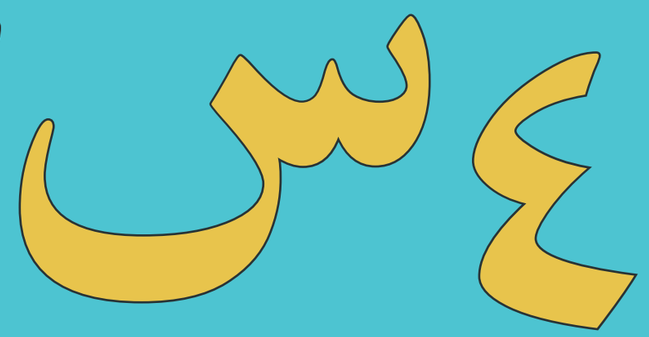
ملزمة الرّياضيّات

للصّف السابع الأساسيّ



مطبعة عمال المطابع
Printers Press

ملزمة الرّياضيّات

للصّف السابع الأساسيّ

الفصل الدراسي الثاني

مرحلة التعافي ٢

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاةُ والسلامُ على رسولِه أشرفُ المرسلين.

شهدَ العالمُ في الآونةِ الأخيرةِ تغيراتٍ متلاحقةٍ وسريعةٍ فأصبحتْ الحاجةُ ملحةً إلى إعداد خطط مُحكمة تساعدُ المجتمعاتِ المختلفةِ على تخطي الصعوباتِ ومواجهة التحديات.

حرصتْ وزارةُ التربيةِ والتعليمِ دائمًا على مواكبةِ المستجدْاتِ على اختلافِ أنواعِها، ووضعِ الخططِ باستمرارٍ وتعديلِها بشكلٍّ يسهّلُ تعلّم أبنائَنا الطلبةِ، وتساعدُ على امتلاكِهم المعارفَ، والمهاراتِ،والخبراتِ اللّازمةِ والضروريّة، لذا نضعُ بين أيديكم ملخصًا لأهمِ المفاهيمِ، والمهاراتِ الواردةِ في كتابِ الجزءُ الثّانِي من مبحثِ الرياضياتِ للصفِ السابع، والتي تم إعدادُها بطريقةٍ تهدفُ إلى تعلّمِ الطلبةِ، وتحسينِ مهاراتِهم وقدراتِهم عن طريقِ ممارستِهم مجموعةً من الأنشطةِ التّعليميةِ بصورةٍ ذاتيةٍ.

وتتضمنُ هذه الملزمةً الموضوعاتِ الآتيةِ:

١) الحدودُ والمقاديرُ الجبرية.

٢) جمعُ الحدودِ والمقاديرُ الجبرية وطرحها.

٣) حلُ المعادلاتِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ.

٤) العلاقةُ بين الزوايا (١).

٥) العلاقةُ بين الزوايا (٢)، وأنواعُ المثلّثاتِ

٦) مساحةُ الدائرةِ ومحيطُها.

٧) الانسحابُ والانعكاسُ والدورانُ.

٨) مقاييسُ النّزعةِ المركزيّةِ ومقاييسُ التّشتتِ.

المحتويات

الموضوع	الصفحة
المقدمةُ	٣
الفهرسُ	٤
الحدودُ والمقاديرُ الجبرية	٥
جمعُ الحدودِ والمقاديرُ الجبرية وطرحِها.	٩
حلُ المعادلةِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ	١٢
العلاقةُ بين الزوايا (١)	١٦
العلاقةُ بين الزوايا (٢) وأنواعُ المثلّثاتِ	٢١
محيطُ ومساحةُ الدائرةِ	٢٧
التحويلاتُ الهندسيّةُ	٣٠
مقاييسُ النّزعةِ المركزيّةِ ومقاييسُ التّشتتِ	٣٨
ملحق الإجابات	٤٦

الحدودِ والمقادير الجبريةِ

هيا نبدأ

اشترى عمرُ (٦) كتبٍ، سعرُ الكتابِ الواحدِ (س) دينار وقدمَ البائعُ له خصمًا مقدارُه (١) دينار اكتبْ تعبيرًا جبريًّا يمثلُ ما دفعَه عمر.

الحلْ:

* نلاحظُ أنَّ عددَ الكتبِ التي اشتراها عمر يساوي ٦، وإنَّ سعرَ الكتابِ الواحدِ غير معلومٍ، فنرمز له بالرمز س، ومنه يكون ثمن الكتب التي اشتراها ٦س، والمبلغُ الذي دفعَه عمر للبائعِ يساوي ٦س - ١.

*نلاحظ أنَّ التعبيرَالجبريّ ٦س يتكونُ من العددِ ٦ والمتغيرُ س، يسمى حداً جبريًّا، أمّا التعبيرُ ٦س - ١ فيسمى مقدارًا جبريًّا لأنه يتكونُ من طرحِ حد من آخر.

الحد الجبري: إما ان يكون ثابتا، أو متغيراً أو حاصل ضرب ثابت بمتغير أو حاصل ضرب ثابتٍ بمتغيرين أو أكثر حيث يسمى الثابت معاملاً ـ ويسمى المتغير أو حاصل ضرب المتغييرات قسما رمزيا.

المقدار الجبري: يتكون من حد جبري أو أكثر يربط بينها عمليات جمع أو طرح.

مثال ١

اكتبْ المعاملَ، والقسمَ الرمزيّ لكلٍّ من الحدودِ الآتيةِ:

١٠س، ٢ س ص، ١٥، م ، ـ٤ل٢م ، ١١ن٣ هـ ص

الحد الجبريّ	معامل الحد الجبريّ	القسم الرمزيّ
١٠س	١٠	س
٢ س ص	٢	س ص
١٥	١٥	لا يوجدْ
م	١	م
ـ٤ل٢م	ـ ٤	ل٢ م
١١ن٣ هـ ص	١١	ن٣ هـ ص

تدريب ١ اكتبْ المعاملَ، والقسمَ الرمزيّ لكلٍّ من الحدودِ الجبريّةِ الآتية:

٤ س م، ٠,٩ س، ٢٠، ص ، -٦ س^{٢} ص، ١٩ و^{٦} ل ع

الحد الجبريّ	معامل الحد الجبريّ	القسم الرمزيّ
٤س م		
٠,٩س		
٢٠		
ص		
-٦س^{٢} ص		
١٩و^{٦} ل ع		

مثال ٢ جدْ عددَ حدودِ كلّ مقدار جبريّ ممّا يأتي، ثم اكتبْ المعاملات والقسم الرمزيّ لكلّ مما يأتي:

(٢س + ٣ص)، (٦م - ٤ن + ٢)، (س^{٢} + وص + ٦ع - ١)

المقدار الجبريّ	الحدودُ الجبريّةُ	عددُ الحدودِ الجبريّةِ	معاملاتُ الحدودِ الجبريّةِ	القسمُ الرمزيُّ
٢س + ٣ص	٢س، ٣ص	٢	٢، ٣	س، ص
٦م - ٤ن + ٢	٦م، -٤ن، ٢	٣	٦ ، -٤ ، ٢	م، ن
س^{٢}+ وص + ٦ع - ١	س^{٢}، وص ، ٦ع، -١	٤	١ ، ١ ، ٦ ، -١	س^{٢}، وص، ع

تدريب ٢ جدْ عددَ حدودِ كلِّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي، ثم اكتبْ المعاملاتِ والقسمِ الرمزيّ في المقادير الجبريةِ الآتية:

(٤ س + ٥ص)، (٢س - ٥و - ٧)، (ص^{٥} + وص + ٦ع - ١)

المقدار الجبريّ	الحدودُ الجبريّةُ	عددُ الحدودِ الجبريّةِ	معاملاتُ الحدودِ الجبريّةِ	القسمُ الرمزيُّ
٤ س + ٥ص				
٢س - ٥و - ٧				
ص^{٥} + وص + ٦ع - ١				

والآن لنسألَ أنفسَنا السؤالَ الآتي:

إذا علمنا قيمةَ المتغيرِ (المجهول) في المقاديرِ الجبريّةِ هل نستطيعُ ايجادَ ناتجِ المقدارِالجبريِّ... لننتقلَ للمثال التّالي:

مثال ٣

جدْ القيمةَ العدديّةَ للمقاديرِ الجبريّةِ الآتيةِ إذا علمتَ أنّ قيمة س = ٢ ، وقيمة ص = ٣

أ) ٣ س + ٢ ص

ب) ٥ ص – س

الحلُ:

أولويات العمليات الحسابية

أ) بتعويضِ قيمةِ كلّ من س وَ ص نجدْ أنّ:

٣س + ٢ص

٣ × (٢) + ٢ × (٣) = ٦ + ٦ = ١٢

ب) : بتعويضِ قيمةِ كلّ من س وَص نجدْ أنّ

٥ص – س

٥ × (٣) – (٢) = ١٥ – ٢ = ١٣

تدريب ٣

جدْ القيمةَ العدديّةَ للمقاديرِ الآتية إذا علمتَ أنّ قيمة س = ٢، وقيمة ص = ٣

أ) ٥ س + ٩ ص **ب) ص - س**

لنحوّلَ السؤالَ التّالي إلى تعبير جبريّ ... لننطلقَ إلى المثال التّالي:

مثال ٤ اشترى حسن (٣) علب من الجبنة، و(٧) أكياس من رقائق البطاطا، إذا علمتَ أنّ سعر علبة الجبنة الواحدة تساوي (س) قرش وكيس رقائق البطاطا (ص) قرش اكتبْ المقدار الجبريّ الذي يعبرُ عن قيمةِ ما دفعهُ حسن للبائعِ.

الحل:

مقدارُ ما دفعَ حسنٌ هو = ٣ × سعر علبةِ الجبنةِ الواحدةِ + ٧ × سعر كيس رقائق البطاطا الواحد

= ٣ س + ٧ ص

إثراء

مع محمد (٥) أمثالِ ما مع سامي من نقودٍ ومع علي أيضاً مبلغًا من المالِ فما المقدارُالجبريّ الذي يعبرُ عن مجموعِ ما مع الثلاثةِ؟

الموضوع الثاني

جمعُ الحدودِ والمقاديرِ الجبرية وطرحُها

تعلمنَا في الصفوفِ السابقةِ العمليّاتِ الحسابيّةِ على الأعدادِ كالجمعِ والطرحِ والضّربِ والقسمةِ ومثال على ذلك

$$٩ + ٢ = ١١$$

$$٥ - ٩ = -٤$$

$$٤ \times ٦ = ٢٤$$

$$٣٦ \div ٤ = ٩$$

هيا نبدأ

لنتذكرَ ما تعلمناه في الحصةِ السابقةِ وننطلقُ من خلالِ المثالِ التّالي

يبيعُ محلٌ للألعابِ كراتٍ ملونةٍ بيضاءَ، وخضراءَ ثمنَ الكرةِ البيضاءِ الواحدةِ (س) قرش وثمنَ الكرةِ الخضراءِ الواحدةِ (ص) قرش، فأرادَ عمرُ، وحسنُ شراءَ مجموعةٍ من الكراتِ الملوّنة حيثُ قررَعمرُ شراءَ ٤ كراتٍ بيضاءَ، و٣ كراتٍ خضراءَ وقررَ حسنُ شراءَ ٦ كراتٍ بيضاءَ، و٩ كراتٍ خضراءَ.

أكملْ الفراغَ لكلّ من الجملِ الآتيةِ:

أ) الحدُ الجبريُّ الذي يمثلُ ثمنَ الكراتِ البيضاءِ مع عمرَ هو ٤س.

ب) الحدُ الجبريُّ الذي يمثلُ ثمنَ الكراتِ البيضاءِ مع حسن هو ٦س.

ج) الحدُ الجبريُّ الذي يمثلُ ثمنَ مجموعِ الكراتِ البيضاءِ مع حسن، وعمر هو ٤س + ٦س = ١٠س.

لاحظ معي لكي نستطيعَ جمع حدودٍ جبريّةٍ يجبْ أن تكونَ الحدود متشابهةٍ يعني أن يكونَ القسم الرمزيّ يحوي نفس المتغيرات وتُجمع الحدود المتشابهة بجمع معاملاتها ويبقى القسم الرمزي دون تغيير.

مثال ١

لاحظ الحدود الجبريّة الآتية متشابهة ٥ب، ٧ب، - ٢ب لأنّها تحتوي على القسم الرمزيّ نفسه وهو (ب).

ولاحظ أيضاً أن الحدود الآتية ٢ص، ٣م ن ع، ٤م^{٢}ن ع ليست متشابهة لأنّها لا تحتوي على القسم الرمزيّ نفسه.

تدريب ١

ميّز الحدودِ المتشابهةِ.

أ) ٦س، ٢ص، ـ٦س، ٤ص

ب) ٢ع، ٣م، ٤

مثال ٢

جدْ ناتج كلّ مما يأتي:

أ) ٣م + ٦م

= ٩م (بجمعِ معاملاتِ الحدودِ المتشابهةِ)

ب) ٥س ص – ٣س ص

= ٢س ص (بطرحِ معاملاتِ الحدودِ المتشابهةِ)

ج) ٦م أ + ٩م أ – ٥م أ

= ١٠م أ (بتطبيقِ أولوياتِ العمليّاتِ الحسابيّةِ)

تدريب ٢

جدْ ناتجَ كل مما يأتي:

أ) ٦س + ١٤س

ب) ٢ص م + ٤ص م – ٥ص م

لننتقلَ إلى جمعِ المقاديرِ الجبريّة وطرحِها.

ملاحظة لجمعِ أو طرحِ المقاديرِ الجبريّة يجبُ أنْ نجمعَ أوتطرحَ الحدودَ المتشابهةَ فقط وغير المتشابهةِ تبقى كما هي.

مثال ٣ جدْ ناتجَ جمع كلٍّ من المقاديرِ الجبريّة الآتيةِ:

أ) ٤م + ٢ن – ١م + ٣ن + ص

= ٣م + ٥ن + ص (الحدان ٤م، ـم متشابهان، والحدان ٢ن، ٣ن متشابهان)

ب) ٢س ص + ٥م + ٣س ص – ٣م + ٢م س – ٧

= ٥س ص + ٢م + ٢م س – ٧ (نجمعُ الحدودِ المتشابهةِ)

مثال ٤ جدْ ناتج طرح (٢س + ٣ص – ٥) من (٦س + ٥ص + ١٠)

الحلّ: (٦س + ٥ص + ١٠) – (٢س + ٣ص – ٥)

= ٦س + ٥ص + ١٠ – ٢س – ٣ص + ٥ (بتوزيع إشارة السالب على القوس)

= ٤س + ٢ص + ١٥ (ثم جمعُ أو طرح الحدودِ المتشابهةِ)

تدريب ٣ جدْ ناتج المقادير الجبريّة الآتية:

أ) (٢ص + ٥م) + (٥ص – ٤م)

ب) (٦س + ٩ص – ٥) – (٢س – ٥ص + ٢)

انتبه دائمًا لأولويّات العمليّاتِ الحسابيّةِ حيثُ الأقواسِ أولاً ثم الأسس، والضرب، والقسمة، فالجمعِ، والطرحِ

إثراء اشترى محمد (٥) أقلامٍ، و(٣) دفاترَ، و(٤) مساطر وكانَ ثمنُ الدفترِ (س)، وثمنُ القلمِ (ص) وثمنُ المسطرةِ (ع) وقدّمَ البائعُ خصمًا على الدفاترِ ١ دينار، وعلى كلّ من المساطرِ والأقلامِ ($\frac{1}{2}$) دينار اكتبْ تعبيرًا جبريًّا يمثلُ قيمةَ ما دفعَهُ محمد.

حلُ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرٍ واحد

لنطلق معاً في هذا الدرس

تعلمتَ سابقاً أنّ (٥س)، (٢ص)، (-٣ل م)، جميعها تسمّى حدودًا جبريّةً.

وأنَّ (٢س + ٧ص) يسمى مقدارًا جبريًا لأنّه يتكونُ من حدّين جبريّين، أما التعبيرُ الجبريُّ ٢س + ٤ = ٨ فيسمى معادلة لأنّه احتوى على رمزِ المساواةِ.

لنتأمّلَ المعادلاتِ الآتيةِ:

٢س + ٨ = ١٢ ٣س – ٢ = ٧

٥ص – ٢ = ١٧ص ٢م = ١٢

نلاحظُ أنَّ كلّا من هذه المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى.

(أي إنها تحتوي على متغيرٍ واحدٍ فقط مرفوعًا إلى القوة ١).

ولهذا تسمّى معادلات خطيّة بمتغيرٍ واحدٍ.

وحَلُّ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرٍ واحدٍ يعني إيجاد قيمة المتغيرِ التي تجعلُ المعادلةَ عبارةً صحيحةً

مثال ١

حُلَّ المعادلاتِ الخطيّة الآتية ومن ثم تحققْ من صحةِ الحلِ.

أ) س + ٥ = ٧

الحلُ: س + ٥ = ٧

أي أنَّ س + ٥ – ٥ = ٧ – ٥ بطرحِ العددِ ٥ من طرفي المعادلةِ

س = ٢

ومنه س = ٢ تمثلُ حلّا للمعادلةِ.

وللتحققِ من صحةِ الحلِ نعوضُ قيمةَ س=٢ في المعادلة.

ويكون الحلُ صحيحًا في حالِ نتج عن التعويض عبارة صحيحة).

نعوضُ قيمةَ س= ٢ بالمعادلةِ س + ٥ = ٧

٢ + ٥ = ٧ إذاً الحلُ صحيحٌ

ب) ص – ٦ = ٤

الحلُ: ص – ٦ = ٤

ص – ٦ + ٦ = ٤ + ٦ بجمعِ العددِ ٦ إلى طرفِي المعادلةِ

ص = ١٠ فالحل صحيح.

التحققُ من صحةِ الحلِ: عوضْ ص = ١٠ في المعادلةِ الأصليّةِ.

١٠ – ٦ = ٤

ج) ٣ س = ١٥

٣ × س = ١٥

$\frac{٣س}{٣} = \frac{١٥}{٣}$ بقسمةِ طرفي المعادلةِ على العددِ ٣

س = ٥

التحققُ من صحةِ الحلِ: عوضْ س = ٥ في المعادلةِ الأصليّةِ.

٣ × ٥ = ١٥ فالحل صحيح.

د) $\frac{س}{٢} = ٣$

$٢ \times \frac{س}{٢} = ٣ \times ٢$ بالضربِ التبادليِّ ينتجُ

س = ٦

التحققُ من صحةِ الحلِ: عوضْ س = ٦ في المعادلةِ الأصليّةِ.

$\frac{٦}{٢} = ٣$ فالحل صحيح.

تدريب ١

جدْ حلَّ المعادلاتِ الخطيّةَ الآتيةَ وتحققْ من صحةِ الحلِ.

أ) س + ٥ = ١٢

ب) ص – ٣ = ٢

ج) ٢ ص = ١٦

مثال ٢

حل كل من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل:

أ) ٢س + ٦ = ١٤

الحلُ:

٢س + ٦ = ١٤

٢س + ٦ ـ ٦ = ١٤ ـ ٦ بطرحِ العددِ ٦ من طرفي المعادلةِ أولاً

٢س = ٨

٢س ÷ ٢ = ٨ ÷ ٢ بقسمةِ طرفي المعادلةِ على العددِ ٢

س = ٤

التحققُ من صحةِ الحلِ: عوضْ س = ٤ في المعادلةِ الأصليّةِ.

٢ × ٤ + ٦ $\stackrel{؟}{=}$ ١٤ الضرب أولاً

٨ + ٦ = ١٤

ب) ٤س = ٢س ـ ٤ (نلاحظُ أنَّ المتغيرَ س كُتبَ في طرفي المعادلةِ. ولإيجادِ حلّ مثل هذه المعادلاتِ نجعلُ المتغيرَ س في طرفٍ واحدٍ من المساواةِ والأعدادَ بالطرفِ الآخر).

٤س = ٢س ـ ٤

٤س ـ ٢س = ٢س ـ ٢س ـ ٤ بجمعِ ـ ٢س لطرفي المعادلةِ

٢س = ـ ٤

س = ـ ٢ بالقسمةِ على العدد ٢ للتخلصِ من الضربِ

التحققُ من صحةِ الحلِ: عوضْ س = ـ٢ في المعادلةِ الأصليّةِ.

٤ (ـ٢) = ٢ (ـ٢) ـ ٤ $\stackrel{؟}{}$ الضرب أولاً

ـ٨ = ـ٤ ـ ٤

ـ٨ = ـ٨

تدريب ٢

جدْ حلَّ كلٍّ من المعادلاتِ الخطيّةِ الآتيةِ وتحققْ من صحةِ الحلِّ.

أ) ٤س + ٣ = ١٥

ب) ٤ص + ٢١ = ٨ص

مثال ٣

إذا جُمعَ العددُ ٢ إلى أربعةٍ أمثال عدد ما أصبحَ الناتجُ ٢٦ فما العددُ؟

الحلُ: نفرضُ أنَّ العددَ المجهولَ س

أربعةُ أمثالِ العددِ تعني ٤س

ومنه تكونُ المعادلة ٤س + ٢ = ٢٦ وبحلِ هذه المعادلةِ نجدُ أنَّ

٤س+٢ -٢ = ٢٦ - ٢ بطرحِ العددِ ٢ من طرفي المعادلةِ

٤س = ٢٤

٤س ÷ ٤= ٢٤ ÷ ٤ بقسمةِ العددِ ٤ من طرفي المعادلةِ

س = ٦

تدريب ٣

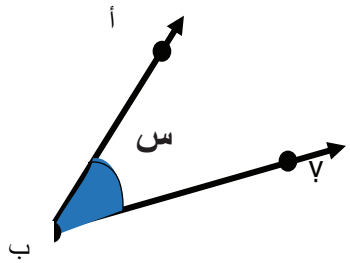
إذا جُمع العددُ ٣ إلى خمسةِ أمثالِ عدد ما أصبحَ الناتجُ ١٨ فما العددُ؟

إثراء

اشترى محمدُ حقيبةً بمبلغِ (٢٠) دينارًا، ومجموعةٌ من الدفاترِ، فإذا كانَ ثمنُ الدفترِ الواحدِ (١,٥) دينارًا، ومجموعُ ما دفعه محمد ثمناً للحقيبةِ والدفاترِ(٥٠) دينارًا، فما عدد الدفاترِ؟

العلاقة بين الزوايا (1)

الزاوية هي شكلٌ هندسيّ ناتج عن التقاء شعاعين بنقطة مشتركة، ويسمى الشعاعين بضلعي الزاويةِ، والنّقطة المشتركةُ بينهما تسمّى رأس الزاويةِ.

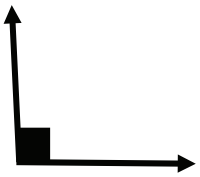


نرمزُ للزاويةِ بالرمز ∢ س أو يرمزُ لها ∢ أ ب ج أو يرمزُ لها ∢ ج ب أ

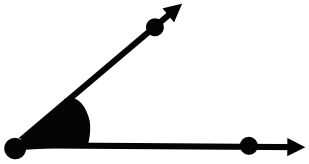
نرمزُ لقياسِ الزاويةِ بالرمزِ ق ∢س أو يرمزُ له ق ∢ب

مثال: ق ∢س = ٦٠° أو ق ∢ أ ب ج = ٦٠°

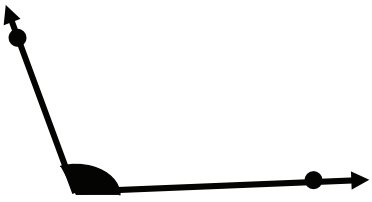
أنواعُ الزوايا



أ) الزاويةُ القائمةُ: قياسُها يساوي ٩٠°

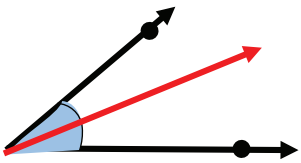


ب) الزاويةُ الحادة: قياسُها أكبرُ من صفر وأقلُ من ٩٠°



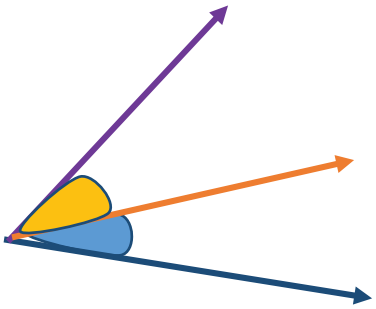
ج) الزاويةُ المنفرجةُ: قياسُها أكبرُ من ٩٠° وأقلُّ من ١٨٠°

د) الزاوية المستقيمةُ: قياسُها يساوي ١٨٠°



الزاويتان المتجاورتان: هما الزاويتان اللتان تشتركان في رأس وضلع، ولا توجد نقاط داخليّة مشتركة بينهما. إذا تقاطع مستقيمان فإن مجموع قياس أي زاويتان متجاورتين ناتجتين عن التقاطع يساوي ١٨٠°.

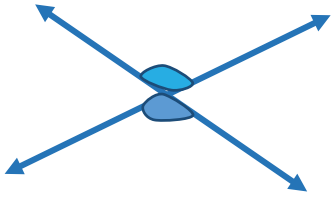
مثال ١ **هل الزوايا المشارُ إليها في الأشكالِ الآتيةِ تمثلُ زوايا متجاورة؟**



أ) زاويتان متجاورتان

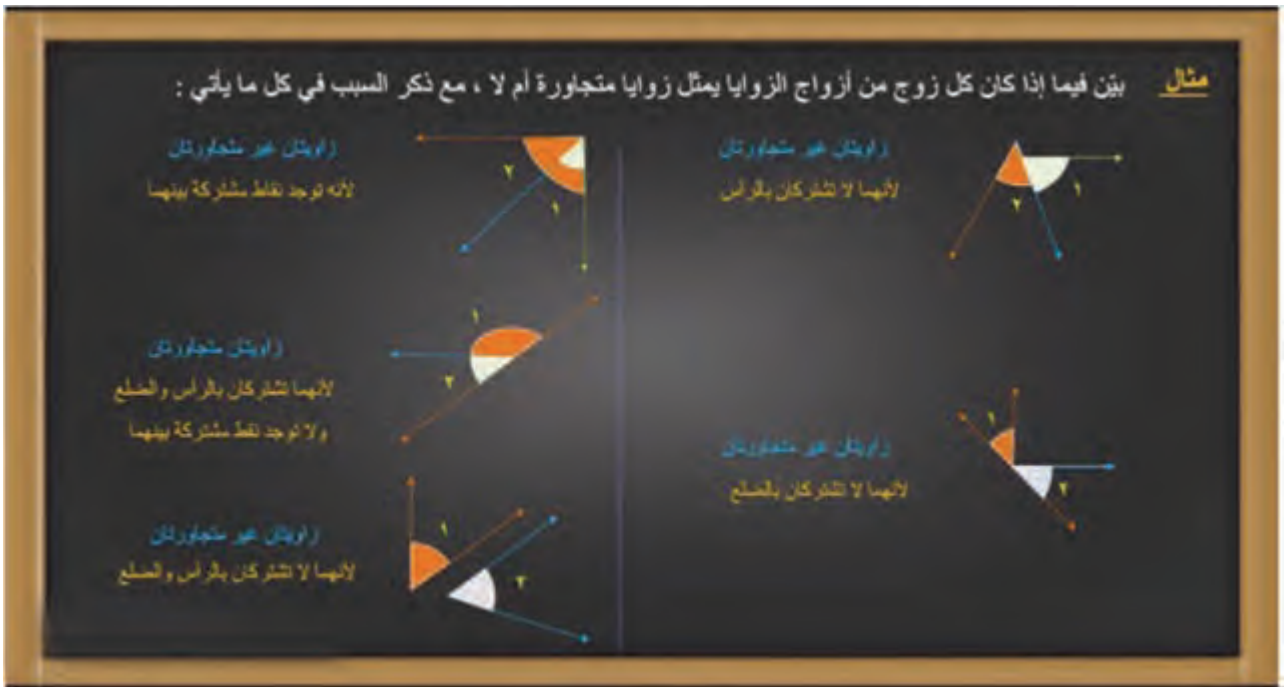
لأنهما تشتركان بالرأس والضلع، ولا توجدُ نقاطٌ مشتركةٌ بينهما.

ب) زاويتان غير متجاورتان



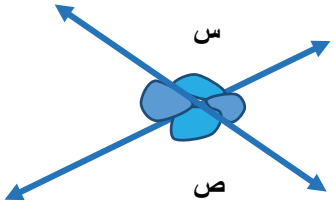
لأنهما لا تشتركان بضلعٍ.

تأملْ الأمثلةَ التّاليةَ: -



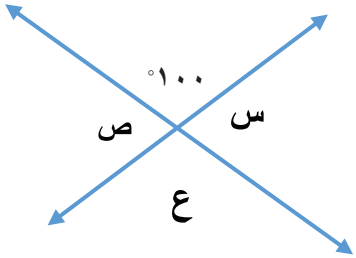
الزوايا المتقابلة بالرأس: هما زاويتان غير متجاورتين ناتجتين من تقاطعِ خطين مستقيمين.

مثل ∡س، ∡ص



الزاويتان المتقابلتان بالرأسِ متساويتان

مثال ٢ **جدْ ق∡س، ق∡ ص، ق∡ ع في الشكلِ الآتي مع التبريرِ**



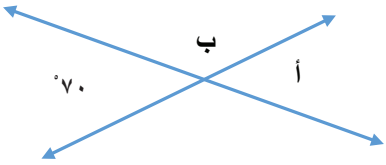
ق∡س = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

زاويتان متجاورتان مجموعُ قياسهما ١٨٠°

ق ∡ ص = ق ∡س = ٨٠° لأنهما متقابلتان بالرأسِ

ق ∡ع = ١٠٠° تقابل بالرأسِ مع الزاويةِ المعلومةِ

مثال ٣ **جدْ ق∡أ، ق∡ ب في الشكل الآتي مع التبريرّ**



الحلُ: ق∡أ = ٧٠° تقابل بالرأس

ق∡ب = ١٨٠° - ٧٠° زاوية متجاورة على المستقيم مع ∡ أ

= ١١٠°

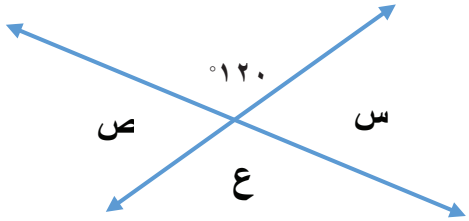
تدريب ١

جدْ قيمة كلٍّ من

١) ق∡س

٢) ق∡ص

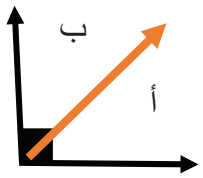
٣) ق∡ع



الزوايا المتتامّةُ: **تسمّى أزواجُ الزوايا التي مجموع قياساتها ٩٠°**

الزاويتان المتتامّتان

∡أ، ∡ب زاويتان متتامّتان مجموع قياسيهما يساوي ٩٠°



مثال ٤ **∡أ، ∡ب زاويتان متتامّتان إذا كان ق ∡أ = ٢٥° جدْ ق∡ب**

الحلُ: ق∡أ + ق∡ب = ٩٠° زاويتان متتامتان

٢٥° + ق∡ب = ٩٠°

ق∡ب = ٩٠° − ٢٥° بطرحِ ٢٥ من طرفي المعادلةِ (حلُ المعادلةِ)

ق∡ب = ٦٥°

مثال ٥ أملأ الفراغَ فيما يأتِي:

أ) الزاويةُ المتمّمة للزاويةِ ٥٠° هي .....٤٠°.....

ب) الزاويةُ المتمّمة للزاوية ١٥° هي .....٧٥°.....

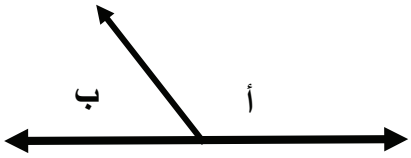
تدريب ٢ أملأ الفراغَ فيما يأتي:

أ) الزاويةُ المتمّمة للزاويةِ ٢٥° هي .....

ب) الزاويةُ المتمّمة للزاويةِ ٨٥° هي .....

الزوايا المتكاملةُ: تسمّى أزواجُ الزوايا التي مجموع قياسها ١٨٠° متكاملتان

ق∢أ + ق∢ب = ١٨٠°



مثال ٦

∢أ، ∢ب زاويتان متكاملتان إذا كان ق∢أ = ١٢٠° جدْ ق∢ب

الحلُ: ق∢أ + ق∢ب = ١٨٠° مجموعُ الزاويتان المتكاملتان يساوي ١٨٠°

١٢٠° + ق∢ب = ١٨٠°

ق∢ب = ١٨٠° − ١٢٠° بطرحِ ١٢٠° من طرفي المعادلةِ

ق∢ب = ٦٠°

مثال ٧ أملأ الفراغَ فيما يأتي:

أ) الزاويةُ المكمّلةِ للزاويةِ ١٣٠° هي .....٥٠°.....

ب) الزاويةُ المكمّلةِ للزاوية ١٦٠° هي .....٢٠°.....

تدريب ٣ أملأ الفراغ فيما يأتي:

أ) الزاوية المكمّلةِ للزاوية ١٠٠° هي .....

ب) الزاوية المكمّلةِ للزاوية ٧٠° هي .....

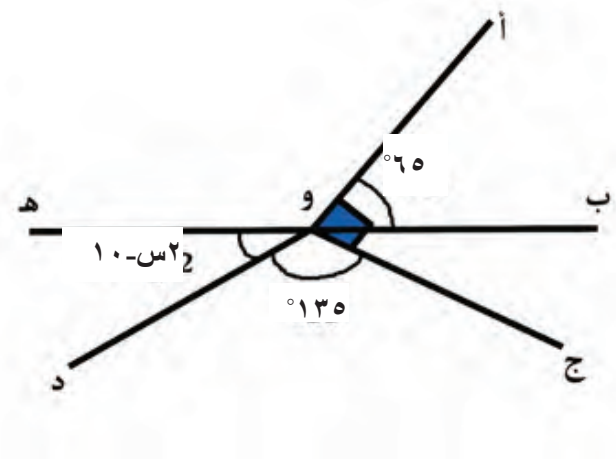
تدريب ٤

أكمل الجدْول الآتي

الزاويةُ	متممتُها (٩٠°)	مكملتُها (١٨٠°)
٨٥°	٥°	٩٥°
٣٠°	٦٠°	١٥٠°
٤٥°		
٨٠°		
٢٢°		

إثراء

من الشكلِّ المجاورِ جدْ قيمةَ س

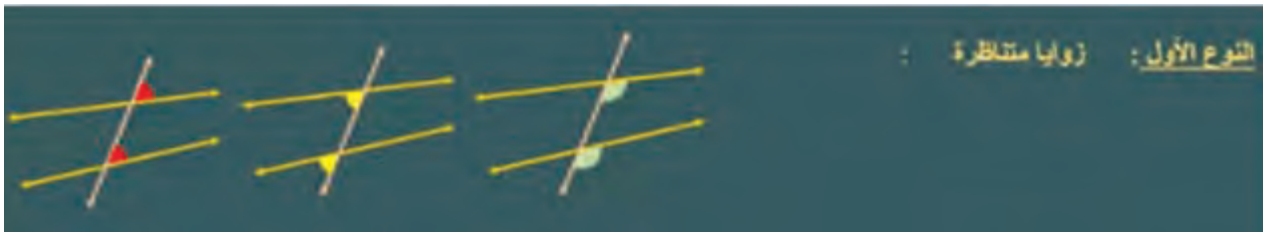


الموضوع الخامس

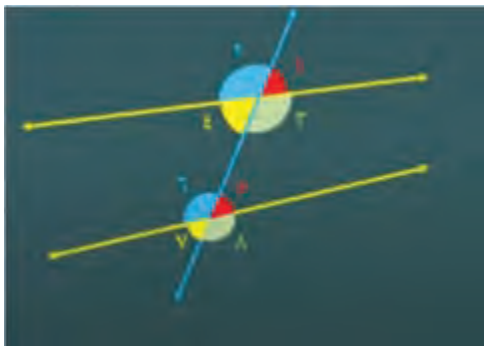
العلاقة بين الزوايا (٢)

اولا الزوايا المتناظرةُ

هي أزواجٌ من الزوايا إحداها داخليّة، والأخرى خارجيّة، غير متجاورة وتقعُ على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطع.
مثال: أزواجُ الزوايا الملوّنة باللّون الأخضرِ متناظرة من الشكلِّ وأيضاً أزواجَ الزوايا الملوّنةِ باللّونِ الأصفرِ وباللون والأحمرِ.



من الشكلِّ المجاورِ نلاحظ أنَّ

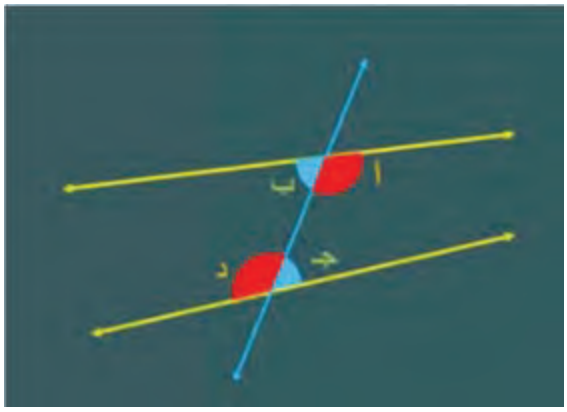


∢١، ∢٥ متناظرتان
لأنهما تقعان على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطعِ إحداها داخليّة والأخرى خارجيّة وغير متجاورةِ.
∢٢، ∢٦ متناظرتان لنفسِ السببِ.
∢٣، ∢٨ متناظرتان لنفسِ السببِ.
∢٤ ، ∢٧ متناظرتان لنفسِ السببِ.

ثانياً الزوايا المتبادلةُ

الزوايا المتبادلةُ: هي أزواجٌ من الزوايا الداخليّةِ غير المتجاورةِ تقعُ على جهتين مختلفتين للمستقيمِ القاطعِ.

مثال أزواجُ الزوايا الملوّنةِ باللونِ الأحمرِ متبادلةٌ والتي باللونِ الأزرقِ زوايا متبادلة.



من الشكلِّ المجاورِ نلاحظُ أنَّ:

∢أ، ∢د زاويتان متبادلتان.(لأنّهما تقعان على جهتين مختلفتين للمستقيمِ القاطعِ وغير متجاورتان.

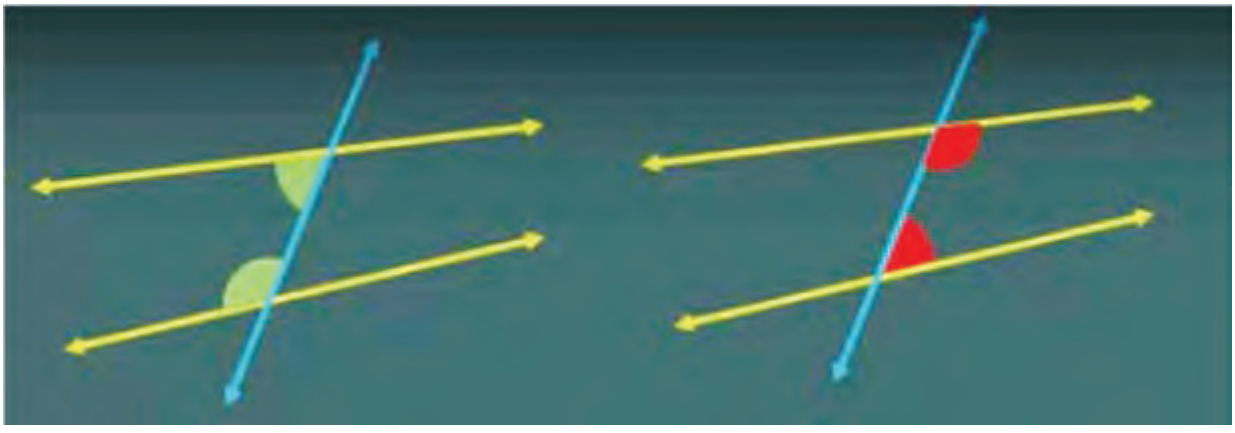
∢ب ، ∢جـ زاويتان متبادلتان.

(لأنّهما تقعان على جهتين مختلفتين للمستقيمِ القاطع وغير متجاورتان)

ثالثاَ الزوايا المتحالفةُ

هي أزواجٌ من الزوايا الداخليّةِ غير المتجاورةِ، تقعُ على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطعِ.

مثال أزواجُ الزوايا الملوّنةِ باللونِ الأحمرِ متحالفة، وأزواج الزوايا الملوّنة بالون الأخضرِ متحالفة.



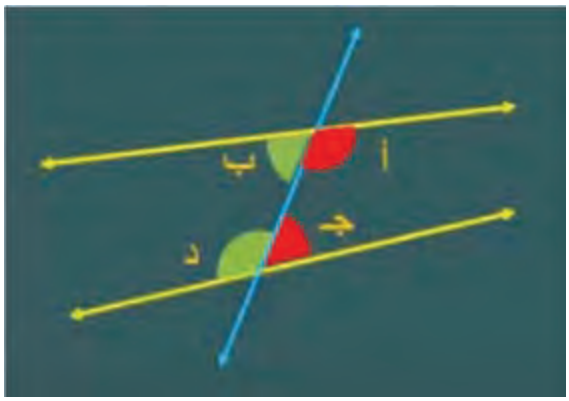
من الشكلِ المجاورِنلاحظُ أنَّ

∢أ ، ∢جـ زاويتان متحالفتان.

(لأنّهما تقعان على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطعِ وغير متجاورتان).

∢ب ، ∢د زاويتان متحالفتان

(لأنّهما تقعان على نفسِ الجهةِ للمستقيمِ القاطعِ وغير متجاورتان).



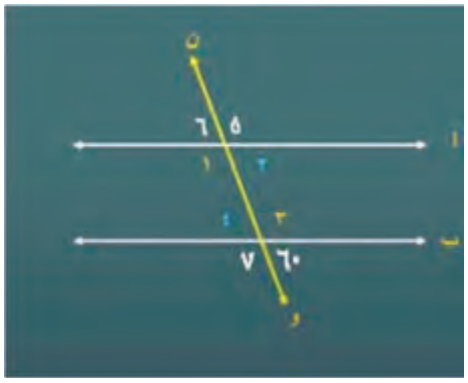
نتيجة : إذا قُطعَ مستقيمٌ مستقيمين متوازيين فإنّه ينتج:

١) أزواجُ الزوايا المتبادلةِ متطابقةٌ ومتساويةٌ بالقياسِ.

٢) أزواجُ الزوايا المتناظرةِ متطابقةٌ ومتساويةٌ بالقياسِ.

٣) مجموعُ قياسُ أزواجِ الزوايا المتحالفةِ الناتجةِ من هذا التقاطعِ يساوي ١٨٠°

مثال ١ **جدْ قيمةَ كلّ من الزوايا من ١ إلى ٧ اعتمادا على الشكل المجاور**



ق∢٢ = ٦٠° بالتناظرِ مع ∢٨

ق∢٢ + ق∢٣ = ١٨٠° بالتحالفِ

٦٠° + ق∢٣ = ١٨٠°

~~٦٠°~~ + ق∢٣ - ~~٦٠°~~ = ١٨٠° - ٦٠° بطرحِ ٦٠° من طرفي المعادلةِ

ق∢٣ = ١٢٠°

ق∢٣ = ق∢٥ = ١٢٠° بالتناظرِ

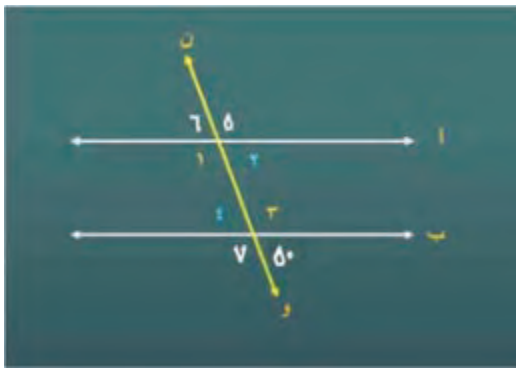
ق∢٣ = ق∢٧ = ١٢٠° تقابل بالرأسِ

ق∢٣ = ق∢١ = ١٢٠° بالتبادلِ

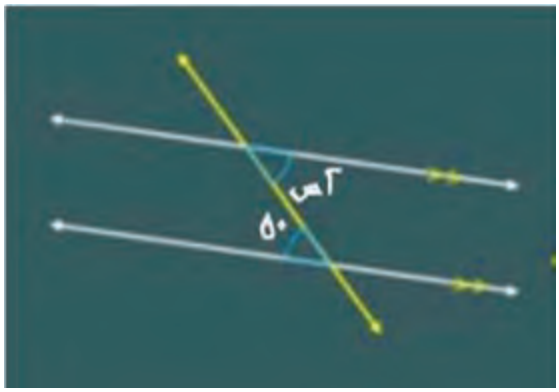
ق∢٢ = ق∢٦ = ٦٠° تقابل بالرأسِ

ق∢٦ = ق∢٤ = ٦٠° بالتناظرِ

تدريب ١ من الشكلِ المجاورِ جدْ جميعَ الزوايا المرقّمة.



مثال ٢ من الشكلِ المجاور جدْ قيمةَ س



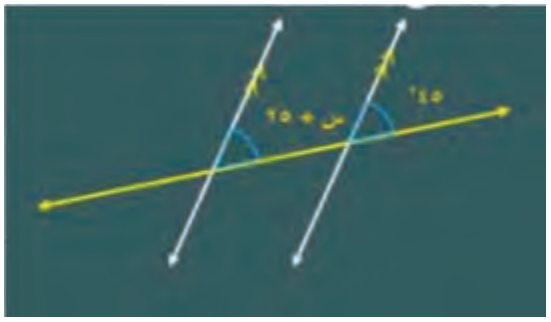
بما أنّ المستقيمين متوازيان وقُطِعا بقاطع فإنّ

٢س = ٥٠° بالتبادلِ

س= ٢٥° بقسمةِ الطرفين على العددِ ٢

مثال ٣ من الشكلِ المجاور جدْ قيمةَ س

بما أنّ المستقيمين متوازيان وقُطِعا بقاطعٍ فإن

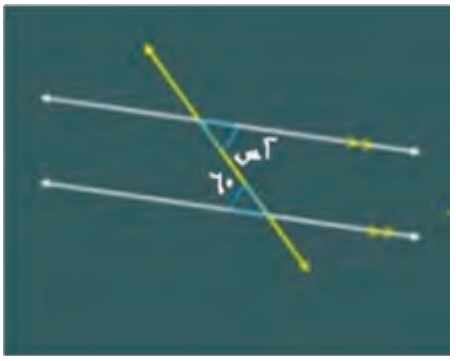


س + ٢٥° = ٤٥° بالتناظر

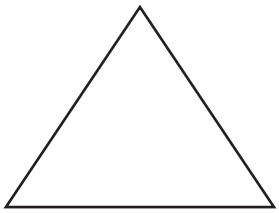
س + ٢٥°-٢٥° = ٤٥°-٢٥° بطرحِ ٢٥° من طرفي المعادلةِ

س = ٢٠°

تدريب ٢ من الشكلِ المجاورِ جدْ قيمةَ س



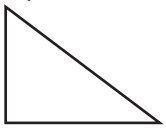
المثلّثُ: هو اتحادُ ثلاثِ قطعٍ مستقيمةٍ تتقاطعُ كلّ اثنتين منها في نقطةٍ واحدةٍ.



تُصنفُ المثلّثاتُ حسب **قياسِ الزوايا** وحسب **أطوالِ الأضلاعِ**.

أولًا: حسبُ قياسِ الزوايا ويصنفُ إلى ٣ أنواعٍ وهي:

مثلّثٌ حادُ الزوايا أيْ أنَّ كلّ زواياه حادةٌ.

مثلّثٌ قائمُ الزاوية  لأنَّه يحتوي على زاويةٍ قائمةٍ.

مثلّثٌ منفرجُ الزاويةِ يحتوي على زاويةٍ منفرجةٍ.

مثال: أكمل الفراغ فيما يأتي

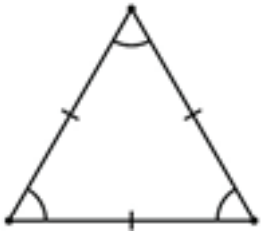
أ) مثلّثٌ مجموع زاويتين فيه ٦٠° يسمى مثلّثٌ .... منفرج الزاوية.

ب) مثلّثٌ مجموع زاويتين فيه ٩٠° يسمى مثلّثٌ .... قائم الزاوية.

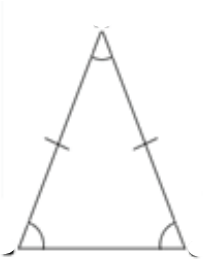
ج) مثلّثٌ قياس زواياه الثلاث فيه متساوٍ يسمى مثلّثٌ .... حاد الزوايا.

ثانياً: حسب أطوال الأضلاعِ ويصنفُ إلى ٣ أنواع وهي:

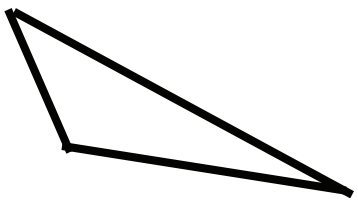
أ) مثلّثٌ متطابق الأضلاع أضلاعه الثلاثُ متساويةٌ في الطول.



ب) مثلّثٌ متطابق الضلعين يوجد فيه ضلعين متطابقين فقط



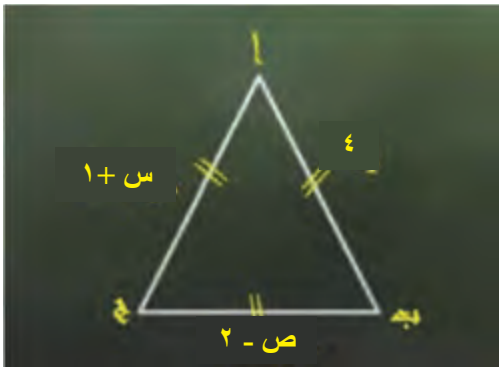
ج) مثلّثٌ مختلفُ الأضلاعِ أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة عن بعضها البعض.



مثال ٤

من الشكلِ المجاور إذا كان المثلّثُ متطابقُ الأضلاعِ، جدْ قيمةَ س و ص.

متطابقُ الأضلاعِ يعني جميعَ أضلاعِه متساويةٌ في الطول.



س+ ١ = ٤

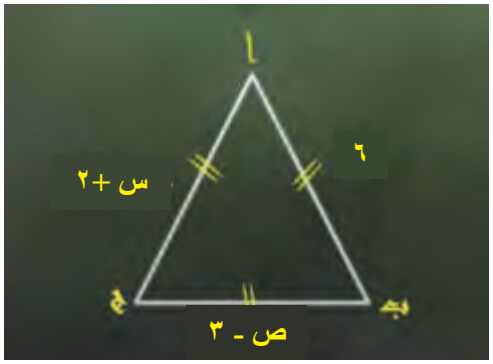
س = ٣ بطرحِ ١ من الطرفين

ص – ٢ = ٤ بجمعِ ٢ لطرفي المعادلةِ

ص = ٦

تدريب ٣

من الشكلِ المجاور جدْ قيمةَ س، ص إذا علمتَ أنّ المثلّثَ متطابقُ الأضلاعِ.



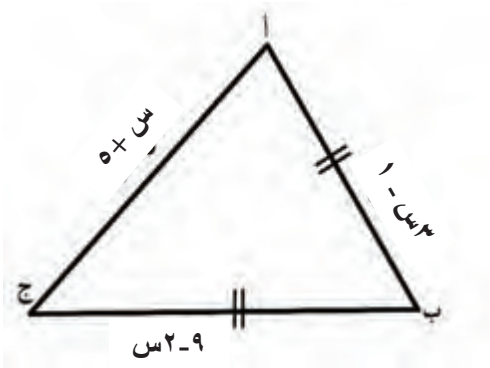
مثال ٥ أكملْ ما يلي:

أ) إذا كان مثلّثٌ أطوالَ أضلاعِه ٤، ٥، ٦ يسمى هذا المثلّثُ مختلفُ الأضلاعِ.

ب) إذا كان مثلّثٌ أطوالَ أضلاعِه ٣ ، ٥ ، ٣ يسمى هذا المثلّثُ متطابقُ الضلعين

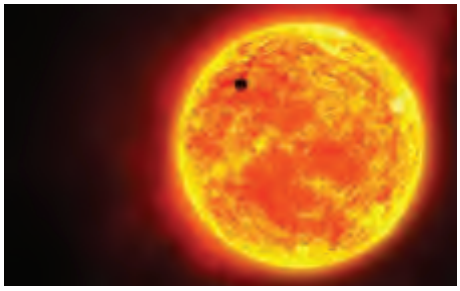
سؤال إثراء

في الشكلِ المجاورِ جدْ طولَ الضلعِ $\overline{أ ج}$.



محيطُ ومساحةُ الدائرة

الدائرةُ: هو مسارُ نقطةٍ متحركةٍ في المستوى بحيثُ يكونُ بُعْدها عن نقطةٍ ثابتةٍ مقدارًا ثابتًا، وتسمّى النّقطةُ الثابتةُ (مركز الدائرة)، ويسمى البعدُ الثابتُ (نصفُ قطرِالدائرةِ).



عناصرُ الدائرة:

مركزُ الدائرةِ: النّقطةُ الثابتةُ في الوسطِ.

الوترُ هو القطعةُ المستقيمةُ الواصلةِ بين أي نقطتين على الدائرة.

القطرُ هو القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بين أي نقطتين على الدائرةِ، المارة بمركزها.

نصفُ القطر هو القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بين مركزِ الدائرةِ ونقطة عليها.

محيطُ الدائرةِ ومساحةُ الدائرةِ

محيط

محيط الدائرة = ٢ × π × نق

مساحة

مساحة الدائرة = π × نق^{٢}

ملاحظة: π تسمّى النسبةُ التقريبيّةُ وتساوي تقريبًا $\approx$ ٣,١٤

مثال ١ إذا علمتَ أنّ طولَ نصفِ قطرِالدائرةُ يساوي ٧ سم جدْ ما يلي

أ) محيطُ الدائرةِ.

ب) مساحةُ الدائرةِ.

الحل: أ) محيطُ الدائرةِ = ٢ نق × π

$\approx ٢ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧}$

$\approx ٢ \times ٢٢ = ٤٤$ سم باختصارِ ٧ من البسطِ مع ٧ من المقامِ

ب) مساحةُ الدائرةِ = π × نق^{٢}

$\approx \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^{٢}$

$\approx ٢٢ \times ٧$ باختصارِ ٧ من البسطِ مع ٧ من المقامِ

≈ ١٥٤ سم^{٢}

تدريب ١ إذا كانَ طولُ قطرِ الدائرةِ يساوي ٢٨ سم جدْ ما يلي:

أ) محيطُ الدائرةِ.

ب) مساحةُ الدائرةِ.

* * * تذكر أنَّ: القطر = ٢ × نق

مثال ٢ إذا كانَ محيطُ الدائرةِ≈٨٨ سم جدْ مساحةَ الدائرةِ.

الحلُ: لإيجادِ المساحةِ يجبْ أنْ نجدْ نصفَ القطرِ.

محيطُ الدائرةِ = ٢ نق × π

$٨٨ = ٢ \times$ نق $\times \frac{٢٢}{٧}$

$٨٨ = \frac{٤٤}{٧}$ نق

$٨٨ \times ٧ = ٤٤$ نق بالضربِ التبادليّ

$\frac{٨٨ \times ٧}{٤٤} = \frac{٤٤}{٤٤}$ نق بقسمةِ طرفي المعادلةِ على العددِ ٤٤

٢ ×٧ سم = نق

١٤ سم = نق

مساحةُ الدائرةِ = $\pi \times$ نق^{٢}

$= \frac{٢٢}{٧} \times (١٤)^{٢}$

$= \frac{٢٢}{٧} \times ١٩٦$

$= \frac{٢٢ \times ١٩٦}{٧}$

$= \frac{٤٣١٢}{٧}$

$= ٦١٦$ سم^{٢}

تدريب ٢

إذا كانَ محيطُ الدائرةِ ≈ ٢٢ سم جدْ مساحةَ الدائرةِ.

مثال ٣

إذا كانتْ مساحةُ الدائرةِ ≈ ٣١٤ سم^{٢} جدْ محيطَ الدائرةِ.

الحلُ: لإيجادِ محيطُ الدائرةِ يجبْ أولاً أنْ نجدَ طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ.

مساحةُ الدائرةِ = $\pi \times$ نق^{٢}

٣١٤ = ٣,١٤ × نق^{٢} — بقسمةِ طرفيّ المعادلةِ على ٣,١٤

$\frac{٣١٤}{٣١٤} = \frac{٣١٤}{٣١٤} \times$ نق^{٢}

١٠٠ = نق^{٢} — بأخذُ الجذرَ التربيعيّ

نق = ١٠ سم

ب) محيطُ الدائرةِ = ٢ نق $\times \pi$

$\approx ٢ \times ١٠ \times \pi$

$\approx ٢٠ \pi$ سم — نستطيعُ كتابةَ الحلِّ باستخدامِ π

تذكر أنه عند القسمة على عدد عشري يجب التخلص من الفاصلة العشريّة بالمقام وهنا يجب ضرب البسط والمقام بالعدد ١٠٠ للتخلص منها

تدريب ٣

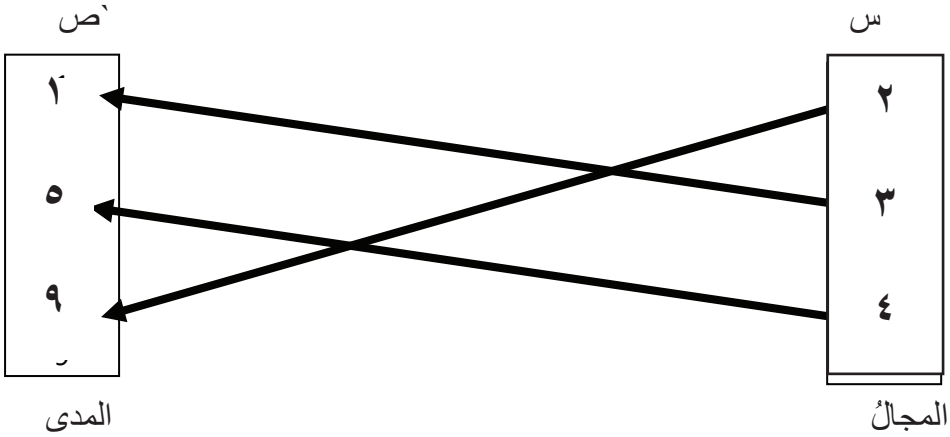
إذا كانتْ مساحةُ الدائرةِ تساوي ٣,١٤ سم^{٢} جدْ محيطَ الدائرةِ.

إثراء

ملعبٌ مربعُ الشكلِ، داخلِه مضمارٌ دائريٌّ مساحته (٣١٤) م^{٢}،انطلقَ حصانٌ من النّقطةِ (أ) حولَ المضمارِ الدّائريّ، فما هي المسافةُ التي يقطعها الحصانُ ليعودَ إلى النّقطةِ (أ)؟

التحويلات الهندسية

التّحويلُ: تسمّى العلاقةُ تحويلًا إذا ارتبطَ كلّ عنصرٍ في مجالها بصورةٍ واحدةٍ فقط في مداها وكلّ عنصرٍ في مداها هو صورةٌ لعنصرٍ واحدٍ فقط في مجالِها.



ونستطيعُ كتابةَ العلاقةِ على شكلِ أزواجٍ مرتبةٍ.

ع = {(٢، ٩)، (٣، ١)، (٤، ٥)}

مثال ١ إذا كانَ و= {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}، ع ={٩، ٥، ١}هل العلاقةُ التّاليةُ تمثلُ تحويلًا من المجموعة (و) إلى المجموعةِ (ع)؟

{(٩،٢)،(٥،٣)، (١،٤)}

الحلُ: لا تمثلُ تحويل ... لأنّه يوجدُ عنصر ٧ في المجالِ لم يرتبطْ بأيّ عنصر في المدى

مثال ٢ إذا كانَ و={٢،٣،٤}، س={٩، ٥، ١}هل العلاقةُ التّاليةُ تمثلُ تحويلًا من المجموعةِ (و) إلى المجموعةِ (س)؟

{(١،٢)،(١،٣)، (١،٤)}

لاحظْ أن العلاقة لا تمثلُ تحويلًا لأنّ العناصرَ ٢، ٣، ٤ في المجالِ لها الصورةُ نفسها في المدى

التحويلُ الهندسيُّ: هو علاقةُ تربطُ نقاطِ المستوى مع بعضِها، حيثُ كلّ نقطةٍ في المستوى ترتبطُ مع نقطةٍ واحدةٍ فقط من المستوى تسمّى صورتها.

وكلُّ نقطةٍ في المستوى هي صورةٌ لنقطةٍ واحدةٍ فقط من نقاطِ المستوى

ملاحظةٌ:

تسمّى التحويلات الهندسيّة بأحد الأحرف العربيّة مثل: ت، ح

تحتَ تأثيرِ مركزِ نقطةُ الرمز (⟵) ليدلَ على التّحويلِ الهندسيِّ.

مثل الرمز د ⟵ دَ

.....

مثال ٣

في المستوى الإحداثيّ ليكن

ت: (س، ص) ⟵ (س+ ٤ ، ص +٢) تحويلًا هندسيًّا جدْ النقطة أ (٢، ١) تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت.

ت: أ (٢، ١) ⟵ أَ(٢ + ٤، ١+٢) = أَ (٦ ، ٣)

مثال ٤

في المستوى الإحداثيّ ليكنْ ت: (س، ص) ⟵ (٢س، - ص) تحويلاً هندسياً

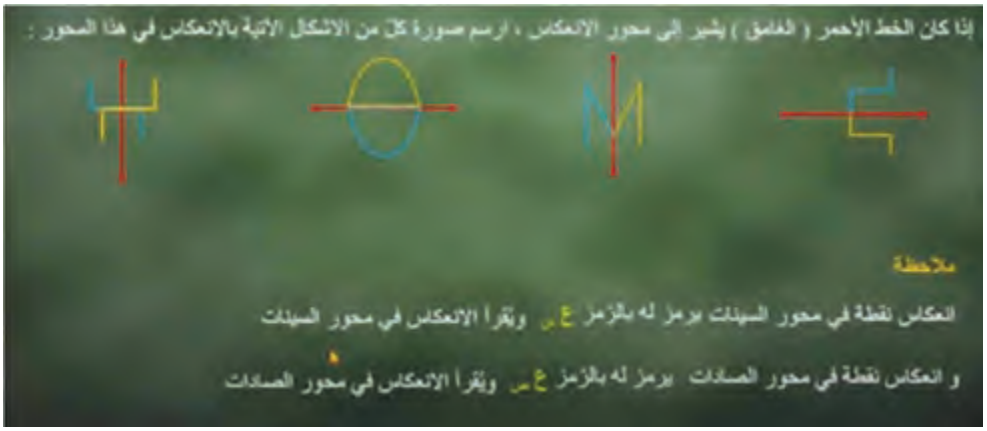
جدْ النقطة أ(١، ٣) تحتَ تأثيرِ التّحويل الهندسيِّ ت.

ت: أ (١، ٣) ⟵ أَ(٢ × ١، - ٣) = أَ (٢، - ٣)

تدريب ١

في المستوى الإحداثيّ ليكن ت: (س، ص) ⟵ (س+ ٥ ، ص - ٣) تحويلاً هندسياً جدْ النقطة أ(٢، ٩) تحتَ تأثيرِ التّحويلِ الهندسيِّ ت.

الانعكاسُ: هو تحويلٌ هندسيٌّ يقلب شكلّ ما حولَ محورٍ معين يعملُ كمرآةٍ ويسمى محورُ الانعكاسِ ويرمزُ له بالرمزِ (ع).



القانون:

انعكاسُ نقطةٍ حولَ محورِ السّيناتِ يرمزُ له بالرمزِ $ع_{س}$

وتُقرأ انعكاس في محورِ السّيناتِ وصورته:

$ع_{س}(س، ص) \longleftarrow (س، -ص)$

انعكاس نقطةٌ حولَ محورِ الصاداتِ يرمزُ له بالرمزِ $ع_{ص}$ وتُقرأ انعكاس في محورِ الصاداتِ وصورته:

$ع_{ص}(س، ص) \longleftarrow (-س ، ص)$.

مثال ٥ **جدْ صورَ كلّ من النقاط الآتية أ (٣،٢)، ب (-٣،-٤) إذا كانَ محورُ الانعكاسِ هو محورُ السّيناتِ.**

الحلُ:

أ) $ع_{س}(س، ص) \longleftarrow (س ، -ص)$

$ع_{س}(٢، ٣) \longleftarrow (٢ ، -٣)$

ب) $ع_{س}(س، ص) \longleftarrow (س ، -ص)$

$ع_{س}(-٣، -٤) \longleftarrow (-٣، ٤)$

مثال ٦ **جدْ صورَ كلّ من النقاطِ الآتيةِ أ (٥، ٧) ، ب (- ٩، ٢٤) إذا كانَ محور الانعكاس هو محور الصادات.**

أ)$ع_{ص}(س، ص) \longleftarrow (-س ، ص)$

$ع_{ص}(٥، ٧) \longleftarrow (-٥ ، ٧)$

ب) $ع_{ص}(س، ص) \longleftarrow (-س ، ص)$

$ع_{ص}(-٩، ٢٤) \longleftarrow (٩ ، ٢٤)$

تدريب ٢

جدْ صورة النّقطةِ و (٢، ٤) إذا كانَ محورُ الانعكاسِ هو

أ) محورُ السّيناتِ.

ب) محورُ الصاداتِ.

الانسحابُ : هو تحويلٌ هندسيٌّ ينقلُ شكلاً ما من مكانٍ إلى آخرَ بمقدارٍ معينٍ يسمى (مقدارُ الانسحابِ) دونَ أنْ يغيرَ من قياساتِه، أو شكلِه، ويرمز له بالرمزِ ح.

القانون:

قواعدُ الانسحابِ:

* قاعدةُ الانسحابِ إلى اليمينِ ن وحدة هي :

ح: (س ، ص) ← (س + ن ، ص)

مثال ٧ جدْ صورةَ النّقطةِ أ (٣، ٤) تحتَ تأثيرِ انسحابٍ إلى اليمينِ ٥ وحداتٍ.

ح: (س ، ص) ← (س + ن ، ص)

ح : أ (٣ ، ٤) ← أ (٣ + ٥ ، ٤)

ح : أ (٣ ، ٤) ← أ (٨ ، ٤)

القانون:

قواعدُ الانسحابِ:

* قاعدةُ الانسحابِ إلى اليسارِ ن وحدة هي :

ح: (س ، ص) ← (س - ن ، ص)

مثال ٨ جدْ صورةَ النّقطةِ أ (٥،٧) تحتَ تأثيرِ انسحابٍ إلى اليسارِ ٣ وحداتٍ

ح: (س،ص) ← (س - ن ، ص)

ح : ب (٥ ، ٧) ← بَ (٥ – ٣ ، ٧)

ح: ب (٥ ، ٧) ← بَ (٢ ، ٧)

القانون:

قواعدُ الانسحابِ:

* قاعدةُ الانسحابِ إلى الأعلى ن وحدة هي :

ح: (س ، ص) ⟵ (س، ص+ ن)

مثال ٩ جدْ صورة النّقطة ب (٢، ١) تحتَ تأثيرِ انسحابِ إلى الأعلى ٣ وحداتٍ.

ح: (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ن)

ح : ب (٢ ، ١) ⟵ بَ (٢ ، ١ + ٣)

ح: ب (٢،١) ⟵ بَ (٢ ، ٤)

القانون:

قواعدُ الانسحابِ:

* قاعدةُ الانسحابِ إلى الأسفل ن وحدة هي :

ح: (س ، ص) ⟵ (س، ص- ن)

مثال ١٠ جدْ صورةَ النّقطةِ ب (٤ ، ٥) تحتَ تأثيرِ انسحابٍ إلى الاسفلِ ٢ وحدات.

ح: (س ، ص) ⟵ (س ، ص - ن)

ح : ب (٤ ، ٥) ⟵ بَ (٤ ، ٥ - ٢)

ح : ب (٤ ، ٥) ⟵ بَ (٤ ، ٣)

مثال ١١ جدْ صورةَ النّقطةِ ب (٢، ٣) تحتَ تأثيرِ كلّ من الانسحاباتِ الآتيةِ:

أ) إلى اليسارِ وحدتين.

ب) إلى اليمينِ وحدةٌ واحدةٌ.

ج) إلى الأعلى ٣ وحداتٍ.

د) إلى الأسفلِ ٢ وحدة.

الحلُ

أ) ح: (س، ص) ← بَ (س - ن ، ص)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٢ – ٢ ، ٣)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٠ ، ٣)

ب) ح: (س ، ص) ← بَ (س + ن ، ص)

ح : ب(٢ ، ٣) ← بَ (٢ + ١ ، ٣)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٣ ، ٣)

ج) ح: (س ، ص) ← بَ (س ، ص + ن)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٢ ، ٣ + ٣)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٢ ، ٦)

د) ح: (س ، ص) ← بَ(س ، ص - ن)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٢ ، ٣ - ٢)

ح : ب (٢ ، ٣) ← بَ (٢ ، ١)

مثال ١٢ جدْ صورةَ النّقطةِ (١ ، ٤) إذا تم سحبها ٤ وحداتٍ إلى اليمينِ و٣ وحداتٍ إلى الأعلى.

الحلُ: نلاحظُ أنَّ

ح: (س ، ص) ← (س+٤ ، ص + ٣)

ح: (١ ، ٤) ← (١ + ٤ ، ٤ + ٣)

ح : (١ ، ٤) ← (٥ ، ٧)

تدريب ٣ جدْ صورةَ النّقطةِ (٢، ٥) إذا تم سحبُها ٣ وحداتٍ إلى اليسار و٢ وحدات إلى الأعلى.

الدَّوران: هو تحويلٌ هندسيٌّ يُدوِّرُ شكلًا ما حولَ نقطةٍ ثابتةٍ تسمّى (مركزُ الدورانِ) وباتجاه معينٍ يسمى (اتجاهُ الدورانِ). وبزاويةٍ معينةٍ تسمّى زاويةُ الدورانِ دونَ أنْ يغيرَ ذلك من قياساتِ الشكلِ ويرمزُ له بالرمزِ د$_{و}$.

قواعدُ الدورانِ:

قاعدةُ دورانِ النّقطةِ (س، ص) ٩٠° باتجاه عكس عقاربِ الساعةِ هي:

د$_{و}$(٩٠°) : (س ، ص) ← (- ص ، س)

د$_{و}$(١٨٠°) : (س ، ص) ← (- س ، - ص)

د$_{و}$(٢٧٠°): (س ، ص) ← (ص ، - س)

د$_{و}$(٣٦٠°) : (س ، ص) ← (س ، ص)

مثال ١٣ جدْ صورة النّقطة (٢ ، ٣) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِ نقطةُ الأصلِ اتجاهِ عقاربِ الساعةِ:

أ) د$_{و}$(٩٠°)

ب) د$_{و}$(١٨٠°)

ج) د$_{و}$(٢٧٠°)

د) د$_{و}$(٣٦٠°)

الحلُ:

أ) د$_{و}$(٩٠°) : (س ، ص) ← (- ص ، س)

د$_{و}$(٩٠°) : (٢ ، ٣) ← (- ٣ ، ٢)

ب) د$_{و}$(١٨٠°) : (س ، ص) ← (- س ، - ص)

د$_{و}$(١٨٠°) : (٢ ، ٣) ← (- ٢ ، - ٣)

ج) د$_{و}$(٢٧٠°) : (س ، ص) ← (ص ، - س)

د$_{و}$(٢٧٠°) : (٢ ، ٣) ← (٣ ، - ٢)

د) د$_{و}$(٣٦٠°) : (س ، ص) ← (س ، ص)

د$_{و}$(٣٦٠°) : (٢ ، ٣) ← (٢ ، ٣)

مثال ١٤

جدْ صورة النّقطة (-١ ، ٤) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِ نقطةُ الأصلِ باتجاهِ عقاربِ الساعةِ:

أ) د$_{و}$(٩٠°)

ب) د$_{و}$(١٨٠°)

ج) د$_{و}$(٢٧٠°)

د) د$_{و}$(٣٦٠°)

الحلْ:

أ) د$_{و}$(٩٠°) : (س، ص) ← (- ص، س)

د$_{و}$(٩٠°) : (-١، ٤) ← (-٤، -١)

ب) د$_{و}$(١٨٠°) : (س، ص) ← (- س، - ص)

د$_{و}$(١٨٠°) : (-١، ٤) ← (١، -٤)

ج) د$_{و}$(٢٧٠°) : (س، ص) ← (ص، - س)

د$_{و}$(٢٧٠°) : (-١، ٤) ← (٤، ١)

د) د$_{و}$(٣٦٠°) : (س، ص) ← (س، ص)

د$_{و}$(٣٦٠°) : (-١، ٤) ← (-١، ٤)

تدريب ٤

جدْ صورةَ النّقطةِ (١، ٦) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِ نقطةُ الأصلِ باتجاهِ عقاربِ الساعةِ:

أ) د$_{و}$(٩٠°)

ب) د$_{و}$(١٨٠°)

ج) د$_{و}$(٢٧٠°)

د) د$_{و}$(٣٦٠°)

إثراء

إذا كانتْ النّقطةُ (٢، -٧) هي صورةُ النّقطةِ (٧، ٢) تحتَ تأثيرِ دورانِ مركزِ نقطةُ الأصلِ فما هي زاويةُ الدورانِ علمًا أنَّ اتجاهَ الدورانِ عكسِ عقاربِ الساعةِ؟

مقاييسُ النّزعةِ المركزيّةِ ومقاييسُ التّشتتِ

تأمل معي : تسجيل درجات الحرارة يوميًا لمدة أسبوع، تسجيل كمية الأمطار في فصل الشتاء.

رصد علامات طلاب المدرسة في الاختبارات النهائية .... هذه السجلات تستخدم في علم الإحصاء.

وتستخدم المقاييسُ الإحصائيّةُ لوصفِ البياناتِ الكميّةِ ومن هذه المقاييسِ ما يسمى بمقاييس النزعة المركزيةِ (متوسط حسابي، وسيط، ومنوال) ومقاييسُ التّشتتِ (مدى، وانحراف معياري، وتباين).

مقاييسُ النّزعةُ المركزيّةُ : هي مقاييسٌ إحصائيّةٌ تستخدمُ لقياسِ موضعَ تمركز أو تجمّعِ البياناتِ العدديّةِ إذ إنَّ بيانات أي ظاهرةٍ تنزعُ للتركّزِ والتجمّعِ نحوَ قيم محددةٍ.

سنبدأ في مقاييسِ النّزعةِ المركزيّة

أولًا: المتوسط الحسابيّ:

المتوسط الحسابي لعدد من القيم = مجموع القيم / عددها

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

يرمز للمتوسط الحسابي بالرمز $\bar{س}$

يرمز لمجموع القيم بالرمز $\sum س$

يرمز لعدد القيم بالرمز ن

ثانيًا: الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا هو العدد الأوسط منها إذا كان عددها فرديًّا، أو المتوسط الحسابي للعددين الأوسطين إذا كان عددها زوجيًّا.

رتبة الوسيط للمشاهدات الفردية هي: $\frac{\text{عدد القيم} + ١}{٢}$

رتبة الوسيطين للمشاهدات الزوجية هي: $\frac{\text{عدد القيم}}{٢}$ ، $\frac{\text{عدد القيم}}{٢} + ١$

ثالثًا: المنوال:

المنوال: هو القيمةُ الأكثرُ تكرارًا

مثال ١ إذا كانتْ علاماتُ (٥) طلابٍ في أحدِ الامتحاناتِ على النحو الآتي:

٢٠، ١٠، ١٥، ٢٠، ٥ جدْ ما يلي:

١) المتوسطُ الحسابِيّ.

٢) الوسيطُ.

٣) المنوالُ.

٤) إذا أُضيفتْ قيمةُ أخرى لمجموعةِ القيمِ ومقدارُها ٣٠ جدْ الوسيطَ.

الحلُ:

أ) المتوسطُ الحسابيُّ:

$$\bar{س} = \frac{٢٠+٢٠+١٥+١٠+٥}{٥}$$

$$\bar{س} = \frac{٧٠}{٥}$$

$$\bar{س} = ١٤$$

ب) الوسيطُ:

أولًا نقومُ بترتيبِ الأعدادِ تصاعديًا أو تنازليًا

٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٠ عدد القيم

$$\text{رتبةُ الوسيطِ (فردي)} = \frac{\text{عدد القيم} + ١}{٢}$$

$$= \frac{٥+١}{٢}$$

$$= \frac{٦}{٢}$$

رتبةُ الوسيطِ = ٣

٥ ، ١٠ ، (١٥)، ٢٠ ، ٢٠

الوسيطُ=(١٥)

العددُ الأوسطُ هو العددُ الثالثُ ويساوي ١٥

ج) المنوالُ: القيمةُ الأكثرُ تكرارًا

المنوالُ = ٢٠

د) نقومُ بترتيبِ الأعدادِ تصاعديًا أو تنازليًا بعد إضافةِ العددِ ٣٠

أولًا نقومُ بترتيبِ الأعدادِ تصاعديًا أو تنازليًا

٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٠، ٣٠ لذا؛ يوجد وسيطان رتبتهما:

$$\text{رتبةُ الوسيطِ (زوجي)} = \frac{\text{عدد القيم}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{عدد القيم}}{٢} + ١$$

$\frac{٦}{٢}$ ، $\frac{٦}{٢}$ + ١

رتبةُ الوسيطِين = ٣، ٤

العددان الأوسطان هما العددُ الثالثُ (١٥) والعددُ الرابعُ (٢٠)

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٠، ٣٠

الوسيطُ = المتوسطُ الحسابيُّ للعددين ١٥، ٢٠

الوسيطُ = $\frac{١٥+٢٠}{٢}$ = ١٧,٥

تدريب ١

إذا كانَ لديكَ القيمُ الآتيةُ ١،٥،٨،٤،١٠،١، ٦جدْ ما يلي:

١) الوسطُ الحسابيُّ.

٢) الوسيطُ.

٣) المنوالُ.

٤) إذا أضفنّا العدد ٧ إلى مجموعةِ القيمِ جدْ الوسيطَ.

تأمل معي السؤال الآتي:

إذا كان المتوسط الحسابيّ لعلاماتِ الصفِ السابعِ (أ) هو (٩) والمتوسطُ الحسابيّ لعلاماتِ الصفِ السابعِ (ب) هو أيضا (٩) فأيّهما أفضلُ علاماتُ السابعِ (أ) أم (ب)؟

نلاحظُ من السؤالِ السابقِ أنَّ المتوسطَ الحسابيَّ للصفين متساويين إذاً لا نستطيعُ تحديدَ أيّهما أفضل لذلك نذهبُ إلى مقاييسَ أخرى وهي مقاييسُ التّشتت وهي تحددُ مدى تقاربِ أو تجانسِ البياناتِ المعطاةِ وهي (المدى، والانحراف المعياري، والتباين).

أولا: المدى

المدى= أكبر قيمة ـ أصغر قيمة

ثانياً: الإنحراف المعياري

يقيس مدى تباعد أو تقارب (قيم) عن متوسطها الحسابي،

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي}}{\text{عدد القيم ـ ١}}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

$\bar{س}$ = المتوسط الحسابي ، ن : عدد القيم

س – $\bar{س}$ تمثل انحرافات القيم س عن المتوسط الحسابي

مجموع مربعات انحرافات القيم س عن المتوسط الحسابي

ثالثًا: التباينُ:

التباين: مربع الانحراف المعياري

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}$$

مثال ٣ إذا كانَ عددُ الساعاتِ اليوميّةِ التي يقضيها ٥ طلابٍ في الدراسةِ هي ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠ جدْ

أ) المدى.

ب) الانحرافُ المعياريُّ.

ج) التباينُ.

الحل: أ) المدى = أكبرُ قيمةٍ ـ أصغرُ قيمةٍ.

= ١٠ ـ ٢ = ٨

ب) الانحرافُ المعياريُّ.

لإيجادِ الانحرافِ المعياريِّ أولًا نحسبُ المتوسطَ الحسابيَّ.

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{١٠ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢}{٥}$$

= ٦

نكونُ جدْوَلًا من ٣ أعمدةٍ كما يلي:

س	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^{٢}$
٢	٤-	١٦
٤	٢-	٤
٦	٠	٠
٨	٢	٤
١٠	٤	١٦
المجموع		٤٠

نطبقُ القانونَ:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٠}{٥ - ١}}$$

$$= \sqrt{١٠}$$

التباينُ $= ع^{٢}$

$$= (\sqrt{١٠})^{٢}$$

$$= ١٠$$

تدريب ٢

إذا كانَ لديكَ القيمُ التّاليةُ: ١، ٢، ٣، ٤، ٥. جدْ ما يلي:

١) المدى.

٢) الانحرافُ المعياريُّ.

٣) التباينُ.

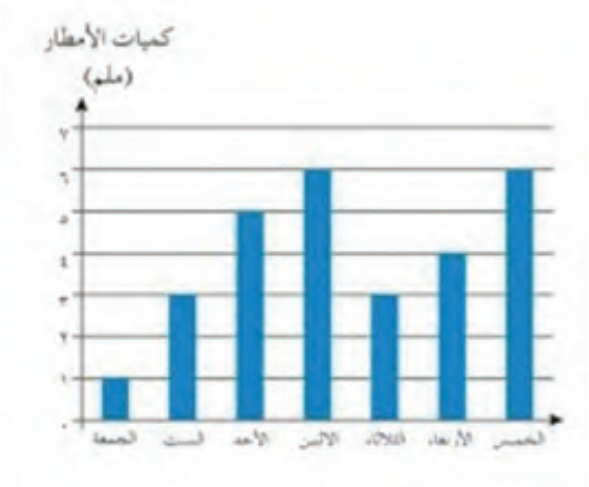
إثراء

إثراءٌ: معتمدًا على الشكلِّ المجاورِ الذي يمثلُ كمياتُ الأمطارِ بالمليمترِ، التي هطلتْ على مدارِ أسبوعٍ في مدينةِ إربدَ احسبْ كلّا ممّا يأتي:

أ) المتوسطٌ الحسابيُّ لكمياتِ الأمطارِ.

ب) المدى لكمياتِ الأمطارِ.

ج) الانحرافُ المعياريُّ لكمياتِ الأمطارِ.



ملحق الإجابات

حلْ تدريبات درس الحدود والمقادير الجبرية

تدريب (١):

الحد الجبريّ	معامل الحد الجبريّ	القسم الرمزيّ
٤ س م	٤	س م
٠,٩ س	٠,٩	س
٢٠	٢٠	لا يوجدْ
ص	١	ص
-٦س^{٢} ص	-٦	س^{٢}ص
١٩ و^{٦} ل ع	١٩	و^{٦}ل ع

.....

تدريب (٢):

المقدار	الحدود الجبريّة	عدد الحدود الجبريّة	معاملات الحدود الجبريّة	القسم الرمزيّ
٤ س + ٥ص	٤س، ٥ص	٢	٤ ، ٥	س، ص
٢س -٥و -٧	٢س، -٥و، -٧	٣	٢ ، -٥ ، -٧	س، و
(ص^{٥}+وص+٦ع-١)	ص^{٥} ،وص، ٦ع، -١	٤	١، ١ ، ٦ ، -١	ص^{٥}، وص، ع

.....

تدريب (٣):

أ) ٣٧

ب) ١

.....

حل الإثراء:

مع محمد (٥) أمثال ما مع سامي من نقود ومع علي أيضاً مبلغًا من المال فما المقدار الذي يُعبّر عن مجموع ما مع الثلاثة؟

الحلْ: نفرض أن المبلغ الذي مع سامي هو س.

والمبلغ الذي مع علي هو ص.

إذاً مع محمد ٥ س.

مجموع المبلغ مع الثلاثة = مبلغ محمد + مبلغ سامي + مبلغ علي.

= ٥ س + س + ص

حل تدريبات درس جمع الحدود الجبرية والمقادير

تدريب (١):

أ) الحدود المتشابهة (٦ س،-٦س)، (٢ص، ٤ ص). ب) لا يوجدْ تشابه.

.....

تدريب (٢):

أ) ٢٠ س.

ب) ص م.

.....

تدريب (٣):

أ) (٧ ص + ١ م).

ب) ٤ س + ١٤ ص – ٧.

حل الإثراءِ:

الحل: ثمن الدفاتر = عدد الدفاتر × ثمن الدفتر.

= ٣ × س

ثمن المساطر = عدد المساطر × ثمن المسطرة.

= ٤ × ع

ثمن الأقلام = عدد الأقلام × ثمن القلم.

= ٥ × ص

مقدار ما دفعه = (ثمن الدفاتر – ١)+ (ثمن المساطر - $\frac{١}{٢}$) +(ثمن الاقلام - $\frac{١}{٢}$).

= (٣ س – ١) + (٤ ع - $\frac{١}{٢}$) + (٥ص - $\frac{١}{٢}$).

= ٣ س + ٤ ع + ٥ ص – ٢ حيث ٢ مقدار الخصم

.....

حل تدريبات درس حلّ المعادلة الخطيّة

تدريب (١)

أ) س=٧

ب) ص=٥

ج) س =٨

.....

تدريب (٢)

أ) س = ٣

ب) ص= ٣

.....

تدريب (٣)

العدد = ٣

.....

حل الإثراء:

نفرض أن ثمن الدفاتر = ص، عدد الدفاتر = س.

ثمن الدفاتر = (مجموع ما دفعه محمد) – (ثمن الحقيبة).

ص = ٥٠ ـ ٢٠

ص = ٣٠ دينار

ولكن ثمن الدفاتر = عدد الدفاتر × ثمن الدفتر الواحد.

٣٠ = س ×١,٥

٣٠ = ١,٥ س وبقسمة الطرفين على ١,٥

س = $\frac{٣٠}{١,٥}$ وبتحريك الفاصلة العشريّة في المقام منزلة واحدة مع وضع صفر للبسط ينتج:

س = $\frac{٣٠٠}{١٥}$

إذاً: س = ٢٠ دفتر

.....

حل تدريبات العلاقة بين الزوايا (١)

تدريب (١)

أ) ق ∢ س = ٦٠°

ب) ق ∢ ص = ٦٠°

ج) ق ∢ ع = ١٢٠°

تدريب (٢)

أ) ٦٥°

ب) ٥°

.....

تدريب (٣)

أ) ٨٠°

ب) ١١٠°

.....

تدريب (٤)

الزاوية	متممتها (٩٠°)	مكملتها (١٨٠°)
٨٥°	٥°	٩٥°
٣٠°	٦٠°	١٥٠°
٤٥°	٤٥°	١٣٥°
٨٠°	١٠°	١٠٠°
٢٢°	٦٨°	١١٨°

حل الإثراءِ:

الحل: لاحظ أن ∢ أ ب و، ∢ ب و ج زاويتان متتامتان.

إذاً: ق ∢ أ و ب + ق ∢ ب و ج = ٩٠°

ومنها ٦٥° + ق ∢ ب و ج = ٩٠° بطرح ٦٥° من طرفي المعادلة.

إذاً: ق ∢ ب و ج = ٩٠° – ٦٥°

ق ∢ ب و ج = ٢٥°

∠ ب وج + ∠ هـ وج + ∠ د وهـ تشكل زاوية مستقيمة.

أي أن هذه الزوايا متكاملة.

أي أن مجموع قياسها (١٨٠°).

ق ∠ ب و ج + ق ∠ هـ و ج + ق ∠ د و هـ = ١٨٠°

٢٥° + ١٣٥° + ٢س – ١٠ = ١٨٠°

نجمع الثوابت

١٥٠° + ٢س = ١٨٠° بطرح ١٥٠° من طرفي المعادلة.

٢س = ٣٠° بقسمة الطرفين على ٢.

س = ١٥°

.....

حل تدريبات العلاقة بين الزوايا (٢)

حل تدريب (١)

∠ ١ = ١٣٠° بالتحالف مع ∠ ٤

∠ ٢ = ٥٠° بالتناظر مع الزاوية المعلومة

∠ ٣ = ١٣٠° بالتحالف مع ∠ ٢

∠ ٤ = ٥٠° بالتبادل مع ∠ ٢

∠ ٥ = ١٣٠° بالتناظر مع ∠ ٣

∠ ٦ = ٥٠° بالتناظر مع ∠ ٤

∠ ١ = ١٣٠° بالتناظر مع ∠ ٧

.....

حل تدريب (٢)

س = ٣٠°

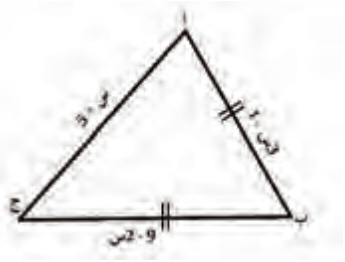
.....

حل تدريب (٣)

س = ٤

ص = ٩

حل الإثراءِ:



الحل: طول الضلع أ ب = طول ب ج

(من الشكل)

إذاً: ٣س ـ ١ = ٩ ـ ٢ س وبحلّ المعادلة الخطيّة

بجمع المتغيرات في طرف.

٥ س ـ ١ = ٩ بجمع ٢س لطرفي المعادلة

٥ س ـ ١ + ١ = ٩ + ١ بجمع ١ إلى طرفي المعادلة.

٥ س = ١٠

س = ٢ بقسمة طرفي المعادلة على العدد ٥

ولكن طول أ ج = س + ٥

أي أن أ ج = ٢ + ٥ = ٧ سم

حل تدريبات درس محيط ومساحة الدائرة

تدريب (١)

أ) محيط الدائرة ٨٨ سم.

ب) مساحة الدائرة ٦١٦ سم^{٢}

.....

تدريب (٢)

مساحة الدائرة ≈ ٥,٨٣ سم^{٢}

.....

تدريب (٣)

محيط الدائرة ≈ $\frac{٤٤}{٧}$ سم

.....

حل الإثراءِ:

من خلال الشكلّ المجاور نستطيع معرفة مساحة المضمار الدائري، حيث

مساحة المضمار = π (نق)^{٢}.

٣١٤ = π(س)^{٢}

حيث نصف قطر الدائرة التي تمثل المضمار مجهول (س).

٣١٤ = ٣,١٤ س^{٢} حيث قيمة $\pi \approx$ ٣,١٤ أو $\frac{٢٢}{٧}$

وبقسمة الطرفين على ٣,١٤

س^{٢}= $\frac{٣١٤}{٣,١٤}$

وبتحريك الفاصلة العشريّة في المقام منزلتين (كي يصبح المقام عدد صحيح) ينتج:

(اختصار البسط مع المقام)= س^{٢}= $\frac{٣١٤٠٠}{٣١٤}$

س^{٢} = ١٠٠ (بأخذ الجذر التربيعيّ للطرفين).

س = ١٠

أي أن نصف قطر الدائرة = ١٠ م.

المسافة التي سيقطعها الحصان = محيط الدائرة.

= ٢πنق

$\approx$ ٢ × ٣,١٤ × ١٠

$\approx$ ٦٢,٨ م

.....

حل تدريبات الانعكاس والانسحاب والدوران

تدريب (١)

ت: (٢ ، ٩) ← (٧ ، ٦).

.....

تدريب (٢)

أ) ع$_{س}$ (٢ ، ٤)← (٢، -٤).

ب) ع$_{ص}$ (٢ ، ٤)← (-٢، ٤).

تدريب (٣)

ح : (٢ ، ٥) ← (-١ ، ٧).

.....

تدريب (٤)

أ) د$_{و}$ (٩٠°) : (١، ٦) ← (- ٦ ، ١).

ب) د$_{و}$ (١٨٠°) : (١، ٦) ← (-١ ، -٦).

ج) د$_{و}$ (٢٧٠°) :(١، ٦) ← (٦ ، -١).

د) د$_{و}$ (٣٦٠°) : (١، ٦) ← (١ ، ٦).

.....

حل الإثراءِ:

لاحظ أن النّقطة الأصليّة (٧ ، ٢).

د$_{و}$ (٩٠°) : (٧ ، ٢) ← (- ٢ ، ٧).

د$_{و}$ (١٨٠°) : (٧ ، ٢) ← (- ٧ ، -٢).

د$_{و}$ (٢٧٠°) : (٧ ، ٢) ← (٢ ، -٧).

د$_{و}$ (٣٦٠°) : (٧ ، ٢) ← (٢ ، -٧).

إذاً: زاوية الدوران هي ٢٧٠°.

.....

حل تدريبات درس الإحصاء

تدريب (١)

أ) الوسط الحسابي = ٥

ب) الوسيط = ٥

ج) المنوال = ١

د) الوسيط بعد اضافة العدد ٧ = ٥,٥

حل تدريب (٢)

أ) المدى = ٤

ب) ع= $\sqrt{٢,٥}$

ج) ع^{٢} = ٢,٥

حل الإثراءِ:

الحل: أ) $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$

المتوسط الحسابي $= \frac{٦ + ٤ + ٣ + ٦ + ٥ + ٣ + ١}{٧}$

المتوسط الحسابي $= \frac{٢٨}{٧}$

المتوسط الحسابي = ٤

.....

ب) المدى = أكبر قيمة ـ أصغر قيمة.

المدى = ٦ ـ ١

المدى = ٥

.....

ج) المتوسط الحسابي = ٤ من فرع (أ).

الانحراف المعياري

نكون جدْ ول من ٣ أعمدة كما يلي:

س	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^{٢}$
٦	٢	٤
٤	٠	٠
٣	١-	١
٦	٢	٤
٥	١	١
٣	١-	١
١	٣-	٩
المجموع		٢٠

نطبق القانون: $\sqrt{\frac{٢٠}{١-٧}}$

$= ١,٨$

تم بحمد الله تعالى