برنامج التّعلُّم عن بعد

مَلْزَمَةُ

الرياضيات

لِلصَّفِّ التّاسع الأساسيّ

الجزء الثّاني

مرحلة تعافي ٢

المطبعة الوطنية

برنامج التّعلُّم عن بعد

مَلْزَمَةُ

الرياضيات

لِلصَّفِّ التّاسع الأساسيّ

الجزء الثّاني

مرحلة تعافي ٢

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
المقدمة	٥
الأُسس النِّسبيّة وقوانين الأُسس (١)	٦
قوانين الأُسس (٢) والمعادلات الأُسيّة	١٦
المسافة بين نقطتين وإحداثيَي نقطة منتصف قطعة مستقيمة	٢٢
معادلة الخط المستقيم ومعادلة الدّائرة	٢٩
النِّسب المثلّثيّة	٤٠
العلاقة بين النِّسب المثلّثيّة	٤٩
حلّ المثلّث قائم الزّاوية وزوايا الارتفاع والانخفاض	٥٦
تشابه وتطابق المثلّثات	٦٤
ملحق الإجابات	٧٦

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على رسوله أشرف المرسلين.

شهد العالم في الآونة الأخيرة تغيّرات متلاحقة وسريعة، فأصبحتِ الحاجةُ ملحّة إلى إعداد خطط مُحكَمة تساعد المجتمعات المختلفة على تخطّي الصّعوبات ومواجهة التّحديّات.

حرصتْ وَزارةُ التّربية والّتعليم دائمًا على مواكبة المستجدْات على اختلاف أنواعها، ووضع الخطط باستمرار وتعديلها بشكلّ يسهّل تعلّم أبنائنا الطّلبة، وتُساعد على امتلاكهم المعارف والمهارات والخبرات اللاّزمة والضرورية، لذا نضع بين أيديكم ملخصًا لأهم المفاهيم والمهارات الواردة في كتاب الجزء الثّاني من مبحث الرّياضيات للصّف التّاسع، والّتي تمّ إعدادها بطريقةٍ تهدِف إلى تعلّم الطّلبة وتحسين مهاراتهم، وقدراتهم عن طريق ممارستهم مجموعة من الأنشطة التّعليميّة بصورة ذاتيّة.

وتتضمنُ هذه المَلزمة الموضوعات الآتية:

١) الأُسس النِّسبيّة وقوانين الأُسس (١).

٢) قوانين الأُسس (٢) والمعادلات الأُسيّة.

٣) المسافة بين نقطتين وإحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

٤) معادلة الخط المستقيم ومعادلة الدّائرة.

٥) النِّسب المثلّثيّة .

٦) العلاقة بين النِّسب المثلّثيّة.

٧) حلّ المثلّث قائم الزّاوية، وزوايا الارتفاع والانخفاض.

٨) تشابه وتطابق المثلّثات .

عنوان الوحدة:

الأُسسُ النسبيّةُ

عنوان الدّرس: الأُسس النّسبيّة وقوانين الأُسس (١)

المقدّمة

سنتعرّفُ في هذا الدّرس على:

١) مفهوم الأُسس النِّسبيّة.

٢) قوانين الأُسس النِّسبيّة.

٣) مفهوم الصّورة العلميّة.

التّمهيد:

بالتّأكيد أنت تعلم بأنّ الأُس هو الرّقم الّذي يدلّ على عدد مرّات ضرب العدد في نفسه مثل:

$٣^{٢} = ٣ \times ٣ = ٩$ ويُقرَأ (٣ قوة ٢)، أو (٣ أس ٢)

$(٢)^{-٤} = \frac{١}{(٢)^{٤}} = \frac{١}{١٦}$ (نحوّل الأُس السّالب إلى موجب عن طريق قلب العدد ، حيث إنّ مقلوب العدد ٢ هو $\frac{١}{٢}$)

• تذكّر أنَّ

$س^{٠} = ١$ إذنْ : $(٥)^{٠} = ١$

و لكن لماذا أيّ عدد مرفوع للأُس صفر يساوي ١ ؟

عندما نصل إلى قوانين الأسس النِّسبيّة سوف نفسّر ذلك .

في الأمثلة السابقة نلاحظ بأن الأسس تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة و هي:

ص = {...، ٢، ١، ٠، −١، −٢، ...}

و يمكـن للأُسـس أنْ تكون علـى صُورة بسط و مقام مثـل: $(٥)^{\frac{١}{٣}}$ ، $(٢)^{\frac{١}{٤}}$ ، $(س)^{\frac{٥}{٧}}$ لذا تُسمّى أُسس نسبيّة.

و تستخدم الأسس النِّسبيّة في التّعبير عن الجذور .

قاعدةٌ:

١) إذا كانت ن عددًا زوجيًا موجبًا ، وكانت س عددًا حقيقيًا موجبًا، فإنّ :

$$\sqrt[ن]{س} = (س)^{\frac{١}{ن}}$$

٢) إذا كانت ن عددًا فرديًا موجبًا، وكانت س عددًا حقيقيًّا، فإنّ :

$$\sqrt[ن]{س} = (س)^{\frac{١}{ن}}$$

لماذا يشترط أنْ يكون س عددًا موجبًا، إذا كان ن عددًا زوجيًا؟

السّبب هو: لأنّ ما داخل الجّذور الزّوجية يجب أنْ يكون مربعًا كاملًا، أيْ يمكن كتابته على صورة (العدد×نفسه)، بينما في الجّذور الفرديّة فيمكن أن يكونَ العدد (س) سالبًا، لاحظ الأمثلة الآتية:

$$-١ \times -١ = ١$$

$$-١ \times -١ \times -١ = -١$$

$$-١ \times -١ \times -١ \times -١ = ١$$

$$-١ \times -١ \times -١ \times -١ \times -١ = -١$$

.

.

.

وبناءً على ذلك نتوصلُ إلى النّتيجة الآتية:

$(-١)^{\text{عدد زوجي}} = ١$ ، $(-١)^{\text{عدد فردي}} = -١$

الآن، سنتعلَّم كيف نستخدم القاعدة السّابقة في كتابة الجذور على صورة أُسس نسبيّة.

مثال(١):

اكتبْ كلاًّ ممّا يأتي على صورةِ أسسٍ نسبيةٍ، ثمَّ جِدْ قيمةَ كلٍّ منها:

١) $\sqrt{١٤٤}$ ٢) $\sqrt[٣]{\frac{-١}{٢٧}}$ ٣) $\sqrt[٥]{٣٢}$

الحلُّ:

١) $\sqrt{١٤٤} = (١٤٤)^{\frac{١}{٢}} = ١٢$ (لاحظ أنّ: $١٢ \times ١٢ = ١٤٤$)

٢) $\sqrt[٣]{\frac{-١}{٢٧}} = \left(\frac{-١}{٢٧}\right)^{\frac{١}{٣}} = \frac{-١}{٣}$ (لاحظ أنّ: $\frac{-١}{٢٧} = \frac{-١}{٣} \times \frac{-١}{٣} \times \frac{-١}{٣}$)

٣) $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$ (لاحظ أنّ: $٣٢ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ١

اكتب كلّا ممّا يأتي على صورة أُسس نسبيّة، ثمَّ جدْ قيمة كلّ منها:

١) $\sqrt[٣]{١٢٥}$

٢) $\sqrt{\frac{٤}{١٦}}$

٣) $\sqrt[٤]{١٦}$

تذكر عزيزي الطّالب مربعات الأعداد، ومكعبات الأعداد.

العدد س	مربع العدد $س^{٢} = س \times س$	مكعب العدد $س^{٣} = س \times س \times س$
١	١	١
٢	٤	٨
٣	٩	٢٧
٤	١٦	٦٤
٥	٢٥	١٢٥
٦	٣٦	٢١٦
٧	٤٩	٣٤٣
٨	٦٤	٥١٢
٩	٨١	٧٢٩
١٠	١٠٠	١٠٠٠
١١	١٢١	_____
١٢	١٤٤	_____
١٣	١٦٩	_____
١٤	١٩٦	_____
١٥	٢٢٥	_____

مثال(٢) :

جدْ قيمة:$(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}}$

ملاحظة: تُستخدم طريقة التحلّيل إلى العوامل لحساب قيم بعض الأسس النِّسبيّة المختلفة.

الحلُّ:

٦٢٥	٥
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	قِفْ

القسمة المتكررة ←

$(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}} = (٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥)^{\frac{١}{٤}} = ٥$

(نأخذ من كلّ (٤) أعداد أوليّة متشابهة عددًا واحدًا فيكون النَّاتج هو ٥)

عزيزي الطّالب، ما رأيك بمحاولة حلّ التّدريب الآتي؟

تدريبٌ ٢

جدْ قيمة: $(٧٢٩)^{\frac{١}{٦}}$

الآن، سنتعرفُ على قوانين الأُسس النِّسبيّة الّتي ستساعدنا في إيجاد القيم العددية بأبسط صورة في المقادير الّتي تحتوي على أُسس نسبيّة.

قاعدةٌ:

إذا كان س، ص عددين حقيقيين، و كان م، ن عددين نسبيين، على فرض أنّ $س^{م}$ ، $س^{ن}$ معرّفان، و $ص^{م}$ معرّف فإنّ :

١) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

مثال: $٢^{٤} \times ٢^{٣} = ٢^{٣+٤} = ٢^{٧} = ١٢٨$ (في عملية الضرب نجمع الأسس للأساسات المتشابهة)

٢) $س^{م} \div س^{ن} = \frac{(س)^{م}}{(س)^{ن}} = س^{م-ن}$ ، $س \neq$ صفرًا

مثال: $\frac{(٢)^{٤}}{(٢)^{٣}} = ٢^{٤-٣} = ٢^{١} = ٢$ (في عملية القسمة نطرح الأسس للأساسات المتشابهة)

٣) $(س^{م})^{ن} = (س^{ن})^{م} = س^{م \times ن}$

مثال: $(٢^{٣})^{٢} = ٢^{٣ \times ٢} = ٢^{٦} = ٦٤$

٤) $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$

مثال: $٣^{٣} \times ٢^{٣} = (٣ \times ٢)^{٣} = ٦^{٣} = ٢١٦$

٥) $\frac{(\text{س})^{م}}{(\text{ص})^{م}} = \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{م}$ ، ص ≠ صفرًا

مثال: $٨^{٣} \div ٤^{٣} = \frac{(٨)^{٣}}{(٤)^{٣}} = \left(\frac{٨}{٤}\right)^{٣} = ٢^{٣} = ٨$

٦) $\text{س}^{٠} = ١$

مثال: $(٩)^{٠} = ١$

التفسير: $٩^{ن} \div ٩^{ن} = \frac{(٩)^{ن}}{(٩)^{ن}} = \left(\frac{٩}{٩}\right)^{ن} = ١^{ن} = ١$

$٩^{ن} \div ٩^{ن} = \frac{(٩)^{ن}}{(٩)^{ن}} = ٩^{ن-ن} = ٩^{٠} = ١$

٧) $\text{س}^{-م} = \frac{١}{(\text{س})^{م}}$

مثال: $٥^{-٢} = \frac{١}{(٥)^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$

(نحوّل الأس السّالب إلى موجب عن طريق قلب العدد، حيثُ إنّ مقلوب العدد ٥ هو $\frac{١}{٥}$)

هيّا نتعلم كيفيَّة تطبيق هذه القوانين من خلال الأمثلة الآتية:

مثال(٣):

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي:

١) $(٨١)^{\frac{١}{٤}} \times ٩$

٢) $\left(\frac{-٢٤٣}{٣٢}\right)^{\frac{١}{٥}}$

٣) $\sqrt{(٢)^{٨})^{٢}}$

الحلّ:

١) $(٨١)^{\frac{١}{٤}} \times ٩ = ((٣)^{٤})^{\frac{١}{٤}} \times ٣^{٢}$ (نقوم بتحلّيل العدد ٨١ والعدد ٩ إلى العوامل الأوليّة)

$= (٣)^{٤ \times \frac{١}{٤}} \times ٣^{٢}$ (نضرب الأُسس)

$= ٣^{١} \times ٣^{٢} = ٣^{١+٢}$ (نجمع الأُسس)

$= ٣^{٣} = ٢٧$

٢) $\left(\frac{-٢٤٣}{٣٢}\right)^{\frac{١}{٥}} = \frac{\left(-٣\right)^{\frac{١}{٥}(٥)}}{\left(٢\right)^{\frac{١}{٥}(٥)}}$ (نقوم بتحليل العدد ٢٤٣ والعدد ٣٢ إلى العوامل الأوليّة)

$= \frac{\left(-٣\right)^{\frac{١}{٥}\times٥}}{\left(٢\right)^{\frac{١}{٥}\times٥}}$ (نضرب الأُسس)

$= \frac{\left(-٣\right)^{١}}{\left(٢\right)^{١}} = \frac{-٣}{٢}$

٣) $= \sqrt{\left(٢\right)^{٨}}^{٢} = \left(٢\right)^{١٦}^{\frac{١}{٢}}$ (نكتب الجذر على صورة أُس نسبيّ)

$= \left(٢\right)^{١٦\times\frac{١}{٢}} = \left(٢\right)^{\frac{١٦}{٢}}$ (نضرب الأُسس)

$= ٢^{٨} = ٢٥٦$

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي:

١) $\left(٢١٦\right)^{\frac{١}{٣}} \times ٣٦$

٢) $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{\frac{١}{٤}}$

٣) $\left(\sqrt[٣]{٧}\right)^{-٣}$

مثال (٤)

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي:

١) $\left(\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٣}\right)^{٩}$

٢) $\frac{\left(١ - \sqrt{٥}\right)^{١٥}}{\left(١ - \sqrt{٥}\right)^{١٣}}$

٣) $\frac{\left(٥\right)^{-٢} \times \left(٢٠\right)^{٤}}{\left(٢\right)^{٧}}$

الحلّ:

١) $\left(\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٣}\right)^{٩} = \left(\frac{١}{٣}(٢)\right)^{٩} \times \left(\frac{١}{٣}(٣)\right)^{٩}$ (نكتب الجذور على صورة أُسس نسبيّة)

$= (٢)^{\frac{١}{٣}\times٩} \times (٣)^{\frac{١}{٣}\times٩} = ٢^{٣} \times ٣^{٣}$ (نضرب الأُسس)

$= ٨ \times ٢٧ = ٢١٦$

٢) $\frac{\left(١ - \sqrt{٥}\right)^{١٥}}{\left(١ - \sqrt{٥}\right)^{١٣}} = \left(١ - \sqrt{٥}\right)^{١٥-١٣}$ (نطرح الأُسس)

$= \left(١ - \sqrt{٥}\right)^{٢}$ (تذكّر: $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$)

$= ١ + ٥ - ٢\sqrt{٥} = ٦ - ٢\sqrt{٥}$

٣) $\frac{(٥)^{-٢} \times (٢٠)^{٤}}{(٢)^{٧}} = \frac{(٥)^{-٢} \times (٥ \times ٢ \times ٢)^{٤}}{(٢)^{٧}}$ (نحلّل العدد ٢٠ إلى عوامله الأوليّة)

$= \frac{(٥)^{-٢} \times (٥)^{٤} \times (٢)^{٤} \times (٢)^{٢}}{(٢)^{٧}}$ (نوزع الأُسس في حالة الضرب)

$= \frac{(٥)^{-٢+٤} \times (٢)^{٨}}{(٢)^{٧}}$ (نجمع أُسس الأساسات المتشابهة، نضرب الأُسس)

$= ٥^{٢} \times ٢^{٨-٧}$ (نطرح أُسس الأساسات المتشابهة)

$= ٥^{٢} \times ٢^{١} = ٢٥ \times ٢ = ٥٠$

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

١) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt[٣]{٢}}\right)^{٦}$

٢) $\frac{\left(\sqrt{٢} - \sqrt{٣}\right)^{٥}}{\left(\sqrt{٢} - \sqrt{٣}\right)^{-٥}}$

٣) $\frac{(٢٤)^{٣}}{(٦)^{٥} \times (٩)^{-٢}}$

الآن، سنتعرف على مفهوم الصّورة العلميّة :

الصّورة العلميّة تعني: القدرة على كتابة الأعداد النِّسبيّة باستخدام قوى العدد ١٠، وهذه الطّريقة مفيدة جدًا لاختصار وكتابة الأعداد الكبيرة جدًا والصّغيرة جدًا.

الصّورة العلميّة هي:

$أ \times ١٠^{ن}$، حيث $|أ| \in [١، ١٠)$، $ن \in ص$

سنتعلَّم الآن كيفيَّة :

١) كتابة الأعداد باستخدام الصّورة العلميّة.

٢) كتابة الأعداد دون استخدام الصّورة العلميّة.

مثال (٥):

عبّر بالصّورة العلميّة عن كلّ من الأعداد الآتية:

١) ٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠

٢) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣

الحلّ:

١) $٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٤,٩١٨ \times ١٠^{١٢}$

$٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٤ , ٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠ \times ١٠^{١٢}$

(نقوم بتحريك الفاصلة نحو اليسار لأن ٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠ عدد كبير ونريد أنْ نصل إلى عدد $\in [١، ١٠)$، ثمَّ تكون ن عدد المنازل الّتي تتحركها الفاصلة العشرية)

٢) $٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ = ٣ \times ١٠^{-١٠}$

$٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ = ٣ \times ١٠^{-١٠}$

(نقوم بتحريك الفاصلة نحو اليمين لأن ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ عدد صغير ونريد أن نصلْ إلى عدد $\in [١، ١٠)$، ثمَّ تكون ن عدد المنازل الّتي تتحركها الفاصلة العشريّة).

قاعدة : عند كتابة العدد بالصّورة العلميّة فإنّه يكتب على صورة:

$أ \times ١٠^{ن}$، حيث $|أ| \in [١، ١٠)$، $ن \in ص$:

١) عند إزاحة الفاصلة العشريّة إلى اليسار نضرب في ١٠^{ن} ، حيث ن عدد المنازل الّتي تتحركها الفاصلة العشريّة .

٢) عند إزاحة الفاصلة العشريّة إلى اليمين نضرب في ١٠$^{-ن}$ ، حيث ن عدد المنازل الّتي تتحركها الفاصلة العشريّة .

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٥

عبّر بالصّورة العلميّة عن كلّ من الأعداد الآتية:

أ) ٩٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

ب) – ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٧

مثال (٦)

اكتبْ الأعداد الآتية دون استخدام الصّورة العلميّة :

١) ٤,٥ × ١٠$^{-٧}$

٢) –٨ × ١٠^{١٦}

الحلّ:

١) ٤,٥ × ١٠$^{-٧}$ = ٠,٠٠٠٠٠٠٤٥

(بما أنّ (ن سالبة) إذًا الأصفار موجودة على يسار العدد، لذلك نحرك الفاصلة العشريّة باتجاه اليسار ٧ منازل) (٤,٥ × ١٠$^{-٧}$ = ٠,٠ ٠٠٠٠٠٤٥ هنا تحركنا منزلة بقي لدينا ٦ منازل نضع مكانها أصفار)

٢) –٨ × ١٠^{١٦} = – ٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

(بما أنّ (ن موجبة) إذًا الأصفار موجودة على يمين العدد، لذلك نحرك الفاصلة العشريّة باتجاه اليمين ١٦ منزلة) (٨,٠ × ١٠^{١٦} = ٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٦

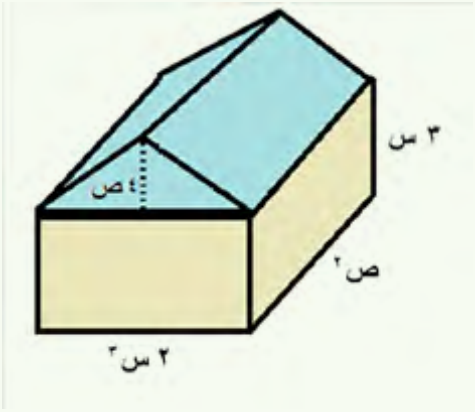
اكتب الأعداد الآتية دون استخدام الصّورة العلميّة:

١) $٣,٩ \times ١٠^{٥}$

٢) ٢×١٠^{-٨}

إثراء

عبِّر عن حجم الشّكل المجاور مستخدمًا الأُسس:



المقدّمة

سنتعرف عزيزي الطّالب في هذا الدّرس على:

١) كيفيَّة تبسيط المقادير العدديّة باستخدام قوانين الأُسس النِّسبيّة .

٢) مفهوم إنطاق المقام.

٣) حلّ المعادلة الأُسيّة.

أخذنَا في الدّرس السّابق مجموعة من القوانين المتعلِّقة بالأُسس النِّسبيّة وهي:

قوانين الأسس النِّسبيّة:

١) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

٢) $س^{م} \div س^{ن} = \frac{(س)^{م}}{(س)^{ن}} = س^{م-ن}$ ، $س \neq$ صفرًا

٣) $(س^{م})^{ن} = (س^{ن})^{م} = س^{م \times ن}$

٤) $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$

٥) $\frac{(س)^{م}}{(ص)^{م}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{م}$ ، $ص \neq$ صفرًا

٦) $س^{٠} = ١$

٧) $س^{-م} = \frac{١}{(س)^{م}}$

لقد ساهمت هذه القوانين في تسهيل إيجاد القيم العددية بأبسط صورة للمقادير الّتي فيها أسس نسبيّة.

الآن، سنتعرّفُ على القاعدة الآتية:

إذا كانت م ∈ ط ، ن عددًا نسبيًا ، س ∈ ح$^{+}$ ، فإنّ :

$$\sqrt[م]{(س)^{ن}} = \left(\sqrt[م]{س}\right)^{ن} = \left((س)^{\frac{١}{م}}\right)^{ن} = (س)^{\frac{ن}{م}}$$

لنتعلَّم كيفيَّة تطبيق هذه القاعدة من خلال المثال الآتي :

مثال(١):

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي:

١) $\sqrt[٣]{(٢١٦)^{٢}}$ ٢) $\sqrt[٥]{(٨)^{١٠}}$

الحلّ:

١) $\sqrt[٣]{(٢١٦)^{٢}}$ ٢) $\sqrt[٣]{(٦^{٣})^{٢}}$ (نقوم بكتابة العدد ٢١٦ على شكل أُسس)

$= (\sqrt[٣]{٦^{٣}})^{٢} = (٦^{\frac{٣}{٣}})^{٢}$ (نكتب الجذر على صورة أُس نسبيّ باستخدام القاعدة)

$= (٦^{١})^{٢} = ٦^{٢} = ٣٦$ (نضرب الأُسس)

٢) $\sqrt[٥]{(٨)^{١٠}} = (٨)^{\frac{١٠}{٥}}$ (نكتب الجذر على صورة أُس نسبيّ باستخدام القاعدة)

$= ٨^{٢} = ٦٤$

ما رأيك بحلّ التّدريب الآتي؟

تدريبٌ ١

جدْ قيمة كلّ ممّا يأتي:

١) $\sqrt[٣]{(٣٢)^{٣}}$

٢) $\sqrt[٦]{(٥)^{٦}}$

بعد أنْ تعلّمنا كيفيَّة تطبيق القاعدة السّابقة للأُسس النِّسبيّة إليك عزيزي الطّالب المثال الآتي:

مثال(٢)

جدْ قيمة ما يأتي بأبسط صورة:

$$\sqrt[٣]{\frac{٢٤ \times (٦)^{٣}}{(٢)^{٨} \times (٣ \times ٢)^{٧}}}$$

ملاحظة: $(س)^{ن}$ — أس، أساس

الحلّ:

$$\sqrt[٣]{\frac{٢٤ \times (٦)^{٣}}{(٢)^{٨} \times (٣ \times ٢)^{٧}}} = \sqrt[٣]{\frac{٣ \times ٣(٢) \times ٣(٣ \times ٢)}{(٢)^{٨} \times (٣ \times ٢)^{٧}}}$$ (نقوم بتحلّيل الأعداد إلى عواملها الأوليّة)

$$= \sqrt[3]{\frac{(2)^{3} \times (3)^{3} \times 3 \times (2)^{3}}{(2)^{7} \times (3)^{7} \times (2)^{8}}} = \sqrt[3]{\frac{(2)^{6} \times (3)^{4}}{(2)^{15} \times (3)^{7}}}$$ (نجمع الأُسس للأساسات المتشابهة)

$$= \sqrt[3]{(2)^{6-15} \times (3)^{4-7}} = \sqrt[3]{(2)^{-9} \times (3)^{-3}}$$ (نطرح الأُسس للأساسات المتشابهة)

$$= (2)^{-\frac{9}{3}} \times (3)^{\frac{-3}{3}} = 2^{-3} \times 3^{-1}$$ (نكتب الجذر على صورة أُس نسبيّ)

$$= \frac{1}{(2)^{3}} \times \frac{1}{(3)^{1}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$ (نحوّل الأُس السّالب إلى موجب عن طريق قلب العدد)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٢

جدْ قيمة ما يأتي بأبسط صورة:

$$\sqrt[8]{\frac{(3)^{19} \times (2)^{-8}}{(13)^{11}}}$$

الآن، سننتقل إلى مفهوم جديد، وهو مفهوم إنطاق المقام.

إنطاق المقام: يعني كتابة المقادير العددية بصورة لا يظهرُ فيها الجذر في المقام.

إليك المثال الآتي:

مثال(٣)

اكتبْ ما يأتي بصورة، حيث لا يظهر فيها الجذر في المقام:

١) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ٢) $\frac{3}{\sqrt{2}+5}$

الحلّ:

١) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{3})^{2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

(لأنّ المقام $= \sqrt[3]{3}$ نقوم بالضّرب بـ $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$ لأنّ قيمته = ١ وهي لا تغير من قيمة المقدار، وبهذه الطّريقة نتخلص من الجذر الموجود بالمقام وهذه العمليّة تُسمّى إنطاق المقام).

٢) $\frac{٣}{٥+\sqrt{٢}} = \frac{٣}{٥+\sqrt{٢}} \times ١ = \frac{٣}{٥+\sqrt{٢}} \times \frac{٥-\sqrt{٢}}{٥-\sqrt{٢}}$

(لأنّ المقام $= \sqrt{٢}+٥$ والمرافق لهذا المقدار هو $\sqrt{٢}-٥$ ، لذلك نقوم بالضّرب بـ $\frac{٥-\sqrt{٢}}{٥-\sqrt{٢}}$ لأنّ قيمته $= ١$ وهي لا تغيّر من قيمة المقدار).

$$= \frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢٥-٥\sqrt{٢}+٥\sqrt{٢}-(\sqrt{٢})^{٢}} = \frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢٥-٢} = \frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢٣-}$$

(وكما نلاحظ فإنّ الجذر قد اختفى من المقام وهذا ما يُسمّى بإنطاق المقام)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

اكتب ما يأتي بصورة، حيث لا يظهر فيها الجذر في المقام:

١) $\frac{٣}{\sqrt{٧}}$

٢) $\frac{\sqrt{٢}}{٣-\sqrt{٥}}$

الآن، سننتقل إلى موضوع آخر، وهو المعادلات الأُسيّة.

لقد تعرّفتَ في صفوف سابقة أنواع بعض المعادلات مثل: س+٨=٥ وتعلمتَ أنّ حلّ المعادلة يعني إيجاد قيمة المتغيّر الّذي يجعلُ المعادلة عبارة صحيحة، وهنا سنتعرفُ على نوع جدِيد من المعادلات يُسمّى المعادلات الأُسيّة.

والمعادلة الأُسيّة: هي عبارة رياضيّة يكون الأساس فيها عددًا حقيقيًا والأّس متغيّرًا، وتحتوي على إشارة المساواة (=)، مثل:

$٣^{ص}=٢٧$ ، $٩^{٤-ع}=٧٢٩$ ، $(\frac{١}{٥})^{س} = \frac{١}{١٢٥}$

حتّى نتمكَّنَ من حلّ المعادلة الأُسيّة يجب كتابة الطّرفين بصورة أُسيّة تتساوى فيها الأساسات، وذلك بتحلّيل الأعداد إلى العوامل الأوليّة واستخدام قوانين الأُسس، فإذا تساوى أساس طرفيّ معادلة فإنّ الأُسس متساوية.

وسنوضّح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال(٤):

حلّ المعادلات الأُسيّة الآتية:

١) $٢^{س-١} = ٣٢$ ٢) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = ٠,٠٠١$

٣) $١١^{٦ل} = ١٢١^{٢ل} \times ١١^{٢}$ ٤) $٩^{ص} = ١$

الحلّ:

١) $٢^{س-١} = ٣٢$ (نقوم بتحلّيل العدد ٣٢ إلى عوامله الأوليّة حتى تصبح الأساسات متساوية)

$٢^{س-١} = ٢^{٥}$ (إذا تساوى أساس طرفيّ معادلة فإنّ الأُسس متساوية)

$\therefore$ س $-$ ١ $=$ ٥

$+١ \quad +١$

س = ٦

٢) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = ٠,٠٠١$ (هنا نكتب الأعداد العشريّة على صورة كسور ليسهل علينا الحلّ)

$\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = \frac{١}{١٠٠٠} = \left(\frac{١}{١٠}\right)^{٣}$ (أصبحت الأساسات متساوية إذن الأُسس متساوية)

$\therefore$ **ع = ٣**

٣) $١١^{٦ل} = ١٢١^{٢ل} \times ١١^{٢}$ (نكتب العدد ١٢١ على صورة أُسس لتصبح جميع الأساسات متساوية)

$١١^{٦ل} = (١١^{٢})^{٢ل} \times ١١^{٢}$ (نضرب الأُسس)

$١١^{٦ل} = ١١^{٤ل} \times ١١^{٢}$ (نجمع الأسس)

$١١^{٦ل} = ١١^{٤ل+٢}$ (أصبحتِ الأساسات متساوية إذًا الأُسس متساوية)

$\therefore$ ٦ل $=$ ٤ل $+$ ٢

$-٤ل \quad -٤ل$

٢ل = ٢ **ل = ١**

٤) ٩ ^{ص} = ١ ⟵ ص = ٠ (تذكّر أنّ: س^{٠} = ١)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

حلّ المعادلات الأسيّة الآتية:

١) ٢ $^{س-١}$ = ١٦

٢) (٠,٠١)^{ص} = (٠,٠٠١)^{٧}

٣) ٢ ^{س} × ٤ ^{٢س} = ١٠٢٤

٤) ١٣ ^{ن} = ١

إثراء

حلّ المعادلة الأُسيّة الآتية :

٧ $^{(س٢ - ٤)}$ = ١

عنوان الدّرس: المسافة بين نقطتين وإحداثيّي نقطة منتصف قطعة مستقيمة

المقدّمة :

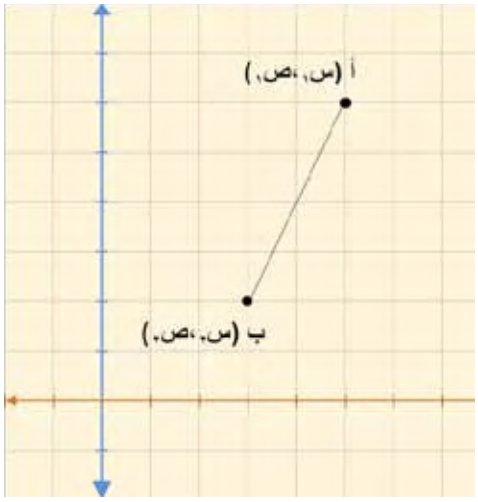
وحدة الهندسة الإحداثيّة هي وحدة تربط بين مفاهيم الجبر من حيث العمليات الحسابية وحلّ المعادلات وغيرها، ومفاهيم الهندسة من حيث المثلّثات والدّوائر والمستوى الإحداثيّ (المستوى البياني) وغيره.

وسنتعرف في هذا الدّرس على قانونيّ :

١) المسافة بين نقطتين.

٢) إحداثيّي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

الشّكل المجاور يمثّل إحداثيّات النّقطتين أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) و ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) على المستوى الإحداثيّ:



لاحظ المسافة بين النّقطتين (أ)، و (ب) هي عبارة عن القطعة المستقيمة الواصلة بين النّقطتين (أ) و (ب) = $\overline{\text{أ ب}}$.

ولإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثيّ نقوم بتطبيق القانون الآتي:

إذا كانت النّقطتان أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)، فإنّ :

طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ = المسافة بين النّقطتين أ، ب

$$= \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$$

الفرق في السّينات — الفرق في الصّادات

الآن، سنتعلَّم من خلال المثال الآتي كيفيَّة إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثيّ باستخدام القانون السّابق:

مثال (١):

جدْ المسافة بين النّقطتين م (٢ ، ٣) ، ن (٧ ، − ١) .

الحلّ:

(من المهم جدًا تحديد النّقطة الّتي ستكون إحداثيّاتها (س١ ، ص١) ، والنّقطة الّتي ستكون إحداثيّاتها (س٢ ، ص٢) قبل تطبيق القانون).

س١ ص١ س٢ ص٢

م (٢ ، ٣) ، ن (٧ ، − ١)

إذنْ: المسافة بين النّقطتين (م) ، (ن) = طول $\overline{\text{م ن}}$

$$= \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2} = \sqrt{(7 - 2)^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

ملاحظة

قد يختار أحد الطّلبة أنْ تكون النّقطة (ن) إحداثيّاتها (س١ ، ص١)، والنّقطة (م) إحداثيّاتها (س٢ ، ص٢) فهل ستختلف الإجابة؟ لا، لن تختلف الإجابة فالمسافة من النّقطة (م) إلى (ن) هي نفسها المسافة من النّقطة (ن) إلى (م)، ويمكنك التّحقق من ذلك بنفسك من خلال حلّ المثال مرة أخرى بالإحداثيّات الّتي تمّ تحديدها.

ما رأيك عزيزي الطّالب بحلّ التّدريب الآتي لتتحققَ من فهمك لكيفيَّة إيجاد المسافة بين نقطتين؟

تدريبٌ ١

جدْ طول $\overline{\text{ل هـ}}$ ، حيث ل (٣ ، −١)، هـ (−٢ ، ٢) .

(تذكّر أنّ طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{ل هـ}}$ = المسافة بين النّقطتين (ل) ، (هـ))

بعد أنْ انتهينا من تعلّم كيفيَّة تطبيق قانون المسافة بين نقطتين معلومتين على المستوى الإحداثيّ، سننتقل إلى المثال الآتي لحلّ مسائل عمليّة على المسافة بين نقطتين.

مثال(٢):

النّقطتان م (٢ ، – ٣)، ل (جـ ، ٥)، تمثّلان نهايتي قطر دائرة مركزها ن ، إذا كان طول نصف قطر الدّائرة (٥) سم، جدْ قِيَم جـ الممكنة.

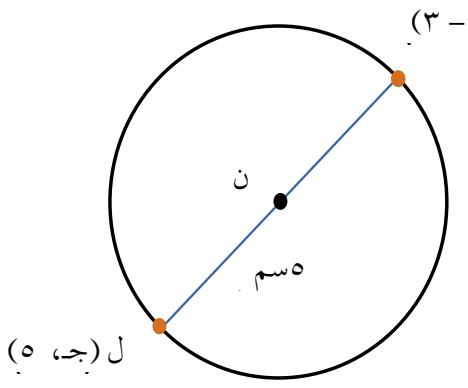
الحلّ:

(نرسم مُعطيات السّؤال لتسهيل تنفيذ الحلّ).

جـ هي الإحداثي السّيني للنقطة ل.

ولإيجاد قِيَم جـ الممكنة سنستخدم قانون المسافة بين نقطتين

حيث إنّ المسافة بين النّقطتين (م) و (ل) تمثّل طول قطر الدّائرة.



طول قطر الدّائرة = ٢ × نق = ٢ × ٥ = ١٠ سم

م (٢ ، –٣): س$_{١}$ = ٢ ، ص$_{١}$ = –٣

ل (جـ ، ٥): س$_{٢}$ = جـ ، ص$_{٢}$ = ٥

$\overline{م\,ل} = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

$١٠ = \sqrt{(جـ - ٢)^{٢} + (٥ - (-٣))^{٢}}$

$(١٠)^{٢} = \left(\sqrt{(جـ - ٢)^{٢} + (٨)^{٢}}\right)^{٢}$ (نقوم بتربيع الطّرفين للتّخلص من الجذر)

$١٠٠ = (جـ - ٢)^{٢} + (٨)^{٢}$

$١٠٠ = (جـ - ٢)^{٢} + ٦٤$

$-٦٤ \quad -٦٤$

$٣٦ = (جـ - ٢)^{٢}$

$\sqrt{٣٦} = \sqrt{(جـ - ٢)^{٢}}$ (نأخذ الجذر التّربيعيّ للطّرفين للتّخلص من التّربيع)

$٦ = |جـ - ٢|$ (تذكّر أنّ $\sqrt{(س)^{٢}} = |س|$)

وهذا يعني إمّا جـ – ٢ = ٦ ومنها جـ = ٨

وإمّا جـ – ٢ = –٦ و منها جـ = –٤

تذكّر عزيزي الطّالب أنّ:

$|س| = ب$ فإنّ: $س = ب$ أو $س = -ب$

بعد فهمك للمثال السّابق حاول أنْ تحلّ التّدريب الآتي:

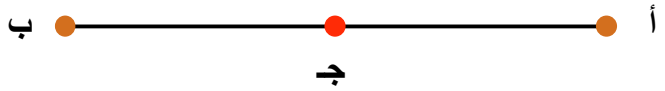
تدريبٌ ٢

إذا كانت $\overline{أ ب}$ قطعة مستقيمة طولها (٥) وحدات، وكانت أ (ل ، ٤)، ب (٧ ، ١)، فجدْ جميع القِيَم الممكنة للثّابت ل.

(بإمكانك رسم مُعطيات السّؤال لتسهيل تنفيذ الحلّ)

الآن، سنتعرف على إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة .

مثلاً إذا كان لدي النّقطتان أ ($س_١$ ، $ص_١$)، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، حيث إنّ النّقطة (جـ) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$.



إحداثيّا النّقطة (جـ) يمكن إيجادهما من خلال القانون الآتي:

إذا كانت النقطتان أ ($س_١$ ، $ص_١$)، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)، فإنّ :

إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

إليك عزيزي الطّالب المثال الآتي:

مثال(٣) :

إذا كانت النقطتان أ (-١ ، ٤)، ب (٥ ، ١٠) نقطتين في المستوى الإحداثيّ، جدْ إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$.

الحلّ:

أ (-١ ، ٤) : $س_١ = -١$ ، $ص_١ = ٤$

ب (٥ ، ١٠) : $س_٢ = ٥$ ، $ص_٢ = ١٠$

إحداثيا نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$= \left(\frac{(-١) + ٥}{٢} ، \frac{١٠ + ٤}{٢} \right) = \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{١٤}{٢} \right) = (٢ ، ٧)$

بإمكانك الآن عزيزي الطّالب حلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

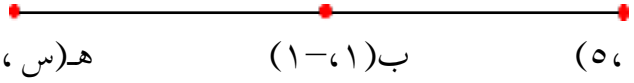
جدْ إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{جـ د}$ ، حيث جـ (٢ ، ٤)، د (−٢، −٦).

مثال(٤):

إذا كانت النقطتان أ (−٢ ، ٥)، ب (١ ، −١) نقطتين في المستوى الإحداثي، وكانت النّقطة (ب) نقطة منتصف $\overline{أ هـ}$ ، فما إحداثيا النّقطة (هـ) ؟

الحلّ:

نرسم القطعة المستقيمة $\overline{أ هـ}$ ونفرض أنّ إحداثيي النّقطة (هـ) هما (س ، ص)



النّقطة (ب) هي نقطة منتصف $\overline{أ هـ}$

إحداثيا النّقطة ب $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$(١ ، -١) = \left(\frac{س + (-٢)}{٢} ، \frac{ص + ٥}{٢} \right)$

(ملاحظة: إذا كان (س$_١$ ، ص$_١$) = (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، فهذا يعني أنّ س$_١$ = س$_٢$ ، و ص$_١$ = ص$_٢$)

إذنْ :

$\frac{س + (-٢)}{٢} = ١$ ⟹ $٢ = س + (-٢)$

$+٢ \quad +٢$

$س = ٤$

$\frac{ص + ٥}{٢} = -١$ ⟹ $-٢ = ص + ٥$

$-٥ \quad -٥$

$ص = -٧$

(ضرب تبادلي)

إذنْ: إحداثيّا النّقطة هـ = (٤ ، −٧)

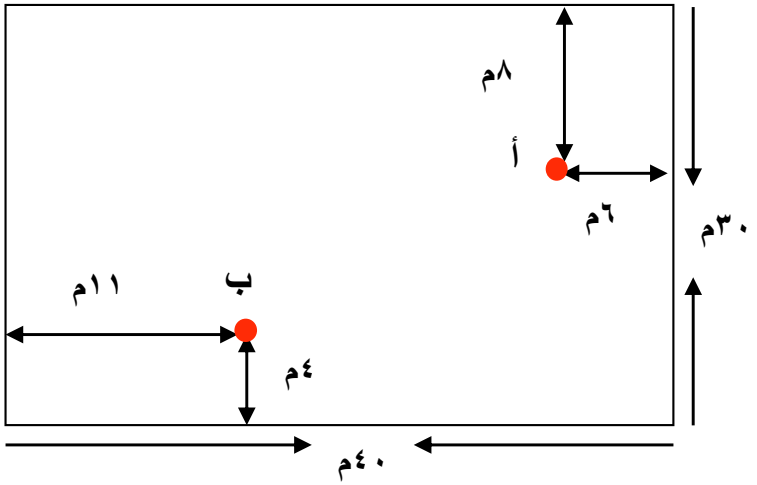
عزيزي الطّالب حاول أن تحلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

إذا كانت ن (٠ ، ٢) نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{م ل}}$ ، حيث م (٤ ، −١)، فما إحداثيّا النّقطة ل ؟

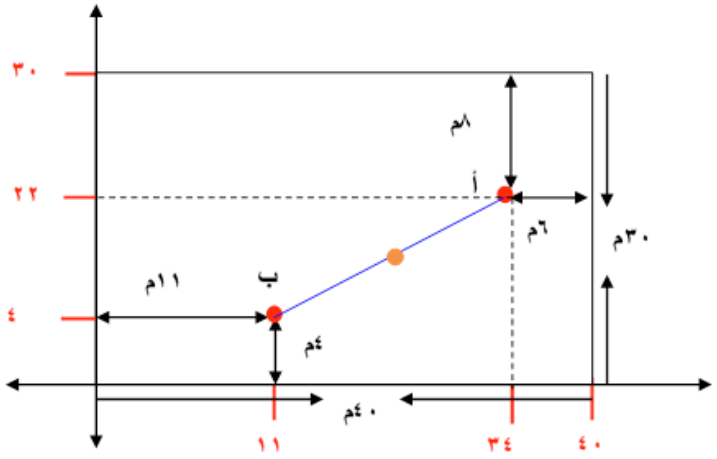
مثال (٥):

يمثّل الشّكلُ المجاور حديقة مستطيلة الشّكل، النّقطتان (أ)، (ب) تمثّلان موقع حنفيتين لريّ المزروعات، يريد صاحب المزرعة أنْ يضع حنفية ثالثة في منتصف المسافة بين الحنفيتين، ساعد صاحب المزرعة في تحديد موقع الحنفية الثّالثة.



الحلّ:

يريد صاحب المزرعة أنْ يضع حنفية ثالثة في منتصف المسافة بين الحنفيتين، هذا يعني أنّ موقع الحنفية الثّالثة سيكون عند إحداثيّات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$.



ولإيجاد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ ، لا بُدّ لنا من معرفة إحداثيي النّقطة (أ) والنّقطة (ب)، لذلك دعنا نتخيّل الحديقة داخل المستوى الإحداثيّ (المستوى البياني) حيث إنّ الأبعاد موجبة، وبالتّالي يكون إحداثيا كلّ من النقطتين (أ) و (ب) هو:

أ (٣٤ ، ٢٢) ، ب (١١ ، ٤)

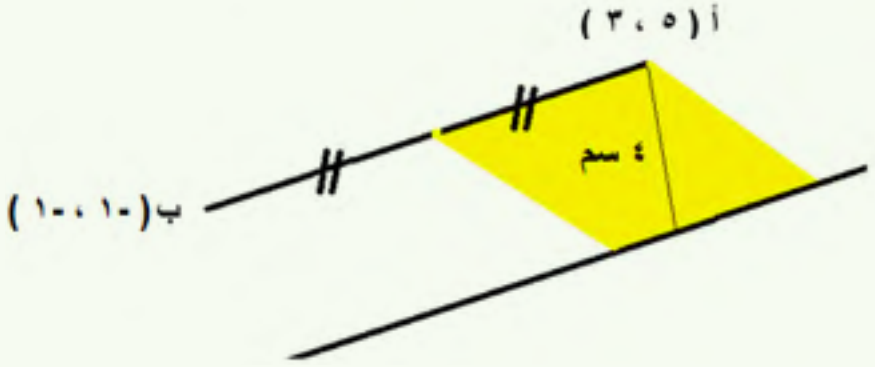
$$\text{إحداثيا نقطة منتصف أ ب} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

$$= \left(\frac{٣٤ + ١١}{٢} ، \frac{٢٢ + ٤}{٢} \right) = \left(\frac{٤٥}{٢} ، \frac{٢٦}{٢} \right) = (٢٢,٥ ، ١٣)$$

إذنْ، موقع الحنفية الثّالثة هو: (٢٢,٥ ، ١٣)

إثراء

في الشّكل المجاور، جدْ مساحة المنطقة المظلّلة.



عنوان الدّرس: معادلة الخط المستقيم ومعادلة الدّائرة

المقدمة :

النّقطة (أ) في الشّكل المجاور، تمثّل موقع رادار يرصد سيّارة (النّقطة ب)، بحيث تبقى السّيّارة على بعد ثابت مقداره (٦٠) كم عن الرّادار.

أ) ما معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ إذا كان ميله (٥)؟

ب) ما الشّكل الهندسيّ الّذي تتحرك عليه السّيّارة؟

جـ) ما معادلة المنحنى الّذي تتحرك عليه السّيّارة؟

(معتبرًا النّقطة (أ) نقطة الأصل).

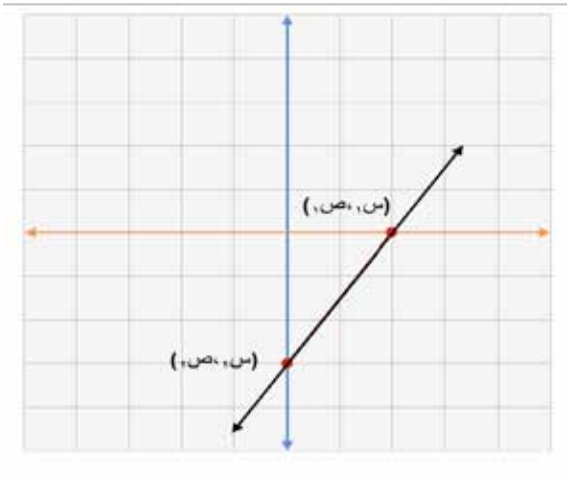
سنتعرّف في هذا الدّرس على:

١) معادلة الخط المستقيم وكيفيَّة إيجادها من معلومات كافية.

٢) معادلة الدّائرة وكيفيَّة إيجادها بالصّورة القياسيّة من معلومات كافية.

ولإيجاد معادلة الخط المستقيم، لا بدّ من أنْ تكون لديك معرفة مسبقة بقانون ميل الخط المستقيم، ومعرفة مسبقة بكيفيَّة إيجاد المقطع السّينيّ والمقطع الصّاديّ من معادلة خط مستقيم مُعطى.

عزيزي الطّالب لإيجاد ميل الخط المستقيم، لا بُدّ من أنْ تكون لدينا نقطتان معلومتان تقعان على الخط المستقيم المُراد إيجاد ميله، كما في الشّكل الآتي:



قانون ميل الخط المستقيم هو:

ميل الخط المستقيم الّذي يمر بالنّقطتين (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) :

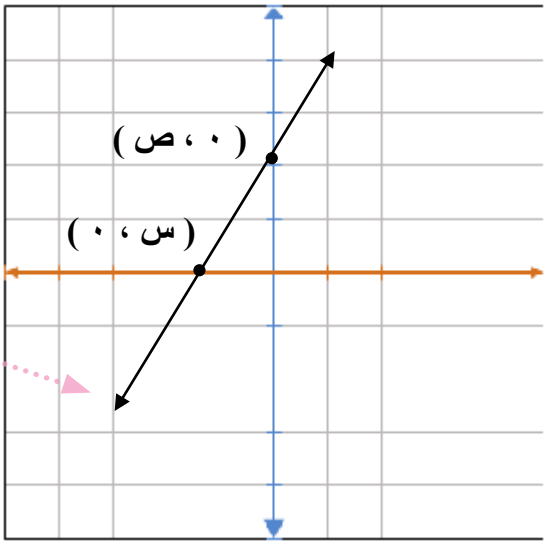
$$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{الفرق في الصادات}}{\text{الفرق في السينات}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

حيث س$_{٢}$ ≠ س$_{١}$ ، Δ تُقرأ (دلتا)، ويُرمز للميل بالرّمز(م)

مثال (١):

جدْ المقطع السّينيّ والمقطع الصّاديّ للمستقيم الّذي معادلته ص = ٢ س + ٢ .

الحلّ:



أيّ نقطة تقع على محور السّينات يكون الإحداثيّ الصّاديّ لها = صفر وأيّ نقطة تقع على محور الصّادات يكون الإحداثيّ السّيني لها = صفر

ولإيجاد المقطع السّينيّ للمستقيم، فإنّنا نعوض مكان ص صفرًا

٠ = ٢ س + ٢

−٢ −٢

−٢ = ٢ س ومنه س = −١

إذنْ: المقطع السّينيّ = −١ ، يعني المستقيم يقطع محور السّينات في النّقطة (−١ ، ٠)

ولإيجاد المقطع الصّاديّ للمستقيم، فإنّنا نعوض مكان س صفرًا

ص = ٢ × ٠ + ٢

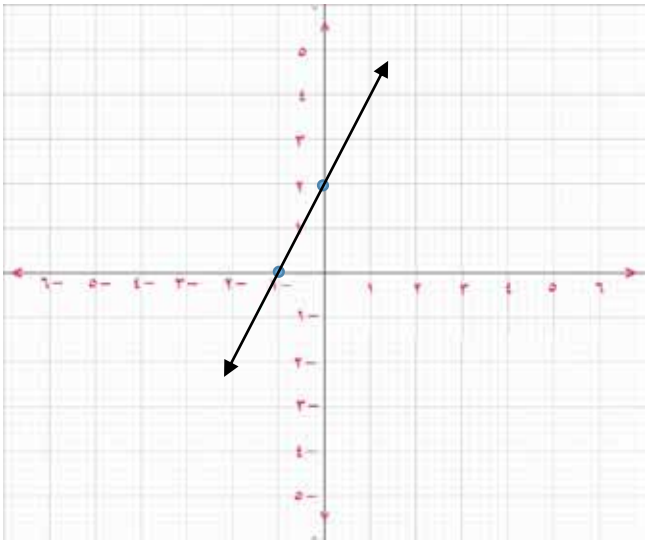
ص = ٠ + ٢ ومنه ص = ٢

إذنْ: المقطع الصّاديّ = ٢ ، يعني المستقيم يقطع محور الصّادات في النّقطة (٠ ، ٢)

وبإمكانك إيجاد المقطع الصّاديّ بشكل مباشر من معادلة الخط المستقيم، حيث إنّ المقطع الصّاديّ هو عبارة عن الحد الثّابت (الحد المطلق) في معادلة الخط المستقيم.

ص = ٢ س + ٢ ← الحد الثابت

بإمكاننا تخيّل شكل المستقيم في المستوى الإحداثيّ، كما في الشّكل الآتي:



الصّورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي:

معادلة الخط المستقيم الّذي ميله (م)، ويمرّ بالنّقطة أ (س١ ، ص١) هي:

ص – ص١ = م (س – س١)

لإيجاد معادلة الخط المستقيم نحتاج إلى:

١) ميل الخط المستقيم

٢) نقطة تقع على المستقيم

الآن، سوف نتعلّم كيف نجدْ معادلة الخط المستقيم إذا عُلم ميله وعُلِمت نقطة تقع عليه من خلال المثال الآتي :

مثال (٢):

جدْ معادلة الخط المستقيم الّذي ميله (٤)، ويمرّ بالنّقطة أ (−١ ، ٣) .

الحلّ:

م = ٤ ، أ (−١ ، ٣) : س$_{١}$ = −١ ، ص$_{١}$ = ٣

وبالتّعويض في معادلة الخط المستقيم

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − ٣ = ٤ (س − (−١))

ص − ٣ = ٤ (س + ١)

ص − ٣ = ٤ س + ٤

+ ٣ + ٣

إذنْ، معادلة الخط المستقيم هي: ص = ٤ س + ٧

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ١

جدْ معادلة الخط المستقيم الّذي ميله (− ٣)، ويمرّ بالنّقطة (٤ ، − ١) .

الآن، كيف نجدْ معادلة الخط المستقيم إذا عُلم عليه نقطتان ؟

مثال(٣):

ما معادلة الخط المستقيم الّذي يمرّ بالنّقطتين أ (١ ، ٢)، ب (−١ ، ٦) .

الحلّ:

نحسب ميل المستقيم من خلال القانون: $م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

حيث:

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٢

س$_{٢}$ = −١ ، ص$_{٢}$ = ٦

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٢}{١-(-١)} = \frac{٤}{٢-} = -٢$$

إذنْ، م $= -٢$

النّقطتان أ ، ب تقعان على الخط المستقيم، ولتكن النّقطة أ (١ ، ٢) هي ($س_١$ ، $ص_١$)

$س_١ = ١$ ، $ص_١ = ٢$

إذنْ: معادلة الخط المستقيم هي: ص – $ص_١$ = م (س – $س_١$)

ص – ٢ $= -٢$ (س – ١)

ص – ٢ $= -٢$ س + ٢

+ ٢ + ٢

ص $= -٢$ س + ٤

• فكّرْ

هل تختلف معادلة المستقيم في المثال (٣) باستخدام النقطة ب (– ١ ، ٦) بدلًا من النقطة أ (١ ، ٢)؟

لا تختلف معادلة الخط المستقيم، و بإمكانك عزيزي الطالب التحقق من ذلك من خلال حل المثال و إيجاد معادلة الخط المستقيم باستخدام النقطة ب بدلًا من النقطة أ .

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٢

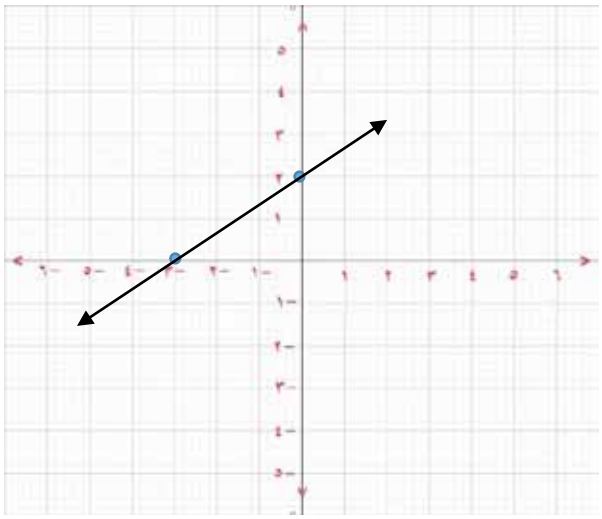
جدْ معادلة المستقيم المار بالنّقطتين أ (– ١ ، ٤)، ب (– ٢ ، ٥) .

الآن كيف نجد معادلة الخط المستقيم إذا عُلم مقطعه السّينيّ ومقطعه الصّاديّ؟

مثال (٤):

ما معادلة الخط المستقيم الّذي مقطعه السّينيّ (– ٣)، ومقطعه الصّاديّ (٢)؟

الحلّ:



بما أنّ المقطع السّيني = –٣ ، فإنّ الخط المستقيم يمرّ بالنّقطة (– ٣ ، ٠)

بما أنّ المقطع الصّاديّ = ٢ ، فإنّ الخط المستقيم يمرّ بالنّقطة (٠ ، ٢)

$س_١ = -٣$ ، $ص_١ = ٠$

$س_٢ = ٠$ ، $ص_٢ = ٢$

أولًا، نقوم بحساب ميل الخط المستقيم :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٢ - ٠}{٠ - (-٣)} = \frac{٢}{٣}$$

الآن، بإمكانك اختيار إحدى النّقطتين لتكن ($س_١$ ، $ص_١$)، ولتكن (–٣ ، ٠)

معادلة الخط المستقيم: $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$$ص - ٠ = \frac{٢}{٣} (س - (-٣)) = \frac{٢}{٣} (س + ٣)$$

$$ص = \frac{٢}{٣} س + ٢$$

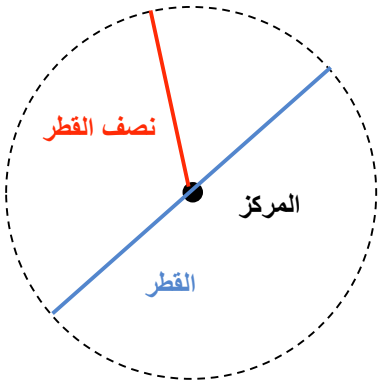
عزيزي الطّالب بعد فهمك المثال السّابق، تستطيع حلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

ما معادلة الخط المستقيم الّذي مقطعه السّينيّ (٣)، ومقطعه الصّاديّ (– ٣)؟

بعد أنْ تعرفنا على معادلة الخط المستقيم، سنتعرّف الآن على الصّورة القياسيّة لمعادلة الدّائرة .

أولًا، يجب أن نتذكّر أنّ:



الدّائرة: هي جميع النّقاط في المستوى الّتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة في المستوى المذكور نفسه.

بُعدُ النقاط عن النقطةِ الثابتةِ يُسمّى طولَ **نصفِ قطرِ الدائرةِ** .

النقطةُ الثابتةُ تُسمّى **مركزَ الدائرةِ** .

القطر: القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدّائرة بحيث تمرّ بالمركز.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د ، هـ)، و طول نصف قطرها (ر) هي:

$$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}.$$

الآن، سنتعلَّم كيف يمكننا إيجاد معادلة الدّائرة بالصّورة القياسيّة من معلومات كافية من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (٥):

ما معادلة الدّائرة الّتي مركزها النّقطة (−١ ، ٤)، وطول نصف قطرها (٦) وحدات؟

الحلّ:

إحداثيّا نقطة المركز (د ، هـ) = (−١ ، ٤)

طول نصف القطر = ر = ٦

إذنْ: معادلة الدّائرة هي: $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

$(س - (-١))^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٦^{٢}$

$(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٣٦$

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

ما معادلة الدّائرة الّتي مركزها النّقطة (− ١ ، ٣)، وطول قطرها (١٤) وحدة؟

(تذكّر أنّ: طول نصف القطر (نق) = $\frac{١}{٢}$ × القطر)

مثال (٦):

ما معادلة الدّائرة الّتي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها (٨) وحدات؟

الحلّ:

مركزها نقطة الأصل = (٠ ، ٠) = (د ، هـ)

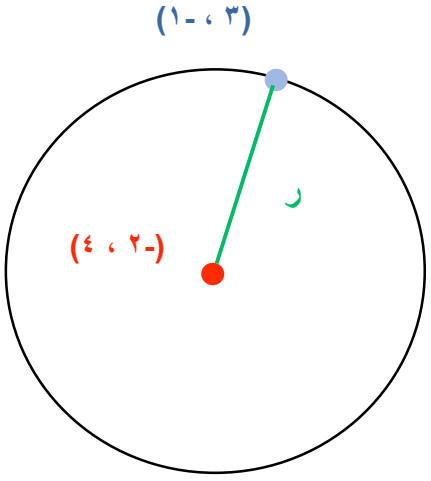
طول نصف القطر = $\frac{١}{٢}$ × طول القطر = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤

إذنْ: معادلة الدّائرة هي: (س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = ر^{٢}

(س – ٠)^{٢} + (ص – ٠)^{٢} = ٤^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

مثال(٧):



ما معادلة الدّائرة الّتي مركزها النّقطة (– ٢ ، ٤)

وتمر بالنّقطة (٣ ، – ١) ؟

الحلّ:

إحداثيّا المركز (د ، هـ) = (– ٢ ، ٤)

طول نصف القطر = ر = البعد بين المركز (– ٢ ، ٤)

والنّقطة (٣ ، – ١) الواقعة على الدّائرة .

إذنْ، هنا سوف أستخدم قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد طول نصف القطر

ر = $\sqrt{\text{(س}_{٢} - \text{س}_{١}\text{)}^{٢} + \text{(ص}_{٢} - \text{ص}_{١}\text{)}^{٢}}$

= $\sqrt{\text{(٣ – (– ٢))}^{٢} + \text{((– ١) – ٤)}^{٢}}$

= $\sqrt{\text{(٥)}^{٢} + \text{(– ٥)}^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥ + ٢٥}$ = $\sqrt{٥٠}$

إذنْ: معادلة الدّائرة هي: (س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = ر^{٢}

(س – (– ٢))^{٢} + (ص – ٤)^{٢} = ($\sqrt{٥٠}$)^{٢}

(س + ٢)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} = ٥٠

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٥

جدْ معادلة الدّائرة الّتي مركزها النّقطة (٧ ، ٠) وتمرّ بالنّقطة (– ١ ، ٦) .

الآن، سنتعلَّم كيفيَّة إيجاد إحداثيّي المركز (د ، هـ)، ونصف القطر (ر) إذا عُلمت معادلة الدّائرة

لاحظ المثال الآتي:

مثال(٨):

جدْ إحداثيّي نقطة المركز وطول نصف قطر الدّائرة الّتي معادلتها

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص - ١١ =$ صفرًا

الحلّ:

كما تلاحظ فإنّ معادلة الدّائرة ليست على الصّورة القياسيّة، ولذلك نكتبها على الصّورة القياسيّة بإكمال المربع لكلّ من المتغيّرين س، ص.

(تذكّر: إكمال المربع نضيف المقدار $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ للطّرف الأيمن والطّرف الأيسر للمعادلة).

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص - ١١ =$ صفرًا

$+ ١١ \quad + ١١$

$(س^{٢} - ٦ س) + (ص^{٢} + ٨ ص) = ١١$

للمتغيّر س : $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{-٦}{٢}\right)^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩$ ،

للمتغيّر ص : $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٨}{٢}\right)^{٢} = ٤^{٢} = ١٦$

$(س^{٢} - ٦ س + ٩) + (ص^{٢} + ٨ ص + ١٦) = ١١ + ٩ + ١٦$

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٣٦$

إذنْ، مركز الدّائرة (د ، هـ) = (٣ ، – ٤)

$ر^{٢} = ٣٦$

إذن، نصف القطر = ر = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدات

ويمكن حلّ المثال السّابق باستخدام الصّورة العامة لمعادلة الدّائرة.

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = ر^{٢} إذا قمنا بفك الأقواس سوف نتوصل إلى النّتيجة الآتية:

الصّورة العامة لمعادلة الدّائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = صفرًا

حيث إنّ :

١) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

٢) إحداثيّا نقطة المركز (د ، هـ) = (– نصف معامل س ، – نصف معامل ص)

$$= \left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}\right)$$

٣) طول نصف القطر = $\sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ}$ ، حيث د^{٢} + هـ^{٢} – جـ ≥ ٠

وبالتّالي يمكن حلّ المثال السّابق بالطّريقة الآتية:

س^{٢} + ص^{٢} – ٦ س + ٨ ص – ١١ = صفرًا

$$د = \frac{-أ}{٢} = \frac{-(-٦)}{٢} = ٣ ، هـ = \frac{-ب}{٢} = \frac{-٨}{٢} = -٤$$

إذنْ، مركز الدّائرة (د ، هـ) = (٣ ، –٤)

$$ر = \sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ} = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢} - (-١١)} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

عزيزي الطّالب، حلّ التّدريب الآتي كما في المثال السّابق بالطّريقتين:

تدريبٌ ٦

جدْ إحداثيّي نقطة المركز وطول قطر الدّائرة الّتي معادلتها:

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س – ٦ ص – ١٥ = صفرًا

مثال(٩):

حدّد موقع كلّ من النّقاط الآتية بالنّسبة للدّائرة الّتي معادلتها:

(س – ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

أ (٢ ، –٢) ، ب (–٢ ، –٦) ، جـ (٢ ، ٦)

الحلّ:

$ر^{٢} = ٢٥ \longleftarrow ر = \sqrt{٢٥} = ٥$

أ (٢ ، −٢): نقوم بتعويض القيم في معادلة الدّائرة

$(٢ - ١)^{٢} + (-٢ + ٢)^{٢} = ١^{٢} + ٠^{٢} = ١ < ٢٥$

أي أنّ بُعد النّقطة أ عن المركز أصغر من ر، لذلك النّقطة أ تقع داخل الدّائرة.

ب (−٢ ، −٦): نقوم بتعويض القيم في معادلة الدّائرة

$(-٢ - ١)^{٢} + (-٦ + ٢)^{٢} = (-٣)^{٢} + (-٤)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ = ر^{٢}$

أي أنّ بُعد النّقطة ب عن المركز يساوي ر، لذلك النّقطة ب تقع على الدّائرة.

جـ (٢ ، ٦): نقوم بتعويض القيم في معادلة الدّائرة

$(٢ - ١)^{٢} + (٦ + ٢)^{٢} = ١^{٢} + ٨^{٢} = ١ + ٦٤ = ٦٥ > ٢٥$

أي أنّ بُعد النّقطة جـ عن المركز أكبر من ر، لذلك النّقطة جـ تقع خارج الدّائرة.

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٧

حدّد موقع كلّ نقطة من النّقاط الآتية بالنّسبة للدّائرة الّتي معادلتها:

$(س - ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٩$

ن (٢ ، −١)، و (١ ، ٠)، ل (٤ ، −٢)، ك (٥ ، −١)

تدريبٌ ٨

حلّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ؟

إثراء

إذا كان المستقيم م يمرّ بالنّقطتين (٢ن ، ٣) ، (ن ، ٦ − ن)، وميله (٤) ، فما معادلته؟

عنوان الوحدة:

النِّسب المثلّثيّة

عنوان الدّرس: النِّسب المثلّثيّة

المقدّمة :

وحدة النِّسب المثلّثيّة هي وحدة متعلِّقة بالمثلّث قائم الزَّاوية وكيفيَّة حساب أطوال أضلاعه وقياسات زواياه وهذا ما يعرف بحساب المثلّثات، ويستخدم حساب المثلّثات لحساب المسافات والارتفاعات وقياسات الزّوايا في تطبيقات حياتيّة كثيرة، لإيجاد الهندسة الإنشائيّة، والملاحة الجويّة والبحريّة، وحساب الخرائط الجغرافيّة، والفلك، وغيرها.

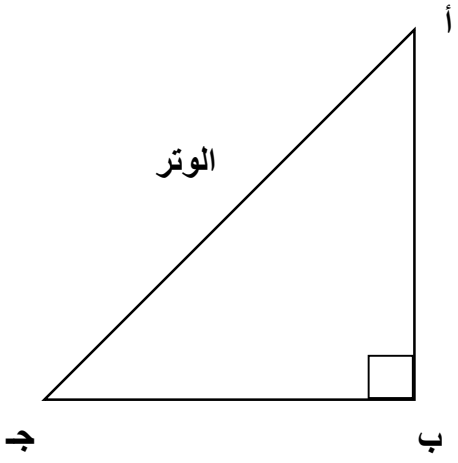
وسنتعرّف في هذا الدّرس على ثلاثة مفاهيم رئيسة مهمة تُسمّى النِّسب المثلّثيّة وهي:

١) جيب الزَّاوية الحادة.

٢) جيب تمام الزَّاوية الحادة.

٣) ظل الزَّاوية الحادة.

تأمّل الشّكل المجاور:



المثلّث أ ب جـ مثلّث قائم الزَّاوية في ب .

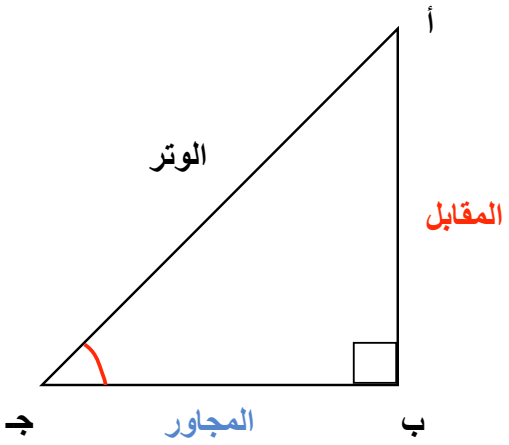
في هذا المثلّث يوجدْ ٣ أضلاع و ٣ زوايا هي :

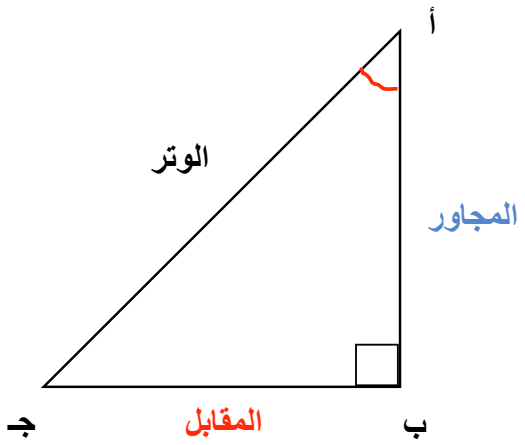
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$ (الأضلاع)

∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ (الزوايا)

الضِّلع $\overline{أ جـ}$ يُسمّى الوتر وهو الضِّلع المقابل للزّاوية القائمة .

الضِّلعان $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضِلعا القائمة يمكن أنْ يُسمّى كلّ منهما المقابل، أو المجاور حسب الزَّاوية الحادة الّتي يتمّ اختيارها، الأشكال الآتية توضّح ذلك.





$\overline{أ ب}$ هو الضِّلع المجاور للزّاوية أ ، $\overline{ب جـ}$ هو الضِّلع المقابل للزّاوية أ

$\overline{أ ب}$ هو الضِّلع المقابل للزّاوية جـ ، $\overline{ب جـ}$ هو الضِّلع المجاور للزّاوية جـ

لا بُدّ لنا أنْ نتذكّر في هذه الوحدة نظريّة فيثاغورس فهي نظريّة متعلِّقة بالمثلّث قائم الزَّاوية

نظريّة فيثاغورس

(طول الوتر)^{٢} = (طول الضِّلع الأول)^{٢} + (طول الضِّلع الثّاني)^{٢}

($\overline{أ جـ}$)^{٢} = ($\overline{أ ب}$)^{٢} + ($\overline{ب جـ}$)^{٢}

قوانين النِّسب المثلّثيّة هي :

١) جيب الزَّاوية الحادة س ويُرمز له بالرّمز: جا س = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$

٢) جيب تمام الزَّاوية الحادة س ويُرمز له بالرّمز: جتا س = $\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$

٣) ظل الزَّاوية الحادة س ويُرمز له بالرّمز: ظا س = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$

الآن، سنتعلَّم كيف نحسب النِّسب المثلّثيّة (جا ، جتا ، ظا) لزاوية حادة في مثلّث قائم الزَّاوية من خلال المثال الآتي:

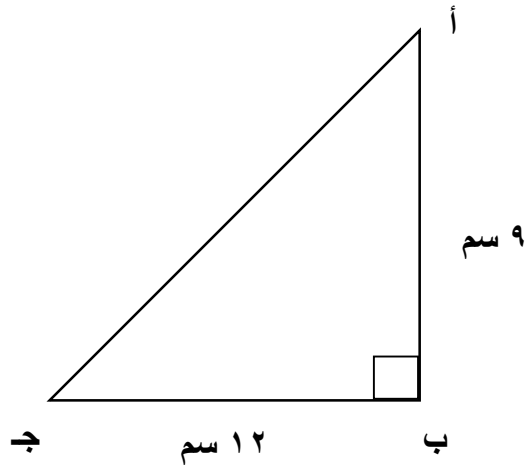
مثال(١) :

في الشّكل المجاور، أ ب جـ مثلّث قائم الزَّاوية في ب، فيه $\overline{أ ب}$ = ٩ سم، $\overline{ب جـ}$ = ١٢ سم، جدْ كلًّا ممّا يأتي:

١) $\overline{أ جـ}$ ٢) جا أ ٣) جتا أ

٤) ظا أ ٥) جا جـ ٦) جتا جـ

٧) ظا جـ



الحلّ:

١) من الشّكل وفق نظرية فيثاغورس فإنّ:

$(\overline{أ جـ})^{٢} = (\overline{أ ب})^{٢} + (\overline{ب جـ})^{٢}$

$= ٩^{٢} + ١٢^{٢}$

$= ٨١ + ١٤٤$

$(\overline{أ جـ})^{٢} = ٢٢٥$ (نأخذ الجذر للطّرفين)

$\overline{أ جـ} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ سم

٢) $جا أ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

٣) $جتا أ = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

٤) $ظا أ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

٥) $جا جـ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

٦) جتا جـ = $\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

٧) ظا جـ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

نحن نعلم أنّ : ∠ أ + ∠جـ = ٩٠° (زوايا مُتتامة)

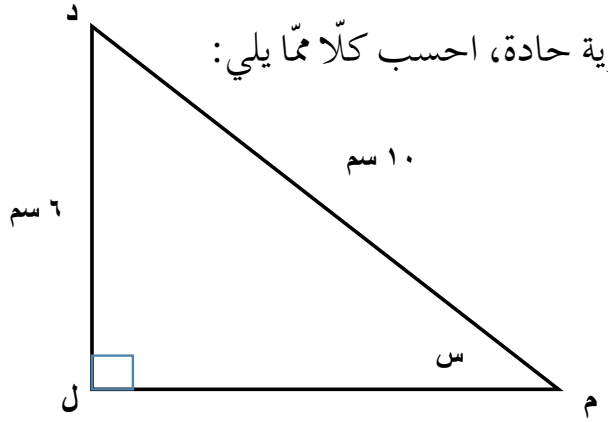
لاحظ هنا : جا أ = جتا جـ ، جتا أ = جا جـ

سنتحدّث عن ذلك بشكلٍ مُفصَّل في درس العلاقة بين النِّسب المثلّثيّة .

بعد فهمك المثال السّابق، قم بحلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ١

الشّكل المجاور مثلّث قائم الزّاوية في ل، فيه س زاوية حادة، احسب كلّا ممّا يلي:



أ) م ل

ب) جا س

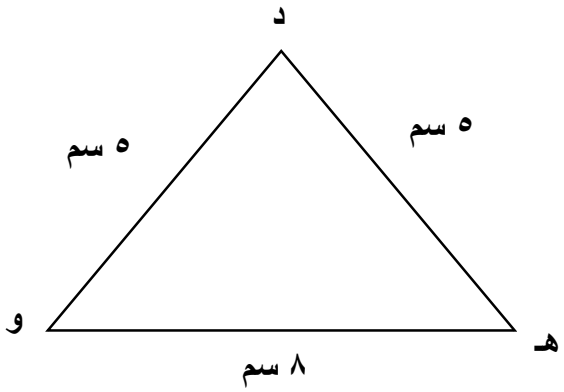
جـ) جتا س

د) ظا س

هل يمكن استخدام قوانين النِّسب المثلّثيّة في جميع أنواع المثلّثات؟ وماذا يمكنني أنْ أفعل إذا كان لديّ مثلّث ليس قائم الزّاوية؟

مثال(٢) :

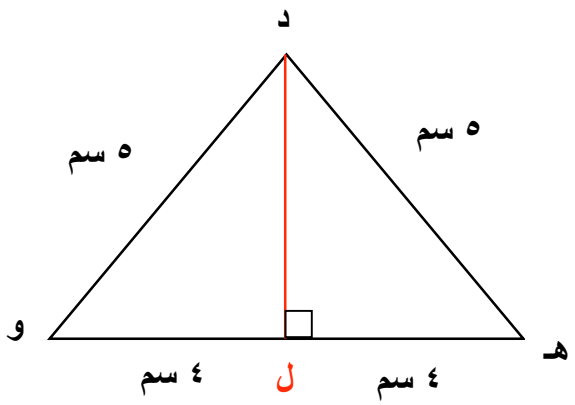
إذا كان د هـ و مثلّث متطابق الضِّلعين، كما في الشّكل المجاور، احسب جا هـ .



الحلّ:

يجب أن يكون لديّ مثلّث قائم الزّاوية لأتمكن من استخدام قوانين النِّسب المثلّثيّة، لذلك سأُسقط عمودًا

من (د) على قاعدة المثلّث متطابق الضِّلعين، وبناءً على خصائص المثلّث متطابق الضِّلعين فإنّ : العمود النّازل من رأس المثلّث متطابِق الضِّلعين على قاعدته، ينصِّفها وينصِّف زاوية الرّأس.



وفق نظريّة فيثاغورس فإنّ : $(\overline{د هـ})^{٢} = (\overline{د ل})^{٢} + (\overline{هـ ل})^{٢}$

$٥^{٢} = (\overline{د ل})^{٢} + ٤^{٢}$

$٢٥ = (\overline{د ل})^{٢} + ١٦$

$-١٦ \qquad -١٦$

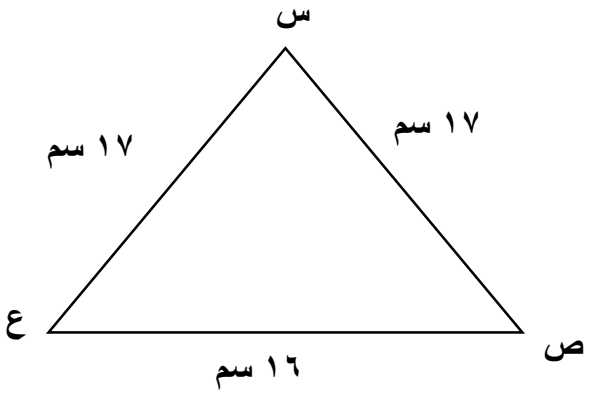
$٩ = (\overline{د ل})^{٢} \longleftarrow \overline{د ل} = ٣$ سم

إذًا جا هـ $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٣}{٥}$

ما رأيك عزيزي الطّالب بمحاولة حلّ التّدريب الآتي بناءً على فهمك المثال السّابق؟

تدريبٌ ٢

إذا كان س ص ع مثلّثًا متطابق الضِّلعين، كما في الشّكل المجاور، احسب جا ع ، جتا ع .



الآن، سنتعلَّم كيفيَّة استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النِّسب المثلّثيّة لزاوية معلومة.

أولًا، لا بُدّ من معرفة اختصارات النِّسب المثلّثيّة على الآلة الحاسبة وهي:

١) جا = sin

٢) جتا = cos

٣) ظا = tan

وقبل كلّ شيء يجب أن تتأكد أنّ النظام على الآلة الحاسبة بالدّرجات (Degree).

مثال(٣) :

جدْ ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

١) جا ٣٥° ٢) جتا ٦٤° ٣) ظا ٢٤°

الحلّ:

١) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط على المفتاح sin ونُدخل قياس الزَّاوية ٣٥°

فيكون النَّاتج: جا ٣٥° = ٠,٥٧٣٥٧٦٤٣ ≈ ٠,٥٧

٢) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط على المفتاح cos ونُدخل قياس الزَّاوية ٦٤°

فيكون النَّاتج: جتا ٦٤° = ٠,٤٣٨٣٧١١ ≈ ٠,٤٤

٣) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط على المفتاح tan ونُدخل قياس الزَّاوية ٢٤°

فيكون النَّاتج: ظا ٢٤° = ٠,٤٤٥٢٢٨٦ ≈ ٠,٤٥

(لاحظ عزيزي الطّالب هنا قمنا بِتَقْرِيبِ الْعَدَدِ الْعَشْرِيّ الناتج في الآلة الحاسبة إلى أَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ مِئَةٍ)

تدريبٌ ٣

جدْ ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) جا ٧٤° ب) جتا ٣٥° جـ) ظا ٥٦°

الآن، سنتعلَّم كيفيَّة استخدام الآلة الحاسبة في حساب قياس الزَّاوية إذا عُلِمت إحدى نسبها المثلّثيّة.

مثال (٤) :

جدْ ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

١) إذا كان جا س = ٠,٥ ، فجدْ قياس الزَّاوية س .

٢) إذا كان جتا هـ = ٠,٨٧ ، فجدْ قياس الزَّاوية هـ .

٣) إذا كان ظا هـ = ١,٨٣ ، فجدْ قياس الزَّاوية هـ .

الحلّ:

١) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط المفتاح shift ثمَّ sin ونُدخِل قيمة جيب الزَّاوية ٠,٥

فيكون النَّاتج قيمة الزَّاوية س = ٣٠°

٢) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط المفتاح shift ثمَّ cos ونُدخِل قيمة جيب تمام الزَّاوية ٠,٨٧

فيكون النَّاتج قيمة الزَّاوية هـ = ٢٩,٥٤١٣٦ ≈ ٣٠°

٣) نفتح الآلة الحاسبة ثمَّ نضغط مفتاح shift ثمَّ tan ونُدخِل قيمة ظل الزَّاوية ١,٨٣

فيكون النَّاتج قيمة الزَّاوية هـ = ٦١,٣٤٥٦٨ ≈ ٦١°

(لاحظ عزيزي الطّالب هنا قمنا بِتَقْرِيبِ الْعَدَدِ الْعَشْرِيّ الناتج في الآلة الحاسبة إلى أَقْرَبِ عَدَدٍ صَحِيحٍ)

عزيزي الطّالب، حلّ التّدريب الآتي :

تدريبٌ ٤

جدْ ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

أ) إذا كان جا س = ٠,٣٤ ، فجدْ قياس الزّاوية س .

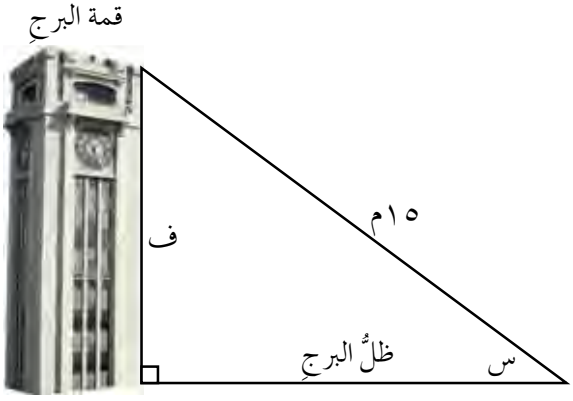
ب) إذا كان جتا ص = ٠,٨٦ ، فجدْ قياس الزّاوية ص .

جـ) إذا كان ظا هـ = ٠,٣٤ ، فجدْ قياس الزّاوية هـ .

لقد تعرّفنا على قوانين النِّسب المثلّثيّة وتعلمنا كيفيَّة إيجاد قيمها وكيفيَّة استخدام الآلة الحاسبة، والآن سنقوم بحلّ مسائل عملية على النِّسب المثلّثيّة.

مثال(٥) :

في لحظة ما كانت المسافة بين قمة برج ورأس ظلّه على سطح الأرض تساوي (١٥) مترًا، وكان جا س = ٠,٦ كما في الشّكل المجاور، جدْ ارتفاع البرج (ف).



الحلّ:

$$\text{جا س} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\frac{\text{ف}}{١٥} = ٠,٦$$

$$\frac{٦}{١٠} = \frac{\text{ف}}{١٥} \quad \text{(ضرب تبادلي)}$$

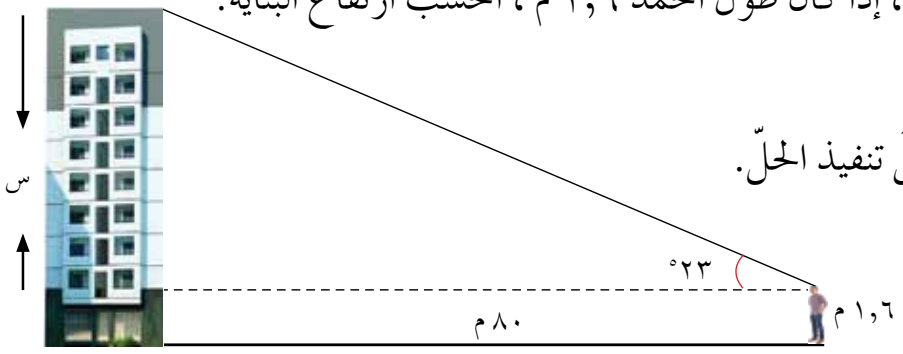
١٠ ف = ٩٠ ومنه ف = ٩ م

مثال(٦) :

وقف أحمد على بعد ٨٠ م من قاعدة بناية، وكان قياس الزّاوية المحصورة بين خط نظره المار بقمة البناية والخط الأفقيّ ٢٣° ، إذا كان طول أحمد ١,٦ م ، احسب ارتفاع البناية.

الحلّ:

نرسم مُعطيات السّؤال لتسهيلَ تنفيذ الحلّ.



ارتفاع البناية = طول أحمد + س = ١,٦ + س

يجب أن أجدْ قيمة س لأتمكّن من معرفة ارتفاع البناية .

بناءً على المعطيات المتوفرة في المثال سأستخدم قانون ظل الزّاوية الحادة

$$\text{ظا } ٢٣^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{\text{س}}{٨٠}$$ (باستخدام الآلة الحاسبة أجدْ قيمة ظا ٢٣°)

$$\frac{\text{س}}{٨٠} = ٠,٤٢$$

$$\frac{٤٢}{١٠٠} \times \frac{\text{س}}{٨٠}$$ (ضرب تبادليّ)

١٠٠س = ٣٣٦٠

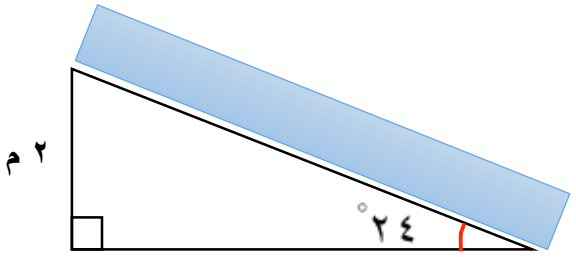
ومنه س = ٣٣,٦ ≈ ٣٤ م

إذنْ: ارتفاع البناية = ١,٦ + ٣٤ = ٣٥,٦ م

بعد فهمك الأمثلة السّابقة على حلّ مسائل عمليّة على النِّسب المثلّثية، ما رأيك بمحاولة حلّ التّدريب الآتي؟

تدريبٌ ٥

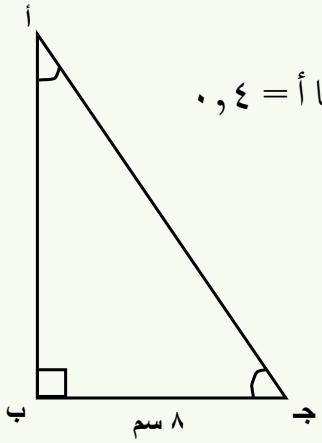
جدْ طول لوح تزلج يرتفع أحد طرفيه عن الأرض (٢) م، ويصنع طرفه الآخر مع الأرض زاوية قياسها ٢٤°، انظر الشّكل المجاور.



إثراء

بالاعتماد على الشّكل المجاور، إذا كانت أ زاوية حادة ، وكان جا أ = ٠,٤

أوجدْ ظا جـ ؟



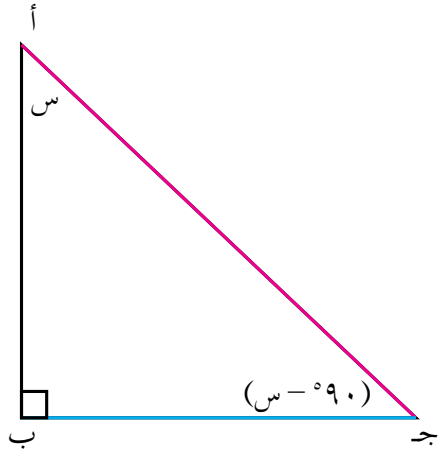
المقدّمة :

لقد تعرّفنا في الدّرس السّابق على قوانين النِّسب المثلّثيّة (جا، جتا، ظا)، وتعلّمنا كيفيَّة حساب جا و جتا و ظا زاوية حادة في مثلّث قائم الزَّاوية، وكيفيَّة استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النِّسب المثلّثيّة لزاوية معلومة، وحساب قياس الزَّاوية إذا عُلِمت إحدى نسبها المثلّثيّة.

في هذا الدّرس سنتعرّف على العلاقات بين النِّسب المثلّثيّة (جا، جتا، ظا).

الشّكل المجاور يمثّل مثلّثًا قائم الزَّاوية في ب، إذا كان قياس الزَّاوية أ يساوي س،

فإنّ قياس الزَّاوية جـ يساوي (٩٠° − س)



سوف نستخدم هذا الشّكل في إثبات جميع العلاقات

الإثبات: مجموع قياسات زوايا المثلّث = ١٨٠°

∡أ + ∡ جـ + ∡ ب = ١٨٠°

∡ أ + ∡ جـ + ٩٠° = ١٨٠°

∴ ∡ أ + ∡ جـ = ٩٠° (∡أ و ∡ جـ تُسمّى زوايا مُتتامّة)

إذا كانت ∡ أ = س فإنّ:

س + ∡جـ = ٩٠° ومنه ∡ جـ = ٩٠° − س

العلاقة الأولى الّتي سندرسها هي العلاقة الّتي تربط جا و جتا الزّاوية الحادة وهي:

إذا كانت س زاوية حادة فإنّ :

جا س = جتا (٩٠° – س)

جتا س = جا (٩٠° – س)

الإثبات: جا س $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

جتا (٩٠° – س) $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

إذنْ: جا س = جتا (٩٠° – س) وأيضًا جتا س = جا (٩٠° – س)

يمكننا القول أنّه إذا كانت ∢ أ ، و ∢ ب زاويتين حادّتين متتامّتين فإنّ :

جا أ = جتا ب ، و أيضًا جتا أ = جا ب

تساؤل: هل يوجدْ زاوية حادة قياسها س بحيث : جا س = جتا س ؟ ما قياسها؟

الحلّ:

بناءً على العلاقة السّابقة فإنّ:

جا س = جتا (٩٠° – س)

ومنه : س = ٩٠° – س

+ س + س

٢ س = ٩٠° و منه س = ٤٥°

إذنْ: جا ٤٥° = جتا ٤٥°

العلاقة الثّانية الّتي سوف ندرسها أيضًا هي علاقة تربط بين جا و جتا الزّاوية الحادة وهي:

جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ ، لكلّ زاوية حادة س

الإثبات :

$$\text{جا س} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢}$$

$$\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} = \frac{(\text{أ جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} = ١$$

(تذكّر نظريّة فيثاغورس : $(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{ب جـ})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢}$)

إذنْ: جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

العلاقة الثّالثة هي :

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ ، جتا س} \neq ٠$$

الإثبات: جا س $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}}{\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

العلاقة الرّابعة هي :

إذا كانت س زاوية حادة فإنّ :

ظا س × ظا (٩٠° – س) = ١

الإثبات: (نكتب قانون الظّلّ بناءً على العلاقة السّابقة (العلاقة الثّالثة)).

$$\text{ظا س} \times \text{ظا}(٩٠^\circ - \text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جا}(٩٠^\circ - \text{س})}{\text{جتا}(٩٠^\circ - \text{س})}$$

من العلاقة الأولى : جا (٩٠° – س) = جتا س ، و كذلك جتا (٩٠° – س) = جا س، إذنْ :

$$= \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جاس}}} = ١$$

يمكننا القول أنّه إذا كانت ∢ أ ، و ∢ ب زاويتين حادّتين متتامّتين فإنّ :

ظا أ × ظا ب = ١

إليكم الأمثلة الآتية:

مثال (١):

إذا كان جتا ٣٥° = ٠,٨١٩٢ ، فما قيمة جا ٥٥° ؟

الحلّ:

جا ٥٥° = جتا (٩٠° – ٥٥°) = جتا ٣٥° = ٠,٨١٩٢ (من العلاقة)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ١

إذا كان جا ٦٥° = ٠,٩٠٦٣ ، فما قيمة جتا ٢٥°؟

مثال (٢):

إذا كان جا (٥ س) = جتا (٤ س)، فما قيمة س بالدّرجات ؟

حيث ٠ < س < ١٨°

الحلّ:

جا (٥ س) = جتا (٩٠° − ٥ س) .....(١) (من العلاقة: جا س = جتا (٩٠° − س))

جا (٥ س) = جتا (٤ س) .....(٢) (مُعطى بالسّؤال)

إذنْ: من (١) و (٢) :

جتا (٩٠° − ٥ س) = جتا (٤ س)

ومنه ٩٠° − ٥ س = ٤ س

+ ٥ س + ٥ س

٩٠° = ٩ س ⟵ س = ١٠°

مثال(٣):

إذا كانت س زاوية حادة، وكان جا س = ٠,٨ ، فما قيمة جتا س ؟

الحلّ:

باستخدام العلاقة: جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

(٠,٨)^{٢} + جتا^{٢} س = ١

٠,٦٤ + جتا^{٢} س = ١

− ٠,٦٤ − ٠,٦٤

جتا^{٢} س = ٠,٣٦ (نأخذ الجذر للطّرفين)

ومنه جتا س = ± ٠,٦ (لأنّ س زاوية حادة تهمل القيمة السّالبة)

إذًا جتا س = ٠,٦

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٢

إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا س = $\frac{٥}{١٣}$ ، فما قيمة جا س ؟

مثال (٤):

إذا كانت هـ زاوية حادة، وكان جا هـ = ٥ جتا هـ ، فجدْ:

أ) ظا هـ ب) جتا هـ

الحلّ:

أ) ظا هـ = $\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} = \frac{٥ \text{ جتا هـ}}{\text{جتا هـ}} = ٥$

ب) باستخدام العلاقة: جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

(٥ جتا هـ)^{٢} + جتا^{٢} هـ = ١

٢٥ جتا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

٢٦ جتا^{٢} هـ = ١ ← جتا^{٢} هـ = $\frac{١}{٢٦}$ (نأخذ الجذر للطّرفين)

جتا هـ = $\pm \frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ (لأنّ هـ زاوية حادة تُهمِلُ القيمة السّالبة)

ومنه جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢٦}}$

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

إذا كانت س زاوية حادة، وكان جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، فجدْ جتا س، ظا س .

الآن، سنتعلَّم كيف نجدْ القِيم العدديّة للمقادير الّتي تتضمن نسبًا مثلّثيّة باستخدام العلاقات بين النِّسب المثلّثيّة من خلال المثال الآتي:

مثال(٥):

جدْ القيمة العدديّة لكلّ من المقادير الآتية:

١) جتا ٥٥° − جا ٣٥°

٢) $\frac{\text{جا ٢٤°}}{\text{جا ٦٦°}}$

٣) $\frac{\text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جتا } ٦٠^\circ} + \text{ظا } ٤٥^\circ$

الحلّ:

١) جتا ٥٥° − جتا (٩٠° − ٣٥°) = جتا ٥٥° − جتا ٥٥° = ٠

٢) $\frac{\text{جا } ٢٤^\circ}{\text{جا } ٦٦^\circ} = \frac{\text{جا } ٢٤^\circ}{\text{جتا } (٩٠^\circ - ٦٦^\circ)} = \frac{\text{جا } ٢٤^\circ}{\text{جتا } ٢٤^\circ} = \text{ظا } ٢٤^\circ$

٣) $\frac{\text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جتا } ٦٠^\circ} + \text{ظا } ٤٥^\circ = \frac{\text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جا } (٩٠^\circ - ٦٠^\circ)} + \text{ظا } ٤٥^\circ$

$= \frac{\text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جا } ٣٠^\circ} + \frac{\text{جا } ٤٥^\circ}{\text{جتا } ٤٥^\circ} = ١ + ١ = ٢$ (تذكّر: جا ٤٥° = جتا ٤٥°)

حلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

جدْ القيمة العدديّة لكلّ من المقادير الآتية:

أ) ٣ جتا ١٩° − ٣ جا ٧١°

ب) جتا^٢ ٨٣° + جتا^٢ ٧°

جـ) ظا ٣٤° × ظا ٥٦°

د) $\frac{\text{جتا } ٤٨^\circ}{\text{جا } ٤٢^\circ}$

إثراء

إذا كانت س زاوية حادة، وكان ٢ جا (س) = ٣ جتا(س)، فجدْ كلًّا من:

١) ظاس ٢) جتاس

عنوان الدّرس: حلّ المثلّث قائم الزّاوية وزوايا الارتفاع والانخفاض

المقدّمة :

مرّ معك في الدّروس السّابقة كيفيَّة حساب النِّسب المثلّثية (جا، جتا، ظا) للزّاوية الحادة في المثلّث قائم الزّاوية، من خلال ارتباطها بأطوال أضلاع المثلّث القائم الزّاوية، سوف نستخدم كلّ ما تعلّمته في الدّروس السّابقة في إيجاد أطوال أضلاع المثلّث، وقياسات زواياه، وسنبدأ بتقديم التّعريفين الآتيين:

١) عناصر المثلّث: أضلاعه الثّلاثة، وزواياه الثّلاث.

٢) حلّ المثلّث: إيجاد أطوال أضلاعه، وقياسات زواياه.

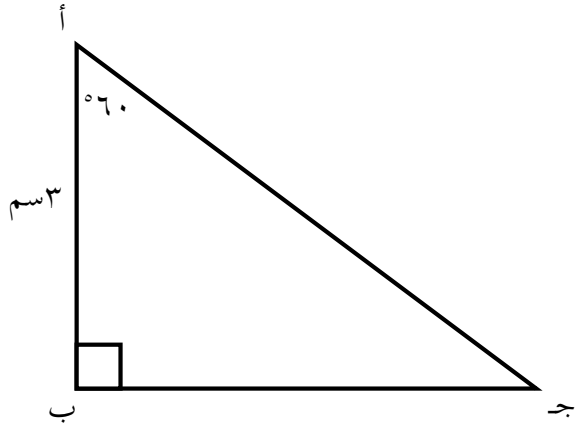
مثال (١):

حلّ المثلّث أ ب جـ القائم الزّاوية في ب، و الّذي فيه: ق ∠ أ = ٦٠°، أ ب = ٣ سم .

الحلّ:

أولًا: معنى كلّمة حلّ المثلّث يعني جدْ أطوال أضلاعه الثّلاث، وقياسات زواياه الثّلاث.

ثانيًا: من أجل حلّ هذا السّؤال يجب أنْ نرسم المثلّث ونحدّد عليه المُعطيات لتسهيلَ عمليّة التفكير والحلّ.



ق ∠ جـ = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

الآن سأستخدم جتا أ لإيجاد طول الوتر (أ جـ) كالآتي:

جتا ٦٠° = طول الضلع المجاور / طول الوتر = أب / أ جـ = ٣ / أ جـ

(من الآلة الحاسبة احسب قيمة جتا ٦٠°)

٠,٥ = ٣ / أ جـ و منه أ جـ = ٦ سم

هناك أكثر من طريقة لحساب طول الضِّلع ب جـ:

١) إيجاد طول الضِّلع ب جـ من خلال استخدام جا ٦٠°

٢) إيجاد طول الضِّلع ب جـ من خلال استخدام جتا ٣٠°

٣) إيجاد طول الضِّلع ب جـ من خلال نظريّة فيثاغورس

سأجدْ طول الضِّلع ب جـ باستخدام نظريّة فيثاغورس، وبإمكانك عزيزي الطّالب محاولة الحلّ بالطّرق الأخرى.

وستلاحظ تشابه الإجابات، ولكن طرق الحلّ مختلفة.

نظريّة فيثاغورس

$(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$

$٦^{٢} = ٣^{٢} + (ب جـ)^{٢}$

$٣٦ = ٩ + (ب جـ)^{٢}$

$(ب جـ)^{٢} = ٢٧$ و منه ب جـ $= \sqrt{٢٧} \approx ٥,٢$ سم

وهكذا نكون قد انتهينا من حلّ المثلّث لأنّنا أوجدْنا جميع أطوال أضلاع المثلّث وجميع زواياه.

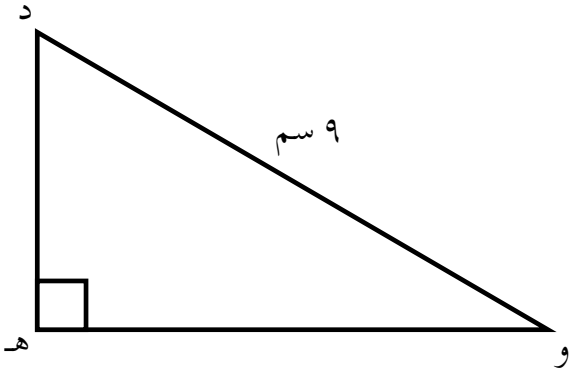
الآن عزيزي الطّالب، بإمكانك حلّ التّدريب الآتي:

تدريبٌ ١

حلّ المثلّث ل م ن القائم الزّاوية في م، الّذي فيه: ل م = ١٦ سم، م ن = ١٢ سم.

مثال(٢):

حلّ المثلّث د هـ و القائم الزّاوية في هـ ، المرسوم في الشّكل المجاور، الّذي فيه: جتا و = ٠,٦ ، د و = ٩ سم .



الحلّ:

جتا و = ٠,٦ (مُعطى)

و منه ق ∢ و ≈ ٥٣° (باستخدام الآلة الحاسبة)

ق ∢ د = ٩٠° − ٥٣° = ٣٧°

جتا و $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{د و}} = \frac{\text{هـ و}}{٩}$

$٠,٦ \times \frac{\text{هـ و}}{٩}$ و منه هـ و = ٥,٤ سم (ضرب تبادليّ)

جا ٥٣° $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{د و}} = \frac{\text{هـ و}}{٩}$ (باستخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة جا ٥٣°)

$٠,٨ \times \frac{\text{هـ و}}{٩}$ و منه هـ و = ٧,٢ سم

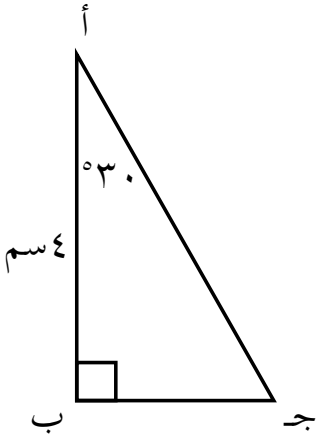
إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٢

حلّ المثلّث س ص ع القائم الزّاوية في ص، الّذي فيه: س ص = ٧سم، ظا س = ١.

نستطيع استنتاج قيم النِّسب المثلّثية للزوايا: ٣٠°، ٦٠°، ٤٥° من المثلّث الثلاثيني الستيني ومن المثلّث القائم الزّاوية المتطابق الضِّلعين من خلال النشاطين الآتيين:

نشاطٌ (١)



تأمل الشّكل المجاور، ثمَّ أجب عن الأسئلة الآتية:

١) ما قياس ∠جـ ؟

٢) ما طول ب جـ ؟ باستخدام الآلة الحاسبة.

٣) جدْ جا أ، جتا جـ؟ ماذا تلاحظ؟

٤) استنتج قيم :

جا ٣٠°، جتا ٣٠°، جا ٦٠°، جتا ٦٠°

الحلّ:

١) ق ∢جـ = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

٢) ظا ٣٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{٤}$ ، (باستخدام الآلة الحاسبة)

ب جـ = $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ سم

٣) هذا المثلّث يُسمّى المثلّث الثّلاثينيّ السّتينيّ، ومن خصائص المثلّث الثّلاثينيّ السّتينيّ الّتي تمّ دراستها سابقًا هي: طول الضِّلع المقابل للزّاوية ٣٠° في المثلّث الثّلاثينيّ السّتينيّ يساوي نصف طول الوتر.

وبالتّالي فإنّ طول الوتر أ جـ = ٢ × ب جـ = ٢ × $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$ سم

جا أ = جا ٣٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}}{\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا ٦٠° = جا (٩٠° − ٦٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

ألاحظ أنّ: جا ٣٠° = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

٤) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ (تمّ حسابها في الفرع السّابق)

جتا ٣٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{٤}{\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

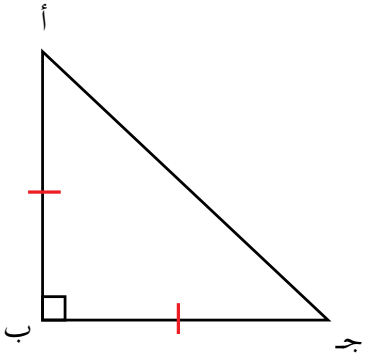
جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ (تمّ حسابها في الفرع السّابق)

جا ٦٠° = جتا (٩٠° − ٦٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

نلاحظ أنّ: جتا ٣٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

نشاطٌ (٢)

تأمل الشّكل المجاور، ثمَّ أجب عن الأسئلة الآتية:



١) ما قياس كلّ من الزاويتين أ ، جـ ؟

٢) إذا كان طول أ ب وحدةً واحدةً، فما طول أ جـ ؟

٣) جدْ جا أ، جتا جـ. ماذا تلاحظ؟

٤) استنتج قيم جا ٤٥°، جتا ٤٥°

الحلّ:

١) ∢ أ + ∢ جـ = ٩٠°

و بالتّالي فإنّ: ∢ أ = ٤٥°، ∢ جـ = ٤٥°

(لأنّ زوايا القاعدة في المثلّث متطابق الضِّلعين متساوية)

٢) نظريّة فيثاغورس :

$(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$

$(أ جـ)^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢} = ١ + ١ = ٢$ ومنه $أ جـ = \sqrt{٢}$

٣) $جا أ = جا ٤٥° = \frac{ب جـ}{أ جـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$جتا جـ = جتا ٤٥° = \frac{ب جـ}{أ جـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

ألاحظ أنّ: جا ٤٥° = جتا ٤٥°

٤) $جا ٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$جتا ٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

عزيزي الطّالب، يجب أنْ تعلم أنّ قيم النِّسب المثلّثية للزّوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥° يجب عليك حفظها جيدًا لأنك ستحتاجها كثيرًا في الصّفوف اللّاحقة، ويمكن تلخيصها في الجدْول الآتي :

الزَّاوية	جا	جتا	ظا
٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١

الآن، سنتعرّف على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض من خلال الرّسم.

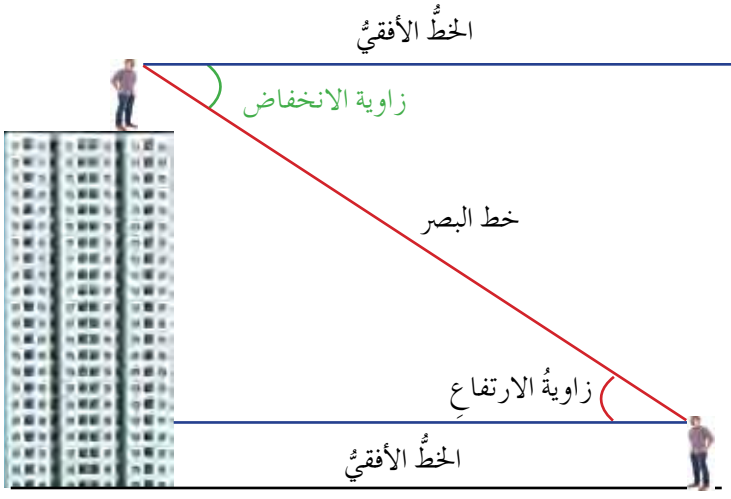
نشاطٌ (٣)

شخصان يقف أحدهما فوق سطح بناية، ويقف الآخر على الشّارع، وينظر كلّ منهما للآخر. ارسم شكلًا يوضّح زاوية ارتفاع الشّخص الواقف على البناية، وزاوية انخفاض الشّخص الواقف في الشّارع.

زاوية ارتفاع الشّخص الواقف على البناية: هي الزَّاوية المحصورة بين خط البصر، والخط الأفقيّ المار بعين النّاظر الّذي يقف على الشّارع.

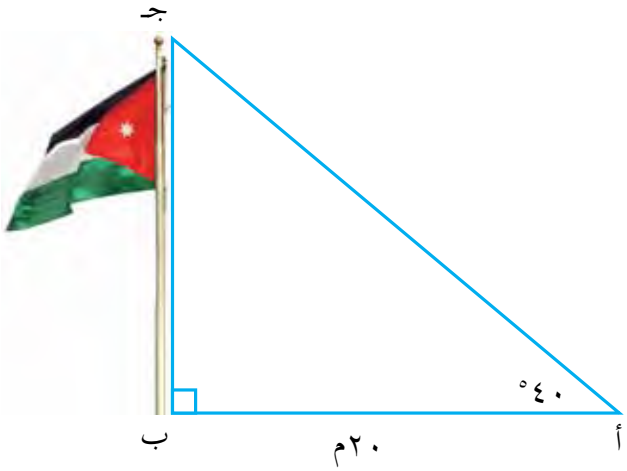
زاوية انخفاض الشّخص الواقف في الشّارع: هي الزَّاوية المحصورة بين خط البصر، والخط الأفقيّ المار بعين النّاظر الّذي يقف فوق سطح البناية.

والشّكل الآتي يوضّح ذلك:



الآن، سنقوم بحلّ مسائل حياتيّة باستخدام زوايا الارتفاع والانخفاض من خلال الأمثلة الآتية:

مثال(٣):



من نقطة تبعد (٢٠) مترًا عن قاعدة سارية علم، قاس خالد زاوية ارتفاع قمة السّارية، فوجدْ أنّ قياسها ٤٠°. ما ارتفاع هذه السّارية؟ انظر الشّكل المجاور.

الحلّ:

ارتفاع السّارية هو طول الضِّلع ب جـ (بناءً على المُعطيات المتوفرة في المثال سوف نستخدم ظل الزّاوية)

$$\text{ظا } ٤٠^\circ = \frac{\text{ب جـ}}{٢٠}$$ (احسب ظا ٤٠° باستخدام الآلة الحاسبة)

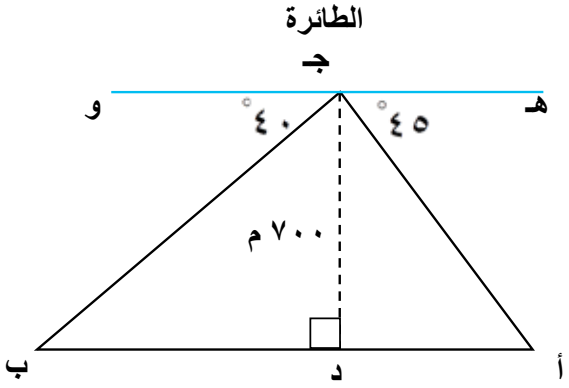
$$\frac{\text{ب جـ}}{٢٠} = ٠,٨٣٩١$$ و منه ب جـ ≈ ١٧ م

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

وقف أسامة على بعد (١٢) مترًا من قاعدة شجرة، ورصد قمتها فكانت زاوية ارتفاعها ٣٥° . ما ارتفاع الشّجرة؟

مثال(٤):



شاهد شخص يركب طائرة عموديّة ارتفاعها (٧٠٠) متر عن سطح البحر سفينتين أ، ب، كما في الشّكل المجاور. إذا كانت زاويتا انخفاضهما ٤٥°، ٤٠°، على التّرتيب، فجدْ المسافة بين السّفينتين.

الحلّ:

ق ∠ أ = ٤٥° (بالتبادل مع ∠ هـ جـ أ)

ق ∠ ب = ٤٠° (بالتبادل مع ∠ و جـ ب)

ظا ٤٥° = $\frac{٧٠٠}{\text{أ د}}$

$\frac{٧٠٠}{\text{أ د}}$ = ١ ومنه أ د = ٧٠٠ متر

ظا ٤٠° = $\frac{٧٠٠}{\text{ب د}}$

$\frac{٧٠٠}{\text{ب د}}$ = ٠,٨٣٩١ ومنه ب د ≈ ٨٣٤ مترًا

إذنْ، المسافة بين السّفينتين = أ د + ب د = ٧٠٠ + ٨٣٤ = ١٥٣٤ مترًا.

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

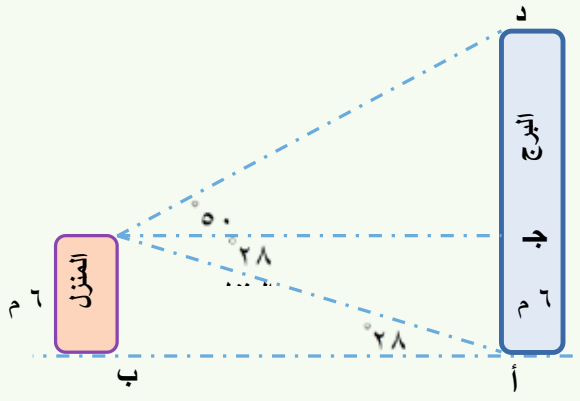
رصد موسى من برج ارتفاعه (٢٠) مترًا حجرًا بزاوية انخفاض قياسها ٣٢° ، ما المسافة بين قاعدة البرج وموقع الحجر؟

إثراء

يسكن شخص في منزل ارتفاعه ٦ أمتار، يقابله برج. رصد هذا الشّخص من فوق منزله قمة البرج فكانت زاوية ارتفاعه ٥٠° ، ورصد أسفل البرج فكانت زاوية الانخفاض ٢٨°، انظر الشّكل المجاور. ثمَّ جدْ ما يأتي:

أ) البعد بين المنزل والبرج.

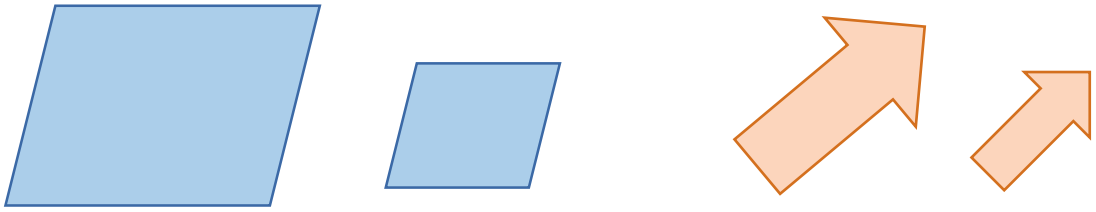
ب) ارتفاع البرج.



عنوان الدّرس: تشابه وتطابق المثلّثات

المقدّمة :

يتشابه شكلان إذا كان لهما الهيئة نفسها وإنْ اختلفا في الحجم بالتّكبير أو التّصغير.



أمّا في المضّلعات فيتشابه مضّلعان إذا كان لهما العدد نفسه من الأضلاع، وكانت زواياهما المتناظرة متساوية في القياس وأطوال أضلاعهما المُتناظرة متناسبة بنسبة ثابتة، ويُرمز للتّشابه بالرمز (~).

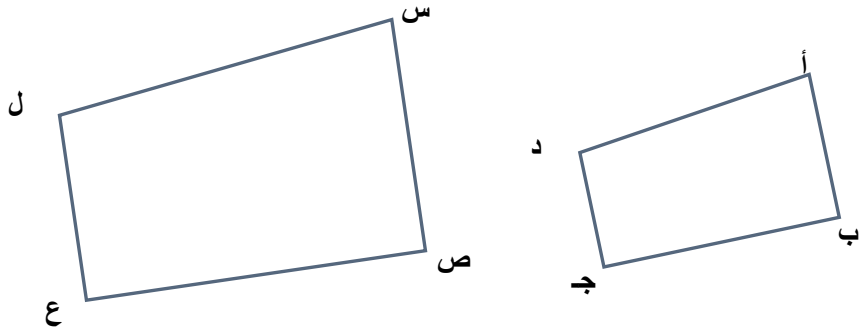
ويُقصد بالتّناسب أنّ نسبة أيّ ضلع في المضّلع الأول إلى نظيره في المضّلع الثّاني هي نسبة ثابتة، وتُسمّى هذه النِّسبة مقياس الرّسم، أو معامل التّشابه.

يتكافأُ مضّلعان في حالة واحدة فقط وهي: إذا تساوت مساحتاهما.

أي أنّ: المضّلع س$_{١}$ يكافىء المضّلع س$_{٢}$ إذا كانت:

مساحة س$_{١}$ = مساحة س$_{٢}$

في الشّكل المجاور على فرض أنّ أ ب جـ د ~ س ص ع ل فيمكن تحديد الأضلاع المُتناظرة والزّوايا المُتناظرة. كما يأتي:



الأضلاعُ المُتناظرةُ:

الضِّلع أ ب يناظرُ الضِّلع س ص.

الضِّلع ب جـ يناظرُ الضِّلع ص ع.

الضِّلع جـ د يناظرُ الضِّلع ع ل.

الضِّلع د أ يناظرُ الضِّلع ل س.

الزوايا المتناظرةُ:

- ∡ أ ب جـ تناظرُ ∡ س ص ع.
- ∡ ب جـ د تناظرُ ∡ ص ع ل .
- ∡ جـ د أ تناظرُ ∡ ع ل س.
- ∡ د أ ب تناظرُ ∡ ل س ص.

وينتج من التّشابه أنّ الأضلاع المُتناظرة مُتناسبة، وهذا يعني:

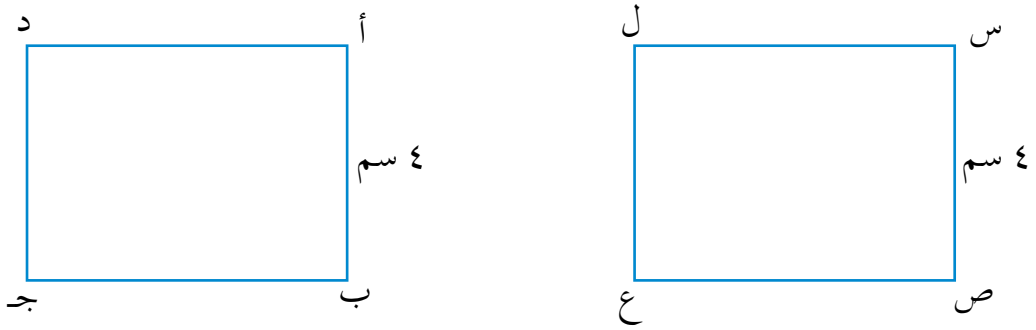
$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ل س}} = \text{معامل التّشابه (مقياس الرّسم)}$$

مثال (١):

س ص ع ل مربع فيه س ص = ٤ سم، أ ب جـ د مربع آخر فيه أ ب = ٤ سم،

هل المربعان متشابهان؟ هل المربعان متكافئان؟ لماذا؟

الحل:



بما أنّ كل من الشكلين مربّع، فإنّ زواياهما قوائم، أيْ أنّ الزوايا المتناظرة فيهما متساوية في القياس، و أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة لأنّ أطوالهما متساوية، إذًا المربعان متشابهان.

مساحة المربع س ص ع ل = (طول الضلع)^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦ سم^{٢}

مساحة المربع أ ب جـ د = (طول الضلع)^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦ سم^{٢}

و بما انّ مساحتيهما متساويتان، فإنّ المربعين متكافئان.

عزيزي الطالب قم بحل التدريب الآتي:

تدريبٌ ١

هل المستطيلان المتشابهان متكافئان؟ بيّن ذلك.

سنتعرّف في هذا الدّرس على حالات تشابه المثلّثات.

هناك ثلاث حالات من تشابه المثلّثات:

الحالة الأولى: يتشابه مثلّثان إذا تطابقت زواياهما المُتناظرة.

الحالة الثانية: يتشابه مثلّثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المُتناظرة.

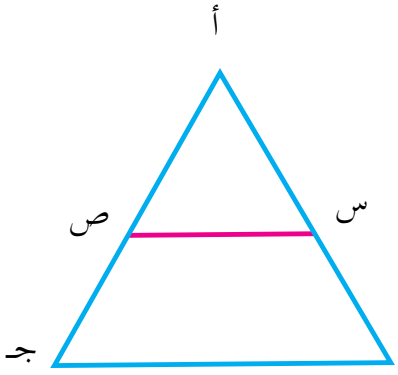
الحالة الثالثة: يتشابه مثلّثان إذا تناسب طولا ضلعين في أحدهما مع طولي الضِّلعين المناظرين لهما في الآخر، وكانت الزَّاوية المحصورة بين الضِّلعين في المثلّث الأول تطابق الزَّاوية المُناظرة لها في المثلّث الثّاني.

الآن، سنقوم بحلّ مجموعة من الأمثلة على حالات التّشابه

مثال (٢):

في الشّكل المجاور إذا علمت أنّ س ص// ب جـ ، بيّن أنّ:

Δ أ س ص ~ Δ أ ب جـ متشابهان.



الحلّ:

ق ∡ س أ ص = ق ∡ ب أ جـ زاويةٌ مشتركةٌ

ق ∡ أ ص س = ق ∡ أ جـ ب (زوايا مُتناظرة س ص// ب جـ)

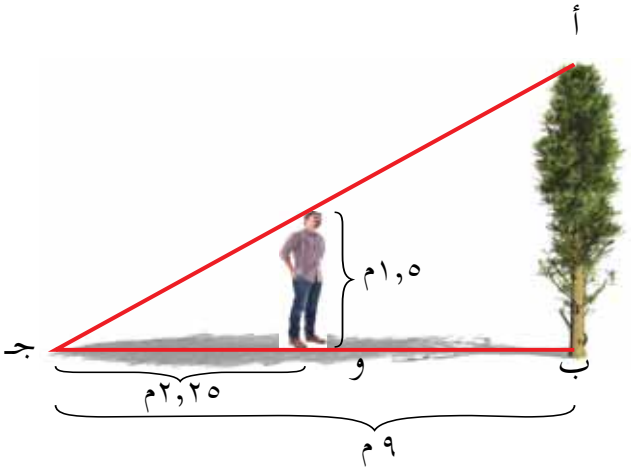
ق ∡ أ س ص = ق ∡ أ ب جـ (زوايا مُتناظرة س ص// ب جـ)

بـما أنَّ الزوايا المتناظرةَ في المثلثينِ متساويةٌ في القياسِ، فإنَّ المثلثينِ متشابهانِ

وبالرموزِ: Δ أ س ص ~ Δ أ ب جـ

مثال (٣):

وقف طالب أمام شجرة كما في الشّكل المجاور، ساعدْ هذا الطّالب في إيجاد طول الشّجرة.



الحلّ:

Δأ ب جـ ، Δد و جـ

ق ∢ أ جـ ب = ق ∢ د جـ و (زاوية مشتركة في المثلّثين)

ق ∢ أ ب جـ = ق ∢ د و جـ = ٩٠°

ق ∢ ب أ جـ = ق ∢ و د جـ (زوايا مُتناظرة د و // أ ب)

يتشابه المثلّثان إذا تطابقت زواياهما المُتناظرة

إذنْ: Δ أ ب جـ ~ Δ د و جـ (يتشابهان بالحالة الأولى)

وينتج من التّشابه أنّ الأضلاع المُتناظرة متناسبة:

$$\frac{\text{د و}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\frac{١,٥}{\text{أ ب}} = \frac{٢,٢٥}{٩}$$ ومنه أ ب = ٦ م طول الشّجرة

(بإمكانك استخدام الآلة الحاسبة لإجراء العمليّات الحسابيّة)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٢

ليكن أ ب جـ مثلّثا، ص نقطة على ب جـ، س نقطة على أ جـ، أ ب// س ص

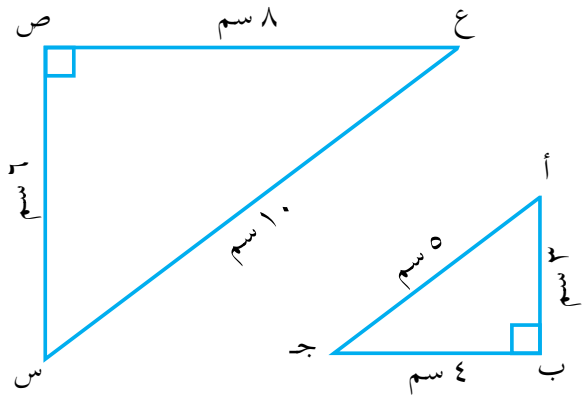
بحيث ب جـ = ٩ سم، أ جـ =١٠,٥ سم، س جـ = ٧ سم، أ ب = ٤,٥ سم، ص جـ = ٦ سم .

أ) بيّن أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص جـ

ب) احسب طول س ص

مثال(٤):

اعتمادًا على الشّكل المجاور، بيّن أنّ Δ أ ب جـ ، Δ س ص ع متشابهان، ثمّ حدّد الزّوايا المتساوية في القياس في كلّ من المثلّثين أ ب جـ ، س ص ع .



الحلّ:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$$

$$\frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

الأضلاع المُتناظرة متناسبة (معامل التّشابه = $\frac{١}{٢}$)

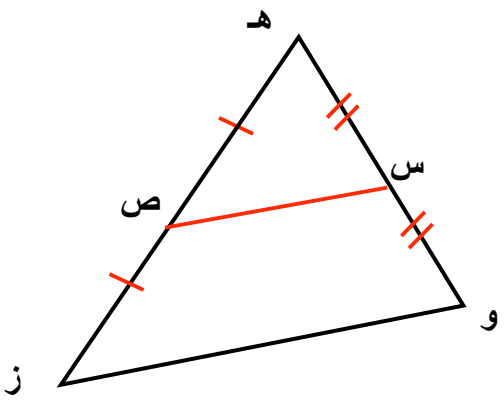
إذنْ: Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع (يتشابهان بالحالة الثّانية)

إذنْ: جميع الزّوايا المُتناظرة متساوية (تشابه المثلّثات)

ومنه ق ∡ أ = ق ∡ س، ق ∡ ب = ق ∡ ص، ق ∡ جـ = ق ∡ ع

مثال (٥):

في الشّكل المجاور، هـ ز = ٨ سم، ز و = ١٠ سم، هـ س = ٣ سم، احسب طول $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$



الحلّ:

هـ ز = ٨ سم (لاحظ أنّ: هـ ز = هـ ص + ص ز)

إذنْ: هـ ص = ٤ سم ، ص ز = ٤ سم

هـ س = ٣ سم = س و (لاحظ أنّ: هـ و = هـ س + س و)

ومنه $\overline{\text{هـ و}}$ = ٣ + ٣ = ٦ سم

ق ∡ و هـ ز = ق ∡ س هـ ص (زاوية مشتركة)

$$\frac{\text{هـ س}}{\text{هـ و}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\text{هـ ص}}{\text{هـ ز}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\text{هـ س}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{هـ ص}}{\text{هـ ز}}$$ (نتحقّق من تناسب الأضلاع المُتناظرة)

$$= \frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

إذنْ: Δ و هـ ز ~ Δ س هـ ص (يتشابهان بالحالة الثّالثة ضلعين وزاوية محصورة)

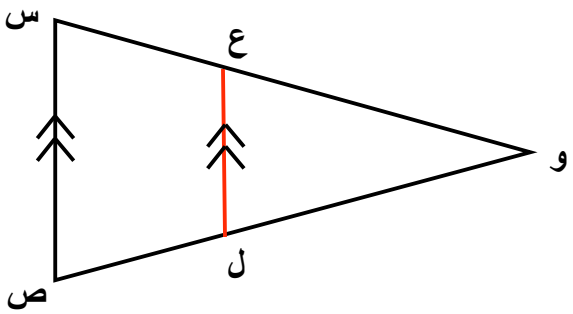
$$\frac{\text{هـ س}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{هـ ص}}{\text{هـ ز}} = \frac{\text{س ص}}{\text{و ز}} = \frac{١}{٢}$$ (بسبب التّشابه)

$$\frac{\text{س ص}}{١٠} = \frac{١}{٢}$$ ومنه س ص = ٥ سم

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٣

في الشّكل المجاور، ع ل // س ص، س ص = ٥ سم، ع ل = ٣ سم، و ل = ٨ سم، احسب طول $\overline{\text{و ص}}$.



الآن، سنتنقل لمفهوم تطابق المثلّثات

للتّأكد من تطابق شكلّين يُوضع أحدهما على الآخر، فإذا غطى أحدهما الآخر تمامًا دون زيادة، أو نقصان في أحدهما، فإنّهما مُتطابقان، ولا يحدث ذلك إلّا إذا كان لهما الهيئة نفسُها، والقياسات نفسُها.

وإذا كان ش١، ش٢ شكلّين مُتطابقين، يُكتَب ذلك بالرّموز ش١ ≡ ش٢

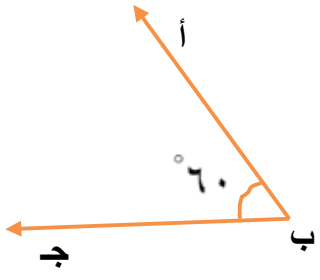
وبالتّالي لا بُدّ لنا من معرفة الآتي:

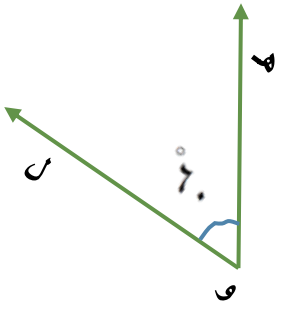
١) تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا كانتا متساويتين في الطّول، أي أنّ:

$\overline{\text{س ص}} \equiv \overline{\text{ل ع}}$ إذا وفقط إذا كان طول س ص = طول ل ع

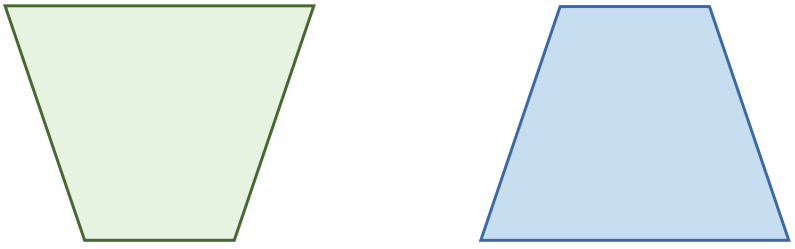
٢) تتطابق الزّاويتان إذا كانتا متساويتين في القياس، أي أن:

∡ أ ب جـ ≡ ∡ هـ و ل إذا وفقط إذا كان ق ∡ أ ب جـ = ق ∡ هـ و ل

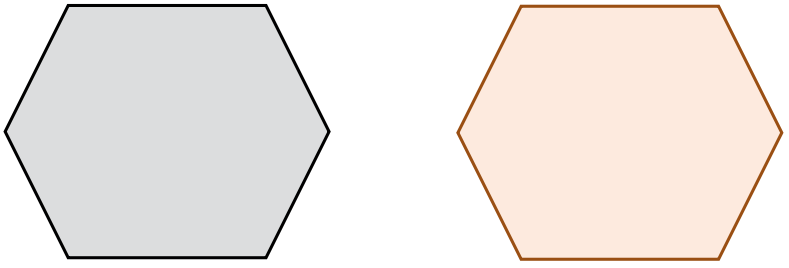




٣) يتطابق الشّكلان الهندسيّان إذا وُجدْ تناظر بين أضلاع ورؤوس الشّكلين، بحيث يطابق كلّ ضلع وكلّ رأس في أحد الأشكال نظيره في الشّكل الآخر.



٤) يتطابق مُضلّعان لهما العدد نفسه من الأضلاع في حالة واحدة فقط، إذا تطابقت الأضلاع المُتناظرة والزّوايا المُتناظرة فيهما.

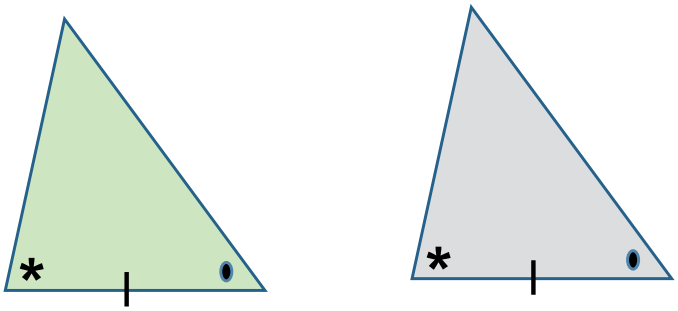


سنتعرّف في هذا الدّرس على حالات تطابق المثلّثات .

الآن، سنقوم بدراسة أربع حالات مختلفة لتطابق المثلّثات:

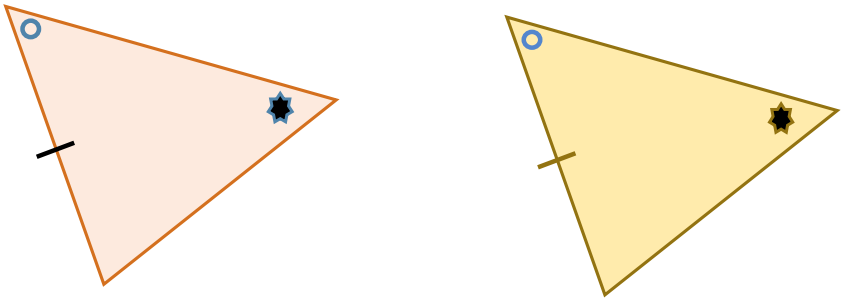
الحالة الأولى: (زاوية، ضلع، زاوية)

يتطابق مثلّثان إذا تطابقت زاويتان والضِّلع الواصل بين رأسيهما في المثلّث الأول مع زاويتين والضِّلع الواصل بين رأسيهما في المثلّث الثّاني.



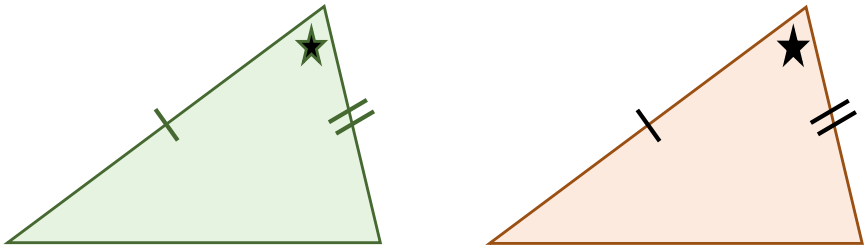
الحالة الثّانية: (زاوية، زاوية، ضلع)

يتطابق مثلّثان إذا تطابقت زاويتان متتاليتان والضِّلع المجاور لأحدهما في المثلّث الأول مع زاويتين متتاليتين والضِّلع المجاور لأحدهما في المثلّث الثّاني.



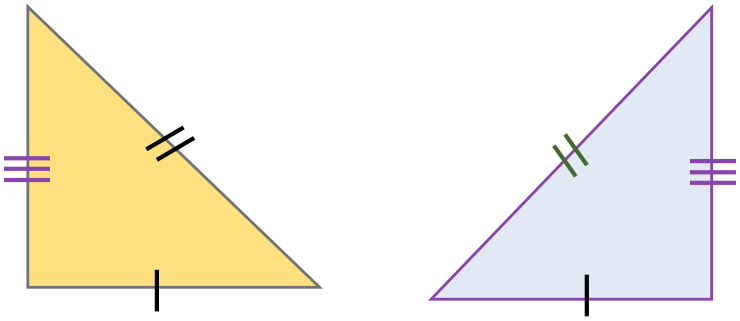
الحالة الثّالثة: (ضلع، زاوية، ضلع)

يتطابق مثلّثان إذا كان الضِّلعان والزَّاوية المحصورة بينهما في أحد المثلّثين تطابق نظيراتها في المثلّث الآخر.



الحالة الرّابعة: (ضلع، ضلع، ضلع)

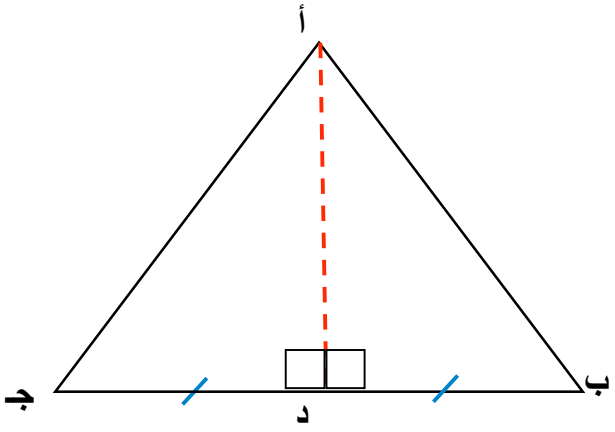
يتطابق مثلّثان إذا كانت أضلاعهما المُتناظرة مُتطابقة .



الآن، سنقوم بحلّ مجموعة من الأمثلة على تطابق المثلّثات.

مثال(٦):

في الشّكل المجاور، Δ أ ب جـ متطابق الضِّلعين، مساحة Δ أ ب د = ٢٤ سم٢ ،
احسب مساحة Δ أ ب جـ .



الحلّ:

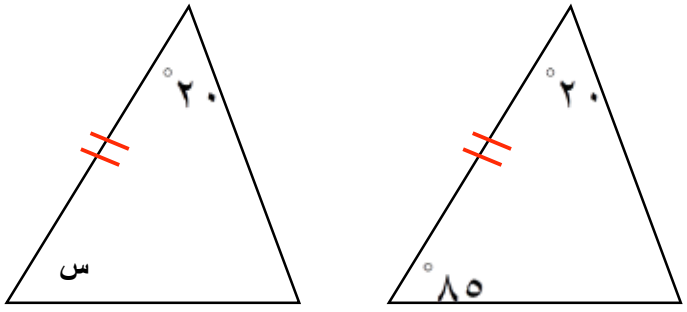
ب د = جـ د	(مُعطى بالشّكل)
ق ∢ أ ب د = ق ∢ أ جـ د	(زوايا القاعدة في المثلث المتطابق الضِّلعين متساوية)
ق ∢ أ د ب = ق ∢ أ د جـ = ٩٠°	(مُعطى بالشّكل)
إذنْ : ∢ أ ب د ≡ ∢ أ جـ د	تطابق بحالة (زاوية، ضلع، زاوية)

ومنه مساحة Δ أ ب جـ = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم٢

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

تدريبٌ ٤

في الشّكل المجاور على فرض أنّ المثلّثين مُتطابقان، جدْ قياس الزّاوية س.



مثال(٧):

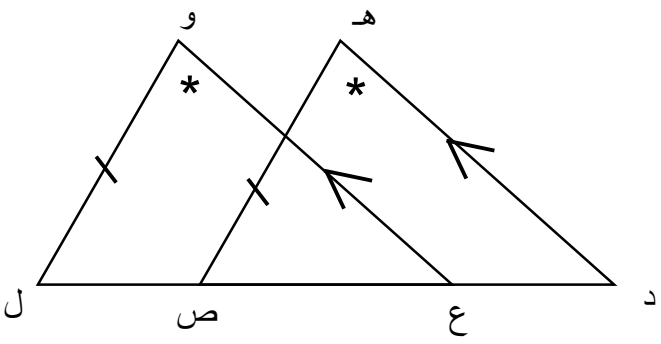
في الشّكل المجاور، إذا كان

$\overline{\text{و ل}} = \overline{\text{هـ ص}}$

$\measuredangle$ق $\measuredangle$ و = $\measuredangle$ ق $\measuredangle$ هـ

و ع // د هـ

بيّن أنّ: Δ و ع ل $\equiv \Delta$ هـ د ص



الحلّ:

$\measuredangle$ و = $\measuredangle$ هـ ، طول $\overline{\text{و ل}}$ = طول $\overline{\text{هـ ص}}$ (من المُعطيات)

$\measuredangle$ ع = $\measuredangle$ د (بالتّناظر والتّوازي)

إذنْ: Δ و ع ل $\equiv \Delta$ هـ د ص (زاوية، زاوية، ضلع)

مثال(٨):

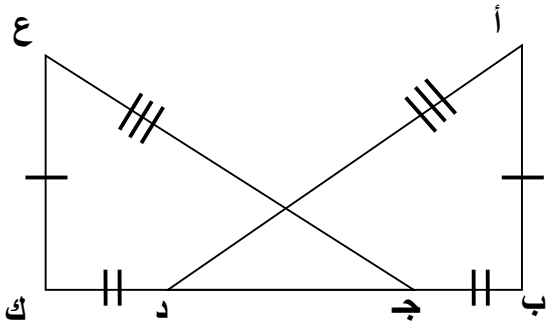
اعتمادًا على الشّكل المجاور، إذا علمت أنّ:

$\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ع ك}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \equiv \overline{\text{ك د}}$

$\overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{ع جـ}}$

بيّن أنّ: Δ أ ب د $\equiv \Delta$ ع ك جـ



الحلّ:

لاحظ أنّ: $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ع ك}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \equiv \overline{\text{ك د}}$

$\overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{ع جـ}}$ (من المُعطيات)

ب جـ + جـ د = ك د + جـ د (جـ د ضلع مشترك)

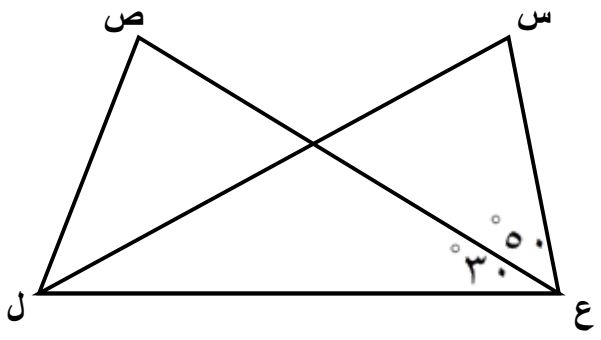
$\overline{\text{ب د}} \equiv \overline{\text{ك جـ}}$

إذنْ: Δ أ ب د $\equiv \Delta$ ع ك جـ (تطابق بثلاث أضلاع (ضلع، ضلع، ضلع)

إليك عزيزي الطّالب التّدريب الآتي:

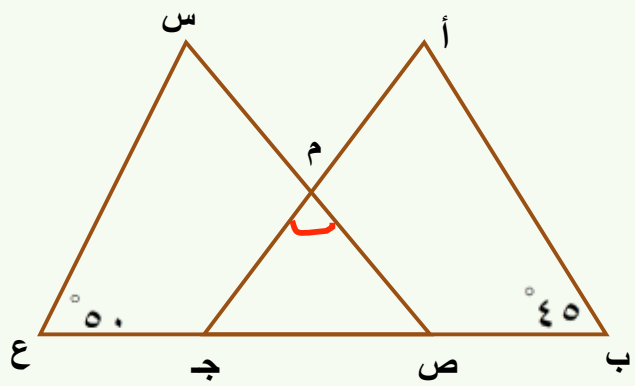
تدريبٌ ٥

في الشّكل المجاور المثلّثان س ع ل، ص ع ل متطابقان، وقياس ∡ ص ع ل = ٣٠°
قياس ∡ س ع ص = ٥٠° ، احسب قياس ∡ ص ل ع .



إثراء

في الشّكل المجاور المثلّثان (أ ب جـ)، (س ص ع) متطابقان، حيث إنّ قياس الزّاوية أ ب جـ يساوي ٤٥° ، وقياس الزّاوية س ع ص يساوي ٥٠° ، جدْ قياس الزّاوية ص م جـ ؟



ملحق الإجابات

الدّرس الأول: الأسس النِّسبيّة وقوانين الأسس (١)

تدريب (١) : ١) ٥ ٢) $\frac{٢}{٤}$ ٣) ٢

تدريب (٢) : ٣

تدريب (٣) : ١) ٢١٦ ٢) $\frac{٢}{٣}$ ٣) $\frac{١}{٧}$

تدريب (٤): ١) ٢ ٢) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{١٠}$ ٣) ١٤٤

تدريب (٥): أ) ٩×١٠^{١٥} ب) -٧×١٠^{-١٢}

تدريب (٦): أ) ٣٩٠٠٠٠ ب) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٢

• إجابة الإثراء:

حجم المجسم = حجم متوازي المستطيلات + حجم المنشور

= (الطّول×العرض×الارتفاع)+(مساحة القاعدة(المثلّث)×ارتفاع المنشور)

= (ص^{٢} × ٢س^{٣} × ٣س) + ($\frac{١}{٢}$ × القاعدة ×ارتفاع المثلّث × ارتفاع المنشور)

= ٦س^{٤} ص^{٢} + ($\frac{١}{٢}$ × ٢س^{٣} × ٤ص ×ص^{٢})

= ٦س^{٤} ص^{٢} + ٤ س^{٣} ص^{٣}

الدّرس الثّاني: قوانين الأسس (٢) و المعادلات الأسيّة

تدريب (١): ١) ٨ ٢) ١٢٥

تدريب (٢): $\frac{٣}{٢}$

تدريب (٣): ١) $\frac{٣\sqrt{٧}}{٧}$ ٢) $\frac{\sqrt{١٠} + ٣\sqrt{٢}}{-٤}$

تدريب (٤): ١) س = ٥ ٢) ص = $\frac{٢١}{٢}$ ٣) س = ٢ ٤) ن = ٠

• **إجابة الإثراء:**

$٧^{(س^{٢}-٤)} = ١$

بما أنّ الجواب ١، يمكن تطبيق أحد قوانين الأسس التّالي $(أ)^{٠} = ١$

أي أنّ الأس للأساس ٧ يساوي ٠

أي أنّ $س^{٢} - ٤ = ٠$

وبتحليل هذه العبارة فرق بين مربعين

$(س-٢)(س+٢) = ٠$

ومنها س = ٢ ، س = − ٢

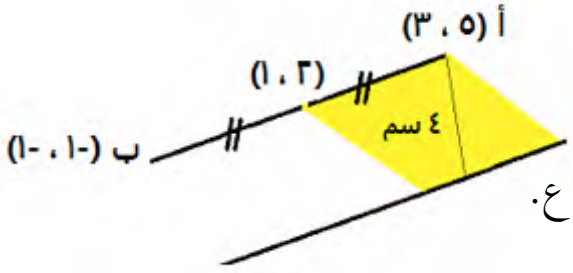
الدّرس الثّالث: المسافة بين نقطتين وإحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة

تدريب (١) : $\overline{ل هـ} = \sqrt{٣٤}$

تدريب (٢) : ل = ٣ ، ل = ١١

تدريب (٣) : إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{جـ د} = (٠ ، -١)$

تدريب (٤) : ل $(-٤ ، ٥)$



• **إجابة الإثراء:**

الشّكل المُظلّل المجاور يمثّل متوازي أضلاع.

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع.

ونلاحظ أنّ الارتفاع = ٤ سم.

نحتاج طول القاعدة، لاحظ أنّ أحد أطراف قاعدة متوازي الأضلاع هي منتصف القطعة أب ، وحسب قانون منتصف قطعة مستقيمة نستطيع إيجاد إحداثياتها.

$= \left(\frac{٥ + ١-}{٢} ، \frac{٣ + ١-}{٢}\right) = (٢ ، ١)$

إذن، طول القاعدة = المسافة بين (٥ ، ٣) و (٢ ، ١)

طول القاعدة $= \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}} = \sqrt{١٣}$

ومنها مساحة متوازي الأضلاع $= \sqrt{١٣} \times ٤ = ٤\sqrt{١٣}$ سم^{٢}

الدّرس الرّابع: معادلة الخط المستقيم و معادلة الدّائرة

تدريب (١) : ص = – ٣ س + ١١

تدريب (٢) : ص = – س + ٣

تدريب (٣) : ص = س – ٣

تدريب (٤) : $(س + ١)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} = ٤٩$

تدريب (٥): $(س – ٧)^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

تدريب (٦): ر=٥ ، (د،هـ) = (–١،٣)

تدريب (٧) : النّقطة ن تقع على الدّائرة.

النّقطة و تقع خارج الدّائرة.

النّقطة ل تقع داخل الدّائرة.

النّقطة ك تقع داخل الدّائرة.

تدريب (٨) :

أ) ص = ٥ س

ب) دائرة

جـ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦٠٠$

• **إجابة الإثراء:**

$$\text{الميل} = \frac{\text{الفرق في الصادات}}{\text{الفرق في السينات}} = \frac{٦ – ن – ٣}{ن – ٢ن} = \frac{٣–ن}{–ن} = ٤ \quad \text{ضرب تبادليّ}$$

$–٤ن = ٣ – ن$ بجمع ن للطّرفين

$–٣ن = ٣$ وبقسمة الطّرفين على –٣

$ن = –١$

إذنْ بعد تعويض قيمة ن في النّقطتين ينتج (–٢،٣) ، (–١ ، ٧)

معادلة الخط المستقيم $ص–ص_{١} = م (س – س_{١})$

وباعتبار $(س_{١} ، ص_{١}) = (–٢، ٣)$

تصبح معادلة الخط المستقيم ص − ٣ = ٤(س− (−٢))

ص−٣ = ٤س + ٨ وبجمع ٣ للطّرفين

ص = ٤ س + ١١

الدّرس الخامس: النِّسب المثلّثيّة

تدريب (١): أ) $\overline{م ل}$ = ٨ ، ب) جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، جـ) جتا س = $\frac{٤}{٥}$ ، جـ) ظا س = $\frac{٣}{٤}$

تدريب (٢): جا ع = $\frac{١٥}{١٧}$ ، جتا ع = $\frac{٨}{١٧}$

تدريب (٣): أ) ٠,٩٦ ≈ ب) ٠,٨٢ ≈ جـ) ١,٤٨ ≈

تدريب (٤): أ) س ≈ ٢٠° ب) ص ≈ ٣١° جـ) هـ ≈ ١٩°

تدريب (٥): طول لوح التزلج ≈ ٥ م

• **إجابة الإثراء:**

جاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\frac{٤}{١٠} = \frac{٨}{\text{أ جـ}}$ وبالضّرب التبادليّ

٤ × طول أجـ = ٨ × ١٠

٤ أجـ = ٨٠

أجـ = ٢٠ (وتر المثلّث)

ومن نظريّة فيثاغورس نستطيع إيجاد طول أب

(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(٢٠)^{٢} = (أب)^{٢} + (٨)^{٢}

٤٠٠ = (أب)^{٢} + ٦٤

(أب)^{٢} = ٤٠٠ − ٦٤

(أب)^{٢} = ٣٣٦ بأخذ الجذر التّربيعيّ للطّرفين ينتج

أب = ١٨,٣

إذن: ظاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{طول أ ب}}{\text{طول ب جـ}}$

$= \frac{١٨,٣}{٨} \approx ٢,٣$

ظا جـ $= \frac{١٨,٣}{٨} \approx ٢,٣$

الدّرس السّادس: العلاقة بين النِّسب المثلّثيّة

تدريب (١): جتا ٢٥° = ٠,٩٠٦٣

تدريب (٢): جا س = $\frac{١٢}{١٣}$

تدريب (٣): جتا س = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا س = $\frac{٣}{٤}$

تدريب (٤): أ) صفر ب) ١ جـ) ١ د) ١

• **إجابة الإثراء:**

١) بقسمة الطّرفين على جتا س ينتج

$\frac{\text{٢ جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{٣ جتاس}}{\text{جتاس}}$

٢ ظا س = ٣ وبقسمة الطّرفين على ٢ ينتج

ظاس = $\frac{٣}{٢}$

٢) بقسمة المعادلة على ٢ ينتج

جا(س) = $\frac{٣}{٢}$ جتا س

وباستخدام المتطابقة المثلّثيّة

حا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

($\frac{٣}{٢}$ جتا س)^{٢} + جتا^{٢} س = ١

$\frac{٩}{٤}$ جتا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

$\frac{١٣}{٤}$ جتا^{٢}س = ١ وبقسمة الطّرفين على $\frac{١٣}{٤}$

جتا^{٢}س = $\frac{٤}{١٣}$ وباخذ جذر الطّرفين

جتاس = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ، $-\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$

ولأنّ س زاوية حادة تهمل القيمة السّالبة

ومنها جتاس = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$

الدّرس السّابع: حلّ المثلّث قائم الزّاوية و زوايا الارتفاع والانخفاض

تدريب (١): ل ن = ٢٠ سم ، ∡ن ≈ ٥٣° ، ∡ل = ٣٧°

تدريب (٢): ∡س = ٤٥° ، ∡ع = ٤٥° ، س ع ≈ ١٠ سم ، ص ع = ٧ سم

تدريب (٣): ارتفاع الشجرة ≈ ٨ م

تدريب (٤): المسافة بين قاعدة البرج وموقع الحجر = ٣٢ م

• **إجابة الإثراء:**

أ) البعد بين المنزل و البرج = أ ب

ظا ٢٨° = $\frac{٦}{\text{أ ب}}$

٠,٥٣١٧ = $\frac{٦}{\text{أ ب}}$

أ ب = $\frac{٦}{٠,٥٣١٧}$ = ١١,٢٨ م

ب) ارتفاع البرج = د جـ + ٦

ظا ٥٠° = $\frac{\text{د جـ}}{١١,٢٨}$

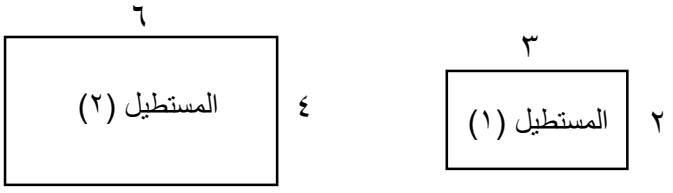
$$\frac{\text{د جـ}}{١١,٢٨} = ١,١٩١٧ \quad \text{و منه د جـ} = ١,١٩١٧ \times ١١,٢٨ = ١٣,٤٤ \text{ م}$$

ارتفاع البرج = د جـ + ٦ = ١٩,٤٤ م

الدّرس الثّامن: تشابه وتطابق المثلّثات

تدريب (١): لا، تناسب الأضلاع لا يعني تساويها

مثال:



الأضلاع المتناظرة متناسبة $\frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

إذًا المستطيلان متشابهان .

و لكن: مساحة المستطيل (١) = ٢ × ٣ = ٦ سم^{٢}

مساحة المستطيل (٢) = ٤ × ٦ = ٢٤ سم^{٢}

مساحة المستطيل (١) ≠ مساحة المستطيل (٢)

إذنْ المستطيلان غير متكافئان .

تدريب (٢): أ) Δ أ ب جـ ~ Δ س ص جـ

قياسات الزوايا المتناظرة متساوية

(يتشابه المثلثان بالحالة الأولى: يتشابه مثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة)

ب) س ص = ٣ سم

تدريب (٣): $\overline{\text{و ص}} = \frac{٤٠}{٣} = ١٣,٣٣٣$ سم

تدريب (٤): ق ∡ س = ٨٥°

تدريب (٥): ق ∡ ص ل ع = ٨٠°

• **إجابة الإثراء:**

بما أنّ المثلّثين متطابقان، إذنْ:

قياس الزَّاوية أجـ ب يساوي قياس الزَّاوية س ع ص

قياس الزَّاوية أجـ ب = ٥٠°

وكذلك قياس الزَّاوية س ص ع = قياس الزَّاوية أب جـ بسبب تطابق المثلّثين

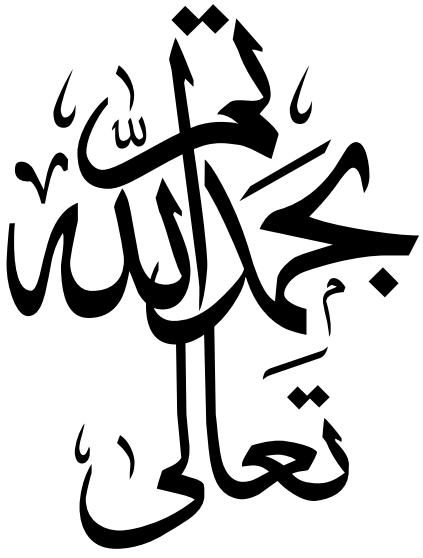
اذًا قياس الزَّاوية أب جـ = ٤٥°

ومن مجموع زوايا المثلّث ص م جـ ينتج

(٤٥° + ٥٠° + قياس الزَّاوية ص م جـ) = ١٨٠°

وعليه فإنّ قياس الزَّاوية ص م جـ = ١٨٠° − ٩٥°

= ٨٥°


تم بحمد الله تعالى