المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

ملزمة الرّياضيّات

للصّفّ الثامن الأساسيّ

الغد

ملزمة الرّياضيّات

للصّف الثامن الأساسيّ

الفصل الثاني

مرحلة التعافي ٢

بسم الله الرحمن الرحيم

والصّلاة والسّلام على رسوله أشرف المرسلين.

شهد العالم في الآونة الأخيرة تغيّرات متلاحقة وسريعة، فأصبحت الحاجة ملحّة إلى إعداد خطط ُمحكمة، تساعد المجتمعات المختلفة على تخطّي الصّعوبات ومواجهة التّحديّات.

حرصت وزارة التّربيّة والتّعليم دائمًا على مواكبة المستجدات على اختلاف أنواعها، ووضع الخطط باستمرار وتعديلها بشكل يسهّل تعلّم أبنائنا الطّلبة، وتساعد على امتلاكهم المعارف والمهارات والخبرات اللازمة والضروريّة، لذا نضع بين أيديكم ملخّصًا لأهمّ المفاهيم والمهارات الواردة في كتاب الجزء الثّاني من مبحث الرّياضيّات للصّفّ الثّامن الّتي أُعدّت بطريقة تهدف إلى تعلّم الطّلبة، وتحسين مهاراتهم وقدراتهم، عن طريق ممارستهم مجموعة من الأنشطة التّعليميّة بصورة ذاتيّة.

وتتضمّن هذه الملزمة الموضوعات الآتية:

١) المعادلة الخطّيّة بمتغيّرين.

٢) التّمثيل البيانيّ لمعادلةٍ خطيَّةٍ بمتغيرين.

٣) حلُّ نظامٍ من معادلتينِ خطيَّتينِ بمتغيرينِ.

٤) الإنشاءات الهندسيّة.

٥) خصائص المثلّث.

٦) مبرهنة فيثاغورس.

٧)حجم المنشور والأسطوانة ومساحتهما الكلية.

٨) حجم المخروط القائم ومساحة سطحه.

الموضوع الأول

المعادلة الخطية بمتغيرين

المُعادلاتُ موضوعٌ رياضيٌّ لهُ تطبيقاتٌ واسعةٌ في شتّى مجالاتِ الحياةِ؛ فلا يكادُ يخلو مجالٌ منها. وللمعادلاتِ أنواعٌ عدّةٌ، منها: الخطّيّةُ والتّربيعيّةُ والتّكعيبيّةُ، وقد تحوي متغيّرًا أو أكثر. وسنتعرّفُ في هذا الموضوع إلى المعادلةِ الخطّيّةِ بمتغيّرينِ.

الصّورة العامّة للمعادلة الخطّيّة بمتغيّرين: س، ص هي:

أ س + ب ص + ج = ٠، حيث أ، ب، ج ∈ ح، أ ≠ صفرًا، ب ≠ صفرًا، أ معامل س، ب معامل ص، جـ الحدّ المطلق أو الثّابت.

مثال ١ بيّن أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطّيّةٌ بمتغيّرينِ مع ذكرِ السببِ:

السبب	نوعها	المعادلة
أ) ١٣ س – ٢٥ = ص^{٢}	ليست خطيَّةً بمتغيرين	لأن أكبر قوَّةٍ للمعادلة هي ٢ (ص مرفوع للقوة ٢)
ب) ٣ ع + ١ = ع + ٥	خطيَّةٌ بمتغيرٍ واحدٍ	المتغير ع مرفوع للقوة ١
ج) ٢١ = ١٠ م + ١١ ن	خطيَّةٌ بمتغيرين	المتغيرين ن، وَ م بينهما جمعٌ.
د) هـ - و = ٣٦ هـ و + ٨	ليست خطيَّةً	لوجود هـ و؛ حاصل ضرب متغيرين

تدريب ١

بين أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطّيّةٌ بمتغيّرينِ مع ذكرِ السّببِ:

أ) ٧ ص + س = ٥٣ ب) - ٥ ع = ١١ ل - ٥ ي جـ) ٤٤ – ك = $ل^{٢}$

د) ٢,٩١ س = ٢,٩١ ص هـ) ٤ جـ + ٣ د = ١٧ و) ع (١ – ل) = ٠

مثال ٢

اكتب كلًّا من المعادلاتِ الخطّيّةِ بمتغيّرينِ في ما يأتي على صورتِها العامّةِ وحدّد المعاملات:

١) س – ٤ ص = ٩ ٢) – ٣ ل = ٢ ع – ٦ ل + ٢١

الحلّ

١) س – ٤ ص = ٩

- ٩ - ٩ بطرحِ ٩ من طرفي المعادلة (- ٩)

تصبح س – ٤ ص – ٩ = ٠

لا حظ أنّ معامل س = ١ و معامل ص = - ٤ و الحدُّ المطلقُ أو الثّابت = - ٩

٢) – ٣ ل = ٢ ع – ٦ ل + ٢١ بإضافة ٣ ل إلى طرفي المعادلة وتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

+ ٣ ل + ٣ ل

٠ = ٢ ع – ٣ ل + ٢١

لا حظ أنّ معامل ع = ٢ و معامل ل = - ٣ و الحدُّ المطلقُ أو الثّابت = ٢١

تدريب ٢

اكتب كلًّا من المعادلاتِ الخطّيّةِ بمتغيّرينِ في ما يأتي على صورتِها العامّةِ وحدّد المعاملات:

٨ = ٣ ص – ٢ س

١,٢ س = ٠,٤ ص – ٠,٧

الزوجُ المرتبُ الذي يجعلُ المعادلةَ الخطيَّةَ بمتغيرينِ عبارةً صحيحةً عندَ تعويضِ قيمِ المتغيرينِ فيها يُسمى حلًّا للمعادلةِ.

مثال ٣

أيّ الزّوجين:(-١، -٢)، (٥ ، -١)، يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ س – ٤ ص = ٩؟

أ) يجب تعويض الزوج المرتب (-١ ، -٢) في المعادلة س-٤ص=٩، لتحديد إن كان يمثل حلا لها أم لا)

أي أنّ س = - ١ ، ص = - ٢

-١ – ٤) - ٢) $\overset{?}{=}$ ٩ الرمز ؟ تعني: هل يتساوى الطرفان بَعد تعويض

٧ $\neq$ ٩

إذن، الزوجُ المرتبُ (- ١ ، -٢) ليس حلًّا للمعادلة: س – ٤ ص = ٩

ب) س – ٤ ص = ٩

٥ - ٤×) -١) $\overset{?}{=}$ ٩ بتعويضِ الزوجِ المرتبِ (٥ ، - ١) في المعادلة

٩ = ٩ (٥ ، - ١) حقّق المعادلة

إذن، النقطة (٥ ، -١) حلّ المعادلة س – ٤ ص = ٩

تدريب ٣

أيّ الزّوجين: (٤ ، ٠) ، (٤ ، -١)، يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ ٢ س – ص = ٨؟

مثال ٤

اكتب المعادلة: ٦س – ٢ص = ٨، بحيث يكون ص أحد طرفيها.

٦ س – ٢ص = ٨

-٦ س - ٦ س

-٢ ص = ٨ – ٦ س بطرح ٦ س من طرفي المعادلة

ص = - ٤ + ٣ س بقسمة طرفي المعادلة - ٢

لاحظ أنّ المتغيّر ص أصبح وحده في الطرف الأيمن؛ فيسمّى ص موضوعًا للقانون.

تدريب ٤ اكتب المعادلة: ـ ٤ ل + ٩ بجعلِ ل موضوعًا للقانونِ مرَّةً، ثم بجعلِ ع موضوعًا للقانونِ مرَّةً أخرى.

إثـــراء

عددان خمسة أمثال الأوّل مطروحًا من الثّاني يساوي ١٠، اكتب معادلة خطّيّة بمتغيّرين، توضّح العلاقة بين هذين العددين، ثم اقترح حلّين لها مبرّرًا إجابتك.

الموضوع الثاني

التّمثيلُ البيانيُّ لمعادلةٍ خطيةٍ بمتغيرينِ

التمثيلُ البيانيُّ لمعادلةٍ خطيةٍ بمتغيرينِ هو خطٌّ مستقيمٌ. ويكون كل زوجٍ مرتبٍ واقعٌ على الخطِّ حلًّا للمعادلةِ.

مثال ١

مَثّل مجموعة حلّ المعادلة ص = س + ٤ بيانيًّا على المستوى البيانيّ

الحلّ: هناك خطوات لتمثيل المعادلة الخطّيّة بمتغيّرين.

الخطوة (١) نجعل ص موضوع القانون ص = س + ٤.

الخطوة (٢) نكوّن جدولًا، نختار قيمتين للمتغيّر س، ثمّ نكتبها في الجدول.

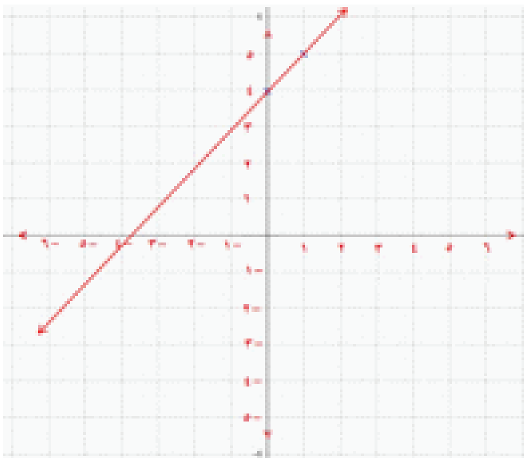
الخطوة (٣) نعوّض كلّ قيمة للمتغيّر س في المعادلة؛ لنجد قيمة ص ونكتبها في الجدول.

عندما س = ٠ فإنّ ص = ٠ + ٤ = ٤

عندما س = ١ فإنّ ص = ١ + ٤ = ٥

ص = س + ٤		
س	ص = س + ٤	(س، ص)
٠	٤	(٠ ، ٤)
١	٥	(١، ٥)

٥) نعيّن الأزواج (٠، ٤) ، (١ ،٥) في المستوى البيانيّ ثمّ نصل بينها بالمسطرة.

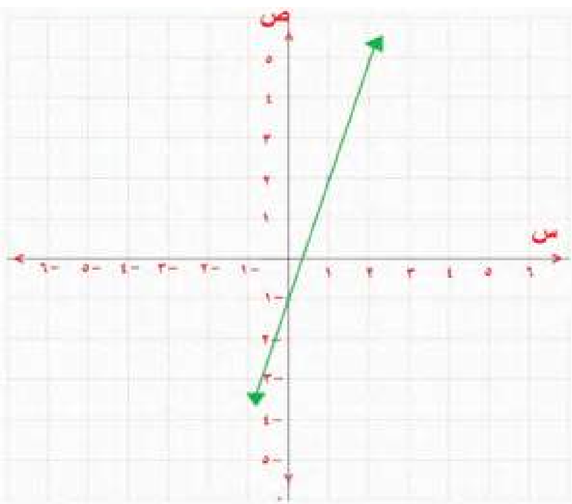


تدريب ١

مَثّل مجموعة حلّ المعادلة ص = ٤ – س بيانيًّا على المستوى البيانيّ.

مثال ١

اعتمادًا على الشّكل المجاور:



١) جِدْ زوجًا مرتّبًا يمثّل حلًّا للمعادلة.

٢) أيّ النقاط (١، ٢) (-١١ ، ٣٤) يمثّل حلًّا للمعادلة؟ برّر إجابتك.

الحلّ:

١) جميع النقاط الموجودة على الخطّ المستقيم، تكوّن مجموعة حلٍّ للمعادلةِ، وعددها لا نهائي.

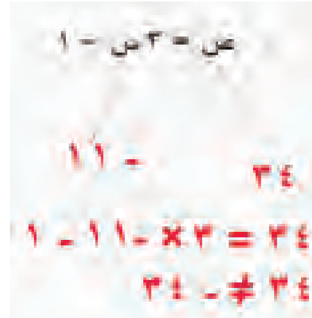
نذكرُ منها: (٠، -١)، (٢، ٥)

٢) الزوج المرتب (١، ٢) لا يمثل حلا للمعادلة لأنه غير واقع على الخط المستقيم، ويمكن التحقق من ذلك جبريا بتعويض س=١، ص=٢ في المعادلة وملاحظة شرط المساواة بين الطرفين.

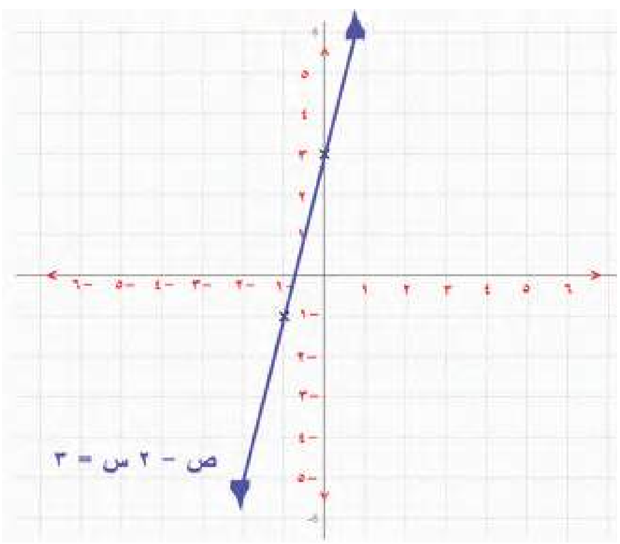
لاحظ أنّ الطّرف الأيمن = الطّرف الأيسر، أي أن الزوجَ المرتبَ (١، ٢) هو حلٌّ للمعادلةِ.

- يمكن التّحقّق من أنّ (- ١١، ٣٤)، تمثّل حلًّا للمعادلة كما يأتي:

بما أن الزوج (-١١، ٣٤) غير ظاهر على الشكل، فيجب الحل جبريًّا.



لاحظ أنّ طرفي المعدلة غير متساويين، وهذا يعني أنّ النّقطة (ـ١١، ٣٤).



تدريب ٢

اعتمادًا على الشّكل المجاور:

١) جِدْ زوجًا مرتّبًا يمثّل حلًّا للمعادلة.

٢) أيّ من الأزواج المرتّبة:

(٢،٧)، (٥، ١٣)، (ـ٢، ـ٢) يمثّل حلًّا للمعادلة؟

برّر إجابتك.

إثـــــراء

عـــددان حقيقيّان، الأوّل س، والثّاني ص، إذا علمت أنّ ثلاثة أمثال العدد الأوّل مضافًا إليه أربعة أمثال العدد الثّاني يساوي ١٢، فاكتب المعادلة الخطّيّة المعبّرة عن العلاقة بين العددين س، ص، ثمّ مثّل المعادلة النّاتجة بيانيًّا. وجد أربعة حلول لها.

الموضوع الثالث

حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيّرين

يتكوّن نظام المعادلتين الخطّيّتين بمتغيّرين من معادلتين خطّيّتين، ويكون حلّ النظام بإيجاد الزّوج المرتّب الّذي يحقّق المعادلتين معًا. ويمكن إيجاد حلّ النّظام الخطّيّ بمتغيّرين بيانيًّا بإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين الممثّلين للمعادلتين في المستوى البيانيّ، أو جبريًّا باستخدام إحدى الطّريقتين: أو الحذف التعويض.

أوّلاً : حلّ النّظام بطريقة التّعويض

مثال ١

استخدم طريقة التّعويض في حلّ الأَنظمةِ الآتيةِ، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ:

أ) س+ص=١٠، ص= س-٢

الحلّ:

س + ص = ١٠ .... نسمّيها المعادلة (١)

ص = س – ٢ .... نسمّيها المعادلة (٢)

ص = س -٢   لاحظ أن المتغير ص موضوعا للقانون

س + ص = ١٠   بتعويض قيمة المتغيّر ص في المعادلة (١).

س + (س -٢)= ١٠

س + س – ٢ = ١٠

٢ س = ١٢ ← س = ٦

لإيجاد قيمة ص نعوض قيمة س=٦ في المعادلة (٢)

ص = ٦ – ٤ = ٤

حل النظام هو (٦، ٤)

ويمكن التّحقّق من صحّة الحلّ عن طريق تعويض قيم س، ص في كلا المعادلتين السّابقتين.

٦ + ٤ = ١٠ ✓

٤ = ٦ – ٢ ✓

ب) – ٦س + ٣ص = -٢، ٢س - ص = ٤

ص = ٢س – ٤ بكتابة ص موضوعا للقانون في المعادلة (٢)

- ٦س + ٣ص = - ٢ بتعويض المعادلة (٢) في المعادلة (١)

-٦س + ٣ (٢س - ٤) = -٢

-٦س + ٦س – ١٢ = - ٢ بتوزيع الضرب على القوس

- ١٢ = - ٢ ✗ عبارة خاطئة

لاحظ: تكوّنت لدينا عبارة خاطئة

لا يوجد حلّ لذا النّظام من المعادلات.

ج) ٥س + ١٠ص = ٢٠ ، ٤ص = ٨ – ٢س

الحلّ:

٥س + ١٠ص = ٢٠

٤ص = ٨ – ٢س لاحظ أنّ أحد المتغيّرين يجب أن يكون موضوعًا القانون

س + ٢ص = ٤ بقسمة طرفي المعادلة (١) على العدد ٥

س = ٤ – ٢ص بجعل س موضوعا للقانون

٤ص = ٨ – ٢ (٤ – ٢ص) تعويض قيمة المتغيّر س في المعادلة (٢)

٤ص = ٨ – ٨ + ٤ص

٠ = ٠ ✓ عبارة صحيحة دائما

لذا يوجد للنّظام عدد لا نهائيّ من الحلول

تدريب ١

استخدم طريقة التّعويضِ في حلِّ النظامين الآتيين، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ:

أ) س + ٤ص = -٥ ، ٢س - ٣ص = ٨

ب) ٢س - ٣ص = -٢، ٤س+ص=٢٤

ثانياً : حل النّظام بطريقة الحذف

مثال ٢

استخدم طريقة الحذفِ في حلِّ الأنظمةِ الآتيةِ، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ:

أ) ٣س + ص = - ٢ ، ٢ ص – ٣س = ١٤

الحلّ:

أعد ترتيبَ المعادلتينِ بوضعِ الحدود المتشابهة أَسفل بعضها

٣س + ص = - ٢ ....(١)	ستلاحظ أن المتغير الاسهل حذفه هو س.
- ٣س + ٢ص = ١٤ ....(٢)	إعادةُ ترتيبِ الحدودِ
٣ص = ١٢	ناتجُ جمعِ المعادلتينِ
	بقسمة الطرفينِ على ٣
ص = ٤	حلّ المعادلة الخطّيّة بمتغيّرٍ.

تعويض قيمة ص= ٤ في إحدى المعادلتين، ولتكن المعادلة (١)، لإيجاد قيمة المتغير س وتكتب بلون اسود من بداية السطر

٣ س + ٤ = - ٢

٣ س = - ٦   بإضافة (-٤) على طرفي المعادلة، ثمَّ بقسمة الطرفينِ على ٣

س = -٢

نجد أَنّ حل النّظامِ (- ٢ ، ٤)

للتّحقّق من صحّة الحلّ نعوض قيم س، ص في كلا المعادلتين السّابقتين.

٣ × (-٢) + ٤ = - ٢ ✓

٢ ×٤ – ٣ (-٢) = ١٤ ✓

ب) ٢س ـ ص = ١ ، ٦ س ـ ٣ص = ٣

الحلّ:

أعد ترتيب المعادلتينِ بوضعِ الحدود المتشابهة أسفل بعضها

٢س ـ ص = ١ .... (١) لحذف المتغيّر س، يجب ضرب المعادلة الأولى بـ (ـ ٣)

٦س ـ ٣ ص = ٣ .... (٢)

ـ٦س + ٣ص = ـ ٣ .... (٣) بضربِ طرفي المعادلة (١) بالعدد ـ٣

٦س ـ٣ ص = ٣ .... (٢)

٠ = ٠ ✓ عبارة صحيحة دائما

إذن؛ يوجد عدد لا نهائيّ من الحلول للنظام.

تدريب ٢ **استخدم طريقة الحذفِ في حلِّ الأَنظمةِ الآتيةِ، ثمّ تحقّق من صحّة الحلّ:**

أ) ٦ س + ٥ ص = ١٦ ، ـ ٢ س + ٥ ص = ـ ٨

ب) س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ص = ٢

ثالثاً : حلُّ النّظام بيانيّاً

حلُّ نظامٍ من معادلتينِ خطّيّتينِ بيانيًّا هو نقطةُ تقاطعِ المستقيمينِ الناتجينِ عن تمثيلِ كلٍّ منهما بيانيًّا (س^{١} ، ص^{١}).

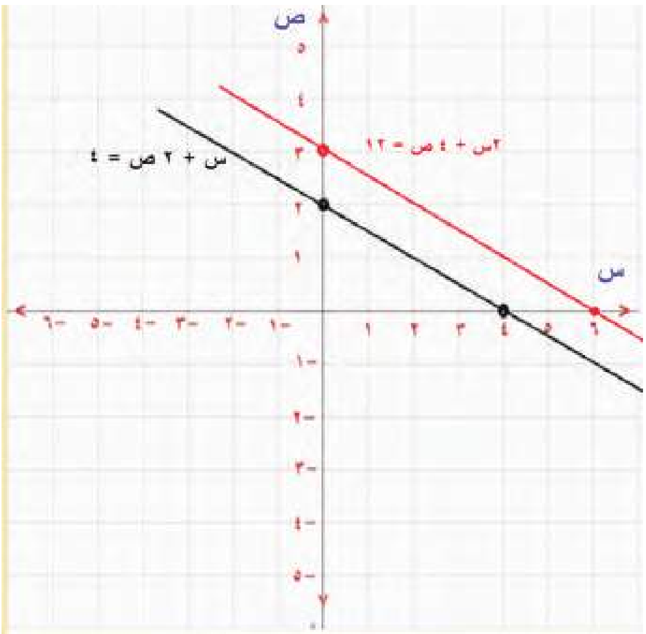
مثال ٣

جِدْ مجموعةَ حلّ كلّ من النّظامينِ الآتيينِ بيانيًّا:

أ) س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٤ ص = ١٢

س + ٢ ص = ٤		
س	ص = $\frac{(٤ - س)}{٢}$	(س ، ص)
٤	٠	(٤ ، ٠)
٠	٢	(٠ ، ٢)
٢	١	(٢ ، ١)

٢س + ٤ ص = ١٢		
س	ص = ٣ - ٠,٥ س	(س، ص)
٦	٠	(٦ ، ٠)
٠	٣	(٠ ، ٣)
٢	٢	(٢ ، ٢)



الحل :

*** نجعل ص موضوع القانون في كلا المعادلتين**

مثّل كلًّا من المعادلتين على المستوى البيانيّ نفسهِ بلونٍ مختلفٍ.

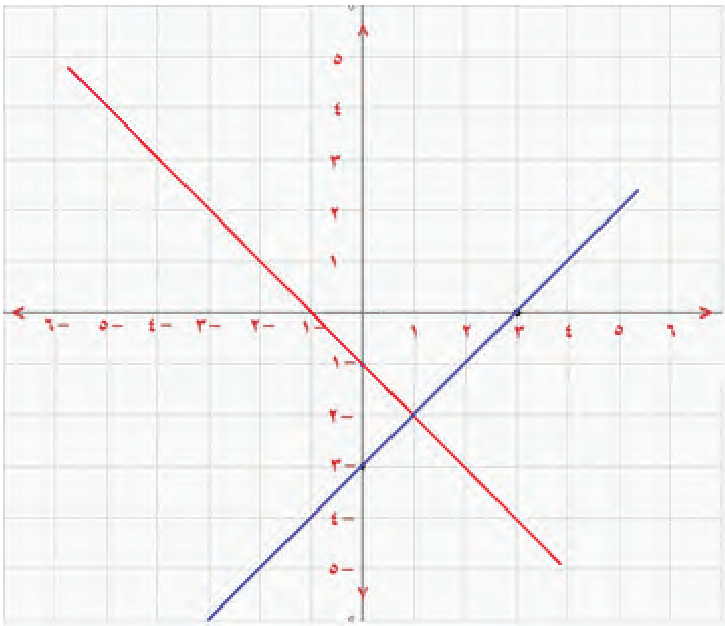
المستقيمان الناتجان متوازيان؛ إذن، لا يوجد حلّ لهذا النّظام من المعادلات.

ب) ص – س + ٣ = ٠ ، ص + س + ١ = ٠

الحلّ:

ص – س + ٣ = ٠		
س	ص = س - ٣	(س ، ص)
٣	٠	)٣ ، ٠)
٠	-٣	(٠ ،-٣)
٢	-١	(٢، -١)

ص + س + ١ = ٠		
س	ص = - س - ١	(س ، ص)
-١	٠	)-١ ، ٠)
٠	-١	(٠ ،-١)
٢	-٣	(٢ ،-٣)



المستقيمان الممثّلان يتقاطعا في النّقطة (١ ،-٢)، لذا؛ فإنّ حل النظام هو: (١، -٢)

تدريب ٢

جِدْ مجموعةَ حلّ كلّ من الأنظمة الآتية بيانيًّا:

أ) ٠,٥ س = ص ، ٢ ص + ٦ س = ١٤

ب) ٥ ص + ٢س = ٣ ، -٢ص +٣س = ١

ج) ص = ٢ س + ٢ ، ص = ٢,٥ س + ١

إثـــراء

يراد تصميم وسيلة تعليميّة من قطعة كرتونٍ مستطيلةِ الشّكلِ محيطُها ٢٠٠ سم، الفرقُ بينَ بُعديها ٢٠ سم، ما بُعدا قطعةِ الكرتونِ؟

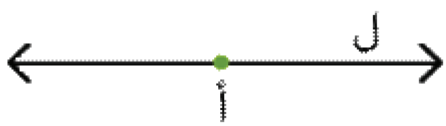
الموضوع الرابع

الإنشاءات الهندسية

مثال ١ **تتبّع إنشاء عمود من نقطة على مستقيم**

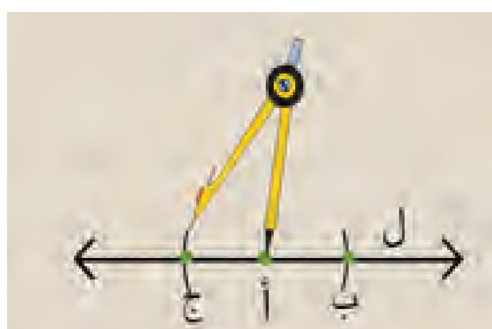
١. ارسم مستقيمًا باستخدام المسطرة

٢. حدّد نقطة عليه أ



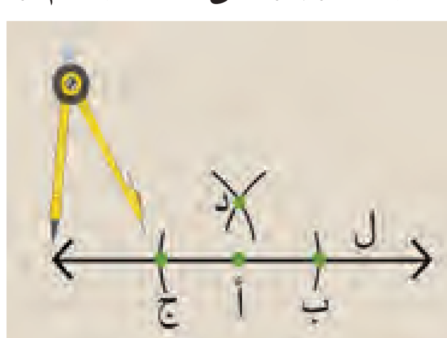
٣. افتح الفرجار فتحة مناسبة

٤. ثبّت رأس الفرجار على النّقطة أ، ثمّ ارسم قوسًا يقطع المستقيم في نقطتين مثل: ج، ب.

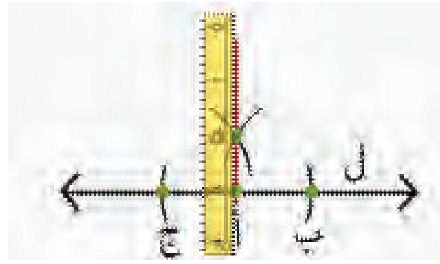


٥. افتح الفرجار فتحة أكبر من طول أ ج، ثمّ ثبّت رأس الفرجار على النّقطة ج، ثمّ ارسم قوسًا كما في الشّكل المجاور

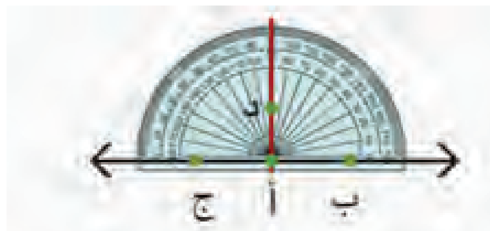
٦. مستخدمًا فتحة الفرجار نفسها، ثبّت الفرجار على النّقطة ب، ثمّ ارسم قوسًا يقطع الأول في النقطة د.



٧. صِل بين النقطة د، والنقطة أ الناتجة.



٨. استخدم المنقلة أو المثلّث القائم للتّحقّق من قياس الزّاوية النّاتجة.

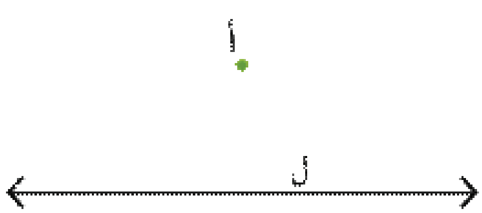


تدريب ١ أنشئ عمودًا إلى أعلى على مستقيم من نقطة معلومة عليه، باستخدام الفرجار، ثم أنشئ عمودًا إلى أسفل من نقطة أخرى. تحقّق من قياس الزّوايا النّاتجة (ماذا تلاحظ بالنّسبة إلى العمودين)؟

ثانياً :إقامة عمود على المستقيم ل من نقطة خارجة عنه

مثال ٢

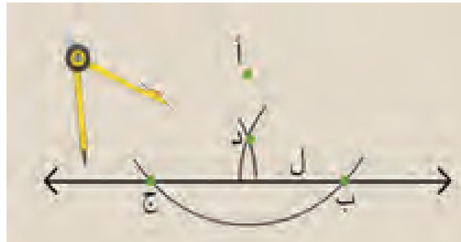
تتبّع طريقة إقامة عمود على المستقيم ل من نقطة خارجه عنه:



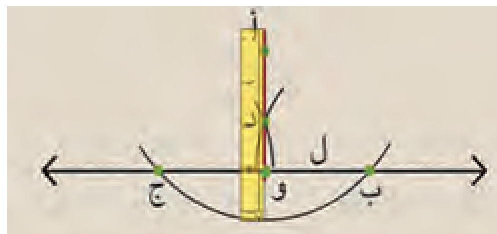
١) ارسم المستقيم ل ونقطة أ خارجة عنه:

٢) افتح الفرجار فتحة مناسبة، ثمّ ركّز الرأس المدبّب في النّقطة (أ)، ثمّ ارسم قوسًا يقطع الخطّ المستقيم في النّقطتين: ب، ج:

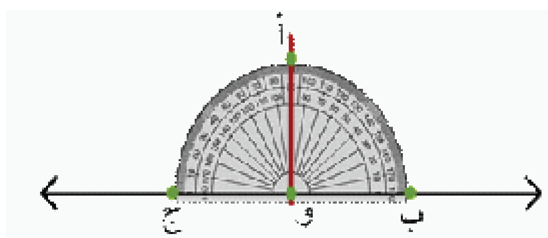
٣) افتح الفرجار فتحة تختلف عن الفتحة الأولى، وركّزه في (ب) ثمّ ارسم قوسًا، ثم ركّزه في (ج) وارسم قوسًا آخر يقطع القوس الأول في النّقطة (د):



٤) صِل أ، د بالمسطرة،ثمّ مدّه على استقامته؛حتى يلتقي مع الخطّ المستقيم ل في النّقطة (و):



٥) تحقّق من صحّة الرّسم باستخدام المنقلة:

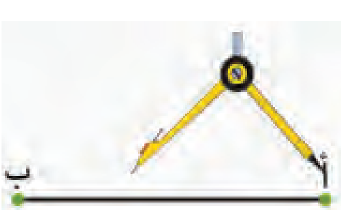


تدريب ٢ أسقط عمودًا على مستقيمٍ من نقطة معلومةٍ خارجةٍ عنه، باستخدام الفرجار ، ثم تحقّق من الزّوايا النّاتجة.

ثالثا : تنصيف القطعة المستقيمة

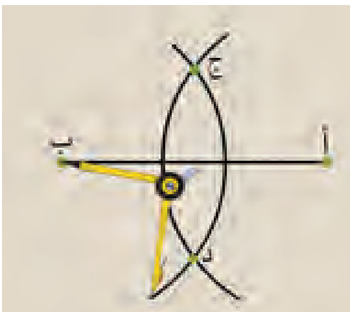
مثال ٣ تتبّع طريقة تنصيف القطعة المستقيمة أ ب:

١. افتح الفرجار فتحة تزيد عن نصف طول القطعة المستقيمة (بالتّقدير):

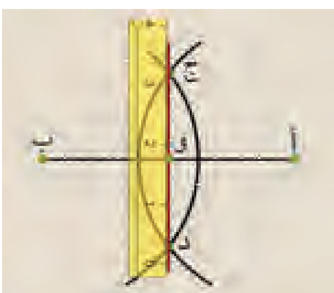


٢. ركّز رأس الفرجار المدبّب في النّقطة أ، ثمّ ارسم قوسًا يقطع أب:

٣. بالفتحة السابقة نفسها،ركّز رأس الفرجار المدبّب في النّقطة ب، ثمّ ارسم قوسًا يقطع القوس الأوّل في النّقطتين ج، د.



٤. صِل ج، د بالمسطرة فيقطع القطعة المستقيمة أب في النّقطة (و)، فتكون النّقطة (و) هي منتصف القطعة أب:

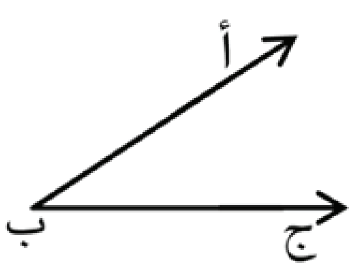


تدريب ٣ ارسم قطعةً مستقيمةً، ثمّ نصفّها باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ.

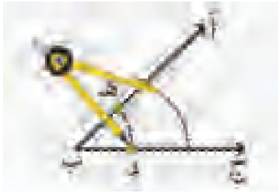
رابعاً: تنصيف الزوايا

مثال ٤

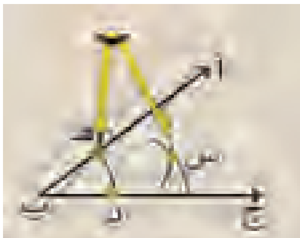
تتبّع طريقة تنصيف الزّاوية أ ب ج:



١) افتح الفرجار فتحة مناسبة، ركّز الرّأس المدبّب في رأس الزّاوية المعلومة أ ب ج، ثمّ ارسم قوسًا يقطع ضلعيها في النّقطتين: د، هـ:



٢) استخدم فتحة الفرجار السّابقة نفسها أو فتحة أخرى مناسبة، ركز الرأس المدبب في النقطة (د) وارسم قوسًا داخل الزاوية أ ب ج:



٣) ركّز الرّأس المدبّب في النّقطة (هـ)، ثمّ ارسم قوسًا يقطع القوس الأوّل في النّقطة (س):

٤) صِل س ب بالمسطرة، فيكون س ب منصّفًا للزاوية أ ب ج:

تدريب ٤ ارسم زاوية باستخدام المنقلة قياسها ٨٠ْ، ثمّ نصّفها باستخدام المسطرة والفرجار، ثمّ تحقّق من صحّة تنصيف الزّاوية.

إثـــراء

يملك رجلان قطعة أرض، يقع أحد أضلاعها على شارع مستقيم، أرادا تقسيمها إلى قطعتين متساويتين في المساحة، كلّ منهما على شكل مستطيل، بحيث يكون ضلعاهما من جهة الشارع متساويين، بيّن كيف يتمّ ذلك على المخطّط.

الموضوع الخامس

خصائصُ المثلثِ

تعدُّ المثلّثات من الأشكال الهندسيّة المهمّة في معظم العلوم، سندرس اليوم المثلّثات بأنواعها المختلفة، ونتعرّف إلى خصائصها.

تأمّل المثلّثات السّابقة، ثمّ اجمع طولي أيّ ضلعين في كلّ منها، وقارنه مع طول الضلع الثّالث، ستجد:

في المثلّث الأوّل ٣ +٤ >٥ ، ٣ +٥ > ٤ ، ٤ +٥ > ٣

في المثلّث الثّاني :٤ +٤ > ٦ ، ٤ +٦ > ٤

في المثلّث الثّالث ٤ +٥ >٨ ، ٤ +٨ > ٥ ، ٥ +٨ > ٤

نتيجة (١) : مجموع طولا أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضّلع

مثال ١

أيّ الأطوال في كلّ ممّا يأتي تمثل أطوال أضلاع مثلّث؟ مبرّرًا إجابتك.

أ) ١١سم ، ١٥سم ، ١٤ سم.

ب) ٦سم ، ١٠سم ، ٤سم.

الحلّ:

أ) الأطوال تمثّل أضلاع مثلّث؛ لأنّ ١١+١٤> ١٥، ١١+١٥> ١٤ ، ١٤+ ١٥> ١١

ب) الأطوال لا تمثّل أضلاع مثلّث؛ لأنّ ٦ +٤ = ١٠

تدريب ١

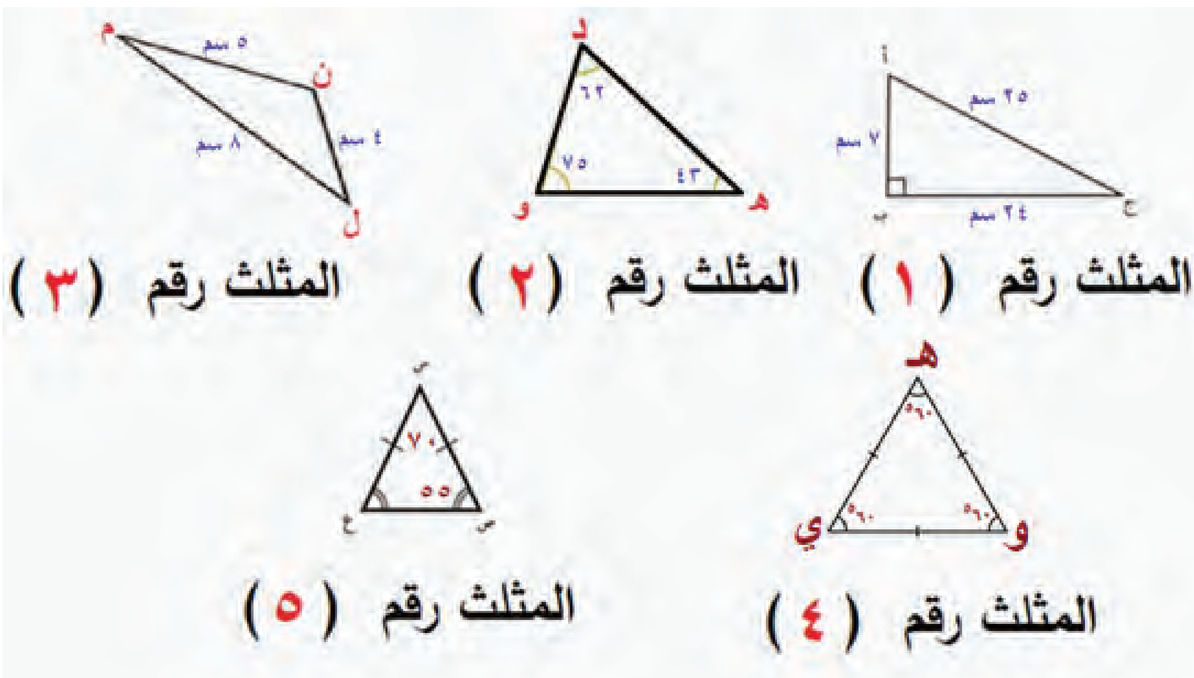
أيّ الأطوال في كلّ ممّا يأتي تمثّل أطوال أضلاع مثلّث؟ مبرّرًا إجابتك.

أ) ٥سم ، ٩سم ، ١٤سم.

ب) ٨سم ، ٣سم ، ٧سم.

اعتمادًا على الأشكال الآتية، أكمل الجدول في كلّ ممّا يأتي:

نشاط ١

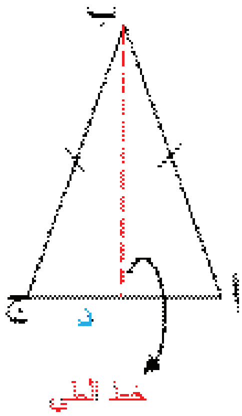


رقم	اسم المثلّث	أطول ضلع	أكبر زاوية	أصغر ضلع	أصغر زاوية
1	أ ب ج	أ ج	ب	أ ب	ج
2	هـ و د	د هـ			هـ
3	ل م ن			ل ن	
4	و ه ي		جميعها متساوية		
5	س ص ع				س

نتيجة (٢) : الضلع الاكبر في اي مثلث يقابل الزاوية الكبرى وكذلك الضلع الاصغر يقابل الزاوية الصغرى

نشاط ٢

١. ارسم على الورقة مثلّث أ ب ج فيه أ ب = ب ج ثمّ قصّه
٢. اطو المثلّث على نفسه من الرأس ب، حيث ينطبق الرّأس أ على الرأس ج
٣. ماذا تلاحظ على كلّ من الزّاوية أ، و الزّاوية ج؟ ماذا نسمّي كلًّا من الزّاويتين؟
٤. ارسم خطّ الطّيّ وسمّه ب د.
٥. ماذا تلاحظ على كلّ من: الزّاوية أب د، و الزّاوية ج ب د؟
٦. ما قياس الزّاوية أ د ب؟
٧. باستخدام البيكار (الفرجار مدبّب الرّأسين)، قارن طول أ د بطول د ج، ماذا تلاحظ؟



نتيجة (٣) خصائص المثلّث المتطابق الضّلعين :

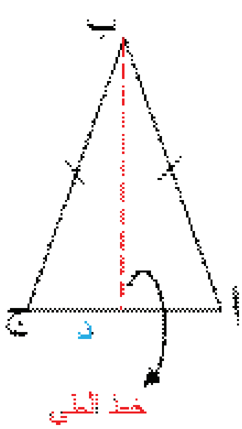
١. زاويتا القاعدة متطابقتان.

٢. القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلّث إلى منتصف قاعدته، تكون عمودية على القاعدة و تنصف زاوية الرأس.

٣. العمود النازل من رأس المثلّث متطابق الضّلعين على قاعدته، ينصّفها و ينصّف زاوية الرأس.

مثال ٢

في الشّكل المجاور المثلّث أ ب ج متطابق الضلعين، إذا كان أ د عمودًا على ب ج،
جِدْ كلًّا ممّا يأتي مبرّرًا إجابتك:
طول أ ب، قياس الزّاوية ب، قياس الزّاوية ب أ د

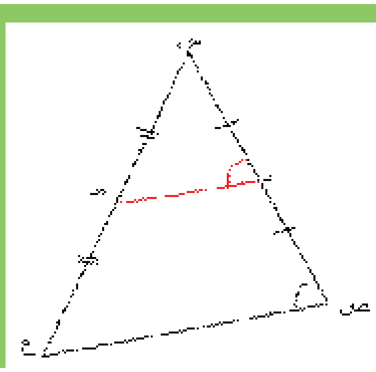


الحلّ:
أ ب = ١١ سم — المثلّث متطابق الضّلعين.
قياس الزّاوية ب = قياس الزّاوية ج = ٥٠˚ — زوايا قاعدة في المثلّث متطابق الضلعين.
لإيجاد قياس الزّاوية ب أ د،
نجد قياس الزّاوية ب أ ج = ١٨٠˚ – ١٠٠˚ = ٨٠˚ — لأنّ مجموع زوايا المثلّث = ١٨٠˚
إذن، قياس الزّاوية ب أ د = نصف قياس الزّاوية ج أ ج = = ٤٠˚ — العمود أ د نصف زاوية الرّأس

تدريب ٢

اعتمادًا على الشكل السابق، جِدْ قياس الزّاوية أ ج د إذا كان قياس الزاوية ب أ د تساوي ٣٥˚، مبرّرًا إجابتك بطريقتين مختلفتين.

النتيجة (٤): القطعة الواصلة بين منتصف ضلعين في المثلث، توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله.



مثال ٣

أ) من خلال الشكل المجاور،أملأ الفراغ فيما يأتي:

منصّف س ص هو ......د......

منصّف س ع هو ......هـ......

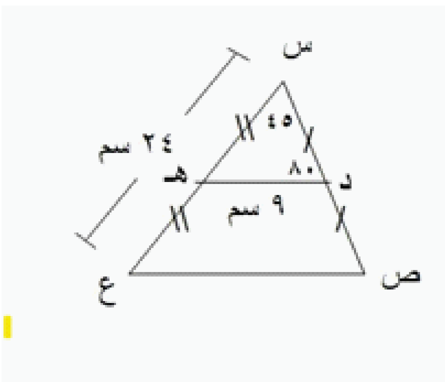
قياس الزّاوية س هـ د تساوي ......٥٥ ْ

طول هـ س تساوي ......١٢سم......

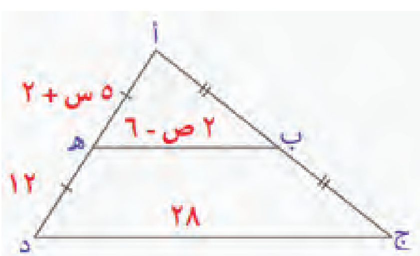
طول ص ع يساوي ......١٨ سم

قياس الزّاوية س ص ع تساوي ......٨٠ ْ

قياس الزّاوية س ع ص تساوي ......٥٥ ْ



ب) أ د ج مثلّث فيه ب، هـ نقطتي منتصف أ ج ، أ د على التّرتيب، جِدْ قِيَم المتغيّرات: س، ص.



الحلّ:

بما أنّ هـ نقطة منتصف

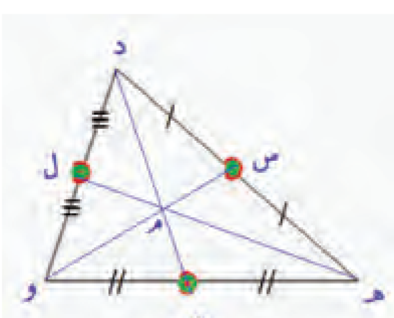
أي أنّ أهـ = هـ د   ٥ س + ٢ = ١٢ ← ٥س = ١٠

س = ٢

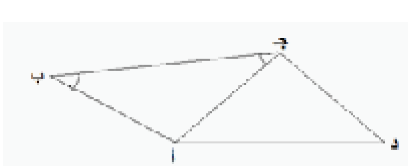
لاحظ أنّ   ج د = ٢ × ب هـ

أي أنّ   ٢٨ = ٢ × (٢ص – ٦)

١٤ = ٢ص – ٦ ← ١٤ + ٦ = ٢ص ← ص = ١٠



تدريب٣ في الشّكل المجاور، ب هـ = ٥سم، أ ج = ١٢سم، فجد كلًّا من: ج د، أهـ.



في الشّكل المجاور، قياس الزّاوية أ ب جـ = قياس الزّاوية أ جـ ب، أثبت أنّ أد + أب> جـ د؟

إثـــراء

الموضوع السادس

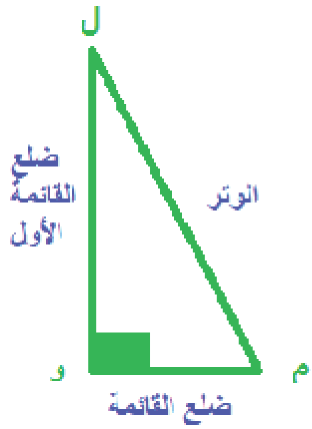
مبرهنةُ فيثاغورس

إنّ فيثاغورس فيلسوف وعالم رياضيات يونانيّ، اشتُهر بفضل معادلته الشّهيرة (مبرهنة فيثاغورس)، وهي واحدة من أقدم النّظريّات المعروفة للحضارات القديمة، أسهمت في تطوير عِلْم الرّياضيّات. استُخدمت نظريّته في العديد من مجالات الحياة مثل: هندسة الإنشاءات، والملاحة، والصّناعة، والفَلَك، والموسيقا والعلوم الأخرى.

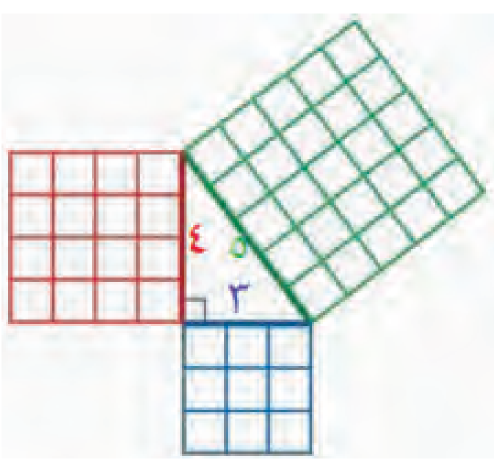
في الشّكل المجاور، المثلّث ل و م، قائم الزّاوية في و

الضّلع ($\overline{\text{ل م}}$) ، هو الضّلع الأطول فيه؛ لأنّه يقابل الزّاوية الأكبر، ويسمّى وَتَر المثلّث، ويسمّى الضّلعان ($\overline{\text{ل و}}$) ، ($\overline{\text{م و}}$) ضلعي القائمة.

سنتعرّف في هذا الموضوع العلاقة بين أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث القائم الزاوية.



نشاط ١ **يمثّل الشّكل المجاور مثلّثًا قائم الزّاوية، معتمدًا على الشّكل، أملأ الفراغات الآتية:**



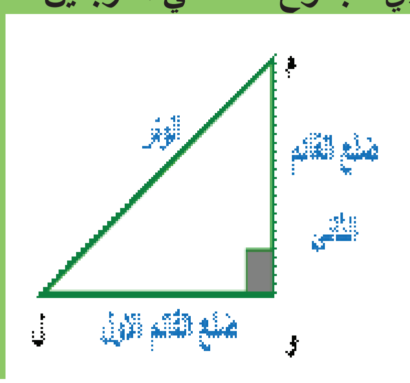
- مساحة المربّع الأخضر الموجود على الوَتَر تساوي ....
- مساحة المربّع الأحمر الموجود على ضلع القائم الأوّل تساوي ....
- مساحة المربّع الأزرق الموجود على ضلع القائم الثّاني تساوي ....
- مجموع مساحتي المربّعين: الأحمر والأزرق .... + ... = ... وهي مساوية لمساحة المربّع الأخضر المرسوم ....

تذكر:

مساحة المربع= (طول الضلع)^{٢}

مبرهنة فيثاغورس

في المثلث القائم الزاوية، مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين.



أي أنّ:

- **مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين**
- **(م ل)^{٢} = (م و)^{٢} + (و ل)^{٢}**

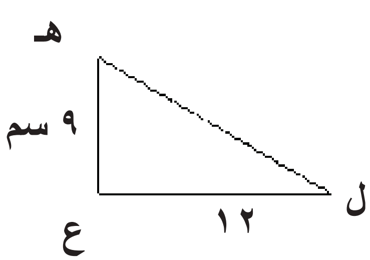
مثال ١

أ) ∆ هـ ع ل قائم الزّاوية في ع فيه هـ ع= ٩سم، ع ل = ١٢سم، احسب طول هـ ل.

الحلّ:

بما أنّ∆ هـ ع ل قائم الزّاوية، نطبق مبرهنة فيثاغورس.

(طول الوَتَر)^{٢} = (طول الضّلع الأوّل)^{٢} + (طول الضّلع الثّاني)^{٢}



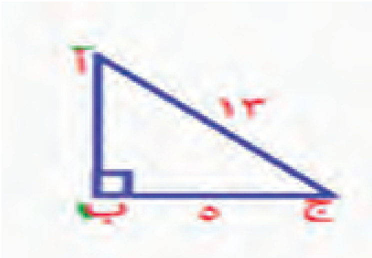
(هـ ل)^{٢} = (هـ ع)^{٢} + (ع ل)^{٢}

= (٩)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٢٢٥

هـ ل = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥

إذن، طولُ الوترِ = هـ ل = ١٥ سم

ب) أ ب ج مثلّث قائم الزّاوية في ب ، أ ج = ١٣ سم، ب ج = ٥ سم
احسب أ ب



الحلّ:

(أ ج)^{٢}– (ج ب)^{٢} =(أ ب)^{٢}
١٦٩ - ٢٥ = (أ ب)^{٢}
١٦٩ – ٢٥ = ١٤٤
(أ ب)^{٢} = ١٤٤
أ ب = ١٢ سم

تدريب١ أ) Δس ص ع قائم الزّاوية في ص فيه س ص = ٨سم، س ع = ١٠سم، احسب طول ص ع.

نتيجة : إذا كانت مساحة المربّع المنشأ على الضّلع الأكبر في مثلّث، يساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين، فإن المثلّث قائم الزّاوية.

مثال ٢

بيّن فيما إذا كان المثلث الذي أضلاعه ١٥ سم، ٢٠ سم، ٢٥ قائم الزاوية.

الحلّ:

إذا حقّقت الأضلاع مبرهنة فيثاغورس، يكون المثلّث قائمًا.

(طول الوَتَر)^{٢} = (طول الضّلع الأوّل)^{٢} + (طول الضّلع الثّاني)^{٢}
(٢٥)^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢}
٦٢٥ = ٤٠٠ + ٢٢٥ لذا؛ المثلّث قائم الزّاوية.

تدريب٢ أيّ من المثلّثات الآتية تشكّل أضلاعها مثلّثًا قائم الزّاوية؟ بيّن السّبب.
أ) ٧سم , ٥سم , ١٠سم
ب) ١٢سم , ١٦سم , ٢٠سم

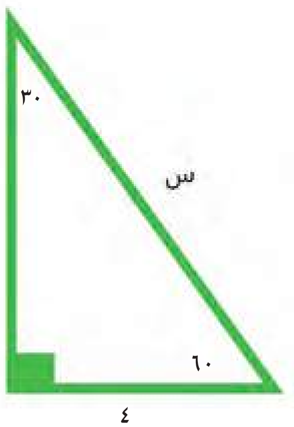
نتيجة :

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث الثلاثيني السّتّيني يساوي طول نصف الوتر.

طول القطعة الواصلة بين رأس القائمة و منتصف الوتر يساوي طول نصف الوتر.

مثال ٣

أ) جِدْ طول أطوال أضلاع المثلّث معتمدًا على الشّكل المجاور.



الحلّ:

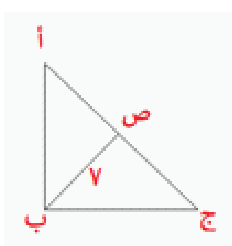
حسَبَ النّتيجة السّابقة، إنّ طول الضّلع المقابل للزّاوية ٣٠ ْيساوي طول نصف الوَتَر،
أي أنّ طول الوَتَر = ٢ × ٤ = ٨ وحدة طول

حسَبَ مبرهنة فيثاغورس، يمكن إيجاد طول الضّلع الثّالث

أمّا (الضّلع المقابل لزاوية ٦٠)^{٢} = ٨^{٢} ـ ٤^{٢}

٦٤ ـ ١٦ = ٤٨

الضّلع المقابل لزاوية ٦٠ = √٤

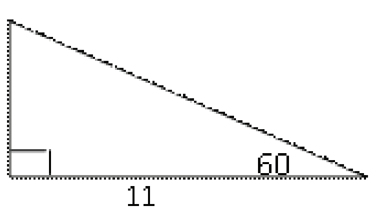


ب) أ ب ج مثلّث قائم الزّاوية في ب، النّقطة ص منتصف الوَتَر أ ج،
إذا كان ب ص = ٧ سم، ما طول الوَتَر؟

الحلّ:
لاحظ حسَبَ النّتيجة السّابقة:
أ ج = ٢ × ب ص
أ ج = ١٤ سم

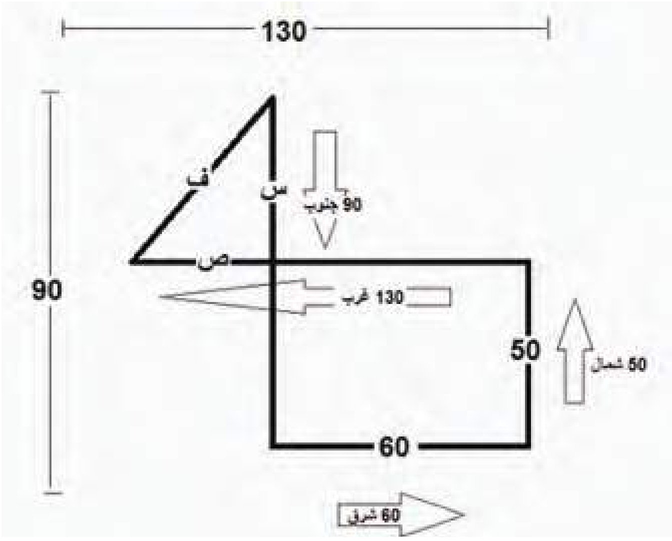
تدريب٣

احسب محيط المثلّث في الشّكل المجاور.



إثــــراء

أقلعت طائرة باتّجاه الجنوب مسافة (٩٠) كم، ثمّ باتّجاه الشّرق مسافة (١٠٠) كم، ثمّ باتّجاه الشّمال مسافة (٥٠) كم، وأخيرًا باتّجاه الغرب مسافة (١٧٠) كم، ما بُعْد الطّائرة عن نقطة الانطلاق؟



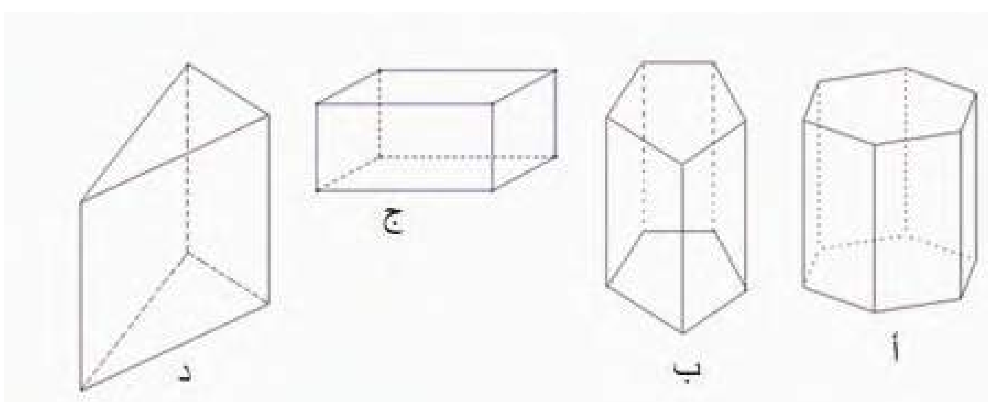
الموضوع السابع

حجم المنشور و الاسطوانة و مساحتهما الكلية

علم الآثار حيث إنّ كثيرًا من آثار الشّعوب القديمة مثل المصريّين القدماء والآشوريّين والبابليّين، تأخذ شكل مجسّمات أسطوانيّة، مثل: الأعمدة المنقوشة والمنحوتة. أراد مهندس أنْ يحسب كمّيّة الإسمنت اللّازمة وماذا يشكّل الإسمنت للأسطوانة؟

المنشور

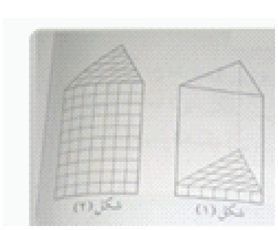
للمنشور القائم قاعدتان وعدد من الأوجه يعتمد على شكل القاعدة، فالمنشور القائم الثّلاثيّ، له ثلاثة أوجه مستطيلة وقاعدتين مثلثتي الشكل، والمنشور القائم الرباعي له أربعة أوجه مستطيلة (بالإضافة إلى قاعدتيه وهما مستطيلتان)، والمنشور القائم السّداسيّ له ستّة أوجه مستطيلة الشكل، وقاعدتين سداسيتي الشكل:



تأمّل الشّكل المجاور، ولاحظ أنّ:

- عدد الوحدات المكعّبة الّتي تغطّي قاعدة المنشور ١٨ مكعّبًا تقريبًا، وهي تساوي مساحة قاعدته.
- عدد الطّبقات الّتي تملأ المنشور تساوي عشرة وتمثّل ارتفاعه.
- عدد الوحدات المكعّبة الّتي شكّلت حجمًا للمنشور تساوي ١٨× ١٠

ممّا سبق، نجد أنّ حجم المنشور=........



إنّ حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

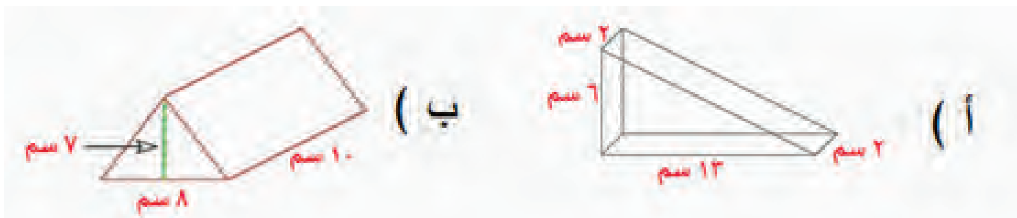
مثال ١ جِدْ حجم المنشور الثّلاثيّ في كلّ من المجسّمات الآتية:

تذكر:
مساحة المثلّث =
نصف طول القاعدة × الارتفاع

الحلّ:

أ) حجم المنشور= مساحة القاعدة × الارتفاع

احسب مساحة القاعدة أوّلًا، ثمّ اضربها في الارتفاع   مساحة القاعدة تساوي مساحة المثلّث



مساحة المثلّث = $\frac{١}{٢}$ طول قاعدة المثلّث × ارتفاعه

= $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ٦ = ٣٩ سم^{٢}

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع   مساحة القاعدة تساوي مساحة المثلّث

= ٣٩ × ٢ = ٧٨ سم^{٣}

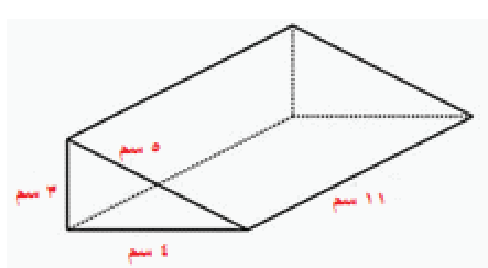
ب) مساحة المثلّث = طول قاعدة المثلّث × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٧ = ٢٨ سم^{٢}

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٢٨ × ١٠ = ٢٨٠ سم^{٣}

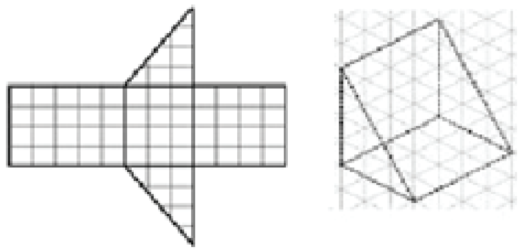
تدريب١ جِدْ حجم المنشور الثّلاثيّ في الشّكل الآتي:



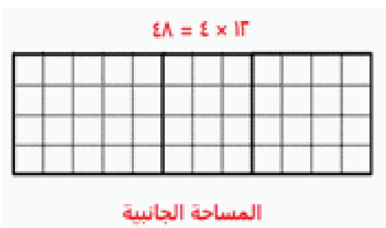
المساحة الكليّة للمنشور الثّلاثي القائم

إذا علمت أنّ قاعدة المنشور القائم ثلاثيّة الشّكل، وله ثلاثة أوجه جانبيّة مستطيلة الشّكل.

تأمّل الشّكل السّابق، ولاحظ أنّ:



- عدد الوحدات (المربّعات) الّتي تغطّي الأوجه الجانبيّة ٤٨ وحدة مربّعة، وهي تمثّل مساحة كلّ من الأوجه الثّلاثة، كما هو موضّح في الشّكل المجاور ١٢ × ٤ = ٤٨ وحدة مربّعة

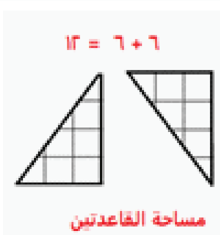


المساحة الجانبية

حيث يمثل العدد ١٢ محيط القاعدة، ويمثل العدد ٤ ارتفاع المنشور، وعليه فإن:

المساحة الجانبيّة = محيط القاعدة × الارتفاع

- عدد الوحدات (المربّعات) الّتي تغطّي القاعدتين تساوي ١٢ وحدة مربّعة



مساحة القاعدتين

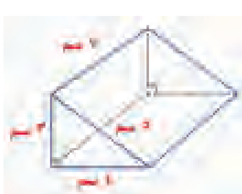
كما هو موضّح في الشّكل المجاور ٦ + ٦

يمثل العدد ٦ مساحة المثلث وتساوي ($\frac{1}{2}$ × ٣ × ٤)

المساحة الكلّيّة للمنشور = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين

مثال ٢

احسب المساحة الكلّيّة للشّكل المجاور.



الحلّ:

محيط قاعدة المنشور= ٣+٤ +٥ = ١٢سم وارتفاع المنشور = ٧ سم

محيط المثلّث = مجموع أضلاعه

المساحة الجانبيّة للمنشور= محيط القاعدة × الارتفاع

١٢ × ٧ = ٨٤ سم^{٢}

مساحة قاعدة المنشور المثلثة = (٣ × ٤) ÷ ٢ = ٦

مساحة القاعدتين = ٢ × ٦ = ١٢ سم^{٢}

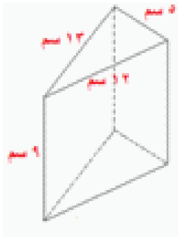
لأنّ للمنشور الثّلاثيّ القائم قاعدتين

مساحة السّطح الكلّيّة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين.

= ٨٤ + ١٢ = ٩٦ سم^{٢}

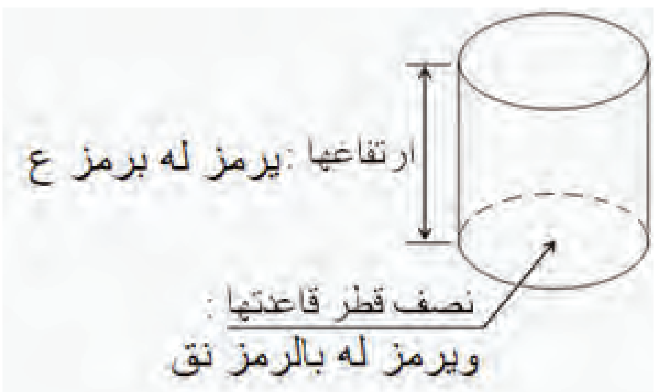
تدريب٢

احسب المساحة الكلّيّة لسطح المنشور الثلاثي القائم المجاور.



حجم الاسطوانة

حجم الأسطوانة يعتمد على نصف طول قُطْر قاعدتها وارتفاعها.



لاحظ أنّ القاعدة عبارة عن دائرة

مساحة الدّائرة تعتمد على طول نصف قطرها

مساحة الدّائرة= π نق^{٢}

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} × ع

مثال ٣

جِدْ الاسطوانة في كل مما يأتي:

الحلّ:

١) حجم الأسطوانة أ = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} × ع

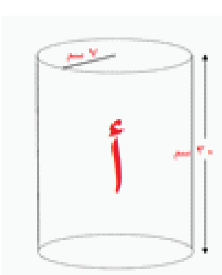
= $\frac{٢٢}{٧}$ ×(٧)^{٢} × ٣٠

= ٢٢ × ٧ × ٣٠ = ٤٦٢٠ سم^{٣}

القاعدة تمثّل مساحة دائرة

نق: نصف قُطْر القاعدة (الدّائرة)

π= $\frac{٢٢}{٧}$



٢) حجم الأسطوانة ب = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ ×١٠^{٢} × ٢٠

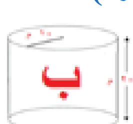
= ٣,١٤ × ١٠٠ × ٢٠

= ٦٢٨٠ سم^{٣}

القاعدة دائرية الشكل

نق: طول نصف قُطْر القاعدة (الدائرة)

π = ٣,١٤



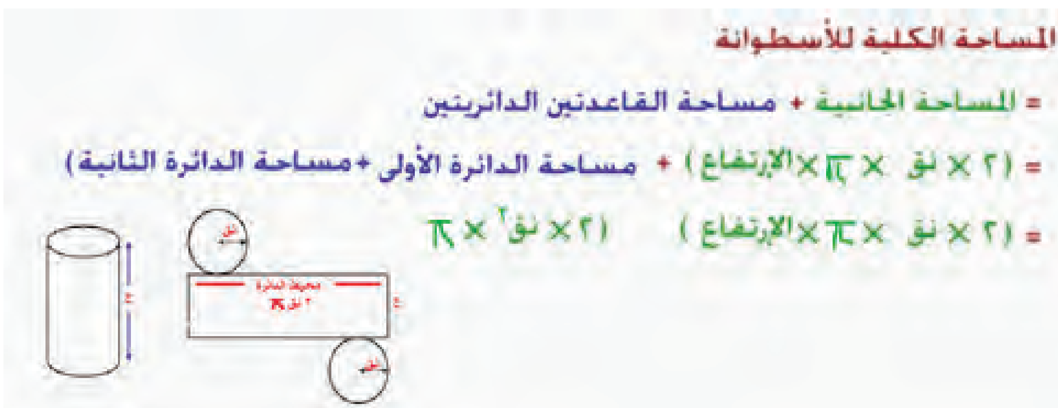
تدريب ٣

جِدْ حجم أسطوانة، نصف قُطْر قاعدتها يساوي ٢٠ سم، وارتفاعها ٥٠ سم.

المساحة الكلية للأسطوانة

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ πنق × ع



مثال ٤

جِدْ مساحة سطح الأسطوانة الّذي طول قُطْر قاعدتها ١٢ سم، وارتفاعها ٤٠ سم.

الحلّ:

المساحة الكليَّة للسَّطحِ = ٢ π نق × ع + ٢ π نق^2

٢ × ٣,١٤ × ٦ × ٤٠ + ٢ × ٣,١٤ × ٦^2 بتعويض نق=٦، ع=٤٠

١٥٠٧,٢ + ٢٢٦,٠٨

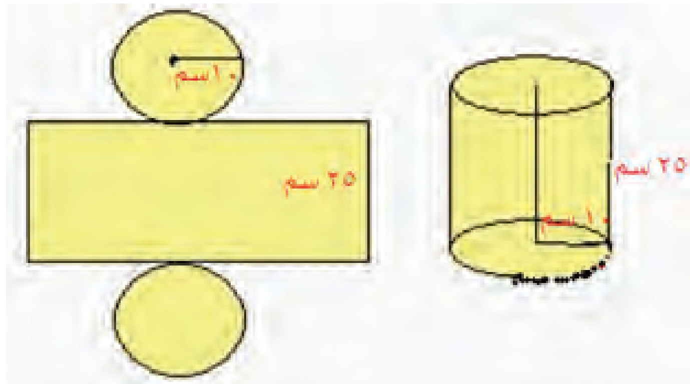
١٧٣٣,٢٨ سم^3

تدريب ٤

جِدْ مساحة سطح الأسطوانة الّذي طول قُطْر قاعدتها ٢١ سم، وارتفاعها ١٢ سم.

مثال ٥

جِد المساحة الجانبيّة والمساحة الكلّيّة للاسطوانة اعتمادًا على الشكل الآتي:



الحل:

المساحة الجانبيّة للأسطوانة = ٢ × نق × π × ع

٢ × ١٠ × ٣,١٤ × ٢٥ = ١٥٧٠ سم^{٢}

المساحة الكلّيّة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين

= ١٥٧٠ + ٢ × π نق^{٢}

= ١٥٧٠ + ٢ × ١٠^{٢} × ٣,١٤ = ١٥٧٠ + ٦٢٨ =٢١٩٨ سم^{٢}

السؤال الإثرائي

جِد المساحة الكلّيّة لأسطوانة قائمة، حجمها (٢٠٧٩)سم^{٣}، وارتفاعها (٦) سم.

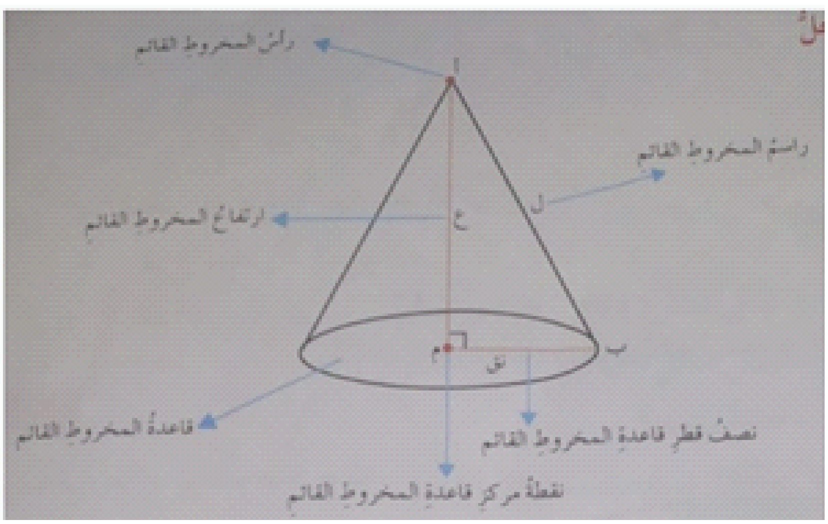
الموضوع الثامن

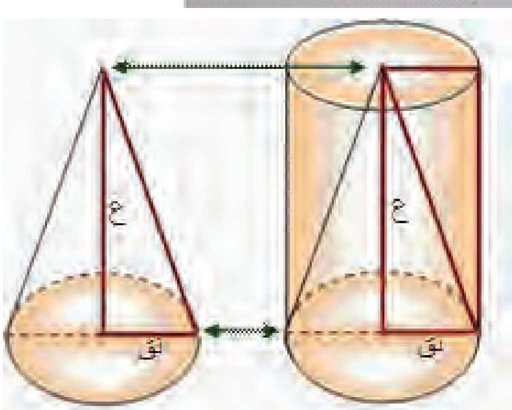
حجم المخروط القائم ومساحة سطحه

المخروط الدّائريّ القائم: هو المخروط الّذي يقابل رأسه مركز القاعدة تمامًا؛ أي يقع على استقامة معه، ويتكوّن من قاعدة دائريّة، ومحور عموديّ يربط بين رأس المخروط ومركز القاعدة، ويصنع هذا المحور زاوية قائمة مع القاعدة، وهذا هو السّبب في تسمية هذا المخروط بالمخروط القائم

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3}\,\pi\ \text{نق}^2\ \text{ع}$$

العناصر الّتي يجب أن تعرفها عن المخروط القائم





نشاط ١

أ) أحضر مجسمين (اسطوانة، مخروط)، لهما نفس القاعدة والارتفاع، كما في الرسم أعلاه، بحيث يكونان مفرغين من الداخل.

ب) أحضر كمية من الرمل الناعم.

جـ) املأ المخروط تماماً بالرمل الناعم، ثم أفرغه في الاسطوانة. كرر العملية حتى تمتلئ الاسطوانة تماماً.

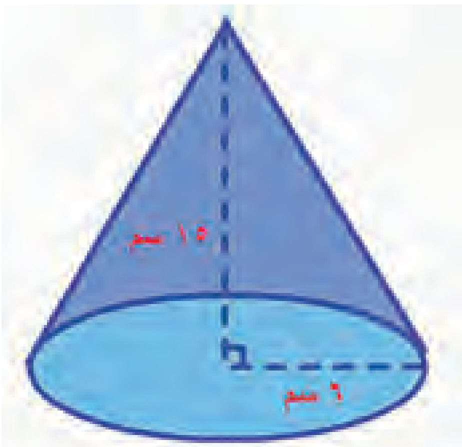
ستجد أنّك احتجت لملء المخروط ٣ مرّات تمامًا؛ لكي تملأ الأسطوانة تمامًا، هذا يعني أنّ:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع أي أنّ:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

مثال ١

جِد حجم المخروط الموضّح جانبًا



الحلّ:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^{٢} × ١٥ بالتعويض

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٦ × ٦ × ١٥ بالتبسيط

= ١٨٠ π سم^{٣} لاحظ الحجم بدلالة π

لاحظ أنّ وحدة الحجم هي سم^{٣}، أي وحدة مكعّبة.

تدريب ١

جِد حجم مخروط نصف قُطْر قاعدته ٧ سم، وارتفاعه ١٠ سم.

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

ل: طول راسم المخروط القائم

نق: نصف قطر قاعدة المخروط القائم

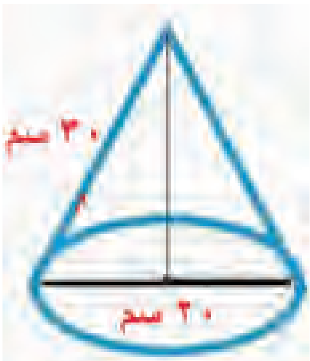
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الكلية = π ل نق + π ل نق^{٢}

= π نق (ل + نق)

مثال ٢

مخروط دائريّ قائم، طول قُطْر قاعدته ٢٠ سم، وطول راسمه ٣٠ سم
جِد مساحة سطحه الكلّيّة



نجد المساحة الجانبيّة ومساحة القاعدة ثم نجمعها

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= π × ٣٠ ×١٠

= ٣٠٠ π سم^{٢}

مساحة القاعدة الدائرية = π نق^{٢}

= π × ١٠^{٢}

= ١٠٠ π سم^{٢}

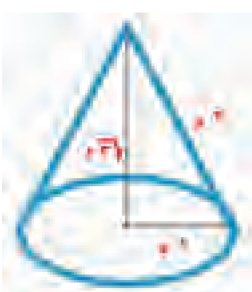
المساحة الكلية للمخروط = π ل نق + π نق^{٢}

= π × ٣٠ ×١٠ + π × ١٠^{٢}

= ٣٠٠ π + ١٠٠ π

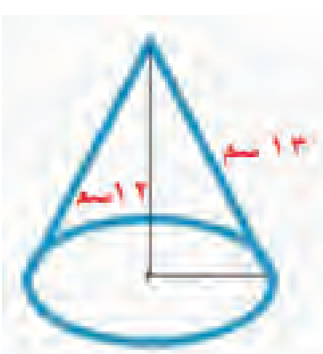
= ٤٠٠ π سم^{٢}

تدريب٢ اعتمادًا على الشكل المجاور، جد حجم المخروط ومساحته الكلية.



مثال ٣

جِد حجم مخروط ارتفاعه ١٢ سم، وطول راسمه ١٣ سم.



الحلّ:

نجد طول نصف القطر أولا

نق^{٢} = ١٣^{٢} ـ ١٢^{٢}	استخدم فيثاغورس
= ١٦٩ ــ ١٤٤	تربيع العددين
= ٢٥	النّاتج
نق = + ٥ سم	

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π× ٥^{٢} ×١٢ بالتعويض

= $\frac{١}{٣}$ π× ٢٥ ×١٢ التبسيط

= ١٠٠ π سم^{٣}

تدريب٣

جِد حجم مخروط ارتفاعه ٨ سم، وطول راسمه ١٠ سم.

إثـــراء

ما طول قطعة قماش مستطيلة الشّكل، عرضها (٣)م، استُخدمت لصنع خيمة مخروطيّة الشّكل، ارتفاعها (٢,٥)م وطول قُطْرها (٦)م.

ملاحق الإجابات

ملحق (١)
المعادلة الخطية بمتغيرين

تدريب ١

لاحظ المعادلات ذات الفروع أ ، د ، هـ هي معادلات خطية بمتغيرين لان جميعها تحوي متغيرين ذات اس (قوة) العدد ١

اما المعادلات ذات الفروع ب ، ج ، و ليست خطية بمتغيرين وذلك بسبب ان الفرع ب يحتوي على ثلاثة متغيرات ع ، ل ، ي

بينما الفرع ج يحتوي على متغيرين احداهما ليس خطيا و انما مرفوع للاس (القوة) ٢

والفرع و سيحتوي على الحد ع ل بعد توزيع الضرب على القوس

ع + ع ل و ع ل لا يعتبر خطي

تدريب ٢

١) ٨ = ٣ص – ٢س

-٢س + ٣ص – ٨ = ٠

معامل س = -٢ ومعامل ص = ٣ والحدّ المطلق أو الثّابت = -٨

٢) - ١,٢س + ٠,٤ص – ٠,٧ =٠

لاحظ أنّ معامل س = -١,٢ ومعامل ص = ٠,٤ والحدّ المطلق أو الثّابت = - ٠,٧

تدريب ٣

(٤ ، ٠) حلّ للمعادلة ٢س – ص = ٨

(٤ ، -١) ليس حلًّا للمعادلة ٢ص + ٣س = - ١٢

تدريب ٤

٥ل+ع -٩ =٠

$ل = -\frac{ع}{٥} + \frac{٩}{٥}$

ملحق (٢)
التمثيلُ البيانيّ لمعادلةٍ خطيةٍ بمتغيرينِ

تدريب ١

جميع النقاط الموجودة على الخطّ المستقيم تكوّن مجموعة الحلّ: لا نهائيّ.

تدريب ٢

(٧ ، ٢) ✗ لأنّ ٢ ــ ٢ × ٧ = ٣

٢ ــ ١٤ ≠ ٣

(٥ ، ١٣) ✓ لأنّ ١٣ ـ٢ × ٥ = ٣

١٣ ــ ١٠ = ٣

ملحق (٣)
حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

تدريب ١

أ) حل النظام هو: (٢، -٢)

ب) حل النظام هو: (٥، ٤)

تدريب ٢

أ) حل النظام هو: (٣ ، - ٤,٠).

ب) حل النظام هو: (٠، ٢)

تدريب ٣

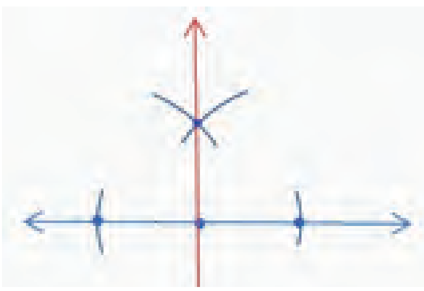
أ) حل النظام هو: (٢ ، ١).

ب) حل النظام هو: (- ٤ ، - ٧).

ج) حل النظام هو: (٢ ، ٦).

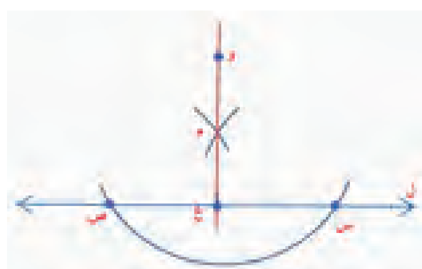
ملحق (٤)
الإنشاءات الهندسية

تدريب ١

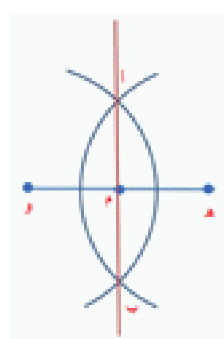


العمودان منطبقان فيشكلان عمودًا واحدًا

تدريب ٢



تدريب ٣



ملحق (٥)
خصائص المثلث

تدريب ١

أ) الأطوال لا تمثّل أضلاع مثلث؛ لأنّ ٥+ ٩= ١٤ .

ب) الأطوال تمثّل أضلاع مثلّث؛ لأنّ مجموع طولي أيّ ضلعين أكبر من طول الضّلع الثّالث.

تدريب ٢

قياس الزاوية ب أ ج = ٧٠° ، وقياس الزاوية أ ج ب = ٥٥°

تدريب ٣

ج د= ١٠سم (لأن ج د = ٢ × ب هـ)

أ هـ = ٦سم (لأن أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أد، أ د =أ ج)

ملحق (٦)
مبرهنة فيثاغورس

تدريب ١

ص ع = ٦

تدريب ٢

أ) لا يشكّل مثلّثًا قائمًا؛ لأنّ مجموع مربّعات أضلاعه لا تحقّق فيثاغورس.

ب) تشكّل مثلّثًا قائمًا؛ لأنّ $(٧)^٢ + (٥)^٢$ لا تساوي $(١٠)^٢$

تدريب ٣

طول الوَتَر يساوي ٢٢، والضّلع الثّالث يساوي ١٩، ومنه المحيط يساوي ٥٢ وحدة طول.

ملحق (٧)
حجم المنشور و الاسطوانة و مساحتهما الكلية

تدريب ١

ح = ٦٦ سم^{٣}

تدريب ٢

المساحة الكلّيّة = ٣٣٠ سم^{٣}

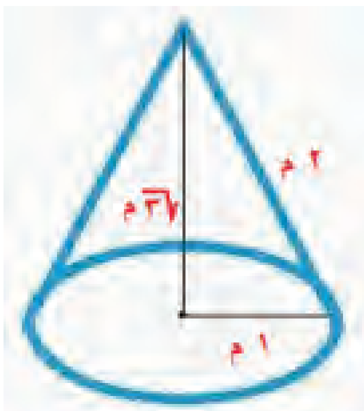
تدريب ٣

حجم الأسطوانة = ١٥٧٠٠ سم^{٣}

تدريب ٤

مساحة سطح الأسطوانة = ٢٩٦٧,٣ سم^{٢}

ملحق (٨)
حجم المخروط القائم ومساحة سطحه



تدريب ١

جِد حجم مخروط نصف قُطْر قاعدته ٧ سم، وارتفاعه ١٠ سم.

حجم المخروط = ٥١٢,٨٧ سم٣

تدريب ٢

جد الحجم والمساحة الجانبيّة والمساحة الكلّيّة للمنشور الآتي:

حجم المخروط = ١,٨ سم٣

المساحة الجانبيّة للمخروط = = ٦,٢٨ سم٢

المساحة الكلّيّة للمخروط = ٩,٤٢ سم٣

تدريب ٣

جد حجم مخروط ارتفاعه ٨ سم، وطول راسمه ١٠ سم

حجم المخروط = ١٢٠ سم٣

ملحق الإثـــــراء (١)

عددان، خمسة أمثال الأوّل مطروحًا من الثّاني يساوي ١٠، اكتب معادلة خطّيّة بمتغيّرين توضّح العلاقة بين هذين العددين، ثمّ قدّم حلّين لها مبرّرًا إجابتك.

الحلّ:

نفرض العدد الأوّل: س والعدد الثّاني: ص

ص – ٥ س = ١٠

(١، ١٥) ١٥ – ٥ × ١ = ١٥ – ٥ = ١٠

(- ١ ، ٥) ٥ – ٥ × (- ١) = ٥ + ٥ = ١٠

	٠			٥

ملحق الإثـــــراء (٢)

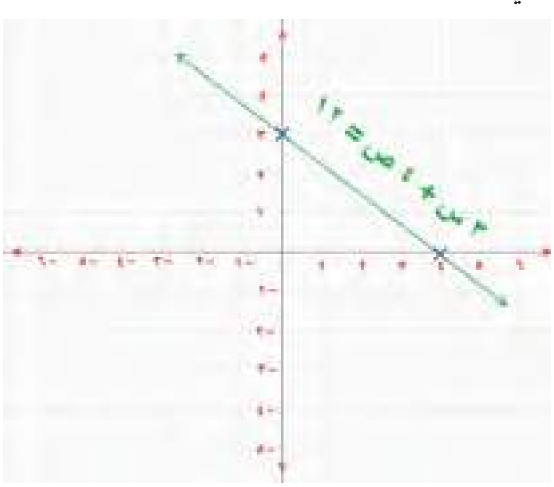
حقيقيّان، الأوّل س، والثّاني ص، إذا علمت أنّ ثلاثة أمثال العدد الأوّل مضافًا إليه أربعة أمثال العدد الثّاني يساوي ١٢، فاكتب المعادلة الخطّيّة المعبّرة عن العلاقة بين العددين: س، ص، ثمّ مثّل المعادلة النّاتجة بيانيًّا.

الحلّ: العدد الأوّل س، إذن، ثلاثة أمثاله هو ٣س، والعدد الثّاني ص، إذن، أربعة أمثاله هو ٤ ص.

إذن، المعادلة النّاتجة هي: ٣س + ٤ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٣	٠

نعيّن الأزواج (٠، ٣)، (٤ ، ٠) في المستوى البيانيّ، ثمّ نصل بينها بالمسطرة كما في الشّكل الآتي:



ملحق الإثـــــراء (٣)

يراد تصميم وسيلة تعليميّة من قطعة كرتونٍ مستطيلةِ الشّكلِ محيطُها ٢٠٠ سم، الفرقُ بينَ بُعديها ٢٠ سم، ما بُعدا قطعةِ الكرتونِ؟

الحلّ:

محيط قطعة الكرتون ٢٠٠ سم

الفرق بين بُعْديها ٢٠ سم

افرض أنّ الطّول هو س، والعرض هو ص

محيط المستطيل = ٢ (الطّول + العرض)

٢٠٠ = ٢ (س + ص)

س + ص = ١٠٠ .... (١)

س – ص = ٢٠ ....(٢)

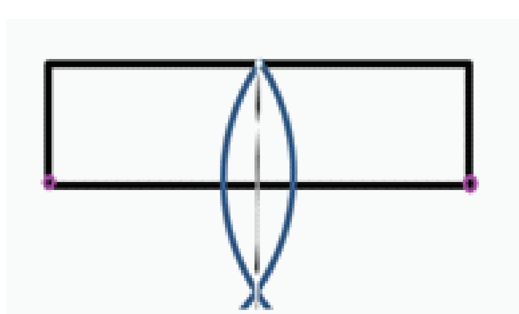
استخدم إحدى طرق حلّ الأَنظمة

س=٦٠، ص= ٤٠

ومنه طول اللوحة ٦٠سم، وعرضها ٤٠سم.

ارسم قطعة الأرض على ورقة ضمن مقياس الرسم الموجود في مخطّط الأراضي.

ثمّ طبّق خطوات تنصيف قطعة مستقيمة على الضّلع الّذي على جهة الشّارع.



لاحظ أنّه تمّ تقسيم القطعة قطعتين متساويتين.

ملحق الإثـــــراء (٥)

بما أنّ زوايا القاعدة في المثلّث أب جـ متساوية

درسنا أنّ مجموع طولي أيّ ضلعين في مثلّث، أكبر من طول الضّلع الثالث

أي أنّ أجـ + أد > جـ د ....(١)

لكنّ أجـ = أب

وبتعويض أب في (١) مكان أ جـ

ينتج

أب + أد > جـ د وهو المطلوب

ملحق الإثـــــراء (٦)

حسَبَ نظريّة فيثاغورس:

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

نستطيع إيجاد قيمة س

(٩٠ ـ ٥٠) = ٤٠

أيضًا ص = ١٣٠ ـ ٦٠ = ٧٠

إذن، ف٢ = (٤٠)^{٢} + (٧٠)^{٢}

ف٢ = ١٦٠٠ + ٤٩٠٠

ف٢ = ٦٥٠٠

ف = ٨٠,٦ كم

ملحق الإثــــراء (٧)

حجم الأسطوانة = πنق^{٢}ع

٢٠٧٩ = ٣,١٤ × نق^{٢} × ٦

٢٠٧٩ = ١٨,٨٤ نق^{٢}، وبقسمة الطرفين على ١٨,٨٤

نق^{٢} ١١٠,٤ ثمّ نأخذ الجذر التّربيعيّ للطّرفين

نق ≈ ١٠,٥ سم

الآن، نستطيع إيجاد المساحة الكلّيّة للأسطوانة

المساحة الكلّيّة للأسطوانة = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

)٢× ٣,١٤×١٠,٥×٦) + (٢×٣,١٤× ١١٠,٤)

٣٩٥,٦٤ + ٦٣٠,٥١٢

١٠٢٦,١٥٢ سم^{٢}

ملحق الإثــــراء (٨)

المساحة الجانبيّة للخيمة = مساحة المستطيل

π نق ل = ٣ × س

٣,١٤ × ٣ × ل = ٣س ....(١)

من نظريّة فيثاغورس نجد طول (ل)

ل^{٢} =)٣(^{٢} + (٢,٥)^{٢}

ل^{٢} = ٩ + ٦,٢٥

ل^{٢} = ١٥,٢٥ ثمّ نأخذ الجذر التّربيعيّ للطّرفين

ل ≈ ٣,٩ م

عوّض قيمة ل في (١)

٣,١٤ × ٣ × ٣,٩ = ٣س

إذن طول قطعة القماش (س) = (٣,١٤ × ٣ × ٣,٩)/٣ =١٢,٢٤٦ م

تم بحمد الله تعالى