مستقيم متعامد مع مستقيم ما ويمر بنقطة محددة على المستقيم ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل الفرجار لتعيين مسافتين متساويتين على المستقيم في جهتي النقطة، ثم أنشئ منصّفًا عموديًّا باستعمال هاتين النقطتين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تتحقق من أن المستقيم الذي أنشأته ينصف القطعة المستقيمة الأصلية ؟
[يمكنك وضع سن الفرجار عند نقطة التقاطع واستعماله لتتحقق ما إذا كانت المسافتان إلى النقطتين A و B متساويتين أم لا.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 قد يغير الطلاب ضبط الفرجار للحصول على أقواس متقاطعة إن لم تتقاطع الأقواس في المحاولة الأولى. ذكر الطلاب أنه يجب عدم تغيير ضبط الفرجار. اطلب من الطلاب تعيين نقطة منتصف القطعة المستقيمة، ثم ضبط الفرجار لأقل من نصف طول القطعة المستقيمة ومحاولة إيجاد التقاطع. بعدها اطلب منهم ضبط الفرجار لأكثر من نصف طول القطعة المستقيمة وإيجاد التقاطع. استنبط الخلاصة أنه يجب ضبط الفرجار لأكثر من نصف طول القطعة المستقيمة.

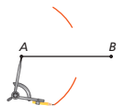
مثال 3 إنشاء منصّف عمودي

كيف يمكنك إنشاء المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؟

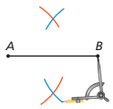
المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة هو مستقيم أو قطعة مستقيمة أو شعاع عمودي على القطعة المستقيمة ويقسمها إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

يمكنك استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.

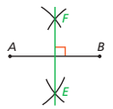
الخطوة 1 اضبط الفرجار بطول أكبر من نصف AB، ثم ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ثم ارسم قوسًا أعلى $\overline{AB}$ وقوسًا أسفلها.



الخطوة 2 من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة B، ثم ارسم قوسًا أعلى $\overline{AB}$ وقوسًا أسفلها.



الخطوة 3 سمّ نقطتي تقاطع الأقواس E وF، واستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم $\overleftrightarrow{EF}$.



$\overleftrightarrow{EF}$ الذي أنشأته، هو المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة AB.

استعمل الأدوات المناسبة
فكّر في الأدوات التي يمكنك استعمالها للتحقق من أن قطعة مستقيمة تنصّف قطعة مستقيمة أخرى.
ما الأداة التي يمكنك استعمالها ؟

حاول أن تحل! 3. كيف يمكنك إنشاء منصّف عمودي للقطعة المستقيمة JK ؟

100 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

www.jnob-jo.com

مثال 4 إنشاء منصّف زاوية

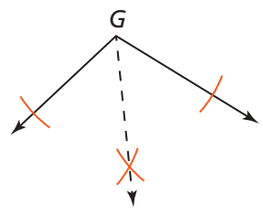
استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: هل من الضروري إعادة ضبط الفرجار عند إنشاء منصّف زاوية ؟ لماذا يُفضل أن تزيد فتحة الفرجار ؟
[كلّا؛ ولكن رسم أقواس أطول قد يجعل عملية الإنشاء أكثر دقة.]

س: ماذا تتوقع إذا كررت إنشاء منصّف نفس الزاوية باستعمال ضوابط أخرى للفرجار ؟
[سترسم نفس القطعة المستقيمة المنصّفة للزاوية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

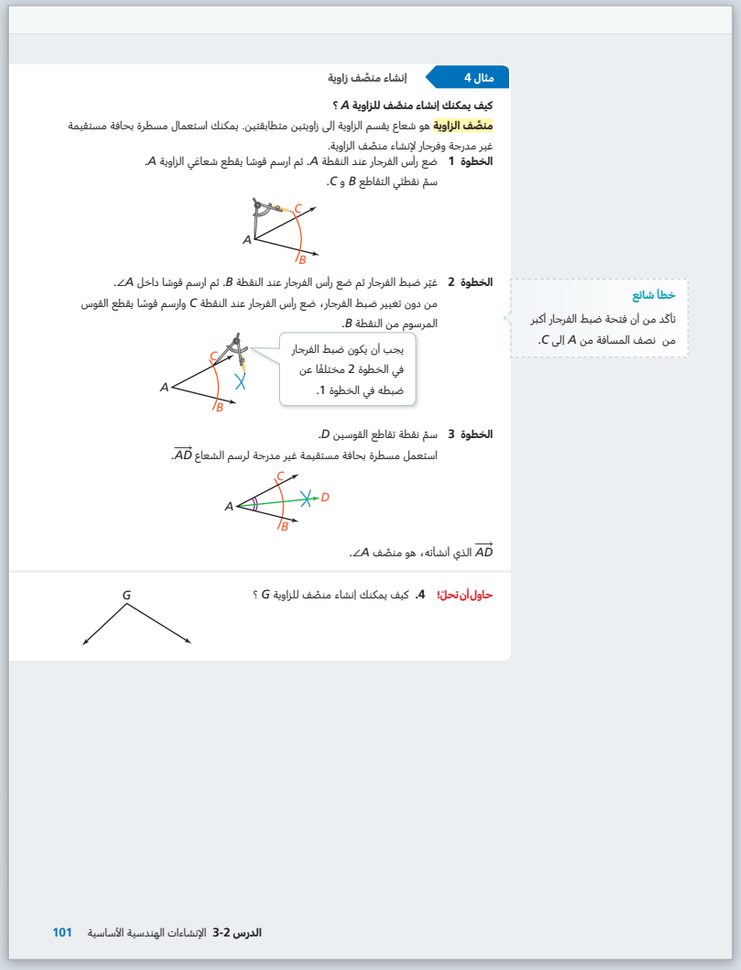
4.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تختار كم ستفتح الفرجار لتقوم برسم القوس الأول ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن ضبط الفرجار عند أي طول بحيث يقطع القوس شعاعي الزاوية.]

س: هل من الأفضل تكبير فتحة الفرجار عند رسم القوس الأول ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : نعم، كلما كانت فتحة الفرجار أكبر، كان إنشاء المنصّف أدق.]



مثال 4 إنشاء منصّف زاوية

كيف يمكنك إنشاء منصّف للزاوية A ؟

منصّف الزاوية هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. يمكنك استعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار لإنشاء منصّف الزاوية.

الخطوة 1 ضع رأس الفرجار عند النقطة A. ثم ارسم قوسًا يقطع شعاعي الزاوية A. سمِّ نقطتي التقاطع B و C.

الخطوة 2 غيّر ضبط الفرجار ثم ضع رأس الفرجار عند النقطة B. ثم ارسم قوسًا داخل $\angle A$. من دون تغيير ضبط الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة C وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B.

يجب أن يكون ضبط الفرجار في الخطوة 2 مختلفًا عن ضبطه في الخطوة 1.

خطأ شائع
تأكد من أن فتحة ضبط الفرجار أكبر من نصف المسافة من A إلى C.

الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين D. استعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم الشعاع $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD}$ الذي أنشأته، هو منصّف $\angle A$.

حاول أن تحلّ! 4. كيف يمكنك إنشاء منصّف للزاوية G ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 101

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب تنصيف زاوية مستقيمة لمقارنة الخطوات مع إنشاء المنصّف العمودي.

- اطلب من الطلاب رسم زاوية مستقيمة ولتكن $\angle A$ على قطعة ورق.

س: أنشئ منصّف الزاوية المستقيمة $\angle A$.
[تحقق أن الطلاب قد رسموا منصّف زاوية.]

س: ماذا تلاحظ حول الشعاع الذي أنشأته ؟
[إنه متعامد مع المستقيم الذي يكوّن الزاوية المستقيمة A.]

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا الإنشاء وإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة ؟
[الشعاع الذي تم إنشاؤه متعامد مع القطعة المستقيمة، تمامًا مثل المستقيم الذي تم إنشاؤه عند إنشاء منصّف الزاوية. الشعاع الذي تم إنشاؤه متعامد مع المستقيم عند نقطة ما، بدلًا من نقطة المنتصف بين نقطتين.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب تنفيذ خطواتهم الخاصة لإكمال الإنشاء والتحقق منها.

- اطلب من الطلاب تبادل الأدوار في إخبارك عن كيفية إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة على السبورة. يجب على الطلاب إنشاء قائمة بالخطوات التي ينفذونها على ورقة.
- إذا أعطى أحد الطلاب خطوة غير صحيحة، استنبط الخطوة الصحيحة ولكن اطلب من الطلاب أن يسجلوا ملاحظاتهم ذاكرين سبب عدم صحتها.

س: هل أي من الخطوات التي كتبتها غير صحيحة ؟ إذا كان الأمر كذلك، اكتب سبب عدم صحتها.
[راجع عمل الطلاب.]

س: اتبع قائمة الخطوات التي كتبتها لإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.
[راجع عمل الطلاب.]

س: هل قائمة الخطوات التي كتبتها مكتملة ؟ راجع قائمة الخطوات التي كتبتها وأضف إليها أو صحح كل ما كتبته بطريقة مختلفة عند تكوين الإنشاء الهندسي.
[راجع عمل الطلاب.]

- كرر الخطوات أعلاه لإنشاء منصّف زاوية.

www.jnob-jo.com

مثال 5 استعمال الإنشاءات الهندسية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: باعتقادك، ما المقصود بالمحاذاة عند المنتصف ؟ وضّح إجابتك.

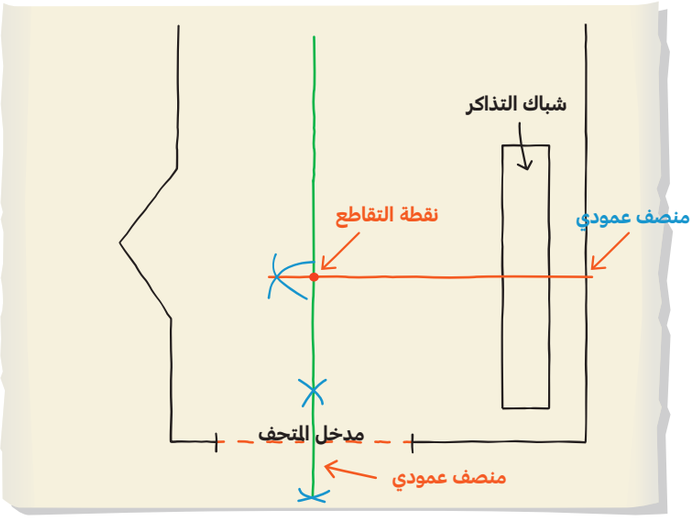
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: المحاذاة عند المنتصف لشكلين هي عندما يحاذي منتصف الشكل الأول منتصف الشكل الآخر.]

س: هل يمكنك إنشاء المنصّف العمودي لفتحة نافذة الواجهة بدلًا من إنشاء منصّف الزاوية المتكونة من النافذتين ؟ وضّح إجابتك.

[نعم ؛ نموذج إجابة: سيقع المنصّف العمودي لفتحة نافذة الواجهة على نفس الخط مع منصّف زاوية الواجهة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. يجب وضع المنحوتة على نقطة تقاطع المنصّف العمودي لمدخل المتحف والمنصّف العمودي لشباك التذاكر.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف تنوي تحديد الموقع المطلوب للمنحوتة ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يجب أن تبقى المنحوتة موجودة على المنصّف العمودي لمدخل المتحف، ولكن يجب أن تكون أيضًا على المنصّف العمودي لشباك التذاكر.]

س: لو كان لمخطط رواق المتحف مقياس يبين القياسات بالأقدام، كيف يمكنك قياس المسافة بين المنحوتة ونافذة الواجهة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اضبط الفرجار للمسافة بين المنحوتة والنافذة، ثم قارن ضبط الفرجار للمقياس على المخطط.]

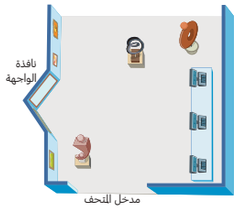
عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 3 و 4 و 5**

ابحث عن العلاقات ما وجه الشبه بين إنشاء منصّف قطعة مستقيمة ومنصّف زاوية ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلا الإنشاءين يتطلب إيجاد نقطتين تبعدان المسافة نفسها عن نقطة معطاة للتمكن من تحديد المستقيم المطلوب.]

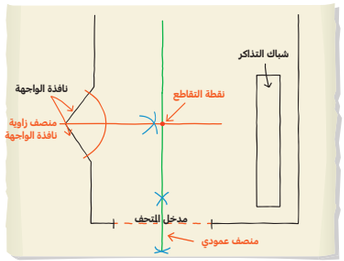
تطبيق **مثال 5** استعمال الإنشاءات الهندسية

يريد نحات وضع منحوتته الجديدة في رواق المتحف بحيث تحاذي منتصف نافذة الواجهة ومنتصف المدخل في الوقت نفسه.
أين ينبغي وضع المنحوتة ؟



ضع ▶ إذا تمّت محاذاة المنحوتة مع منتصف نافذة الواجهة، فستقع على منصّف زاوية نافذة الواجهة. وإذا تمّت محاذاتها مع منتصف المدخل، فستقع على المنصّف العمودي للمدخل.

احسب ▶ أنشئ منصّف زاوية نافذة الواجهة والمنصّف العمودي للمدخل.



فسّر ▶ إذن، ينبغي وضع المنحوتة عند نقطة تقاطع منصّف زاوية نافذة الواجهة والمنصّف العمودي لمدخل المتحف.

حاول أن تحلّ! **5.** أين ينبغي وضع المنحوتة إذا أراد النحّات محاذاتها مع منتصف مدخل المتحف ومنتصف شباك التذاكر ؟

102 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الإنشاءات الهندسية

س: ما هي الإنشاءات الهندسية ؟

[تتم عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.]

س: ما الهدف من استعمال المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة في الإنشاءات ؟ وما الهدف من استعمال الفرجار؟

[تستعمل المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة لرسم المستقيمات والقطع المستقيمة والأشعة. يستعمل الفرجار للقياس ولرسم الدوائر ولتعيين النقاط.]

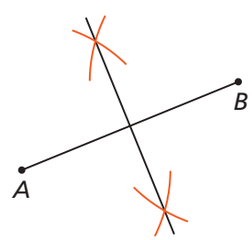
عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

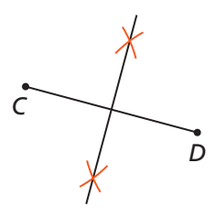
خطأ شائع

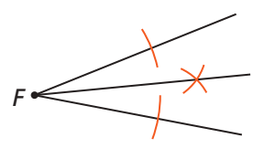
التمارين من 5 إلى 8 في حال كانت إنشاءات الطلاب الهندسية غير دقيقة، ذكرهم بضرورة الانتباه لعدم تحريك رأس الفرجار خلال عملية الإنشاء. اطلب منهم التحقق من أن الفرجارات لديهم لا تنزلق، واطلب منهم المحاولة مرة أخرى.

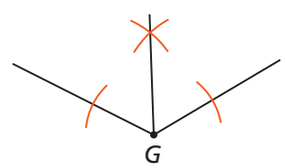
الإجابات

1. تستعمل المسطرة المستقيمة بحافة غير مدرجة لرسم المستقيمات والقطع المستقيمة. يستعمل الفرجار لرسم الأقواس وقياس المسافات وتعيين الأطوال المتطابقة. باستعمال هاتين الأداتين، يمكنك نسخ وتنصيف الزوايا والقطع المستقيمة.
2. لم يستعمل ناصر الفرجار لقياس المسافة بين نقطة تقاطع القوس مع أحد ضلعي الزاوية T ونقطة تقاطعه مع الضلع الآخر.
3. يمكن لمستقيم عمودي على قطعة مستقيمة أن يقطعها عند أية نقطة عليها. يقطع المنصّف العمودي القطعة المستقيمة عند النقطة التي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.
4. عليها أن تنسخ $\overline{AC}$ باستعمال D كأحد الطرفين واستعمال ضلع $\angle D$ غير $\overline{DE}$. ثم تقوم بتسمية النقطة الأخرى F، لتصل بين E و F.

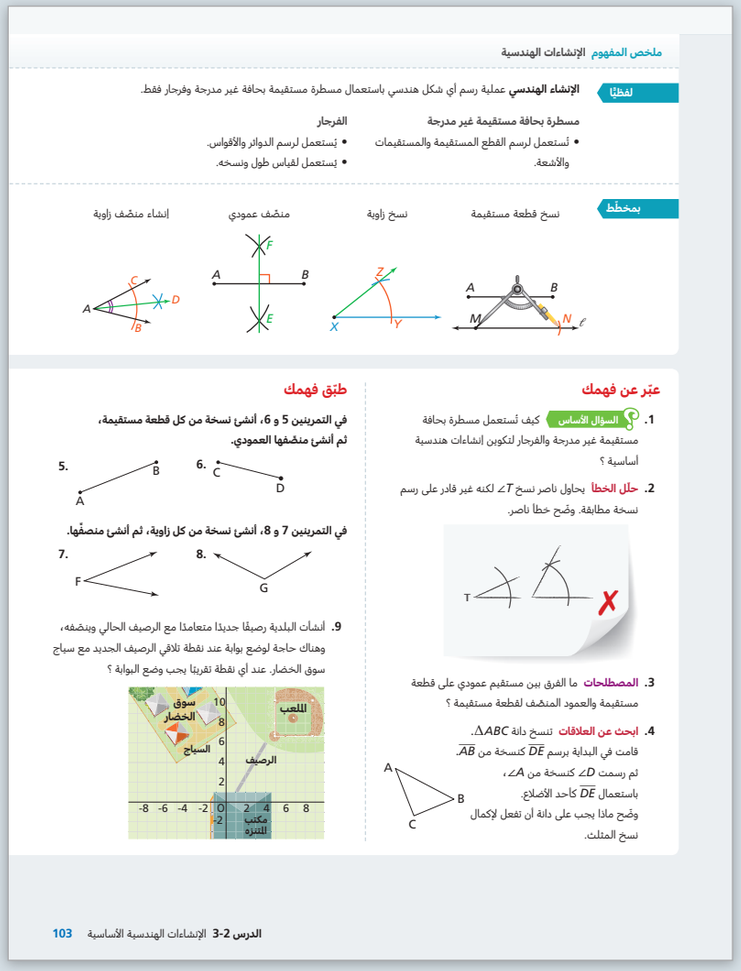
5.


6.


7.


8.


9. عند النقطة $(-2 , 6)$ تقريبًا.


ملخص المفهوم الإنشاءات الهندسية

لفظيًا **الإنشاء الهندسي** عملية رسم أي شكل هندسي باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة
- تُستعمل لرسم القطع المستقيمة والمستقيمات والأشعة.

الفرجار
- يُستعمل لرسم الدوائر والأقواس.
- يُستعمل لقياس طول ونسخه.

بمخطط

نسخ قطعة مستقيمة | نسخ زاوية | منصّف عمودي | إنشاء منصّف زاوية

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تُستعمل مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة والفرجار لتكوين إنشاءات هندسية أساسية ؟
2. حلل الخطأ يحاول ناصر نسخ $\angle T$ لكنه غير قادر على رسم نسخة مطابقة. وضّح خطأ ناصر.
3. المصطلحات ما الفرق بين مستقيم عمودي على قطعة مستقيمة والعمود المنصّف لقطعة مستقيمة ؟
4. ابحث عن العلاقات تنسخ دانة ΔABC. قامت في البداية برسم $\overline{DE}$ كنسخة من $\overline{AB}$. ثم رسمت $\angle D$ كنسخة من $\angle A$، باستعمال $\overline{DE}$ كأحد الأضلاع. وضّح ماذا يجب على دانة أن تفعل لإكمال نسخ المثلث.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أنشئ نسخة من كل قطعة مستقيمة، ثم أنشئ منصّفها العمودي.

في التمرينين 7 و 8، أنشئ نسخة من كل زاوية، ثم أنشئ منصّفها.

9. أنشأت البلدية رصيفًا جديدًا متعامدًا مع الرصيف الحالي وينصّفه، وهناك حاجة لوضع بوابة عند نقطة تلاقي الرصيف الجديد مع سياج سوق الخضار. عند أي نقطة تقريبًا يجب وضع البوابة ؟

الدرس 2-3 الإنشاءات الهندسية الأساسية 103

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-19, 21-25	10-14, 16-29

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 16	1
	10	2
2	17, 18	1
3	19, 20	1
	28	2
	11, 25	3
4	21, 22	1
	27	2
	12, 14	3
5	23, 26	2
	13, 24	3
	29	4

الإجابات

10. افتح الفرجار بطول إحدى القطعتين المستقيمتين. ضع سن الفرجار، دون تغيير ضبطه، عند أحد طرفي القطعة المستقيمة الثانية وتحقق مما إذا كان قلم الفرجار يرسم قوسًا يمر بالطرف الآخر للقطعة المستقيمة.

11. نموذج إجابة: 2, 4, 8, 16؛ قوى العدد 2

12. $\frac{n}{4}$

13. راجع عمل الطلاب. عند محاذاة F و G، يجب أن يكون للقطعة المستقيمة من F إلى المكان حيث يقطع خط طي الورقة القطعة المستقيمة نفس طول القطعة المستقيمة من G إلى المكان حيث يقطع خط طي الورقة القطعة المستقيمة.
عند المحاذاة، يجب أن يكون خط الطي متعامدًا مع القطعة المستقيمة.

14. رسم أحمد قوسًا من أحد ضلعي الزاوية إلى الضلع الآخر. كان يجب عليه رسم قوس حول الزاوية من R واستعمال نقطتي تقاطع هذا القوس مع ضلعي الزاوية كمركزين للقوسين اللذين سيرسمهما ليتقاطعا عند النقطة التي تستعمل مع النقطة R لرسم منصّف الزاوية.

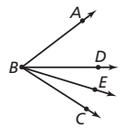
تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

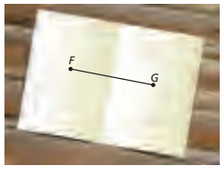
10. **استعمل الأدوات المناسبة** كيف يمكنك استعمال فرجار لتحديد ما إذا كان لقطعتين مستقيمتين نفس الطول أم لا ؟

11. **مهارات التفكير العليا** يمكنك تقسيم قطعة مستقيمة إلى n من القطع المستقيمة المتطابقة، وذلك بتنصيف القطع المستقيمة بشكل متكرر. اذكر بعضًا من قيم n الممكنة. ضع قاعدة لقيم n الممكنة.

12. **فكّر وثابر في الحل** في الشكل أدناه، افترض أنّ $m\angle ABC = n°$ و $m\angle ABC = 2(m\angle DBC)$. ومنصّف $\angle DBC$ هو $\overrightarrow{BE}$. أوجد $m\angle EBC$.



13. **فكّر وثابر في الحل** هناك طرق أخرى لتكوين إنشاءات هندسية، مثل طي الورق. اتبع خطوات طي الورقة لإنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.

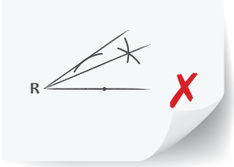


ارسم القطعة المستقيمة FG على ورقة.

- اطوِ الورقة بحيث تنطبق النقطة F على النقطة G.
- اثنِ الورقة على طول الطية.
- افرد الورقة. يمثّل خط الطيّة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة.

لماذا يجب أن تنطبق F على G عند طي الورقة ؟

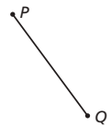
14. **حلّل الخطأ** طلب المعلم من أحمد إنشاء منصّف $\angle R$. وضّح الخطأ في عمل أحمد.



تدرَّب

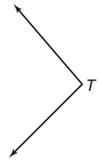
في التمرينين 15 و 16، انسخ كل قطعة مستقيمة. انظر المثال 1

15.

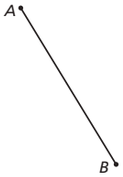
16. 

في التمرينين 17 و 18، انسخ كل زاوية. انظر المثال 2

17.

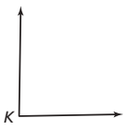
18. 

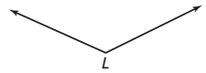
في التمرينين 19 و 20، انسخ كل قطعة مستقيمة وقم بتنصيفها. انظر المثال 3

19. 

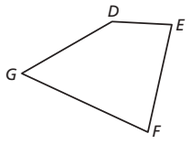
20.

في التمرينين 21 و 22، انسخ كل زاوية وقم بتنصيفها. انظر المثال 4

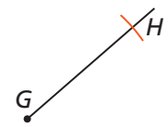
21. 

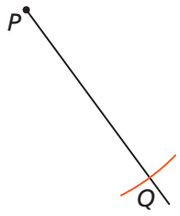
22. 

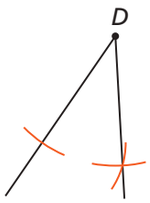
23. أين تقع نقطة تقاطع المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة GF ومنصّف $\angle E$ في الشكل أدناه ؟ انظر المثال 5

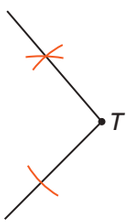


---

15. 

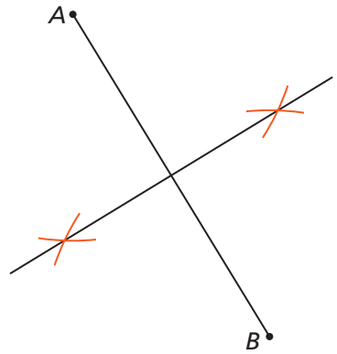
16. 

17. 

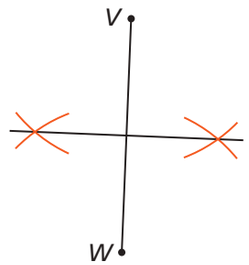
18. 

www.jnob-jo.com

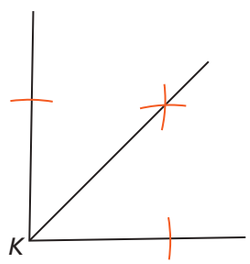
19.



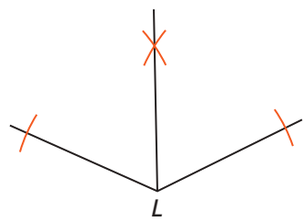
20.



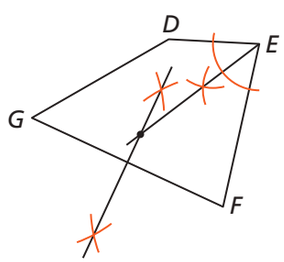
21.



22.



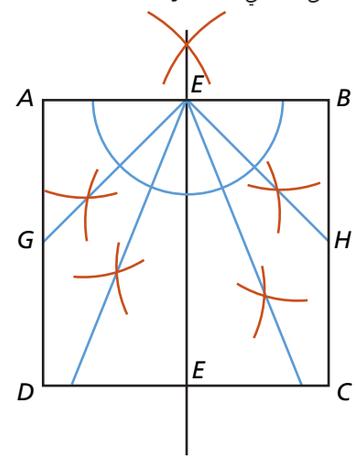
23.



www.jnob-jo.com

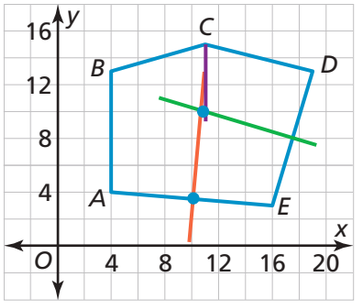
الإجابات

.24 أنشئ المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$. لتكن E نقطة منتصف $\overline{AB}$ و F نقطة تقاطع المنصّف العمودي و $\overline{DC}$. أنشئ منصّفي $\angle AEF$ و $\angle BEF$. لتكن G و H النقطتين حيث يتقاطع منصّفا الزاويتين مع ضلعين من أضلاع المربع. أنشئ منصّفي $\angle GEF$ و $\angle HEF$.



.25 العرض 22.5 m والطول 30 m، المساحة $675m^2$؛ يمثل (x) العرض ويمثل $(1.5x)$ الطول. $5x = 300$، أي $x = 60$. بُعدا الصالة الرياضية هما 60 m في 90 m، تم تنصيف العرض، أي إن طول كل قسم هو 30 m، تم تنصيف الطول للحصول على 45 m، ثم تنصيفه مرة أخرى للحصول على 22.5 m

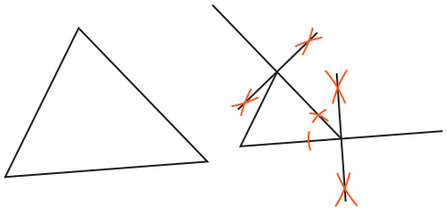
.26 $(11 , 10)$ تقريبًا.



27. $m\angle NPM = 2(m\angle QPM)$

28. C

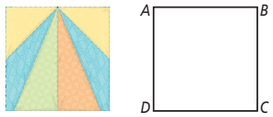
.29 **الجزء A** نموذج إجابة:
الجزء B راجع عمل الطلاب. نصّف ضلعًا أصليًّا. بعدها انسخ قطعة مستقيمة طولها نصف الطول المعطى. بعد ذلك، انسخ زاوية مجاورة. ثم تأكد من أن الضلع الآخر للزاوية يساوي نصف طول الضلع المناظر الأساسي.



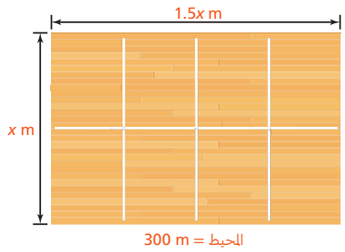
تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

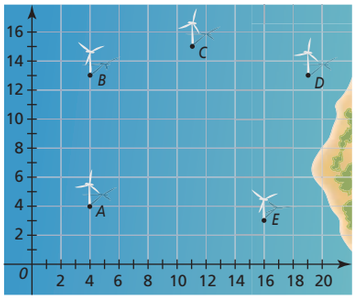
.24 **تواصل بدقة** اللحاف مكون من قطعة مربعة مصممة كما في الشكل الموضح أدناه. يمكن إنشاء التصميم في المربع باستعمال الأعمدة المنصّفة ومنصّفات الزوايا فقط. اكتب تعليمات لإنشاء النمط في المربع $ABCD$. قد تجد أنه من المفيد تحديد بعض النقاط الإضافية.



.25 **روابط في الرياضيات** قُسّمت الصالة الرياضية في إحدى المدارس لإقامة معرض فني عن طريق تنصيف عرضها وطولها. ثم نُصّف كل من نصفي طولها لتكوين 8 أقسام. ما أبعاد ومساحة كل قسم ؟



.26 **نمذج** يريد مهندس وضع توربين رياح سادس بالقرب من تقاطعات منصّف $\angle BCD$ مع المنصّفين العموديين للقطعتين المستقيمتين AE و ED. ما الموقع الممكن للتوربين السادس ؟



تدرَّب على اختبار

.27 منصّف $\angle NPM$ هو $\overrightarrow{PQ}$. اكتب معادلة تصف العلاقة بين $m\angle NPM$ و $m\angle QPM$.

.28 **اختبار SAT/ACT** المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة DC هو $\overline{AB}$، والمنصّف العمودي للقطعة المستقيمة AB هو $\overline{DC}$. تتقاطع $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ عند النقطة E. أي المعادلات أدناه صحيحة ؟

Ⓐ $AB = CD$

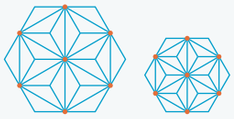
Ⓑ $CE = CD$

Ⓒ $DE = CE$

Ⓓ $AE = DE$

Ⓔ $EB = CD$

.29 **مهمة أدائية** يمكن أن يكون تصغير الصور أو تكبيرها مفيدًا عندما تحتاج إلى نسخة أصغر أو أكبر لصورة أو لتمثيل بياني لتقرير ما أو لملصق.



الجزء A استعمل فرجارًا ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لرسم مضلع له 3 أضلاع على الأقل.

الجزء B اصنع نسخة مصغّرة للشكل طول كل ضلع فيها يساوي نصف طول الضلع المناظر له في الشكل الأصلي. أولًا، حدّد أحد الأضلاع، ونصّفه، ثم انسخ أحد النصفين. ثم انسخ الزوايا المتجاورة. كرّر العملية إلى أن تحصل على نسخة مصغّرة من الشكل.

الجزء C فكّر في كيفية مضاعفة طول قطعة مستقيمة. اصنع نسخة مكبّرة للشكل طول كل ضلع فيها يساوي ضعف طول الضلع المناظر له في الشكل الأصلي. صِف كيف أنشأت الشكل المكبّر.

كرر حتى يتم نسخ كل الأضلاع والزوايا.

الجزء C انسخ قطعة مستقيمة طولها مساوٍ لطول أحد أضلاع المثلث. ارسم مستقيمًا يمر بالقطعة المستقيمة المنسوخة، ثم انسخ القطعة المستقيمة مرة أخرى بحيث يكون أحد طرفي القطعة الجديدة طرفًا للقطعة المستقيمة القديمة. انسخ زاوية مجاورة. ثم انسخ الزاوية المجاورة الأخرى. عيّن نقطة تقاطع ضلعي الزاويتين.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 3-3
نقطة المنتصف والمسافة

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ استعمال قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

✔ استعمال قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

الفهم الأساس

يستعمل قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ويستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي. يمكن تعديل قانون نقطة المنتصف ليُستعمل في تقسيم قطعة مستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين باستعمال أي نسبة من الأطوال.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- نسخ قطع مستقيمة باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار.
- إنشاء منصفات عمودية لإيجاد نقاط منتصف قطع مستقيمة.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إيجاد نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتين.
- استعمال أطوال ونقاط منتصف قطع مستقيمة لحل المسائل.
- تقسيم قطع مستقيمة بنسبة معلومة لإيجاد إحداثيي نقطة تقع بين نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.

لاحقًا في هذا الصف، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال قانون نقطة المنتصف وقانون المسافة بين نقطتين لوصف تحويلات هندسية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يربط الطلاب المعرفة السابقة حول نظرية فيثاغورس لإنشاء قانوني المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف.
- يطبق الطلاب قوانين لإيجاد المسافات بين النقاط وتعيين أي جزء من المسافة على القطعة المستقيمة.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **نظرية فيثاغورس** | *Pythagorean Theorem*

المصطلحات الجديدة

- **نقطة المنتصف** | *midpoint*

نشاط المصطلحات

راجع نظرية فيثاغورس للطلاب. استنبط، إن أمكن، إجابة بأن اسم النظرية يعود إلى رياضي وفيلسوف يوناني. اطلب من أحد الطلاب رسم مثلث قائم الزاوية على السبورة وتسمية الوتر والساقين. ثم تسمية طولي الساقين a و b وطول الوتر c.
بعدها، اطلب من الطلاب كتابة قاعدة فيثاغورس، ووصف كيفية إيجاد طول الوتر بمعلومية إحداثيات نقطتي طرفيه.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.4.4 يوجد بمعلومية إحداثيات النقطتين A و B:

- طول القطعة المستقيمة AB.
- إحداثيًا نقطة منتصف القطعة المستقيمة AB.
- إحداثيًا النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة بنسبة معلومة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًّا بطريقة تجريدية وكمية

يمثل الطلاب سيناريوهات من واقع الحياة باستعمال نقاط في المستوى الإحداثي كمواقع.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن علاقات المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي ويستعملونها في حل المسائل.

www.jnob-jo.com

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يعيّن الطلاب نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي، وذلك يساعدهم على إنشاء قانوني المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف في هذا الدرس بشكل منهجي.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: كيف يمكن لهدى إيجاد النقطة الصحيحة لتعليق الصورة باستعمال شريط قياس ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : ضع إشارة قريبة من وسط الحائط. أوجد القياس بين هذه الإشارة وإحدى الزاويتين. قس نفس المسافة من الزاوية الثانية وضع إشارة ثانية. ضع الصورة بين الإشارتين.]

س: كيف تجد نقطة موجودة بالضبط بين نقطتين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : احسب مسافات متساوية من النقطتين إلى الأعلى وإلى الأسفل، ومن النقطتين إلى اليمين وإلى اليسار على مربعات الشبكة.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل يمكنك إيجاد موقع المصباح عبر إيجاد الإحداثيين x و y بطريقة منفصلة ؟

[نعم، يمكنك استعمال شبكة المربعات لإيجاد الإحداثي الذي يقع في منتصف المسافة الأفقية بين النقطتين C و D والإحداثي الذي يقع في منتصف المسافة الرأسية بين النقطتين C و D.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: أين يمكنك تعليق مصباح في السقف بحيث يكون في مركز الغرفة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عند $(6.5, 5.25)$ ؛ بإهمال زاوية الغرفة يجب أن يوضع المصباح بين الحائطين الأيسر والأيمن، بحيث يكون الإحداثي x مساويًا للعدد 6.5 وبين الحائطين الأمامي والخلفي، بحيث يكون الإحداثي y مساويًا للعدد 5.25]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: أوجد متوسط إحداثيي x للنقطتين A و B. كيف تقارن ذلك مع الإحداثي x للموقع الذي يجب تعليق الصورة فيه ؟

[له نفس الإحداثي x.]

س: أوجد متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y للنقطتين C و D. كيف تقارن ذلك مع إحداثيي الموقع الذي يجب وضع المصباح فيه ؟

[له نفس الإحداثيات.]

عادات التفكير استعمل مع **نمذج وناقش**

استعمل الأدوات المناسبة ما الأدوات التي استعملتها لمساعدتك على الإجابة عن الأسئلة ؟ ما المفيد من استعمال تلك الأدوات ؟

[شبكة الإحداثيات؛ كانت مفيدة لأنك تستطيع عد مربعات الشبكة لإيجاد الأطوال ونقاط المنتصف.]

كتاب الطالب، صفحة 106

3-3 نقطة المنتصف والمسافة

Midpoint and Distance

أستطيع... استعمال قانون نقطة المنتصف وقانون المسافة بين نقطتين لحل المسائل.

معيار الدرس 9.4.4

المصطلحات

- نقطة المنتصف midpoint

نمذج وناقش

تريد هدى إعادة ترتيب غرفة المعيشة في منزلها وترسم مخططًا لأرضية الغرفة ليساعدها على معرفة أماكن الأشياء.

A. تريد هدى تعليق صورة في وسط الجدار الخلفي. كيف يمكنها إيجاد النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين A و B ؟

B. **تواصل بدقة** تريد هدى وضع مصباح في منتصف المسافة بين الكرسيين الواقعين عند النقطتين C و D. كيف يمكنك إيجاد النقطة التي يجب وضع المصباح فيها ؟

السؤال الأساس **كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟**

نموذج من أعمال الطلاب

A. عددت المربعات بين النقطة A والنقطة B، ثم قسمت عدد المربعات على 2، وأضفته إلى الإحداثي x للنقطة A. أي إن نقطة المنتصف هي $(6.5 , 10)$.

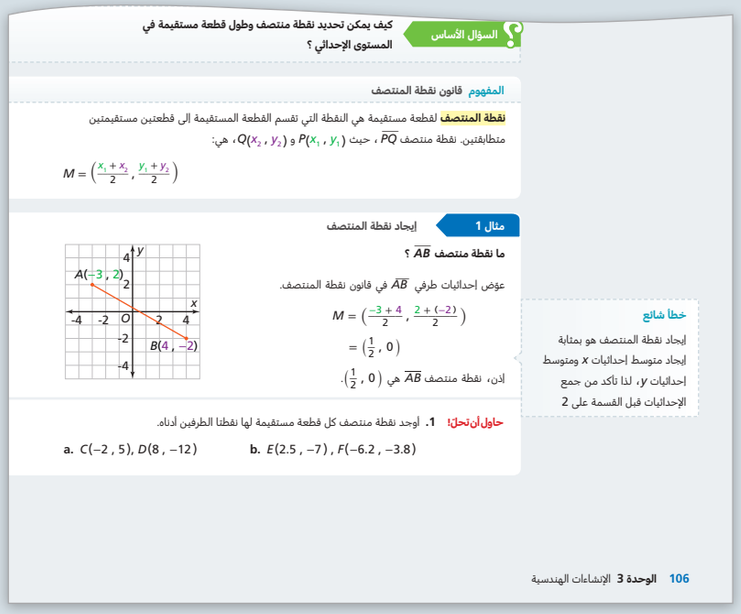
B. رسمت قطعة مستقيمة بين النقطة C والنقطة D وحددت منتصفها. ثم وجدت الإحداثي الذي يقع أفقيًا في الوسط بين C و D على الشبكة والإحداثي الذي يقع رأسيًا في المنتصف بين C و D على الشبكة. أي إن نقطة المنتصف هي $(10 , 7)$

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

يتعلم الطلاب تعريف نقطة المنتصف. يفهم الطلاب أن أطوال ونقاط منتصف القطع المستقيمة هي مفاهيم مهمة في الهندسة وتستعمل لحل مسائل من واقع الحياة.



السؤال الأساس: كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

المفهوم قانون نقطة المنتصف

نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة هي النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين. نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، حيث $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$، هي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 1 إيجاد نقطة المنتصف

ما نقطة منتصف $\overline{AB}$ ؟

عوّض إحداثيات طرفي $\overline{AB}$ في قانون نقطة المنتصف.

$$M = \left(\frac{-3 + 4}{2} , \frac{2 + (-2)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} , 0\right)$$

إذن، نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $\left(\frac{1}{2} , 0\right)$.

خطأ شائع: إيجاد نقطة المنتصف هو بمثابة إيجاد متوسط إحداثيات x ومتوسط إحداثيات y، لذا تأكد من جمع الإحداثيات قبل القسمة على 2

حاول أن تحلّ 1. أوجد نقطة منتصف كل قطعة مستقيمة لها نقطتا الطرفين أدناه.

a. $C(-2 , 5), D(8 , -12)$ b. $E(2.5 , -7) , F(-6.2 , -3.8)$

106 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

مثال 1 إيجاد نقطة المنتصف

طرح أسئلة هادفة

س: في قانون نقطة المنتصف، علامَ تدل الأرقام المستعملة في الرموز السفلية ؟
[تدل الأرقام السفلية الموضوعة على الرموز في القانون على ما إذا كان الإحداثي يمثل إحداثي النقطة الأولى (P) أو النقطة الثانية (Q).]

س: في قانون نقطة المنتصف، هل يهم أي من النقطتين A أو B يتم اختيارها واعتبارها النقطة الأولى ؟
[كلّا، للقطعة المستقيمة نفس الطول بغض النظر عن نقطة الطرف المختار للنقطة الأولى، أي إن القانون دائمًا يعطي نفس النتيجة بغض النظر عن كيفية اختيار النقطتين.]

س: تعلمت سابقًا كيفية إيجاد الوسط الحسابي لمجموعة أعداد.
ما العلاقة بين نقطة المنتصف والوسط الحسابي ؟
[إحداثيا نقطة المنتصف هما الوسط الحسابي لإحداثيي نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. $(3, -3.5)$ **b.** $(-1.85 , -5.4)$

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع المثال 2)

الكتابة مستوى 2 اطلب من الطلاب كتابة الاختلاف بين المسافة الرأسية والمسافة الأفقية والمسافة كما يرونها في هذا المثال.

س: ما الإحداثيات المستعملة لحساب المسافة الرأسية ؟ لماذا ؟
[يُستعمل في المسافة الرأسية الإحداثي y.
ذلك لأن الإحداثيين y يستعملان في قياس المسافات من المحور x إلى الأعلى وإلى الأسفل، أي المسافة الموجودة في الاتجاه الرأسي.]

س: لماذا تم استعمال المصطلحين أفقي ورأسي ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يوضح المصطلحان الإحداثي الذي يجب استعماله وساق مثلث قائم الزاوية الذي يجب استعماله.]

التحدث مستوى 3 بعد قراءة المثال، اطلب من الطلاب مشاركة بعض التعريفات لكلمة "تقسيم". يمكن للطلاب الدفاع عن تعريفاتهم باستعمال مفاتيح من المثال. إذا لزم الأمر، اطلب منهم تعيين النقطة $(9 , 5)$ لمساعدتهم على توضيح فهمهم للموضوع.

س: ما المقصود بالعبارة "تقسيم قطعة مستقيمة" ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تعني تجزئة قطعة مستقيمة إلى أجزاء.]

س: في المثال، ما الذي ساعدك على تعريف التقسيم ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : رؤية أن النقطة $(9 , 5)$ هي جزء من القطعة المستقيمة.]

www.jnob-jo.com

مثال 2 تقسيم قطعة مستقيمة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا من المهم جمع كسر المسافة الرأسية والمسافة الأفقية إلى إحداثيي أحد الطرفين دون الآخر ؟

[لو جمعت المسافتين إلى B، لوجدت عندها النقطة التي تقع عند المسافة المعطاة من B إلى A وليس العكس.]

س: فكّر في العلاقة بين خطوط الأعداد والمحورين x و y. كيف يمكنك الربط بين تقسيم قطعة مستقيمة على خط أعداد أفقي أو رأسي وتقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي مبني على تقسيم مزدوج على خط أفقي وخط رأسي.]

س: لو طُلب منك إيجاد النقطة التي تقع عند مسافة معيّنة من B على القطعة المستقيمة AB، هل كنت ستجمع أم تطرح كسر المسافة الرأسية والمسافة الأفقية ؟

[بما أن اتجاه تقسيم القطعة المستقيمة من B إلى A، نعتبر B نقطة البداية. بما أن كلًّا من إحداثيّي B أكبر من الإحداثي المناظر له للنقطة A فإننا نطرح المسافة الأفقية من الإحداثي x للنقطة B ونطرح المسافة الرأسية من الإحداثي y للنقطة B.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $(10 , 6.5)$

b. $(5 , -1)$

المسافة الأفقية من B إلى A هي 8

المسافة الرأسية من B إلى A هي 12

بما أن إحداثيّي نقطة البداية B أكبر من إحداثيّي نقطة النهاية A

$x_A < x_B$ و $y_A < y_B$ فإن إحداثيّي النقطة التي تقع على $\frac{4}{5}$ المسافة من B هما:

$(x_B - 8 , y_B - 12)$ أي $(5 , -1)$

مثال 3 اشتقاق قانون المسافة بين نقطتين

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا استعمل المثال النقطتين P و Q دون تحديد إحداثياتهما ؟

[عند استعمال المتغيرات فقط، يمكن إيجاد قانون للمسافة بين نقطتين بدلًا من إيجاد قيمة محددة للمسافة.]

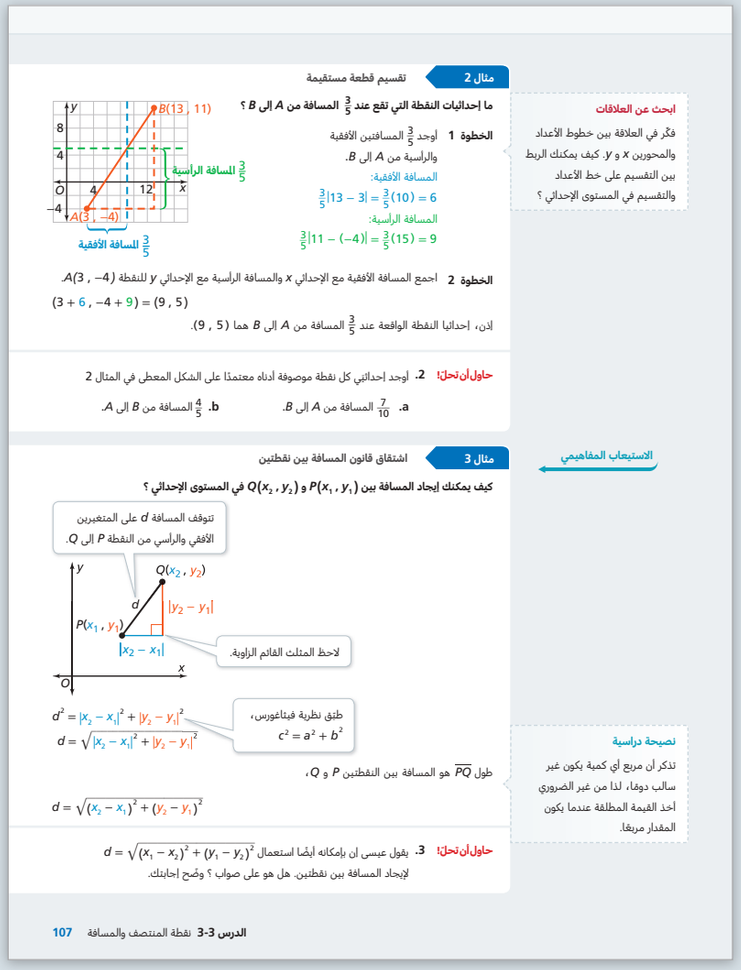
حاول أن تحلّ! الإجابات

3. نعم؛ قد تتنوع الإجابات.

4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : لوجود مربع الفرق بين الإحداثيات، أي إنه لا يهم الترتيب المعتمد في الطرح.

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 قد يحاول الطلاب إيجاد الفرق بين إحداثيي كل نقطة بدلًا من الفرق بين إحداثيي x والفرق بين إحداثيي y. أخبر الطلاب أنه عند إيجاد $|x_2 - x_1|$، فإنهم يجدون المسافة الأفقية، وعند إيجاد $|y_2 - y_1|$، فإنهم يجدون المسافة الرأسية.



مثال 2 تقسيم قطعة مستقيمة

ما إحداثيات النقطة التي تقع عند $\frac{3}{5}$ المسافة من A إلى B ؟

الخطوة 1 أوجد $\frac{3}{5}$ المسافتين الأفقية والرأسية من A إلى B.

المسافة الأفقية:

$\frac{3}{5}|13 - 3| = \frac{3}{5}(10) = 6$

المسافة الرأسية:

$\frac{3}{5}|11 - (-4)| = \frac{3}{5}(15) = 9$

الخطوة 2 اجمع المسافة الأفقية مع الإحداثي x والمسافة الرأسية مع الإحداثي y للنقطة $A(3 , -4)$.

$(3 + 6 , -4 + 9) = (9 , 5)$

إذن، إحداثيا النقطة الواقعة عند $\frac{3}{5}$ المسافة من A إلى B هما $(9 , 5)$.

حاول أن تحلّ! 2. أوجد إحداثيي كل نقطة موصوفة أدناه معتمدًا على الشكل المعطى في المثال 2

a. $\frac{7}{10}$ المسافة من A إلى B.

b. $\frac{4}{5}$ المسافة من B إلى A.

ابحث عن العلاقات

فكّر في العلاقة بين خطوط الأعداد والمحورين x و y. كيف يمكنك الربط بين التقسيم على خط الأعداد والتقسيم في المستوى الإحداثي ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 3 اشتقاق قانون المسافة بين نقطتين

كيف يمكنك إيجاد المسافة بين $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ في المستوى الإحداثي ؟

تتوقف المسافة d على المتغيرين الأفقي والرأسي من النقطة P إلى Q.

لاحظ المثلث القائم الزاوية.

$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$

طبّق نظرية فيثاغورس، $c^2 = a^2 + b^2$

طول $\overline{PQ}$ هو المسافة بين النقطتين P و Q،

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

حاول أن تحلّ! 3. يقول عيسى إن بإمكانه أيضًا استعمال $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ لإيجاد المسافة بين نقطتين. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

نصيحة دراسية

تذكر أن مربع أي كمية يكون غير سالب دومًا، لذا من غير الضروري أخذ القيمة المطلقة عندما يكون المقدار مربعًا.

الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة 107

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

فكّر وثابر في الحل هل يوجد قانون رياضي لإيجاد إحداثيي النقطة R التي تقع عند الجزء الذي يمثل قيمة الكسر q من المسافة بين النقطتين $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : إذا كان أي من إحداثيّي نقطة البداية أصغر (أكبر) من الإحداثي المناظر له لنقطة النهاية، نجمع المسافة إلى إحداثي نقطة البداية (أو نطرحها منه).

على سبيل المثال، إذا كان المطلوب إيجاد النقطة R التي تقع عند قيمة الكسر q من المسافة PQ من Q، تكون Q نقطة البداية. وإذا كان x_2 أصغر من x_1، و y_2 أكبر من y_1، نجمع المسافة الأفقية إلى x_2، ونطرح المسافة الرأسية من y_2.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 إيجاد المسافة بين نقطتين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما وجه الشبه بين قانون المسافة بين نقطتين ونظرية فيثاغورس ؟
[في النظريتين، مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.]

س: المطلوب في المسألة إيجاد المسافة الكلية. كم طولًا يجب أن تحسب باستعمال قانون المسافة ؟
[2 ؛ المسافة من رامي الكرة إلى ضارب الكرة، ثم من ضارب الكرة إلى مدافع الوسط. المسافة الكلية تساوي مجموع المسافتين.]

س: هل ستكون المسافة نفسها إذا حولت وحدات الشبكة إلى أقدام قبل حساب المسافتين ؟
[نعم، يمكنك احتساب المسافة إما بالوحدات ثم تحويلها إلى أقدام، أو التحويل إلى أقدام أولًا ثم احتساب المسافة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. 100.6 قدم.

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

فكّر وثابر في الحل كيف تربط بين قانون المسافة بين نقطتين ونظرية فيثاغورس ؟

[قانون المسافة بين نقطتين يستعمل المسافتين الأفقية والرأسية بين نقطتين كطولي ساقين في مثلث قائم الزاوية.]

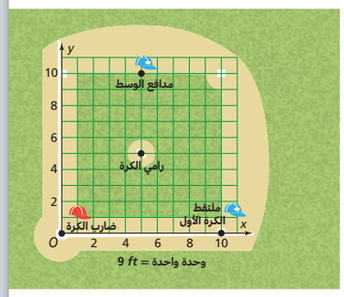
المفهوم قانون المسافة بين نقطتين

قانون المسافة d بين نقطتين $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ هو:

$$d(P , Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تطبيق **مثال 4** إيجاد المسافة بين نقطتين

قام رامي الكرة برمي كرة إلى ضارب الكرة، الذي ضربها بدوره لتصل إلى مدافع الوسط. إذا سارت الكرة في خط مستقيم بين كل منهم، ما المسافة الكلية التي قطعتها الكرة ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



ضع مثّل رامي الكرة عند النقطة $P(5 , 5)$، وضارب الكرة عند النقطة $B(0 , 0)$، ومدافع الوسط عند النقطة $S(5 , 10)$.

احسب استعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد كل مسافة.

$$d(\text{من رامي الكرة إلى ضارب الكرة}) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (0 - 5)^2}$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 25}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$\approx 7.1$$

استعمل قانون المسافة بين نقطتين مع النقطتين $P(5 , 5)$ و $B(0 , 0)$.

$$d(\text{من ضارب الكرة إلى مدافع الوسط}) = \sqrt{(5 - 0)^2 + (10 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{5^2 + 10^2}$$
$$= \sqrt{25 + 100}$$
$$= \sqrt{125}$$
$$\approx 11.2$$

استعمل قانون المسافة بين نقطتين مع النقطتين $B(0 , 0)$ و $S(5 , 10)$.

فسّر إذن، المسافة الكلية التي قطعتها الكرة هي $7.1 + 11.2 = 18.3$ وحدة تقريبًا، أو $(18.3)(9) = 164.7$ ft تقريبًا.

حاول أن تحلّ! **4.** ما المسافة التي يجب على مدافع الوسط أن يرمي عبرها الكرة لتصل إلى ملتقط الكرة الأول ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.

108 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب التحقق من نتائج قانون المسافة بين نقطتين بنشاط حركي.

- اطلب من الطلاب الوقوف في مساحة مفتوحة، ووضع قطعة صغيرة من الشريط اللاصق على الأرض حيث يقفون.
- وجّه الطلاب للتقدم 4 خطوات إلى اليمين ووضع قطعة أخرى من الشريط على الأرض. بعدها وجه الطلاب للسير 3 خطوات إلى الأمام ووضع قطعة أخرى من الشريط على الأرض.

س: في رأيك، كم خطوة عليك سيرها للعودة إلى القطعة الأولى من الشريط ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : 5]

- اطلب من الطلاب عد خطوات العودة إلى القطعة الأولى من الشريط.

س: كيف تقارن بين عدد الخطوات والتقدير الذي قمت فيه ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تقريبًا متساويان.]

س: كيف يمكنك حساب عدد خطوات العودة ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل قانون المسافة بين نقطتين.]

- اطلب من الطلاب تكرار النشاط مع مثلث أطوال أضلاعه 5 و 12 و 13 لتأكيد القانون.

www.jnob-jo.com

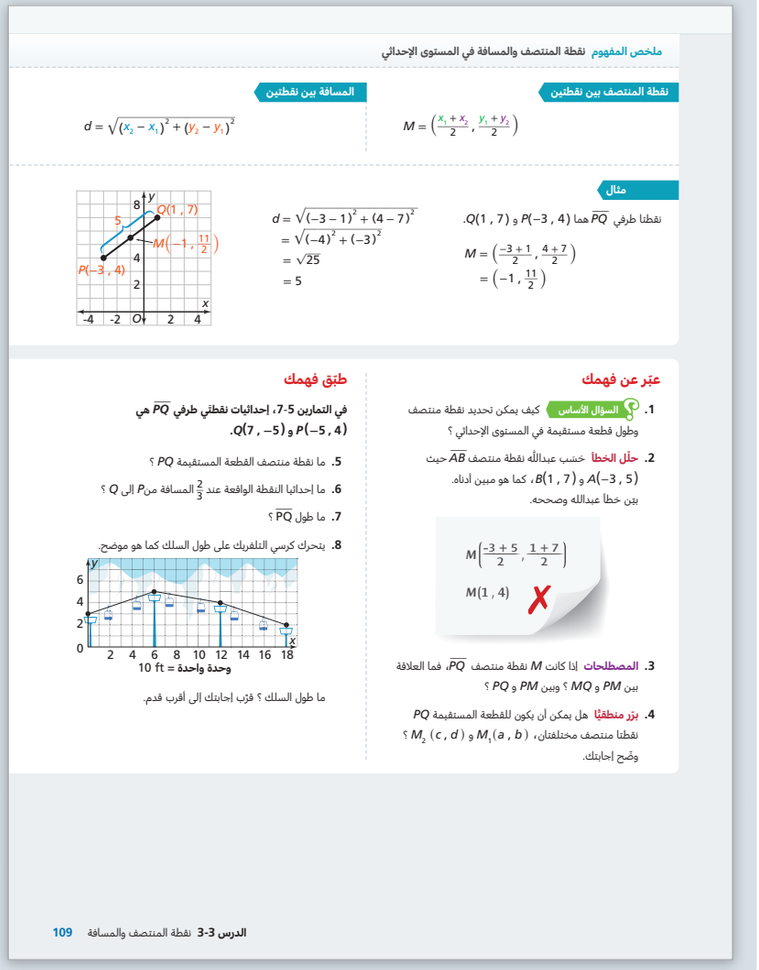
ملخص المفهوم نقطة المنتصف والمسافة

س: كيف يستعمل قانون نقطة المنتصف لتعيين نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[يجد قانون نقطة المنتصف متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y لنقطتي طرفي القطعة المستقيمة، أي نقطة المنتصف.]

س: كيف يُستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟

[يتمثل قانون المسافة بين نقطتين في اعتبار المسافة الأفقية والمسافة الرأسية كطولي ساقين في مثلث قائم الزاوية، ثم يتم إيجاد طول وتره الذي يساوي المسافة المطلوبة بين النقطتين.]



ملخص المفهوم نقطة المنتصف والمسافة في المستوى الإحداثي

نقطة المنتصف بين نقطتين

$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

المسافة بين نقطتين

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

مثال

نقطتا طرفي $\overline{PQ}$ هما $P(-3, 4)$ و $Q(1, 7)$.

$M = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+7}{2}\right)$
$= \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

$d = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-7)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن تحديد نقطة منتصف وطول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ؟
2. حلّل الخطأ خسب عبدالله نقطة منتصف $\overline{AB}$ حيث $A(-3, 5)$ و $B(1, 7)$، كما هو مبين أداه. بين خطأ عبدالله وصححه.

$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$
$M(1, 4)$

3. المصطلحات إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{PQ}$، فما العلاقة بين PM و MQ ؟ وبين PM و PQ ؟
4. برّر منطقيًا هل يمكن أن يكون للقطعة المستقيمة PQ نقطتا منتصف مختلفتان، $M_1(a, b)$ و $M_2(c, d)$ ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمارين 5-7، إحداثيات نقطتي طرفي $\overline{PQ}$ هي $P(-5, 4)$ و $Q(7, -5)$.

5. ما نقطة منتصف القطعة المستقيمة PQ ؟
6. ما إحداثيا النقطة الواقعة عند $\frac{2}{3}$ المسافة من P إلى Q ؟
7. ما طول $\overline{PQ}$ ؟
8. يتحرك كرسي التلفريك على طول السلك كما هو موضح.

وحدة واحدة = 10 ft

ما طول السلك ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب قدم.

الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة 109

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد يجد الطلاب صعوبات في تحديد نقطة الطرف التي سيضيفون إليها، أو يطرحون منها، قيمة الكسر الذي يدل على جزء من المسافتين الأفقية والرأسية. أخبر الطلاب أن "من P إلى Q" تعني أن نقطة البداية هي P فيضاف جزء المسافة إلى إحداثيي P أو يطرح منه.

الإجابات

1. يتم تحديد نقطة المنتصف عبر تطبيق قانون نقطة المنتصف على إحداثيات نقطتي طرفي القطعة المستقيمة. يتم تحديد طول قطعة مستقيمة عبر تطبيق قانون المسافة بين نقطتين على إحداثيات نقطتي طرفي القطعة المستقيمة.

2. حسب عبدالله متوسط إحداثيي x و y لكل نقطة بدلًا من حساب متوسط إحداثيي x ومتوسط إحداثيي y للنقطتين.

3. $PM = MQ$; $PQ = 2PM$.

4. كلّا؛ إذا كان كل من (a, b) و (c, d) نقطتي منتصف، فإن $a = \frac{x_1 + x_2}{2} = c$ و $b = \frac{y_1 + y_2}{2} = d$، وبالتالي $a = c$ و $b = d$.

5. $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$

6. $(3, -2)$

المسافة الأفقية من P إلى Q هي 8

المسافة الرأسية من P إلى Q هي 6

بما أن $x_Q > x_P$ و $y_Q < y_P$

فإن إحداثيي النقطة التي تقع على بعد $\frac{2}{3}$ المسافة من P هما: $(x_P + 8, y_P - 6)$

أي $(3, -2)$

7. 15

8. 187 ft

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-21 , 23-28	9-16 , 18-28

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	10, 17, 18 ,19	1
	11, 26	2
2	15, 16	1
	9	2
	12, 14 ,23	3
3	27	2
	13	4
4	20, 21, 22, 24, 25	3
	28	4

الإجابات

9. **a.** $\left(5 , -\frac{9}{2}\right)$

b. $K\left(4 - \frac{1}{n}|0 - 4| , -5 - \frac{1}{n}|-7 + 5|\right)$
$= K\left(4 - \frac{4}{n} , -5 - \frac{2}{n}\right)$

10. عند حساب إحداثيي نقطة المنتصف، لم يجمع الطالب إحداثيي x وإحداثيي y. الإجابة الصحيحة هي $M\left(\frac{-4 + (-1)}{2} , \frac{5 + (-4)}{2}\right)$ أو $M\left(-\frac{5}{2} , \frac{1}{2}\right)$.

11. $a = 2$. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اكتب نظام معادلات في متغيرين وأوجد قيمة a.
$\frac{2a + b + 1}{2} = 3$ و $\frac{a + 3b + 5}{2} = 5$. إذن، $a = 2$.

12. **a.** $(4 , 10)$

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : أوجد النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة 4 أمثال المسافة التي تبعدها النقطة المعطاة عن نقطة الأصل، $Q(8 , 20)$.

13. $(4 , 22)$ و $(11, 15)$؛ باستعمال ثلاثية فيثاغورس 8 و 15 و 17، حيث يمثّل العدد 17 المسافة بين النقطتين P و Q ويمثل العدد 8 المسافة الأفقية و 15 المسافة الرأسية. اجمع 8 مع -4 واجمع 15 مع 7 للحصول على $(4 , 22)$، ثم بدّل 8 و 15 للحصول على $(11 , 15)$.

14. $PM = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$
$PQ = 2PM = 2\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$

15. $(0.8 , -3.4)$

16. $(8 , 2)$

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

9. **استعمل البنية** تقع النقطة K عند $\frac{1}{n}$ المسافة من النقطة $J(4 , -5)$ إلى النقطة $L(0 , -7)$.

a. ما إحداثيا K إذا كانت $n = 4$ ؟

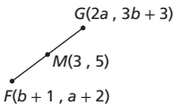
b. ما صيغة إيجاد إحداثيي K لأي n ؟

10. صِف خطأ الطالب عند إيجاده نقطة منتصف $\overline{CD}$ حيث $C(-4 , 5)$ و $D(-1 , -4)$ وصحح هذا الخطأ.

$\left(\frac{-4 - (-1)}{2} , \frac{5 - (-4)}{2}\right)$

$\left(-\frac{3}{2} , \frac{9}{2}\right)$ ✗

11. **روابط في الرياضيات** النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{FG}$. هل يمكنك إيجاد قيمة a ؟ وضّح إجابتك.



12. **برّر منطقيًا** افترض أن إحدى نقطتي طرف $\overline{PQ}$ هي $P(0 , 0)$.

a. إذا كانت $(2 , 5)$ نقطة منتصف $\overline{PQ}$، فما إحداثيا النقطة Q ؟

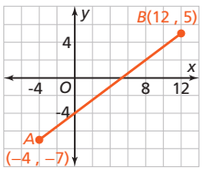
b. كيف يمكنك إيجاد Q إذا كانت النقطة $(2 , 5)$ تقع عند $\frac{1}{4}$ المسافة من P إلى Q ؟

13. **مهارات التفكير العليا** يبلغ طول $\overline{PQ}$ 17 وحدة، حيث $P(-4 , 7)$. إذا كان الإحداثيان x و y للنقطة Q أكبر من الإحداثيين x و y للنقطة P، فما إحداثيات القيم المحتملة للنقطة Q، إذا كانت هذه القيم تنتمي إلى الأعداد الصحيحة ؟ وضّح إجابتك.

14. **فكّر وثابر في الحل** افترض أن $\overline{PQ}$ لها نقطة طرف $P(a , b)$ ونقطة المنتصف $M(c , d)$. اكتب مقدارًا يمثّل PM . استعمل المقدار الذي يمثّل PM لإيجاد مقدار يمثّل PQ.

تدرَّب

في التمرينين 15 و 16، أوجد إحداثيي النقطة المعطاة على $\overline{AB}$
انظر المثال 2



15. النقطة الواقعة عند $\frac{3}{10}$ المسافة من A إلى B.

16. النقطة الواقعة عند $\frac{1}{4}$ المسافة من B إلى A.

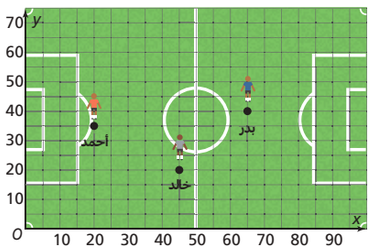
في التمارين 17-19 ، أوجد نقطة منتصف $\overline{PQ}$ انظر المثال 1

17. $P(3 , 5), Q(-2 , 13)$

18. $P(-2 , 2.5), Q(1.4 , 4)$

19. $P\left(4\frac{1}{3} , 3\frac{1}{6}\right), Q\left(-2\frac{1}{5} , 3\frac{2}{3}\right)$

في التمارين 20-22، يلعب بدر وأحمد وخالد كرة القدم. ويسجل نظام تتبع الحركة مواقعهم. يبلغ طول ضلع المربع في الشبكة 5 m
انظر المثالين 3 و 4



20. أوجد المسافة بين أحمد وخالد. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

21. أيهما أقرب إلى بدر، أحمد أم خالد ؟ وضّح إجابتك.

22. تقع كرة القدم عند النقطة $(35 , 60)$. أيّ اللاعبين الثلاثة أقرب إلى الكرة ؟

110 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

---

17. $\left(\frac{1}{2} , 9\right)$

18. $(-0.3 , 3.25)$

19. $\left(1\frac{1}{15} , 3\frac{5}{12}\right)$

20. 29.2 m

21. خالد؛ يبعد أحمد حوالي 45 مترًا ويبعد خالد حوالي 28 مترًا.

22. أحمد هو الأقرب، حيث يبعد حوالي 29.2 مترًا. بدر أبعد من أحمد، حيث يبعد حوالي 36.0 مترًا. خالد هو الأبعد، حيث يبعد حوالي 41.2 مترًا.

www.jnob-jo.com

الإجابات

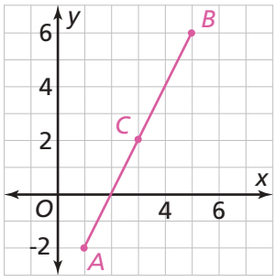
.23 $\left(\frac{19}{3}, 5\right)$؛
قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

$$(1, 9) + \frac{2}{3}[(9, 3) - (1, 9)]$$
$$= (1, 9) + \frac{2}{3}(8, -6) = \left(\frac{19}{3}, 5\right)$$

.24 $29.15\ mi^2$ تقريبًا.

.25 نعم؛ تساوي المسافة $\sqrt{40^2 + 44^2} \approx 59.5$ m

.26 مثّل بيانيًا $A(1, -2)$ و $B(5, 6)$ و $C(3, 2)$، كما في الشكل أدناه:



27. D

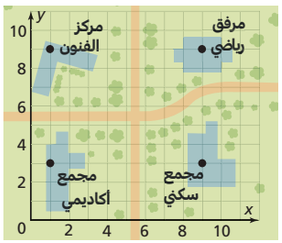
.28 **الجزء A** في الشارع 3، يقطع المسار مسافة حوالي 6.71 وحدات. في الحي المركزي، يقطع المسار مسافة حوالي 5.66 وحدات. المسافة الكلية تساوي 12.37 أو 3.10 أميال.

الجزء B تقاطع الشارع 2 مع الشارع 3

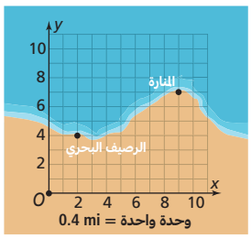
الجزء C $(8, 1)$ و $(4, 2)$.

طبّق

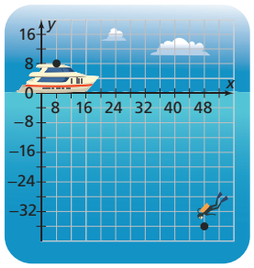
.23 **نمذج** تبني إحدى الجامعات مركزًا طلابيًا جديدًا يقع عند ثلثي المسافة من مركز الفنون إلى المجمع السكني. أوجد إحداثيي المركز الجديد. وضّح إجابتك.



.24 **روابط في الرياضيات** تلقي منارة حزمة دائرية من الضوء تصل إلى الرصيف البحري. ما المساحة التي يغطيها ضوء المنارة ؟



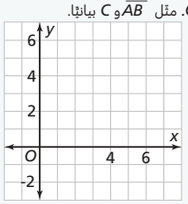
.25 **فكّر وثابر في الحل** يحاول قبطان سفينة الاتصال بغواص في عمق البحر.



إذا كان المدى الأقصى لإمكانية التواصل 60 مترًا، فهل سيتمكن القبطان من الاتصال بالغواص تبعًا لموقعيهما الحاليين ؟ وضّح إجابتك.

تدرَّب على اختبار

.26 للقطعة المستقيمة AB نقطة نهاية $A(1, -2)$ ونقطة منتصف $C(3, 2)$. مثّل $\overline{AB}$ و C بيانيًا.



.27 **اختبار SAT/ACT** للقطعة المستقيمة RS نقطة نهاية $R(6, -4)$ وطول مقداره 17 وحدة، أي مما يلي لا يمكن أن يكون إحداثيي S ؟

Ⓐ $(14, 11)$

Ⓑ $(6, 13)$

Ⓒ $(-9, -12)$

Ⓓ $(23, 13)$

Ⓔ $(23, -4)$

.28 **مهمة أدائية** يجب أن يبدأ وينتهي مسار موكب استعراضي عند التقاطعين المبينين على الخريطة. تشترط البلدية ألا تتجاوز المسافة الكلية للمسار 3 أميال.
المسار المقترح موضح أدناه.

الجزء A لماذا لا يحقق المسار المقترح الشرط ؟

الجزء B بافتراض أن الطرق المستعملة للمسار هي نفس هذه الطرق ونقطة النهاية هي نفسها، في أي تقاطع يمكن أن يبدأ الموكب الاستعراضي بحيث تكون المسافة الكلية أقرب ما يمكن إلى 3 mi ؟

الجزء C تريد البلدية تثبيت كاميرات مراقبة في منتصف كل طريق في مسار الموكب الاستعراضي. باستعمال إجابتك من الجزء B، ما إحداثيات مواقع هذه الكاميرات ؟

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

الدرس 3-4
الاستدلال الاستقرائي

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط وإجراء التوقعات استنادًا على بيانات.

✔ استعمال الاستدلال الاستقرائي لتقديم دليل على صحة التخمينات أو إعطاء مثال مضاد لدحضها.

الفهم الأساس

يمكن استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط، وتقديم دليل على صحة التخمينات أو لدحضها، وإجراء توقعات.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من :

- استعمال الأنماط لتحديد التسلسلات العددية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط وإجراء التوقعات.
- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتقديم دليل يثبت صحة التخمينات.
- استعمال أمثلة مضادة لدحض التخمينات.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال التبرير المنطقي لكتابة برهان وإثبات نظريات.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يستعمل الطلاب الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط في الملاحظات ويفهمون حدود وضوابط وشروط الاستدلال الاستقرائي.
- يستعمل الطلاب الاستدلال الاستقرائي لتحديد الأنماط في تطبيقات من واقع الحياة وتطبيقات رياضية وإجراء توقعات استنادًا إلى هذه الأنماط.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **متتالية** | *sequence*

المصطلحات الجديدة

- **تخمين** | *conjecture*
- **مثال مضاد** | *counterexample*
- **الاستدلال الاستقرائي** | *inductive reasoning*

نشاط المصطلحات

اكتب متتالية أعداد بسيطة على السبورة، مثل : 2, 4, 6, 8,... ، راجع المصطلحين "متتالية" و"حدّ". اطلب من الطلاب تحديد حدود المتتالية وترقيمها. ثم اطلب منهم تقديم وصف لفظي للمتتالية. اطرح تحديًا أمام الطلاب لإيجاد قاعدة تسمح بإيجاد حد من حدود المتتالية باستعمال رقمه. كرر هذا النشاط مرة أو مرتين باستعمال متتالية أكثر صعوبة، مثل : 1, 4, 9, 16,.... ، أو متتالية فبوناتشي.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركِّز الطلاب على مفاهيم مرتبطة بهذا المعيار :

9.5.1 بناء تعاميم رياضية واختبارها باستخدام الاستدلال الاستقرائي أو نفي التعميم الرياضي باستخدام المثال المضاد.

معايير ممارسات الرياضيات

انقد التبريرات المنطقية للآخرين

يستعمل الطلاب سلسلة منطقية من العبارات لإثبات صحة التخمينات أو لدحضها.

ابحث عن الاتساق في التبرير المنطقي المتكرر وعبّر عنه

يحدد الطلاب العمليات الحسابية المتكررة لتحديد أنماط وقواعد للمتتاليات، ويبحثون عن قواعد عامة لتعريفها.

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب متتالية مرتبطة بتقسيم مساحة دائرة باستعمال الأوتار لإيجاد نمط تمهيدًا لاستعمال الاستدلال الاستقرائي لتمييز الأنماط والمتتاليات.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: بالإضافة إلى عدد النقاط أو عدد المناطق، ما الذي يمكنك عدّه في كل شكل من المتتالية ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : قم بعدّ الأوتار المرسومة أو المناطق التي يحدها جزء من محيط الدائرة.]

س: هل تعتقد أن عدد المناطق قد يتغير بتغيير مواقع النقاط على الدائرة ؟ ماذا يحدث إذا كانت النقاط الثلاث في الشكل الثالث تكوّن مثلثًا متطابق الأضلاع ؟

[كلا؛ يبقى عدد المناطق نفسه وإحداها على شكل مثلث متطابق الأضلاع.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الذي يمكنك فعله لتنظيم بياناتك ؟ ما المعلومات التي يساعدك ذلك على جمعها ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنشاء جدول؛ حساب الفروق والنسب.]

س: هل تعتقد أن النمط الذي حددته يمكن تطبيقه على أي عدد من النقاط ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : النمط الذي حددته يمكن تطبيقه على نقطة واحدة إلى 5 نقاط؛ يجب أن يكون قابلًا للتطبيق على عدد أكبر من النقاط.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: خمّن عدد المناطق إذا كان عدد النقاط 6 نقاط. ارسم شكلًا باستعمال دائرة و 6 نقاط. هل كان تخمينك صحيحًا ؟

[كلا، قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كلا. توقّعت أن يكون عدد المناطق الناتجة عن 6 نقاط هو 32 منطقة، لكن تبيّن أنها 31 منطقة فقط.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: لماذا قد يكون من المفيد تحديد الملاحظات لنمط متتالية ؟

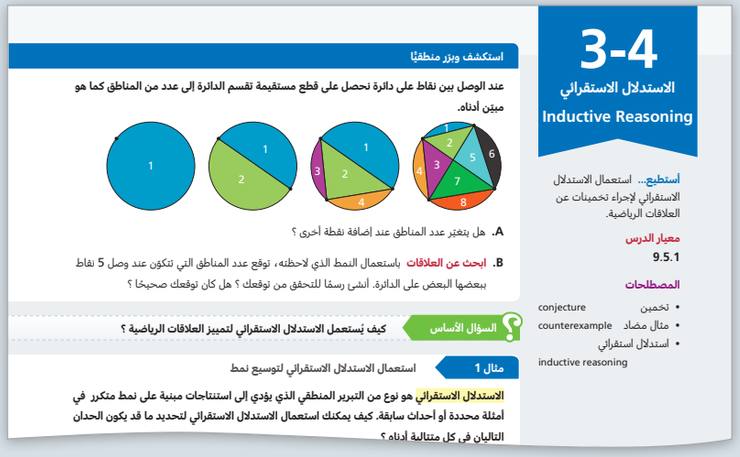
[يمكنك توقع البيانات التالية.]

عادات التفكير — استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

عمّم هل ملاحظة نمط يعدّ دائمًا إثباتًا لوجود علاقة ؟ وضّح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كلا، النمط دليل على وجود علاقة لكنه لا يثبتها.]

كتاب الطالب، صفحة 112



3-4
الاستدلال الاستقرائي
Inductive Reasoning

استطيع... استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمينات عن العلاقات الرياضية.

معيار الدرس
9.5.1

المصطلحات
- تخمين conjecture
- مثال مضاد counterexample
- استدلال استقرائي inductive reasoning

استكشف وبرّر منطقيًّا

عند الوصل بين نقاط على دائرة نحصل على قطع مستقيمة تقسم الدائرة إلى عدد من المناطق كما هو مبيّن أدناه.

A. هل يتغيّر عدد المناطق عند إضافة نقطة أخرى ؟

B. **ابحث عن العلاقات** باستعمال النمط الذي لاحظته، توقع عدد المناطق التي تتكوّن عند وصل 5 نقاط ببعضها البعض على الدائرة. انشئ رسمًا للتحقق من توقعك ؟ هل كان توقعك صحيحًا ؟

السؤال الأساس **كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟**

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

الاستدلال الاستقرائي هو نوع من التبرير المنطقي الذي يؤدي إلى استنتاجات مبنية على نمط متكرر في أمثلة محددة أو أحداث سابقة. كيف يمكنك استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد ما قد يكون الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. يتضاعف عدد المناطق كلما أُضيفت نقطة جديدة إلى الدائرة.

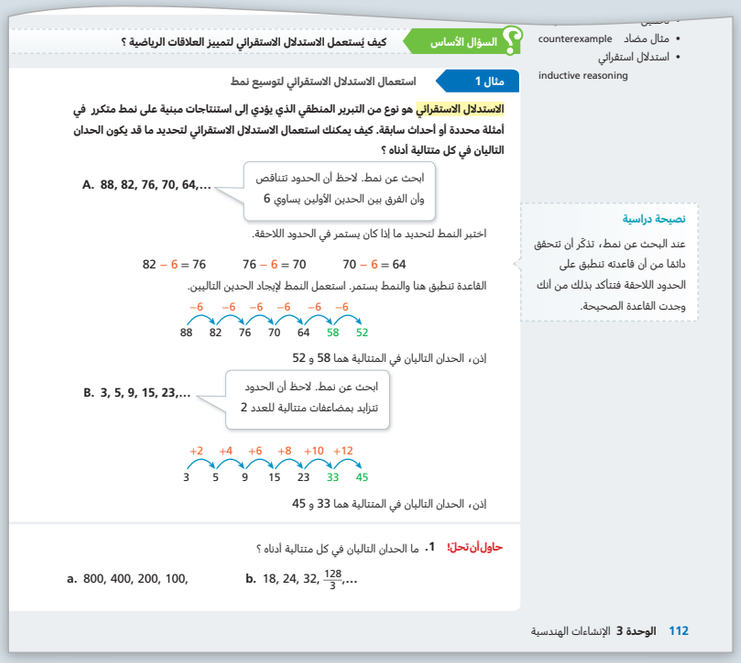
B. خمّنت أن يكون عدد المناطق التي تتكوّن عند وصل 5 نقاط بعضها ببعض على الدائرة 16 منطقة، وكان تخميني صحيحًا.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

عرّف الطلاب بمفهوم الاستدلال الاستقرائي. سيتعلم الطلاب أنه من خلال ملاحظة عدد من الأمثلة، قد يصبح النمط واضحًا. القاعدة التي تصف النمط، أو التخمين، تؤيدها أدلة مستقاة من الملاحظات. قواعد كهذه، على الرغم من أنها غير مبرهنة، إلا أنها مفيدة لإجراء التوقعات.



- مثال مضاد counterexample
- استدلال استقرائي inductive reasoning

السؤال الأساس: كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

الاستدلال الاستقرائي هو نوع من التبرير المنطقي الذي يؤدي إلى استنتاجات مبنية على نمط متكرر في أمثلة محددة أو أحداث سابقة. كيف يمكنك استعمال الاستدلال الاستقرائي لتحديد ما قد يكون الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

A. 88, 82, 76, 70, 64,...

ابحث عن نمط. لاحظ أن الحدود تتناقص وأن الفرق بين الحدين الأولين يساوي 6

اختبر النمط لتحديد ما إذا كان يستمر في الحدود اللاحقة.

$82 - 6 = 76$ $76 - 6 = 70$ $70 - 6 = 64$

القاعدة تنطبق هنا والنمط يستمر. استعمل النمط لإيجاد الحدين التاليين.

88 $\xrightarrow{-6}$ 82 $\xrightarrow{-6}$ 76 $\xrightarrow{-6}$ 70 $\xrightarrow{-6}$ 64 $\xrightarrow{-6}$ 58 $\xrightarrow{-6}$ 52

إذن، الحدان التاليان في المتتالية هما 58 و 52

B. 3, 5, 9, 15, 23,...

ابحث عن نمط. لاحظ أن الحدود تتزايد بمضاعفات متتالية للعدد 2

3 $\xrightarrow{+2}$ 5 $\xrightarrow{+4}$ 9 $\xrightarrow{+6}$ 15 $\xrightarrow{+8}$ 23 $\xrightarrow{+10}$ 33 $\xrightarrow{+12}$ 45

إذن، الحدان التاليان في المتتالية هما 33 و 45

حاول أن تحلّ! 1. ما الحدان التاليان في كل متتالية أدناه ؟

a. 800, 400, 200, 100,

b. 18, 24, 32, $\frac{128}{3}$,...

112 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

نصيحة دراسية

عند البحث عن نمط، تذكّر أن تتحقق دائمًا من أن قاعدته تنطبق على الحدود اللاحقة فتتأكد بذلك من أنك وجدت القاعدة الصحيحة.

مثال 1 استعمال الاستدلال الاستقرائي لتوسيع نمط

طرح أسئلة هادفة

س: تذكر من الجبر أن الأعداد في الجزء A تُعبّر عن تسلسل عددي (number sequence). ما هو التسلسل العددي ؟

[التسلسل العددي هو مجموعة من الأعداد التي تتبع نمطًا.]

س: يقارن الجزء A والجزء B بين الحدود المتتالية باستعمال الجمع أو الطرح. هل الجمع والطرح هما الطريقتان الوحيدتان الممكنتان لمقارنة الحدود المتتالية ؟

[كلا؛ يجب البحث عن نمط.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. 50, 25

   b. $\frac{512}{9}$, $\frac{2\,048}{27}$

www.jnob-jo.com

مثال 2 استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما الذي يمكن أن يساعدك على إيجاد نمط بين رتبة الحد وعدد صفوف وأعمدة النقاط ؟
[قارن بين رتبة الحد وعدد الصفوف أو الأعمدة.]

س: اطرح مربع رتبة الحد من إجمالي عدد النقاط. هل يدعم ذلك التخمين في المثال 2 ؟
[نعم. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : بعد طرح مربع رتبة الحد، عدد النقاط المتبقية يساوي رتبة الحد.]

س: ما الملاحظات التي تدعم التخمين الذي يشير إلى أن عدد النقاط المضافة إلى كل حد هو ضعف رتبة الحد ؟
[عدد النقاط في الحد الذي رتبته 2 أكثر من عددها في الحد الذي رتبته 1 بمقدار 4 نقاط، ما يؤكد صحة التخمين؛ عدد النقاط في الحد الذي رتبته 3 أكثر من عددها في الحد الذي رتبته بمقدار 6 نقاط، ما يؤكد صحة التخمين أيضًا، وهكذا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. 29, 41

b. $n^2 + n - 1$

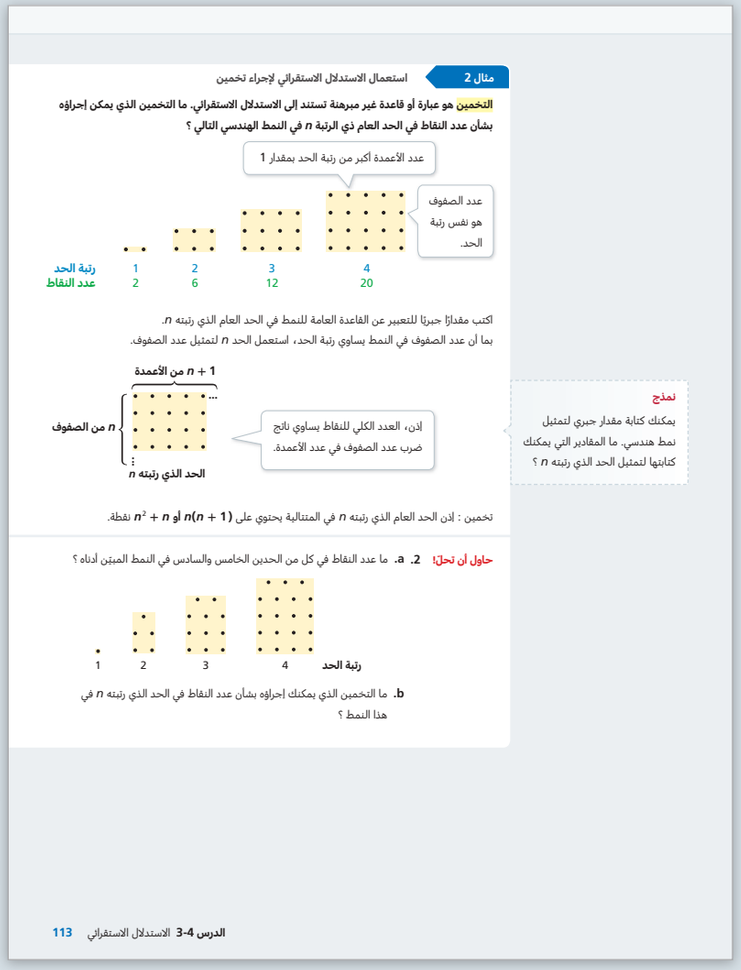
استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما العناصر المتكررة التي تلاحظها في النمط ؟
[يوجد مربع عدد نقاطه $n \times n$، والصف العلوي يتضمن $n - 1$ نقطة.]

عادات التفكير استعمل مع **الأمثلة 1 و 2 و 3**

ابحث عن العلاقات ما الطرق التي يمكنك استعمالها لإيجاد الأنماط في الأعداد المكتوبة في متتالية أو في جدول ؟ ما الطرق التي يمكنك استعمالها لإيجاد أنماط من نقاط أو أنماط بصرية أخرى ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : أبحث عن نسبة ثابتة أو فرق ثابت بين الحدود، أو عن نمط في النسبة أو الفرق، أو أقارن كل عدد بمربع رتبة الحد.]



مثال 2 استعمال الاستدلال الاستقرائي لإجراء تخمين

التخمين هو عبارة أو قاعدة غير مبرهنة تستند إلى الاستدلال الاستقرائي. ما التخمين الذي يمكن إجراؤه بشأن عدد النقاط في الحد العام ذي الرتبة n في النمط الهندسي التالي ؟

عدد الأعمدة أكبر من رتبة الحد بمقدار 1

عدد الصفوف هو نفس رتبة الحد.

رتبة الحد	1	2	3	4
عدد النقاط	2	6	12	20

اكتب مقدارًا جبريًا للتعبير عن القاعدة العامة للنمط في الحد العام الذي رتبته n.
بما أن عدد الصفوف في النمط يساوي رتبة الحد، استعمل الحد n لتمثيل عدد الصفوف.

$n + 1$ من الأعمدة

n من الصفوف

الحد الذي رتبته n

إذن، العدد الكلي للنقاط يساوي ناتج ضرب عدد الصفوف في عدد الأعمدة.

نمذج
يمكنك كتابة مقدار جبري لتمثيل نمط هندسي. ما المقادير التي يمكنك كتابتها لتمثيل الحد الذي رتبته n ؟

تخمين : إذن الحد العام الذي رتبته n في المتتالية يحتوي على $n(n + 1)$ أو $n^2 + n$ نقطة.

حاول أن تحلّ! 2. a. ما عدد النقاط في كل من الحدين الخامس والسادس في النمط المبيّن أدناه ؟

1 2 3 4 رتبة الحد

b. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن عدد النقاط في الحد الذي رتبته n في هذا النمط ؟

الدرس 3-4 الاستدلال الاستقرائي 113

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 2**

الاستماع مستوى 1 أعطِ الطلاب نسخًا من المثال 2، ثم اطلب منهم تحديد المصطلحين "صف" و"عمود" أو وضع خط تحتهما في المثال. ثم ساعدهم على قراءة المثال بهدف تحديد هذين المصطلحين. اطلب منهم رسم صورة يبيّنون فيها فهمهم لهذين المصطلحين.

س: ما معنى "صف" ؟
[مجموعة من الأشياء مرتبة على استقامة أفقية واحدة]

س: كيف يمكنك توضيح معنى "عمود" في صورة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يمكنك رسم أسهم رأسية جنبًا إلى جنب.]

التحدث مستوى 2 اطلب من الطلاب أن يتشاركوا أمثلة على استعمال المصطلح "حدّ".

س: ما الطرق الأخرى التي يمكنك من خلالها استعمال كلمة "حدّ" خارج صف الرياضيات ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن استعمالها لوصف الحدود بين البلدان.]

س: ماذا تعني كلمة "حدّ" في هذا المثال ؟
[كل قيمة أو عنصر في نمط مستمر.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 استعمال التخمين لإجراء توقع

طرح أسئلة هادفة

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين هذا الموقف والموقف الوارد في المثال 1 ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : في الحالتين، أول ما يجب القيام به هو تحديد نمط. في المثال 3، الأعداد تمثّل بيانات من واقع الحياة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. 28 أو 29

مثال 4 إيجاد مثال مضاد لإثبات خطأ تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا إثبات خطأ تخمين أسهل من إثبات صحته ؟
[لإثبات صحة تخمين، يجب أن يكون صحيحًا في كل الحالات الممكنة، في حين يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات خطئه.]

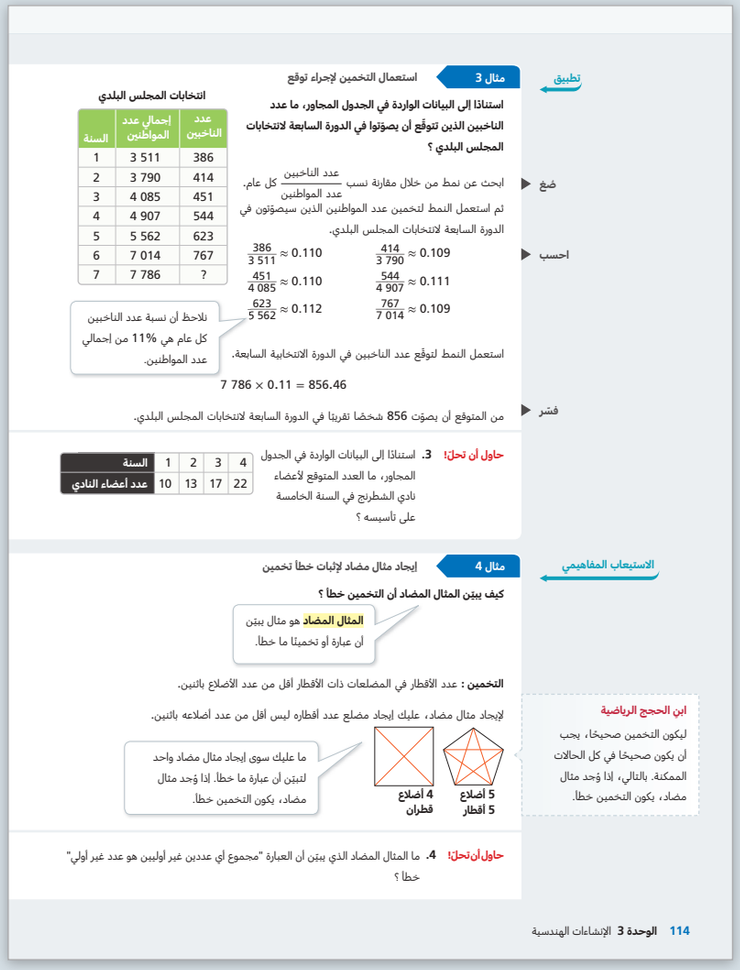
س: هل هناك مثال مضاد آخر لدحض هذا التخمين ؟
[تُماني عدد أضلاعه 8 و عدد أقطاره 20]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : 4 و 9 عددان غير أوليين، لكن 13 = 9 + 4، و 13 عدد أولي.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الطريقة التي استعملتها لإيجاد مثال مضاد ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : وضعت قائمة بالأعداد غير الأولية القليلة الأولى ثم جمعت أزواجًا منها حتى وجدت ناتج جمع أولي.]



تطبيق

مثال 3 استعمال التخمين لإجراء توقع

استنادًا إلى البيانات الواردة في الجدول المجاور، ما عدد الناخبين الذين تتوقّع أن يصوّتوا في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي ؟

انتخابات المجلس البلدي

السنة	إجمالي عدد المواطنين	عدد الناخبين
1	3 511	386
2	3 790	414
3	4 085	451
4	4 907	544
5	5 562	623
6	7 014	767
7	7 786	?

ضع ▶ ابحث عن نمط من خلال مقارنة نسب $\frac{\text{عدد الناخبين}}{\text{عدد المواطنين}}$ كل عام. ثم استعمل النمط لتخمين عدد المواطنين الذين سيصوّتون في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي.

احسب ▶ $\frac{414}{3\,790} \approx 0.109$ ، $\frac{386}{3\,511} \approx 0.110$

$\frac{544}{4\,907} \approx 0.111$ ، $\frac{451}{4\,085} \approx 0.110$

$\frac{767}{7\,014} \approx 0.109$ ، $\frac{623}{5\,562} \approx 0.112$

نلاحظ أن نسبة عدد الناخبين كل عام هي 11% من إجمالي عدد المواطنين.

استعمل النمط لتوقّع عدد الناخبين في الدورة الانتخابية السابعة.

$7\,786 \times 0.11 = 856.46$

فسّر ▶ من المتوقع أن يصوّت 856 شخصًا تقريبًا في الدورة السابعة لانتخابات المجلس البلدي.

حاول أن تحلّ! **3.** استنادًا إلى البيانات الواردة في الجدول المجاور، ما العدد المتوقع لأعضاء نادي الشطرنج في السنة الخامسة على تأسيسه ؟

السنة	1	2	3	4
عدد أعضاء النادي	10	13	17	22

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 4 إيجاد مثال مضاد لإثبات خطأ تخمين

كيف يبيّن المثال المضاد أن التخمين خطأ ؟

المثال المضاد هو مثال يبيّن أن عبارة أو تخمينًا ما خطأ.

التخمين : عدد الأقطار في المضلعات ذات الأقطار أقل من عدد الأضلاع باثنين.

لإيجاد مثال مضاد، عليك إيجاد مضلع عدد أقطاره ليس أقل من عدد أضلاعه باثنين.

5 أضلاع 5 أقطار — 4 أضلاع قطران

ما عليك سوى إيجاد مثال مضاد واحد لتبيّن أن عبارة ما خطأ. إذا وُجد مثال مضاد، يكون التخمين خطأ.

ابن الحجج الرياضية
ليكون التخمين صحيحًا، يجب أن يكون صحيحًا في كل الحالات الممكنة. بالتالي، إذا وُجد مثال مضاد، يكون التخمين خطأ.

حاول أن تحلّ! **4.** ما المثال المضاد الذي يبيّن أن العبارة "مجموع أي عددين غير أوليين هو عدد غير أولي" خطأ ؟

114 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب جمع البيانات وتمييز نمط، ثم اطلب منهم إجراء توقع.

- اطلب من الطلاب رسم مثلث مختلف الأضلاع، ورباعي غير منتظم، ومضلع غير منتظم. ثم اطلب منهم قياس الزوايا الداخلية في كل شكل وحساب مجموعها.

اسألهم عن النتائج التي توصلوا إليها. استنبط نتيجة متوسطة لكل شكل.

س: ما القيمة التي وجدتها لمجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث ؟ للرباعي ؟ للخماسي ؟
[180°, 360°, 540°]

س: هل تكوّن هذه البيانات نمطًا ؟ في حال كانت الإجابة نعم، ما هو هذا النمط ؟
[نعم؛ $(n - 2)\,180°$، حيث n عدد أضلاع المضلع.]

س: خمّن مجموع الزوايا الداخلية للسداسي.
[720°]

س: تحقق من التخمين الذي وضعته عن $n = 6$ باستعمال الرسم والقياس. هل تخمينك صحيح ؟
[نعم، للسداسي زوايا داخلية يساوي مجموع قياساتها 720°]

س: صُغ تخمينك صياغة واضحة.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : مجموع الزوايا الداخلية لشكل هندسي عدد أضلاعه n هو $(n - 2)\,180°$]

www.jnob-jo.com

مثال 5 اختبار تخمين

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: هل يمكنك التفكير في مثال مضاد آخر لهذا التخمين ؟
[نعم ؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : خماسي أطوال أضلاعه 5 ,4 ,4 ,4]

س: هل من الممكن اختبار الجزء B فقط من خلال دراسة الأمثلة ؟
[كلا ؛ قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : أيًّا يكن العدد الذي تختبره، يمكنك دائمًا إضافة العدد 9 والحصول على عدد آخر لاختباره. من المستحيل اختبار كل الأعداد.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. a. مثال مضاد : عندما $n = 0$، فإن $0^2 = 0$، وهو ليس موجبًا ولا سالبًا.
b. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $3\,016 \div 4 = 754$ ؛ $5\,108 \div 4 = 1\,277$ ؛ $7\,712 \div 4 = 1\,928$ ؛ $11\,328 \div 4 = 2\,832$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك اختبار كل الحالات المطلوبة في الجزء b ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : العدد 100 قابل للقسمة على 4، وبالتالي جميع مضاعفات العدد 100 قابلة للقسمة على 4، وكل عدد صحيح أكبر من 100 هو من مضاعفات العدد 100 يضاف إليه آخر رقمين. إذن، تحتاج فقط إلى اختبار الأعداد 0 و 4 و 8 والأعداد المكونة من رقمين حيث ناتج جمعهما قابل للقسمة على 4]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 5 يسهل أن نغفل أمثلة قد تكون أمثلة مضادة. تأكد من فهمك لعناصر المجموعة. حاول اختبار الحالات غير المألوفة بالإضافة إلى الحالات البسيطة.

مثال 5 اختبار تخمين

اختبر كل تخمين أدناه من خلال أمثلة إضافية أو أوجد مثالًا مضادًا لدحض التخمين.

A. كل مضلع له أربعة أضلاع متطابقة هو مربع.

المربع له أربعة أضلاع متطابقة وأربع زوايا قائمة.

فكّر : هل يمكن رسم مضلع بأربعة أضلاع متطابقة من دون أن تكون له أربع زوايا قائمة؟

هذا المعيّن له أربعة أضلاع متطابقة وليست له أي زوايا قائمة.

يوجد مثال مضاد، إذن التخمين خطأ.

B. إذا كان عدد ما من مضاعفات العدد 9، يجب أن يكون ناتج جمع أرقامه أيضًا من مضاعفات العدد 9

لاختبار هذا التخمين، اكتب قائمة ببعض من مضاعفات العدد 9 ثم أوجد ناتج جمع أرقام كلّ من هذه المضاعفات.

مضاعفات العدد 9	ناتج جمع الأرقام
$9 \times 12 = 108$	$1 + 0 + 8 = 9$
$9 \times 313 = 2\,817$	$2 + 8 + 1 + 7 = 18$
$9 \times 1\,105 = 9\,945$	$9 + 9 + 4 + 5 = 27$

نواتج الجمع 9 و 18 و 27 هي من مضاعفات العدد 9

إذن، التخمين صحيح للحالات المختبرة الثلاث.

خطأ شائع
قد تعتقد أن إيجاد أمثلة تؤكد صحة التخمين يبيّن أن التخمين صحيح. تذكّر أن عليك أن تبيّن أن التخمين صحيح في كل الحالات، وليس في بعض الحالات فقط.

حاول أن تحلّ! 5. اختبر كل تخمين أدناه من خلال أمثلة إضافية أو أوجد مثالًا مضادًا لدحضه.
a. بالنسبة لكل عدد صحيح n، قيمة n^2 موجبة.
b. إذا كان الرقمان الأخيران في عدد يقبلان القسمة على 4، فإن هذا العدد يقبل القسمة على 4

الدرس 3-4 الاستدلال الاستقرائي 115

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 4 و 5**

ابنِ الحجج الرياضية يقول فهد إن إثبات صحة تخمين لا يتطلب سوى مثال واحد يؤكد صحته. هل تتفق معه ؟

[فهد ليس على صواب. بغضّ النظر عن عدد الملاحظات المتطابقة التي تؤكد صحة تخمين، لا يمكنه إثبات صحته إلا من خلال اختبار جميع الحالات الممكنة.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 5 اطلب من الطلاب كتابة تخمينات، وإجراء توقعات، وإيجاد أمثلة مضادة.

اكتب العبارة التالية على السبورة: "كل النمور التي رأيتها في حياتي برتقالية اللون ومخططة بخطوط سود"، ثم اسأل الطلاب:

س: ما التخمين الذي يمكنك وضعه، وما التوقع الذي يمكنك إجراؤه بخصوص هذه العبارة ؟
[كل النمور برتقالية اللون ومخططة بخطوط سود ؛ والنمر التالي الذي يراه معلمي سيكون برتقالي اللون ومخططًا بخطوط سود.]

س: ما الملاحظة التي قد تدحض التخمين الذي وضعته ؟
[مشاهدة نمر واحد ليس برتقالي اللون وليس مخططًا بخطوط سود.]

- اطلب من الطلاب كتابة عبارات مماثلة مستمدة من تجربتهم الخاصة.

س: ما التخمين الذي يمكنك تكوينه من هذه العبارة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إذا أنجزت الواجب المنزلي سأحصل على علامة جيدة.]

س: هل يمكنك إجراء توقع من التخمين الذي وضعته ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : سأحصل على علامة جيدة.]

س: صف مثالًا مضادًا للتخمين الذي وضعته.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : طالب ينجز كل الواجبات المنزلية لكنه يحصل على علامة متدنية.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الاستدلال الاستقرائي

س: كيف تؤدي سلسلة من الملاحظات إلى التوصل إلى تخمين ؟
[إذا كان من الممكن تمييز نمط من الملاحظات، فيمكن اعتماده كتخمين.]

س: هل وجود نمط يثبت صحة التخمين ؟
[كلا، إنه مجرد دليل يدعم التخمين.]

س: ما الذي يمكن أن يدحض التخمين ؟
[مثال مضاد واحد]

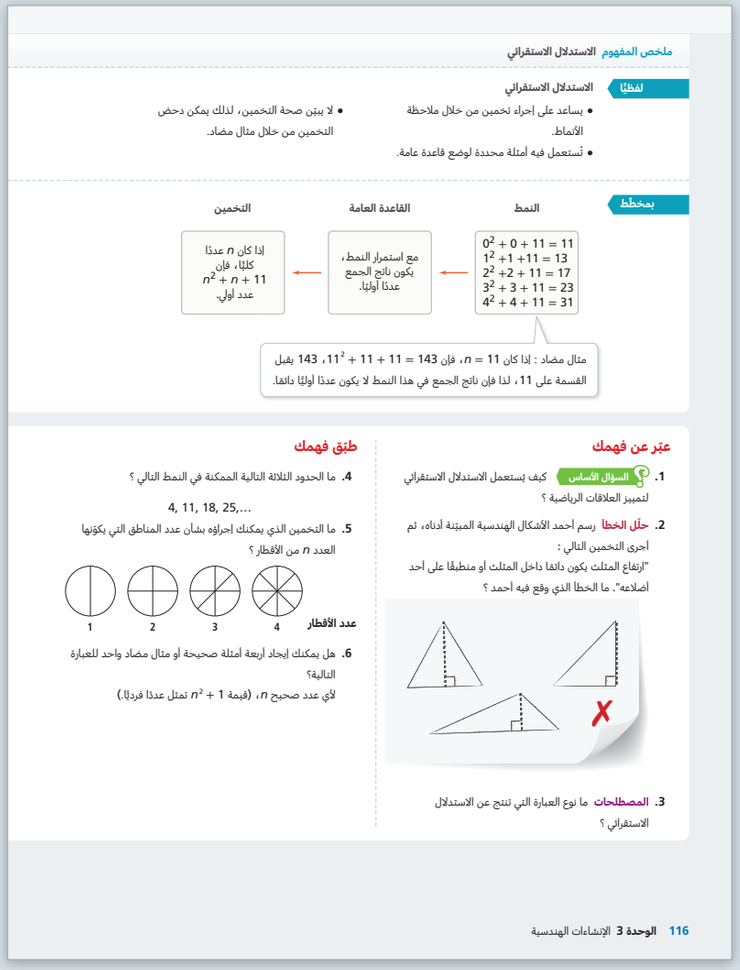
عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد لا يختبر الطلاب 0 أو 1 كحالات للتخمين، أو قد يختبرون الأعداد الزوجية فقط بعد اختبار العدد 1، ذكّر الطلاب بأن الأعداد الصحيحة تشمل الصفر والأعداد السالبة أيضًا.

الإجابات

1. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : من خلال ملاحظة الحالات أو الأنماط، يمكن وضع قاعدة عامة يمكن تطبيقها على كل الحالات أو استعمالها لتوقع النتائج.
2. لكل مثلث 3 ارتفاعات، لكن أحمد وجد ارتفاعًا واحدًا فقط لكل مثلث. لو أنه وجد كل الارتفاعات الثلاثة في المثلث المنفرج الزاوية، لاكتشف أن الارتفاعين الآخرين يقعان خارج المثلث.
3. تخمين
4. 32, 39, 46
5. $2n$
6. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : المثال المضاد : إذا كان $n = 3$ فإن $3^2 + 1 = 10$، والعدد 10 زوجي.



ملخص المفهوم الاستدلال الاستقرائي

لفظيًا

الاستدلال الاستقرائي

- يساعد على إجراء تخمين من خلال ملاحظة الأنماط.
- تُستعمل فيه أمثلة محددة لوضع قاعدة عامة.
- لا يبيّن صحة التخمين، لذلك يمكن دحض التخمين من خلال مثال مضاد.

بمخطط

النمط: $0^2 + 0 + 11 = 11$، $1^2 + 1 + 11 = 13$، $2^2 + 2 + 11 = 17$، $3^2 + 3 + 11 = 23$، $4^2 + 4 + 11 = 31$

القاعدة العامة: مع استمرار النمط، يكون ناتج الجمع عددًا أوليًا.

التخمين: إذا كان n عددًا كليًا، فإن $n^2 + n + 11$ عدد أولي.

مثال مضاد : إذا كان $n = 11$، فإن $11^2 + 11 + 11 = 143$، 143 يقبل القسمة على 11، لذا فإن ناتج الجمع في هذا النمط لا يكون عددًا أوليًا دائمًا.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يُستعمل الاستدلال الاستقرائي لتمييز العلاقات الرياضية ؟
2. حلّل الخطأ رسم أحمد الأشكال الهندسية المبيّنة أدناه، ثم أجرى التخمين التالي :
"ارتفاع المثلث يكون دائمًا داخل المثلث أو منطبقًا على أحد أضلاعه". ما الخطأ الذي وقع فيه أحمد ؟
3. المصطلحات ما نوع العبارة التي تنتج عن الاستدلال الاستقرائي ؟

طبّق فهمك

4. ما الحدود الثلاثة التالية الممكنة في النمط التالي ؟
4, 11, 18, 25,...
5. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن عدد المناطق التي يكوّنها العدد n من الأقطار ؟
عدد الأقطار: 1، 2، 3، 4
6. هل يمكنك إيجاد أربعة أمثلة صحيحة أو مثال مضاد واحد للعبارة التالية؟
لأي عدد صحيح n، (قيمة $n^2 + 1$ تمثل عددًا فرديًا.)

116 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
7-23	7-23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	10, 11	1
2	7, 12, 21, 22	2
3	13, 14	2
	17, 19	3
4	15	2
	9, 23	4
5	20	1
	16	2
	8, 18	3

الإجابات

7. كتبت هند تخمينًا. لقد برهنت أنها صحيحة لقيم n العشرين الأولى، لكنها لم تثبت صحة عبارتها لكل قيم n.

8. أعطت سارة مثالًا صحيحًا واحدًا فقط، وهذا لا يكفي لإثبات صحة تخمين. في الواقع، عبارة سارة ليست صحيحة، ويمكن دحضها بالمثال المضاد التالي : الزوايا المتقابلة بالرأس تتشارك نفس الرأس لكنها ليست متجاورة.

9. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : لإثبات أو دحض هذه العبارة، سأنظر إلى كل عدد أولي يقع بين 608 7 و 620 7 لأبيّن ما إذا كان أوليًا أم غير أولي. إذا كان أي من هذه الأعداد أوليًا، هناك مثال مضاد إذن والعبارة خطأ. في حال عدم وجود أي عدد أولي بين هذين العددين، فإن العبارة صحيحة لأن هناك عددًا منتهيًا من الحالات وجميعها خضعت للاختبار.

10. 53, 41, 29

11. $\frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}$

12. عدد المثلثات هو $n - 2$.

13. في كل عام، يحصل 65% تقريبًا من طلاب المرحلة الثانوية على رخصة قيادة.

14. يجب أن تكون الإجابات بين 264 و 270

15. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة :

16. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : العددان 8 و 0 نسبيان، لكن ناتج قسمة 0 ÷ 8 ليس عددًا نسبيًا. هذا مثال مضاد، إذن العبارة خطأ.

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

7. روابط في الرياضيات لاحظت هند أن كل مربع من المربعات الكاملة العشرين الأولى هو إما من مضاعفات العدد 5، وإما أصغر من أحد مضاعفات العدد 5 بمقدار 1، وإما أكبر من أحد مضاعفات العدد 5 بمقدار 1

1	4	9	16	25
36	49	64	81	100
121	144	169	196	225
256	289	324	361	400

وكتبت العبارة التالية :

"إذا كان n عددًا طبيعيًا، يمكن كتابة n^2 في الصورة $5k$ أو في الصورة $5k - 1$ أو في الصورة $5k + 1$، حيث k عدد كلي."

ما نوع العبارة التي كتبتها هند ؟ هل برهنت أن عبارتها صحيحة لكل قيم n ؟ وضّح إجابتك.

8. حلّل الخطأ اختبرت سارة التخمين التالي كما هو مبيّن أدناه.

"إذا تشاركت زاويتان نفس الرأس، تكون الزاويتان متجاورتين."

ما الخطأ الذي وقعت فيه سارة ؟

تتشارك الزاويتان المتجاورتان نفس الرأس. إذن العبارة صحيحة.

9. مهارات التفكير العليا فكّر في التخمين التالي.

"لا توجد أعداد أولية بين العددين 608 7 و 620 7."

كيف يمكنك إثبات أن هذه العبارة صحيحة أم خطأ ؟ هل تبقى هذه العبارة تخمينًا إن لم تجد مثالًا مضادًا يدحضها ؟ وضّح إجابتك.

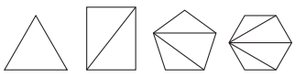
تدرَّب

في التمرينين 10 و 11، ما الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتاليتين التاليتين ؟ انظر المثال 1

10. 101, 89, 77, 65,...

11. 9, 6, 4, $\frac{8}{3}$,...

12. لاحظ النمط في الأشكال الهندسية التالية. هل يمكنك كتابة تخمين بشأن عدد المثلثات التي تتكوّن من وصل أحد رؤوس مضلع عدد أضلاعه n بكل من رؤوسه الأخرى ؟ انظر المثال 2



عدد الأضلاع 3 4 5 6

في التمرينين 13 و 14، يبيّن الجدول أدناه عدد طلاب السنة الثالثة في إحدى الجامعات وعدد الطلاب الحائزين رخصة قيادة سيارة من بينهم. انظر المثال 3

السنة	2014	2015	2016	2017
عدد طلاب السنة الثالثة	341	367	309	382
عدد الطلاب الحائزين رخصة	222	240	199	246

13. ما النمط الذي يمكنك إيجاده بين عدد طلاب السنة الجامعية الثالثة وعدد الطلاب الحائزين رخصة قيادة سيارة ؟

14. في عام 2018، كان عدد طلاب السنة الثالثة في هذه الجامعة 413 طالبًا. ما عدد الطلاب الذين تعتقد أن لديهم رخصة قيادة سيارة من بين طلاب السنة الجامعية الثالثة في عام 2018 ؟

15. هل يمكنك إيجاد مثال مضاد للعبارة التالية ؟ انظر المثال 4

"لا يمكن أن يكون لشبه المنحرف أكثر من زاوية قائمة واحدة."

16. أثبت صحة التخمين التالي بأربعة أمثلة أو ادحضه بمثال مضاد. انظر المثال 5

"ناتج قسمة أي عددين نسبيين هو عدد نسبي."

www.jnob-jo.com

الإجابات

17. **a.** قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : البيانات المتعلقة بالمجموعات الأربع متقاربة جدًا. في كل التجارب الأربع، 20% إلى 23% من الأشخاص قالوا إنهم تجابوا مع الدواء. لذلك فإن التخمين المعقول هو أن احتمال تأثير هذا الدواء على الشفاء من الفيروس يتراوح بين 20% و23%

b. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : سيفيد بين 200 و 230 شخصًا أنهم باتوا بصحة أفضل.

18. يمكن أن يبدأ راشد بالبحث عن كل الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام بحيث يكون الرقمان الأول والثالث متساويين ومجموعهما يساوي الثاني. يمكنه بعد ذلك أن يحدد ما إذا كان كل عدد يقسم على 11

$121\ (1 + 1 = 2) : 121 \div 11 = 11;$

$242\ (2 + 2 = 4) : 242 \div 11 = 22;$

$363\ (3 + 3 = 6) : 363 \div 11 = 33;$

$484\ (4 + 4 = 8) : 484 \div 11 = 44$

بما أن $5 + 5 = 10$ ، فلم تعد هناك أعداد أخرى مكونة من ثلاثة أرقام تتلاءم مع هذا الوصف. وبما أن العبارة تبيّن أنها صحيحة في جميع الحالات الممكنة، إذن العبارة صحيحة.

19. $1 + 2 = 3$؛ $3 + 4 = 7$؛ $7 + 6 = 13$؛ $13 + 8 = 21$؛ النمط هو إضافة مضاعفات متتالية للعدد 2، يحتوي تصميم من 6 دوائر على $21 + 10 = 31$ ، أي 31 منطقة منفصلة.

20. D

21. B

23. **الجزء A** قد تختلف الإجابات. نموذج تخمينات : إذا تم التصويت على الاقتراح 3، فمن المرجح أن ينجح. إذا كانت الدراسة المسحية تمثل السكان، فمن المرجح أن ينجح الاقتراح. نموذج توضيح : في دراسة مسحية تشمل 300 شخص، فإن نصف هذا العدد هو 150 شخصًا. وبما أن أكثر من 150 شخصًا صوتوا للاقتراح 3، فمن المرجح أن ينجح.

الجزء B قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : 4 000 تقريبًا

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

17. **نمذج** يبيّن الجدول أدناه بيانات أربع تجارب متطابقة لدواء جديد يساعد على معالجة مرضى فيروس كوفيد-19

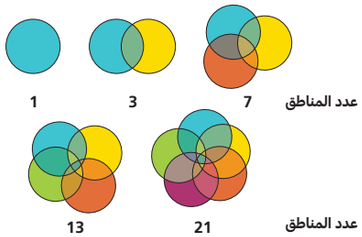
المجموعة	عدد المشاركين في التجربة	عدد الذين تجاوبوا مع الدواء
A	250	55
B	170	35
C	210	48
D	190	40

a. ما التخمين الذي يمكنك إجراؤه بشأن فعالية هذا الدواء ؟

b. إذا شملت التجربة التالية 1000 شخص، ما التوقع المنطقي لنتيجة التجربة التالية ؟

18. **فكّر وثابر في الحل** أجرى راشد التخمين التالي.
"الرقمان الأول والثالث في عدد من ثلاثة أرقام هما نفس الرقم. إذا كان الرقم الثاني يساوي مجموع الرقمين الأول والثالث، يجب أن يكون هذا العدد قابلًا للقسمة على 11"
كيف يمكنه تحديد ما إذا كان هذا التخمين صحيحًا أم لا ؟

19. **عمّم** يريد أحد المصممين معرفة عدد المناطق التي تتكوّن من تداخل الدوائر بطريقة معينة. هل يمكنه إيجاد قاعدة تصف كيف يتزايد عدد المناطق عندما يضيف المصمم دائرة أخرى إلى التصميم ؟ كم منطقة تنشأ في تصميم مكوّن من 6 دوائر ؟



تدرّب على اختبار

20. فكّر في التخمين التالي: "أي عدد يقبل القسمة على 2، يقبل القسمة على 4 أيضًا." هل يعدّ كل عدد في الجدول أدناه مثالًا مضادًا للتخمين ؟ اختر نعم أم لا.

	نعم	لا
12	☐	☑
19	☐	☑
22	☑	☐
28	☐	☑
30	☑	☐

21. **اختبار SAT/ACT** ما العدد التالي في المتتالية التالية ؟

1, 2, 2, 4, 8, 32,...

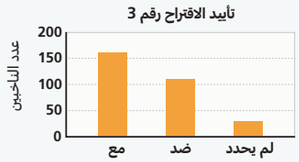
Ⓐ 64 Ⓑ 84 Ⓒ 106 Ⓓ 256

22. **اختبار SAT/ACT** ما عدد النقاط في الحد الذي رتبته n في المتتالية التالية ؟

Ⓐ $n + 2$ Ⓑ $2n + 1$

Ⓒ $n^2 + 2$ Ⓓ $n + 3$

23. **مهمة أدائية** يوضّح التمثيل البياني أدناه بيانات من دراسة مسحية شملت 300 ناخبًا تم اختيارهم عشوائيًا حول مدى تأييدهم للاقتراح رقم 3



الجزء A أجر تخمينًا حول احتمال الموافقة على الاقتراح 3 ثم وضّح تبريرك المنطقي.

الجزء B إذا أدلى 7500 شخصًا بصوته في الانتخابات التالية، ما عدد الأشخاص الذين من المتوقع أن يصوّتوا لصالح الاقتراح رقم 3 ؟

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 3-5
كتابة البراهين

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ استعمال التبرير المنطقي لإثبات نظريات هندسية تتعلق بالمستقيمات والزوايا.

الفهم الأساس

تبرير عبارات البراهين باستعمال التعريفات والمسلّمات والنظريات والخصائص.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من :

- استعمال الاستدلال الاستقرائي للتوصل إلى استنتاجات بناءً على نمط من الأمثلة أو الأحداث.
- استعمال الاستدلال الاستقرائي لتبرير مجموعة من الحقائق منطقيًا بهدف التوصل إلى استنتاج.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- كتابة برهان في جدول من عمودين وفقرات برهانية لنظريات عن المستقيمات والزوايا، بما في ذلك إثبات أن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال البرهان لإثبات نظريات تتعلق بالمثلثات وزوايا المضلع.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة و الاستيعاب المفاهيمي.

- يستعمل الطلاب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، ونظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، ونظرية الزوايا المتتامة المتطابقة، ونظرية الأزواج الخطية بشكل صحيح ومناسب.
- يستعمل الطلاب التبرير المنطقي وما تعلموه سابقًا عن الخصائص والتعريفات والنظريات لإثبات نظريات تتعلق بالمستقيمات والزوايا.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **خاصية القسمة للمساواة** | *Division Property of Equality*
- **خاصية الضرب للمساواة** | *Multiplication Property of Equality*

المصطلحات الجديدة

- **زوج خطي** | *linear pair*
- **فقرة برهانية** | *paragraph proof*
- **برهان** | *proof*
- **نظرية** | *theorem*
- **برهان في جدول من عمودين** | *two-column proof*

نشاط المصطلحات

ذكّر الطلاب بخصائص الأعداد الحقيقية، ثم اطلب منهم مطابقة كل معادلة بالخاصية التي يمكن استعمالها لحلّ المعادلة.

1. $5 = x + 7$ [*D*]

2. $y - 12 = 23$ [*A*]

3. $8z = 64$ [*B*]

4. $\frac{W}{3} = 48$ [*C*]

A. خاصية الجمع للمساواة

B. خاصية القسمة للمساواة

C. خاصية الضرب للمساواة

D. خاصية الطرح للمساواة

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يركّز الطلاب على هذا المعيار :

9.5.2 بناء حجة رياضية بكتابة جمل رياضية متسلسلة منطقيًا مبينًا التبريرات الرياضية.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يعرف الطلاب تعريفات ومسلّمات ونظريات وخصائص الأعداد الحقيقية ويستعملونها بسهولة لإثبات نظريات هندسية.

ابنِ الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب الافتراضات والتعريفات والنظريات المبرهنة سابقًا في بناء حجج رياضية منطقية يكتبونها في جدول من عمودين أو على شكل فقرات برهانية.

www.jnob-jo.com

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب التبرير المنطقي لتبرير كل خطوة من خطوات الحل الجبري تمهيدًا لاستعمال التبرير المنطقي في البراهين الهندسية.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ في حل هاشم ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة: تخلّص هاشم من الأقواس ثم عزل المتغير.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: استعمل هاشم خاصية التوزيع لتبرير الخطوة الثانية. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم؛ ضرب العدد 6 في كل من 14 و x ثم جمع نواتج الجمع.]

س: استعمل هاشم خاصية الضرب للمساواة لتبرير الخطوة الرابعة. هل هو على صواب ؟
[نعم؛ ضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{6}$]

س: هل الترتيب الذي استعمله هاشم لحلّ المعادلة صحيح ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم؛ لقد استعمل العمليات العكسية لعزل المتغير بشكل صحيح.]

س: كيف يمكنك التحقق من أن حل المعادلة هو $x = 4$ ؟
[عوّض 4 عن x في المعادلة الأصلية، وبسّط، ثم تحقق مما إذا كان ذلك يجعل المعادلة صحيحة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب معادلة أخرى متعددة الخطوات يمكن حلها بأكثر من طريقة.
حُل المعادلة بطريقتين مختلفتين على الأقل، وبرّر كل خطوة من خطوات الحل.
[تحقق من معادلات الطلاب وحلولهم.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما بعض التبريرات الأخرى التي قد تستعملها عند حل معادلة ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : خاصية الجمع للمساواة.]

س: في رأيك، ما فائدة تبرير كل خطوة من خطوات الحل ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إنها تساعد على توضيح طريقة تفكيرك، وعلى تفسير تبريراتك المنطقية.]

عادات التفكير استعمل مع **انقد واشرح**

استعمل البنية ما الأفكار التي تعلمتها سابقًا وكانت مفيدة في تقييم طريقة حل هاشم للمعادلة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كيفية حلّ المعادلات المتعددة الخطوات؛ خصائص الأعداد الحقيقية.]

كتاب الطالب، صفحة 119

3-5 كتابة البراهين Writing Proofs

أستطيع... استعمال التبرير المنطقي لإثبات النظريات.

معيار الدرس 9.5.2

المصطلحات
- فقرة برهانية paragraph proof
- برهان proof
- نظرية theorem
- برهان في جدول من عمودين two-column proof

انقد واشرح

حلّ هاشم المعادلة التالية لإيجاد قيمة x وكتب تبريرًا لكل خطوة من خطوات الحل.

$6(14 + x) = 108$	المعطيات
$84 + 6x = 108$	خاصية التوزيع
$6x = 108 - 84$	خاصية الطرح للمساواة
$6x = 24$	بسّط
$x = 4$	خاصية الضرب للمساواة

A. فكّر وثابر في الحل هل تبريرات هاشم لكل الخطوات صحيحة ؟ إن لم تكن كذلك، ما الذي قد تغيّر في خطوات الحل ؟ وضّح إجابتك.

B. هل يمكنك تبرير سلسلة أخرى من الخطوات التي تعطي نفس قيمة x ؟

السؤال الأساس كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟

النظرية 3-1 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة. إذا كان

نموذج من أعمال الطلاب

A. نعم؛ تبريرات هاشم صحيحة. كان بإمكانه أيضًا استعمال خاصية القسمة للمساواة في الخطوة الرابعة لو أنه قسم طرفي المعادلة على 6 بدلًا من ضربهما في كسر.

B. معطى $6(14 + x) = 108$

خاصية القسمة للمساواة $14 + x = 18$

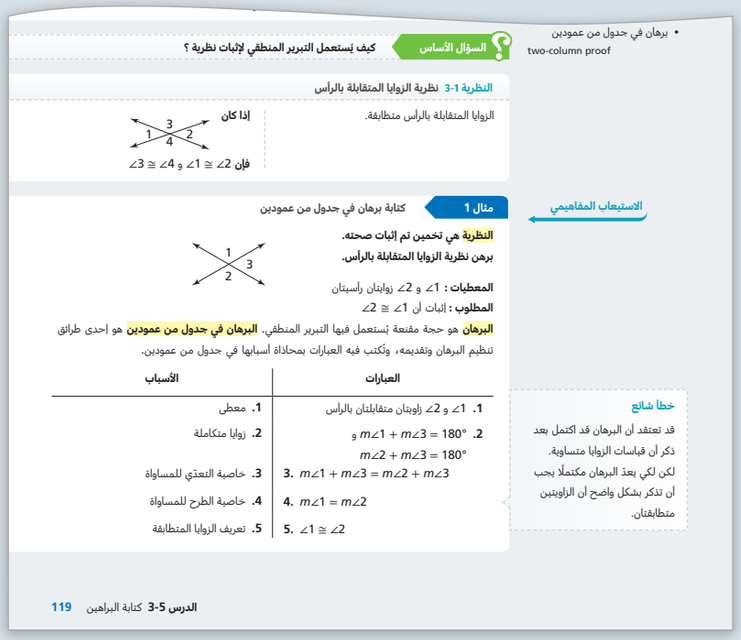
خاصية الطرح للمساواة $x = 4$

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركّز

سيتعلم الطلاب أن التبرير المنطقي هو الخطوات المستعملة لتبرير حقائق معطاة منطقيًا بهدف التوصل إلى استنتاج. استعمل هاشم في فقرة "انقد واشرح" التبرير المنطقي لتفسير كل خطوة من خطوات الحل الجبري للمعادلة. في هذا الدرس، سيستعمل الطلاب التبرير المنطقي ليساعدهم على التوصل إلى استنتاجات هندسية.



• برهان في جدول من عمودين
two-column proof

السؤال الأساس كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟

النظرية 3-1 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

إذا كان

$\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 4$

فإن

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 كتابة برهان في جدول من عمودين

النظرية هي تخمين تم إثبات صحته.

برهن نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان

المطلوب : إثبات أن $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان هو حجة مقنعة يُستعمل فيها التبرير المنطقي. **البرهان في جدول من عمودين** هو إحدى طرائق تنظيم البرهان وتقديمه، وتُكتب فيه العبارات بمحاذاة أسبابها في جدول من عمودين.

العبارات	الأسباب
1. $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متقابلتان بالرأس	1. معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2. زوايا متكاملة
3. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. خاصية التعدّي للمساواة
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. خاصية الطرح للمساواة
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. تعريف الزوايا المتطابقة

خطأ شائع

قد تعتقد أن البرهان قد اكتمل بعد ذكر أن قياسات الزوايا متساوية. لكن لكي يعدّ البرهان مكتملًا يجب أن تذكر بشكل واضح أن الزاويتين متطابقتان.

الدرس 3-5 كتابة البراهين 119

مثال 1 كتابة برهان في جدول من عمودين

بناء الطلاقة الاجرائية إنطلاقًا من الاستيعاب المفاهيمي

س: هل تعتقد أن ترتيب العبارات والأسباب مهم ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نعم، يجب أن يكون تسلسل العبارات منطقيًا.]

س: كيف تبيّن العبارة الأخيرة في البرهان عدم الحاجة إلى مزيد من العبارات ؟

[العبارة الأخيرة تتضمّن المطلوب إثباته.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

.1

العبارات	الأسباب
1. $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle CBE$	1. معطى
2. $\angle CBD \cong \angle EBD$	2. تعريف منصف الزاوية
3. $\angle ABC \cong \angle FBE$	3. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
4. $m\angle ABC = m\angle FBE$ و $m\angle CBD = m\angle EBD$	4. تعريف الزوايا المتطابقة
5. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$ $m\angle FBD = m\angle FBE + m\angle EBD$	5. مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6. $m\angle ABD = m\angle FBE + m\angle EBD$	6. تعويض خاصية المساواة
7. $m\angle ABD = m\angle FBD$	7. مسلمة جمع قياسات الزوايا
8. $\angle ABD \cong \angle FBD$	8. تعريف الزوايا المتطابقة

استعمل مع **المثال 1**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة ما الذي تعرفه وليس مذكورًا في نص المسألة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $\angle ABC \cong \angle FBE$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس، ووفق النظرية 1-3، الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.]

مثال 2 تطبيق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما الذي تحاول إيجاده في هذا الموقف ؟ كيف يمكن تمثيل ذلك في المخطط ؟

[قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع أبعد شعاعي ضوء عند خروجهما من بؤرة العدسة، أي $x°$، أو $m\angle EDF$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

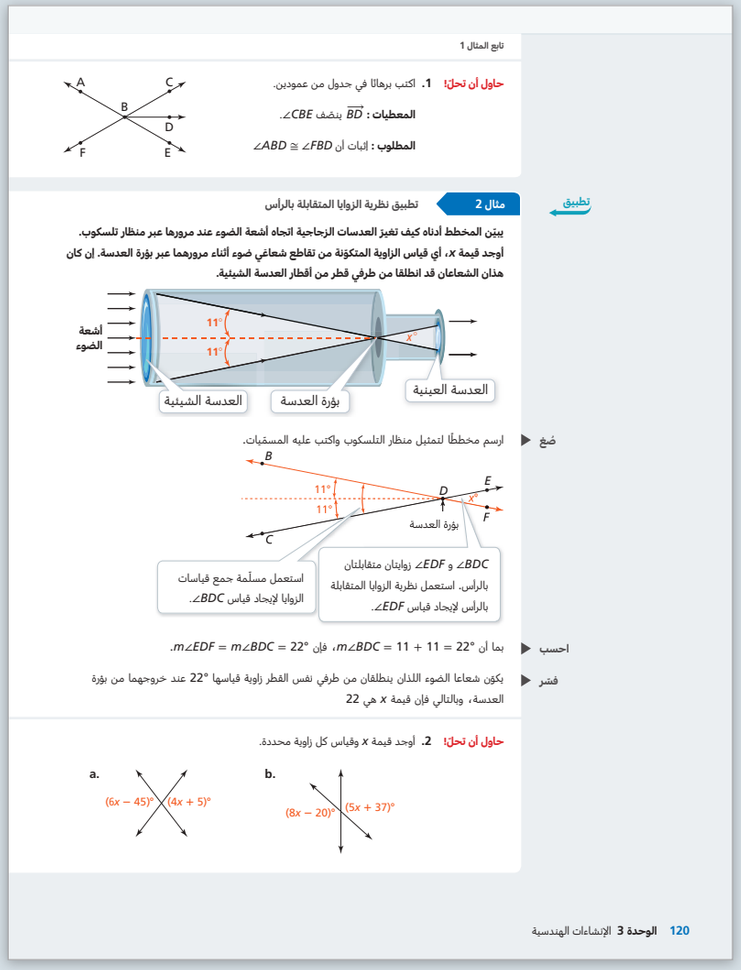
2. a. $x = 25$; 105°; 105° **b.** $x = 19$; 132°; 132°

استعمل مع **المثال 2**

عادات التفكير

تواصل بدقة ما الخطوات التي يمكنك تنفيذها للتحقق من صحة الحلّين ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : عوّض قيمة x في كل مقدار، وتأكد من أن قياسي الزاويتين متساويان.]



تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! 1. اكتب برهانًا في جدول من عمودين.

المعطيات : $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle CBE$.

المطلوب : إثبات أن $\angle ABD \cong \angle FBD$

تطبيق

مثال 2 تطبيق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

يبيّن المخطط أدناه كيف تغيّر العدسات الزجاجية اتجاه أشعة الضوء عند مرورها عبر منظار تلسكوب. أوجد قيمة x، أي قياس الزاوية المتكوّنة من تقاطع شعاعي ضوء أثناء مرورهما عبر بؤرة العدسة. إن كان هذان الشعاعان قد انطلقا من طرفي قطر من أقطار العدسة الشيئية.

صِغ ارسم مخططًا لتمثيل منظار التلسكوب واكتب عليه المسمّيات.

احسب بما أن $m\angle BDC = 11 + 11 = 22°$، فإن $m\angle EDF = m\angle BDC = 22°$.

فسّر يكوّن شعاعا الضوء اللذان ينطلقان من طرفي نفس القطر زاوية قياسها 22° عند خروجهما من بؤرة العدسة، وبالتالي فإن قيمة x هي 22

حاول أن تحلّ! 2. أوجد قيمة x وقياس كل زاوية محددة.

a. $(6x - 45)°$ $(4x + 5)°$

b. $(8x - 20)°$ $(5x + 37)°$

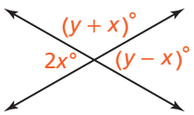
120 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يجد العديد من الطلاب القيمة الصحيحة للمتغير ولكنهم قد ينسون إيجاد قياسات الزوايا المحددة. عندما يكمل الطلاب الجزأين (a) و (b)، اطلب منهم إعادة قراءة المسألة، ثم اسألهم عن المطلوب إيجاده.

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب المتقدمين حل المسألة التالية التي تُستعمل فيها نفس المفاهيم المستعملة في المثال 2، لكنها تتطلب من الطلاب كتابة وحل معادلات أكثر تعقيدًا.



- أوجد قيمة المتغيرين وقياسات الزوايا المحددة.

س: ما أنواع الزوايا التي تلاحظها في المخطط ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : زوايا متقابلة بالرأس وزوايا متكاملة.]

س: ماذا تعرف عن قياسات الزوايا المتقابلة بالرأس ؟ وعن قياسات الزوايا المتكاملة ؟

[الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية القياس؛ مجموع الزوايا المتكاملة يساوي 180°]

- اطلب من الطلاب استعمال هذه المعلومة لكتابة نظام معادلات.

س: ما المعادلة التي ستحلها أولًا ؟ وضح إجابتك.

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : $(y + x) + (y - x) = 180$؛ يمكن حلّها بسهولة من خلال إيجاد قيمة y.]

- اطلب من الطلاب إكمال حل نظام المعادلات. احرص على أن يجدوا قياسات كل الزوايا المطلوبة.

www.jnob-jo.com

مثال 3 كتابة فقرة برهانية

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: إذا واجهت صعوبة في فهم نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، يمكنك استعمال قياسات زوايا محددة لفهم النظرية باستعمال رسم توضيحي. أي مجموعة من قياسات الزوايا تتناسب مع النظرية ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : افترض أن $m\angle 1 = 30°$ و $m\angle 2 = 150°$ و $m\angle 3 = 30°$.
$\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان مع $\angle 2$، إذن $\angle 1 \cong \angle 3$]

س: هل المثال الذي قدمته يثبت نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة ؟

[كلا، البرهان يبيّن أن النظرية صحيحة في جميع الحالات، لا في حالة واحدة فقط.]

س: في البرهان، أي خاصية تسمح لك باستنتاج أن $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$ ؟

[خاصية التعدي للمساواة.]

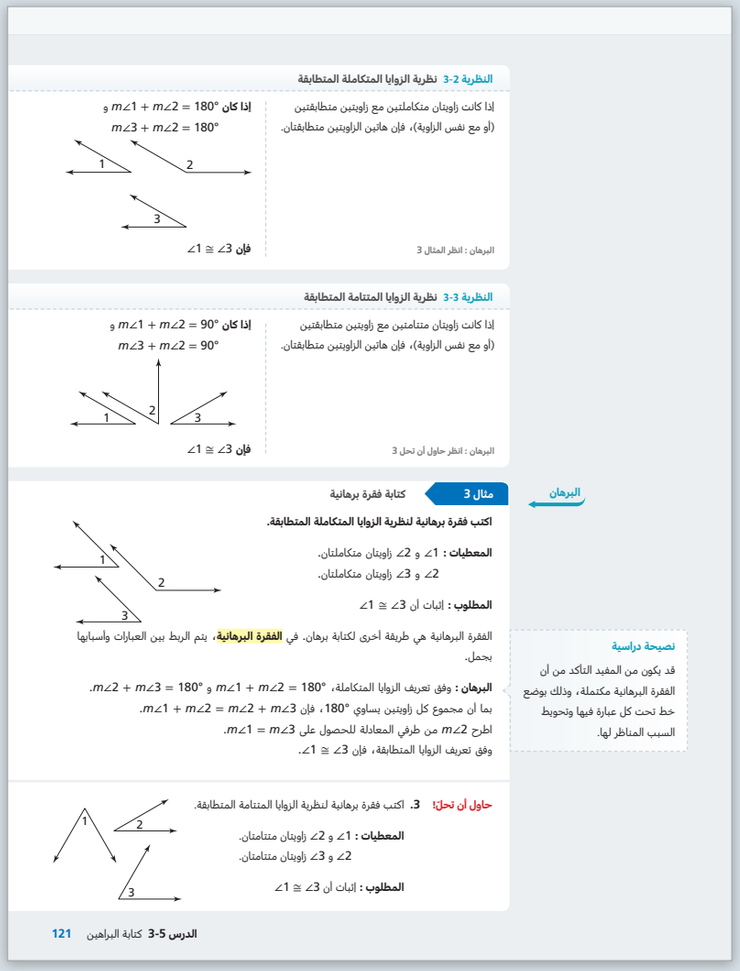
حاول أن تحلّ! الإجابات

3. وفق تعريف الزوايا المتتامة، $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$.
بالتعويض، $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.
اطرح $m\angle 2$ من طرفي المعادلة للحصول على $m\angle 1 = m\angle 3$،
وفق تعريف الزوايا المتطابقة، $\angle 1 \cong \angle 3$.

تعزيز التبرير المنطقي

س: في رأيك، ما الفرق بين برهان نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة، وبرهان نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : البرهانان متماثلان، باستثناء أن "متكاملة" تصبح "متتامة" و"180°" تصبح "90°".]



النظرية 3-2 نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة

إذا كانت زاويتان متكاملتين مع زاويتين متطابقتين (أو مع نفس الزاوية)، فإن هاتين الزاويتين متطابقتان.

إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 180°$

فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

البرهان : انظر المثال 3

النظرية 3-3 نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة

إذا كانت زاويتان متتامتين مع زاويتين متطابقتين (أو مع نفس الزاوية)، فإن هاتين الزاويتين متطابقتان.

إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 90°$

فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

البرهان : انظر حاول أن تحل 3

البرهان

مثال 3 كتابة فقرة برهانية

اكتب فقرة برهانية لنظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متكاملتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle 1 \cong \angle 3$

الفقرة البرهانية هي طريقة أخرى لكتابة برهان. في **الفقرة البرهانية**، يتم الربط بين العبارات وأسبابها بجمل.

البرهان : وفق تعريف الزوايا المتكاملة، $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$.
بما أن مجموع كل زاويتين يساوي 180°، فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.
اطرح $m\angle 2$ من طرفي المعادلة للحصول على $m\angle 1 = m\angle 3$.
وفق تعريف الزوايا المتطابقة، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.

نصيحة دراسية

قد يكون من المفيد التأكد من أن الفقرة البرهانية مكتملة، وذلك بوضع خط تحت كل عبارة فيها وتحويط السبب المناظر لها.

حاول أن تحلّ! **3.** اكتب فقرة برهانية لنظرية الزوايا المتتامة المتطابقة.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متتامتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle 1 \cong \angle 3$

الدرس 3-5 كتابة البراهين 121

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 ناقش الطلاب في أوجه الشبه والاختلاف بين البرهان في جدول من عمودين والفقرة البرهانية، ثم اطلب منهم إعادة كتابة كل جملة في صورة برهان في جدول من عمودين، وتحديد الجزء الذي يمثّل العبارة والجزء الذي يمثّل السبب من كل جملة. ثم اطلب منهم كتابة فقرة برهانية من البرهان الذي كتبوه في جدول من عمودين.

س: ما وجه المقارنة بين الفقرة البرهانية التي كتبتها والبرهان في المثال ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : البرهان الذي كتبته يحتوي على الأفكار في نفس الترتيب، لكني استعملت بعض المصطلحات المختلفة. لا تزال كل جملة تتضمن العبارة والسبب، بالتالي لا يزال البرهان صحيحًا.]

www.jnob-jo.com

مثال 4 كتابة برهان باستعمال نظرية

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما التعريفات التي قد تساعدك على إثبات النظرية 3-4 ؟
[تعريف الزاوية القائمة وتعريف الزوايا المتطابقة.]

س: ما الطريقة الأخرى التي يمكنك من خلالها كتابة نظرية الأزواج الخطية ؟
[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : إذا كانت زاويتان تشكلان زوجًا خطيًا، فإنهما متكاملتان.]

س: كيف تفسر خاصية التعدي للمساواة العبارة 3 ؟
[$m\angle 2 = m\angle 1$ و $m\angle 1 = 150°$ إذن $m\angle 2 = 150°$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4.

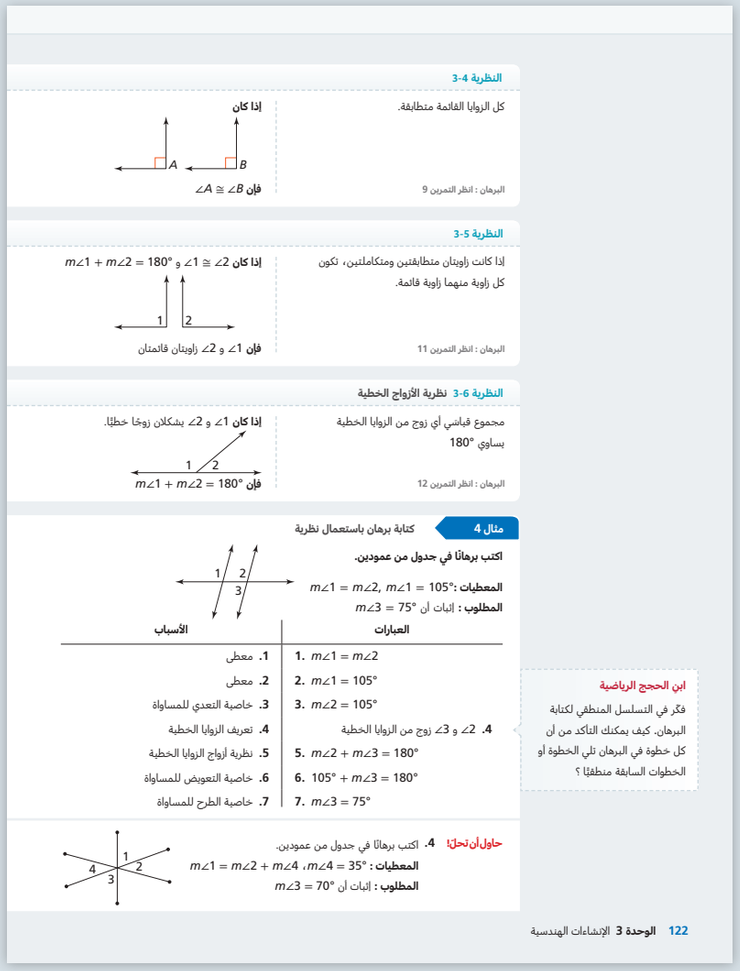
العبارات	الأسباب
1. $m\angle 4 = 35°$	1. معطى
2. $\angle 4 \cong \angle 2$	2. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
3. $m\angle 4 = m\angle 2$	3. تعريف الزوايا المتطابقة
4. $m\angle 2 = 35°$	4. خاصية التعدي للمساواة
5. $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$	5. معطى
6. $m\angle 1 = 35° + 35°$	6. خاصية التعويض للمساواة
7. $m\angle 1 = 70°$	7. تبسيط
8. $\angle 1 \cong \angle 3$	8. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
9. $m\angle 1 = m\angle 3$	9. تعريف الزوايا المتطابقة
10. $m\angle 3 = 70°$	10. خاصية التعدي للمساواة

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

عادات التفكير

برّر منطقيًا ما الخصائص أو النظريات أو التعريفات التي استعملتها لإثبات أن $m\angle 3 = 70°$ ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، وتعريف الزوايا المتطابقة، وخاصية التعويض للمساواة.]



النظرية 3-4

كل الزوايا القائمة متطابقة.

إذا كان $\angle A$ و $\angle B$ قائمتين **فإن** $\angle A \cong \angle B$

البرهان : انظر التمرين 9

النظرية 3-5

إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين، تكون كل زاوية منهما زاوية قائمة.

إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ و $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ **فإن** $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان

البرهان : انظر التمرين 11

النظرية 3-6 نظرية الأزواج الخطية

مجموع قياسي أي زوج من الزوايا الخطية يساوي 180°

إذا كان $\angle 1$ و $\angle 2$ يشكلان زوجًا خطيًا **فإن** $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

البرهان : انظر التمرين 12

مثال 4 كتابة برهان باستعمال نظرية

اكتب برهانًا في جدول من عمودين.

المعطيات: $m\angle 1 = m\angle 2,\ m\angle 1 = 105°$

المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 75°$

العبارات	الأسباب
1. $m\angle 1 = m\angle 2$	1. معطى
2. $m\angle 1 = 105°$	2. معطى
3. $m\angle 2 = 105°$	3. خاصية التعدي للمساواة
4. $\angle 2$ و $\angle 3$ زوج من الزوايا الخطية	4. تعريف الزوايا الخطية
5. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	5. نظرية أزواج الزوايا الخطية
6. $105° + m\angle 3 = 180°$	6. خاصية التعويض للمساواة
7. $m\angle 3 = 75°$	7. خاصية الطرح للمساواة

ابن الحجج الرياضية
فكّر في التسلسل المنطقي لكتابة البرهان. كيف يمكنك التأكد من أن كل خطوة في البرهان تلي الخطوة أو الخطوات السابقة منطقيًا ؟

حاول أن تحلّ! 4. اكتب برهانًا في جدول من عمودين.
المعطيات : $m\angle 4 = 35°$، $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 4$
المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 70°$

122 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 4**)

الكتابة مستوى 2 اطلب من الطلاب كتابة تفسير يوضح لماذا يبرّر كل سبب العبارة المناظرة له.

س: كيف تفسر نظرية الأزواج الخطية العبارة 5 ؟
[$\angle 2$ و $\angle 3$ يشكلان زوجًا خطيًا، لذا وفق نظرية الأزواج الخطية، مجموعهما يساوي 180°]

س: كيف تفسر خاصية الطرح للمساواة العبارة 7 ؟
[للانتقال من العبارة 6 إلى العبارة 7، يجب طرح 105° من طرفي المعادلة.]

القراءة مستوى 3 بعد قراءة المثال، اطلب من الطلاب أن يجدوا موقع كل جزء من نص المسألة في البرهان، ثم اطلب منهم توضيح لماذا يعدّ موقع كل عبارة في البرهان منطقيًا.

س: لماذا $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 1 = 105°$ هما أول عبارتين في البرهان ؟
[إنهما تمثلان المعلومات المعطاة، ومن الجيد استهلال البرهان بالمعطيات.]

س: ما الجزء غير الوارد في البرهان من نص المسألة؟ وضح إجابتك.
[كلمة "إثبات" غير مذكورة في البرهان لأنها، خلافًا لكلمة "معطى"، ليست السبب الذي يربط العبارة 6 بالعبارة 7.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم كتابة البراهين

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين البرهان في جدول من عمودين والفقرة البرهانية ؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : كلاهما يستعمل نفس المعلومات والتبريرات للوصول إلى نفس الاستنتاج. في البرهان المكتوب في جدول من عمودين، تُكتب العبارات في العمود الأيمن والأسباب في العمود الأيسر. الفقرة البرهانية تُصاغ في جمل.]

س: ما هي إيجابيات كل نوع من هذين النوعين من البراهين؟

[قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : يسهل فهم البرهان المكتوب في جدول من عمودين بسبب تصميمه. الفقرة البرهانية حوارية أكثر لكنها قد تحتل مساحة أصغر.]

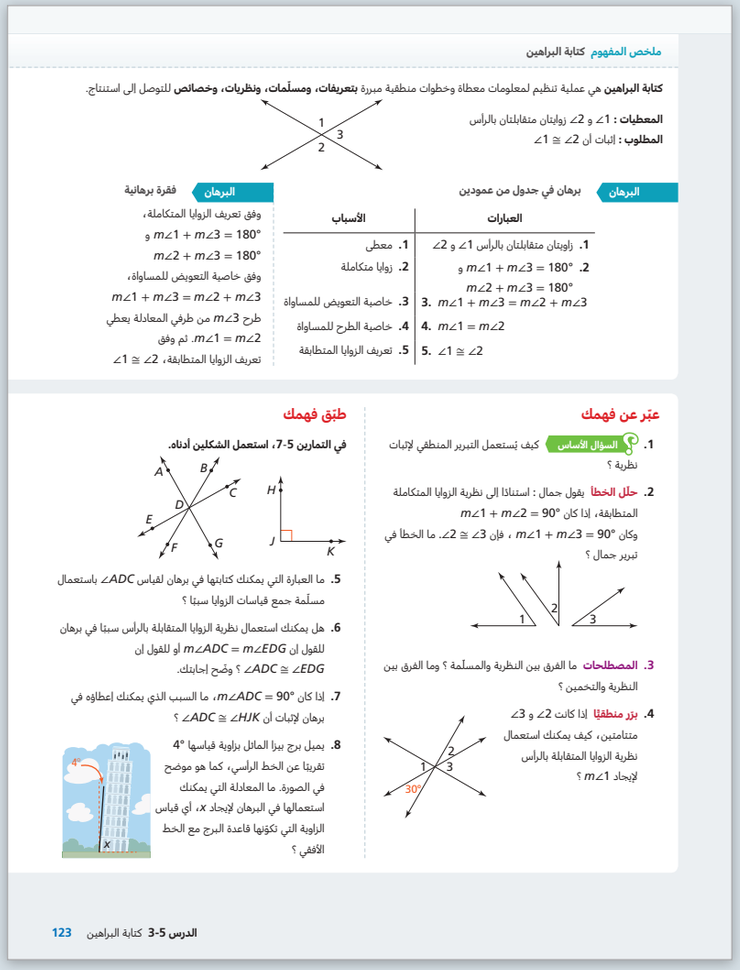
عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 2 لم يميز جمال بين الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة. ساعد الطلاب على ابتكار وسيلة تساعدهم على تذكّر الفرق بين هذين النوعين من الزوايا. على سبيل المثال، يأتي حرف التاء في "تام" قبل حرف الكاف في "كامل" في الأبجدية، والعدد 90 يأتي قبل العدد 180 في العد.

الإجابات

1. يبدأ البرهان بعبارة معطاة تليها سلسلة من الخطوات التي يُستعمل فيها التبرير المنطقي لتوضيح سبب صحة تخمين ما.
2. كان على جمال استعمال نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة.
3. المسلّمة هي عبارة نسلّم بصحتها من دون برهان، أما النظرية فهي عبارة رياضية أو منطقية تحتاج لإثبات، أما التخمين فيعرّف على أنه استنتاج نتوصل إليه من خلال الاستدلال الاستقرائي، والنظرية هي تخمين تم إثبات صحته.
4. قد تتنوّع الإجابات. نموذج إجابة : بما أن $\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متتامتان، فإن $\angle 1$ والزاوية التي قياسها $30°$ زاويتان متتامتان وفق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، وبالتالي مجموع قياسيهما يساوي $90°$، إذن $m\angle 1 = 90° - 30° = 60°$.
5. $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$
6. $\angle ADC \cong \angle EDG$ ؛ تنصّ نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس على أن الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة، ولا تقول إن قياساتها متساوية.
7. جميع الزوايا القائمة متطابقة.
8. $x° + 4° = 90°$



ملخص المفهوم كتابة البراهين

كتابة البراهين هي عملية تنظيم لمعلومات معطاة وخطوات منطقية مبررة **بتعريفات، ومسلّمات، ونظريات، وخصائص** للتوصل إلى استنتاج.

المعطيات : $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متقابلتان بالرأس

المطلوب : اثبات أن $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان برهان في جدول من عمودين

العبارات	الأسباب
1. زاويتان متقابلتان بالرأس $\angle 1$ و $\angle 2$	1. معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2. زوايا متكاملة
3. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. خاصية التعويض للمساواة
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. خاصية الطرح للمساواة
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. تعريف الزوايا المتطابقة

البرهان فقرة برهانية

وفق تعريف الزوايا المتكاملة، $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ وفق خاصية التعويض للمساواة، $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$ طرح $m\angle 3$ من طرفي المعادلة يعطي $m\angle 1 = m\angle 2$. ثم وفق تعريف الزوايا المتطابقة، $\angle 1 \cong \angle 2$

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف يُستعمل التبرير المنطقي لإثبات نظرية ؟
2. **حلل الخطأ** يقول جمال : استنادًا إلى نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ وكان $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$. ما الخطأ في تبرير جمال ؟
3. **المصطلحات** ما الفرق بين النظرية والمسلّمة ؟ وما الفرق بين النظرية والتخمين ؟
4. **بزر منطقيًا** إذا كانت $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتين، كيف يمكنك استعمال نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس لإيجاد $m\angle 1$ ؟

طبّق فهمك

في التمارين 5-7، استعمل الشكلين أدناه.

5. ما العبارة التي يمكنك كتابتها في برهان لقياس $\angle ADC$ باستعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا سببًا ؟
6. هل يمكنك استعمال نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس سببًا في برهان للقول إن $m\angle ADC = m\angle EDG$ أو للقول إن $\angle ADC \cong \angle EDG$ ؟ وضّح إجابتك.
7. إذا كان $m\angle ADC = 90°$، ما السبب الذي يمكنك إعطاؤه في برهان لإثبات أن $\angle ADC \cong \angle HJK$ ؟
8. يميل برج بيزا المائل بزاوية قياسها $4°$ تقريبًا عن الخط الرأسي، كما هو موضح في الصورة. ما المعادلة التي يمكنك استعمالها في البرهان لإيجاد x، أي قياس الزاوية التي تكوّنها قاعدة البرج مع الخط الأفقي ؟

الدرس 3-5 كتابة البراهين 123

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-26	9-26

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1,2	10, 14-17, 22	2
3	25	2
	1, 3, 18	3
4	9, 23, 24, 26	2
	11, 12, 19, 20	3
	21	4

الإجابات

.9 2. تعريف الزوايا القائمة؛ 3. خاصية التعويض للمساواة؛ 4. تعريف الزوايا المتطابقة.

.10 استعمل خالد تعريف الزوايا المتتامة في حين كان عليه استعمال تعريف الزوايا المتكاملة.

.11 بما أن $\angle M$ و $\angle N$ متطابقتان، فإن $m\angle M = m\angle N$ وفق تعريف الزوايا المتطابقة. وبما أن $\angle M$ و $\angle N$ زاويتان متكاملتان، فإن $m\angle M + m\angle N = 180°$. عوّض $m\angle M$ عن $m\angle N$ للحصول على $m\angle M + m\angle M = 180°$ أو $2m\angle M = 180°$ استعمل خاصية القسمة للحصول على $m\angle M = 90°$. عوّض $m\angle N$ عن $m\angle M$ للحصول على $m\angle N = 90°$. إذن، وفق تعريف الزوايا القائمة، $\angle M$ و$\angle N$ زاويتان قائمتان.

.12

العبارات	الأسباب
1. $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان خطيتان.	**1.** معطى
2. $m\angle ABC + m\angle CBD = 180°$	**2.** نظرية الأزواج الخطية
3. $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متكاملتان.	**3.** تعريف الزوايا المتكاملة

.13 بما أن $\angle VZX$ و $\angle WZY$ زوايتان قائمتان، فإن $\angle VZW$ و $\angle WZX$ زاويتان متتامتان و $\angle XZY$ و $\angle WZX$ زاويتان متتامتان. إذن، وفق نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة، $\angle VZW \cong \angle XZY$.

14. $x = 42; 84°; 84°$

15. $x = 22; 109°; 109°$

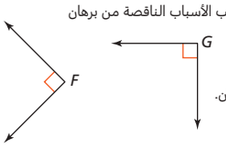
16. $x = 55; 118°; 118°$

17. $x = 25; 125°; 125°$

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

.9 **ابن الحجج الرياضية** اكتب الأسباب الناقصة من برهان النظرية 3-4

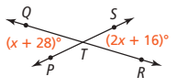


المعطيات : $\angle F$ و $\angle G$ زاويتان قائمتان.

المطلوب : إثبات أن $\angle F \cong \angle G$

العبارات	الأسباب
1. $\angle F$ و $\angle G$ زاويتان قائمتان	**1.** معطيات
2. $m\angle F = 90°$ و $m\angle G = 90°$	
3. $m\angle F = m\angle G$	
4. $\angle F \cong \angle G$	

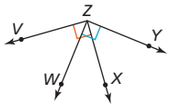
.10 **حلّل الخطأ** استعمل خالد نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس وتعريف الزوايا المتتامة لاستنتاج أن $m\angle PTR = 50°$ في الشكل المبيّن أدناه. ما الخطأ الذي وقع فيه خالد ؟



.11 **ابن الحجج الرياضية** اكتب فقرة برهانية للنظرية 3-5 بمعلومية أن $\angle N$ و $\angle M$ زاويتان متطابقتان ومتكاملتان، برهن أن $\angle N$ و $\angle M$ زاويتان قائمتان.

.12 **ابن الحجج الرياضية** اكتب برهانًا في جدول من عمودين للنظرية 3-6، بمعلومية أن $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان خطيتان، برهن أن $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متكاملتان.

.13 **مهارات التفكير العليا** وضّح كيف تنطبق نظرية الزوايا المتتامة المتطابقة على الشكل أدناه.

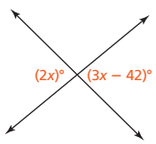


تدرَّب

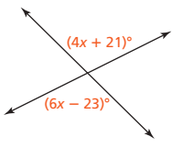
في التمارين 14-17، أوجد قيمة المتغيّر وقياس الزاوية المحددة.

انظر المثالين 1 و 2

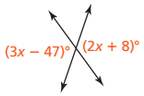
14.



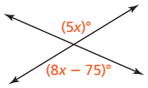
15.



16.



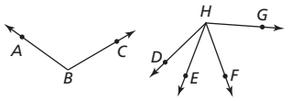
17.



.18 اكتب فقرة برهانية. انظر المثال 3

المعطيات : $m\angle ABC = 114°$؛ $m\angle DHE = 25°$؛ $m\angle EHF = 41°$؛ $\angle ABC$ و $\angle GHF$ زاويتان متكاملتان.

المطلوب : إثبات أن $m\angle DHF \cong m\angle GHF$



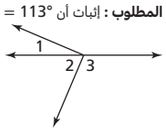
في التمرينين 19 و 20، اكتب برهانًا في جدول من عمودين للعبارة.

انظر المثال 4

.19 **المعطيات :** $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.

$m\angle 1 = 23°$

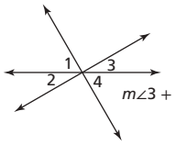
المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 = 113°$



.20 **المعطيات :** $m\angle 2 = 30°$

$m\angle 1 = 2m\angle 2$

المطلوب : إثبات أن $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$



.18 وفق مسلّمة جمع قياسات الزوايا، $m\angle DHF = 25° + 41°$، التي تُبسّط إلى $m\angle DHF = 66°$. وفق تعريف الزوايا المتكاملة $\angle GHF$ و $\angle ABC$ زاويتان متكاملتان. بما أن $\angle GHF$ و $\angle ABC$ زاويتان متكاملتان، فإن $\angle DHF \cong \angle GHF$ وفق نظرية الزوايا المتكاملة المتطابقة.

www.jnob-jo.com

.19

العبارات	الأسباب
1. $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متتامتان.	**1.** معطى
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	**2.** تعريف الزوايا المتتامة
3. $m\angle 1 = 23°$	**3.** معطى
4. $23° + m\angle 2 = 90°$	**4.** بالتعويض
5. $m\angle 2 = 67°$	**5.** خاصية الطرح للمساواة
6. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**6.** نظرية الأزواج الخطية
7. $67° + m\angle 3 = 180°$	**7.** بالتعويض
8. $m\angle 3 = 113°$	**8.** خاصية الطرح للمساواة

.20

العبارات	الأسباب
1. $m\angle 2 = 30°$	**1.** معطى
2. $m\angle 1 = 2m\angle 2$	**2.** معطى
3. $m\angle 1 = 2(30°)$	**3.** بالتعويض
4. $m\angle 1 = 60°$	**4.** بالتبسيط
5. $m\angle 3 = 30°$	**5.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6. $m\angle 4 = 60°$	**6.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
7. $m\angle 3 + m\angle 4 = 30° + m\angle 4$	**7.** خاصية الجمع للمساواة
8. $m\angle 3 + m\angle 4 = 30° + 60°$	**8.** بالتعويض
9. $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$	**9.** بالتبسيط

www.jnob-jo.com

الإجابات

21. القسم A : °97.2، القسم B : °82.8،
القسم D : °64.8، القسم F : °46.8
وفق نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومسلّمة جمع قياسات الزوايا، قياس زاوية القسم C يساوي
$97.2° - 64.8° = 32.4°$،
وفق نظرية الزوايا المتكاملة ومسلّمة جمع قياسات الزوايا، قياس زاوية القسم E :
$180° - (32.4° + 64.8° + 46.8°) = 36°$، نسبة القسم C هي 9% ونسبة القسم E هي 10%، لإيجاد النسب المئوية اضرب قياس الدرجة في 100 واقسمه على °360

22. $m\angle 2 = 50°, m\angle 4 = 85°, m\angle 5 = 50°, m\angle 6 = 45°$

23. **a.** $\angle 1 \cong \angle 2$، النظرية 3-4
b. $\angle 3 \cong \angle 4$؛ نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

24. صحيحة دائمًا
غير صحيحة أبدًا
صحيحة أحيانًا
صحيحة أحيانًا
صحيحة دائمًا
صحيحة أحيانًا

25. A

26. **الجزء A** من الزاوية العلوية باتجاه حركة عقارب الساعة، قياسات الزوايا هي:
°96 و °51 و °33 و °96 و °51 و °33

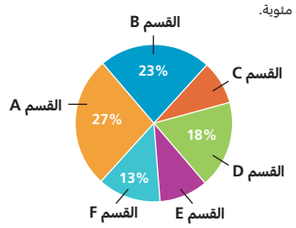
الجزء B قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

العبارات	الأسباب
1. $m\angle AGB = 33°$ و $m\angle AGF = 51°$	**1.** معطى
2. $m\angle CGD = 51°$	**2.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
3. $m\angle DGE = 33°$	**3.** نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

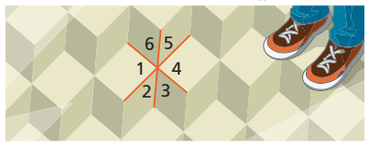
تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

21. **روابط في الرياضيات** يبين التمثيل البياني أدناه النسب المئوية للمبيعات التي حققتها الأقسام المختلفة في شركة خلال سنة واحدة. ما قياس الزاوية التي تكوّنها القطع المستقيمة لكل قسم ؟ ما النسب المئوية الناقصة ؟ وضّح كيف تمكنت من إيجاد كل نسبة مئوية.

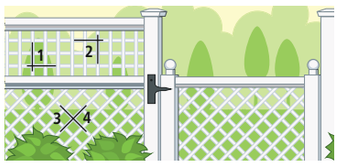


22. **استعمل البنية** صمّم نوع من بلاط الأرضيات للإيهام بأن الأرضية ثلاثية الأبعاد. بمعلومية أن $m\angle 1 = 85°$ و $m\angle 3 = 45°$، ما قياسات بقية الزوايا ؟



23. **برّر منطقيًا** فكّر في الزوايا المبيّنة على شبكة بوابة الحديقة. باستعمال النظريات الواردة في هذا الدرس، ما الذي يمكنك أن تستنتجه من كل عبارة من العبارات التالية ؟ اذكر النظرية التي طبقتها للوصول إلى استنتاجك.

a. $m\angle 1 = 90°$ و $m\angle 2 = 90°$
b. $\angle 3$ و $\angle 4$ زوايتان متقابلتان بالراس.



تدرَّب على اختبار

24. فكّر في الشكل أدناه.

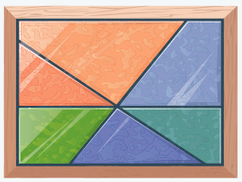
صنّف كل عبارة من العبارات التالية على أنها "صحيحة دائمًا" أو "صحيحة أحيانًا" أو "غير صحيحة أبدًا".

- $m\angle 1 + m\angle 4 = 180°$
- $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$
- $m\angle 2 + m\angle 4 = 180°$
- $\angle 2 \cong \angle 3$
- $\angle 2 \cong \angle 4$
- $m\angle 3 = m\angle 4$

25. **اختبار SAT/ACT** بمعلومية أن $\angle ABC$ و $\angle DEF$ متكاملتان وأن $\angle ABC$ و $\angle GHJ$ متكاملتان، ماذا يمكنك أن تستنتج عن الزوايا ؟

Ⓐ $m\angle DEF \cong m\angle GHJ$
Ⓑ $m\angle DEF + m\angle GHJ = 90°$
Ⓒ $m\angle DEF + m\angle GHJ = 180°$
Ⓓ $m\angle ABC \cong m\angle DEF$ و $m\angle ABC \cong m\angle GHJ$

26. **مهمة أدائية** يبيّن الشكل مستقيمات تقسم نافذة ملونة إلى عدة أجزاء.



الجزء A انسخ الشكل على ورقة.
ثم رقّم كل زاوية من الزوايا الداخلية المشتركة بنفس الرأس.
استعمل منقلة لقياس زاويتين من الزوايا الداخلية في الشكل.
أوجد قياسات الزوايا الأخرى باستعمال قياسي هاتين الزاويتين.

الجزء B اختر زاويتين من الزوايا الداخلية لم تقسهما بالمنقلة.
كيف يمكنك معرفة قياسي هاتين الزاويتين ؟ اكتب برهانًا في جدول من عمودين لتوضّح كيف تعلم أن قياسهما صحيح.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

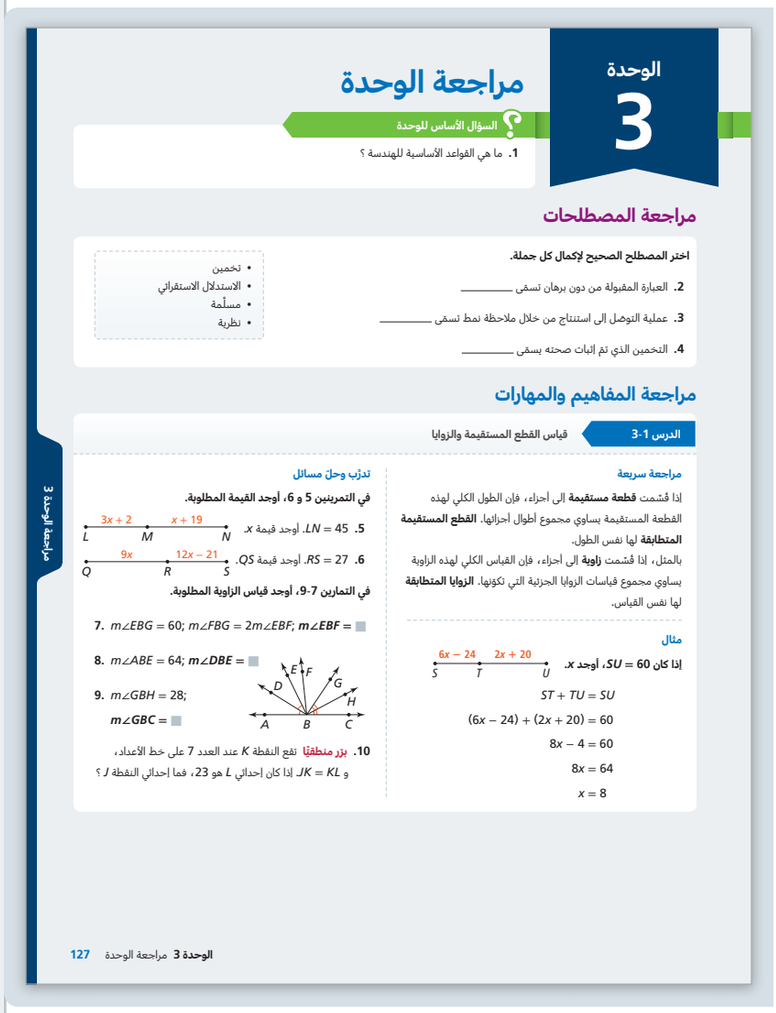
سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة



الوحدة 3

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. العبارة المقبولة من دون برهان تسمى _____
3. عملية التوصل إلى استنتاج من خلال ملاحظة نمط تسمى _____
4. التخمين الذي تم إثبات صحته يسمى _____

- تخمين
- الاستدلال الاستقرائي
- مسلّمة
- نظرية

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-3 قياس القطع المستقيمة والزوايا

مراجعة سريعة

إذا قُسّمت **قطعة مستقيمة** إلى أجزاء، فإن الطول الكلي لهذه القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطوال أجزائها. **القطع المستقيمة المتطابقة** لها نفس الطول.

بالمثل، إذا قُسّمت **زاوية** إلى أجزاء، فإن القياس الكلي لهذه الزاوية يساوي مجموع قياسات الزوايا الجزئية التي تكونها. **الزوايا المتطابقة** لها نفس القياس.

مثال

إذا كان $SU = 60$، أوجد x.

S — $6x - 24$ — T — $2x + 20$ — U

$ST + TU = SU$

$(6x - 24) + (2x + 20) = 60$

$8x - 4 = 60$

$8x = 64$

$x = 8$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 5 و 6، أوجد القيمة المطلوبة.

5. $LN = 45$. أوجد قيمة x.

L — $3x + 2$ — M — $x + 19$ — N

6. $RS = 27$. أوجد قيمة QS.

Q — $9x$ — R — $12x - 21$ — S

في التمارين 7-9، أوجد قياس الزاوية المطلوبة.

7. $m\angle EBG = 60$; $m\angle FBG = 2m\angle EBF$; $m\angle EBF =$ ■
8. $m\angle ABE = 64$; $m\angle DBE =$ ■
9. $m\angle GBH = 28$; $m\angle GBC =$ ■

A B C D E F G H

10. **برز منطقيًا** تقع النقطة K عند العدد 7 على خط الأعداد، و $JK = KL$. إذا كان إحداثي L هو 23، فما إحداثي النقطة J ؟

الوحدة 3 مراجعة الوحدة 127

مراجعة الوحدة 3

تقديم السؤال الأساس

ما هي القواعد الأساسية للهندسة ؟

فيما يجيب الطلاب عن السؤال الأساس كتابةً، شجّعهم على تضمين إجاباتهم أمثلة تدعمها. ابحث عن المعلومات التالية في إجابات الطلاب.

- إذا قُسّمت قطعة مستقيمة إلى أجزاء، فإن الطول الكلي لهذه القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطوال أجزائها. القطع المستقيمة المتطابقة لها نفس الطول. وإذا قُسّمت زاوية إلى أجزاء، فإن قياس هذه الزاوية يساوي مجموع قياسات الزوايا التي قُسّمت إليها. الزوايا المتطابقة لها نفس القياس.
- الإنشاء الهندسي هو عملية رسم الأشكال الهندسية باستعمال مسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة وفرجار فقط. تشمل الإنشاءات الهندسية نسخ الزوايا والقطع المستقيمة، وقياسها، وتجزئتها.
عند رسم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي، يُستعمل قانون نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة، ويُستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طولها.
- يشمل الاستدلال الاستقرائي إجراء تخمين من خلال تحديد نمط في متتالية من خلال الملاحظة. يُبنى التخمين على دليل، لكنه لا يكفي لإثبات صحة استنتاج. يمكن دحض التخمين بمثال مضاد واحد.
- الجملة الشرطية هي جملة بالصيغة "إذا...، فإن..." وتربط بين الفرضية والاستنتاج للجملة الشرطية وللجملة الإيجابية المعاكسة نفس القيمة الفعلية دائمًا.
- يستعمل البرهان الاستدلال الاستنباطي لتوضيح سبب صحة عبارة. العبارة المبرهنة تسمى نظرية.

الإجابات

2. مسلّمة
3. الاستدلال الاستقرائي
4. نظرية
5. 6 وحدات
6. 63 وحدة
7. 20°
8. 32°
9. 56°
10. −9

www.jnob-jo.com

الدرس 3-2 الإنشاءات الهندسية الأساسية

مراجعة سريعة

يمكنك استعمال فرجار ومسطرة بحافة مستقيمة غير مدرجة لنسخ القطع المستقيمة والزوايا، وإنشاء **منصّف الزاوية** لزاوية معطاة **والمنصّف العمودي** لقطعة مستقيمة معطاة.

الإنشاء الهندسي هي عملية رسم الأشكال الهندسية باستعمال مسطرة مستقيمة بحافة غير مدرجة وفرجار فقط.

مثال

أنشئ منصّف الزاوية A.

ضع رأس الفرجار عند رأس الزاوية وارسم قوسًا يتقاطع مع ضلعي الزاوية.

ثم ضع رأس الفرجار عند كل نقطة تقاطع وارسم قوسين متقاطعين داخل الزاوية، مع الحفاظ على نفس فتحة الفرجار.

أخيرًا، ارسم منصّف الزاوية من رأس الزاوية مرورًا بنقطة تقاطع القوسين.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 11 و 12، انسخ القطعة المستقيمة وأنشئ منصفّها العمودي.

11. 12.

في التمرينين 13 و 14، انسخ الزاوية وأنشئ منصّفها.

13. 14.

15. **فكّر وثابر في الحل** لماذا يجب أن تكون فتحة الفرجار أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة لرسم المنصّف العمودي لها ؟

16. **نمذج** يشكّل حافتان من حواف سقف زاوية قياسها 120°، حيث ينزل من رأس الزاوية لوح خشبي ينصّف الزاوية. ارسم مخططًا للسقف مع اللوح الخشبي الذي ينصّف الزاوية.

الدرس 3-3 نقطة المنتصف والمسافة

مراجعة سريعة

تعطي صيغة نقطة المنتصف إحداثيي **نقطة المنتصف** بين نقطتين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) في الصورة:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

تحدد صيغة **المسافة بين نقطتين (d)** المسافة الفاصلة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال

ما إحداثيا النقطة K التي تقع عند $\frac{2}{3}$ المسافة من النقطة $J(8 , 3)$ إلى النقطة $L(2 , 6)$ ؟

المسافة الأفقية: $\frac{2}{3}(x_2 - x_1) = \frac{2}{3}(2 - 8) = -4$

المسافة الرأسية: $\frac{2}{3}(y_2 - y_1) = \frac{2}{3}(6 - 3) = 2$

$K(x , y) = (x_1 + (-4) , y_1 + 2) = (8 - 4 , 3 + 2)$
$= (4 , 5)$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 17-20، أوجد نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة.

17. $\overline{EF}$
18. $\overline{FG}$
19. $\overline{GH}$
20. $\overline{EH}$

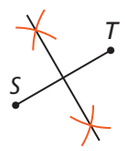
21. ما إحداثيا النقطة التي تقع عند $\frac{2}{5}$ المسافة من H إلى E في شبكة المربعات في السؤال السابق ؟

22. **فكّر وثابر في الحل** ترسم منى نموذجًا لحيّها في المستوى الإحداثي. تقع مدرستها عند النقطة $(8 , 12)$ ومنزلها عند النقطة $(14 , 3)$. ما إحداثيا النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين مدرستها ومنزلها ؟

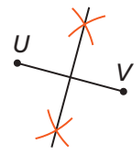
128 الوحدة 3 الإنشاءات الهندسية

الإجابات

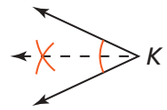
.11



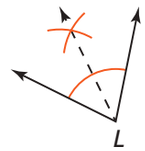
.12



.13

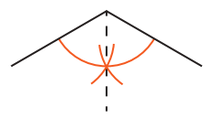


.14



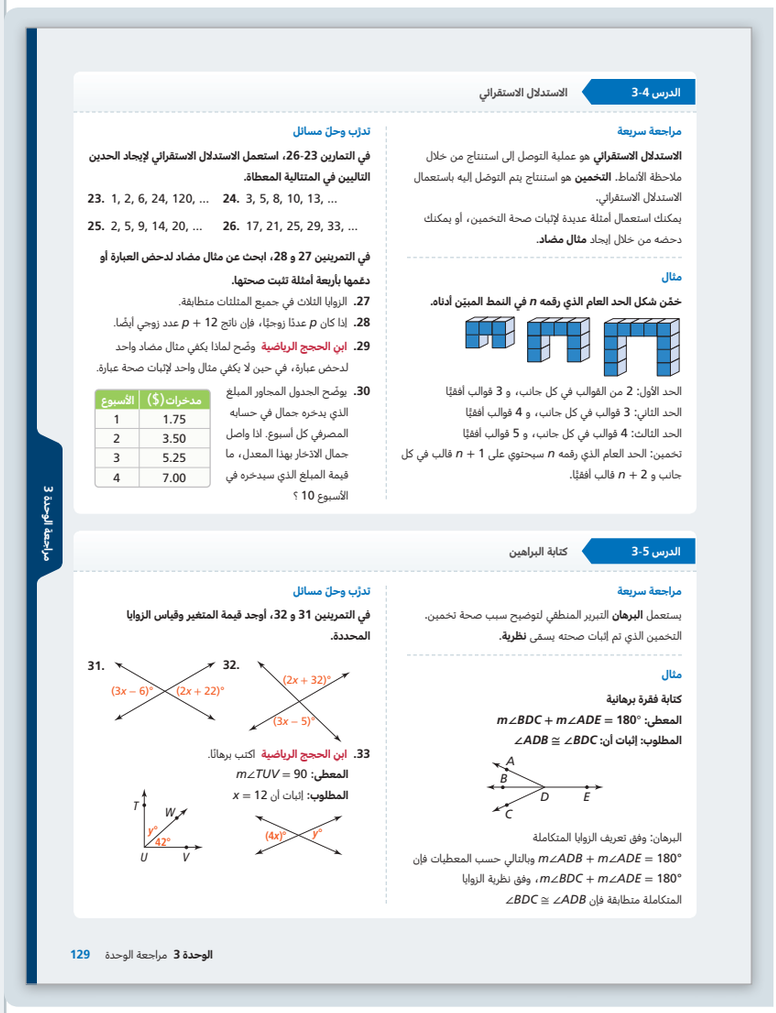
.15 لن يتقاطع القوسان إذا كانت فتحة الفرجار أصغر من نصف طول القطعة المستقيمة.

.16



17. $\left(-1 , \frac{5}{2}\right) ; \sqrt{17}$
18. $(3 , 2) ; 2\sqrt{5}$
19. $(3 , 0) ; 2\sqrt{5}$
20. $\left(-1 , \frac{1}{2}\right) ; 5$
21. $\left(-\frac{3}{5} , \frac{1}{5}\right)$
22. $\left(11 , 7\frac{1}{2}\right)$

www.jnob-jo.com



الدرس 3-4 الاستدلال الاستقرائي

مراجعة سريعة

الاستدلال الاستقرائي هو عملية التوصل إلى استنتاج من خلال ملاحظة الأنماط. **التخمين** هو استنتاج يتم التوصل إليه باستعمال الاستدلال الاستقرائي.

يمكنك استعمال أمثلة عديدة لإثبات صحة التخمين، أو يمكنك دحضه من خلال إيجاد **مثال مضاد**.

مثال

خمّن شكل الحد العام الذي رقمه n في النمط المبيّن أدناه.

الحد الأول: 2 من القوالب في كل جانب، و 3 قوالب أفقيًا

الحد الثاني: 3 قوالب في كل جانب، و 4 قوالب أفقيًا

الحد الثالث: 4 قوالب في كل جانب، و 5 قوالب أفقيًا

تخمين: الحد العام الذي رقمه n سيحتوي على $n + 1$ قالب في كل جانب و $n + 2$ قالب أفقيًا.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 23-26، استعمل الاستدلال الاستقرائي لإيجاد الحدين التاليين في المتتالية المعطاة.

23. 1, 2, 6, 24, 120, ...
24. 3, 5, 8, 10, 13, ...
25. 2, 5, 9, 14, 20, ...
26. 17, 21, 25, 29, 33, ...

في التمرينين 27 و 28، ابحث عن مثال مضاد لدحض العبارة أو دعمها بأربعة أمثلة تثبت صحتها.

27. الزوايا الثلاث في جميع المثلثات متطابقة.
28. إذا كان p عددًا زوجيًا، فإن ناتج $p + 12$ عدد زوجي أيضًا.
29. **ابن الحجج الرياضية** وضّح لماذا يكفي مثال مضاد واحد لدحض عبارة، في حين لا يكفي مثال واحد لإثبات صحة عبارة.
30. يوضّح الجدول المجاور المبلغ الذي يدخره جمال في حسابه المصرفي كل أسبوع. اذا واصل جمال الادخار بهذا المعدل، ما قيمة المبلغ الذي سيدخره في الأسبوع 10 ؟

الأسبوع	مدخرات ($)
1	1.75
2	3.50
3	5.25
4	7.00

الدرس 3-5 كتابة البراهين

مراجعة سريعة

يستعمل **البرهان** التبرير المنطقي لتوضيح سبب صحة تخمين. التخمين الذي تم إثبات صحته يسمى **نظرية**.

مثال

كتابة فقرة برهانية

المعطى: $m\angle BDC + m\angle ADE = 180°$

المطلوب: إثبات أن: $\angle ADB \cong \angle BDC$

البرهان: وفق تعريف الزوايا المتكاملة $m\angle ADB + m\angle ADE = 180°$ وبالتالي حسب المعطيات فإن $m\angle BDC + m\angle ADE = 180°$، وفق نظرية الزوايا المتكاملة متطابقة فإن $\angle ADB \cong \angle BDC$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 31 و 32، أوجد قيمة المتغير وقياس الزوايا المحددة.

31. $(3x - 6)°$, $(2x + 22)°$
32. $(2x + 32)°$, $(3x - 5)°$

33. **ابن الحجج الرياضية** اكتب برهانًا.

المعطى: $m\angle TUV = 90$

المطلوب: إثبات أن $x = 12$

$y°$, $42°$, $(4x)°$, $y°$

الوحدة 3 مراجعة الوحدة 129

الإجابات

23. 720, 5040

24. 15, 18

25. 27, 35

26. 37, 41

27. مثال مضاد: المثلث القائم الزاوية.

28. 2 و 14؛ 4 و 16؛ 6 و 18؛ 8 و 20

29. العبارة الصحيحة يجب أن تكون صحيحة في جميع الحالات، لذا فإن مثالًا مضادًا واحدًا يدحضها يكفي لإثبات عدم صحة عبارة. بينما المثال يثبت صحة العبارة في حالة واحدة فقط، لكنها قد لا تكون صحيحة في حالات أخرى.

30. 17.50$

31. $x = 28$; 78°; 78°

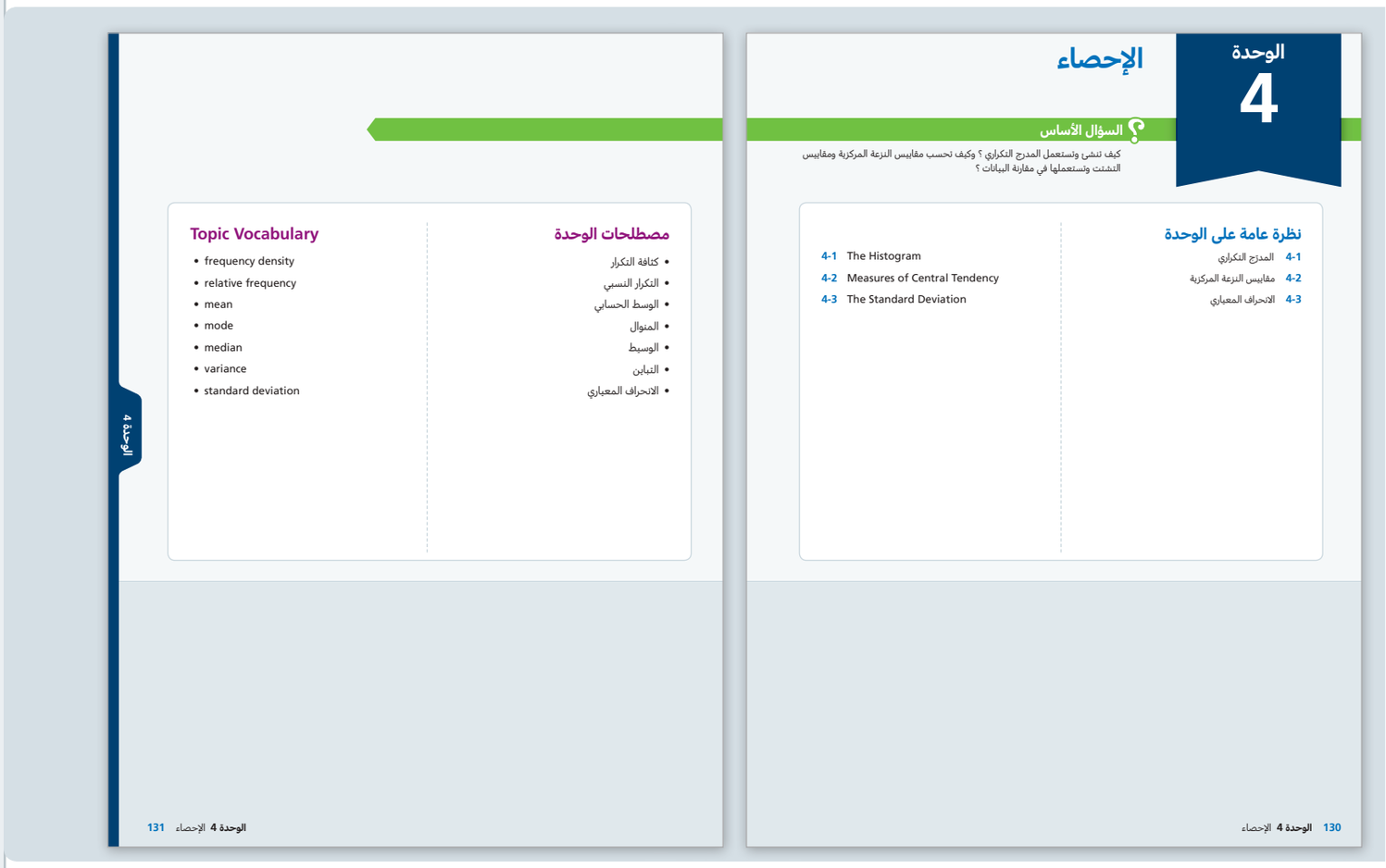
32. $x = 37$; 106°; 106°

33.

العبارات	الأسباب
1. $m\angle TUV = 90°$	1. مسلمة
2. $m\angle TUW + m\angle WUV = m\angle TUV$	2. جمع قياسات الزوايا
3. $y° + 42° = 90°$	3. خاصية الإبدال
4. $y° = 48°$	4. خاصية الطرح
5. $4x = y$	5. نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6. $4x = 48$	6. خاصية الإبدال

www.jnob-jo.com

مقدمة الوحدة



الوحدة 4

الإحصاء

السؤال الأساس

كيف ننشئ ونستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 4-1 المدرج التكراري
- 4-2 مقاييس النزعة المركزية
- 4-3 الانحراف المعياري

- 4-1 The Histogram
- 4-2 Measures of Central Tendency
- 4-3 The Standard Deviation

130 الوحدة 4 الإحصاء

مصطلحات الوحدة

- كثافة التكرار
- التكرار النسبي
- الوسط الحسابي
- المنوال
- الوسيط
- التباين
- الانحراف المعياري

Topic Vocabulary

- frequency density
- relative frequency
- mean
- mode
- median
- variance
- standard deviation

الوحدة 4

131 الوحدة 4 الإحصاء

السؤال الأساس للوحدة

كيف ننشئ ونستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 165 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

www.jnob-jo.com

مشروع STEM

الوحدة 4 مشروع STEM

هل تعلم؟

يُعرف طن النفط المكافئ، أو TOE (tonne of oil equivalent)، وهو وحدة لقياس الطاقة، بأنه كمية الطاقة الناتجة عن احتراق طن واحد من النفط الخام.

المعدل السنوي لاستهلاك الفرد من الطاقة في بعض الدول بناءا على إحصاءات (2017)

الولايات المتحدة 6.8
كندا 7.3
فنلندا 6.2
قطر 17.4

تستهلك أجهزة التكييف في دولة قطر **70% تقريبًا من الطاقة الكهربائية المنزلية**، وذلك حسب إحصاءات شركة الكهرباء لعام 2017

في الولايات المتحدة الأميركية، وفّر النفط والغاز الطبيعي والفحم معظم الطاقة على مدى أكثر من 100 عام.

يوفر الوقود الأحفوري 86% من الطاقة المستهلكة في العالم.

عام 2013، تم توليد 3% تقريبًا من الطاقة الكهربائية في العالم من الرياح.
على الصعيد العالمي، يتزايد مقدار الطاقة التي يتم توليدها من الرياح **بمعدل 17% تقريبًا كل عام.**

مهمّتك: إجراء استطلاع حول استخدام الطاقة

ستقوم أنت وزملاؤك بوضع استبيان لاستطلاع آراء مجموعتين من الطلاب في مدرستك حول استخدام الطاقة وتوفيرها. اجمع البيانات ومثّلها بجداول وتمثيلات بيانية مناسبة، ثم استعمل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لمقارنة وتحليل بيانات المجموعتين. عمّم النتائج التي توصلت إليها وحاول القيام بحملة توعية في المدرسة تسلّط فيها الضوء على بعض الإجراءات التي يمكن اتخاذها لترشيد استهلاك الطاقة.

132 الوحدة 4 مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعلم الطلاب بعض الطرائق التي يستطيع أن يحسب بها الأشخاص معدل استهلاكهم للطاقة في منازلهم، ويقدمون اقتراحات لترشيد هذا الاستهلاك.

تقديم المشروع

ناقش التغيّرات التي تؤثر بشكل بارز على استهلاك الطاقة مثل المناخ المحلي وتعاقب فصول السنة. إذ يتزايد استهلاك الطاقة مع اختلاف درجات الحرارة وذلك حسب الحاجة إلى التدفئة أو التبريد.

قد تتنوع المناقشات تبعًا للمنطقة التي تعيش فيها.

يمكن استعمال الأسئلة الواردة أدناه لإدارة النقاش.

س: أيّ من الأجهزة الموجودة في منزلك تظن أنها الأكثر استهلاكًا للطاقة ؟ وضّح إجابتك.
[ابحث عن الإجابات المنطقية.]

س: إذا طُلب منك التخلي عن أحد الأجهزة المستهلكة للطاقة، عن أيّ جهاز تختار أن تتخلى: المكنسة الكهربائية، آلة الغسيل، آلة تجفيف الغسيل ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوع الإجابات.]

س: لأي سبب قد يعمد الناس للحدّ من استهلاكهم للطاقة ؟
[لأسباب مالية أو تتعلق بالموارد العالمية.]

اطلب من الطلاب الاطلاع على المهمة التي سيطلب منهم إنجازها.

تنفيذ المشروع

يمكن أن يعمل الطلاب في ثنائيات أو ضمن مجموعات حسب رغبتهم.

إنهاء المشروع

قد ترغب بتحديد يوم يتشارك فيه الطلاب استبياناتهم المنجزة وتمثيلاتهم البيانية الموضحة وتحليلاتهم. شجّعهم على توضيح الخطوات التي اتّبعوها في تنفيذ المشروع إضافة إلى النتائج التي توصلوا إليها.

يمكنك الطلب من الطلاب تنفيذ المشروع في أي وقت تشاء أثناء دراسة الوحدة 4.

www.jnob-jo.com

الدرس 1-4
المدرّج التكراري

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ رسم المدرج التكراري لفئات غير متساوية من بيانات مجمعة واستعماله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.

✔ رسم المدرج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله لاستخلاص نتائج.

الفهم الأساس

ينشىء الطلاب المدرج التكراري لفئات غير متساوية، ويحسبون كثافة التكرار لهذا النوع من المدرجات التكرارية. كما ينشئون جدول التكرار النسبي ويرسمون المدرج التكراري النسبي.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- إنشاء المدرج التكراري لفئات متساوية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تكوين جدول الكثافة التكرارية باستعمال الصيغة: كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
- إنشاء المدرج التكراري لفئات غير متساوية مستعملًا جدول الكثافة التكرارية.
- تفسير المدرج التكراري لفئات غير متساوية لإيجاد تكرار الفئات باستعمال الصيغة: كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
- تفسير المدرج التكراري لفئات غير متساوية لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.
- إنشاء جدول التكرار النسبي باستعمال الصيغة: التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- رسم المدرج التكراري النسبي.
- تفسير المدرج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله لاستخلاص نتائج.

لاحقًا في الصف العاشر، سيتمكّن الطلاب من:

- رسم المنحنى التكراري التراكمي واستعماله لاستخلاص نتائج.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أنه لا يمكن استعمال مفهوم التكرار لمقارنة فئات بأطوال غير متساوية.
- يدرك الطلاب أنه يجب عليهم حساب كثافة التكرار لمقارنة الفئات عندما تكون أطوالها غير متساوية.
- يدرك الطلاب أن المدرج التكراري لا يتيح لهم تحديد النسبة التي تمثلها كل فئة.
- يدرك الطلاب أن المدرج التكراري النسبي يبيّن نسبة تكرار كل فئة مقارنةً بمجموع التكرارات.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **مدرّج تكراري** | *histogram*
- **فئة** | *interval*

المصطلحات الجديدة

- **كثافة التكرار** | *frequency density*
- **التكرار النسبي** | *relative frequency*

نشاط المصطلحات

- تعلم الطلاب في الصفوف السابقة كيفية إنشاء مدرج تكراري لفئات متساوية، حيث يمثل y تكرار الفئة الذي يقاس بحساب ارتفاع عمود كل فئة. لكن عندما تكون الفئات غير متساوية، لا يمكن للمحور y أن يمثل تكرار الفئة بسبب اختلاف أطوال الفئات.
  قدم للطلاب مصطلح "كثافة التكرار" الذي يبيّن تكرار الفئة من خلال حساب مساحة عمود كل فئة.
  يساعد المدرج التكراري في المقارنة بين الفئات من خلال قراءة تكرار كل فئة، لكنه لا يبيّن نسبة تكرار كل فئة إلى مجموع تكرارات الفئات.
  قدم للطلاب مصطلح "التكرار النسبي" الذي يبيّن تكرار كل فئة نسبةً إلى مجموع تكرارات الفئات.
- اطلب من الطلاب ملء الفراغ في كل جملة بالمصطلح المناسب من بين المصطلحات التالية: التكرار، كثافة التكرار، التكرار النسبي.

a. عندما يحتوي الجدول التكراري على فئات غير متساوية، نستعمل _____ لإنشاء المدرج التكراري. [**كثافة التكرار**]

b. عندما نريد تبيان نسبة تكرار كل فئة من البيانات إلى مجموع تكرارات فئات البيانات، نجد _____ [**التكرار النسبي**]

c. عندما يحتوي الجدول التكراري على فئات متساوية، نستعمل _____ لإنشاء المدرج التكراري. [**التكرار**]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

9.8.1 يفهم المصطلحات التالية: كثافة التكرار والتكرار النسبي، والتوزيع التكراري النسبي.

9.8.2 يرسم مدرجات تكرارية ذات فئات غير متساوية لبيانات مجمعة ويستعملها لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب مهارة الاستدلال لاستنتاج معلومات عند قراءة وتفسير مدرج تكراري لفئات غير متساوية. يستعمل الطلاب كثافة تكرار كل فئة وطولها لحساب تكرار هذه الفئة. كما يستعملون كثافة تكرارات عدد من الفئات المتلاصقة وأطوالها لحساب تكراراتها، أو يستعملون كثافة تكرارات جميع الفئات وأطوالها لحساب مجموع تكرارات الفئات كلها. جميع هذه التكرارات التي يحسبها الطلاب تُمثل معلومات غير صريحة في المدرج التكراري. يستعمل الطلاب مهارة الاستدلال كذلك عند قراءة وتفسير المدرج التكراري النسبي، ويدركون أن التكرار النسبي لكل فئة يُمثل نسبة تكرار هذه الفئة إلى مجموع التكرارات، ويستنتجون من ذلك أن مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات يجب أن يساوي 1

www.jnob-jo.com

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب البيانات الممثلة في المدرج التكراري لتحديد الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها والجهة المعنية بالإجابة عن هذه الأسئلة. كما يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة عن النسبة والنسبة المئوية لإيجاد عدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55.

يهيئ هذا الاستكشاف الفرصة للطلاب لتمثيل البيانات باستعمال مدرجات تكرارية لفئات غير متساوية الطول على المحور x وذلك باستعمال كثافة التكرار أو التكرار النسبي على المحور y.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما المعطيات التي يوفرها التمثيل البياني ؟

[فئات متساوية الطول على المحور x وطول كل منها 5 حيث تبدأ بالسعر QR 25 وتنتهي بالسعر QR 70، وتمثل أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح. كما يبيّن المحور y تكرار كل فئة أي عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر. يبين ارتفاع كل عمود من الأعمدة عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر من كل فئة من الأسعار.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما المعلومات التي يمكنك استنتاجها من شكل المدرج التكراري ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر صغير عند الطرفين وكبير في الوسط باستثناء عددهم عند الفئة 60-55]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل يمكن استعمال فئات أخرى لعرض هذه البيانات ؟ كيف سيبدو شكل المدرج التكراري الجديد ؟ ارسم المدرج التكراري باستعمال الفئات الجديدة.

[نعم، يمكن استعمال فئات متساوية طول كل منها QR 10.
ستكون أنماط ارتفاعات الأعمدة متشابهة، لذا، يبقى شكل المدرج التكراري هو نفسه. راجع التمثيلات البيانية للطلاب.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما النتيجة التي يمكن الحصول عليها من المدرج التكراري ؟

[العدد الأكبر من الطلاب اشتروا التذاكر التي تتراوح أسعارها بين QR 40 و QR 55 علمًا أن 18 طالبًا اشتروا تذاكر تتراوح أسعارها بين QR 60 و QR 65.]

كتاب الطالب، صفحة 133

4-1 المدرّج التكراري
The Histogram

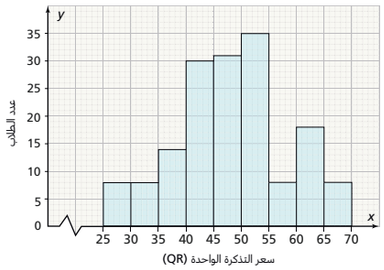
أستطيع...
- رسم المدرّج التكراري لفئات غير متساوية من بيانات مجمعة واستعماله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.
- رسم المدرّج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله.

معايير الدرس
9.8.1 و 9.8.2

المصطلحات
- كثافة التكرار frequency density
- التكرار النسبي relative frequency

استكشف وبرّر منطقيًا

عند سؤال الطلاب في بعض المدارس الثانوية عن سعر تذاكر الدخول إلى صالات المسرح، كانت النتائج كما يلخصها المدرج التكراري أدناه:



A. ما الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها باستعمال البيانات الموجودة في المدرج التكراري ؟

B. من الذي قد يكون مهتمًا بالإجابة عن هذه الأسئلة ؟ وضّح إجابتك.

C. **استعمل البنية** أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55.

نموذج من أعمال الطلاب

A. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : ما وسيط أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما مدى أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما منوال أسعار الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما متوسط أسعار الدخول إلى صالات المسرح ؟

B. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الهيئات الرقابية على الأسعار في مؤسسات الدولة ومديرو المدارس والطلاب وأولياء أمورهم. جميع هؤلاء قد يكونون مهتمين بالإجابة عن هذه الأسئلة.

C. العدد الإجمالي للطلاب:

$8 + 8 + 14 + 30 + 31 + 35 + 8 + 18 + 8 = 160$

عدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55:

$30 + 31 + 35 = 96$

النسبة المئوية: $\frac{96}{160} \times 100 = 60\%$

إذن، 60% من الطلاب اشتروا تذاكر الدخول التي تتراوح أسعارها بين QR 40 و QR 55.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

تعلم الطلاب سابقًا التمثيل البياني بالأعمدة والمدرج التكراري لفئات متساوية الطول، وسيتعلمون الآن كيفية رسم مدرج تكراري لفئات غير متساوية الطول باستعمال كثافة التكرار، وكيفية رسم مدرج تكراري لفئات متساوية الطول باستعمال التكرار النسبي، واستنباط استدلالات واستخلاص نتائج من هذه الرسوم، وتفسيرها.

السؤال الأساس

كيف تنشئ مدرّجًا تكراريًا وكيف تستعمله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج وتفسيرها ؟

المفهوم كثافة التكرار والمدرج التكراري

- **كثافة التكرار** لفئة ما هي ناتج قسمة تكرار الفئة على طولها.

$$\text{كثافة التكرار} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$$

- المدرّج التكراري الذي يمثّل جدولًا تكراريًا ذا فئات مختلفة الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، قاعدة كل عمود فيه تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي كثافة التكرار لهذه الفئة.

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 133

www.jnob-jo.com

مثال 1 المدرّج التكراري لفئات غير متساوية

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تلاحظ في جدول الكثافة التكرارية ؟
[أطوال الفئات غير متساوية.]

س: كيف نوجد أطوال هذه الفئات ؟
[نطرح الحد الأدنى للفئة من الحد الأعلى للفئة.]

س: ماذا تمثل الأعداد على المحور y ؟
[كثافة التكرار]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 المدرّج التكراري لفئات غير متساوية

يمثّل الجدول أدناه كتل طلاب الصف العاشر في إحدى المدارس بالكيلوجرام.

الفئات	56 - 60	60 - 62	62 - 68	68 - 76	76 - 78
التكرار f	4	10	18	8	4

A. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

يتم تكوين جدول الكثافة التكرارية بإضافة عمودي طول الفئة وكثافة التكرار.

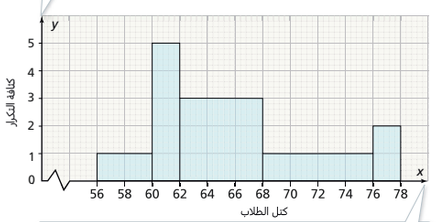
الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار = تكرار الفئة / طول هذه الفئة
56 - 60	4	4	$\frac{4}{4} = 1$
60 - 62	10	2	$\frac{10}{2} = 5$
62 - 68	18	6	$\frac{18}{6} = 3$
68 - 76	8	8	$\frac{8}{8} = 1$
76 - 78	4	2	$\frac{4}{2} = 2$

B. أنشئ المدرّج التكراري.

ارسم محورين متعامدين، بحيث يمثّل المحور الأفقي الفئات والمحور الرأسي كثافة التكرار، واختر تدريجًا مناسبًا على المحور الأفقي وتدريجًا مناسبًا على المحور الرأسي.

ارسم أعمدة المدرّج التكراري على أن تمثّل قاعدة كل عمود إحدى الفئات ويمثّل ارتفاعه كثافة التكرار لهذه الفئة.

يتم التدريج على المحور y بأعداد صحيحة متتالية تمثّل قيم كثافة التكرار في الجدول، تبدأ بالعدد 1 وتنتهي بالعدد 5 وذلك لأن قيم كثافة التكرار محصورة بين 0 و 6



يتم التدريج على المحور x ابتداء من الحد الأدنى للفئة الأولى (56) مع أعداد زوجية متتالية.

يتبع في الصفحة التالية

إرشاد
الفئة 60 - 56 تعني $56 \le x < 60$ لأنها بيانات متصلة.

تذكر
طول الفئة
= الحد الأعلى − الحد الأدنى
فمثلًا طول الفئة (60 - 56) يساوي
$60 - 56 = 4$

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 قد يجد الطلاب صعوبة في كتابة أطوال الفئات غير المتساوية على المحور x. لمساعدتهم في تخطي هذه الصعوبة اطرح عليهم الأسئلة التالية :
لنأخذ الفئات في المثال 1 و نجيب عن الأسئلة التالية :

س: ما الحد الأعلى للفئة 60 - 56 ؟ ما الحد الأدنى ؟
[60؛ 56]

س: ما الفرق بين الحدين بالنسبة للفئة 60 - 56 ؟
[$60 - 56 = 4$]

س: ماذا يمثل الفرق بين الحدين ؟
[طول الفئة]

س: أنشئ جدولًا للحد الأعلى والحد الأدنى وطول الفئة (الفرق بين الحدين) لجميع الفئات.

الفئة	الحد الأدنى	الحد الأعلى	طول الفئة (الفرق بين الحدين)
56 - 60	56	60	4
60 - 62	60	62	2
62 - 68	62	68	6
68 - 76	68	76	8
76 - 78	76	78	2

www.jnob-jo.com

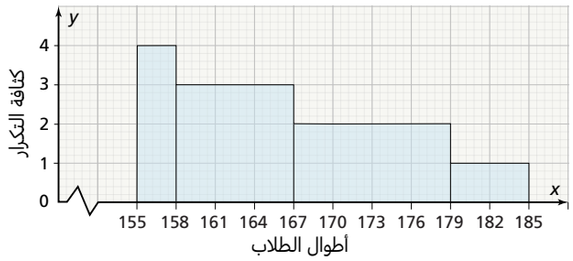
تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. جدول الكثافة التكرارية:

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
155 - 158	12	3	$\frac{12}{3} = 4$
158 - 167	27	9	$\frac{27}{9} = 3$
167 - 179	24	12	$\frac{24}{12} = 2$
179 - 185	6	6	$\frac{6}{6} = 1$

b. المدرج التكراري:



مثال 2 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرج التكراري

طرح أسئلة هادفة

س: ما صيغة مساحة المستطيل ؟
[مساحة المستطيل = الطول × العرض]

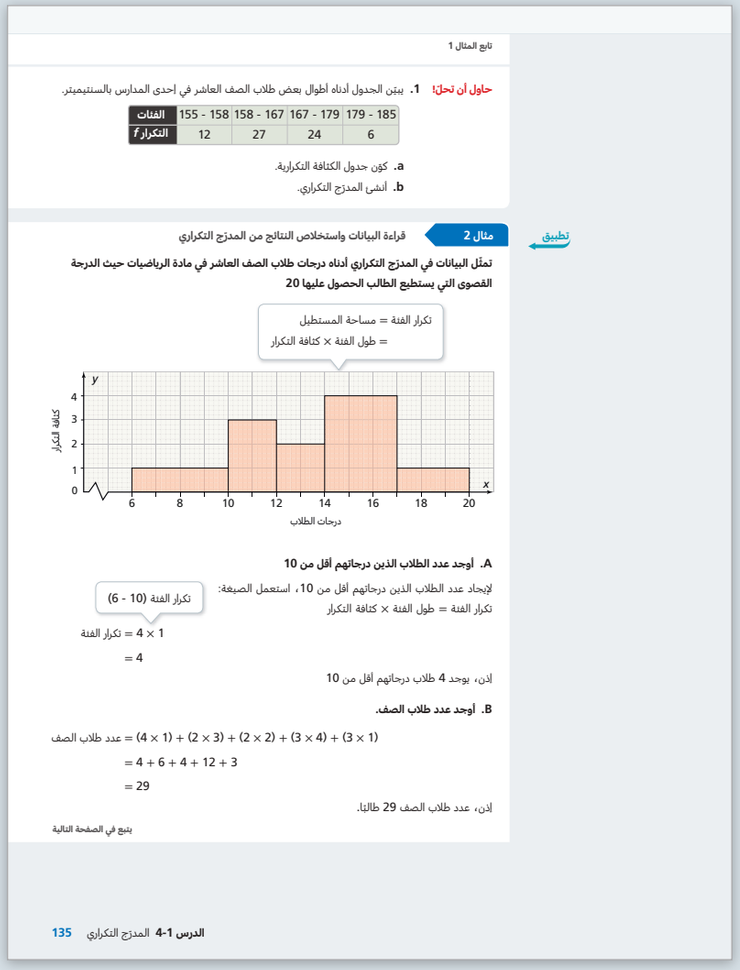
س: ما شكل كل عمود في المدرج التكراري ؟
[مستطيل، ويمثل ضلعه الأفقي طول الفئة، ويمثل ضلعه الرأسي كثافة تكرار الفئة.]

س: ما تكرار كل فئة ؟

الفئة	طول الفئة	تكرار الفئة
6 - 10	4	$4 \times 1 = 4$
10 - 12	2	$2 \times 3 = 6$
12 - 14	2	$2 \times 2 = 4$
14 - 17	3	$3 \times 4 = 12$
17 - 20	3	$3 \times 1 = 3$

س: ما المضاعف المشترك الأصغر لأطوال الفئات ؟
[العدد 1، لأن أطوال الفئات هي 2 و 3 و 4]

س: ما الهدف من استعمال المدرّج التكراري ؟
[قراءة البيانات واستخلاص نتائج كعدد الناجحين وعدد الراسبين، وعدد الطلاب في أعلى سلم ترتيب الدرجات، وعدد الطلاب في أسفل سلم ترتيب الدرجات.]



تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! **1.** يبيّن الجدول أدناه أطوال بعض طلاب الصف العاشر في إحدى المدارس بالسنتيميتر.

الفئات	155 - 158	158 - 167	167 - 179	179 - 185
التكرار f	12	27	24	6

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.
b. أنشئ المدرّج التكراري.

تطبيق

مثال 2 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري

تمثّل البيانات في المدرّج التكراري أدناه درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات حيث الدرجة القصوى التي يستطيع الطالب الحصول عليها 20

تكرار الفئة = مساحة المستطيل
= طول الفئة × كثافة التكرار

كثافة التكرار — درجات الطلاب

A. أوجد عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من 10

لإيجاد عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من 10، استعمل الصيغة:
تكرار الفئة = طول الفئة × كثافة التكرار

تكرار الفئة (6 - 10)

تكرار الفئة = 4 × 1
= 4

إذن، يوجد 4 طلاب درجاتهم أقل من 10

B. أوجد عدد طلاب الصف.

عدد طلاب الصف = (4 × 1) + (2 × 3) + (2 × 2) + (3 × 4) + (3 × 1)
= 4 + 6 + 4 + 12 + 3
= 29

إذن، عدد طلاب الصف 29 طالبًا.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 135

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. عدد الأعضاء الذين تقل أعمارهم عن 12 سنة : $2 \times 27 = 54$

b. عدد أعضاء النادي :

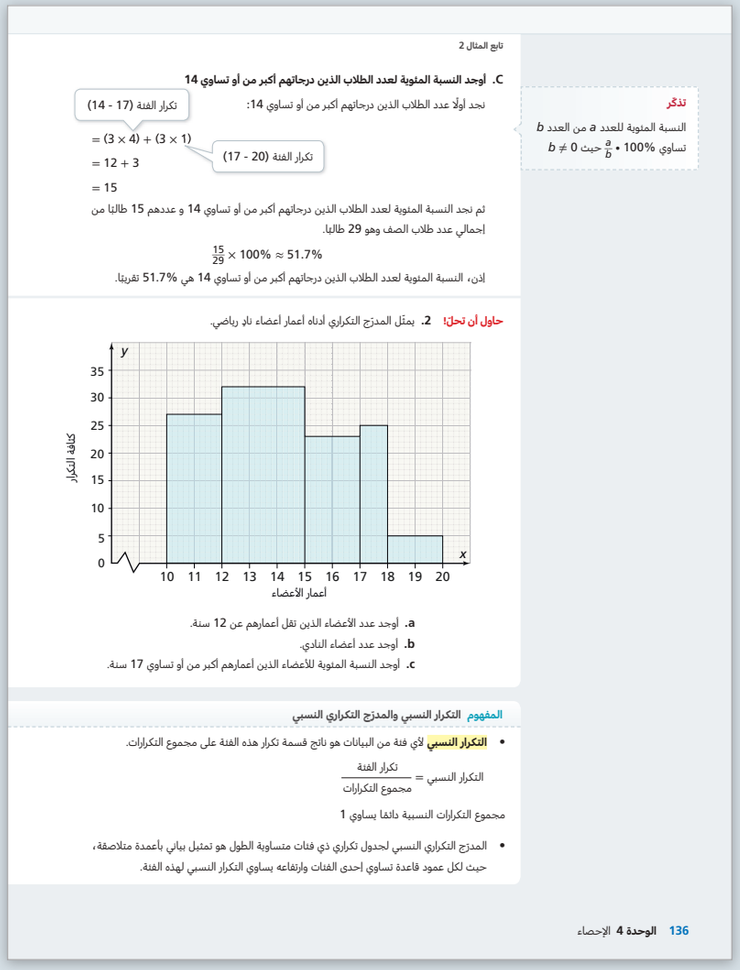
$(2 \times 27) + (3 \times 32) + (2 \times 23) + (1 \times 25) + (2 \times 5) = 231$

c. عدد أعضاء النادي الذين أعمارهم أكبر من أو تساوي 17 سنة :

$(1 \times 25) + (2 \times 5) = 35$

النسبة المئوية لهؤلاء الأعضاء :

$\frac{35}{231} \times 100\% = 15.\overline{15}\%$



تابع المثال 2

c. أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14

نجد أولًا عدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14:

تكرار الفئة (17 - 14)

$= (3 \times 4) + (3 \times 1)$

تكرار الفئة (20 - 17)

$= 12 + 3$

$= 15$

ثم نجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14 و عددهم 15 طالبًا من إجمالي عدد طلاب الصف وهو 29 طالبًا.

$\frac{15}{29} \times 100\% \approx 51.7\%$

إذن، النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14 هي 51.7% تقريبًا.

تذكّر

النسبة المئوية للعدد a من العدد b تساوي $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ حيث $b \neq 0$

حاول أن تحلّ! 2. يمثّل المدرّج التكراري أدناه أعمار أعضاء نادٍ رياضي.

a. أوجد عدد الأعضاء الذين تقل أعمارهم عن 12 سنة.

b. أوجد عدد أعضاء النادي.

c. أوجد النسبة المئوية للأعضاء الذين أعمارهم أكبر من أو تساوي 17 سنة.

المفهوم التكرار النسبي والمدرّج التكراري النسبي

- **التكرار النسبي** لأي فئة من البيانات هو ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على مجموع التكرارات.

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

مجموع التكرارات النسبية دائمًا يساوي 1

- المدرّج التكراري النسبي لجدول تكراري ذي فئات متساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي التكرار النسبي لهذه الفئة.

136 الوحدة 4 الإحصاء

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثالين 2 و 4

القراءة مستوى 1 اطلب من الطلاب التمعن في أسئلة وحلول الأجزاء A, B, C في المثالين 2 و 4 وسؤال الجزء D في المثال 4

في المثال (2)

س: ماذا يمثل كل عمود في المدرج التكراري ؟

[مستطيل، حيث إن قاعدته إحدى الفئات من درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات وارتفاعه كثافة التكرار المناظر لهذه الفئة.]

س: هل جميع الفئات متساوية الطول ؟ وضّح اجابتك.

[كلّا، الأطوال على الترتيب هي 4 , 2 , 2 , 3]

في المثال (4)

س: ماذا يمثل كل عمود في المدرج التكراري ؟

[مستطيل، حيث إن قاعدته إحدى الفئات من أوقات زيارة 200 شخص إلى محمية "خور العديد" وارتفاعه التكرار النسبي المناظر لهذه الفئة.]

س: هل جميع الفئات متساوية الطول ؟ وضّح اجابتك.

[نعم، طول كل فئة يساوي ساعة واحدة.]

الكتابة مستوى 2 **في المثال (2)** اطلب من الطلاب قراءة أسئلة الأجزاء A, B, C وكتابة تعريف كل مما يلي:

- كثافة التكرار
- مساحة المستطيل
- تكرار الفئة
- النسبة المئوية

ثم اطلب من الطلاب أن يرسم كل منهم في دفتره مدرجًا تكراريًا يتضمن بيانات تمثل موقفًا من واقع الحياة، مبينًا الفئات على المحور x وماذا تمثل، وكثافة التكرار على المحور y، ثم كتابة أسئلة مشابهة لأسئلة الأجزاء A, B, C والإجابة عنها.

في المثال (4) اطلب من الطلاب قراءة الأجزاء A, B, C, D وكتابة تعريف كل مما يلي:

- التكرار النسبي
- المدرج التكراري النسبي

ثم اطلب من كل طالب أن يرسم في دفتره مدرجًا تكراريًا يتضمن بيانات تمثل موقفًا من واقع الحياة، مبينًا الفئات على المحور x وماذا تمثل، ومبينًا التكرار النسبي على المحور y، ثم كتابة أسئلة مشابهة لأسئلة A, B, C, D والإجابة عنها.

التحدث مستوى 3 قسّم الطلاب إلى مجموعات صغيرة، واطلب منهم مناقشة كيفية قراءة البيانات، واستخلاص نتائج من المدرج التكراري والمدرج التكراري النسبي.

س: ما القاعدة التي تربط بين تكرار الفئة وطولها في المدرج التكراري ؟

[تكرار الفئة = طول الفئة × كثافة التكرار]

س: ما القاعدة التي تربط بين تكرار الفئة والتكرار النسبي في المدرج التكراري النسبي ؟

[تكرار الفئة = التكرار النسبي × مجموع التكرارات]

س: هل هناك فرق بين القاعدتين ؟ وضّح اجابتك.

[نعم، يساعد إيجاد تكرار كل فئة على إيجاد مجموع التكرارات، وذلك من خلال قراءة المدرج التكراري. بينما نستعمل في قراءة المدرج التكراري النسبي مجموع التكرارات لإيجاد تكرار كل فئة.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 المدرج التكراري النسبي

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تساوي نسبة عدد إلى عدد آخر ؟
[تساوي كسرًا عشريًّا يساوي قسمة ذلك العدد على العدد الآخر.]

س: ما هو التكرار النسبي ؟
[هو كسر عشري يساوي ناتج قسمة تكرار إحدى الفئات على مجموع التكرارات.]

س: ما أهمية معرفة مجموع التكرارات في المدرج التكراري النسبي ؟
[معرفة مجموع التكرارات تفيد في إيجاد نسبة تكرار كل فئة من الفئات المتساوية الطول.]

مثال 3 المدرج التكراري النسبي

تمثّل البيانات في الجدول أدناه أطوال 50 طالبًا إلى أقرب سنتمتر.

الفئات	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178
التكرار f	8	13	15	9	5

A. كوّن جدول التكرار النسبي.

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي = تكرار الفئة / مجموع التكرارات
158 - 162	8	0.16
162 - 166	13	0.26
166 - 170	15	0.30
170 - 174	9	0.18
174 - 178	5	0.10
للمجموع	50	1

$\frac{8}{50} = 0.16$

$\frac{13}{50} = 0.26$

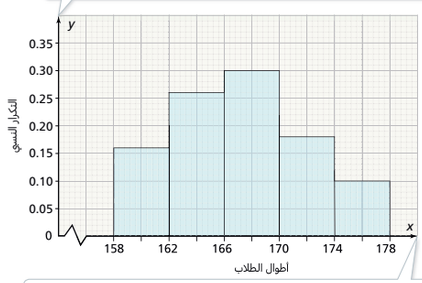
مجموع التكرارات النسبية دائمًا يساوي 1

مساعدة رياضيّة
يُستعمل التكرار النسبي في الجدول ذي الفئات المتساوية الطول.

B. مثّل البيانات باستعمال المدرّج التكراري النسبي.

ارسم محورين متعامدين بحيث يمثّل المحور الأفقي الفئات والمحور الرأسي التكرار النسبي، واختر تدريجًا مناسبًا على المحور الأفقي وتدريجًا مناسبًا على المحور الرأسي.
ارسم أعمدة المدرّج التكراري النسبي على أن تمثّل قاعدة كل عمود إحدى الفئات وبمثّل ارتفاعه التكرار النسبي لهذه الفئة.

لإيجاد التدريج على المحور y نختار كسورًا عشرية بما يناسب التكرارات النسبية في الجدول التكراري النسبي.



يتم التدريج على المحور x بحسب الأطوال المتساوية للفئات ابتداءً من الحد الأدنى للفئة الأولى (158) وينتهي عند الحد الأعلى للفئة الأخيرة (178)

يتبع في الصفحة التالية

www.jnob-jo.com

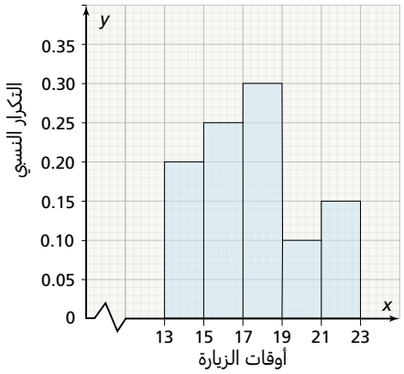
تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
13 - 15	40	$\frac{40}{200} = 0.2$
15 - 17	50	$\frac{50}{200} = 0.25$
17 - 19	60	$\frac{60}{200} = 0.3$
19 - 21	20	$\frac{20}{200} = 0.1$
21 - 23	30	$\frac{30}{200} = 0.15$
المجموع	200	1

b. المدرج التكراري النسبي :



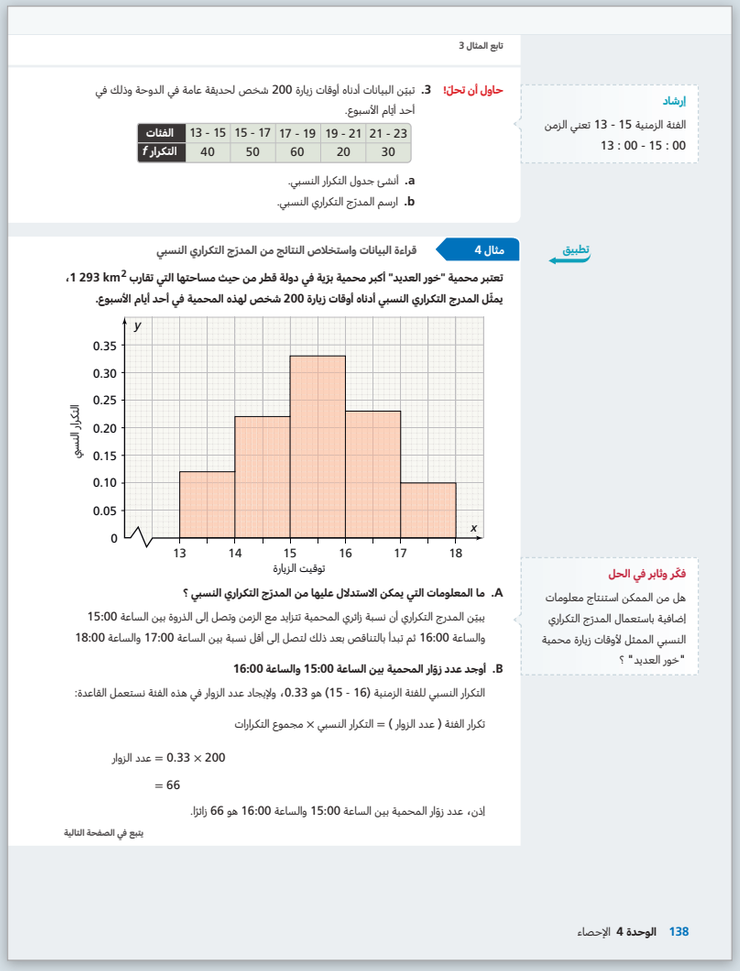
مثال 4 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري النسبي

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تمثل الكسور العشرية على المحور y ؟
[نسب تكرار كل فئة.]

س: كيف توجد تكرار كل فئة في المدرج التكراري النسبي ؟
[تكرار الفئة = التكرار النسبي × مجموع التكرارات.]

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري النسبي ؟
[يساعد المدرج التكراري النسبي على تكوين فكرة واضحة عن البيانات لإعطاء توصيات ونصائح أو لاتخاذ قرارات مناسبة.]



تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! **3.** تبيّن البيانات أدناه أوقات زيارة 200 شخص لحديقة عامة في الدوحة وذلك في أحد أيام الأسبوع.

الفئات	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23
التكرار f	40	50	60	20	30

a. أنشئ جدول التكرار النسبي.
b. ارسم المدرّج التكراري النسبي.

إرشاد
الفئة الزمنية 15 - 13 تعني الزمن 13 : 00 - 15 : 00

تطبيق

مثال 4 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري النسبي

تعتبر محمية "خور العديد" أكبر محمية بزية في دولة قطر من حيث مساحتها التي تقارب $1\,293\ km^2$، يمثّل المدرج التكراري النسبي أدناه أوقات زيارة 200 شخص لهذه المحمية في أحد أيام الأسبوع.

التكرار النسبي
توقيت الزيارة

A. ما المعلومات التي يمكن الاستدلال عليها من المدرّج التكراري النسبي ؟
يبيّن المدرج التكراري أن نسبة زائري المحمية تتزايد مع الزمن وتصل إلى الذروة بين الساعة 15:00 والساعة 16:00 ثم تبدأ بالتناقص بعد ذلك لتصل إلى أقل نسبة بين الساعة 17:00 والساعة 18:00

B. أوجد عدد زوّار المحمية بين الساعة 15:00 والساعة 16:00
التكرار النسبي للفئة الزمنية (16 - 15) هو 0.33، ولإيجاد عدد الزوار في هذه الفئة نستعمل القاعدة:
تكرار الفئة (عدد الزوار) = التكرار النسبي × مجموع التكرارات
عدد الزوار = 0.33 × 200
= 66
إذن، عدد زوّار المحمية بين الساعة 15:00 والساعة 16:00 هو 66 زائرا.

فكّر وناقش في الحل
هل من الممكن استنتاج معلومات إضافية باستعمال المدرّج التكراري النسبي الممثل لأوقات زيارة محمية "خور العديد" ؟

يتبع في الصفحة التالية

138 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

تابع المثال 4

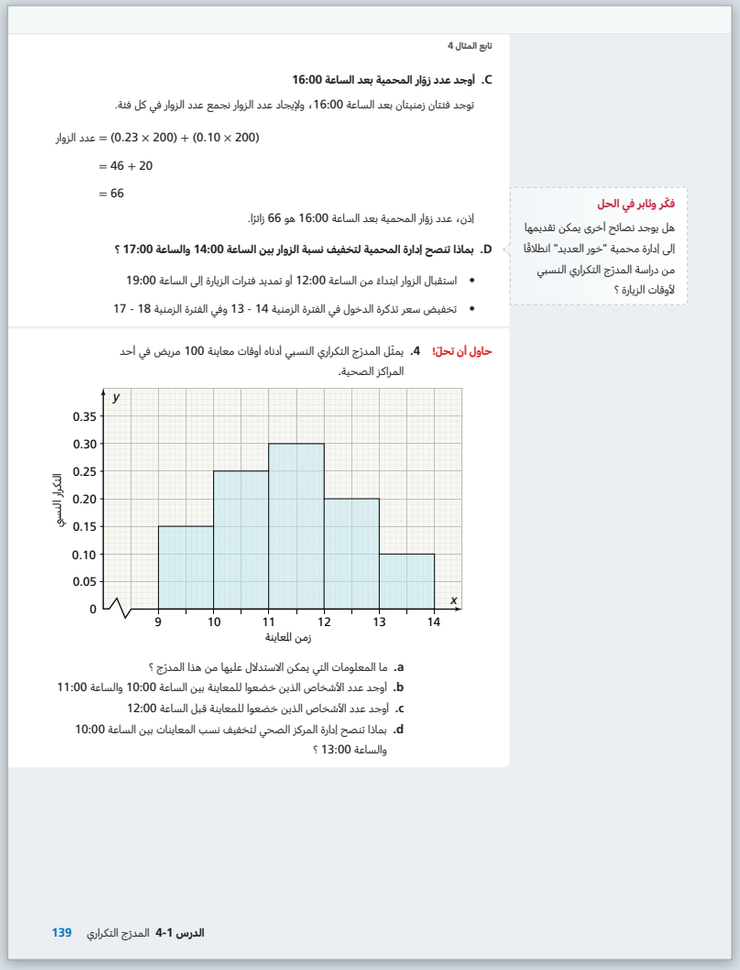
حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. يبيّن المدرج التكراري النسبي أن عدد المرضى يتزايد من الساعة 9 صباحًا حتى الساعة 12 ظهرًا، ويبدأ بالتناقص بعد ذلك.

b. $0.25 \times 100 = 25$

c. $0.15 \times 100 + 0.25 \times 100 + 0.30 \times 100 = 70$

d. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استقبال المرضى ابتداءً من الساعة 8:00 أو تمديد فترات استقبال المرضى إلى الساعة 15:00 ، أو تخفيض تعرفة المعاينة في الفترة الزمنية 10 - 9 وفي الفترة الزمنية 14 - 13



تابع المثال 4

C. أوجد عدد زوّار المحمية بعد الساعة 16:00

توجد فئتان زمنيتان بعد الساعة 16:00 ، ولإيجاد عدد الزوار نجمع عدد الزوار في كل فئة.

عدد الزوار $= (0.23 \times 200) + (0.10 \times 200)$

$= 46 + 20$

$= 66$

إذن، عدد زوار المحمية بعد الساعة 16:00 هو 66 زائرًا.

D. بماذا تنصح إدارة المحمية لتخفيف نسبة الزوار بين الساعة 14:00 والساعة 17:00 ؟

- استقبال الزوار ابتداءً من الساعة 12:00 أو تمديد فترات الزيارة إلى الساعة 19:00
- تخفيض سعر تذكرة الدخول في الفترة الزمنية 14 - 13 وفي الفترة الزمنية 18 - 17

فكّر وثابر في الحل

هل يوجد نصائح أخرى يمكن تقديمها إلى إدارة محمية "خور العديد" انطلاقًا من دراسة المدرّج التكراري النسبي لأوقات الزيارة ؟

حاول أن تحلّ! 4. يمثّل المدرّج التكراري النسبي أدناه أوقات معاينة 100 مريض في أحد المراكز الصحية.

a. ما المعلومات التي يمكن الاستدلال عليها من هذا المدرّج ؟

b. أوجد عدد الأشخاص الذين خضعوا للمعاينة بين الساعة 10:00 والساعة 11:00

c. أوجد عدد الأشخاص الذين خضعوا للمعاينة قبل الساعة 12:00

d. بماذا تنصح إدارة المركز الصحي لتخفيف نسب المعاينات بين الساعة 10:00 والساعة 13:00 ؟

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 139

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم المدرج التكراري

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري ؟

[استخلاص نتائج تتعلق بالبيانات المجمعة.]

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري النسبي ؟

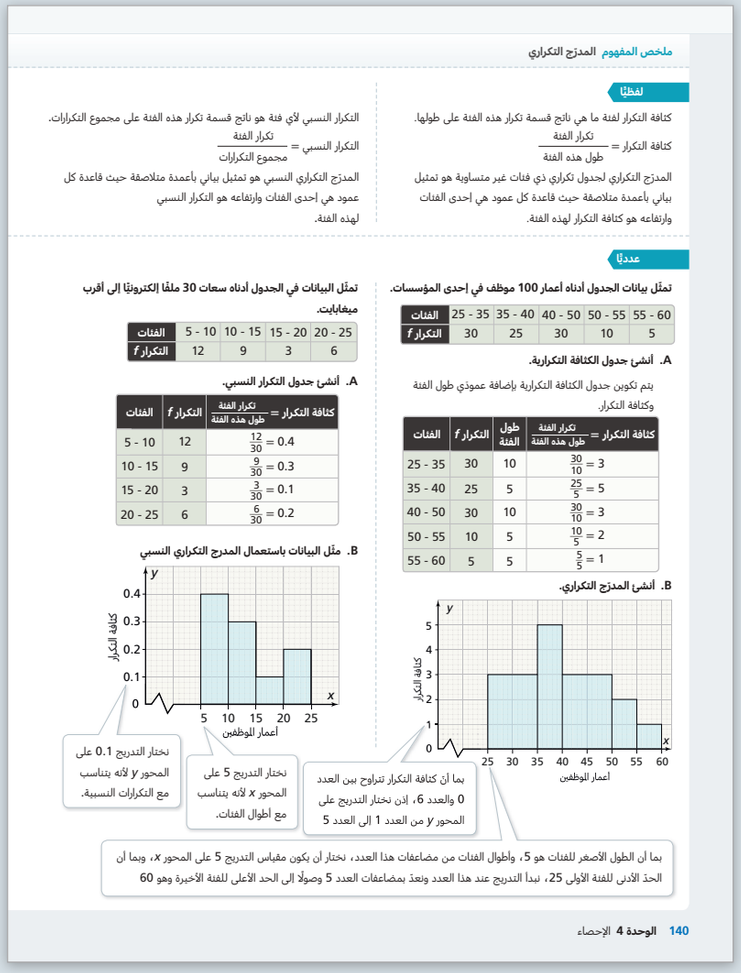
[استخلاص نتائج ومعلومات تساعد على اتخاذ القرارات وتقديم التوصيات.]

س: ما القاعدة التي تُستعمل لإنشاء المدرج التكراري ؟

[كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$]

س: ما القاعدة التي تُستعمل لإنشاء المدرج التكراري النسبي ؟

[التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$]



ملخص المفهوم المدرج التكراري

لفظيًا

كثافة التكرار لفئة ما هي ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على طولها.

كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$

المدرج التكراري لجدول تكراري ذي فئات غير متساوية هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة حيث قاعدة كل عمود هي إحدى الفئات وارتفاعه هو كثافة التكرار لهذه الفئة.

التكرار النسبي لأي فئة هو ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على مجموع التكرارات.

التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$

المدرج التكراري النسبي هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة حيث قاعدة كل عمود هي إحدى الفئات وارتفاعه هو التكرار النسبي لهذه الفئة.

عدديًا

تمثّل بيانات الجدول أدناه أعمار 100 موظف في إحدى المؤسسات.

الفئات	25 - 35	35 - 40	40 - 50	50 - 55	55 - 60
التكرار f	30	25	30	10	5

A. أنشئ جدول الكثافة التكرارية.

يتم تكوين جدول الكثافة التكرارية بإضافة عمودي طول الفئة وكثافة التكرار.

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
25 - 35	30	10	$\frac{30}{10} = 3$
35 - 40	25	5	$\frac{25}{5} = 5$
40 - 50	30	10	$\frac{30}{10} = 3$
50 - 55	10	5	$\frac{10}{5} = 2$
55 - 60	5	5	$\frac{5}{5} = 1$

B. أنشئ المدرّج التكراري.

بما أن كثافة التكرار تتراوح بين العدد 0 والعدد 6، إذن نختار التدريج على المحور y من العدد 1 إلى العدد 5

تمثّل البيانات في الجدول أدناه سعات 30 ملفًا إلكترونيًا إلى أقرب ميغابايت.

الفئات	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
التكرار f	12	9	3	6

A. أنشئ جدول التكرار النسبي.

الفئات	التكرار f	كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
5 - 10	12	$\frac{12}{30} = 0.4$
10 - 15	9	$\frac{9}{30} = 0.3$
15 - 20	3	$\frac{3}{30} = 0.1$
20 - 25	6	$\frac{6}{30} = 0.2$

B. مثّل البيانات باستعمال المدرج التكراري النسبي

نختار التدريج 0.1 على المحور y لأنه يتناسب مع التكرارات النسبية.

نختار التدريج 5 على المحور x لأنه يتناسب مع أطوال الفئات.

بما أن الطول الأصغر للفئات هو 5، وأطوال الفئات من مضاعفات هذا العدد، نختار أن يكون مقياس التدريج 5 على المحور x، وبما أن الحدّ الأدنى للفئة الأولى 25، نبدأ التدريج عند هذا العدد ونعدّ بمضاعفات العدد 5 وصولًا إلى الحد الأعلى للفئة الأخيرة وهو 60

140 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

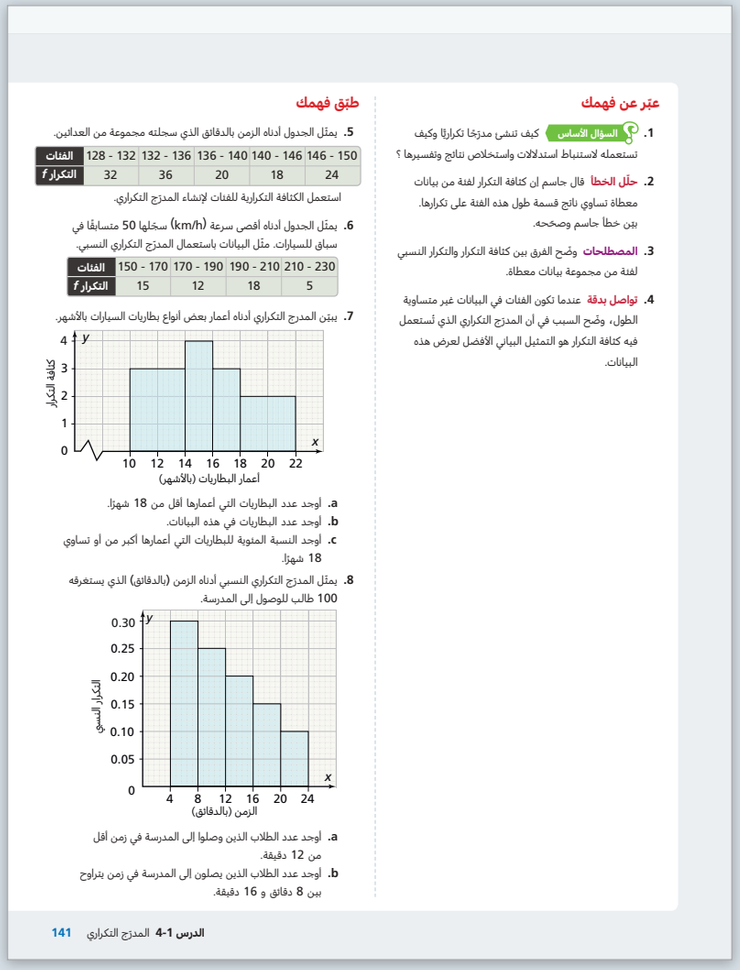
عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 5 قد يخطئ الطلاب في إيجاد كثافة التكرار فيوجدون ناتج قسمة تكرار كل فئة على طول الفئة الأولى. ذكّر الطلاب أنه يجب عليهم ملاحظة طول كل فئة، والحرص على دقة استعمال القاعدة التالية: كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$.

التمرين 6 قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكرار النسبي لكل فئة فيوجدون ناتج قسمة طول الفئة على تكرار هذه الفئة. ذكر الطلاب أن قاعدة التكرار النسبي هي :

التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$



عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تنشئ مدرّجًا تكراريًا وكيف تستعمله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج وتفسيرها ؟
2. حلّل الخطأ قال جاسم إن كثافة التكرار لفئة من بيانات معطاة تساوي ناتج قسمة طول هذه الفئة على تكرارها. بيّن خطأ جاسم وصححه.
3. المصطلحات وضّح الفرق بين كثافة التكرار والتكرار النسبي لفئة من مجموعة بيانات معطاة.
4. تواصل بدقة عندما تكون الفئات في البيانات غير متساوية الطول، وضّح السبب في أن المدرج التكراري الذي تُستعمل فيه كثافة التكرار هو التمثيل البياني الأفضل لعرض هذه البيانات.

طبّق فهمك

5. يمثّل الجدول أدناه الزمن بالدقائق الذي سجلته مجموعة من العدائين.

الفئات	128 - 132	132 - 136	136 - 140	140 - 146	146 - 150
التكرار f	32	36	20	18	24

استعمل الكثافة التكرارية للفئات لإنشاء المدرّج التكراري.

6. يمثّل الجدول أدناه أقصى سرعة (km/h) سجّلها 50 متسابقًا في سباق للسيارات. مثّل البيانات باستعمال المدرّج التكراري النسبي.

الفئات	150 - 170	170 - 190	190 - 210	210 - 230
التكرار f	15	12	18	5

7. يبيّن المدرج التكراري أدناه أعمار بعض أنواع بطاريات السيارات بالأشهر.

a. أوجد عدد البطاريات التي أعمارها أقل من 18 شهرًا.
b. أوجد عدد البطاريات في هذه البيانات.
c. أوجد النسبة المئوية للبطاريات التي أعمارها أكبر من أو تساوي 18 شهرًا.

8. يمثّل المدرج التكراري النسبي أدناه الزمن (بالدقائق) الذي يستغرقه 100 طالب للوصول إلى المدرسة.

a. أوجد عدد الطلاب الذين وصلوا إلى المدرسة في زمن أقل من 12 دقيقة.
b. أوجد عدد الطلاب الذين يصلون إلى المدرسة في زمن يتراوح بين 8 دقائق و 16 دقيقة.

الدرس 1-4 المدرج التكراري 141

الإجابات

1. إذا كانت الفئات غير متساوية، نمثل البيانات في المدرج التكراري باستعمال القاعدة :
كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$. لكن إذا كانت الفئات متساوية الطول، عندها نمثل البيانات في المدرج التكراري النسبي باستعمال القاعدة :
التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
في الحالتين يجب أن نقرأ أعمدة المدرج التي تمثل البيانات جيدًا لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج يساعدنا تفسيرها على اتخاذ القرارات وتقديم النصائح والتوصيات.

2. استعمل جاسم القاعدة بطريقة معكوسة، والصحيح أن كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$

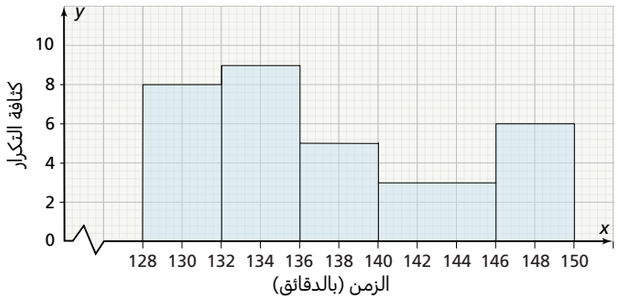
3. في البيانات التي فئاتها غير متساوية الطول نستعمل القاعدة :
كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$، وذلك لإنشاء مدرج تكراري، بحيث نكتب الأعداد المناظرة لكثافة التكرار على المحور y. أما في البيانات التي فئاتها متساوية الطول فنستعمل القاعدة: التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$، وذلك لإنشاء مدرج تكراري نسبي، بحيث تكون الأعداد المناظرة لكثافة التكرار أعدادًا صحيحة موجبة، والأعداد المناظرة للتكرار النسبي كسورًا عشرية موجبة.

4. تساعد قاعدة كثافة التكرار على إيجاد مجموع التكرارات إذا كان لدينا مدرج تكراري يمثل بيانات معطاة فئاتها غير متساوية الطول، وذلك باستعمال القاعدة :
تكرار الفئة = كثافة التكرار × طول هذه الفئة.
كما يمكن إيجاد مجموع تكرارات لعدد من الفئات واستخلاص النسبة المئوية لهذه التكرارات. أما إذا كانت الفئات متساوية الطول ولدينا مجموع التكرارات، فإن المدرج التكراري النسبي هو الأفضل لتمثيل هذه البيانات.

5. أنشئ جدول كثافة التكرار :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
128 - 132	32	4	8
132 - 136	36	4	9
136 - 140	20	4	5
140 - 146	18	6	3
146 - 150	24	4	6

المدرج التكراري :



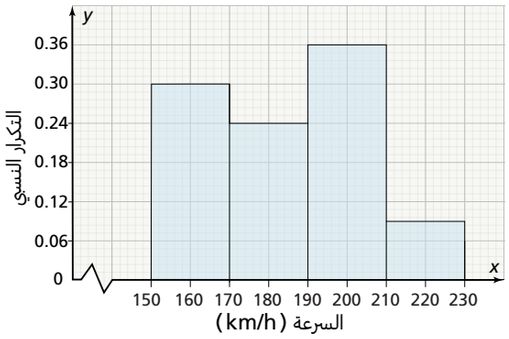
www.jnob-jo.com

الإجابات

6. أنشئ جدول كثافة التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
150 - 170	15	$\frac{15}{50} = 0.3$
170 - 190	12	$\frac{12}{50} = 0.24$
190 - 210	18	$\frac{18}{50} = 0.36$
210 - 230	5	$\frac{5}{50} = 0.1$
المجموع	50	1

المدرج التكراري النسبي :



7. **a.** عدد البطاريات التي أعمارها أقل من 18 شهرًا :

$(4 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 3) = 12 + 8 + 6 = 26$

b. العدد الكلي للبطاريات :

$(4 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 3) + (4 \times 2) = 12 + 8 + 6 + 8 = 34$

c. عدد البطاريات التي أعمارها أكبر من أو تساوي 18 شهرًا :

$4 \times 2 = 8$

النسبة المئوية : $\frac{8}{34} \times 100\% \approx 23.53\%$

8. **a.** عدد الطلاب الذين وصلوا إلى المدرسة في أقل من 12 دقيقة :

$(0.3 \times 100) + (0.25 \times 100) = 30 + 25 = 55$

b. عدد الطلاب الذين يصلون إلى المدرسة في زمن يتراوح بين 8 دقائق و 16 دقيقة :

$(0.25 \times 100) + (0.2 \times 100) = 25 + 20 = 45$

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-20	9-20

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	9, 13	1
	20	3
2	14	2
	17	3
3	12, 15	1
	10, 11	2
4	16	2
	18, 19	3

الإجابات

9. a. جدول الكثافة التكرارية

الفئات	كثافة التكرار	طول الفئة	التكرار f
24 - 26	7	2	14
26 - 30	5	4	20
30 - 32	3	2	6
32 - 36	4	4	16
36 - 38	2	2	4

b. عدد الموظفين في المؤسسة :

$14 + 20 + 6 + 16 + 4 = 60$

10. استعمل علي قاعدة غير صحيحة لإيجاد التكرار النسبي، فقد أوجد ناتج قسمة طول الفئة على تكرار هذه الفئة.

الإجابة الصحيحة هي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي = $\frac{\text{التكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
160 - 165	50	$\frac{50}{95} \approx 0.53$
165 - 170	25	$\frac{25}{95} \approx 0.26$
170 - 175	20	$\frac{20}{95} \approx 0.21$
المجموع	95	1

11. a. مجموع التكرارات النسبية يساوي 1،

$0.35 + 0.30 + 0.25 + x = 1$

$x = 0.1$

b. ليكن z مجموع عدد الطلاب :

$0.25z = 20$

$z = 80$

إذن، مجموع عدد الطلاب هو 80

c. $28 + 24 + 20 + y = 80$

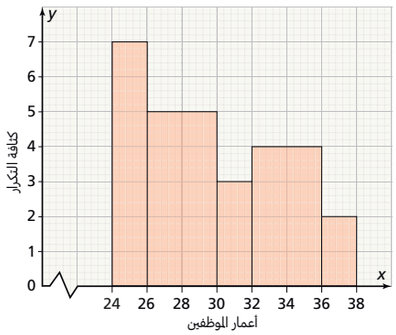
$y = 8$

إذن، تكرار الفئة 65 - 60 هو 8

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

9. فكّر وثابر في الحل يمثّل المدرّج التكراري أدناه أعمار موظفي إحدى المؤسسات.



a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أوجد عدد الموظفين في المؤسسة.

10. حلّل الخطأ يبيّن الجدول أدناه أطوال مجموعة من الأشخاص بالسنتمتر.

الفئات	160 - 165	165 - 170	170 - 175
التكرار f	50	25	20

كوّن الجدول التكراري النسبي. حلّ علي السؤال بإكمال الجدول وإيجاد التكرار النسبي لكل فئة كما يلي:

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
160 - 165	50	$\frac{5}{50} = 0.1$
165 - 170	25	$\frac{5}{25} = 0.2$
170 - 175	20	$\frac{5}{20} = 0.25$

✗

بيّن خطأ علي وصححه.

11. روابط في الرياضيات يبيّن الجدول أدناه فئات الكتل والتكرار والتكرار النسبي لمجموعة من الطلبة بالكيلوجرام حيث y يمثّل تكرار الفئة 65 - 60 و x يمثّل تكرارها النسبي.

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
45 - 50	28	0.35
50 - 55	24	0.30
55 - 60	20	0.25
60 - 65	y	x

a. أوجد قيمة x

b. أوجد مجموع عدد الطلبة.

c. أوجد تكرار الفئة 65 - 60

12. تواصل بدقة يبيّن الجدول أدناه كتل 100 ثمرة تفاح بالجرام.

الفئات	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
التكرار f	25	35	25	15

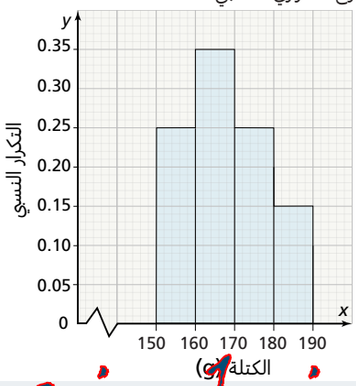
a. كوّن جدول التكرار النسبي.

b. أنشئ المدرّج التكراري النسبي.

12. a. جدول التكرار النسبي

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
150 - 160	25	$\frac{25}{100} = 0.25$
160 - 170	35	$\frac{35}{100} = 0.35$
170 - 180	25	$\frac{25}{100} = 0.25$
180 - 190	15	$\frac{15}{100} = 0.15$
المجموع	100	1

b. المدرج التكراري النسبي



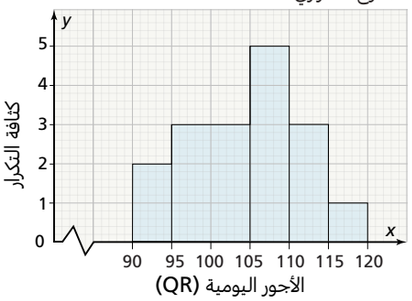
www.jnob-jo.com

الإجابات

13. **a.** جدول الكثافة التكرارية

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
90 - 95	10	5	$\frac{10}{5} = 2$
95 - 105	30	10	$\frac{30}{10} = 3$
105 - 110	25	5	$\frac{25}{5} = 5$
110 - 115	15	5	$\frac{15}{5} = 3$
115 - 120	5	5	$\frac{5}{5} = 1$

b. المدرج التكراري



14. **a.** عدد الأشخاص الذين تبرعوا بمبلغ أقل من QR 380:

$(10 \times 2) + (20 \times 7) = 20 + 140$

$= 160$

b. العدد الإجمالي للأشخاص :

$(10 \times 2) + (20 \times 7) + (10 \times 4)$

$= 20 + 140 + 40$

$= 200$

c. عدد الأشخاص الذين تبرعوا بمبلغ أكبر من QR 360

$(20 \times 7) + (10 \times 4)$

$= 140 + 40$

$= 180$

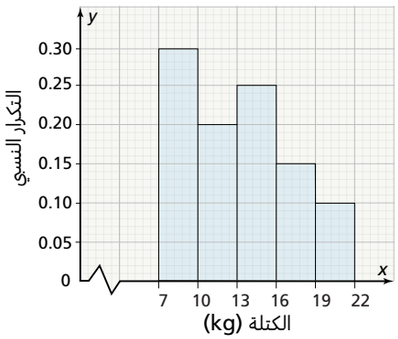
النسبة المئوية:

$\frac{180}{200} \times 100\% = 90\%$

15. **a.** جدول التكرار النسبي

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
7 - 10	18	$\frac{18}{60} = 0.30$
10 - 13	12	$\frac{12}{60} = 0.20$
13 - 16	15	$\frac{15}{60} = 0.25$
16 - 19	9	$\frac{9}{60} = 0.15$
19 - 22	6	$\frac{6}{60} = 0.10$
المجموع	60	1

b. المدرج التكراري النسبي



16. **a.** يبيّن المدرج التكراري النسبي أن أكثرية الأطفال تتراوح أطوالهم بين 30 cm و 48 cm

ويقل تكرار الفئات التي بين 24 cm و 30 cm والتي بين 48 cm و 54 cm

b. عدد الأطفال في الفئة (36 - 30) :

$60 \times 0.30 = 18$

عدد الأطفال في الفئة (42 - 36) :

$60 \times 0.25 = 15$

عدد الأطفال في الفئة (48 - 42) :

$60 \times 0.30 = 18$

c. عدد الأطفال الذين أطوالهم أقل من 36 cm :

$60 \times 0.1 + 60 \times 0.3 = 24$

تدرَّب وحُل مسائل

تدرَّب

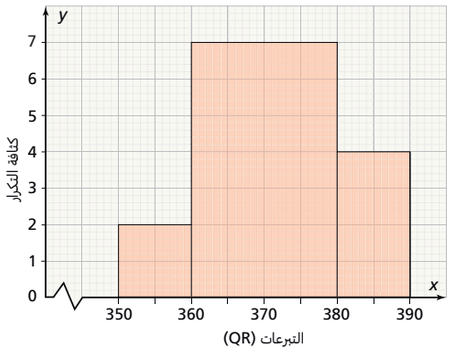
13. تمثّل البيانات في الجدول أدناه الأجور اليومية للعمال في أحد المصانع بالريال القطري. انظر المثال 1

الفئات	90 - 95	95 - 105	105 - 110	110 - 115	115 - 120
التكرار f	10	30	25	15	5

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشئ المدرج التكراري.

14. تمثّل البيانات في المدرج التكراري أدناه المبالغ بالريال القطري التي تبرّع بها عدد من الأشخاص لصالح مؤسسة اجتماعية. انظر المثال 2



a. أوجد عدد الأشخاص الذين تبرّعوا بمبلغ أقل من QR 380.

b. أوجد العدد الإجمالي للأشخاص الذين ساهموا بالتبرّعات.

c. أوجد النسبة المئوية للمتبرعين الذين قدموا مبالغ أكبر من QR 360.

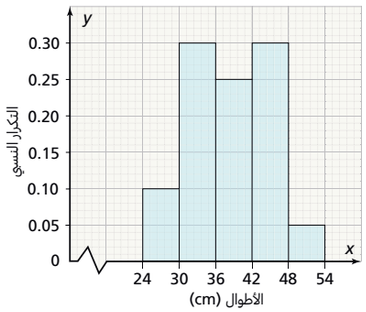
15. تمثّل البيانات في الجدول أدناه كتل 60 طفلًا (بالكيلوجرامات). انظر المثال 3

الفئات	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19	19 - 22
التكرار f	18	12	15	9	6

a. كوّن الجدول التكراري النسبي.

b. أنشئ المدرج التكراري النسبي.

16. يمثّل المدرّج التكراري النسبي أدناه أطوال 60 طفلًا حديثي الولادة في شهر واحد في أحد المستشفيات إلى أقرب سنتمتر. انظر المثال 4



a. ما المعلومات التي تستطيع الاستدلال عليها من المدرّج التكراري النسبي ؟

b. أوجد عدد الأطفال في كل من الفئات التالية:

42 - 48, 36 - 42, 30 - 36

c. أوجد عدد الأطفال الذين أطوالهم أقل من 36 cm

www.jnob-jo.com

الإجابات

17. **a.** عدد الأشخاص الذين تقع كتلهم في الفئة 66 - 70 :

$4 \times 4 = 16$

b. عدد الأشخاص الذين كتلهم أكبر من أو تساوي 66 kg :

$(4 \times 4) + (4 \times 2)$

$= 16 + 8$

$= 24$

c. 70-74 ؛ 8

d. عدد الأشخاص الذين كتلهم أقل من 70 kg :

$(4 \times 3) + (2 \times 6) + (4 \times 4)$

$= 12 + 12 + 16$

$= 40$

العدد الإجمالي للأشخاص :

$(4 \times 3) + (2 \times 6) + (4 \times 4) + (4 \times 2)$

$= 12 + 12 + 16 + 8$

$= 48$

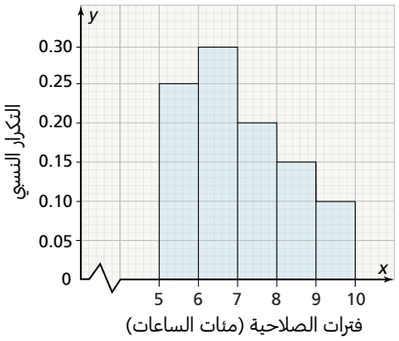
النسبة المئوية : $\frac{40}{48} \times 100\% = 83.\overline{3}\%$

إذن، كلام إدارة النادي صحيح.

18. **a.** جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
5 - 6	30	$\frac{30}{120} = 0.25$
6 - 7	36	$\frac{36}{120} = 0.30$
7 - 8	24	$\frac{24}{120} = 0.20$
8 - 9	18	$\frac{18}{120} = 0.15$
9 - 10	12	$\frac{12}{120} = 0.10$
المجموع	120	1

المدرج التكراري النسبي :



b. نسبة الأنابيب التي أعمارها أكبر من أو تساوي 700 ساعة :

$0.2 + 0.15 + 0.1 = 0.45$

النسبة المئوية : $0.45 \times 100\% = 45\%$

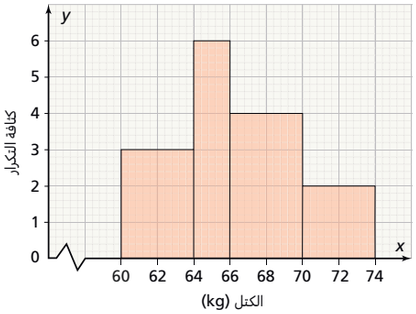
هذه النسبة المئوية أصغر من 50%،

لذا، لا أوافق على ادعاء صاحب المصنع.

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

17. **بزر منطقيًا** يعرض المدرّج التكراري أدناه كتل عدد من الأشخاص في أحد نوادي اللياقة البدنية، بعد خضوعهم لبرنامج تخفيض الكتلة.



a. ما عدد الأشخاص الذين تقع كتلهم في الفئة 66 - 70 ؟ وضّح إجابتك.

b. ما عدد الأشخاص الذين كتلهم أكبر من أو تساوي 66 kg ؟ وضّح إجابتك.

c. أي فئة كتلها الأقل تكرارًا ؟ أوجد التكرار لهذه الفئة.

d. تقول إدارة النادي إن نسبة المشتركين في البرنامج الذين أصبحت كتلهم أقل من 70 kg تساوي أكثر من 80%، تحقق من صحة الادعاء.

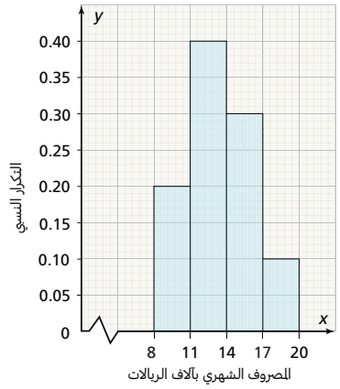
18. **ابن الحجج الرياضية** يبيّن الجدول أدناه مدة صلاحية 120 أنبوبًا إلكترونيًا بمئات الساعات تم اختبارها في أحد المصانع.

الفئات	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10
التكرار f	30	36	24	18	12

a. ارسم المدرّج التكراري النسبي.

b. يدعي صاحب المصنع إن النسبة المئوية للأنابيب التي أعمارها أكبر من أو تساوي 700 ساعة تزيد عن 50% هل توافق على هذا الادعاء ؟ وضّح إجابتك.

19. **فكّر وثابر في الحل** يعرض المدرج التكراري النسبي أدناه معدّل المصروف الشهري (بآلاف الريالات القطرية) لأربعين عائلة في دولة قطر. استعمل المدرج التكراري النسبي للإجابة عن الأسئلة الآتية:



a. ما المعلومات التي يمكن استنتاجها من المدرج التكراري النسبي ؟

b. أوجد عدد العائلات التي مصروفها الشهري يقع في الفئة 11 - 14

c. أوجد عدد العائلات التي مصروفها الشهري أقل من أو يساوي 14 000 QR.

d. أوجد النسبة المئوية للعائلات التي معدل مصروفها الشهري أكثر من أو يساوي 11 000 QR.

e. أي فئة نسبة معدل المصروف الشهري فيها هي الأصغر ؟ أوجد التكرار لهذه الفئة.

20. **مهارات التفكير العليا** يبيّن الجدول التكراري أدناه زمن انتظار 100 زبون بالدقائق أمام صندوق المحاسبة في أحد المتاجر.

الفئات	0 - 4	4 - 10	10 - 12	12 - 16	16 - 18
التكرار f	24	30	22	16	8

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشىء المدرّج التكراري.

c. أعد كتابة الجدول التكراري باستعمال فئات غير متساوية الطول. ثم ارسم مدرجًا تكراريًا يمثّل الجدول التكراري الجديد.

144 الوحدة 4 الإحصاء

19. **a.** بالنظر إلى الأعمدة في المدرج التكراري النسبي نلاحظ أن أكبر نسبة من عدد العائلات، وهي 0.40، يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين 11000 QR و 14 000 QR.

ثم تتناقص هذه النسبة لنجد أن 0.10 من عدد العائلات يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين 17 000 QR و 20 000 QR.

نلاحظ أيضًا أن النسبة الأكبر من عدد العائلات وهي $0.30 + 0.40 = 0.70$ يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين 11 000 QR و 17 000 QR

b. عدد العائلات التي يقع معدّل مصروفها الشهري في الفئة 11 - 14 هو : $0.40 \times 40 = 16$

www.jnob-jo.com

الإجابات

تابع السؤال 19

c. عدد العائلات التي معدّل مصروفها الشهري أقل من أو يساوي QR 14 000 :

$(0.40 \times 40) + (0.20 \times 40)$

$= 16 + 8$

$= 24$

d. نسبة العائلات التي معدّل مصروفها الشهري أكثر من QR 11 000 :

$0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8$

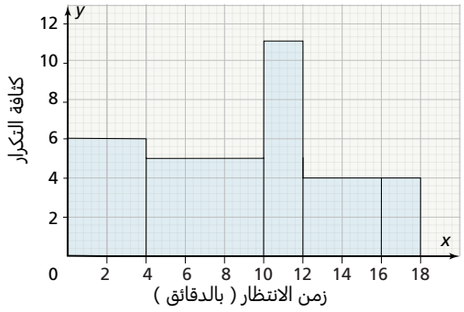
النسبة المئوية : $0.8 \times 100\% = 80\%$

e. الفئة 17-20 ؛ نسبتها 0.1 وعدد العائلات فيها يساوي $0.10 \times 40 = 4$ وهو تكرار هذه الفئة.

20. a. جدول الكثافة التكرارية :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
0 - 4	24	4	$\frac{24}{4} = 6$
4 - 10	30	6	$\frac{30}{6} = 5$
10 - 12	22	2	$\frac{22}{2} = 11$
12 - 16	16	4	$\frac{16}{4} = 4$
16 - 18	8	2	$\frac{8}{2} = 4$

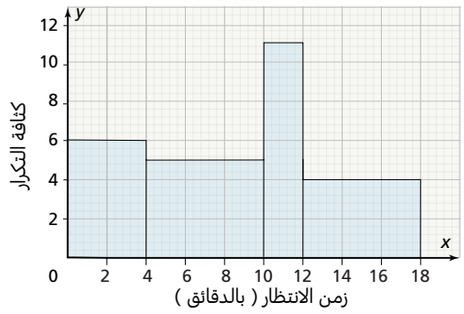
b. المدرج التكراري



c. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
0 - 4	24	4	$\frac{24}{4} = 6$
4 - 10	30	6	$\frac{30}{6} = 5$
10 - 12	22	2	$\frac{22}{2} = 11$
12 - 18	24	6	$\frac{24}{6} = 4$

المدرج التكراري الجديد :



www.jnob-jo.com

الإجابات

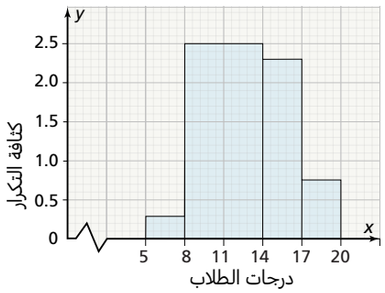
21. C

23. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

الجزء A الجدول التكراري :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
5 - 8	1	3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$
8 - 14	15	6	$\frac{15}{6} = 2.5$
14 - 17	7	3	$\frac{7}{3} = 2.\overline{3}$
17 - 20	4	3	$\frac{4}{3} = 0.75$

الجزء B



تدرَّب وحُل مسائل

تدرَّب على اختبار

21. إذا كانت كثافة التكرار للفئة 14 - 10 تساوي 3 فإن تكرار هذه الفئة يساوي:

A. 3 **B.** 4

C. 12 **D.** 14

22. **اختبار SAT/ACT** في جدول تكراري نسبي مجموع تكراراته 40، إذا كان التكرار النسبي لفئة يساوي 0.25 فإن تكرار هذه الفئة يساوي:

Ⓐ 6 Ⓑ 10

Ⓒ 40 Ⓓ 160

23. **مهمة أدائية** في ما يلي درجات 27 طالبًا في اختبار درجته العظمى 20:

7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12,
13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19

الجزء A نظم هذه الدرجات في جدول تكراري مكوّن من 4 فئات غير متساوية الطول، على أن تكون من مضاعفات العدد 3

الجزء B مثّل هذه البيانات باستعمال المدرّج التكراري.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

الدرس 4-2
مقاييس النزعة المركزية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ حساب مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) لجدول تكراري بسيط.

الفهم الأساس

يحسب الطلاب الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط، ويستعملون مفهوم الوسط الحسابي لمقارنة جدولين تكراريين بسيطين. كما يحسب الطلاب المنوال والوسيط لجدول تكراري بسيط.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من :

- حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة من البيانات.
- إنشاء جدول تكراري.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- حساب الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$
- استعمال الوسط الحسابي لمقارنة جدولين تكراريين واستخلاص نتائج.
- حساب الوسيط لجدول تكراري بسيط، حيث عدد التكرارات (n) فردي، بإيجاد رتبة الوسيط باستعمال الصيغة $\frac{n+1}{2}$
- حساب الوسيط لجدول تكراري بسيط، حيث عدد التكرارات (n) زوجي، بإيجاد الوسط الحسابي للقيمتين اللتين رتبتهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$
- حساب المنوال لجدول تكراري بسيط، حيث يمثل المنوال القيمة أو القيم الأكثر شيوعًا أو الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أن استعمال تكرارات البيانات يجعل عملية حساب مقاييس النزعة المركزية أسهل.
- يدرك الطلاب أن مقاييس النزعة المركزية تستعمل لتمثيل البيانات بقيمة محددة تميل إليها جميع البيانات.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **جدول تكراري بسيط** | *simple frequency table*

المصطلحات الجديدة

- **الوسط الحسابي** | *mean*
- **الوسيط** | *median*
- **المنوال** | *mode*

نشاط المصطلحات

تعلم الطلاب سابقًا كيفية حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة من البيانات، وتعلموا كذلك كيفية إنشاء جدول تكراري.

قدّم للطلاب مصطلح "جدول تكراري بسيط" الذي يبين تكرار كل قيمة من قيم البيانات. اكتب البيانات التالية على السبورة :

70, 80, 80, 65, 70, 65, 70, 70, 80, 85

تمثل هذه البيانات درجات 10 طلاب في مادة الرياضيات.

اطلب من الطلاب ملء الجدول التكراري التالي بهذه البيانات :

التكرار	الدرجة

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار :

9.8.3 يحسب مقاييس النزعة المركزية لجداول تكرارية بسيطة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًّا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب التبرير المنطقي ومقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) لمقارنة مجموعتين من البيانات تمثلان موقفين من واقع الحياة لاستخلاص نتائج وتحديد مجموعة البيانات التي تمثّل الموقف الحياتي بشكل أفضل. كما يستعمل الطلاب التبرير المنطقي لتحديد كيف تتأثر مقاييس النزعة المركزية عند إضافة قيم جديدة إلى مجموعة بيانات.

www.jnob-jo.com

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة لتحليل ونقد الطرائق الملائمة لتحديد كيفية إيجاد الوسط الحسابي لقيم مفردة من بيانات معطاة. يساعدهم ذلك على اختيار العمليات الحسابية الأفضل لإيجاد الإجابة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما البيانات المعطاة، وماذا تمثل ؟
[درجات طلاب أحد الصفوف في مادة الرياضيات، حيث الدرجة العظمى 100، وهي بيانات متقطعة أو منفصلة.]

س: كيف يمكنك إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لهذه الدرجات ؟
[بحساب ناتج قسمة مجموع درجات الطلاب على عدد الطلاب، وهي القاعدة الأساس لإيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل استعمل عبد الله وخالد نفس القاعدة لإيجاد الوسط الحسابي ؟
[نعم، لقد استعملا نفس القاعدة، لكنهما أجريا العمليات الحسابية بطريقتين مختلفتين.]

س: كيف تختلف طريقة خالد في إجراء العمليات الحسابية عن طريقة عبد الله ؟
[استعمل خالد عملية الجمع المتكرر بين الأعداد المتساوية وربطها بعملية الضرب بدلًا من عملية الجمع التي استعملها عبد الله، كالتالي :
$70 + 70 + 70 = 3 \times 70$ و $75 + 75 + 75 + 75 = 4 \times 75$
وأخيرًا، $80 + 80 + 80 = 3 \times 80$]

س: هل حصلا على نفس النتيجة ؟
[نعم. الوسط الحسابي في الحالتين يساوي 75]

س: لماذا استعمل خالد عملية الضرب ؟
[لاحظ خالد أن الدرجة 70 تتكرر 3 مرات والدرجة 75 تتكرر 4 مرات والدرجة 80 تتكرر 3 مرات.]

س: هل مفهوم التكرار الذي استعمله خالد جعل حساب الوسط الحسابي أسهل ؟
[نعم]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل هناك طريقة أخرى لحساب الوسط الحسابي لهذه الدرجات غير طريقتي عبد الله وخالد ؟
[نعم، باستعمال مضاعفات العدد 10 حيث $75 + 75 = 150$

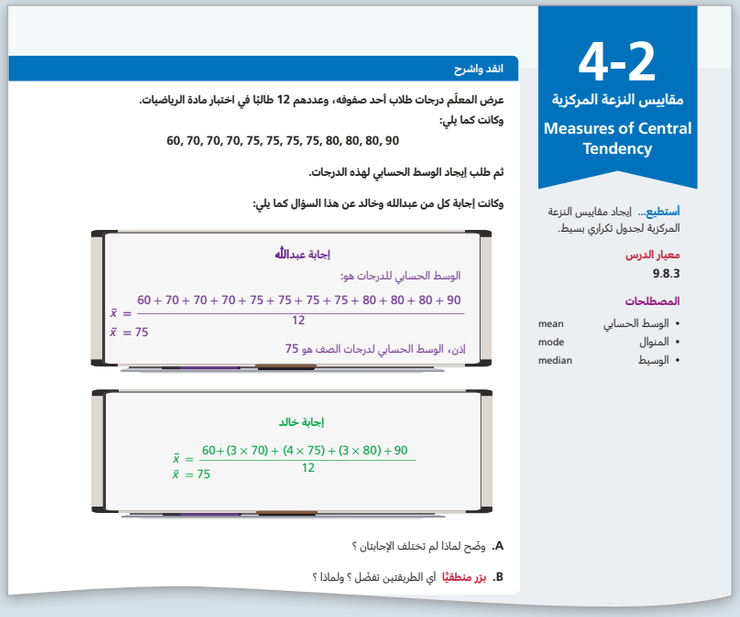
$$\bar{x} = \frac{10(6 + 3 \times 7 + 2 \times 15 + 3 \times 8 + 9)}{12} = \frac{10(6 + 21 + 30 + 24 + 9)}{12}$$
$$= \frac{10 \times 90}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يمكن دائمًا استعمال طريقة خالد، أي استعمال عملية الجمع المتكرر بين الأعداد المتساوية، لإيجاد الوسط الحسابي لأعداد معطاة ؟
[لا، فليس بالضرورة أن تكون الأعداد المعطاة في البيانات مكونة من مجموعات جزئية لأعداد متساوية، إذ يمكن أن تكون جميعها أعدادًا مختلفة بعضها عن بعض.]

كتاب الطالب، صفحة 146



4-2
مقاييس النزعة المركزية
Measures of Central Tendency

أستطيع... إيجاد مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط.

معيار الدرس
9.8.3

المصطلحات
- الوسط الحسابي mean
- المنوال mode
- الوسيط median

انقد واشرح

عرض المعلّم درجات طلاب أحد صفوفه، وعددهم 12 طالبًا في اختبار مادة الرياضيات.
وكانت كما يلي:
60, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 80, 80, 80, 90

ثم طلب إيجاد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

وكانت إجابة كل من عبدالله وخالد عن هذا السؤال كما يلي:

إجابة عبدالله
الوسط الحسابي للدرجات هو:
$$\bar{x} = \frac{60 + 70 + 70 + 70 + 75 + 75 + 75 + 75 + 80 + 80 + 80 + 90}{12}$$
$$\bar{x} = 75$$
إذن، الوسط الحسابي لدرجات الصف هو 75

إجابة خالد
$$\bar{x} = \frac{60 + (3 \times 70) + (4 \times 75) + (3 \times 80) + 90}{12}$$
$$\bar{x} = 75$$

A. وضّح لماذا لم تختلف الإجابتان ؟

B. **برر منطقيًا** أي الطريقتين تفضّل ؟ ولماذا ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. لقد استعمل خالد وعبد الله نفس القاعدة لإيجاد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب، فكلاهما قسم مجموع درجات الطلاب على عدد الطلاب، لذا، حصلا على نفس النتيجة وهي 75 درجة، لكن المختلف في طريقة خالد هو أنه ربط عملية الجمع المتكررة للأعداد المتساوية بعملية الضرب وذلك عند جمع الدرجات في بسط الكسر.

B. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : طريقة خالد لأنها أسرع من طريقة عبد الله، فهي تختصر العمليات الحسابية.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

تعلم الطلاب سابقًا كيفية تجميع البيانات وفرزها باستعمال جداول تكرارية وتمثيلها بيانيًّا لقراءتها ومقارنتها ودراسة التباين بينها. يتعرّف الطلاب في هذا الدرس على مقاييس النزعة المركزية التي تساعدهم على تحليل البيانات واتخاذ قرارات مناسبة وصحيحة إلى حد ما، وهي :

الوسط الحسابي، ويستعمل مؤشرًا لقيم البيانات صعودًا نحو القيمة العظمى أو نزولًا نحو القيمة الصغرى،

و**المنوال**، ويستعمل مؤشرًا للقيم الأكثر تكرارًا في البيانات،

الوسيط الذي يشير إلى القيمة التي تقسم قيم البيانات إلى فئتين متساويتين في العدد بعد ترتيب قيم البيانات تصاعديًّا أو تنازليًّا.

السؤال الأساس: كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط ؟

مقياس **النزعة المركزية** لمجموعة بيانات هو قيمة تتجمّع حولها قيم البيانات. وتُستعمل مقاييس **النزعة المركزية**، وهي أكثر من مقياس واحد، لتحليل بيانات إحصائية وإعطاء فكرة بسيطة عنها، كإيجاد متوسط الرواتب في شركة ما (**الوسط الحسابي**) أو السلعة الأكثر مبيعًا (**المنوال**) أو السن الذي يقسم النزلاء في أحد الفنادق إلى فئتين متساويتين في العدد بعد ترتيب الأعمار تصاعديًّا أو تنازليًّا. (**الوسيط**)

المفهوم **الوسط الحسابي - لجدول تكراري بسيط**

لفظيًّا: الوسط الحسابي ($\bar{x}$) هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.

بالرموز: $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

حيث:

x: قيم البيانات

f: التكرار

إرشاد: يُستعمل الرمز $\sum$ للتعبير عن المجموع.

انتبه! $x\sum f \neq \sum(x \cdot f)$

146 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

مثال 1 الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا يمثل الجدول التكراري ؟

[يمثّل العمود الأيسر العمر x لكل طالب من الطلاب المشاركين في أولمبياد الرياضيات، ويمثّل العمود الأيمن التكرار f لكل عمر من أعمار الطلاب.]

س: ماذا تعني كلمة "تكرار" ؟

[تشير كلمة "تكرار" إلى عدد الطلاب الذين لهم نفس العمر.]

س: متى يستعمل الرمز $\sum$ ؟

[$\sum(x \cdot f)$ هو مجموع نواتج ضرب القيم في تكراراتها.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. أنشئ جدولًا تكراريًا مع إضافة $(x \cdot f)$

الطول x (cm)	التكرار f	$x \cdot f$
160	3	480
165	6	990
168	5	840
170	4	680
المجموع	18	2990

الوسط الحسابي لأطوال الطلاب : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{2990}{18} \approx 166$

إذن، الوسط الحسابي لأطوال الطلاب يساوي 166 cm تقريبًا.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب و استعماله

س: كيف نوجد الوسط الحسابي لهذه الأطول ؟

[نقوم بعملية ضرب طول كل فئة بتكرارها، ثم نجمع نواتج الضرب هذه، ونقسمها على عدد الطلاب.]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط

يمثّل الجدول المجاور أعمار طلاب مشاركين في أولمبياد الرياضيات.

أوجد الوسط الحسابي لهذه الأعمار.

العمر x	التكرار f
14	4
15	6
16	5
17	2

الخطوة 1 بناءً على صيغة الوسط الحسابي أكمل الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$ يبيّن ناتج ضرب كل قيمة (العمر) في تكراره.

العمر x	التكرار f	$x \cdot f$
14	4	56
15	6	90
16	5	80
17	2	34
المجموع	17	260

14×4

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{260}{17}$

بسّط ≈ 15.3

إذن، الوسط الحسابي لأعمار الطلاب المشاركين في أولمبياد الرياضيات يساوي 15.3 سنة تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 1. يمثّل الجدول المجاور أطوال طلاب الصف العاشر بالسنتمتر في إحدى المدارس.

أوجد الوسط الحسابي لهذه الأطوال.

الطول (cm)	التكرار f
160	3
165	6
168	5
170	4

الدرس 2-4 مقاييس النزعة المركزية 147

www.jnob-jo.com

مثال 2 مقارنة جدولين تكراريين

طرح أسئلة هادفة

س: ما أهمية استعمال الوسط الحسابي ومتى نحتاج إليه ؟
[إذا كان لدينا جدولان تكراريان أو أكثر نحتاج إلى إيجاد الوسط الحسابي لكل جدول ومقارنتهما ببعضهما البعض لمقارنة قيم البيانات واتخاذ القرارات المناسبة.]

س: لماذا الوسط الحسابي هو المقياس المناسب للمقارنة بين الشعبتين ؟
[لأنه لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات لذلك من الأفضل هنا استعمال الوسط الحسابي و لأن الوسط الحسابي لكل شعبة يمثل درجات الطلاب لهذه الشعبة، وبالتالي فإن الشعبة التي يكون الوسط الحسابي لدرجات طلابها أكبر، تكون درجات طلابها أفضل.]

تطبيق **مثال 2** مقارنة جدولين تكراريين

يمثّل الجدولان التكراريان أدناه درجات طلاب الصف التاسع في الشعبتين A و B. يريد المعلّم منح جائزة للشعبة التي معدّل درجاتها أكبر.

أوجد الوسط الحسابي للدرجات في كل شعبة ثم استنتج قرار المعلّم.

الشعبة A

الدرجة x	التكرار f
5	3
6	7
7	5
8	3
9	2

الشعبة B

الدرجة x	التكرار f
5	2
6	4
7	5
8	3
9	6

ضَع ◀ أعد كتابة كل جدول بإضافة عمود ثالث ($x \cdot f$) والذي يبيّن ناتج ضرب كل درجة في تكرارها.

الشعبة A

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
5	3	15
6	7	42
7	5	35
8	3	24
9	2	18
المجموع	20	134

الشعبة B

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
5	2	10
6	4	24
7	5	35
8	3	24
9	6	54
المجموع	20	147

احسب ◀ أوجد الوسط الحسابي للدرجات في كل شعبة.

الوسط الحسابي للشعبة A

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{134}{20} = 6.7$$

الوسط الحسابي للشعبة B

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{147}{20} = 7.35$$

فسّر ◀ بما أن الوسط الحسابي (المعدل) لدرجات الشعبة B يساوي 7.35 وهو أكبر من الوسط الحسابي لدرجات الشعبة A والذي يساوي 6.7، إذن، سيمنح المعلّم الجائزة لطلاب الشعبة B.

يتبع في الصفحة التالية

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثالين 2 و 3

القراءة **مستوى 1** اطلب من الطلاب قراءة السؤال في المثال 2

س: ما معنى " معدّل " الدرجات ؟ [يُستعمل " معدل " الدرجات أحيانًا بدلًا من " الوسط الحسابي " للدرجات.]

س: ما الذي سوف يعتمده المعلم لتحديد الشعبة التي يمنحها الجائزة ؟ [مقارنة الوسط الحسابي لدرجات الطلاب لتحديد القيمة الأكبر واتخاذ القرار المناسب.]

اطلب من الطلاب قراءة الأسئلة في المثال 3

س: ما معنى كل من " التكرار الأكبر " و " الأكثر تكرارًا " ؟
[التكرار الأكبر تعني القيمة الأكبر في عمود التكرارات، والأكثر تكرارًا تعني القيمة التي تقابل التكرار الأكبر أو أكبر تكرار.]

س: كيف تجد وسيط البيانات الذي يتضمن عددًا فرديًا n من القيم ؟ [إذا كان عدد القيم n فرديًا، فإن الوسيط يساوي القيمة التي تقابل الرتبة $\frac{n+1}{2}$. إذا كان عدد القيم n زوجيًا، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين لهما الرتبتان $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$]

الكتابة **مستوى 2** اطلب من الطلاب قراءة المثالين 2 و 3 ثم اكتب تعريفًا لكل ما يلي :

- الوسط الحسابي
- المنوال
- الوسيط

اعرض جدولًا تكراريًا يبيّن قيمًا من بيانات محددة x والتكرار f المقابل لكل x وناتج الضرب $x \cdot f$ ، ثم أوجد الوسط الحسابي والمنوال والوسيط لهذه البيانات.

التحدث **مستوى 3** اطلب من الطلاب العمل ضمن مجموعات صغيرة لمناقشة الفرق بين الوسط الحسابي والوسيط لقيم بيانات معطاة.

س: هل يمثّل الوسط الحسابي قيمة يقل عنها 50% من قيم البيانات ؟ أعطِ مثالًا لتبرير إجابتك.
[لا؛ الوسط الحسابي بصورة عامة لا يمثل قيمة يقل عنها 50% من قيم البيانات. مثال على ذلك : 1, 3, 4, 5, 6 هي بيانات وسطها الحسابي يساوي 4
يوجد عددان أصغر من 4 والنسبة المئوية لهما $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$ وهي نسبة أقل من 50%]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. أنشئ جدولًا تكراريًّا مع إضافة $(x \cdot f)$ لكل جدول.

جدول فيصل

العدد x	التكرار f	$x \cdot f$
1	3	3
2	1	2
3	3	9
4	3	12
5	4	20
6	6	36
المجموع	20	82

الوسط الحسابي لرميات فيصل : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{82}{20} = 4.1$

جدول سعيد

العدد x	التكرار f	$x \cdot f$
1	2	2
2	3	6
3	5	15
4	4	16
5	4	20
6	2	12
المجموع	20	71

الوسط الحسابي لرميات سعيد : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{71}{20} = 3.55$

بما أن : $4.1 > 3.55$، إذن، فيصل هو الفائز في هذه المباراة.

مثال 3 الوسيط والمنوال لجدول تكراري بسيط

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تجد المنوال من جدول تكراري بسيط ؟

[من قراءة عمود التكرار f. القيمة التي تقابل التكرار الأكبر هي المنوال.]

س: هل لبعض البيانات أكثر من منوال ؟

[نعم، إذا وجدت في جدول تكراري f أعداد متساوية وأكبر من بقية الأعداد، فإن كل قيمة من قيم البيانات التي تقابل عددًا من هذه الأعداد تعد منوالًا.]

س: هل يمكن أن لا يكون هناك منوال لبعض البيانات ؟

[نعم. عندما تكون جميع التكرارات أعدادًا متساوية.]

س: كيف تجد الوسيط لبيانات معطاة تتضمن n من القيم ؟

[أولًا رتّب البيانات في الجدول تصاعديًّا أو تنازليًّا، وسوف نعتمد هنا الترتيب التصاعدي، ثم أوجد التكرار التراكمي التصاعدي عن طريق إضافة كل تكرار من الجدول التكراري إلى مجموع القيم السابقة. إذا كان n عددًا فرديًّا، تكون رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ ، ويكون الوسيط القيمة المقابلة لهذه الرتبة الواقعة في عمود التكرار التراكمي. وإذا كان n عددًا زوجيًّا، يكون الوسيط الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين للتكرارين التراكميين $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$.]

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! **2.** اشترك كل من فيصل وسعيد في مباراة لرمي مكعّب مرقّم من 1 إلى 6 عشرين مرة وتم تسجيل النتائج في الجدولين أدناه. تقتضي قواعد اللعبة بأن يفوز اللاعب الذي يحصل على وسط حسابي أكبر بجائزة. أوجد الوسط الحسابي لنتائج كل من فيصل وسعيد وقرّر من سيكون الفائز.

جدول فيصل

العدد x	التكرار f
1	3
2	1
3	3
4	3
5	4
6	6

جدول سعيد

العدد x	التكرار f
1	2
2	3
3	5
4	4
5	4
6	2

المفهوم الوسيط- المنوال

المنوال هو القيمة أو القيم الأكثر شيوعًا أو تكرارًا في مجموعة البيانات.

الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.

لتحديد الوسيط في جدول تكراري بسيط يتم احتساب مجموع التكرارات $(\sum f)$:

إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًّا n، فإن الوسيط يساوي القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًّا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$

إرشاد الوسيط هو القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

تطبيق

مثال 3 الوسيط والمنوال لجدول تكراري بسيط

A. كتب عادل 57 كلمة يتراوح عدد أحرفها من 3 إلى 6 حروف، وقد سجّلها في الجدول المجاور. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

عدد أحرف الكلمة	التكرار f
3	12
4	16
5	17
6	12

الخطوة 1 أوجد المنوال.

بما أن المنوال هو القيمة التي لها التكرار الأكبر، فإن المنوال هو القيمة 5 لأن لها التكرار الأكبر وهو 17

الخطوة 2 أوجد الوسيط.

بما أن عدد القيم 57 وهو عدد فردي فإن رتبة الوسيط هي

$$\frac{n+1}{2} = \frac{57+1}{2} = 29$$

أي إن الوسيط هو طول الكلمة التي تقابل الرتبة 29، وبما أنه عند الرتبة 29 طول الكلمة 5 أحرف، إذن، الوسيط يساوي 5

يتبع في الصفحة التالية

إرشاد إذا كانت جميع القيم لها نفس التكرار فإنه لا يوجد منوال.

الدرس 4-2 مقاييس النزعة المركزية 149

www.jnob-jo.com

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. نستنتج من الجدول أن المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار، وهو العدد 14، وبالتالي فإن المنوال يساوي 3 kg

مجموع التكرارات يساوي 51 وهو عدد فردي.

لإيجاد الوسيط أنشئ جدول التكرار التراكمي التصاعدي :

الكتلة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
2.5	11	11
3	14	25
3.5	13	38
4	13	51

بما أن مجموع التكرارات يساوي 51 وهو عدد فردي، تكون رتبة الوسيط : $\frac{(51+1)}{2}$ = 26 . يقع التكرار التراكمي 26 بين التكرارين التراكميين 25 و 38، إذن يكون الوسيط القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 38 أي 3.5 kg

إذن، الوسيط يساوي 3.5 kg

b. نستنتج من الجدول أن المنوال هو القيمة المقابلة للعدد 18 لأنه التكرار الأكبر. وبالتالي فإن المنوال يساوي 20 صفحة.

لإيجاد الوسيط أنشئ جدول التكرار التراكمي التصاعدي :

عدد الصفحات x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
15	12	12
20	18	30
25	16	46
30	14	60

بما أن مجموع التكرارات يساوي 60 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{60}{2}$ = 30 من الجدول التكراري التراكمي وهي 20، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{60}{2}$ + 1 = 31 والتي تقع بين التكرارين التراكميين 30 و 46 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 25 لأنها تقابل التكرار التراكمي 46، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 20 و 25 : $\frac{(25 + 20)}{2}$ = 22.5.

إذن، الوسيط يساوي 22.5 صفحة.

تابع المثال 3

B. يمثّل الجدول التالي أطوال 54 قلم تلوين لأقرب سنتمتر. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

الطول x	التكرار f
6	13
8	14
10	14
12	13

الخطوة 1 أوجد المنوال.

لاحظ من الجدول أن الطولين 8 و 10 لهما نفس التكرار 14 وهو الأكبر.

وهكذا فإن لهذا الجدول منوالين وهما 8 و 10

الخطوة 2 بما أن عدد القيم 54 وهو عدد زوجي، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}$ + 1 ، أي متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما 27 و 28، بما أنه في الرتبة 27 طول القلم 8 cm وفي الرتبة 28 طول القلم 10 cm، فإن، الوسيط يساوي الوسط الحسابي للطولين 8 cm و 10 cm:

الوسيط = $\frac{8 + 10}{2}$

= $\frac{18}{2}$

= 9

إذن، الوسيط يساوي 9 cm

حاول أن تحلّ! 3. a. يمثّل الجدول المجاور كتل 51 طفلًا حديثي الولادة لأقرب كيلوجرام. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

الكتلة x	التكرار f
2.5	11
3	14
3.5	13
4	13

b. يمثّل الجدول المجاور عدد صفحات 60 قصة قصيرة. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

عدد الصفحات x	تكرار f
15	12
20	18
25	16
30	14

150 الوحدة 4 الإحصاء

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 قد يجد الطلاب صعوبة في تحديد المنوال أو الوسيط لبيانات معطاة في جدول تكراري بسيط. لمساعدتهم على تخطّي هذه الصعوبة، اعرض أمامهم المثال التالي :

الطول (cm)	التكرار f
166	3
168	5
172	6
178	2

أوجد المنوال والوسيط للبيانات المعطاة في الجدول التكراري البسيط الذي يبيّن أطوال بعض الطلاب مقربةً إلى أقرب سنتمتر.

س: كيف تجد المنوال لهذه البيانات ؟ [التكرار الأكبر في الجدول هو 6 ويقابل الطول 172 cm، إذن، المنوال هو 172 cm]

س: كيف تجد الوسيط لهذه البيانات ؟ [نرتب أولًا هذه البيانات تصاعديًا أو تنازليًا. على سبيل المثال، نرتبها تصاعديا كما يلي :

166, 166, 166, 168, 168, 168, 168, 168, 172, 172, 172, 172, 172, 172, 178, 178

عدد القيم يساوي 16 وهو عدد زوجي.

- القيمة المقابلة للرتبة $\frac{16}{2}$ = 8 تساوي 168 cm
- القيمة المقابلة للرتبة $\frac{16}{2}$ + 1 = 9 تساوي 172 cm

$\frac{168 + 172}{2}$ = 170 . إذن، وسيط أطوال الطلاب يساوي 170 cm

وضّح للطلاب أن المنوال والوسيط عددان في قيم البيانات لا في التكرارات.]

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم مقاييس النزعة المركزية

س: متى نحتاج إلى إيجاد مقاييس النزعة المركزية لبيانات معطاة في جداول تكرارية بسيطة ؟

[عندما نكون بحاجة إلى تحليل هذه البيانات ومقارنتها لاتخاذ قرارات محددة.]

خطأ شائع

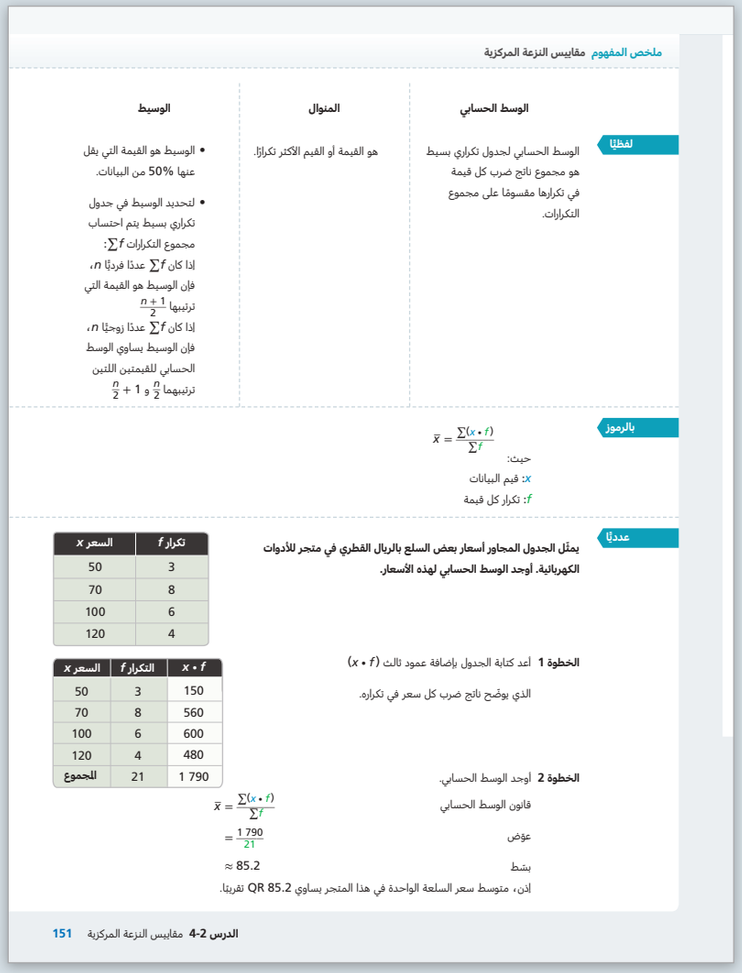
a. قد يخطئ الطلاب في إيجاد الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط فلا يكملون الجدول بإضافة العمود $(x \cdot f)$ لإيجاد $\sum(x \cdot f)$ و $\sum f$ ثم استعمال القانون : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$ بل باستعمال القانون $\bar{x} = \frac{\sum x}{\sum f}$.

أرشدهم إلى ضرورة إكمال الجدول بإضافة العمود الذي يتضمن $(x \cdot f)$.

b. قد يخطئ الطلاب في إيجاد الوسيط فيعتقدون أن رتبة الوسيط هي قيمته.

اعرض أمامهم أمثلة بسيطة على بيانات مرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا، واطلب منهم إيجاد رتبة الوسيط والقيمة المقابلة لهذه الرتبة في البيانات.

c. أخبر الطلاب أن المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار في البيانات، وليس قيمة التكرار الأكبر.



ملخص المفهوم مقاييس النزعة المركزية

لفظيًا

الوسط الحسابي	المنوال	الوسيط
الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.	هو القيمة أو القيم الأكثر تكرارًا.	• الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات. • لتحديد الوسيط في جدول تكراري بسيط يتم احتساب مجموع التكرارات $\sum f$: إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًا n، فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$

بالرموز

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$$

حيث:

x: قيم البيانات

f: تكرار كل قيمة

عدديًا

يمثّل الجدول المجاور أسعار بعض السلع بالريال القطري في متجر للأدوات الكهربائية. أوجد الوسط الحسابي لهذه الأسعار.

السعر x	تكرار f
50	3
70	8
100	6
120	4

الخطوة 1 أعد كتابة الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$ الذي يوضّح ناتج ضرب كل سعر في تكراره.

السعر x	التكرار f	$x \cdot f$
50	3	150
70	8	560
100	6	600
120	4	480
المجموع	21	1 790

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{1\,790}{21}$

بسّط ≈ 85.2

إذن، متوسط سعر السلعة الواحدة في هذا المتجر يساوي QR 85.2 تقريبًا.

الدرس 2-4 مقاييس النزعة المركزية 151

www.jnob-jo.com

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

الإجابات

1. الوسط الحسابي هو $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$ حيث يمثل x قيم البيانات، ويمثل f التكرار، ويمثل $\sum(x \cdot f)$ مجموع نواتج ضرب x في f، و يمثل $\sum f$ مجموع التكرارات.
المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار في مجموعة البيانات.
الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة $\frac{n+1}{2}$ في الجدول التكراري التراكمي التصاعدي في مجموعة البيانات إذا كان مجموع التكرارات n عددًا فرديًا، ويساوي الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين للرتبتين $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$ في الجدول التكراري التراكمي التصاعدي إذا كان مجموع التكرارات عددًا زوجيًا.

2. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
6	2	12
9	3	27
15	3	45
18	2	36
المجموع	10	120

في الجدول أعلاه،

- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{120}{10} = 12$

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
6	2	2
9	3	5
15	3	8
18	2	10

- بما أن مجموع التكرارات يساوي 10 وهو عدد زوجي، نحسب أولًا $\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$ والقيمة المقابلة للتكرار 5 في الجدول التكراري التراكمي تساوي 9

ثم نحسب $\frac{n}{2} + 1 = 6$ ، والقيمة المقابلة للتكرار 6 في الجدول التكراري التراكمي تساوي 15

فيكون الوسيط : $\frac{9+15}{2} = 12$

إذن، الوسيط يساوي 12

ومنه: الوسط الحسابي = الوسيط = 12

3. لنأخذ الجدول التكراري التالي :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
x_1	f_1	$x_1 \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 \cdot f_x$
•	•	•
•	•	•
x_n	f_n	$x_n \cdot f_n$

المعطيات هي: الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = 40$$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط ؟
2. المصطلحات أنشئ جدولًا تكراريًا بسيطًا يتساوى فيه الوسط الحسابي مع الوسيط.
3. برّر منطقيًا إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة بيانات هو 40 وأضفت العدد 3 إلى كل قيمة من قيمها، فكم يصبح وسطها الحسابي ؟
4. حلّل الخطأ طلب الأستاذ من طلابه إيجاد الوسط الحسابي للجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
10	1
15	4
20	5
25	2

في ما يلي إجابة إبراهيم عن هذا السؤال.

$$\bar{x} = \frac{10+15+20+25}{4} = 17.5$$

أوجد خطأ إبراهيم وصححه.

5. برّر منطقيًا هل يمكن وجود أكثر من منوال في الجدول التكراري ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

6. أوجد كلًّا من الوسط الحسابي والمنوال لبيانات الجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
4	2
6	5
7	4
10	3

7. أوجد كلًّا من الوسط الحسابي والوسيط لبيانات الجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
5	6
10	5
15	4
20	5

8. يمثّل الجدول أدناه قيم مبالغ مالية بالريال القطري كانت بحوزة مجموعة من الطلاب في رحلة مدرسية.

القيمة x	التكرار f
20	4
25	6
30	3
40	2

a. أوجد الوسط الحسابي لبيانات هذا الجدول.
b. كم سيصبح الوسط الحسابي إذا أنفق كل طالب 10 QR ؟ وضّح إجابتك.

9. يقول سعيد إن الوسيط والمنوال لبيانات الجدول أدناه متساويان. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

القيمة x	التكرار f
2	4
5	6
8	5
10	4

152 الوحدة 4 الإحصاء

إذا أضفنا العدد 3 إلى كل القيم يصبح الوسط الحسابي :

$$\frac{(x_1+3)f_1 + (x_2+3)f_2 + \ldots + (x_n+3)f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$= \frac{(x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) + 3(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum(x \cdot f) + 3\sum f}{\sum f}$$

$$= \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} + \frac{3\sum f}{\sum f} = 40 + 3 = 43$$

إذن، يصبح الوسط الحسابي 43

4. أوجد إبراهيم الوسط الحسابي باستعمال مجموع قيم البيانات، ثم قسم هذا المجموع على عدد القيم، وهذا خطأ. فالقيمة في البسط نحصل عليها بجمع نواتج ضرب كل القيم في تكراراتها، والقيمة في المقام هي مجموع التكرارات.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	1	10
15	4	60
20	5	100
25	2	50
المجموع	12	220

الإجابة الصحيحة :

الوسط الحسابي : $\frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{220}{12} = 18.\overline{3}$

www.jnob-jo.com

الإجابات

5. قد تكون للبيانات أكثر من منوال. مثال على ذلك :

القيمة x	التكرار f
7	3
10	5
15	2
17	5

للبيانات في الجدول التكراري أعلاه منوالان هما 10 و 17 لأن لهما نفس التكرار، 5، وهو التكرار الأكبر.

6.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
4	2	8
6	5	30
7	4	28
10	3	30
المجموع	14	96

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{96}{14} \approx 6.86$

المنوال يساوي 6 لأنه يقابل التكرار الأكبر وهو العدد 5

7.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$	التكرار التراكمي التصاعدي
5	6	30	6
10	5	50	11
15	4	60	15
20	5	100	20
المجموع	20	240	

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{240}{20} = 12$

الوسيط : بما أن مجموع التكرارات 20 وهو عدد زوجي، لذا، نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} = 10$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 6 و 11 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 10 لأنها تقابل التكرار التراكمي 11، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} + 1 = 11$ ، فتكون القيمة من الجدول التكراري التراكمي تساوي 10 أيضًا.

وبالتالي، الوسيط يساوي : $\frac{10 + 10}{2} = 10$

8. a.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
20	4	80
25	6	150
30	3	90
40	2	80
المجموع	15	400

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{400}{15} \approx 26.7$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 26.7 QR.

b. إذا أنفق كل طالب 10 QR يصبح الجدول التكراري كما يلي :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	4	40
15	6	90
20	3	60
30	2	60
المجموع	15	250

الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{250}{15} \approx 16.7$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 16.7 QR

9. المنوال لهذه البيانات هو القيمة 5 المقابلة لأكبر تكرار 6 ، مجموع التكرارات يساوي 19 والقيمة المقابلة للرتبة $\frac{19 + 1}{2} = 10$ تساوي 5 أيضًا، إذن سعيد على صواب.

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-23	10-23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	14	1
	10, 12, 18, 22	2
	23	3
2	15	1
	20	3
3	16, 17, 21	1
	11, 13, 19	3

الإجابات

10. نوجد نظامًا من معادلتين بمتغيرين.

$x + 8 + 7 + y = 25$

$\bar{x} = \frac{(1 \cdot x) + (2 \times 8) + (3 \times 7) + (4 \cdot y)}{25} = 2.6$

إذن، $x + y = 10$

$x + 4y = 28$

بالحل نجد أن : $x = 4$ و $y = 6$

11. يصبح لدينا الجدول التالي :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$	التكرار التراكمي التصاعدي
2	1	2	1
10	2	20	3
15	4	60	7
20	5	100	12
25	3	75	15
40	1	40	16
المجموع	16	297	

بما أن مجموع التكرارات 16 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{16}{2} = 8$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 7 و 12 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 20 لأنها تقابل التكرار التراكمي 12، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{16}{2} + 1 = 9$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 7 و 12 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 12 وهي 20، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 20 و 20 : وبالتالي الوسيط هو $\frac{(20 + 20)}{2} = 20$

- المنوال يبقى هو نفسه : 20
- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{297}{16} = 18.5625$

إذن، الوسط الحسابي يتغير.

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. **روابط في الرياضيات** يمثّل الجدول التالي كتل 25 دجاجة بالكيلوجرام في مزرعة سالم. إذا كان متوسط كتل هذه الدجاجات يساوي 2.6 kg، أوجد قيمة كل من x و y.

تكرار	الكتلة (kg)
x	1
8	2
7	3
y	4

11. **برّر منطقيًا** أنشأ عبدالرحمن الجدول التكراري التالي: أوجد عبدالرحمن مقاييس النزعة المركزية كما يلي: الوسيط 20، المنوال 20، الوسط الحسابي 18.2، ثم أضاف إلى هذا الجدول القيمتين 2 و 40 مع تكرار 1 لكل منهما. أي المقاييس يتأثر: الوسيط أو المنوال أو الوسط الحسابي ؟ وضّح إجابتك.

التكرار f	القيمة x
2	10
4	15
5	20
3	25

12. **ابن الحجج الرياضية** يقول يوسف إن الوسط الحسابي لبيانات الجدول التكراري المجاور يساوي 20، بيّن خطأ يوسف من دون إجراء أي عمليات حسابية.

التكرار f	القيمة x
4	8
5	10
2	14
9	20

13. **مهارات التفكير العليا**

a. حدّد القيمة التي تمثّل وسيط بيانات الجدول أدناه حيث إن القيم مرتبة تصاعديًا.

b. أوجد قيمة a التي تجعل الوسيط مساويًا للوسط الحسابي.

التكرار f	القيمة x
3	16
4	a
6	20
2	30

تدرَّب

14. يمثّل الجدول أدناه أسعار عدد من الآلات الحاسبة بالريال القطري والمتوافرة في إحدى المكتبات. أوجد الوسط الحسابي لهذه الأسعار. انظر المثال 1

التكرار f	السعر x
4	40
3	50
5	60
2	70

15. يمثّل الجدولان أدناه المسافة بالكيلومتر التي قطعتها مجموعتان من هواة الركض. تحصل المجموعة التي قطعت متوسط مسافة أكبر على ميدالية. أوجد الوسط الحسابي للمسافة التي قطعتها كل مجموعة ثم حدّد المجموعة الفائزة. انظر المثال 2

التكرار f	المسافة x
3	10
5	15
5	20
7	25

التكرار f	المسافة x
8	10
6	15
4	20
2	25

16. يمثّل الجدول أدناه نتائج 55 طالبًا في اختبار مادة العلوم. أوجد منوال ووسيط هذه الدرجات. انظر المثال 3

التكرار f	الدرجة x
12	70
16	75
14	80
13	90

17. يمثّل الجدول أدناه أطوال 58 حبلًا في أحد المتاجر لأقرب متر. أوجد منوال ووسيط هذه الأطوال. انظر المثال 3

التكرار f	الطول x
12	6
16	7
14	10
16	12

الدرس 2-4 مقاييس النزعة المركزية 153

12. الوسط الحسابي هو قيمة من البيانات المعطاة تكون دائمًا أكبر من القيمة الصغرى وأصغر من القيمة العظمى في هذه البيانات، وبالتالي لا يمكن أن يكون الوسط الحسابي 20 لأنه القيمة العظمى في البيانات.

13. **a.** مجموع التكرارات يساوي 15 وهو عدد فردي.

إذن، رتبة الوسيط هي $\frac{15 + 1}{2} = 8$ وبالتالي الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة 8 وهي 20

b. الوسط الحسابي :

$\bar{x} = \frac{(16 \times 3) + (4 \times a) + (20 \times 6) + (30 \times 2)}{15}$

إذا كان الوسيط يساوي الوسط الحسابي نحصل على المعادلة التالية : $\frac{228 + 4a}{15} = 20$

ومنه : $a = 18$

www.jnob-jo.com

الإجابات

14. أكمل الجدول التكراري بإضافة عمود ثالث يمثل $(x \cdot f)$.

السعر x (QR)	التكرار f	$x \cdot f$
40	4	160
50	3	150
60	5	300
70	2	140
المجموع	14	750

الوسط الحسابي للأسعار : $\bar{x} = \frac{750}{14} \approx 53.57$

15. نكمل الجدولين :

المجموعة الأولى

المسافة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	3	30
15	5	75
20	5	100
25	7	175
المجموع	20	380

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{380}{20} = 19$

المجموعة الثانية

المسافة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	8	80
15	6	90
20	4	80
25	2	50
المجموع	20	300

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{300}{20} = 15$

بما أن $15 < 19$، فإن المجموعة الأولى هي التي سوف تحصل على ميدالية.

16. بما أن 16 هو التكرار الأكبر، فإن المنوال هو الدرجة 75

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
70	12	12
75	16	28
80	14	42
90	13	55

بما أن مجموع التكرارات 55 وهو عدد فردي، تكون رتبة الوسيط : $\frac{(55+1)}{2} = 28$ ، فيكون الوسيط القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 28 أي 75

إذن الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة 28، أي الدرجة 75، في البيانات.

17. بما أن 16 هو التكرار الأكبر و يقابل كل من الطول 7 m والطول 12 m ، إذن، للبيانات منوالان هما الطول 7 m والطول 12 m

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
6	12	12
7	16	28
10	14	42
12	16	58

بما أن مجموع التكرارات 58 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{58}{2} = 29$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 28 و 42 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 10 لأنها تقابل التكرار التراكمي 42، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{58}{2} + 1 = 30$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 28 و 42 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 42 وهي 10، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 10 و 10 : وبالتالي الوسيط هو $\frac{(10+10)}{2} = 10$

إذن، الوسيط هو الطول 10 m

www.jnob-jo.com

الإجابات

18. a. أكمل الجدول التكراري :

$x \cdot f$	التكرار f	السعر x (QR)
1 800	6	300
4 800	12	400
5 000	10	500
2 400	4	600
14 000	32	**المجموع**

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{14\,000}{32} = 437.5$

هذا يعني أن الوسط الحسابي لسعر بيع الحذاء أو معدل المبيع للأحذية في هذا الشهر يساوي QR 437.5

b. أكمل الجدول التكراري الجديد :

$x \cdot f$	التكرار f	السعر x (QR)
1 800	6	300
9 600	24	400
10 000	20	500
2 400	4	600
23 800	54	**المجموع**

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{23\,800}{54} \approx 440.74$

إذن الوسط الحسابي الجديد لمبيعات الأحذية هو QR 440.74

19. a. أكمل الجدول التكراري :

$x \cdot f$	التكرار f	الطول x (cm)
20	4	5
60	6	10
60	5	12
100	5	20
240	20	**المجموع**

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{240}{20} = 12$

إذن، الوسط الحسابي لهذا الجدول هو 12 cm

b. أكمل الجدول الجديد، ثم اكتب معادلة تمثل الوسط الحسابي.

$x \cdot f$	التكرار f	الطول x (cm)
5a	a	5
60	6	10
60	5	12
100	5	20
$220 + 5a$	$16 + a$	**المجموع**

الوسط الحسابي الجديد : $\frac{220 + 5a}{16 + a} = 10$

نستنتج أن $a = 12$.

إذن، العدد الجديد للشرائط التي طولها 5 cm هو 12

c. الوسط الحسابي يساوي 10 cm

المنوال يساوي 5 cm

التكرار التراكمي التصاعدي	التكرار f	القيمة x
4	4	5
10	6	10
15	5	12
20	5	20

يبما أن مجموع التكرارات 20 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} = 10$ من الجدول التكراري التراكمي، فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة لها وهي 10، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} + 1 = 11$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 10 و 15 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 15 وهي 12، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 10 و 12 : وبالتالي الوسيط هو $\frac{(10 + 12)}{2} = 11$

إذن، يتساوى الوسط الحسابي والوسيط فقط.

إذن، ليلى ليست على صواب، لأن القيم الثلاثة، الوسط الحسابي والوسيط والمنوال غير متساوية.

طبّق

18. نمذج يمثّل الجدول التالي عدد الأحذية المبيعة في أحد المتاجر بحسب أسعارها في أحد الأشهر.

التكرار f	السعر QA
6	300
12	400
10	500
4	600

a. أوجد الوسط الحسابي لهذا الجدول وفسّر معناه.

b. أجرى صاحب المحل تنزيلات في الشهر التالي، فتضاعفت مبيعات الأحذية ذات السعرين 400 و 500 فيما بقيت مبيعات الأحذية ذات السعرين 300 و 600 كما هي. أوجد الوسط الحسابي الجديد.

19. فكّر وثابر في الحل يمثّل الجدول التالي الأطوال بالسنتمتر لبعض الشرائط الملوّنة لدى ليلى.

التكرار f	الطول
4	5
6	10
5	12
5	20

a. أوجد الوسط الحسابي لهذا الجدول.

b. تغيّر عدد الشرائط التي طول كل منها 5 cm فيما بقي عدد الشرائط الباقية كما هو وأصبح الوسط الحسابي الجديد يساوي 10 cm. أوجد عدد الشرائط الجديد التي طولها يساوي 5 cm

c. تقول ليلى إن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال متساوية في بيانات الجدول الجديد. هل هي على صواب ؟ وضّح إجابتك.

20. ابن الحجج الرياضية يمثّل الجدولان أدناه توزيع الأعضاء في ناديين مختلفين بحسب أعمارهم.

نادي A

التكرار f	العمر x
4	15
10	18
10	20
8	25

نادي B

التكرار f	العمر x
3	16
9	19
11	21
9	24

a. أوجد الوسط الحسابي لبيانات كل نادٍ ثمّ فسّر معناه.

b. هل يمكنك استعمال إجابتك في (a) كي توجد الوسط الحسابي لبيانات الناديين معًا ؟

c. أنشئ جدولًا تكراريًا لبيانات أعضاء الناديين معًا ثم تحقق من إجابتك في (b).

تدرّب على اختبار

21. اختر كل ما يصح حول الجدول التكراري أدناه:

التكرار f	القيمة x
5	10
6	15
8	20
6	25

A. الوسط الحسابي 20 ومجموع التكرارات 30

B. الوسط الحسابي 18 ومجموع التكرارات 25

C. الوسط الحسابي 18 والمنوال 20

D. الوسط الحسابي 25 والوسيط 20

22. اختبار SAT/ACT أوجد قيمة x التي تجعل الوسط الحسابي للجدول التالي يساوي 9

التكرار f	القيمة x
4	5
3	8
x	10
5	12

Ⓐ 4

Ⓑ 5

Ⓒ 6

Ⓓ 8

23. مهمة أدائية أجرى الأستاذ أحمد اختبارًا للرياضيات لطلاب أحد الصفوف وعددهم 20 طالبًا، وكانت الدرجات متدنية إلى حد ما. أعاد الأستاذ أحمد توزيع أسس التصحيح فازدادت درجة كل طالب بمعدل 5 نقاط وأصبح الوسط الحسابي لكل الدرجات 72، بناءً للتوزيع الجديد، نال 20% من طلاب الصف الدرجة 80 فيما نال ضعف هؤلاء الدرجة 70 وكان عدد الذين نالوا الدرجة 65 يساوي 3 أضعاف عدد الذين نالوا الدرجة 85

الجزء A أنشئ جدولًا تكراريًا يمثّل التوزيع الجديد، ثمّ استنتج الجدول التكراري الأصلي.

الجزء B تبيّن أنه يوجد خطأ في احتساب درجات نصف الطلاب الذين نالوا الدرجة 70 في التصحيح الجديد إذ إن كلًّا منهم يستحق الدرجة 75

صحّح الجدول التكراري وكذلك الوسط الحسابي.

154 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

الإجابات

20. a. أكمل الجدولين.

النادي A

$x \cdot f$	التكرار f	العمر x
60	4	15
180	10	18
200	10	20
200	8	25
640	32	**المجموع**

الوسط الحسابي لأعمار أعضاء النادي A :

$\bar{x} = \frac{640}{32} = 20$

النادي B

$x \cdot f$	التكرار f	العمر x
48	3	16
171	9	19
231	11	21
216	9	24
666	32	**المجموع**

الوسط الحسابي لأعمار أعضاء النادي B :

$\bar{x} = \frac{666}{32} = 20.8125$

أو 20 سنة و 296 يومًا تقريبًا.

بما أن $20.8125 > 20$، فإن في المتوسط، أعضاء النادي B أكبر عمرًا من أعضاء النادي A.

b. يمكن إيجاد الوسط الحسابي لأعمار أعضاء الناديين كما يلي : $\bar{x} = \frac{20 + 20.8125}{2} = 20.40625$

أو 20 سنة و 148 يومًا تقريبًا.

c. الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1306}{64} = 20.40625$

أو 20 سنة و 148 يومًا تقريبًا، وهو نفس إجابة الجزء (b)

الناديان معًا

$x \cdot f$	التكرار f	العمر x
60	4	15
48	3	16
180	10	18
171	9	19
200	10	20
231	11	21
216	9	24
200	8	25
1306	64	**المجموع**

21. B, C

23. الجزء A

الجدول التكراري بعد إضافة 5 درجات

$x \cdot f$	التكرار f	الدرجات x
390	6	65
560	8	70
320	4	80
170	2	85
1440	20	**المجموع**

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1\,440}{20} = 72$

إذن، الوسط الحسابي هو الدرجة 72

الجدول التكراري الأصلي

$x \cdot f$	التكرار f	الدرجات x
360	6	60
520	8	65
300	4	75
160	2	80
1340	20	**المجموع**

الوسط الحسابي الأصلي : $\bar{x} = \frac{1\,340}{20} = 67$

الجزء B

الجدول التكراري الصحيح

$x \cdot f$	التكرار f	الدرجات x
390	6	65
280	4	70
300	4	75
320	4	80
170	2	85
1460	20	**المجموع**

الوسط الحسابي بعد تصحيح الخطأ :

$\bar{x} = \frac{1\,460}{20} = 73$

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

الدرس 4-3
الانحراف المعياري

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ تمييز التباين والانحراف المعياري كمقياسين من مقاييس التشتت.

✔ حساب التباين والانحراف المعياري لمجموعة بيانات.

✔ حساب التباين والانحراف المعياري لبيانات في جدول تكراري بسيط.

الفهم الأساس

يحسب الطلاب التباين والانحراف المعياري لمجموعة بيانات مفردة ولبيانات في جدول تكراري بسيط، ويستعملون مفهوم الانحراف المعياري لمقارنة جدولين تكراريين بسيطين.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من :

- تمييز المدى الرُبَيعي والانحراف المطلق كمقياسين من مقاييس التشتت.
- حساب المدى الرُبَيعي (IQR) ووسط الانحراف المطلق (MAD) لمجموعة بيانات.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- حساب التباين لمجموعة بيانات باستعمال الصيغة $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$
- حساب الانحراف المعياري لمجموعة بيانات باستعمال الصيغة $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$
- حساب التباين لمجموعة بيانات في جدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}$
- حساب التباين لمجموعة بيانات في جدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}}$
- مقارنة مجموعتي بيانات واستخلاص نتائج من خلال احتساب الانحراف المعياري لكل مجموعة بيانات وتفسيره.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يوسع الطلاب فهمهم لمقاييس التشتت باستعمال الانحراف المعياري والتباين.
يدرك الطلاب أن الانحراف المعياري والتباين مقياسين من مقاييس التشتت التي تقيس درجة تشتت البيانات عن وسطها الحسابي.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **المدى الرُبَيعي** | *Interquartile Range (IQR)*
- **وسط الانحراف المطلق** | *Mean Absolute Deviation (MAD)*

المصطلحات الجديدة

- **التباين** | *Variance*
- **الانحراف المعياري** | *Standard deviation*

نشاط المصطلحات

- تعلم الطلاب سابقًا كيفية حساب مقياسين من مقاييس التشتت هما:
المدى الرُبَيعي ووسط الانحراف المطلق، اللذان يقيسان درجة تشتت البيانات، أي يقيسان مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي.
قدّم للطلاب المصطلحين "الانحراف المعياري" و "التباين" على أنهما مقياسان آخران من مقاييس التشتت، لكنهما يقيسان تشتت البيانات بدقة أعلى من مقياسي "وسط الانحراف المطلق" و "المدى الرُبَيعي".
- اطلب من الطلاب وصل كل مصطلح أدناه بنوع المقياس المرتبط به:
  - الوسط الحسابي
  - مقاييس النزعة المركزية
  - الانحراف المعياري
  - مقاييس التشتت
  - الوسيط
  - التباين
  - وسط الانحراف المطلق

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.8.4 يحسب مقاييس التشتت لبيانات مفردة وجداول تكرارية بسيطة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًّا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب التبرير المنطقي ومقاييس التشتت (الانحراف المعياري والتباين) لمقارنة مجموعتين من البيانات تمثلان موقفين من واقع الحياة لاستخلاص نتائج وتحديد مجموعة البيانات التي تُمثل الموقف الحياتي بشكل أفضل. فكلما ازدادت قيمة الانحراف المعياري، ازداد تشتت البيانات، وبالتالي تباعدت القيم عن وسطها الحسابي. كلما تناقصت قيمة الانحراف المعياري، قلّ تشتت البيانات، وبالتالي تقاربت البيانات، ويمثل هذا الأمر موقفًا أفضل من الموقف الذي قيمة انحراف بياناته المعيارية كبيرة.

www.jnob-jo.com

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة بإيجاد الوسط الحسابي لقيم بيانات معطاة، والاستفادة من هذا الوسط الحسابي لإيجاد مقياس آخر يوفر إمكانية أفضل لتحليل هذه البيانات ومقارنتها، وهو الانحراف المعياري.

يساعد الانحراف المعياري الطلاب على دراسة تشتت قيم البيانات من حيث قربها من الوسط الحسابي أو بعدها عنه، وعلى المقارنة بين مجموعتين من البيانات لاتخاذ قرارات مناسبة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما المعطيات المبيّنة في كل جدول ؟
[درجات الاختبارات القصيرة لكل من يوسف وشقيقه فارس في مادة الرياضيات خلال هذا العام، حيث الدرجة العظمى 10]

س: ما الذي يجب عليك إيجاده في الجدولين التكراريين ؟
[الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس ثم المقارنة بينهما.]

س: ما الفائدة من إيجاد الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس ؟
[مقارنة نتائج الأخوين في الاختبارات القصيرة لمادة الرياضيات خلال هذا العام.]

س: هل يساعد إيجاد الوسط الحسابي في تحديد مدى تقارب الدرجات منه أو تباعدها عنه ؟
[كلّا، الوسط الحسابي مقياس يساعد على تكوين صورة عن المعدل العام للبيانات وعلى المقارنة بين مجموعتين من البيانات أو أكثر. لذا، من الضروري إيجاد مقاييس أخرى لمقارنة البيانات لمعرفة مدى تقارب أو تباعد هذه البيانات عن الوسط الحسابي.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف تجد الوسط الحسابي لدرجات كل من الطالبين ؟
[من خلال إضافة عمود إلى كل جدول يتضمن ناتج الضرب $x \bullet f$، ثم تطبيق القانون $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \bullet f)}{\Sigma f}$ الذي تعلمه الطلاب في الدرس السابق.]

س: ماذا تستنتج من مقارنة الوسطين الحسابيين اللذين حسبتهما ؟
[يشير الوسط الحسابي الأكبر إلى أن أداء فارس في الاختبارات القصيرة في مادة الرياضيات أفضل بقليل من أداء يوسف.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اعرض أمام الطلاب جدولًا مشابهًا للجدولين السابقين يتضمن درجات اختبارات قصيرة لطالب آخر، ثم اسألهم: كيف يمكن المقارنة بين درجات الطلاب الثلاثة ؟
[من خلال إضافة عمود إلى الجدول الجديد يتضمن ناتج الضرب $x \bullet f$، ثم إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الطالب الثالث. يدل الوسط الحسابي الأكبر على الدرجات الأفضل.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يساعد الوسط الحسابي على معرفة مدى تقارب قيم البيانات منه أو تباعدها عنه ؟
[كلّا، لا يشير إيجاد الوسط الحسابي إلى مدى تقارب قيم البيانات منه أو تباعدها عنه. الوسط الحسابي مقياس مركزي يعبّر عن نزعة محددة للبيانات ولا يعبّر عن تشتتها. فإذا كان أقرب إلى القيمة العظمى تعدّ البيانات جيدة، وإذا كان أقرب إلى القيمة الصغرى تعدّ البيانات سيئة.]

كتاب الطالب، صفحة 155

4-3
الانحراف المعياري
The Standard Deviation

أستطيع... إيجاد الانحراف المعياري واستعماله لمقارنة مجموعتين من البيانات.

معيار الدرس
9.8.4

المصطلحات
- التباين variance
- الانحراف المعياري standard deviation

انقد واشرح

يمثّل الجدولان أدناه درجات الاختبارات القصيرة لكل من يوسف وشقيقه فارس في اختبار الرياضيات خلال هذا العام.

درجات يوسف

التكرار f	الدرجة x
1	4
3	6
5	8
2	10

درجات فارس

التكرار f	الدرجة x
1	6
4	7
3	8
2	9

A. أوجد الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس. قارن الوسطين.

B. **برّر منطقيًا** قارن بين درجات كل من يوسف وفارس في اختبار الرياضيات والوسط الحسابي لدرجاتهما. درجات أي منهما أقرب إلى الوسط الحسابي لدرجاته ؟

السؤال الأساس **كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتي بيانات ؟**

تبيّن **مقاييس التشتت** مدى تباعد البيانات بعضها عن بعض. ومن أشهر **مقاييس التشتت** **التباين والانحراف المعياري**، والتي تقيس مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي.

نموذج من أعمال الطلاب

A. درجات يوسف

الدرجة x	التكرار f	$x \bullet f$
4	1	4
6	3	18
8	5	40
10	2	20
المجموع	11	82

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{82}{11} = 7.\overline{45}$

درجات فارس

الدرجة x	التكرار f	$x \bullet f$
6	1	6
7	4	28
8	3	24
9	2	18
المجموع	10	76

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{76}{10} = 7.6$

بما أن الوسط الحسابي لدرجات فارس يساوي 7.6 وهو أكبر من الوسط الحسابي لدرجات يوسف $7.\overline{45}$، إذن متوسط درجات فارس أفضل من متوسّط درجات يوسف.

B. درجات فارس أقرب إلى الوسط الحسابي، لأن الوسط الحسابي لدرجات فارس هو 7.6 ودرجاته هي: 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9، نلاحظ أن درجات فارس قريبة من الوسط الحسابي 7.6، بينما الوسط الحسابي لدرجات يوسف هو $7.\overline{45}$ ودرجاته هي: 4, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 10, 10، نلاحظ أن الدرجتين 4 و 10 بعيدتان عن الوسط الحسابي.

www.jnob-jo.com

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

لقد تعلم الطلاب قراءة البيانات ووصفها باستعمال التمثيلات البيانات، وتعلموا كذلك كيفية تحليلها ومقارنتها باستعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي والمنوال والوسيط)، وهم بحاجة الآن إلى مقاييس أكثر دقة، مثل الانحراف المعياري، لتحديد تشتت قيم البيانات ومقارنتها.

إن مقياس التباين يقيس مدى انحراف كل قيمة من قيم البيانات عن الوسط الحسابي لهذه القيم. يتمثل انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي بالمقدار الجبري: $(x - \bar{x})$
حيث x يمثل القيمة و $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي لقيم البيانات.
لإيجاد التباين يجب احتساب الوسط الحسابي لهذه الانحرافات. وبما أن الوسط الحسابي لقيم البيانات يُمثل نقطة الميزان، فإن مجموع الانحرافات الأكبر من الوسط الحسابي لقيم البيانات يساوي مجموع الانحرافات الأصغر منه، وبالتالي فإن مجموع جميع الانحرافات يساوي الصفر. لذلك، يجب تربيع هذه الإنحرافات لإيجاد التباين.

• الانحراف المعياري
standard deviation

السؤال الأساس **كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتي بيانات ؟**

تبيّن **مقاييس التشتت** مدى تباعد البيانات بعضها عن بعض. ومن أشهر **مقاييس التشتت** **التباين والانحراف المعياري**، والتي تقيس مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي.

المفهوم **التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم**

لفظيًا: التباين (σ^2): هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات ووسطها الحسابي.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

بالرموز:

حيث:
x: القيم
$\bar{x}$: الوسط الحسابي
n: عدد القيم

لفظيًا: الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي للتباين.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

بالرموز:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}}$$

تدل قيمة الانحراف المعياري على معدل تباعد القيم عن وسطها الحسابي، وكلما قلّت قيمته كانت البيانات أكثر تقاربًا بعضها من بعض.

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 155

www.jnob-jo.com

مثال 1 التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

طرح أسئلة هادفة

س: ما المعطيات المبيّنة في الجدول ؟
[عدد السيارات المبيعة خلال خمسة أسابيع]

س: ما المطلوب إيجاده ؟
[التباين والانحراف المعياري]

س: ما العلاقة بين التباين والانحراف المعياري ؟
[الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين.]

س: كيف توجد الانحراف المعياري ؟
[الانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ حيث يمثل n عدد القيم.]

س: لماذا يتم تربيع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي عند إيجاد الانحراف المعياري ؟
[لأن مجموع الانحرافات للقيم عن الوسط الحسابي يساوي الصفر دائمًا.]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

يمثّل الجدول المجاور عدد السيارات التي باعها موظف المبيعات في خمسة أسابيع.
أوجد التباين والانحراف المعياري لبيانات هذه المبيعات.

مبيعات السيارات

الأسبوع	العدد (x)
الأول	25
الثاني	18
الثالث	12
الرابع	10
الخامس	10

تذكر
الوسط الحسابي لمجموعة قيم هو:
$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
حيث n: عدد القيم.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
$= \frac{25+18+12+10+10}{5}$
$= \frac{75}{5}$
$= 15$

إرشاد
قد تكون $x - \bar{x}$ سالبة لكن مربّعها موجب.

الخطوة 2 بناء على صيغة التباين $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$، أكمل الجدول بإضافة العمودين $(x-\bar{x})$ و $(x-\bar{x})^2$ على الترتيب.

25 − 15

10^2

الأسبوع	العدد (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	25	10	100
الثاني	18	3	9
الثالث	12	−3	9
الرابع	10	−5	25
الخامس	10	−5	25
المجموع			168

خطأ شائع
تذكر بأن تُربع الفرق بين كل قيمة والوسط، وإلا سيكون مجموع الفروق صفرًا.

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$
عوّض $= \frac{168}{5}$
بسّط $= 33.6$
إذن، التباين هو 33.6

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
عوّض $\sigma^2 = 33.6$ $= \sqrt{33.6}$
بسّط ≈ 5.8
إذن، الانحراف المعياري لهذه البيانات هو 5.8 تقريبًا.

يتبع في الصفحة التالية

156 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. • الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{12 + 14 + 16 + 17 + 16}{5} = 15$

الأسبوع	العدد x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	12	−3	9
الثاني	14	−1	1
الثالث	16	1	1
الرابع	17	2	4
الخامس	16	1	1
المجموع			16

• التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} = \frac{16}{5} = 3.2$

• الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{3.2} \approx 1.8$

إذن، التباين يساوي 3.2 و الانحراف المعياري يساوي 1.8 تقريبًا.

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! **1.** يبين الجدول أدناه عدد الرسائل الإلكترونية التي أرسلها جاسم في خمسة أسابيع.

الرسائل الإلكترونية

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
العدد	12	14	16	17	16

أوجد التباين والانحراف المعياري لبيانات هذه الرسائل.

المفهوم **التباين والانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط**

يمكن احتساب التباين لبيانات مبوبة في جدول تكراري بسيط باستعمال القانون:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}$$

حيث:

x: القيم

$\bar{x}$: الوسط الحسابي

f: تكرار القيم

قانون الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}}$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 **التباين والانحراف المعياري لجدول تكرار بسيط**

يمثل الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها فريق كرة القدم في مباريات الموسم.

عدد الأهداف x	1	2	3	4	5
التكرار f	2	4	3	4	2

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأهداف.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

أكمل الجدول بإضافة العمود $(x \cdot f)$.

عدد الأهداف x	التكرار f	$x \cdot f$
1	2	2
2	4	8
3	3	9
4	4	16
5	2	10
المجموع	15	45

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f}$

عوّض $= \frac{45}{15}$

بسّط $= 3$

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 157

مثال 2 التباين والانحراف المعياري لجدول تكرار بسيط

طرح أسئلة هادفة

س: كيف توجد الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط ؟

[من خلال إضافة عمود إلى الجدول التكراري يتضمن ناتج الضرب $x \cdot f$ ثم استعمال القانون $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f}$]

س: في الخطوة الثانية، ماذا تلاحظ بالنسبة لمجموع ناتج ضرب التكرارات في الانحرافات ؟ ولماذا تم إنشاء العمود الأخير ؟

[مجموع ناتج ضرب التكرارات في الانحرافات يساوي الصفر؛ لإيجاد مجموع نواتج ضرب التكرارات في مربع الانحرافات، ومن ثم قسمتها على مجموع التكرارات لإيجاد التباين.]

س: كيف يرتبط التباين لمجموعة من القيم بالتباين لجدول تكراري بسيط ؟

[التباين لمجموعة من القيم و التباين لجدول تكراري بسيط هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات و وسطها الحسابي. لذلك لإيجاد التباين لمجموعة القيم فإننا نقسم مجموع مربعات الفرق بين القيم و وسطها الحسابي على عدد القيم. ولكن لإيجاد التباين لجدول تكراري بسيط، فإننا نجد مجموع ناتج ضرب مربع الفرق بين كل قيمة والوسط الحسابي للبيانات في تكرارها، ثم نقسمه على مجموع التكرارات.]

س: كيف توجد الانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط ؟

[من خلال إضافة ثلاثة أعمدة إلى الجدول التكراري : الأول يتضمن المقدار $(x - \bar{x})$ والثاني يتضمن المقدار $(x - \bar{x})^2$ والثالث يتضمن $f \cdot (x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

ثم استعمال القانون $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}}$ لإيجاد الانحراف المعياري.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

.2

العدد x	التكرار f	$x \bullet f$
0	3	0
1	3	3
2	4	8
4	3	12
5	1	5
المجموع	14	28

- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{28}{14} = 2$
  إذن، الوسط الحسابي لأهداف هذا الفريق يساوي 2
- التباين والانحراف المعياري

الأهداف x	التكرار f	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$f \bullet (x - \bar{x})^2$
0	3	−2	4	12
1	3	−1	1	3
2	4	0	0	0
4	3	2	4	12
5	1	3	9	9
المجموع	14			36

- التباين : $\sigma^2 = \frac{36}{14} \approx 2.571$
- الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{2.571} \approx 1.6$

إذن، التباين يساوي 2.571 تقريبًا و الانحراف المعياري للأهداف يساوي 1.6 تقريبًا.

تابع المثال 2

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناء على قانون التباين، أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ و $f \bullet (x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

$(-2)^2$

2×4

x	f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \bullet (x - \bar{x})^2$
1	2	−2	4	8
2	4	−1	1	4
3	3	0	0	0
4	4	1	1	4
5	2	2	4	8
المجموع	15			24

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$

عوّض $= \frac{24}{15}$

بسّط $= 1.6$

إذن، التباين للأهداف التي سجلها فريق كرة القدم يساوي 1.6

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 1.6$ $= \sqrt{1.6}$

بسّط ≈ 1.3

إذن، الانحراف المعياري للأهداف التي سجلها فريق كرة القدم يساوي 1.3 تقريبًا.

حاول أن تحلّ! **2.** يمثّل الجدول أدناه الأهداف التي سجلها فريق آخر في الموسم.

الأهداف x	0	1	2	4	5
التكرار f	3	3	4	3	1

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأهداف.

158 الوحدة 4 الإحصاء

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثالين 2 و 3

القراءة مستوى 1 اطلب من الطلاب قراءة مقدمة كل من المثالين (2) و (3)

س: في المثال 2، على ماذا يدل التعبير "جدول تكراري بسيط" ؟
[قيم البيانات أعداد صحيحة موجبة، مثل عدد أهداف فريق كرة قدم في أحد المواسم أو عدد الرسائل الإلكترونية في عدة أسابيع.]

س: في المثال 3، على ماذا يدل التعبير "بيانات مفردة" ؟
[قيم البيانات غير المدرجة في الجدول التكراري، مثل درجات الاختبار في عدد من الأسابيع أو عدد الرسائل الإلكترونية المرسلة في عدد من الأيام، وليست لها تكرارات.]

الكتابة مستوى 2 في المثالين 2، و 3، اطلب من الطلاب قراءة الجداول جيدًا، ثم كتابة تعريف لكل مما يلي باستعمال مفرداتهم الخاصة.

- $(x - \bar{x})$
- $(x - \bar{x})^2$
- $f \bullet (x - \bar{x})^2$
- التباين
- الانحراف المعياري

اكتب في دفترك مثالين: الأول يتضمن جدولًا تكراريًا بسيطًا والثاني يتضمن بيانات مفردة، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من هذه البيانات.

التحدث مستوى 3 اطلب من الطلاب العمل ضمن مجموعات صغيرة لمراجعة النتيجة في المثال 3 والتركيز على أهمية المقياس الجديد عند مقارنة مجموعتين من البيانات.

س: هل ساعد إيجاد الوسط الحسابي على مقارنة مجموعتي البيانات ؟
[كلّا، الوسط الحسابي للمجموعتين هو نفسه، 7، وبالتالي لا يمكن المقارنة بين درجات صالح وخالد.]

س: ما المقياس الأفضل لإجراء المقارنة الصحيحة ؟
[الانحراف المعياري ، فهو يشير إلى مدى تقارب قيم البيانات من الوسط الحسابي أو ابتعادها عنه.]

www.jnob-jo.com

مثال 3 مقارنة الانحراف المعياري لمجموعتي بيانات مفردة

طرح أسئلة هادفة

س: ما الفرق بين الجدول التكراري البسيط والبيانات المفردة ؟

[نستعمل في الجدول التكراري البسيط أعدادًا صحيحة موجبة تمثل قيم البيانات، ولكل قيمة تكرار يقابلها. أما البيانات المفردة فعناصرها متقطعة، مثل الأسابيع أو الدرجات أو غير ذلك، تقابلها متغيرات وهي أعداد صحيحة موجبة وليست لها تكرارات.]

س: ما الفرق بين قانون الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط وقانون الوسط الحسابي لبيانات مفردة ؟

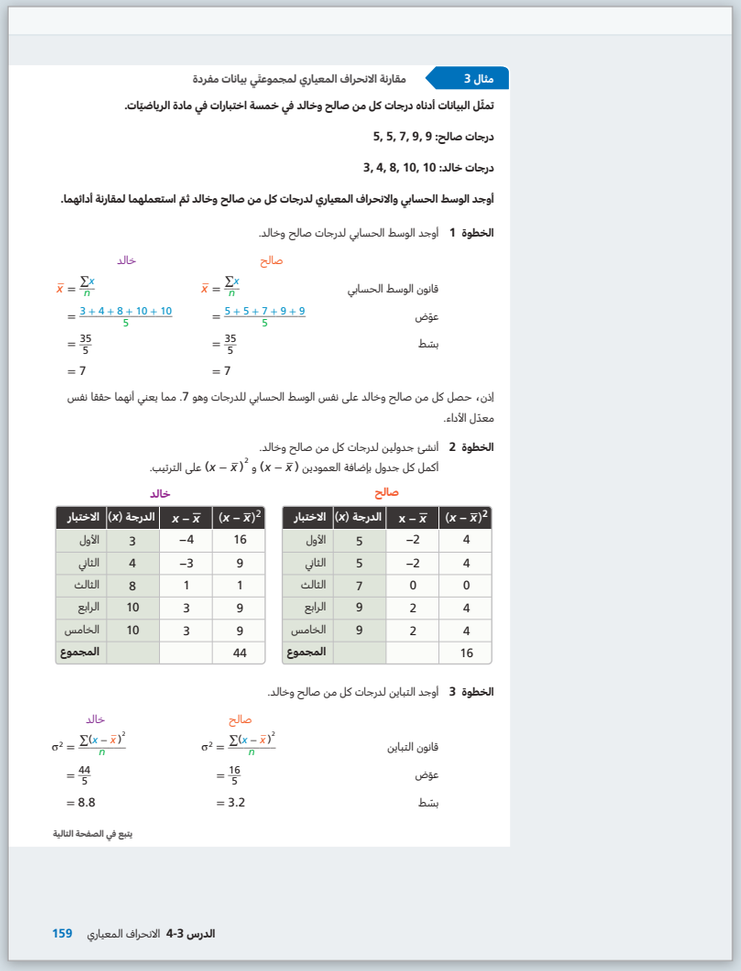
[في الجدول التكراري البسيط، الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \bullet f)}{\Sigma f}$.

أما في البيانات المفردة، الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ حيث n عدد المفردات و x المتغير المقابل لكل مفردة.]

س: ما الفرق بين قانون التباين لجدول تكراري بسيط وقانون التباين لبيانات مفردة ؟

[في الجدول التكراري البسيط، التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}$.

أما في البيانات المفردة فإن التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$]



مثال 3 مقارنة الانحراف المعياري لمجموعتي بيانات مفردة

تمثّل البيانات أدناه درجات كل من صالح وخالد في خمسة اختبارات في مادة الرياضيّات.

درجات صالح: 5, 5, 7, 9, 9

درجات خالد: 3, 4, 8, 10, 10

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات كل من صالح وخالد ثم استعملهما لمقارنة أدائهما.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي لدرجات صالح وخالد.

	صالح	خالد
قانون الوسط الحسابي	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
عوّض	$= \frac{5+5+7+9+9}{5}$	$= \frac{3+4+8+10+10}{5}$
بسّط	$= \frac{35}{5}$	$= \frac{35}{5}$
	$= 7$	$= 7$

إذن، حصل كل من صالح وخالد على نفس الوسط الحسابي للدرجات وهو 7. مما يعني أنهما حققا نفس معدّل الأداء.

الخطوة 2 أنشئ جدولين لدرجات كل من صالح وخالد.
أكمل كل جدول بإضافة العمودين $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

صالح

الاختبار	الدرجة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	5	−2	4
الثاني	5	−2	4
الثالث	7	0	0
الرابع	9	2	4
الخامس	9	2	4
المجموع			16

خالد

الاختبار	الدرجة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	3	−4	16
الثاني	4	−3	9
الثالث	8	1	1
الرابع	10	3	9
الخامس	10	3	9
المجموع			44

الخطوة 3 أوجد التباين لدرجات كل من صالح وخالد.

	صالح	خالد
قانون التباين	$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$
عوّض	$= \frac{16}{5}$	$= \frac{44}{5}$
بسّط	$= 3.2$	$= 8.8$

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 159

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 قد يجد الطلاب صعوبة في تحديد المتغير x في البيانات المفردة. الفت انتباههم إلى أن المفردة لا تمثل متغيرًا، بل الأعداد المقابلة لكل مفردة هي المتغيرات. اطرح عليهم الأسئلة التالية:

س: ما عدد أيام الدراسة في الأسبوع ؟

[نموذج إجابة: خمسة أيام]

س: كم ساعة تحتاج لإنجاز الواجبات المنزلية ؟

[من اليوم الأول إلى اليوم الخامس على الترتيب: 2, 3, 4, 2, 4]

س: كيف تنشئ جدولًا لهذه البيانات، وما هو المتغير ؟

اليوم	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
عدد الساعات	4	2	4	3	2

[المتغير هو عدد الساعات المطلوبة لإنجاز الواجبات المنزلية.]

www.jnob-jo.com

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. الوسط الحسابي :

يوسف

$\bar{x} = \frac{3+4+6+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$

إذن، الوسط الحسابي ليوسف 6 km

سعيد

$\bar{x} = \frac{5+4+4+12+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$

إذن، الوسط الحسابي لسعيد 7 km

إذن، معدّل المسافات التي قطعها سعيد خلال الأيام الخمسة أكبر من معدّل المسافات التي قطعها يوسف في الفترة الزمنية نفسها $7 > 6$

الانحراف المعياري :

يوسف

المسافة	الطول x (km)	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	3	−3	9
الثانية	4	−2	4
الثالثة	6	0	0
الرابعة	8	2	4
الخامسة	9	3	9
المجموع	30		26

التباين للمسافات التي قطعها يوسف : $\sigma^2 = \frac{26}{5} = 5.2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{5.2} \approx 2.3$

إذن، الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها يوسف يساوي 2.3 تقريبًا.

سعيد

المسافة	الطول x (km)	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	5	−2	4
الثانية	4	−3	9
الثالثة	4	−3	9
الرابعة	12	5	25
الخامسة	10	3	9
المجموع	35		56

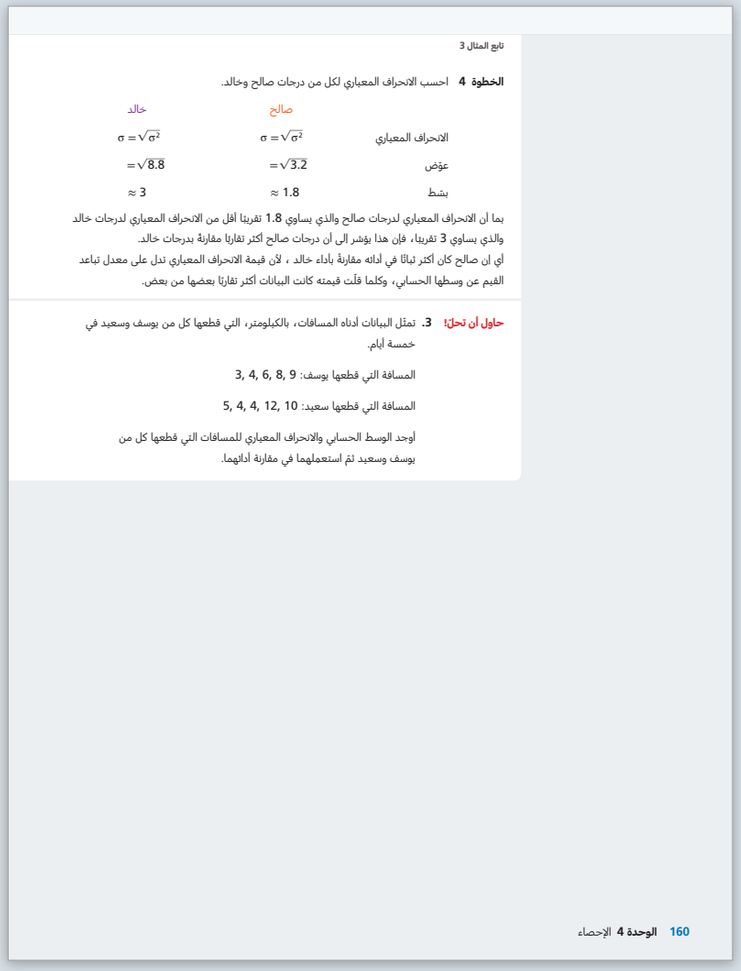
التباين للمسافات التي قطعها سعيد : $\sigma^2 = \frac{56}{5} = 11.2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{11.2} \approx 3.35$

إذن، الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها سعيد يساوي 3.35 تقريبًا.

الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها يوسف أصغر من الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها سعيد $(2.3 < 3.35)$، إذن المسافات التي قطعها يوسف يوميًا أقل تشتتًا وأكثر ثباتًا، وأقرب إلى الوسط الحسابي.

صحيح أن سعيد قطع عمومًا عددًا أكبر من الكيلومترات يوميًا ، لكنّ يوسف أبدى ثباتًا أكبر في أدائه اليومي.



تابع المثال 3

الخطوة 4 احسب الانحراف المعياري لكل من درجات صالح وخالد.

	صالح	خالد
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
عوّض	$= \sqrt{3.2}$	$= \sqrt{8.8}$
بسّط	≈ 1.8	≈ 3

بما أن الانحراف المعياري لدرجات صالح والذي يساوي 1.8 تقريبًا أقل من الانحراف المعياري لدرجات خالد والذي يساوي 3 تقريبًا، فإن هذا يؤشر إلى أن درجات صالح أكثر تقاربًا مقارنة بدرجات خالد.

أي إن صالح كان أكثر ثباتًا في أدائه مقارنة بأداء خالد ، لأن قيمة الانحراف المعياري تدل على معدل تباعد القيم عن وسطها الحسابي، وكلما قلّت قيمته كانت البيانات أكثر تقاربًا بعضها من بعض.

حاول أن تحلّ! **3.** تمثّل البيانات أدناه المسافات، بالكيلومتر، التي قطعها كل من يوسف وسعيد في خمسة أيام.

المسافة التي قطعها يوسف: 3, 4, 6, 8, 9

المسافة التي قطعها سعيد: 5, 4, 4, 12, 10

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمسافات التي قطعها كل من يوسف وسعيد ثمّ استعملهما في مقارنة أدائهما.

160 الوحدة 4 الإحصاء

www.jnob-jo.com

ملخص المفهوم الانحراف المعياري

س: متى نوجد الانحراف المعياري ؟

[من المهم جدًّا إيجاد قيمة الانحراف المعياري لمعرفة مدى قرب قيم البيانات من وسطها الحسابي أو بعدها عنه، فهذا يساعد على اتخاذ قرارات صحيحة باستعمال التحليل والمقارنة.]

عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

الإجابات

1. نوجد أولًا التباين الذي يساوي الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي، ثم نوجد الجذر التربيعي الموجب للتباين فنحصل على الانحراف المعياري.
   - قيمة الانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط تساوي : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}}$
   - قيمة الانحراف المعياري لمجموعة بيانات مفردة تساوي : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$
2. لا يمكن للتباين أن يساوي الصفر، لأنه يمثل مجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات والوسط الحسابي لهذه البيانات مقسومًا على مجموع التكرارات، ولأن مربع كل عدد هو عدد موجب.
3. الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات من حيث قربها من الوسط الحسابي أو بعدها عنه، وليس مدى تشتتها عن الوسيط كما قالت مريم.
4. راجع عمل الطلاب.
5. سالم مخطئ، لأن التباين هو مجموع المربعات في البسط. والإجابة الصحيحة هي أن التباين يساوي :

$$\sigma^2 = \frac{(-3.2)^2 + (-1.2)^2 + (-0.2)^2 + (1.8)^2 + (2.8)^2}{5}$$
$$= \frac{10.24 + 1.44 + 0.04 + 3.24 + 7.84}{5} = 4.56$$

ملخص المفهوم الانحراف المعياري

لفظيًا

التباين هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات ووسطها الحسابي ويُرمز له بالرمز σ^2

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

جبريًا

قيم مفردة	جدول تكراري بسيط
التباين: $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

حيث: x: القيم n: عدد القيم $\bar{x}$: الوسط الحسابي f: التكرار

عدديًا

يمثّل الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم في 10 مباريات.
أوجد التباين و والانحراف المعياري لعدد الأهداف المسجلة.

عدد الأهداف x	التكرار f
3	4
4	3
5	2
6	1

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

أكمل الجدول بإضافة العمود $(x \bullet f)$.

عدد الأهداف x	التكرار f	$x \bullet f$
3	4	12
4	3	12
5	2	10
6	1	6
المجموع	10	40

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \bullet f)}{\Sigma f}$

عوّض $= \frac{40}{10}$

بسّط $= 4$

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناءً على قانون التباين أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x-\bar{x})$ و $(x-\bar{x})^2$ و $f \bullet (x-\bar{x})^2$ على الترتيب.

x	f	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f \bullet (x-\bar{x})^2$
3	4	−1	1	4
4	3	0	0	0
5	2	1	1	2
6	1	2	4	4
المجموع	10			10

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}$

عوّض $= \frac{10}{10}$

بسّط $= 1$

إذن، التباين للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 1$ $= \sqrt{1}$

بسّط $= 1$

إذن، الانحراف المعياري للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 161

www.jnob-jo.com

خطأ شائع

التمرين 6 قد يخطئ بعض الطلاب عند محاولتهم إيجاد التباين والانحراف المعياري، فينشئون جدولًا غير مكتمل ولا يضم القيم $(x-\bar{x})^2$، وبالتالي يجدون أن التباين هو $\sigma^2 = \frac{2+0+(-1)+(-2)+(-3)+4}{6} = 0$ والانحراف المعياري في هذه الحالة يساوي: $\sigma = \sqrt{0} = 0$، وهذا خطأ، لأن قيمة σ^2 تساوي:

$$\sigma^2 = \frac{(2)^2+0^2+(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+(4)^2}{6} = \frac{34}{6}$$

الإجابات

6. التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{(4)^2+(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(2)^2}{6} = \frac{34}{6} = 5.\overline{6}$.

الانحراف المعياري يساوي : $\sigma = \sqrt{5.\overline{6}} \approx 2.39$.

7. على فرض أن الوسط الحسابي لمجموعة بيانات يساوي : $\frac{\Sigma(f \bullet x)}{\Sigma f} = a$

إذا أضفنا العدد 10 إلى كل القيم يصبح الوسط الحسابي :

$$\frac{\Sigma[f_1(x_1+10)+f_2(x_2+10)+\ldots+f_n(x_n+10)]}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

$$= \frac{\Sigma[(f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n)+10(f_1+f_2+\ldots+f_n)]}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

$$= \frac{\Sigma(f \bullet x)+10\,\Sigma f}{\Sigma f} = \frac{\Sigma(f \bullet x)}{\Sigma f} + \frac{10\,\Sigma f}{\Sigma f} = a + 10$$

إذن، قيمة الوسط الحسابي تزداد بمقدار 10

ننشئ جدول التباين الجديد بعد إضافة 10 إلى كل القيم، علمًا أن التباين قبل هذه الإضافة هو : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}$

المتغير x	التكرار f	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
x_1+10	f_1	$(x_1+10)-(a+10)$	$(x_1-a)^2$
x_2+10	f_2	$(x_2+10)-(a+10)$	$(x_2-a)^2$
x_n+10	f_n	$(x_n+10)-(a+10)$	$(x_n-a)^2$

نلاحظ أن قيمة التباين لا تتغير، وبالتالي لا تتغير قيمة الانحراف المعياري التي تساوي :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f}}$$

8. **a.** الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{2+3+5+6+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$

b.

العائلة	عدد الأفراد x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
الأولى	9	4	16
الثانية	6	1	1
الثالثة	5	0	0
الرابعة	3	−2	4
الخامسة	2	−3	9
المجموع			30

التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{30}{5} = 6$

c. الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتي بيانات ؟
2. **تواصل بدقة** هل يمكن للتباين في مجموعة بيانات أن يساوي الصفر ؟ وضّح إجابتك.
3. **حلّل الخطأ** قالت مريم إن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت أو تباعد القيم في مجموعة بيانات عن الوسيط. بيّن خطأ مريم ثم صححه.
4. **المصطلحات** اكتب بأسلوبك الخاص تعريف التباين لمجموعة بيانات.
5. **برز منطقيًا** تمثّل مجموعة البيانات التالية درجات الحرارة خلال 5 أيام في إحدى المناطق الباردة:
$-8, -6, -5, -3, -2$
يقول سالم بما أن جميع البيانات سالبة، فإن تباين هذه البيانات هو أيضًا سالب. هل توافق سالم في رأيه ؟ برّر إجابتك.
6. **ابحث عن العلاقات** فيما يلي انحرافات 6 قيم عن وسطها الحسابي أي $(x-\bar{x})$: $4, -3, -2, -1, 0, 2$
أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.
7. **استعمل البنية** إذا أضفت 10 إلى كل قيمة في مجموعة بيانات، ما التغير الذي يطرأ على كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري ؟

طبّق فهمك

8. تمثّل البيانات التالية عدد أفراد خمس عائلات: 2, 3, 5, 6, 9
a. أوجد الوسط الحسابي.
b. أوجد التباين.
c. أوجد الانحراف المعياري.
9. يمثّل الجدول التالي أسعار أكياس الذرة في أحد المتاجر بالريال القطري.

السعر x	10	15	20	30	40
التكرار f	5	4	4	5	2

a. أوجد الوسط الحسابي.
b. أكمل الجدول التالي ثمّ أوجد التباين والانحراف المعياري.

x	f	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f \bullet (x-\bar{x})^2$
10	5			
15	4			
20	4			
30	5			
40	2			
المجموع	20			

162 الوحدة 4 الإحصاء

9. **a.** الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{(10\times5)+(15\times4)+(20\times4)+(30\times5)+(40\times2)}{5+4+4+5+2}$$

$$= \frac{420}{20} = 21$$

إذن، الوسط الحسابي للأسعار يساوي : QR 21

b.

x	التكرار f	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f \bullet (x-\bar{x})^2$
10	5	−11	121	605
15	4	−6	36	144
20	4	−1	1	4
30	5	9	81	405
40	2	19	361	722
المجموع	20			1 880

التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x-\bar{x})^2]}{\Sigma f} = \frac{1\,880}{20} = 94$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{94} \approx 9.7$

www.jnob-jo.com

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10 - 23	10 - 23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 21, 22	1
	10, 11	2
2	16	1
	13, 14, 19, 20	3
3	17, 18	2
	12, 23	3

الإجابات

10. a. الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{a + 2a + 3a + 4a + 5a}{5}$$
$$= \frac{15a}{5}$$
$$= 3a$$

b. التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(-2a)^2 + (-a)^2 + (0)^2 + (a)^2 + (2a)^2}{5}$$
$$8 = \frac{10a^2}{5}$$
$$4 = a^2$$
$$2 = \pm a$$

إذن، $a = 2$ لأنها عدد صحيح موجب.

11. الوسط الحسابي صحيح ، لكن يوسف لم يأخذ مربع كل فرق من المقادير $(x - \bar{x})$، لذا، فإن كلًّا من التباين والانحراف المعياري يساوي الصفر.

التباين الصحيح هو :

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (5)^2}{6}$$
$$= \frac{56}{6}$$
$$= 9.\overline{3}$$

والانحراف المعياري الصحيح هو :

$$\sigma \approx 3.055$$

12. a. الوسط الحسابي لمجموعة البيانات A :

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 6 + 10 + 12}{5}$$
$$= \frac{35}{5}$$
$$= 7$$

التباين لمجموعة البيانات A :

$$\sigma^2 = \frac{(-5)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (5)^2}{5}$$
$$\sigma^2 = 12.8$$

الانحراف المعياري لمجموعة البيانات A :

$$\sigma \approx 3.6$$

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. روابط في الرياضيات

a. أوجد بدلالة a الوسط الحسابي لمجموعة البيانات: $a, 2a, 3a, 4a, 5a$ حيث a عدد صحيح موجب.

b. أوجد قيمة a إذا كان تباين هذه المجموعة يساوي 8

11. حلّل الخطأ طلب الأستاذ من يوسف إيجاد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات التالية: 1, 2, 4, 6 , 7, 10

وكان حلّه كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{30}{6} = 5$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})}{n}$$
$$= \frac{0}{6} = 0$$
$$\sigma = \sqrt{0} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

x	$x - \bar{x}$
1	-4
2	-3
4	-1
6	1
7	2
10	5
30 للمجموع	0 ✗

بيّن خطأ يوسف وصححه.

12. فكّر وثابر في الحل

a. أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات

A: 2, 5, 6, 10, 12

b. يقول سعيد إن مجموعة البيانات B: 3, 3, 3, 13, 13 لها نفس الوسط الحسابي للمجموعة A لكن المجموعتين تختلفان في الانحراف المعياري. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

13. مهارات التفكير العليا كتب عادل المجموعة التالية: 1, a, 7, a, 10 حيث a عدد صحيح موجب وقال: إذا كان الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو a، فما هو تباينها ؟

14. برّر منطقيًا

a. أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات: 2, 2, 4, 4, 8

b. كيف يتغيّر الانحراف المعياري إذا تمّ استبدال العدد 8 بالعدد 18، وضّح إجابتك.

تدرَّب

15. تمثّل مجموعة البيانات أدناه عدد الأصداف التي جمعها محمود خلال 5 أيام في الأسبوع الماضي.

A: 6, 8, 9, 10, 12

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه المجموعة. انظر المثال 1

16. يمثّل الجدول أدناه المسافة بالكيلومتر التي قطعها عبدالله على مدى عدّة أيام من الشهر. انظر المثال 2

المسافات المقطوعة

المسافة x	3	4	5	8	9
التكرار f	5	3	4	3	1

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه المسافات.

17. تمثّل مجموعتي البيانات أدناه عدد ساعات النوم لكل من عبد الرحمن ونواف على مدى عدّة أيام من أحد الأشهر. انظر المثال 3

عدد ساعات نوم عبد الرحمن	عدد ساعات نوم نواف
5, 7, 7, 6, 9, 8	6, 7, 7, 7, 8, 7

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لساعات نوم كل من عبد الرحمن ونواف ثم استعملهما لمقارنة زمن نومهما.

b. الوسط الحسابي لمجموعة البيانات B :

$$\bar{x} = \frac{3 + 3 + 3 + 13 + 13}{5}$$
$$= \frac{35}{5}$$
$$= 7$$

إذن، للمجموعتين نفس الوسط الحسابي ويساوي 7

التباين لمجموعة البيانات B :

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (6)^2 + (6)^2}{5}$$
$$= \frac{120}{5}$$
$$= 24$$

الانحراف المعياري

$$\sigma \approx 4.9$$

إذن، المجموعتان تختلفان في الانحراف المعياري، وسعيد على صواب.

www.jnob-jo.com

الإجابات

13. لإيجاد التباين ننشئ الجدول التالي حيث الوسط الحسابي يساوي a

القيم x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
1	$1 - a$	$(1-a)^2$
a	0	0
7	$7 - a$	$(7-a)^2$
a	0	0
10	$10 - a$	$(10-a)^2$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(1-a)^2 + (7-a)^2 + (10-a)^2}{5}$$
$$= \frac{3(a^2 - 12a + 50)}{5}$$
$$= 0.6(a^2 - 12a + 50)$$

14. a. الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{2 + 2 + 4 + 4 + 8}{5}$$
$$= \frac{20}{5}$$
$$= 4$$

الترتيب	القيم x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	2	-2	4
الثاني	2	-2	4
الثالث	4	0	0
الرابع	4	0	0
الخامس	8	4	16
المجموع			24

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{24}{5}$$
$$= 4.8$$
$$\sigma = \sqrt{4.8} \approx 2.2$$

الانحراف المعياري الأول يساوي : 2.2 تقريبًا

b. يصبح الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{2 + 2 + 4 + 4 + 18}{5}$$
$$= \frac{30}{5}$$
$$= 6$$

الترتيب	القيم x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	2	-4	16
الثاني	2	-4	16
الثالث	4	-2	4
الرابع	4	-2	4
الخامس	18	12	144
المجموع			184

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{184}{5} = 36.8$$

الانحراف المعياري الثاني يساوي : 6.066 تقريبًا

بما أن $6.066 > 2.2$ و $\frac{6.066}{2.2} \approx 2.75$، فإن الانحراف المعياري الثاني أكبر من الانحراف المعياري الأول ويساوي 3 أمثاله تقريبًا.

15. الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{6 + 8 + 9 + 10 + 12}{5}$$
$$= \frac{45}{5}$$
$$= 9$$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (3)^2}{5}$$
$$= 4$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

16. الوسط الحسابي للمسافات المقطوعة :

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 5) + (4 \times 3) + (5 \times 4) + (8 \times 3) + (9 \times 1)}{16}$$
$$= \frac{80}{16}$$
$$= 5$$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 5 km

المسافة x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
3	5	-2	4	20
4	3	-1	1	3
5	4	0	0	0
8	3	3	9	27
9	1	4	16	16
المجموع	16			66

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{66}{16} = 4.125$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{4.125} \approx 2$$

17. الوسط الحسابي لساعات نوم عبدالرحمن :

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 7 + 6 + 9 + 8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

الوسط الحسابي لساعات نوم نواف :

$$\bar{x} = \frac{6 + 7 + 7 + 7 + 8 + 7}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

لساعات نوم كل من عبدالرحمن ونواف نفس الوسط الحسابي، 7، لذا، لا يمكن المقارنة باستعمال الوسط الحسابي، وبالتالي نوجد الانحراف المعياري علمًا أن البيانات مفردة.

عبد الرحمن

اليوم	عدد الساعات x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	5	-2	4
الثاني	7	0	0
الثالث	7	0	0
الرابع	6	-1	1
الخامس	9	2	4
السادس	8	1	1
المجموع			10

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{10}{6} = 1.\overline{6}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{1.\overline{6}} \approx 1.3$$

نواف

اليوم	عدد الساعات x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	6	-1	1
الثاني	7	0	0
الثالث	7	0	0
الرابع	7	0	0
الخامس	8	1	1
السادس	7	0	0
المجموع			2

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{2}{6} = 0.\overline{3}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{0.\overline{3}} \approx 0.6$$

بما أن الانحراف المعياري لساعات نوم نواف أصغر من الانحراف المعياري لساعات نوم عبدالرحمن ($0.6 < 1.3$)، فإن ساعات نوم نواف أكثر ثباتًا وأكثر تقاربًا من الوسط الحسابي.

www.jnob-jo.com

الإجابات

18. **a.** الوسط الحسابي لدرجات الشعبة B :

$$\bar{x} = \frac{(60 \times 5) + (70 \times 2) + (80 \times 2) + (90 \times 6)}{5 + 2 + 2 + 6}$$
$$= \frac{1\,140}{15} = 76$$

جدول إيجاد التباين لدرجات الشعبة B

الدرجة x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
60	5	– 16	256	1 280
70	2	– 6	36	72
80	2	4	16	32
90	6	14	196	1 176
المجموع	15			2 560

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{2560}{15} = 170.\overline{6}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{170.\overline{6}} \approx 13.06$$

للشعبتين A و B نفس الوسط الحسابي ويساوي 76 لكن الانحراف المعياري لدرجات الشعبة A أصغر من الانحراف المعياري لدرجات الشعبة B $(9.5 < 13.06)$

b. كان أداء الشعبة A أفضل من أداء الشعبة B لأن الانحراف المعياري لدرجات الشعبة A يشير إلى أن درجات الطلاب أكثر تقاربًا من وسطها الحسابي وأكثر انسجامًا من درجات طلاب الشعبة B.

19. **a.**

عدد الأزهار x	12	17	18	19	20
التكرار f	2	2	3	2	1

الوسط الحسابي لعدد الأزهار بعد استعمال السماد :

$$\bar{x} = \frac{(12 \times 2) + (17 \times 2) + (18 \times 3) + (19 \times 2) + (20 \times 1)}{2 + 2 + 3 + 2 + 1}$$
$$= \frac{170}{10}$$
$$= 17$$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الأزهار بعد استعمال السماد هو 17 زهرة.

عدد الأزهار x	عدد الأشجار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
12	2	– 5	25	50
17	2	0	0	0
18	3	1	1	3
19	2	2	4	8
20	1	3	9	9
المجموع	10			70

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{70}{10} = 7$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{7} \approx 2.6$$

إذن، الانحراف المعياري لعدد الأزهار بعد استعمال السماد يساوي 2.6 تقريبًا.

b. لقد ازداد الوسط الحسابي لعدد الأزهار من 14 إلى 17، وكذلك ازداد الانحراف المعياري من 2 إلى 2.6، وهذا يدل على أن عدد الأزهار ازداد و أصبح أكثر تشتتًا عن وسطها الحسابي.

تدرَّب وحُل مسائل

طبِّق

18. **نمذج** أجرت المعلّمة آمنة اختبارًا للرياضيات في الشعبتين A و B من الصف التاسع. إذا كان الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الشعبة A يساوي 76 والانحراف المعياري يساوي 9.5 وكان الجدول أدناه يمثّل درجات الشعبة B:

درجات الشعبة B

الدرجة x	60	70	80	90
التكرار f	5	2	2	6

a. أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات في الشعبة B، ثمّ قارنهما مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات في الشعبة A.

b. أي الشعبتين كان أداؤها أفضل في الاختبار وأيهما كانت نتائج طلابها أكثر تجانسًا ؟ وضّح إجابتك.

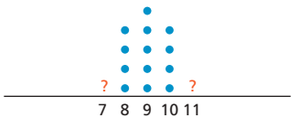
19. **فكّر وثابر في الحل** كان لدى سميرة العام الماضي عشر شجيرات على كل منها ما متوسطه 14 زهرة مع انحراف معياري قيمته 2. يعرض التمثيل بالنقاط أدناه عدد الأزهار على نفس الشجيرات بعد استعمال سماد جديد.

أزهار الشجرة بعد استعمال سماد جديد

a. أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأزهار بعد استعمال السماد.

b. ما الاستنتاجات التي يمكنك استخلاصها حول هذا السماد وعدد الأزهار.

20. **مهارات التفكير العليا** يبيّن التمثيل بالنقاط أدناه أسعار بعض السلع بالريال القطري التي اشتراها سالم الشهر الماضي. علمًا أن عدد السلع التي سعرها QR 7 يساوي عدد السلع التي سعرها QR 11 ولا يتجاوز عددها 3 سلع.



a. ما الأعداد الممكنة للسلع التي أسعارها QR 7 أو QR 11 ؟

b. إذا كان عدد السلع التي سعرها QR 7 عدد زوجي غير الصفر، فما هو الانحراف المعياري لأسعار هذه السلع ؟

تدرَّب على اختبار

21. أيّ مما يلي يمثّل تباين مجموعة البيانات التالية 1, 3, 5, 2, 9 ؟

A. 0

B. 8

C. 20

D. 40

22. **اختبار AT/ACT** إذا كان التباين لمجموعة مكوّنة من 8 قيم يساوي 144، فما هو الانحراف المعياري لهذه القيم ؟

Ⓐ 4 Ⓑ 8

Ⓒ 12 Ⓓ لا شيء مما سبق

23. **مهمة أدائية** يعرض الجدول أدناه عدد ساعات التدريبات الرياضية لمجموعة مكونة من 6 أشخاص خلال أسبوعين.

ساعات تدريب الاسبوع الثاني	ساعات تدريب الاسبوع الأول
6	2
7	4
7	4
9	9
10	10
9	7

الجزء A أوجد الوسط الحسابي لساعات التدريب لكل أسبوع. ماذا تستنتج ؟

الجزء B أوجد التباين والانحراف المعياري لساعات التدريب لكل أسبوع، ثم فسّر النتيجة.

الجزء C يقول فارس: " لو زادت ساعات التدريب في الأسبوع الأول ساعتين يوميًا، فإن ذلك سيؤدي إلى تقارب الحسابين الوسطيين للأسبوعين، لكن الانحراف المعياري للأسبوع الأول سيكون أكبر بكثير من الانحراف المعياري للأسبوع الثاني". هل توافقه الرأي ؟ وضّح إجابتك.

164 الوحدة 4 الإحصاء

20. **a.** 3 سلع أو 2 أو 1 أو صفر سلعة.

b. عدد السلع التي أسعار كل منها QR 7 أو QR 11 يجب أن يساوي 2 لأنه عدد زوجي غير الصفر.

أسعار السلع x (QR)	7	8	9	10	11
التكرار f	2	4	5	4	2

الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{(7 \times 2) + (8 \times 4) + (9 \times 5) + (10 \times 4) + (11 \times 2)}{2 + 4 + 5 + 4 + 2}$$
$$= \frac{153}{17} = 9$$

أسعار السلع x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
7	2	– 2	4	8
8	4	– 1	1	4
9	5	0	0	0
10	4	1	1	4
11	2	2	4	8
المجموع	17			24

التباين لأسعار السلع : $\sigma^2 = \frac{24}{17} \approx 1.4$

الانحراف المعياري : $\sigma \approx \sqrt{1.4} = 1.2$

إذن، الانحراف المعياري لأسعار السلع يساوي 1.2 تقريبًا.

www.jnob-jo.com

الإجابات

21. B

23. **الجزء A** الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الأول :

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+9+10+7}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني :

$$\bar{x} = \frac{6+7+7+9+10+9}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

إذن، الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الأول أصغر من الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني $(6 < 8)$

الجزء B في الأسبوع الأول

الأشخاص	ساعات التدريب x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	2	– 4	16
الثاني	4	– 2	4
الثالث	4	– 2	4
الرابع	9	3	9
الخامس	10	4	16
السادس	7	1	1
المجموع			50

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{50}{6} = 8.\overline{3}$$

الانحراف المعياري لساعات التدريب في الأسبوع الأول :

$$\sigma = \sqrt{8.\overline{3}} \approx 2.9$$

في الأسبوع الثاني

الأشخاص	ساعات التدريب x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	6	– 2	4
الثاني	7	– 1	1
الثالث	7	– 1	1
الرابع	9	1	1
الخامس	10	2	4
السادس	9	1	1
المجموع			12

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{12}{6} = 2$$

الانحراف المعياري لساعات التدريب في الأسبوع الثاني :

$$\sigma = \sqrt{2} \approx 1.4$$

يشير الانحراف المعياري في الأسبوع الثاني إلى أن أداء الأشخاص في التدريب أفضل من أدائهم في الأسبوع الأول، فساعات التدريب في الأسبوع الثاني أقل تباعدًا عن الوسط الحسابي.

الجزء C نوجد الوسط الحسابي الجديد بعد إضافة ساعتين إلى ساعات التدريب في كل يوم من الأسبوع الأول : $\bar{x} = 8$

إذن، يصبح الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوعين هو نفسه أي 8 ساعات.

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{50}{6} \approx 8.\overline{3}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{8.\overline{3}} \approx 2.9$$

تغير الوسط الحسابي من 6 ساعات إلى 8 ساعات وأصبح مساويًا تمامًا للوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني، لكن الانحراف المعياري لم يتغير قط، لذلك لا أوافق على ما قاله فارس.

www.jnob-jo.com

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

www.jnob-jo.com

ملاحظات

www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف ننشئ ونستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

بعد إجابة الطلاب عن السؤال الأساس، شجّعهم على إدراج أمثلة تدعم إجاباتهم. حفّزهم على البحث عن النقاط الآتية أثناء مناقشة الإجابات.

- يمكن للمدرج التكراري أن يساعد على إيجاد النسبة المئوية لفئات معينة من بيانات كمية وذلك باستعمال القانون :
  تكرار الفئة = كثافة التكرار × طول هذه الفئة. ذلك يساعد على تحليل البيانات بطريقة علمية.
- يوفّر المدرج التكراري النسبي فرصة للطلاب كي يستدلوا على معلومات هم بحاجة إليها من البيانات ذات فئات متساوية الطول. كما أنه يساعد على إعطاء نصائح وتوصيات يستفيد منها الإحصائيون ويبنون عليها، إذ أنه يوفر مقارنة سهلة بين الفئات عبر عرض المنحى (الاتجاه) الذي تتخذه تكرارات هذه الفئات.
- من المهم جدًّا توجيه الطلاب إلى قراءة ودراسة المدرج التكراري والمدرج التكراري النسبي بتمعن وانتباه، للإحاطة بالفروقات بين المدرج التكراري ذي الفئات غير متساوية الطول والمدرج التكراري النسبي ذي الفئات متساوية الطول.
- مقاييس النزعة المركزية لقيم البيانات وهي الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لا تشير بصورة دقيقة إلى تحليل البيانات ووصفها. المقياس الأكثر استعمالًا في المقارنة بين قيم البيانات هو الوسط الحسابي علمًا أنه مقياس لا يساعد على قياس تشتت قيم البيانات ولا على وصفها.
- مقاييس التشتت متعددة ولكن في هذه الوحدة يتعامل الطلاب مع التباين والانحراف المعياري لدراسة تقارب قيم البيانات مع الوسط الحسابي أو بعدها عنه. كما أن الانحراف المعياري يساعد على المقارنة بين عدة قيم لبيانات معطاة، ويعطي نتائج أفضل في المقارنة من استعمال الوسط الحسابي.

الإجابات

2. التباين
3. كثافة التكرار
4. الوسيط
5. الانحراف المعياري
6. المنوال
7. الوسط الحسابي

الوحدة 4

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تنشئ وتستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- كثافة التكرار
- التكرار النسبي
- الوسط الحسابي
- التباين
- الوسيط
- الانحراف المعياري
- المنوال

2. _____ هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي.
3. _____ لفئة هو ناتج قسمة تكرار الفئة على طولها.
4. القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات تدعى _____.
5. _____ هو الجذر التربيعي للتباين.
6. _____ هو القيمة، أو القيم، الأكثر شيوعًا أو تكرارًا في مجموعة بيانات.
7. _____ هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-4 المدرج التكراري

مراجعة سريعة

كثافة التكرار = تكرار الفئة / طول هذه الفئة

التكرار النسبي = تكرار الفئة / مجموع التكرارات

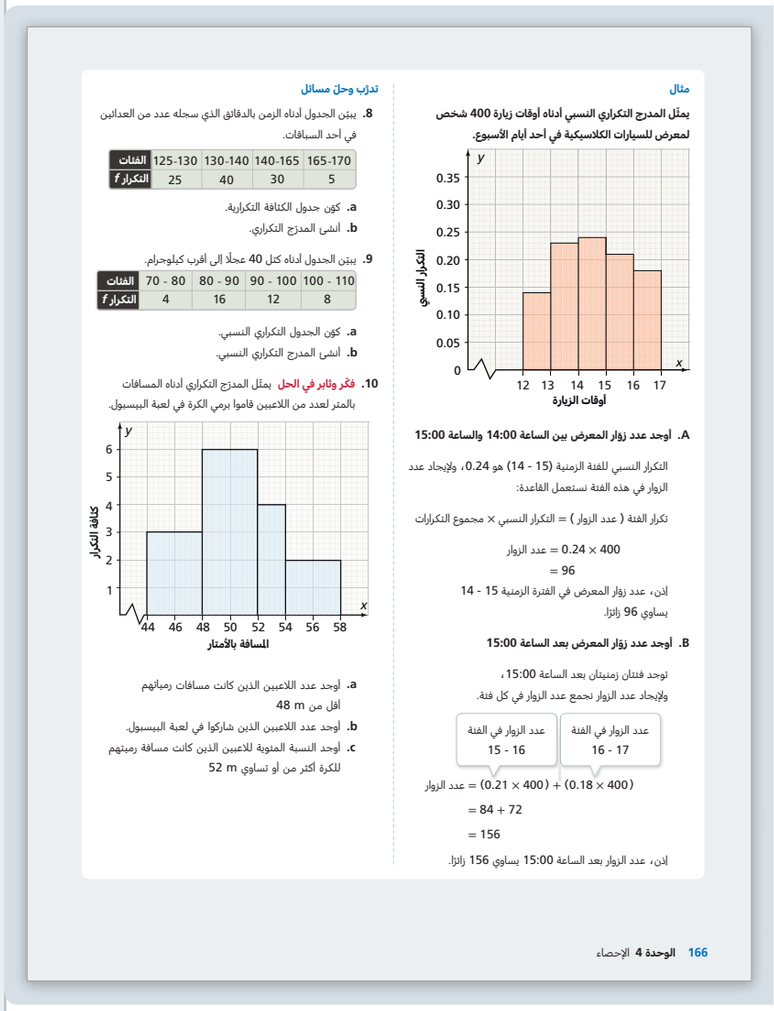
المدرج التكراري للجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي كثافة التكرار لهذه الفئة.

المدرج التكراري النسبي لجدول تكراري ذي فئات متساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي التكرار النسبي لهذه الفئة.

مراجعة الوحدة 4

الوحدة 4 مراجعة الوحدة 165

www.jnob-jo.com



مثال

يمثّل المدرج التكراري النسبي أدناه أوقات زيارة 400 شخص لمعرض للسيارات الكلاسيكية في أحد أيام الأسبوع.

A. أوجد عدد زوار المعرض بين الساعة 14:00 والساعة 15:00

التكرار النسبي للفئة الزمنية (15 - 14) هو 0.24، ولإيجاد عدد الزوار في هذه الفئة نستعمل القاعدة:

تكرار الفئة (عدد الزوار) = التكرار النسبي × مجموع التكرارات

عدد الزوار = 0.24 × 400

= 96

إذن، عدد زوار المعرض في الفترة الزمنية 15 - 14 يساوي 96 زائرًا.

B. أوجد عدد زوار المعرض بعد الساعة 15:00

توجد فئتان زمنيتان بعد الساعة 15:00، ولإيجاد عدد الزوار نجمع عدد الزوار في كل فئة.

عدد الزوار في الفئة 16 - 17 | عدد الزوار في الفئة 15 - 16

عدد الزوار = (0.18 × 400) + (0.21 × 400)

= 72 + 84

= 156

إذن، عدد الزوار بعد الساعة 15:00 يساوي 156 زائرًا.

تدرّب وحلّ مسائل

8. يبيّن الجدول أدناه الزمن بالدقائق الذي سجله عدد من العدائين في أحد السباقات.

الفئات	125-130	130-140	140-165	165-170
التكرار f	25	40	30	5

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشئ المدرج التكراري.

9. يبيّن الجدول أدناه كتل 40 عجلًا إلى أقرب كيلوجرام.

الفئات	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100 - 110
التكرار f	4	16	12	8

a. كوّن الجدول التكراري النسبي.

b. أنشئ المدرج التكراري النسبي.

10. فكّر وثابر في الحل يمثّل المدرج التكراري أدناه المسافات بالمتر لعدد من اللاعبين قاموا برمي الكرة في لعبة البيسبول.

a. أوجد عدد اللاعبين الذين كانت مسافات رميهم أقل من 48 m

b. أوجد عدد اللاعبين الذين شاركوا في لعبة البيسبول.

c. أوجد النسبة المئوية للاعبين الذين كانت مسافة رميتهم للكرة أكثر من أو تساوي 52 m

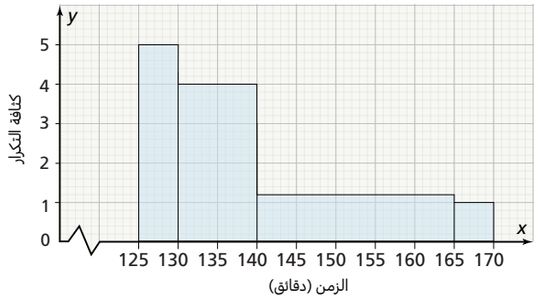
166 الوحدة 4 الإحصاء

الإجابات

8. **a.** جدول الكثافة التكرارية :

الفئات	125-130	130-140	140-165	165-170
التكرار f	25	40	30	5
كثافة التكرار	$\frac{25}{5} = 5$	$\frac{40}{10} = 4$	$\frac{30}{25} = 1.2$	$\frac{5}{5} = 1$

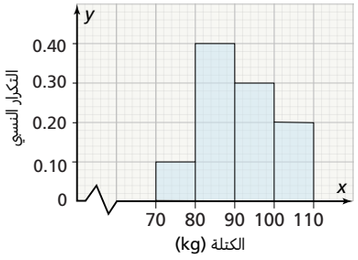
b. المدرج التكراري :



9. **a.** جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
70 - 80	4	$\frac{4}{40} = 0.10$
80 - 90	16	$\frac{16}{40} = 0.40$
90 - 100	12	$\frac{12}{40} = 0.30$
100 - 110	8	$\frac{8}{40} = 0.20$
المجموع	40	1.00

b. المدرج التكراري :



10. **a.** عدد اللاعبين : $4 \times 3 = 12$

b. العدد الإجمالي للاعبين المشاركين :

$(4 \times 3) + (4 \times 6) + (2 \times 4) + (4 \times 2) = 52$

c. عدد اللاعبين الذين كانت مسافة رميتهم للكرة اكثر من أو تساوي 52 m :

$(2 \times 4) + (4 \times 2) = 16$

النسبة المئوية : $\frac{16}{52} \times 100\% \approx 30.8\%$

www.jnob-jo.com

الدرس 2-4 مقاييس النزعة المركزية

مراجعة سريعة

الوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

حيث:

x: القيم

f: التكرار

- **المنوال** هو القيمة، أو القيم، الأكثر تكرارًا في جدول بيانات.
- **الوسيط** هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.
- إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًا n، فإن الوسيط يساوي القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$
- إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$

مثال

يمثّل الجدول أدناه عدد الأقلام التي بحوزة طلاب الصف التاسع في إحدى المدارس.

عدد الأقلام x	2	4	5	6	7
التكرار f	1	6	4	3	3

أوجد الوسط الحسابي لعدد الأقلام.

الخطوة 1 أكمل الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$

عدد الأقلام x	التكرار f	$x \cdot f$
2	1	2
4	6	24
5	4	20
6	3	18
7	3	21
المجموع	17	85

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{85}{17}$

بسّط $= 5$

الوسط الحسابي يساوي 5

إذن، متوسط عدد الأقلام لدى كل طالب يساوي 5 أقلام.

تدرّب وحلّ مسائل

11. يمثّل الجدول أدناه عدد الدفاتر لدى مجموعة من الطلاب.

عدد الدفاتر x	2	4	6	8
التكرار f	3	4	3	5

أوجد الوسط الحسابي لعدد الدفاتر.

12. يمثّل الجدول أدناه عدد أطفال مجموعة من العائلات.

عدد الأطفال x	2	3	4	5	6
التكرار f	2	5	8	3	3

أوجد منوال هذا الجدول.

13. يمثّل الجدول أدناه عدد القصص التي قرأتها مجموعة من الطلاب المشاركين في مسابقة المطالعة المدرسية.

عدد القصص x	4	7	10	12
التكرار f	7	12	10	9

أوجد الوسيط لهذا الجدول.

14. يمثّل الجدول أدناه عدد الكتب التي طالعتها مجموعة من الطلاب.

عدد الكتب x	4	5	6	7	8
التكرار f	3	7	7	4	5

أوجد الوسط الحسابي لعدد القصص.

15. **فكّر وثابر في الحل** يمثّل الجدول أدناه الكتل، بالجرام، لبعض المجوهرات لدى ليلى.

الكتلة x	20	30	50	80	100
التكرار f	3	4	6	4	3

a. أوجد الوسيط والوسط الحسابي لهذا الجدول.

b. إذا اشترت ليلى قطعة مجوهرات كتلتها 55 g، فهل يتغير الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها ؟ برّر إجابتك.

الوحدة 4 مراجعة الوحدة 167

مراجعة الوحدة 4

الإجابات

11. كوّن جدول التكرار :

عدد الدفاتر x	التكرار f	$x \cdot f$
2	3	6
4	4	16
6	3	18
8	5	40
المجموع	15	80

الوسط الحسابي لعدد الدفاتر : $\bar{x} = \frac{80}{15} \approx 5.3$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الدفاتر يساوي 5 تقريبًا

12. المنوال يساوي 4

13. نوجد أولًا التكرار التراكمي التصاعدي

عدد القصص x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
4	7	7
7	12	19
10	10	29
12	9	38

مجموع التكرارات : $7 + 12 + 10 + 9 = 38$

وهو عدد زوجي لذا نوجد القيمة المقابلة للرتبة : $\frac{38}{2} = 19$ فتكون 7،

ثم نوجد القيمة المقابلة للرتبة : $\frac{38}{2} + 1 = 19 + 1 = 20$ فتكون 10،

الوسط الحسابي للقيمتين 7 و 10 هو : $\frac{7 + 10}{2} = 8.5$

إذن، الوسيط لعدد القصص التي تمت قراءتها يساوي 9 قصص تقريبًا.

14. كوّن جدول التكرار :

الكتب	التكرار f	$x \cdot f$
4	3	12
5	7	35
6	7	42
7	4	28
8	5	40
المجموع	26	157

الوسط الحسابي لعدد القصص : $x = \frac{157}{26} = 6.03$

إذن، الوسط الحسابي لعدد القصص يساوي 6 تقريبًا.

www.jnob-jo.com

الإجابات

15. **a.** لإيجاد الوسيط نحسب أولًا مجموع التكرارات :

$3 + 4 + 6 + 4 + 3 = 20$

الكتلة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
20	3	3
30	4	7
50	6	13
80	4	17
100	3	20

القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} = 10$ هي 50

القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} + 1 = 11$ هي أيضًا 50

الوسيط : $\frac{50 + 50}{2} = 50$

لإيجاد الوسط الحسابي نكمل جدول التكرار :

الكتلة x	التكرار f	$x \cdot f$
20	3	60
30	4	120
50	6	300
80	4	320
100	3	300
المجموع	20	1 100

الوسط الحسابي : $\frac{1\,100}{20} = 55$

b. لن يتغير الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها لأن الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها يساوي 55 g وكتلة قطعة المجوهرات التي اشترتها تساوي 55 g

فيكون الوسط الحسابي : $\frac{1\,100 + 55}{21} = 55$

www.jnob-jo.com

الإجابات

16. **a.** الوسط الحسابي :

$$\frac{3+7+10+12+18+16}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الأيام الممطرة هو 11 يومًا.

b. المدرج التكراري :

الأشهر	عدد الأيام (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	3	−8	64
الثاني	7	−4	16
الثالث	10	−1	1
الرابع	12	1	1
الخامس	18	7	49
السادس	16	5	25
المجموع			156

التباين : $\sigma^2 = \frac{156}{6} = 26$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{26} \approx 5.1$

17. الوسط الحسابي : $\frac{(2\times1)+(3\times6)+(4\times5)+(5\times4)+(6\times2)}{18} = 4$

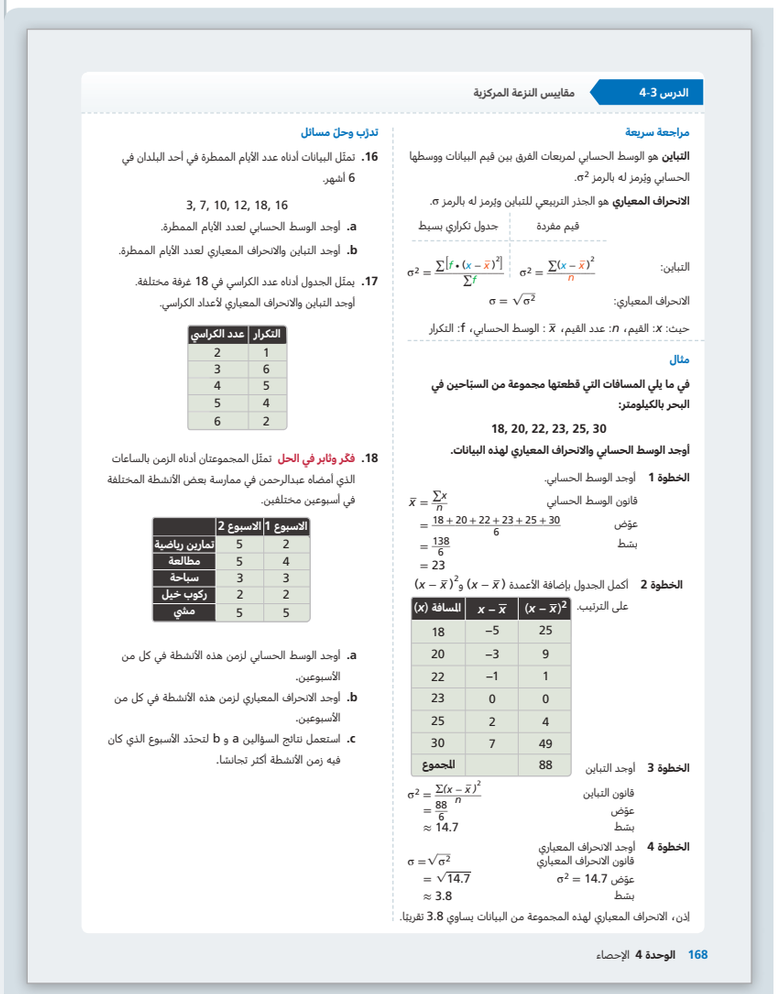
عدد الكراسي x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
2	1	−2	4	4
3	6	−1	1	6
4	5	0	0	0
5	4	1	1	4
6	2	2	4	8
المجموع	18			22

التباين : $\sigma^2 = \frac{22}{18} = 1.\overline{2}$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.\overline{2}} \approx 1.1$

18. **a.** الوسط الحسابي في الأسبوع الأول : $\frac{2+4+3+2+5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$

الوسط الحسابي في الأسبوع الثاني : $\frac{5+5+3+2+5}{5} = \frac{20}{5} = 4$



الدرس 3-4 مقاييس النزعة المركزية

مراجعة سريعة

التباين هو الوسط الحسابي لمربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي ويُرمز له بالرمز σ^2.

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين ويُرمز له بالرمز σ.

	قيم مفردة	جدول تكراري بسيط
التباين:	$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum[f\cdot(x-\bar{x})^2]}{\sum f}$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

حيث: x: القيم، n: عدد القيم، $\bar{x}$: الوسط الحسابي، f: التكرار

مثال

في ما يلي المسافات التي قطعتها مجموعة من السبّاحين في البحر بالكيلومتر:

18, 20, 22, 23, 25, 30

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه البيانات.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

عوّض $= \frac{18+20+22+23+25+30}{6}$

بسّط $= \frac{138}{6}$

$= 23$

الخطوة 2 أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

المسافة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
18	−5	25
20	−3	9
22	−1	1
23	0	0
25	2	4
30	7	49
المجموع		88

الخطوة 3 أوجد التباين

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

عوّض $= \frac{88}{6}$

بسّط ≈ 14.7

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 14.7$ $= \sqrt{14.7}$

بسّط ≈ 3.8

إذن، الانحراف المعياري لهذه المجموعة من البيانات يساوي 3.8 تقريبًا.

تدرّب وحلّ مسائل

16. تمثّل البيانات أدناه عدد الأيام الممطرة في أحد البلدان في 6 أشهر.

3, 7, 10, 12, 18, 16

a. أوجد الوسط الحسابي لعدد الأيام الممطرة.

b. أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد الأيام الممطرة.

17. يمثّل الجدول أدناه عدد الكراسي في 18 غرفة مختلفة. أوجد التباين والانحراف المعياري لأعداد الكراسي.

التكرار	عدد الكراسي
1	2
6	3
5	4
4	5
2	6

18. **فكّر وثابر في الحل** تمثّل المجموعتان أدناه الزمن بالساعات الذي أمضاه عبدالرحمن في ممارسة بعض الأنشطة المختلفة في أسبوعين مختلفين.

	الأسبوع 1	الأسبوع 2
تمارين رياضية	2	5
مطالعة	4	5
سباحة	3	3
ركوب خيل	2	2
مشي	5	5

a. أوجد الوسط الحسابي لزمن هذه الأنشطة في كل من الأسبوعين.

b. أوجد الانحراف المعياري لزمن هذه الأنشطة في كل من الأسبوعين.

c. استعمل نتائج السؤالين a و b لتحدّد الأسبوع الذي كان فيه زمن الأنشطة أكثر تجانسًا.

168 الوحدة 4 الإحصاء

b. جدول التباين لأنشطة الأسبوع الأول :

الأنشطة	الزمن x (ساعة)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
تمارين رياضية	2	−1.2	1.44
مطالعة	4	0.8	0.64
سباحة	3	−0.2	0.04
ركوب الخيل	2	−1.2	1.44
مشي	5	1.8	3.24
المجموع			6.8

التباين : $\sigma^2 = \frac{6.8}{5} = 1.36$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.36} \approx 1.17$

www.jnob-jo.com

الإجابات

تابع السؤال 18

جدول التباين لأنشطة الأسبوع الثاني :

الأنشطة	الزمن x (ساعة)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
تمارين رياضية	5	1	1
مطالعة	5	1	1
سباحة	3	–1	1
ركوب الخيل	2	–2	4
مشي	5	1	1
المجموع			8

التباين : $\sigma^2 = \frac{8}{5} = 1.6$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.6} \approx 1.26$

c. بما أن الانحراف المعياري لزمن الأنشطة في الأسبوع الأول أصغر من الانحراف المعياري لزمن الأنشطة في الأسبوع الثاني ($1.17 < 1.26$)، فإن زمن الأنشطة في الأسبوع الأول كان أكثر ثباتًا وتجانسًا.

www.jnob-jo.com