

الثانوي

العلمي

مدرسة النعمان

تمارين و مسائل للفف الثاني عشر العلمي

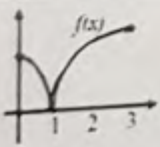
Teacher

تطبيقات التفاضل

أ: عبد صالح

تذكر

مثال اكمل الجدول :

الدالة	الاتصال في $[0,3]$	قابلية الاشتقاق في $(0,3)$
$f(x) = x^3 + 5x - 7$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$ $f'(x) = 3x^2 + 5$
$f(x) = \sin x$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$ $f'(x) = \cos x$
$f(x) = x - 1 $	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$ (رأس القطة) $f'(x)$ غير موجودة على $(0,3)$
$f(x) = x + 1 $	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$ عند $x=-1$ (رأس القطة)
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$ عند $x=-1$ (رأس القطة)	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$
$f(x) = \frac{x}{x-1}$	$f(x)$ غير متصلة على $[0,3]$ عند $x=1$ (رأس القطة)	$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق على $(0,3)$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$ عند $x=-1$ (رأس القطة)	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$
$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(0,3)$ عند $x=-1$ (رأس القطة)
$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق على $(0,3)$ عند $x=1$ (رأس القطة)
$f(x) = [x+5]$	$f(x)$ غير متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق على $(0,3)$
	$f(x)$ متصلة على $[0,3]$	$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق على $(0,3)$

ملاحظة: في رسم $f(x)$

المماس افقي $f(x) : f'(x) = 0$

(1) انفصال $f(x) : f'(x) = 2$

(2) ركن

(3) محاسن رأسية

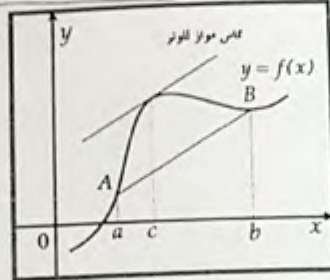
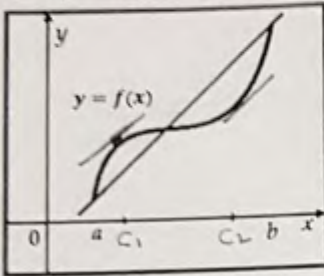
نظرية القيمة المتوسطة للدالة

إذا كانت (1) $f(x)$ متصلة في $[a, b]$
 (2) $f(x)$ قابلة للاشتقاق في (a, b)
 شرطاً نظرياً لقيمة المتوسطة

نستخدم لإيجاد قيمة c
 يستخدم في البراهين على
 نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

فانه يوجد على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث
 ملاحظة: c عدد بين a و b وليس طرف
 $a < c < b$
 التفسير الهندسي للنظرية :-



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ميل القاطع = ميل المماس
 القاطع // المماس

مثال إذا كانت $f(x) = x^2 - x + 5$

(1) هل الدالة $f(x)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[1, 3]$

$f(x)$ متصلة في $[1, 3]$

$f(x)$ قابلة للاشتقاق في $(1, 3)$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[1, 3]$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

(2) اوجد قيمة c التي تتحقق عندها نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$2c - 1 = \frac{11 - 5}{2}$$

$$2c - 1 = 3$$

$$2c = 4$$

$$c = 2 \in (1, 3)$$

(3) فسر العلاقة بين القاطع المار بالنقطتين $(1, f(1))$ و $(3, f(3))$ و المماس المرسوم عند $x = c$

ميل القاطع = ميل المماس

القاطع // المماس

//

مثال إذا كانت $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(1) هل الدالة $f(x)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[\frac{1}{2}, 2]$

أصفا المقام

نقطة $x=0$
انفصال

$f(x)$ قابلة للاستمرار في $(\frac{1}{2}, 2)$ ، $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[\frac{1}{2}, 2]$

يوجد على الأقل c في $(\frac{1}{2}, 2)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(2) - f(\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}}$

(2) اوجد قيمة c التي تتحقق عندها نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{2.5 - 2.5}{1.5}$$

$$1 - \frac{1}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2) \text{ مقبولة}$$

$$c = -1 \notin (\frac{1}{2}, 2) \text{ مرفوضة}$$

مثال إذا كانت $f(x) = x^2 + ax$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[0, 3]$ وكانت $f'(c) = 1$ حيث c التي تحقق النظرية في $(0, 3)$ ، اوجد قيمة الثوابت a, c

$$f'(x) = 2x + a$$

$f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[0, 3]$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = 1 \text{ حيث } c \text{ في } (0, 3)$$

$$f'(c) = 1$$

$$2c + a = 1 \quad (1)$$

$$2c + (-2) = 1$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{f(3) - f(0)}{3} = 1$$

$$\frac{(9 + 3a) - (0)}{3} = 1$$

$$3 + a = 1$$

$$a = 1 - 3$$

$$a = -2$$

مثال إذا كانت $f(x) = \sin x$

(1) هل الدالة $f(x)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[a, b]$

$f(x)$ متصلة على $[a, b]$

$f(x)$ قابلة للاشتقاق في (a, b) ، $f'(x) = \cos x$

$f(x)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[a, b]$

يوجد على الأقل c في (a, b) بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

تذكر $|\cos \theta| \leq 1$

(2) اثبت ان : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\cos c = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}$$

$$|\cos c| = \left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$$

$$\frac{|\sin b - \sin a|}{|b - a|} \leq 1$$

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

بذ c

$$a < \left(\cos^{-1} \left(\frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right) \right) < b$$

مثال : اثبت ان

مثال

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية
(1) هل الدالة $f(x)$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[x_1, x_2]$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$f(x)$ مستمرة في $[x_1, x_2]$

$f(x)$ قابلة للاشتقاق في (x_1, x_2)

$f(x)$ تحقق شروط لقيمة المتوسطة في $[x_1, x_2]$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{بوجود } c \text{ في } (x_1, x_2)$$

(2) أثبت أن قيمة c التي تتحقق عندها نظرية القيمة المتوسطة هي $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$2ac + b = \frac{(ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} + \frac{bx_2 - bx_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} + \frac{b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} + b$$

$$2ac + b = a(x_2 + x_1) + b$$

$$2ac = a(x_2 + x_1)$$

$$c = \frac{a(x_2 + x_1)}{2a}$$

$$c = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

تمارين اضافية (1)

(1) إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x + 7$ تحقق شروط القيمة المتوسطة في $[0, b]$ وكانت $f'(c) = 1$ حيث c التي تعينها النظرية في $(0, b)$ ، اوجد قيمة الثوابت b, c

$$(2) \text{ إذا كانت } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 & , -1 \leq x < 1 \\ x^2 + 2x - 4 & , 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(أ) ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في $[-1, 3]$
(ب) اوجد قيم c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة

(3) إذا كانت $f(x) = x + \frac{a}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[1, 2]$ وكانت $f'(c) = \frac{1}{2}$ حيث c القيمة التي تعينها النظرية في $(1, 2)$ ، اوجد قيمة الثوابت a, c

$$(4) \text{ استخدم نظرية القيمة المتوسطة في اثبات ان : } a < \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2} \right)^2 < b$$

(ارشاد: افرض $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b]$)

(5) إذا كانت الدالتين $f(x)$, $g(x)$ متصلتين في $[2, 3]$ وقابلتين للاشتقاق في $(2, 3)$ وكانت

x	$f(x)$	$g(x)$
2	6	2
3	8	2

(أ) بين ان الدالة $h(x) = f(x) + g(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[2, 3]$
(ب) اثبت انه يوجد على الاقل c في $(2, 3)$ بحيث $f'(c) + g'(c) = 2$

(6) إذا كانت الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تحققان شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[a, b]$ وكانت $f(b) < g(b)$ اثبت ان $f(a) = g(a)$, $f'(x) < g'(x)$

(7) إذا كانت $f(x) = \sqrt{2x+1}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[0, b]$ وكانت $f'(c) = \frac{1}{2}$ حيث c القيمة التي تعينها النظرية في $[0, b]$ ، اوجد قيمة الثوابت b, c

(8) إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في $[2, 5]$ وقابلتين للاشتقاق في $(2, 5)$ وكانت $f(2) = -3$, $1 < f'(x) < 2$ لجميع قيم x في $(2, 5)$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة اثبت ان : $0 < f(5) < 3$

(9) إذا كانت $f(x) = 4 - x + \sin x$

- باستخدام نظرية القيمة المتوسطة اثبت انه يوجد على الاقل $c \in (\pi, 2\pi)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$
- اوجد قيم c في $(-\pi, \pi)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$

النقاط الحرجة : إذا كان $x = c$ داخلية للمجال (الدالة معرفة عندها وليست طرفية) بحيث $f'(c) = 0$ أو غير موجودة $f'(c)$ فإنه يكون عند $x = c$ حرجة.

مثال : أوجد قيم x الحرجة للدالة $f(x)$ في كل مما يلي :-

1) $f(x) = x^3 - 12x + 5, x \in [0, 3]$

$f(x)$ متصلة وم قابلة للاستقانة في $[0, 3]$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

داخلية $x = 2$ حرجة

لنستقيمت في $x = -2$ ليس حرجة

قيم x الحرجة $\{2\}$

3) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$$9 - x^2 \geq 0 \quad \text{نطاق المجال}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{-} \quad \sqrt{+} \quad \sqrt{-} \\ -\infty \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad \infty \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} 9 - x^2 = 0 \\ x = \pm 3 \end{array}$$

$$\text{المجال } [-3, 3] \quad \text{في } x = -3 \text{ و } x = 3 \text{ حرجة}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}}$$

$$-2x = 0 \quad \text{في } x = 0 \text{ حرجة (اضار المقام)}$$

داخلية $x = 0$ حرجة

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \quad \text{(اضار المقام)}$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 9$$

حرجة $x = 3$ و $x = -3$ ليس

حرجة $x = -3$ حرجة

قيم x الحرجة $\{0\}$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

مجالها R

$f(x)$ متصلة وم قابلة للاستقانة في R

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \in R$$

$$x = 2 \in R$$

قيم x الحرجة $\{0, 2\}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$

المجال R

$$f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{2}{3}}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3(x^2 - 9)^{\frac{2}{3}}}$$

$$2x = 0 \quad \text{في } x = 0 \text{ حرجة (اضار المقام)}$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{داخلية}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}} \quad \text{(اضار المقام)}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

داخلية $x = 3$ حرجة

داخلية $x = -3$ حرجة

قيم x الحرجة $\{3, -3, 0\}$

ملحظة: حل المعادلة الجيبية

$$\tan = 0, \pm 1 \quad \text{و} \quad \left. \begin{matrix} \sin \\ \cos \\ \tan \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\text{بالزاوية} = \pi$$

$$\text{نحيا وطرح } \pi$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \text{كسر}$$

$$1 < \text{كسر} < -1$$

خذ الريعين حسب إشارة

$S \oplus$	$S \ominus$
الزاوية $= \pi - E$	الزاوية $= E$
$\tan \oplus$	$C \oplus$
الزاوية $= \pi + E$	الزاوية $= 2\pi - E$

لايجاد
E بالزاوية
بدون إشارة

5) $f(x) = \sin x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$

$f(x)$ متصلة ومماثلة للاستقامة في $[-2\pi, 2\pi]$

$f'(x) = \cos x = 0$

حل $x = \frac{\pi}{2}$ داخل π

حل $x = \frac{3\pi}{2}$ داخل π

خارج الفترة $x = -2.5\pi$ ليس حل

$x = \frac{\pi}{2}$ حل

حل $x = -\frac{1}{2}\pi$ داخل π

حل $x = -\frac{3\pi}{2}$ داخل π

خارج الفترة $x = -2.5\pi$ ليس حل

قيم x الكثر $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right\}$

7) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

$f(x)$ متصلة ومماثلة للاستقامة في $[0, 2\pi]$

$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$

$\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = 1$

حل $x = \frac{\pi}{4}$ داخل π

حل $x = \frac{5\pi}{4}$ داخل π

خارج $x = \frac{9\pi}{4}$ ليس حل

قيم x الكثر $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

6) $f(x) = \cos 2x$, $x \in [0, \pi]$

$f(x)$ متصلة ومماثلة للاستقامة في $[0, \pi]$

$f'(x) = -2\sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$

$2x = 0 \rightarrow x = 0$ حل

$2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ حل

$2x = 2\pi \rightarrow x = \pi$ ليس حل

قيم x الكثر $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

8) $f(x) = x + 2\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$

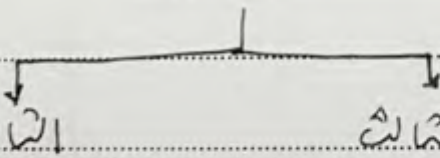
$f(x)$ متصلة ومماثلة للاستقامة في $[0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 + 2\cos x = 0$

$2\cos x = -1$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos \ominus$



الحالة الأولى: الزاوية = $\pi -$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

حل $x = \frac{2\pi}{3}$

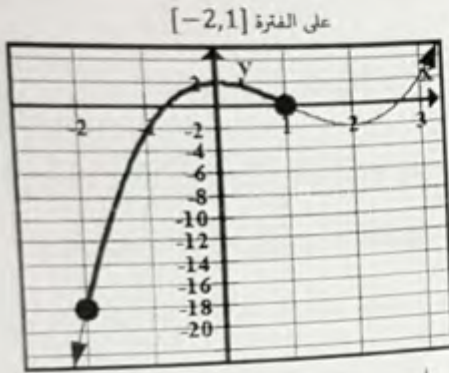
الحالة الثانية: الزاوية = $\pi +$

$x = \pi + \frac{\pi}{3}$

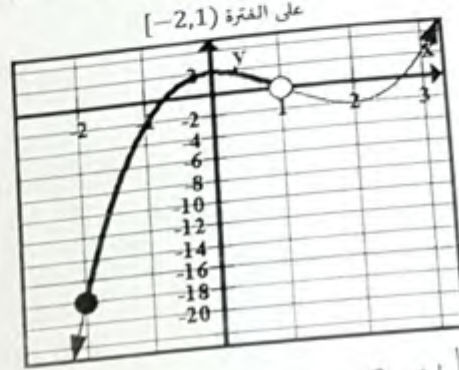
حل $x = \frac{4\pi}{3}$

القيم القصوى (القصوى المطلقة)

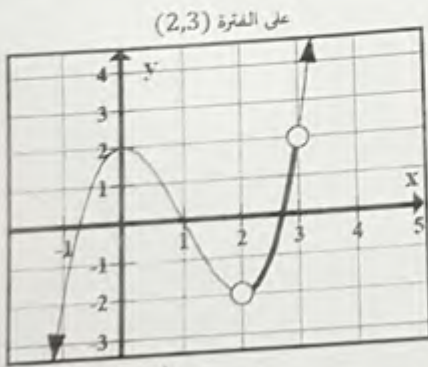
- القيمة العظمى (المطلقة) : أكبر قيمة للدالة $f(x)$ (تكون عند أعلى نقطة في رسم الدالة)
- القيمة الصغرى (المطلقة) : أصغر قيمة للدالة $f(x)$ (تكون عند أدنى نقطة في رسم الدالة)
- مثال : حدد القيم القصوى (ان وجدت) للدالة $f(x)$ في مجالها لكل مما يلي :



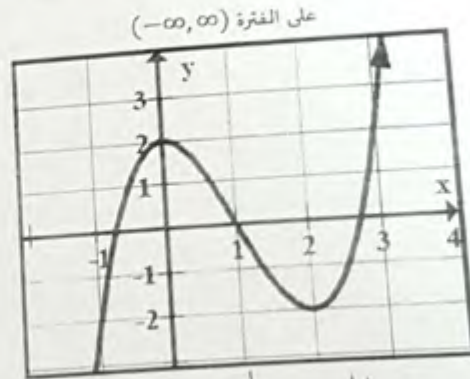
عظمى مطلقة هي (2) عند $x=0$
صغرى مطلقة هي (-18) عند $x=-2$



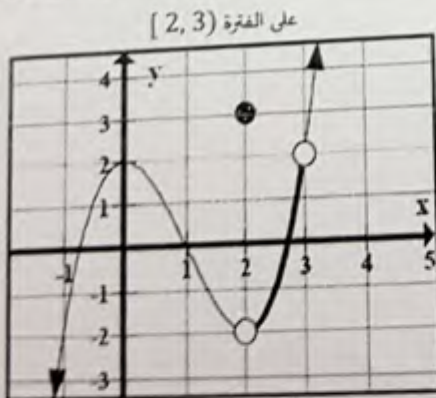
عظمى مطلقة هي 2 عند $x=0$
صغرى مطلقة هي -18 عند $x=-2$



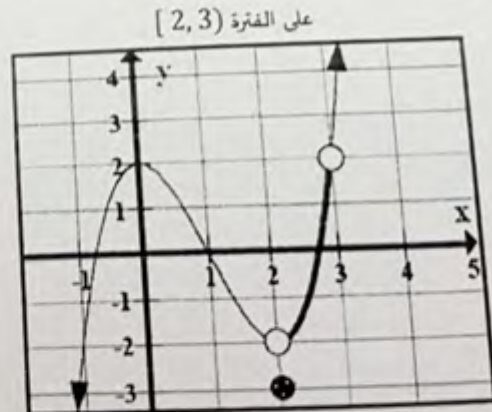
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة للدالة
لا يوجد قيمة صغرى مطلقة للدالة



لا يوجد عظمى مطلقة
لا يوجد صغرى مطلقة



قيمة عظمى مطلقة هي 2 عند $x=3$
لا يوجد قيمة صغرى مطلقة



لا يوجد قيمة عظمى مطلقة
لا يوجد قيمة صغرى مطلقة هي -2 عند $x=2$

خطوات إيجاد القيم القصوى لدالة متصلة في $[a, b]$:-
① نجد التقاطع الحرج
② نعوين في الدالة الأصلية

$$f(a) =$$

$$f(b) =$$

$$f(\text{الحرج}) =$$

③ متكون

القيمة العظمى المطلقة = أكبر ناتج نعوين
القيمة الصغرى المطلقة = أصغر ناتج نعوين .

• القيم القصوى تكون عند النقاط الحرجة او عند اطراف الفترة
• إذا كانت الدالة منفصلة او غير مغلقة فإنه قد يكون للدالة قيم قصوى و قد لا يكون لها قيم قصوى (تدرس لاحقا)

$f(x)$ مقلبه محاولة للاستقارفة في $[-2, 3]$ يوجد بها أقصى وقلبي

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$$

eg $x=1$ plus 1

red $\boxed{x = -1}$ داخل

میں ۱۲۱ کتب { ۱۲۱ - ۱۲۱ } ۱۲۱

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 7 = 5$$

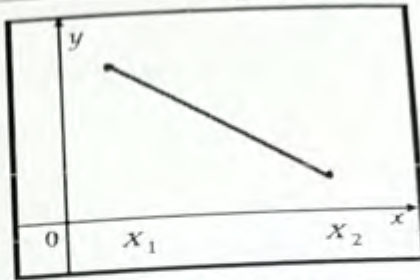
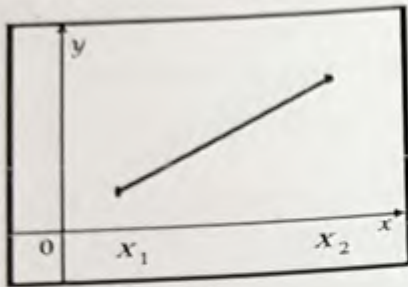
$$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 7 = 25$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 7 = 5$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 7 = 9$$

الصية العظمى المظلة هي 25 عند $x=3$

القيمة الصغرى المطلقة 5 عند $x = 1$ ، $x = -2$



$$x_1 < x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

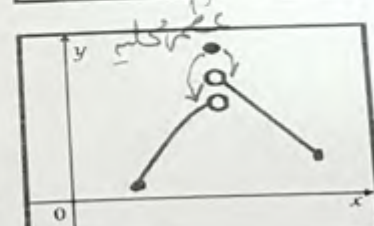
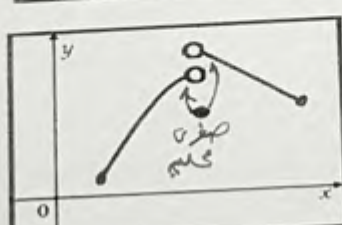
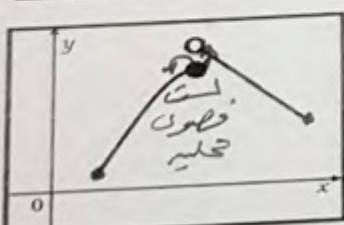
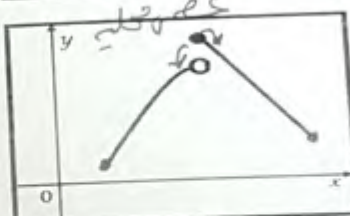
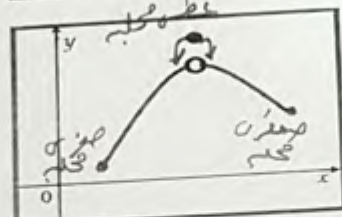
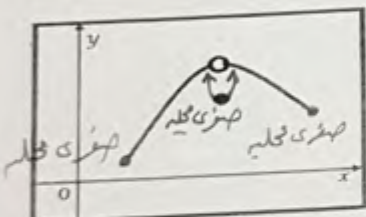
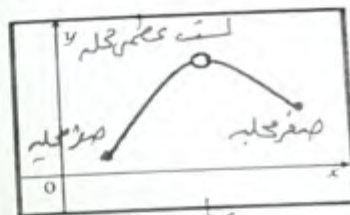
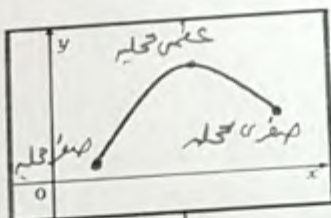
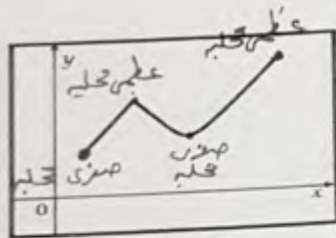
$f(x)$ متزايدة من $[x_1, x_2]$

$$x_1 < x_2$$

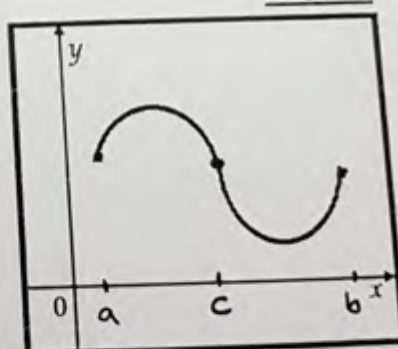
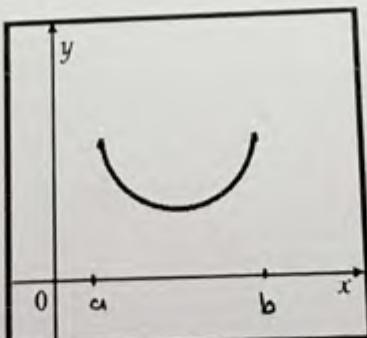
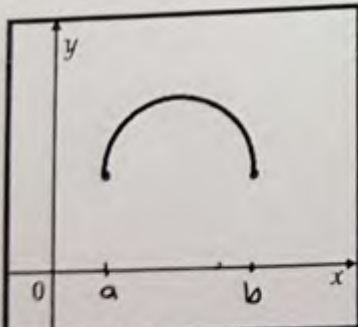
$$f(x_1) > f(x_2)$$

$f(x)$ متناقصه من $[x_1, x_2]$

القيم القصوى المحلية (العظمى المحلية و الصغرى المحلية)



التقعر :-



$f(x)$ مقعراً للأسفل في (a, b)

$f(x)$ مقعراً للأعلى في (a, b)

ملاحظة : يكون عند نقطة انقلاب اذا تحقق الشرطين التاليين معاً :-
 (1) متصلة عند $x=c$
 (2) الدالة $f(x)$ تغير من تقعرها حول $x=c$
 نقطة انقلاب تكسب روحاً

وصف الدالة $f(x)$ من خلال المشتقة الأولى $f'(x)$:-
 * النقطة الحرجة : $x=c$ حرجية (داخلية) $\left\{ \begin{array}{l} f'(c)=0 \\ f'(c) \neq 0 \end{array} \right.$

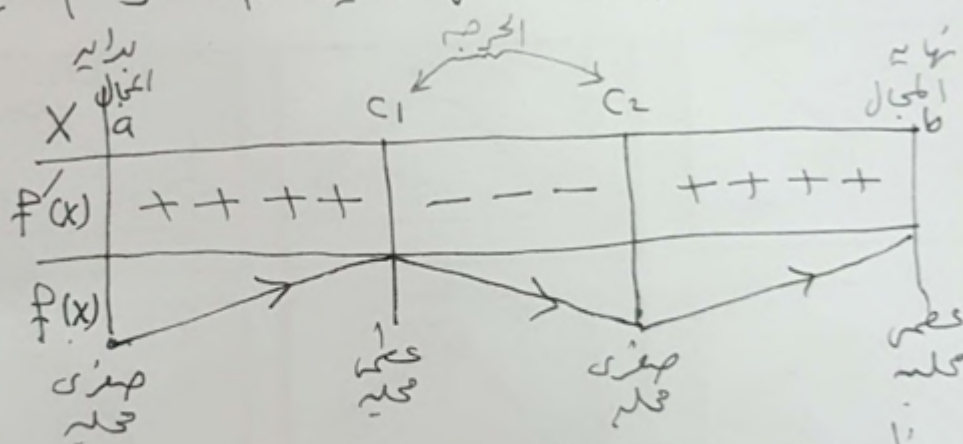
* التزايد والتناقص :-

(1) $f'(x) > 0$ في $(a, b) \leftarrow f(x)$ متزايدة في $[a, b]$

(2) $f'(x) < 0$ في $(a, b) \leftarrow f(x)$ متناقصة في $[a, b]$

(3) $f'(x) = 0$ في $(a, b) \leftarrow f(x)$ ثابتة في $[a, b]$

* القيم القصوى المحلية (العظمى المحلية، الصغرى المحلية) :-



عظمى محلية للدالة $f(x)$ عند $x=c_1$ هي $f(c_1) = ?$

وصف الدالة $f(x)$ من خلال المشتقة الاولى $f'(x)$

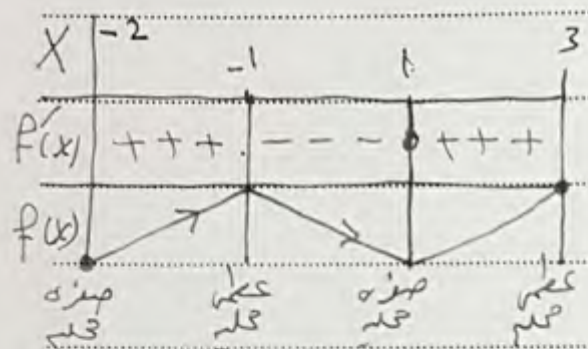
مثال إذا كانت $f(x) = x^3 - 3x + 7$, $x \in [-2, 3]$ اوجد :

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$f(x)$ مقبله ومائلة للاستقامة من $[-2, 3]$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = -1} \text{ (دالة صلبة) } , \boxed{x = 1} \text{ (دالة صلبة) }$$

قيم x الحرجة $\{ -1, 1 \}$



$f(x)$ تزايدية من $[-2, -1]$ و $[1, 3]$

$f(x)$ تناقصية من $[-1, 1]$

عظمى محلية عند $x = -1$ هي $f(-1) = 9$

عظمى محلية عند $x = 3$ هي $f(3) = 25$

صغرى محلية عند $x = -2$ هي $f(-2) = 5$

صغرى محلية عند $x = 1$ هي $f(1) = 5$

مثال إذا كانت $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, $x \in [-2, 3]$ اوجد :

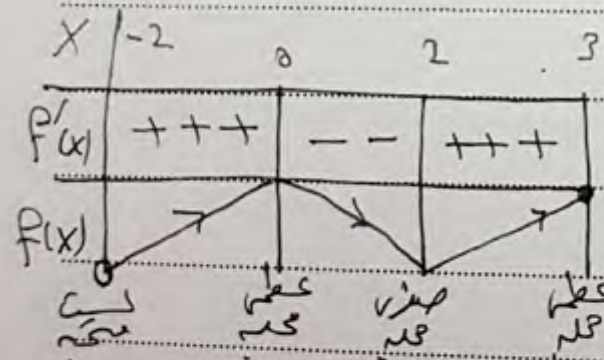
- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$f(x)$ مقبله ومائلة للاستقامة من $[-2, 3]$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ (دالة صلبة) } , \boxed{x = 2} \text{ (دالة صلبة) }$$

قيم x الحرجة $\{ 0, 2 \}$



$f(x)$ تزايدية من $[-2, 0]$ و $[2, 3]$

$f(x)$ تناقصية من $[0, 2]$

عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 7$

عظمى محلية عند $x = 3$ هي $f(3) = 7$

صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = 3$

$$16 - x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq 16 \quad x = \pm 4$$

الحل $[-4, 4]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}$$

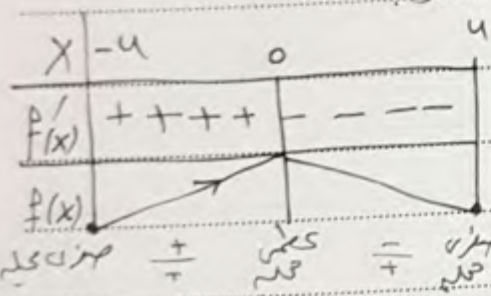
مثال إذا كانت $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ أوجد:

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$$16 - x^2 = 0 \quad x = \pm 4$$

$$-2x = 0 \quad x = 0$$

نم x الحرج $\{0\}$



عظمي محلي للدالة $f(x)$ عند $x=0$ هي $f(0)=4$
صغري محلي عند $x=4$ هي $f(4)=0$
صغري محلي عند $x=-4$ هي $f(-4)=0$

مثال إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ أوجد:

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$$16 - x^2 = 0 \quad x = \pm 4$$

الحل $(-4, 4)$

$$f(x) = (16-x^2)^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (16-x^2)^{-3/2} (-2x) = \frac{x}{(16-x^2)^{3/2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 0$$

$$16 - x^2 = 0 \quad x = \pm 4$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 0$$

نم x الحرج $\{0\}$

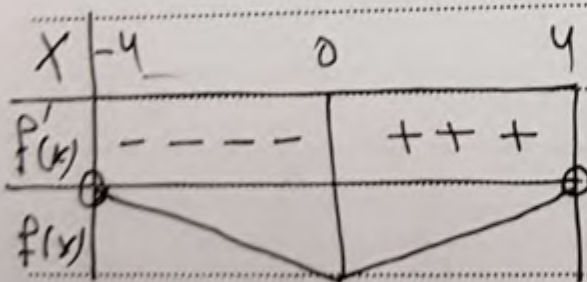
نم x الحرج $\{0\}$

$f(x)$ متزايدة $[0, 4]$

$f(x)$ متناقصة $[-4, 0]$

الصغري محلي للدالة

صغري محلي عند $x=0$ هي $f(0) = \frac{1}{4}$



صغري محلي عند $x=0$ هي $f(0) = \frac{1}{4}$

صغري محلي عند $x=0$ هي $f(0) = \frac{1}{4}$

صغري محلي عند $x=0$ هي $f(0) = \frac{1}{4}$

أصناف المقام
 $x^2 + 1 = 0$
 $x^2 = -1$
 لا يوجد صنف للمقام

المجال R

نصفه رقابلة للاستقامة في R

مثال: إذا كانت $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ أوجد:

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

أصناف البسط $f'(x) = 0$ $\Rightarrow x^2 - 1 = 0$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$	---	+++	---	
$f(x)$	منخفضة	صغرى محلية	كبرى محلية	مرتفعة

مع x الحرج $\{1, -1\}$
 $f(x)$ تناقص في $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$



أصناف المقام
 $x^2 - 1 = 0$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$
 نقاط انقطاع

المجال $R / \{1, -1\}$

مثال: إذا كانت $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ أوجد:

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 1) - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

أصناف البسط $f'(x) = 0$
 $-1 - x^2 = 0$
 $x^2 = -1$
 لا يوجد صنف للمقام

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$	---	---	---	
$f(x)$	منخفضة	انقطاع	انقطاع	مرتفعة

لا يوجد نقاط حرجية للدالة $f(x)$
 $f(x)$ تناقص في $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$
 لا يوجد تناقص
 لا يوجد تزايد

* صف الدالة $f(x)$ من خلال $f''(x)$:-

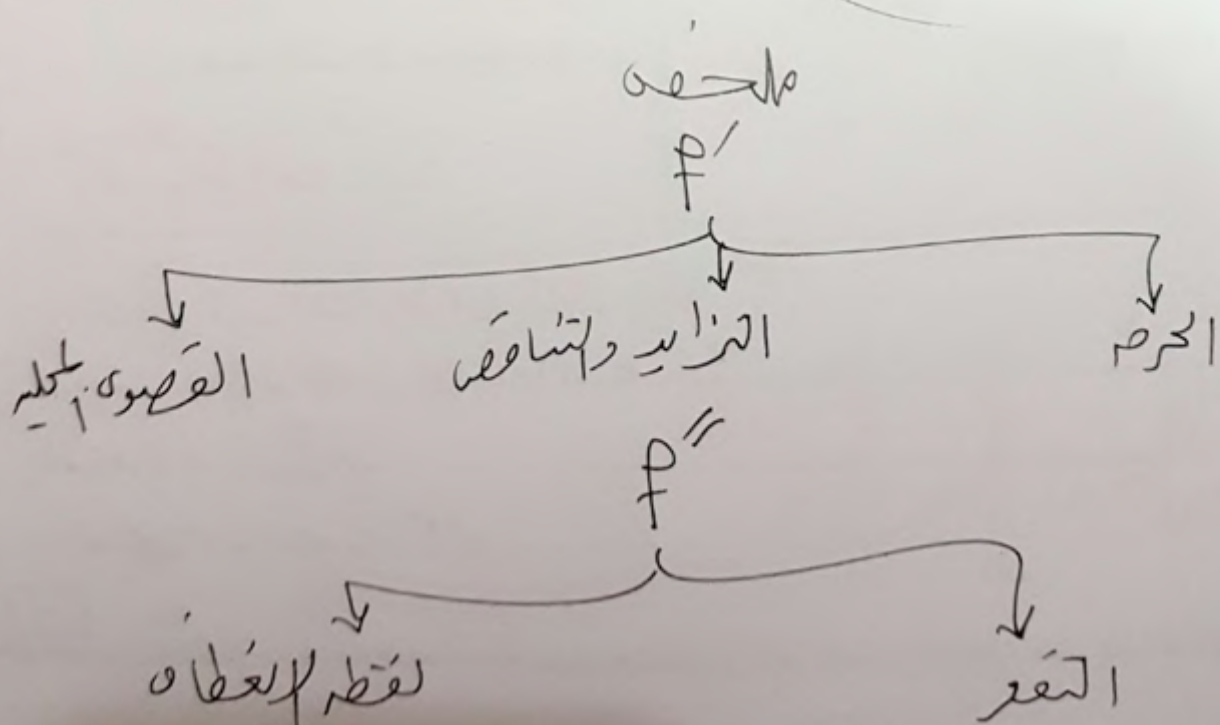
- التقعر !
- ① $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ مقعرًا لأعلى في (a, b)
 - ② $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ مقعرًا للأسفل في (a, b)
 - ③ $f''(x) = 0 \rightarrow f(x)$ خطاً مستقيماً في (a, b)

* نقطة الانعطاف (الانقلاب) : تكسب زوج مرتب $(c, f(c))$ يكون عند $x=c$ نقطة انقلاب إذا تحقق الشرطين التاليين معاً :-

- ① $f(x)$ متصلة عند $x=c$
- ② $f(x)$ يغيره لقطعه حول c ($f''(x)$ تغير اتجاهها حول c)

x	a	c	b
$f''(x)$	-----		+++++
$f(x)$			

الانعطاف



وصف الدالة $f(x)$ من خلال اشارة مشتقتها الثانية $f''(x)$

مثال إذا كانت $f(x) = 3x^2 - x^3 + 7$, $x \in [-2, 5]$ اوجد :

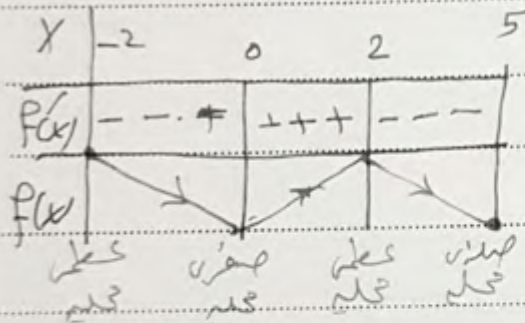
- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى و للأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

$f(x)$ مسطحة حاملة للاستقامة في $[-2, 5]$

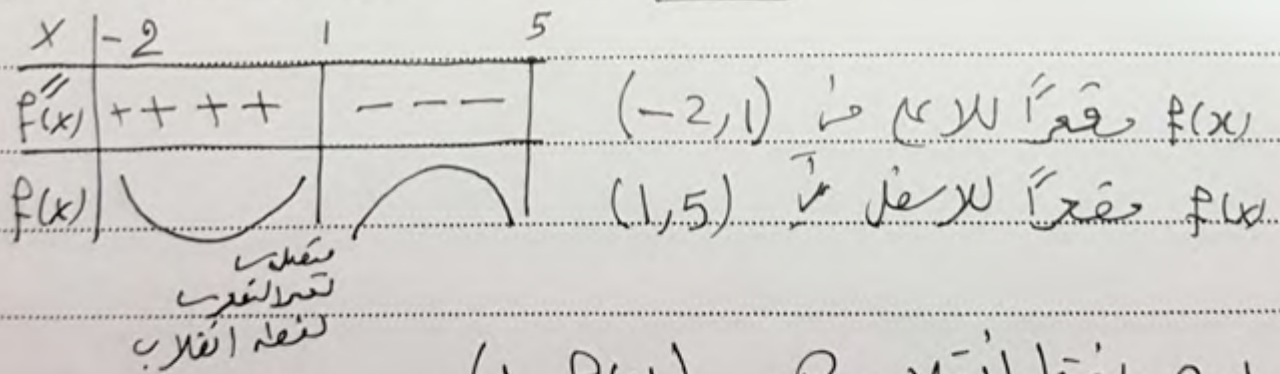
$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(2 - x) = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \text{ , } \boxed{x=2}$$

قيم x الحرجة $\{0, 2\}$



$$* f''(x) = 6 - 6x = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$$



لوصف نقطة انقلاب $(1, f(1))$
 $(1, 9)$

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

مثال إذا كانت $f(x) = x^3(x-4)$ أوجد:

المجال R

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى وللأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

$f(x)$ متصلة وقابلة للاستقار في R

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$4x^2(x-3) = 0$$

$$x=0, x=3$$

قيم x الحرجة $\{0, 3\}$

x	$-\infty$	0	3	∞
$f'(x)$	---	---	++++	
$f(x)$				

النقاط الحرجة $(0, f(0)), (3, f(3))$

$(0, 0), (3, -27)$

يرجع قيمه صغرى محليه عند $x=3$ هي $f(3) = -27$

لا يوجد عظمى محليه

$$* f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$$

$$12x(x-2) = 0$$

$$x=0, x=2$$

x	$-\infty$	0	2	∞
$f''(x)$	+++	---	++	
$f(x)$				

يوجد نقطتين انقلاب هما

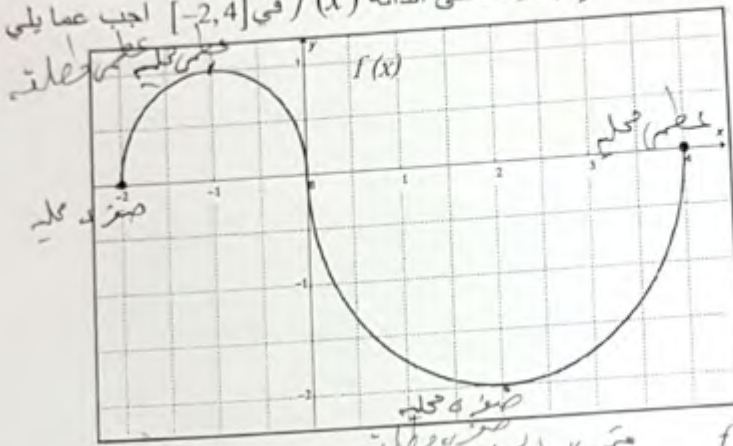
$(0, f(0)), (2, f(2))$

$(0, 0), (2, -16)$

وصف الدالة بيانيا (من الرسم)

اولا : اذا اعطي رسم بيان الدالة $f(x)$

الاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى الدالة $f(x)$ في $[-2, 4]$ اجب عما يلي :



ب- $f: f=0$ ←
اشارة
ركبت
(3) محلات

(1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ مع x الحرجة ومكانة

..... (حيث رأيت)

(2) فترات تزايد $f(x)$

..... $[-2, -1]$ $[2, 4]$

(3) القيم العظمى المحلية للدالة $f(x)$

..... $x = -1$ $x = 2$ $x = 0$ $x = 3$ $x = 4$

..... $x = 4$ هي صفر

(4) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي

(5) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ عندما x تساوي

(6) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى

(7) فترات تقعر $f(x)$ للأسفل

(8) نقط الانقلاب للدالة $f(x)$ (ان وجدت)

في $x = (-1, 0)$

(9) قيمة x بحيث تكون f' و f'' سالبتين

(10) اشارة $f'(3)$ هي $+$ لان $x = 3$ في منطقة تزايد $f(x)$

(11) اشارة $f''(3)$ هي $+$ لان $x = 3$ في منطقة تقعر $f(x)$ للأعلى

$\cup f \leftarrow + f''$

(12) فترات تزايد $f'(x)$ هي

$\cap f \leftrightarrow - f''$

(13) فترات تناقص $f'(x)$ هي

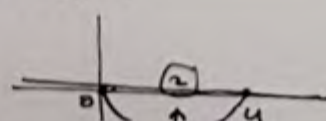
(14) مجموعة حل المتباينة $f'(x) < 0$ هي

(15) مجموعة حل المتباينة $f''(x) > 0$ هي

(16) قيم c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في $[0, 4]$ هي

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$f'(c) = 0 \rightarrow c = 2$$



(١) لضع الجدول وعليه املال

x	y
$f'(x)$	
$f(x)$	

f'_0 : نقطۂ صاف f'_1

عمر و اسباب

Given $F' : F = r \cdot \epsilon$

(2) نصت إلى الجدول القيم الحرجة للدرجات الحرة $F(x)$ تكون

3) $P' \rightarrow P$ (no)

* مخرج f' خود خود است $\rightarrow f'$

$\text{④ } f \rightarrow$ $\text{⑤ } f' \rightarrow$
 $\text{① } f \rightarrow$ $\text{② } f' \rightarrow$

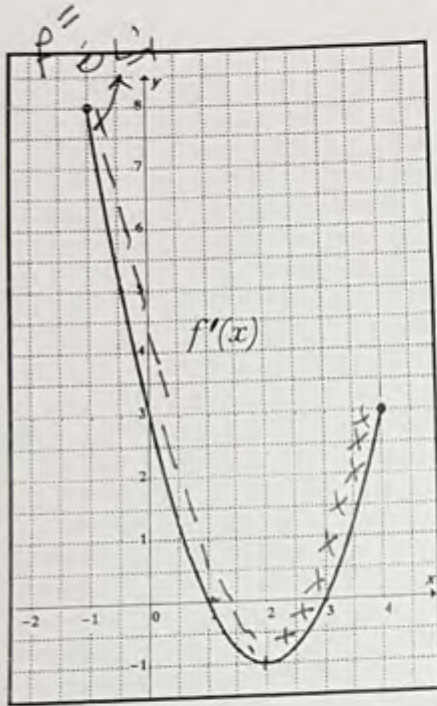
2] تکرین جدول مستقیم (جدول F مد F)

(۱) ترشح اشارة f'' مع مختص f'

(2) تحول المصارف الى هيكل P

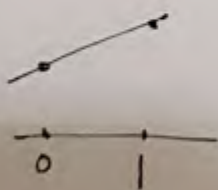
ثانياً: إذا اعطي رسم المشتقة الاولى $f'(x)$

بالاتتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الاولى $f'(x)$ في $[-1, 4]$ اجب عما يلي :



x	-1	1	3
$f'(x)$	++	--	+++
$f(x)$	صاعدة	عظمى	صاعدة

x	-1	2
$f'(x)$	--	+++
$f(x)$	تناقص	عظمى



(1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$

$$x = -1, 0, 2, 3, 4$$

(2) فترات تزايد $f(x)$

$$[-1, 1] \text{ و } [3, 4]$$

(3) فترات تناقص $f(x)$

$$[1, 3]$$

(4) القيم العظمى المحلية للدالة $f(x)$

$$f(1)$$

$$f(4)$$

(5) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى

$$[2, 4]$$

(6) فترات تقعر $f(x)$ للأسفل

$$[0, 2]$$

(7) نقط الانقلاب للدالة $f(x)$ (ان وجدت)

$$f(2)$$

(8) ايهما اكبر $f(1)$ ام $f(3)$ ، فسر اجابتك

$$f(3) < f(1)$$

$$f(x) \text{ متزايدة في } [1, 3]$$

(9) ميل المماس المرسوم للدالة $f(x)$ عند نقطة الانعطاف $(2, f(2))$

$$f'(2) = -1$$

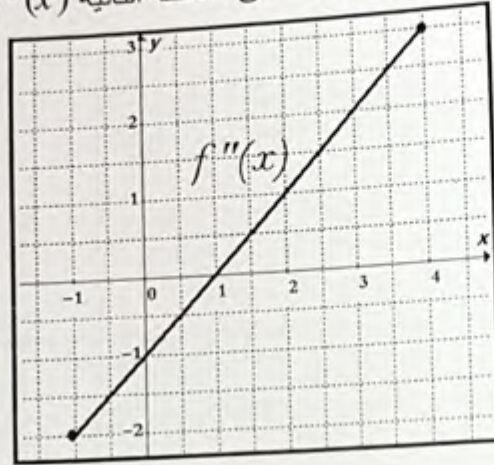
(10) إشارة $(f(0) - f(1))$ هي سالبة

$$f(0) < f(1)$$

$$f(0) - f(1) < 0$$

مثال: إذا اعطي رسم المشتقة الثانية $f''(x)$

بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الثانية $f''(x)$ في $[-1, 4]$ اجب عما يلي :



x	-1	1	4
$f''(x)$	-	-	+
f		↖	↗

القطر

(1) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى

$(1, 4)$

(2) فترات تقعر $f(x)$ للأسفل

$(-1, 1)$

(3) نقط الانقلاب للدالة $f(x)$ (ان وجدت)

$(1, f(1))$

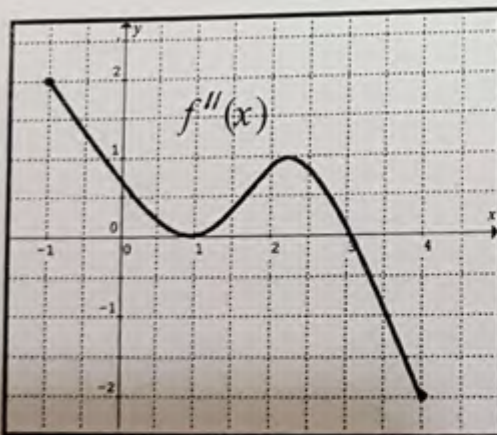
(4) فترات تزايد $f'(x)$

$[1, 4]$

(5) فترات تناقص $f'(x)$ ← تقعر f

$[-1, 1]$

مثال: بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الثانية $f''(x)$ في $[-1, 4]$ اجب عما يلي :



x	-1	1	3	4
f''	+	+	+	-
f	↖	↖	↖	↗

(1) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى

$(1, 3)$ و $(3, 4)$

(2) فترات تقعر $f(x)$ للأسفل

$(-1, 1)$

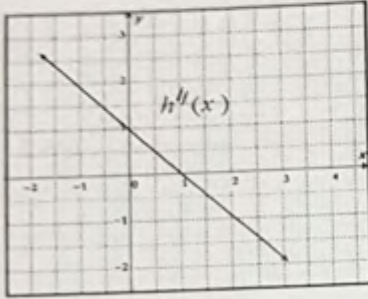
(3) نقط الانقلاب للدالة $f(x)$ (ان وجدت)

$(1, f(1))$ و $(3, f(3))$

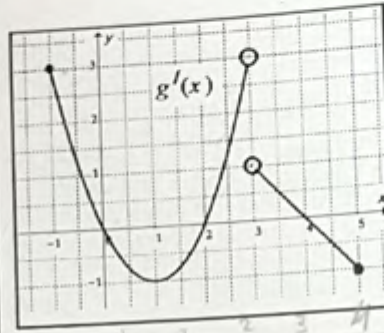
تمارين اضافية (2)

1 اكمل الجدول بما يناسب :

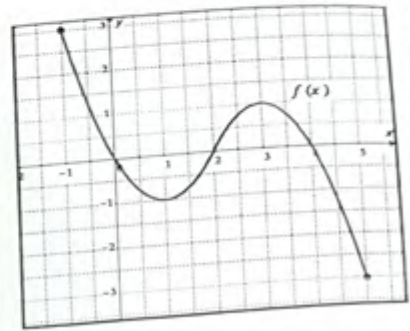
الرسم يمثل منحنى المشتقة الثانية للدالة $h(x)$ والتي هي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة وفيه
 $h'(x) > 0, x \in (0, 2)$
 $h'(x) < 0, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$



الرسم يمثل منحنى المشتقة الأولى للدالة $g(x)$ والمتصلة في $[-1, 5]$



الرسم التالي يمثل منحنى الدالة $f(x)$



المطلوب	الدالة		
النقاط الحرجة	$h(x)$	$g(x)$	$f(x)$
	$x = 0, x = 2$	$x = 1, x = 3$	$x = 1, x = 3$
فترات التزايد	$[0, 2]$	$[-1, 0] \cup [2, 3) \cup (3, 4]$	$[1, 3]$
القيم الصغرى المحلية	$x = 0$	$x = 2$	$x = 1$
فترات التغير لأعلى	$(-\infty, 0)$	$(1, 3)$	$(-1, 2)$
فترات التغير للأسفل	$(0, 2)$	$(-\infty, 1) \cup (3, 5)$	$(2, 5)$
نقاط الانقلاب (إن وجدت)	$x = 1$	$x = 1$	$x = 2$

• اوجد قيمة : 1) $f'(1) = \dots\dots\dots$ 2) $g'(1) = \dots\dots\dots$ 3) $g''(4) = \dots\dots\dots$ 4) $h'''(1) = \dots\dots\dots$

• قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $y = g'(x)$ في $[0, 2]$ هي $\dots\dots\dots$

خطوات رسم الدالة $f(x)$:-

- ① تحديد النقاط المعطاة في السؤال .
- ② نرسم بقلم الرصاص شكل تزايد و تناقص $f(x)$ ماراً بالنقاط المعطاة .
- ③ نثبت الإخفاء (التقعر) بقلم الحبر ونمسح الرصاص .

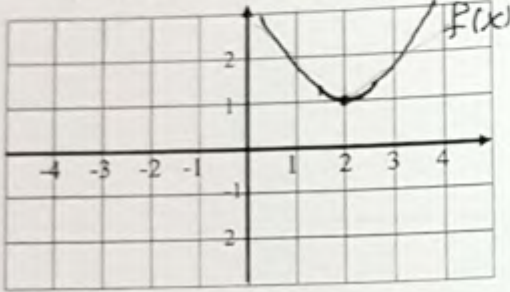
رسم منحنى الدالة $f(x)$

مثال ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ حيث :-

$$f(2)=1, f'(2)=0$$

$$f'(x) < 0, x < 2$$

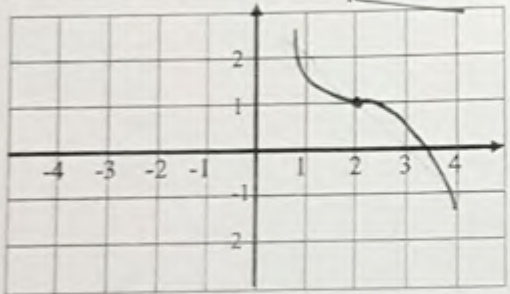
$$f'(x) > 0, x > 2$$



مثال ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ حيث :-

$$f(2)=1, f'(2)=0$$

$$f'(x) < 0, x \neq 2$$

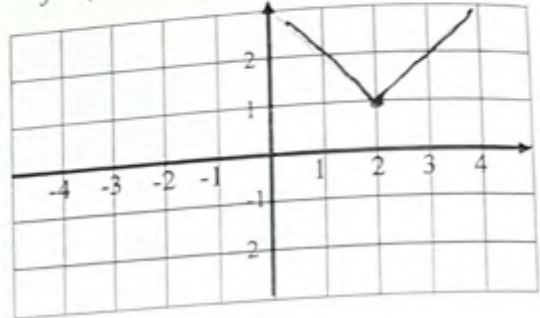


مثال ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ المتصلة في $\mathbb{R}$

$$f(2)=1, f'(2)=0$$

$$f'(x) < 0, x < 2$$

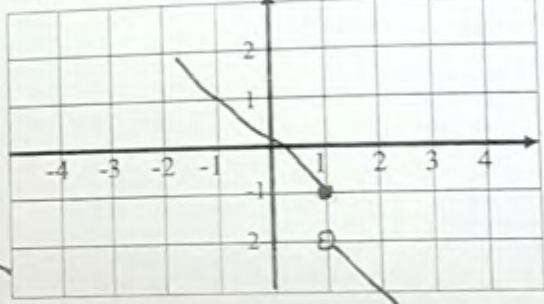
$$f'(x) > 0, x > 2$$



مثال ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ حيث :-

$$f(1)=-1, f'(1)=0$$

$$f'(x) < 0, x \neq 1$$



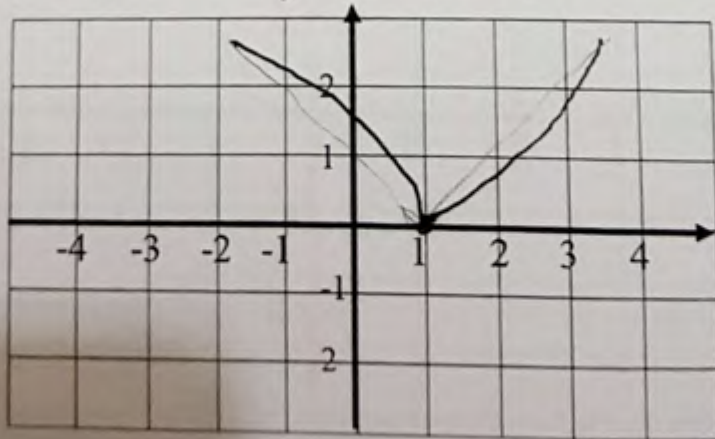
$$f(1)=0 \rightarrow (1,0)$$

$$f'(x) > 0, x > 1$$

$$f'(x) < 0, x < 1$$

$$f''(x) > 0, x > 1$$

$$f''(x) < 0, x < 1$$



ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ حيث :-

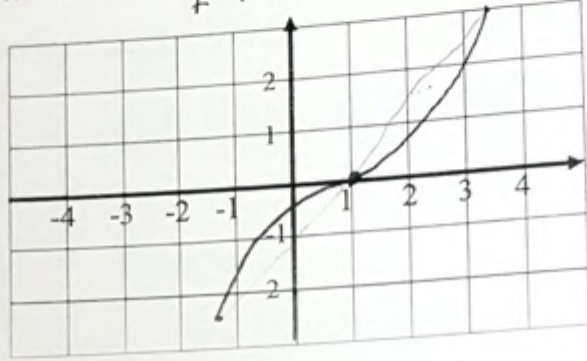
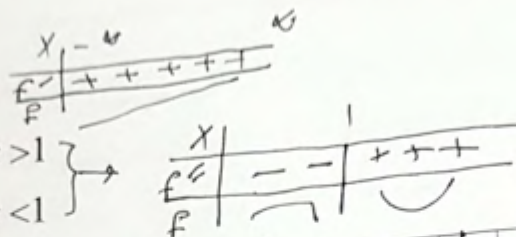
مثال

$$f(1)=0$$

$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) > 0, x > 1$$

$$f''(x) < 0, x < 1$$



ارسم بيان الدالة $y=f(x)$ حيث :-

مثال

$$f(1)=f(-1)=1$$

$$f(2)=f(-2)=0$$

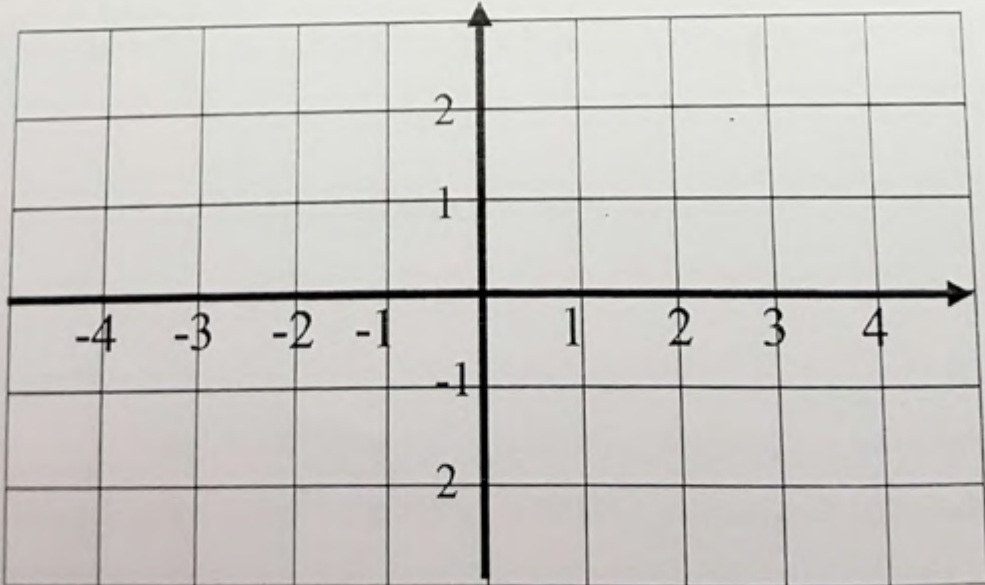
$$f(0)=2$$

$$f'(x) > 0, x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$$

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$$

$$f''(x) > 0, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$f''(x) < 0, x \in (-1, 1)$$



× (1, 5) نقطة الخطاف أفقي

$$x=1$$

$$f(1)=5$$

$$f''(1)=0 \quad \text{الخطاف}$$

$$f'''(1)=0 \quad \text{أفقي}$$

ايجاد المجاهيل في دالة قابلة للاشتقاق

تذكر :

- إذا كانت $x=a$ حرجة فان $f'(a)=0$ او غير موجودة $f'(a)$ فاذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=a$ فانه بالتاكيد ستكون $f'(a)=0$
- إذا كان عند $x=a$ انعطاف فان $f''(a)=0$ او غير موجودة $f''(a)$ فاذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=a$ فانه بالتاكيد ستكون $f''(a)=0$

لايجاد المجاهيل في دالة قابلة للاشتقاق

فسر ما يلي :-

- الدالة $f(x)$ تمر في النقطة $(1,5)$ $\Longleftrightarrow x=1$

$$f(1)=5$$

- للدالة $f(x)$ نقطة حرجة (عظمى محلية ، صغرى محلية) عند $(1,5)$ $\Longleftrightarrow x=1$

$$f(1)=5$$

$$f'(1)=0$$

عظمى ، صغرى

- للدالة $f(x)$ (عظمى محلية او صغرى محلية) عند $x=1$ قيمتها 5 $\Longleftrightarrow x=1$

$$f(1)=5$$

$$f'(1)=0$$

- للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف (انقلاب) عند $(1,5)$ $\Longleftrightarrow x=1$

$$f(1)=5$$

$$f''(1)=0$$

الانعطاف

$$y=3(1)+2=5$$

- للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف (انقلاب) عند $x=1$ معادلة المماس عندها $y=3x+2$

$$m=y=3$$

$$x=1$$

$$f(1)=5$$

$$f''(1)=0$$

الانعطاف

$$f'(1)=3$$

ميل المماس

ملاحظة : تذكر

- الصورة العامة لكثيرة حدود من الدرجة الثانية هي : $f(x)=ax^2+bx+c$
- الصورة العامة لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة هي : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ايجاد المجاهيل في دالة قابلة للاشتقاق

مثال: إذا كانت $f(x) = x^3 + ax + b$ وكان للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ هي 5
 اوجد قيمة a, b
 $f'(x) = 3x^2 + a$

$$\begin{aligned} x=1 \\ f(1) &= 5 \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$f(1) = 5$$

$$1 + a + b = 5$$

$$a + b = 4 \quad (1)$$

$$-3 + b = 4$$

$$\boxed{b = 7}$$

$$f'(1) = 0$$

$$3(1)^2 + a = 0$$

$$3 + a = 0$$

$$\boxed{a = -3}$$

مثال: إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ وكان للدالة $f(x)$ تمر في النقطة $(0, 7)$ ولها نقطة انقلاب هي $(1, 5)$ اوجد قيمة a, b, c

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

* تمر في $(0, 7)$

$$\begin{aligned} x=0 \\ f(0) &= 7 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0 + 0 + c = 7$$

$$\boxed{c = 7}$$

* انقلاب $(1, 5)$

$$\begin{aligned} x=1 \\ f(1) &= 5 \\ f''(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$f(1) = 5$$

$$a + b + c = 5$$

$$a + b + 7 = 5$$

$$a + b = -2 \quad (1)$$

$$f''(1) = 0$$

$$6a(1) + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 3a + b &= 0 \\ a + b &= -2 \end{aligned}$$

بحر 2 1

$$\boxed{a = 1}$$

$$\boxed{b = -3}$$

تطبيقات فيزيائية (وصف الحركة)

يتحرك جسم أفقياً بحيث موقعه يعطى بالعلاقة $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7$ صف حركة الجسم.

$$v(t) = 3t^2 - 6t = 0 \quad | \quad a(t) = 6t - 6 = 0$$

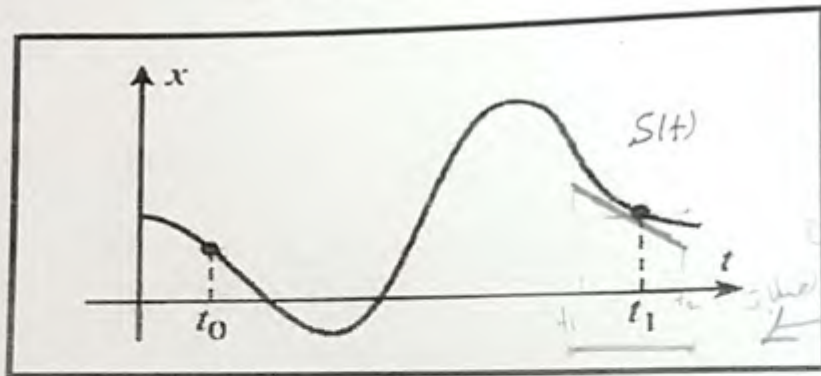
$$t = 1$$

$$t = 0, t = 2$$

t	0	1	2	3
v(t)	---	---	++	++
a(t)	---	++	++	++
وصف الحركة	مساير	متباطئ	متسارع	متسارع
	كواليس	كواليس	كواليس	كواليس

$$(2, 10)$$

مثال يتحرك جسم أفقياً بحيث موقعه $s(t)$ ممثلاً في الشكل المجاور



$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = s''(t)$$

(1) في أي اتجاه كان يتحرك الجسم عند اللحظة t_0 فسر إجابتك

$$v(t_0) = s'(t_0) = \ominus$$

لأنه في تلك اللحظة متباطئ نحو اليسار

(2) ما هي إشارة العجلة عند اللحظة t_0 فسر إجابتك

$$a(t_0) = s''(t_0) = \ominus$$

لأنه في تلك اللحظة متسارع نحو اليسار

(3) هل الجسم كان متسارعاً أم متباطئاً عند اللحظة t_0 فسر إجابتك

$$v(t_0) = s'(t_0) = \ominus$$

$$a(t_0) = s''(t_0) = \ominus$$

مساير نحو اليسار

(4) صف حركة الجسم عند اللحظة t_1 مع التبرير

$$v(t_1) = s'(t_1) = \ominus$$

متباطئ

$$a(t_1) = s''(t_1) = \oplus$$

متسارع

متباطئ نحو اليسار

تمارين اضافية (3)

1] اوجد قيمة الثوابت b, c التي تجعل للدالة $f(x) = x^2 + bx + c$ قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ و قيمتها تساوي (-1)

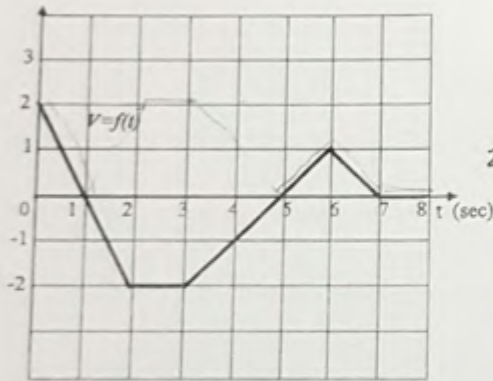
2] اذا كان للدالة $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ قيمة قصوى محلية تساوي 1 عند $x = 3$ اوجد الثابتين a, b

3] اذا كان للدالة $f(x) = (ax-b)^2 + 5b, a \neq 0$ قيمة قصوى محلية عند $(4, 10)$ اوجد الثابتين a, b

4] اوجد معادلة الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة و التي تمر بالنقطة $(0, 4)$ ولها نقطة انقلاب افقي (المماس عندها افقي) هي $(-1, 2)$

5] في الشكل الممثل للسرعة المتجهة $v = f(t), 0 \leq t \leq 8$ لجسم يتحرك أفقياً ، اعتماداً على الشكل اجنب عما يلي:

1) متى يتحرك الجسم لليمين و متى يتحرك إلى اليسار



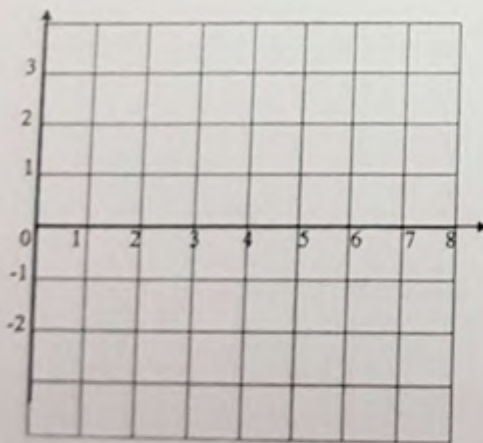
2) متى تكون سرعة الجسم متزايدة و متى تكون متناقصة

3) متى تكون عجلة الجسم موجبة ، سالبة و متى تنعدم العجلة

4) متى كانت اكبر سرعة للجسم

5) صف حركة الجسم

6) ارسم دالة التسارع للجسم



إذا كانت $x \in [0, 2\pi]$ ، $f(x) = \sin x$ أوجد :

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى وللأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

الدالة متصلة وفالدية المشتقة $[0, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + \pi = \frac{5\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	0	1	-1	0

الدالة تزايدية على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

الدالة تناقصية على الفترة $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

يوجد قيمة قصوى محلية (عظمى) عند $x = \frac{\pi}{2}$ وقيمة 1

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{3\pi}{2}$ وقيمة -1

$$f''(x) = -\sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \pi$$

$$x = 2\pi$$

x	0	$x = \pi$	2π
$f''(x)$	0	+	0
$f(x)$	0	0	0

$$x = \frac{\pi}{2}$$

مثال إذا كانت $x \in [0, \pi]$ ، $f(x) = \sin 2x$ اوجد :

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى و للأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

مثال إذا كانت $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = \sin x + \cos x$ اوجد :

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى و للأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

إذا كانت $x \neq 0$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ اوجد :

امثلة المثلث
المجال $x \neq 0$
أو $R/\{0\}$
 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 $f(x)$ متصلة في $x=0$

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى وللأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = 1, x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f'(x)$	++	+	-	-	++
$f(x)$					

أبواب

$$f''(x) = 0 + \frac{2}{x^3} = 0 \quad x = 0$$

x	$-\infty$	0	∞
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$			

نقطة انقلاب

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

$$[-1, 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , -1 \leq x < 1 \\ 1 - x^2 & , 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

إذا كانت

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى وللأسفل
- (5) نقط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ ان وجدت

عند $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , -1 \leq x < 1 \\ -2x & , 1 < x \leq 3 \\ \text{م. غ.} & , x=1 \end{cases}$$

① ندرس الاتصال

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

متمم عند $x=1$

$$f'(1+) = -2$$

$$f'(1-) = 2$$

$$f'(1+) \neq f'(1-)$$

$$f'(1) \text{ م. غ.}$$

$$* f'(x) = 2x = 0 \quad , -1 \leq x < 1$$

من القدر المتساوية $x=0$ حرج

$$* f'(x) = -2x = 0 \quad , 1 < x \leq 3$$

لما $x=0$ حرج

قيم x الحرج $\{0, 1\}$

x	-1	0	1	3
$f'(x)$	-	-	+++	-
$f(x)$				

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & , -1 \leq x < 1 \\ -2 & , 1 < x \leq 3 \\ \text{م. غ.} & , x=1 \end{cases}$$

x	-1	1	3
$f''(x)$	+++	-	-
$f(x)$			

انقلاب

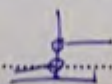
$$f'(1) = \text{م. غ.}$$

$$x=1$$

$$f''(1) = \text{م. غ.}$$

$$x=1$$

لقد تم التحقق من الانقلاب بكونه متغيراً
كلما أن المشتقة





المجال R =

إذا كانت $f'(x) = (x+1)^3(x-3)^2$ أوجد:

- (1) النقاط الحرجة للدالة $f(x)$
- (2) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر $f(x)$ للأعلى وللأسفل
- (5) نقاط الانعطاف (الانقلاب) للدالة $f(x)$ إن وجدت

$$f'(x) = (x+1)^3(x-3)^2 = 0$$

$$x = -1 \quad x = 3$$

نم x الحزم

x	$-\infty$	-1	3	∞
$f'(x)$	---	+++	+++	
$f(x)$				

$$* f''(x) = 3(x+1)^2(x-3)^2 + 2(x+1)^3(x-3) = 0$$

$$(x+1)^2(x-3) [3(x-3) + 2(x+1)] = 0$$

$$(x+1)^2(x-3) (3x-9+2x+2) = 0$$

$$(x+1)^2(x-3) (5x-7) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 3 \quad x = \frac{7}{5} = 1.4$$

x	$-\infty$	-1	1.4	3	∞
f''	+++	+++	--	++	
f					

تمارين اضافية (4)

1] إذا كانت $x < 2$ ، $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$ اوجد :-

- (1) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (2) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$
- (3) القيم القصوى للدالة $f(x)$
- (4) فترات تقعر الدالة $f(x)$ للأسفل وللأعلى

2] إذا كانت $[-\pi, \pi]$ ، $f(x) = 4 - x + \sin x$ اوجد :-

- (1) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (2) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

3] إذا كانت $0 \leq x \leq 2$ ، $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$ اوجد :-

- (1) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (2) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

4] اوجد قيمة الثابت k التي تجعل منحنى الدالة $f(x) = 5x - (k - 3)x^2 + 5$ مقعرا للأسفل

5] إذا كانت $[0, 2\pi]$ ، $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ اوجد :-

- (1) فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$
- (2) القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

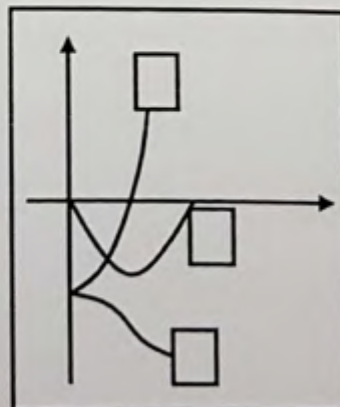
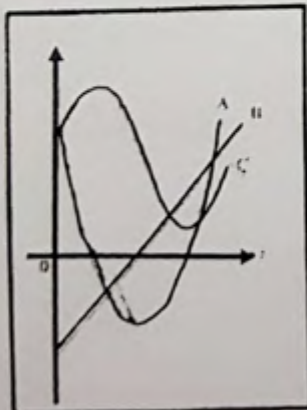
6] اثبت ان الدالة $f(x) = \sin x - x$ متناقصة في $[0, \frac{\pi}{2}]$ ،

• ثم استقد من ذلك في اثبات ان $x \geq \sin x$ في نفس الفترة

7] إذا كانت $f(x) = \cos x - g(x) + 3x$ ، اثبت ان $(f + g)(x)$ متزايدة في $[0, \frac{\pi}{2}]$

8] إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متزايدتين في $[a, b]$ اثبت ان $(f + g)(x)$ متزايدة في $[a, b]$

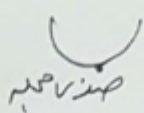
9] في كل شكل تم رسم منحنيات $s(t)$ ، $v(t)$ ، $a(t)$ حدد كل منها على المنحنى المناسب



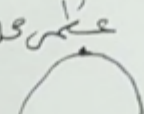
إيجاد القيم القصوى المحلية وتكديدها باستخدام
الخيار المستند الثالث

① عند $f'(x)$ وسماويها بالمر

② لتكديده النوع عند $x=c$ تعرض في $f''(x)$

* $f''(c) = \oplus > 0$ 

عند $x=c$ صفرى محلياً $f(c)$

* $f''(c) = \ominus < 0$ 

عند $x=c$ عظمى محلياً $f(c)$

سؤال : متى لا يمكن استخدام الخيار المستند الثالث؟

ع.م أو $f''(c) = 0$

$f'(c) = \text{ع.م}$

اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية

بإستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x + 7$

مثال
من هنا
من هنا

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

$$* f''(x) = 6x$$

عند $x = 1$ من هنا	عند $x = -1$ من هنا
$f''(1) = 6(1) = +6 > 0$ ∪	$f''(-1) = -6 < 0$ ∩

عظمى محلية عند $x = -1$ $f(-1) = 9$ $f(1) = 5$ من هنا

مثال باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1$$

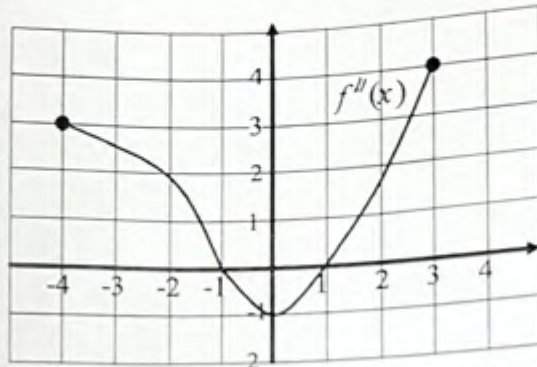
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

$$f''(x) = \frac{+2}{x^3}$$

عند $x = -1$	عند $x = 1$
$f''(-1) = \frac{2}{-1} = -2 < 0$ ∩	$f''(1) = \frac{2}{1} = +2 > 0$ ∪
عظمى محلية عند $x = -1$ $f(-1) = -2$	صغرى محلية عند $x = 1$ $f(1) = 2$

تمارين اضافية (5)

بالاعتماد على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الثانية $f''(x)$ في $[-4, 3]$ اجب عما يلي :



x	-4	-1	1	3
f''	+	+	-	+
f	∪	∩	∪	∪

(1) فترات تقرر $f(x)$ للأعلى

$(-4, -1), (1, 3)$

(2) فترات تقرر $f(x)$ للأسفل

$(-1, 1)$

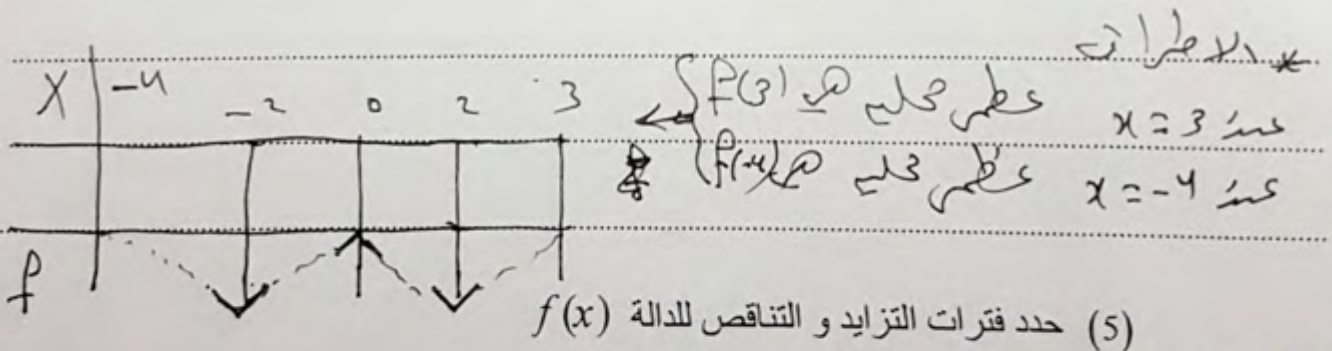
(3) نقط الانقلاب للدالة $f(x)$ (ان وجدت)

$x = -1, x = 1$

• إذا علمت ان قيم x الحرجة للدالة $f(x)$ هي $-2, 0, 2$

(4) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)$

عند $x = -2$	عند $x = 0$	عند $x = 2$
$f''(-2) = +2$ ∪	$f''(0) = -1$ ∩	$f''(2) = +$ ∪
هناك قيمة محلية	هناك قيمة محلية	هناك قيمة محلية



(5) حدد فترات التزايد و التناقص للدالة $f(x)$

حل تعديله أن نجد ∪ لها فترة تزايد و ∩ لها فترة تناقص

مدرسة النعمان بن بشير للتعليم الثانوي

تمارين و مسائل
للفف الثاني عشر العلمي

Teacher

النمذجة

و المعدلات الزمنية

Teacher

أ: عبد صالح

المنهجية : هي مسائل لفظية على القيم لقصوى المطلقة يكون المطلوب فيها مقدار أكبر ما يمكن (عظمى مطلقة) أو أقل ما يمكن (صغرى مطلقة).

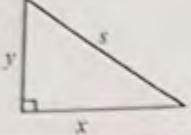
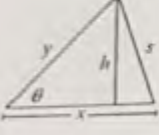
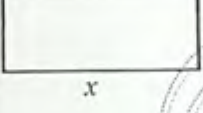
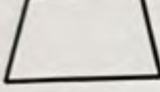
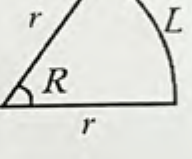
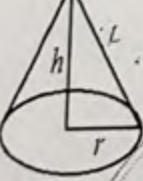
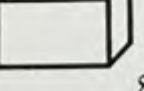
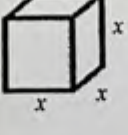
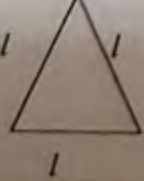
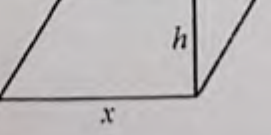
خطوات الحل :

- (1) نقرأ المسألة ونوضح خطأ تحت المطلوب أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن ونعطي رمزاً (مفتاح الحل).
- (2) تكون علاقة أساسية (دالة) بين هذا الرمز وباقي متغيرات المسألة.
- (3) إذا كان في الطرف الأيمن في العلاقة الأساسية أكثر من رمز نستبدل واحداًهما بدلالة الآخر من خلال علاقة جارية مساعدة تستغل عادة من توكيدها من رقم معطى في السؤال.
- (4) نستق العلاقة الأساسية ونسارها بالصفر.
- (5) نخسر القيم الناتجة. اتفقا مع السؤال أما اختيار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية.

ملاحظة : (1) يجب رسم شجرة توضيحية للسؤال.

- (2) يفضل إيجاد المجال.
- (3) إذا أخطى فترة في السؤال نعرض أطراف الفترة في الدالة كطريقة على قيمة القيم القصوى.
- (4) التعليق اللفظي عليه درجة.

قوانين المساحات و الحجوم

[[9]] المثلث القائم الزاوية  المساحة: $A = \frac{1}{2}xy$ $s^2 = x^2 + y^2$	[[1]] المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
[[10]] المثلث :  $A = \frac{1}{2}xh$ $A = \frac{1}{2}xy \sin \theta$ أو $s^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$	[[2]] المستطيل  المساحة: $A = xy$ المحيط: $P = 2x + 2y$
[[11]] شبه المنحرف  $A = \frac{1}{2}h(x + y)$	[[3]] المربع  المساحة: $A = x^2$ المحيط: $P = 4x$
[[12]] الكرة  الحجم: $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ مساحة سطح الكرة: $A = 4\pi r^2$	[[4]] الدائرة  المساحة: $A = \pi r^2$ المحيط: $P = 2\pi r$
[[13]] الاسطوانة القائمة  الحجم: $V = \pi r^2 h$ المساحة الجانبية: $2\pi r h$ المساحة الكلية: $2\pi r h + 2\pi r^2$	[[5]] القطاع الدائري  المساحة: $A = \frac{1}{2}Rr^2$ المحيط: $P = 2r + l$ طول القوس: $L = Rr$
[[14]] المخروط  الحجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ المساحة الجانبية: $\pi r l$ المساحة الكلية: $\pi r l + \pi r^2$	[[6]] متوازي المستطيلات (الصندوق)  الحجم: $V = xyz$ المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين طول القطر: $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$
[[15]] بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم $ax + by + c = 0$ $h = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	[[7]] المكعب  الحجم: $V = x^3$ المساحة الجانبية: $4x^2$ المساحة الكلية: $6x^2$ طول القطر: $s^2 = 3x^2 \Rightarrow S = \sqrt{3}x$
[[16]] المثلث المتطابق الاضلاع  المساحة: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ المحيط: $p = 3l$	[[8]] متوازي الاضلاع  المساحة: $A = xh$

النمذجة (تطبيقات على القيم القصوى)

1] عددان موجبين مجموعهما 10 ، اوجد العددين بحيث يكون حاصل ضربيهما اكبر ما يمكن

P : حاصل ضرب العددين اكبر ما يمكن

$$P = xy$$

x : العدد الأول

y : العدد الثاني

$$P = x(10 - x)$$

$$P(x) = 10x - x^2$$

$$P' = 10 - 2x = 0$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$x + y = 10$$

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

المجال

$$0 \leq x \leq 10$$

$$P''(x) = -2$$

$$P''(5) = -2 < 0$$

x	0	5	10
P'	+	+	-
P		↑	

عظم محلي عند $x = 5$ وهي مطلقة

الأكبر حاصل ضرب العددين عند

$$x = 5$$

$$y = 10 - 5 = 5$$

$$P = (5)(5) = 25$$

الاشكال الهندسية

المساحات (مساحات)

11

مساحات المستوي (مساحات)

1. أكبر حجم لسطوانة يمكن وضعها داخل

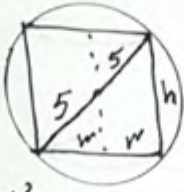
كرة نصف قطرها 5 cm

الحل: V : حجم السطوانة أكبر ما يمكن

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \frac{1}{4} (100 - h^2) h$$

$$V = \frac{\pi}{4} (100h - h^3)$$



$$(2r)^2 + h^2 = 100$$

$$4r^2 + h^2 = 100$$

$$r^2 = \frac{1}{4} (100 - h^2)$$

1. أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمه

داخل دائرة نصف قطرها 5 cm

الحل: A : مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

$$A = xy$$

$$A = x \sqrt{100 - x^2}$$



$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - x^2$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$y = 10 - x$$

2. أكبر حجم مخروط قائم يمكن وضعه

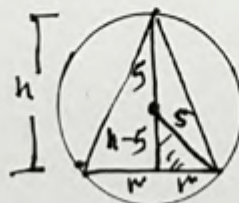
داخل كرة نصف قطرها 5 cm

الحل: V : حجم المخروط أكبر ما يمكن

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (10h - h^2) h$$

$$V = \frac{\pi}{3} (10h^2 - h^3)$$



$$(h-5)^2 + r^2 = 25$$

$$h^2 - 10h + 25 + r^2 = 25$$

$$r^2 = 10h - h^2$$

2. أكبر مساحة مثلث قطبي اضلاعي

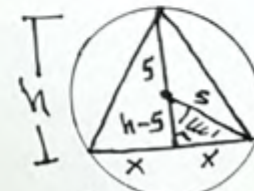
يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 5 cm

الحل: A : مساحة المثلث أكبر ما يمكن

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h)$$

$$A = xh$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{10h - h^2}$$



$$(h-5)^2 + x^2 = 25$$

$$h^2 - 10h + 25 + x^2 = 25$$

$$x^2 = 10h - h^2$$

$$x = \sqrt{10h - h^2}$$

[[2]] سلك طوله 12cm نثي و كون منه مستطيل ، اوجد ابعاد المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن

A

A : مساحة المستطيل اكبر ما يمكن

$$A = x \cdot y$$

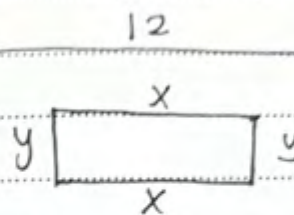
$$A = x(6-x)$$

$$A = 6x - x^2$$

$$A' = 6 - 2x = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$



$$2x + 2y = 12$$

$$x + y = 6$$

$$y = 6 - x$$

$$0 < x < 6$$

x	0	3
A'	+++	---
A		

كبير

عظم عليه وحيد عند $x = 3$ هي نقطة

استمرارية عندنا

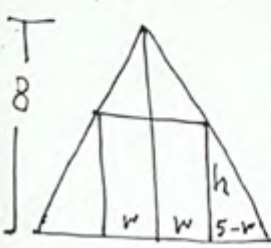
$$x = (3)$$

$$y = 6 - 3 = (3)$$

$$A = (3)(3) = 9$$

[3] أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمه داخل مخروط قائم طول قطره 10 سم وارتفاعه 8 سم
 الحل: $V = \pi r^2 h$

$$V = \pi r^2 \frac{8}{5} (5-r)$$

$$V = \frac{8\pi}{5} (5r^2 - r^3)$$


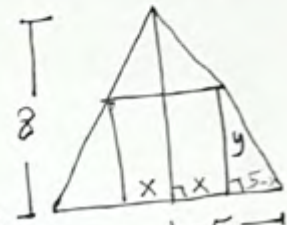
$$\frac{h}{8} = \frac{5-r}{5}$$

$$h = \frac{8}{5} (5-r)$$

[3] أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متطابق أضلاعيه طول قاعدته 10 سم وارتفاعه 8 سم
 الحل: $A = (2x)(y)$

$$A = 2xy$$

$$A = 2x \frac{8}{5} (5-x)$$

$$A = \frac{16}{5} (5x - x^2)$$


$$\frac{y}{8} = \frac{5-x}{5}$$

$$y = \frac{8}{5} (5-x)$$

[11/164] اوجد موقع النقطة على المحور $y = \sqrt{x}$ والتي تكون اقرب ما يمكنه من النقطة $(1.5, 0)$.

الحل: L : المسافة بين (x, y) و $(1.5, 0)$ اقل ما يمكنه

$$L = \sqrt{(x-1.5)^2 + (y-0)^2}$$

$$L = \sqrt{(x-1.5)^2 + y^2}$$

$$L = \sqrt{(x-1.5)^2 + x}$$

$$L^2 = (x-1.5)^2 + x$$

$$2LL' = 2(x-1.5) + 1 = 0$$

$$2x - 3 + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$$

اقرّب مسافة ممكنة عند

$$x=1$$

$$y = \sqrt{1} = 1$$

النقطة $(1, 1)$

نقطة

x	0	1
L	1.5	1

نقطة عند $x=1$ هي نقطة

3] قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 12cm ، يراد قص مربعات متماثلة من اركانها الاربعة و ثني الحواف البارزة لصنع صندوق بلا غطاء ، اوجد اكبر حجم ممكن لهذا الصندوق

V : حجم الصندوق أكبر ما يمكن

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x) x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2) x$$

$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$V' = 144 - 96x + 12x^2 = 0$$

$$12x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 6$$

الحل

$$0 < x < 6$$

خير :

$$V'(x) = -96 + 24x$$

$$V'(6) = -96 + 24(6) = +48 > 0$$

صغير محلي

$$V'(2) = -96 + 24(2) = -48 < 0$$

كبير محلي

عظم محلي وقيمة عند $x = 2$ هي

أكبر حجم للصندوق عند

$$x = 2$$

$$V = (8)(8)(2) = 128$$

[4] يراد صنع صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل ، اوجد اقل كمية من المادة المستخدمة في صنعه ليكون حجمه 32 cm^3

A كمية المادة (المساحة الخارجة ومساحة السطح) اقل ما يمكن

$$A = \text{مساحة القاعدة} + \text{المساحة الجانبية}$$

$$A = 4xy + x^2$$

$$A = 4x \left(\frac{32}{x^2} \right) + x^2$$

$$A = \frac{128}{x} + x^2$$

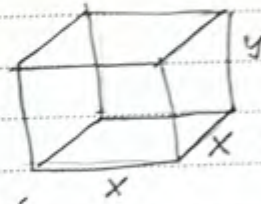
$$A' = -\frac{128}{x^2} + 2x = 0$$

$$2x = \frac{128}{x^2}$$

$$2x^3 = 128$$

$$x^3 = 64$$

$$x = 4$$



$$x^2y = 32$$

$$y = \frac{32}{x^2}$$

x	0	4
A'	- - -	+++
A		

نرى من الجدول ان $x=4$ هي نقطة

اقل كمية من المادة

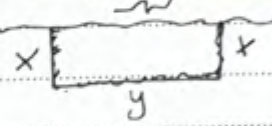
$$x = 4$$

$$y = \frac{32}{16} = 2$$

$$A = 4(4)(2) + 4^2 = 48$$

5 حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $800m^2$ تقع احدى حوافها على ضفة نهر ، يراد احاطتها بسياج من جهاتها الثلاثة و ترك الجهة الواقعة على ضفة النهر دون سياج ، اوجد ابعاد الحديقة ليكون طول السياج المستخدم اقل ما يمكن .

L : طول السياج اقل ما يمكن



$$L = 2x + y$$

$$L = 2x + \frac{800}{x}$$

$$L' = 2 - \frac{800}{x^2} = 0$$

$$2 = \frac{800}{x^2}$$

$$2x^2 = 800$$

$$x^2 = 400$$

$$\boxed{x = 20}$$

$x = 20$
طول الجانب
موازي النهر

x	0	20
L'	-	+
L		

خبر :

صفرى محلي و حيدة عند $x = 20$ و هو المطلوب

اقل طول للسياج عند

$$x = 20 \quad \text{الجانب العمودي للنهر}$$

$$y = \frac{800}{20} = 40 \quad \text{الجانب الموازي للنهر}$$

[6]

حديقة مستطيلة الشكل تقع احدى حوافها على ضفة نهر ، يراد احاطتها بسياج من جهاتها الثلاثة و ترك الجهة الواقعة على ضفة النهر دون سياج ، اوجد ابعاد الحديقة لتكون مساحة الحديقة اكبر ما يمكن اذا كان طول السياج المستخدم 800 m

A : مساحة الحديقة اكبر ما يمكن

$$A = xy$$

$$A = x(800 - 2x)$$

$$A = 800x - 2x^2$$

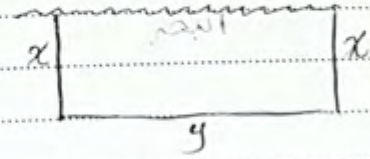
$$A' = 800 - 4x$$

$$A' = 800 - 4x = 0$$

$$4x = 800$$

$$x = \frac{800}{4}$$

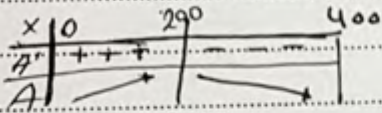
$$x = 200$$



$$2x + y = 800$$

$$y = 800 - 2x$$

$$0 \leq x \leq 400$$



عظمى محلية وحيدة $x = 200$ فهي مطلقة

أكبر مساحة عجمان :

$$x = 200$$

$$y = 800 - 2(200) = 400$$

7] يراد صنع وعاء اسطواناني الشكل قائم بلا غطاء حجمه $24\pi \text{ cm}^3$ ، اوجد ابعاد الوعاء لتكون تكاليف صنعها اقل ما يمكن .

اذا علمت ان كل 1 cm^2 من الجوانب يكلف درهم واحد و ان كل 1 cm^2 من القاعدة يكلف 3 دراهم .

الحل : تكاليف تصنيع الوعاء اقل ما يمكن .

$$C = \text{تكاليف لقاعدة} + \text{تكاليف للجانبين}$$

$$C = 3(\text{مساحة لقاعدة}) + 1(\text{المساحة الجانبية})$$

$$C = 3(\pi r^2) + 1(2\pi rh)$$

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{24}{r^2} \right)$$

$$C = \frac{48\pi}{r} + 3\pi r^2$$

$$C' = -\frac{48\pi}{r^2} + 6\pi r = 0$$

$$6\pi r = \frac{48\pi}{r^2}$$

$$6\pi r^3 = 48\pi$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

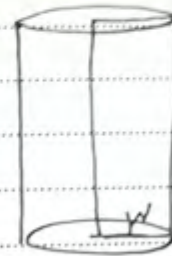
r	0	2
C'	-	+
C		

مفرد محلي ، حيث عند $r=2$ هناك نقطة

اقل تكاليف عند

$$r = 2$$

$$h = \frac{24}{r^2} = 6$$



$$V = 24\pi$$

$$\pi r^2 h = 24\pi$$

$$r^2 h = 24$$

$$h = \frac{24}{r^2}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{24\pi}{\pi r^2} = \frac{24}{r^2}$$

$$A = \text{مساحة الجوانب} + \text{مساحة القاعدة}$$

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh$$

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{24}{r^2} \right)$$

$$C = 3\pi r^2 + \frac{48\pi}{r}$$

$$C = 6\pi r + \frac{48\pi}{r^2} = 0$$

$$r = 2$$

[[8]] في الشكل المجاور $C(x)$ تمثل التكلفة بملايين الدراهم ،

$r(x)$ تمثل الدخل بملايين الدراهم حيث x تمثل

وحدات جهاز الحاسوب المنتجة من شركة ما

بآلاف الوحدات حيث $0 \leq x \leq 11$.

اجب عما يلي :

(1) حدد الفترات التي تحقق فيها الشركة ربحاً .

$(5, 11)$

(2) حدد الفترات التي تحقق فيها الشركة خسارة .

$[0, 5)$

(3) اوجد قيمة تقريبية لمستوى الإنتاج التي تحقق

فيه الشركة ربحية عظمى ؟ وما هذه القيمة ؟ عند $x = 9$

$$P(9) = R(9) - C(9) = 18 - 13 = 5 \text{ مليون}$$

(4) اوجد $C(5)$ ، $r(5)$ وماذا تلاحظ.

$$r(5) = C(5) = 10$$

نقطة تقاطع $P(5) = 0$

(5) اوجد $C(0)$ وما الدلالة عليها.

$$C(0) = 4000000 \text{ مليون}$$

رأس مال افتتاح الشركة

(6) اوجد قيمة تقريبية لمستوى الإنتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية صغرى ؟ وما هذه القيمة ؟

عند $x = 1.5$

$$P(1.5) = R(1.5) - C(1.5) = 3 - 8 = -5 \text{ مليون}$$

تطبيقات اقتصادية على التفاضل :-

$C(x)$: التكلفة الكلية

$W(x)$: الإيراد الكلي

$P(x)$: الربح الكلي

$c(x)$: التكلفة لـ x قطعة

$w(x)$: الإيراد (سعر البيع) لـ x قطعة

$p(x)$: الربح لـ x قطعة

التكلفة - سعر البيع = الربح

$$P(x) = W(x) - C(x)$$

* مستوى الإنتاج x عند القطر

* ربحية عظمى = الربح أكبر ما يمكن = الحساب أكبر ما يمكن
 ربحية صفرى = الربح أقل ما يمكن = الحساب أكبر ما يمكن

ملاحظة هامة: إذا أعطى سعر البيع للقطعة الواحدة أو التكلفة للقطعة الواحدة فالتقريب بـ x للحصول على $c(x)$ أو $w(x)$

* أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق ربحية عظمى؟

$$P(x) = W(x) - C(x) \quad \text{نسبة } P'(x)$$

$$P'(x) = W'(x) - C'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$W'(x) = C'(x)$$

ملاحظة * ربحية عظمى $\leftarrow$
 $P'(x) = 0$
 $W'(x) = C'(x)$

نقطة تعادل $\leftarrow$
 $P(x) = 0$
 $W(x) = C(x)$

* مستوى الإنتاج الذي يخفض التكلفة المتوسطة؟

$$T(x) = \frac{C(x)}{x} \quad \text{نسبة } T'(x)$$

$$T'(x) = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{0}{1}$$

$$x C'(x) - C(x) = 0$$

$$x C'(x) = C(x)$$

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

التكلفة المتوسطة = التكلفة الحدية

9] ينتج مصنع x وحدة يوميا ، بفرض

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

(1) مستوى الانتاج الذي يحقق ربحية عظمى لهذا المصنع

$P(x)$: ربحية عظمى

$$P(x) = r(x) - c(x)$$

$$P(x) = 9x - (x^3 - 6x^2 + 15x)$$

$$P(x) = 9x - x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$P(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$$

$$P'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = 0$$

$$x = 3.4, \quad x = 0.58$$

$$P''(x) = -6x + 12$$

$$P''(0.58) = -6(0.58) + 12 = + > 0$$

منزلة على مرتبطة

$$P''(3.4) = -6(3.4) + 12 = - < 0$$

عظمى محلية ربحية عند $x = 3.4$ من نقطة اكبر ربح يمكن (ربحية عظمى) عند

$$x = 3.4$$

(2) مستوى الانتاج الذي يخفض التكلفة المتوسطة الى اقل قيمة لها

$T(x)$: التكلفة المتوسطة اقل ما يمكن

$$T(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x}{x}$$

$$T(x) = x^2 - 6x + 15$$

$$T'(x) = 2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$$

$$T''(x) = 2$$

$$T''(3) = 2 > 0$$

منزلة محلية ربحية عند $x = 3$ من نقطة اقل تكلفة يمكن تحيكت عند $x = 3$

$$T(3) = 9 - 18 + 15 = 6$$

10] ينتج مصنع x وحدة يوميا بحيث ربحه بألاف الدراهم لمبيع x (بالمنتجات) وحدة يعطى بالعلاقة

$$p(x) = 12x - x^2 - 20 \quad \text{حيث } 0 \leq x \leq 15$$

اوجد :-

(1) مستوى الانتاج الذي يحقق ربحية عظمى

$$p(x) = 12x - x^2 - 20$$

$$p(x) = 12x - x^2 - 20$$

$$p'(x) = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$p''(x) = -2$$

$$p''(6) = -2 < 0$$

$$p(0) =$$

$$p(15) =$$

$$p(6) =$$

عظمى محلياً ربحية عند $x = 6$ فهي نقطة

أكبر ربح (ربحية عظمى عندما $x = 6$)

مستوى الإنتاج 600

(2) مستوى الانتاج الذي يكون الربح فيه صفراً (نقطة التعادل)

$$p(x) = 0$$

$$p(x) = c(x)$$

$$p(x) = 12x - x^2 - 20 = 0$$

$$-x^2 + 12x - 20 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 10$$

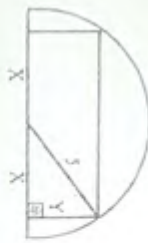
مستوى الإنتاج 200 و 1000

تطبيقات عملية على القيم القصوى

2
أوجد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 5 cm بحيث أحد بعديه ينطبق على قطر الدائرة

الحل : A : مساحة المستطيل الأكبر ما يمكن

$$\begin{aligned} A &= 2xy \\ A &= 2x\sqrt{25-x^2} \\ A' &= 2\sqrt{25-x^2} + 2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sqrt{25-x^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} \\ 25-x^2 &= x^2 \\ 2x^2 &= 25 \\ x^2 &= \frac{25}{2} \\ x &= \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{مرفوضة}$$

نختبر

x	$\frac{5}{\sqrt{2}}$
A'	+++++
A	----- ↗ ↘

يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ فهي مطلقة

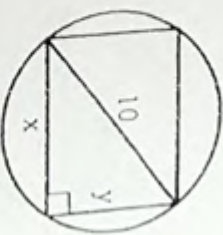
∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما :

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\ A &= 2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 25 \end{aligned}$$

1
أوجد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 5 cm

الحل : A : مساحة المستطيل الأكبر ما يمكن

$$\begin{aligned} A &= xy \\ A &= x\sqrt{100-x^2} \\ A' &= \sqrt{100-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}\right) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sqrt{100-x^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \\ 100-x^2 &= x^2 \\ 2x^2 &= 100 \\ x^2 &= 50 \\ x &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$x = -\sqrt{50} \quad \text{مرفوضة}$$

نختبر

x	0	$\sqrt{50}$
A'	+++++	-----
A	↗ ↘	-----

يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \sqrt{50}$ فهي مطلقة

∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما :

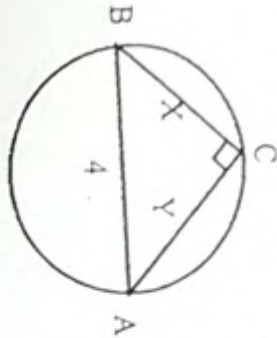
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{50} \\ y &= \sqrt{100-50} = \sqrt{50} \\ A &= \sqrt{50}\sqrt{50} = 50 \end{aligned}$$

مركز ابو ذر العقفاري

نظريات عملية على التتبع القوي

AB قطر في دائرة طوله 4 cm تتحرك النقطة C على محيط الدائرة ، اوجد قياس الزاوية ABC لتكون مساحة المثلث ABC اكبر ما يمكن

الحل : A : مساحة المثلث اكبر ما يمكن



$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$$

$$A' = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{1}{2}x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{16-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$16-x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 16$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16 - x^2$$

$$y = \sqrt{16-x^2}$$

x	0	$\sqrt{8}$
A'	+++++	
A		+++++

نختار:

يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \sqrt{8}$ فهي مطلقة
الأكبر مساحة المثلث عندما :

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan B = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$ABC = 45^\circ$$

مدرسة النهضة الإسلامية بن بشير للتعليم الثانوي (معلم المادة عبد جبار)

دائرة نصف قطرها 6cm رسم داخل نصفها مثلث قاعدته قطر الدائرة و رأسه على محيط الدائرة ، اوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث

الحل : A : مساحة المثلث اكبر ما يمكن



$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{144-x^2}$$

$$A' = \frac{1}{2}\sqrt{144-x^2} + \frac{1}{2}x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{144-x^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{144-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{144-x^2}}$$

$$144-x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 144$$

$$x^2 = 72$$

$$x = \sqrt{72}$$

$$x^2 + y^2 = 144$$

$$y^2 = 144 - x^2$$

$$y = \sqrt{144-x^2}$$

x	0	$\sqrt{72}$
A'	+++++	
A		+++++

نختار:

يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \sqrt{72}$ فهي مطلقة
الأكبر مساحة المثلث عندما :

$$x = \sqrt{72}$$

$$y = \sqrt{144-72} = \sqrt{72}$$

$$A = \frac{1}{2}(\sqrt{72})(\sqrt{72}) = 36$$

تطبيقات عملية على القيم القصوى

نافذة على شكل مستطيل بطوله نصف دائرة محيطها 6 m إذا كان الزجاج الذي على شكل نصف الدائرة ملونا و يسمح بإدخال نصف كمية الضوء التي يسمح بإدخالها الزجاج العادي الذي يكون الجزء المتبقى من النافذة ، جد ابعاد المنطقة المستطيلة للنافذة بحيث تسمح بإدخال اكبر كمية من الضوء .



الحل : T : كمية الضوء اكبر ما يمكن

T ضوء نصف الدائرة + ضوء المستطيل =

$$T = 1 + \frac{1}{2} (\text{مساحة الدائرة}) + \frac{1}{2} (\text{مساحة المستطيل})$$

$$T = xy + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} x \right)^2 \right)$$

$$T = xy + \frac{\pi}{16} x^2$$

$$T' = x \left(\frac{12 - \pi x - 2x}{4} \right) + \frac{\pi}{16} x^2$$

$$T' = \frac{1}{4} (12x - \pi x^2 - 2x^2) + \frac{\pi}{16} x^2$$

$$T' = \frac{1}{4} (12 - 2\pi x - 4x) + \frac{\pi}{8} x = 0$$

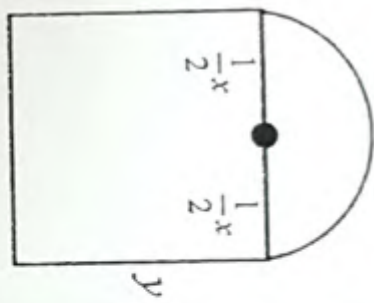
$$\frac{24 - 8x - 4\pi x + \pi x}{8} = 0$$

$$24 = 8x + 3\pi x$$

$$24 = (8 + 3\pi)x \Rightarrow x = \frac{24}{8 + 3\pi}$$

$$x = \frac{24}{8 + 3\pi}$$

$$y = \frac{12 + 3\pi}{8 + 3\pi}$$



$$\begin{aligned} x + 2y + \frac{1}{2} \pi x &= 6 \\ 2x + 4y + \pi x &= 12 \\ 4y &= 12 - 2x - \pi x \\ y &= \frac{12 - 2x - \pi x}{4} \end{aligned}$$

$$T'' = \frac{-8 - 3\pi}{8} < 0$$

عظمى محلية وحيدة عند فهي مطلقة

مثبت قائم الزاوية طول وتره $4\sqrt{3} \text{ cm}$ دار دورة كاملة حول احد ضلعي القائمة فتمثل مجسم مخروطي الشكل ، اوجد اكبر حجم ممكن له



نحل : V : حجم المخروط اكبر ما يمكن

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (48 - h^2) h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (48h - h^3)$$

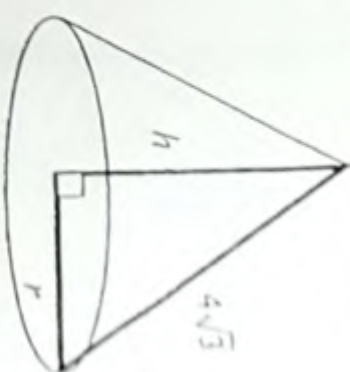
$$V' = \frac{1}{3} \pi (48 - 3h^2) = 0$$

$$(48 - 3h^2) = 0$$

$$48 = 3h^2$$

$$h^2 = 16$$

$$h = 4$$



$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 48$$

$$r^2 = 48 - h^2$$

h	0	4
V'	++++	-----
V		

يرجع قيمة عظمى محلية وحيدة عند $h = 4$ فهي مطلقة

$$h = 4$$

$$r = \sqrt{48 - 16} = 32$$

$$V = \frac{\pi}{3} (4)(32) = \frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3$$

تطبيقات عملية على القيمة القصوى

يبيع مصنع للألعاب x قطعة من منتجاته اسبقيا بسعر القطعة الواحدة $(50x + 2000)$ ، فإذا كانت تكلفة إنتاج x من القطع هي $c(x)$ ،
 درهما ما يستوي الإنتاج للمصنع لبحق ، و بحبة عظمى ،

الحل : p : ربح المصنع اكبر ما يمكن

$$p(x) = r(x) - c(x)$$

$$p(x) = x(200 - 0.1x) - (50x + 2000)$$

$$p(x) = 200x - 0.1x^2 - 50x - 2000$$

$$p(x) = 150x - 0.1x^2 - 2000$$

$$p'(x) = 150 - 0.2x = 0$$

$$x = 750$$

$$p''(x) = -0.2$$

$$p''(750) = -0.2 < 0$$

اكبر ربح ممكن عندما عدد القطع $x = 750$

نختار :-

تطبيقات عملية على القيمة القصوى

سلك طوله $100m$ قطع الى جزئين، صنع من احدهما دائرة و من الاخر مربع او جد طول كل من الجزئين ليكون مجموع مساحتي الدائرة و المربع اصغر ما يمكن .

الحل : A : (مساحة الدائرة + مساحة المربع) اصغر ما يمكن

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$A = x^2 + \pi \left(\frac{100 - 4x}{2\pi} \right)^2$$

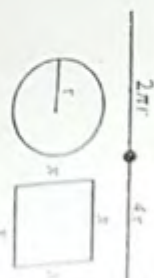
$$A = x^2 + \pi \frac{(100 - 4x)^2}{4\pi^2}$$

$$A = x^2 + \frac{1}{4\pi} (100 - 4x)^2$$

$$A' = 2x + \frac{1}{4\pi} 2(100 - 4x)(-4) = 0$$

$$\pi x - 100 + 4x = 0 \Rightarrow x(\pi + 4) = 100$$

$$x = \frac{100}{\pi + 4} \approx 14$$



محيط الدائرة + محيط المربع = 100

$$4x + 2\pi r = 100$$

$$2\pi r = 100 - 4x$$

$$r = \frac{100 - 4x}{2\pi}$$

x	0	14
A'		+++++
A		

نختار :-

يرجى قيمة صغيرة محلياً وحيدة عند $x = 14$ فهي محلياً

اقل مساحة ممكنة للمربع و الدائرة عندما

$$14 \times 4 = 56cm = (\text{المربع})$$

$$44cm = (\text{الدائرة})$$

تعليقات عملية على القيم القصوى

طريق حول مدينة معادلته في مستوى الإحداثيات $x^2 + 2y^2 = 10$ ، النقطة $(1, 0)$ تمثل موقع مستشفى ، أوجد إحداثيات النقط على الطريق التي يمكن ان توضع عندها محطة للمحروقات لتكون اقرب ما يمكن من المستشفى .

الحل : S : المسافة بين المستشفى و المحطة اقل ما يمكن

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2}$$

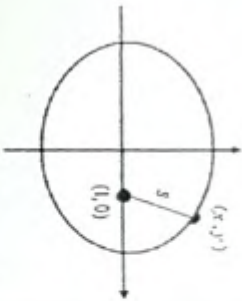
$$S = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 5 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6}$$

$$S' = \frac{x - 2}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6}} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$



$$x^2 + 2y^2 = 10$$

$$2y^2 = 10 - x^2$$

$$y^2 = 5 - \frac{1}{2}x^2$$

x	2
s'	-----
s	-----

نختار :

يوجد قيمة صغرى محلية وحيدة عند $x = 2$ فهي محلية ، و تكون عند $y = \pm \sqrt{3}$ عند $y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}$ ، $(2, \sqrt{3})$ ، $(2, -\sqrt{3})$ اقرب موقع المحطة من المستشفى فالنقطتين

مدرسة المتخصص من مشير للتعليم الثانوي (معلم المادة عبد صالح)

سنت قاتم الزاوية كما في الشكل المجاور طول وتره 10 cm اوجد قياس الزاوية θ لتكون مساحة المثلث اكبر ما يمكن

الحل : A : مساحة المثلث اكبر ما يمكن

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2} \times 10 \sin \theta \times 10 \cos \theta$$

$$A = 25 \sin 2\theta$$

$$A' = 50 \cos 2\theta = 0$$

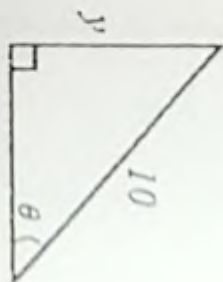
$$\cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A'' = -100 \sin 2\theta$$

$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -100 \sin \frac{\pi}{2} = -100 < 0$$



$$\sin \theta = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cos \theta$$

يوجد قيمة عظمى وحيدة عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ فهي محلية

اكبر مساحة ممكنة للمثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$

حقل نط في البحر في النقطة A على بعد 12 km من الساحل في مواجهة النقطة B على الساحل ، و تريد شركة مد انبوب نط من الحقل الى مصفاة بترول في النقطة C التي تبعد عن B بمقدار 20 km فإذا كان على الشركة مد الانوب الى النقطة D على الساحل ثم مده على اليابس ليوصل الى المصفاة في النقطة C ، عين موقع النقطة D لتكون تكاليف مد الانوب اقل ما يمكن علما بان تكلفة مد الكلور متر الواحد في الماء 50000 درهم و على اليابس 30000 درهم .

12

الحل : C : التكاليف (التكاليف في الماء + التكاليف في اليابس) اقل ما يمكن

$$C = 50000y + 30000(20 - x)$$

$$C = 50000\sqrt{x^2 + 144} + 30000(20 - x)$$

$$C' = 50000 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} - 30000 = 0$$

$$2\sqrt{x^2 + 144}$$

$$\frac{50000x}{\sqrt{x^2 + 144}} = 30000$$

$$\sqrt{x^2 + 144}$$

$$5x = 3\sqrt{x^2 + 144}$$

$$25x^2 = 9(x^2 + 144)$$

$$16x^2 = 1296$$

$$x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$$

x	9
C'	
C	

نختار :

قيمة صغرى محلية وحيدة عندما $x = 9$ فهي مطلقة

اقل تكلفة ممكنة عندما تكون النقطة D على بعد 9 km من B

مدرسة النعمان بن بشير للتعليم الثانوي (معلم المادة عبد صالح)

يقف رجل عند نقطة A على احدى ضفتي بحيرة جانبيها خطين متوازيين في مواجهة النقطة B على الضفة الاخرى ، و يريد ان يصل الى النقطة C في الضفة الاخرى و التي تبعد عن B بمقدار 6 mil فإذا كان عليه ان يعبر بحيرة في قارب الى النقطة D على الضفة الاخرى بسرعة 2 mph ثم يسير على قدميه ليصل الى C بسرعة 4 mph ، عين موقع النقطة D ليكون زمن الوصول اقل ما يمكن . علما بان $AB = 5$ mil .

الحل : T : الزمن (زمن الإبحار + زمن اليابس) اقل ما يمكن الزمن على اليابس + الزمن للإبحار في القارب T =

$$T = \frac{y}{2} + \frac{6-x}{4}$$

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{2} + \frac{6-x}{4}$$

$$T' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$T' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{1}{4}$$

$$4x = 2\sqrt{x^2 + 25}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 25}$$

$$4x^2 = x^2 + 25$$

$$3x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

اقل زمن ممكن عندما تكون النقطة D على بعد $\frac{5}{\sqrt{3}}$ mil من B

x	$\frac{5}{\sqrt{3}}$
T'	
T	

نختار :

قيمة صغرى محلية وحيدة عندما $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$ فهي مطلقة

14

لوحه مستطيلة الشكل مساحته 32 cm^2 يراد طباعة اعلان داخلها بحيث تترك هوامش من اعلى و من اسفل بمقدار 1 cm و تترك هوامش من الجانبين بمقدار $\frac{1}{2} \text{ cm}$ من كل جانب من اليمين و من اليسار ، اوجد ابعاد اللوحه لتكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن

الحل : A : المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن

$$A = (x-1)(y-2)$$

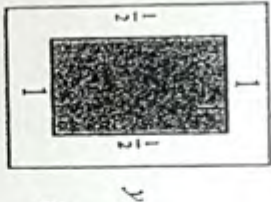
$$A = (x-1)\left(\frac{32}{x}-2\right)$$

$$A = 32 - 2x - \frac{32}{x} + 2$$

$$A' = -2 + \frac{32}{x^2} = 0$$

$$2 = \frac{32}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$y = \frac{32}{x}$$



نختار :

$$A'' = -\frac{64}{x^3}$$

$$A''(4) = -\frac{64}{4^3} = -1 < 0$$

عظمى محلية وحيدة عند $x=4$ فهي مطلقة

$x = 4$
 $y = 8$
اكبر مساحة مطبوعة عندما ابعاد اللوحه

13

لوحه مستطيلة الشكل يراد طباعة اعلان مساحته 50 cm^2 داخلها بحيث تترك هوامش من اعلى و من اسفل بمقدار 4 cm و تترك هوامش من الجانبين بمقدار 2 cm من كل جانب من اليمين و من اليسار ، اوجد ابعاد اللوحه لتكون مساحتها اقل ما يمكن

الحل : A : مساحة اللوحه اقل ما يمكن

$$A = (x+4)(y+8)$$

$$A = (x+4)\left(\frac{50}{x}+8\right)$$

$$A = 50 + 8x + \frac{200}{x} + 32$$

$$A' = 8 - \frac{200}{x^2} = 0$$

$$8 = \frac{200}{x^2} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

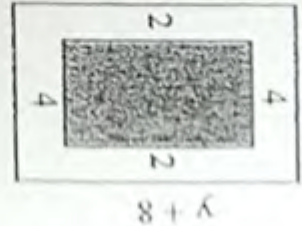
$$y = \frac{50}{x} = 10$$

$$A'' = \frac{400}{x^3}$$

$$A''(5) = \frac{400}{5^3} > 0$$

صغرى محلية وحيدة عند $x=5$ فهي مطلقة

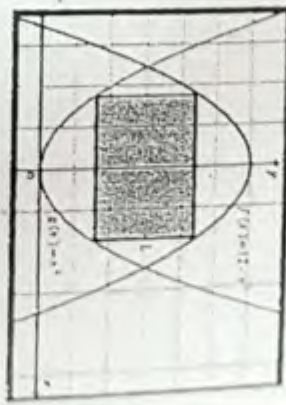
$x + 4 = 5 + 4 = 9$
 $y + 8 = 10 + 8 = 18$
اقل مساحة للوحه عندما ابعاد اللوحه



نظريات على القيم القصوى

لوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث تقع رؤوسه على المنحنيين
 $f(x) = 12 - x^2$ و $g(x) = x^2$ وتكون أضلاعه موازية للمحورين

الحل: A : مساحة المستطيل أكبر ما يمكن



$$\begin{aligned} A &= 2xL \\ A &= 2x(12 - 2x^2) \\ A &= 24x - 4x^3 \\ A' &= 24 - 12x^2 = 0 \\ 24 &= 12x^2 \\ 2 &= x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ A'' &= -24x \\ A''(\sqrt{2}) &= -24\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= (12 - x^2) - (x^2) \\ L &= 12 - 2x^2 \end{aligned}$$

نختار:

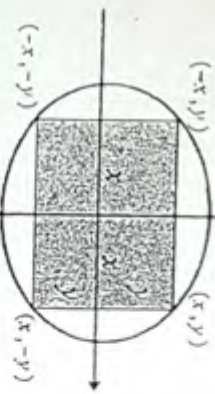
يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \sqrt{2}$ فهي مطلقة
 أكبر مساحة المستطيل عندما
 $x = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} L &= 12 - 2(\sqrt{2})^2 = 8 \\ A &= (2\sqrt{2})(8) = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

16

لوجد أكبر مساحة ممكنة مستطيل يمكن رسمه داخل القطع الناقص الذي
 معادلته $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ وتكون أضلاعه موازية للمحورين

الحل: A : مساحة المستطيل أكبر ما يمكن



$$\begin{aligned} A &= 4xy \\ A &= 4x \left(\frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2} \right) \\ A &= \frac{12}{5} x \sqrt{25 - x^2} \\ A &= \frac{12}{5} \sqrt{25x^2 - x^4} \\ A' &= \frac{12}{5} \left(\frac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}} \right) = 0 \\ 50x - 4x^3 &= 0 \\ x(50 - 4x^2) &= 0 \\ x &= \frac{\sqrt{50}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$y = \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

x	0	$\sqrt{50}/2$
A'	+++++	
A	→	→

نختار:

يوجد قيمة عظمى محلية وحيدة عند $x = \frac{\sqrt{50}}{2}$ فهي مطلقة
 أكبر مساحة ممكنة المستطيل عندما
 $x = \frac{\sqrt{50}}{2}$

$$A = 4 \times \frac{\sqrt{50}}{2} \times \frac{3}{5} \times \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = 30 \text{ cm}^2$$

المعدلات الزمنية: هي معادلات تكون الاشتقاق فيها زمنياً
بالنسبة للزمن t ، وفي كل عادة في السؤال
ما معدّل التغير، ما سرعة التغير... عند نقطة

خطوات الحل:-
① نقرأ المسألة ونرسم شكلاً توضيحياً، ونحدد عليه المتغيرات (بارز)

والثوابت

② نكون علاقة بين هذه المتغيرات والثوابت

③ نشتق زمنياً بالنسبة للزمن t

④ نعوّن بالمعطيات ونجد المطلوب

ملاحظة:-
① المساحة تزيد بمعدل $2 \text{ cm}^2/\text{sec} \leftarrow \frac{dA}{dt} = +2$

الحجم يتناقص بمعدل $2 \text{ cm}^3/\text{sec} \leftarrow \frac{dV}{dt} = -2$

② التعليق اللفظي مع الجواب يدرج في الإمكان

مثال: اوجد $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + t^2) = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2t$

② $\frac{d}{dt}(5xy^2) = (5 \frac{dx}{dt}) y^2 + (5x)(2y \frac{dy}{dt})$

③ $\frac{d}{dt}(\pi r^2 h) = (2\pi r \frac{dr}{dt})h + (\pi r^2) \frac{dh}{dt}$

④ $\frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$

⑤ $\frac{d}{dt}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = -\frac{1}{R_1^2} \frac{dR_1}{dt} + -\frac{1}{R_2^2} \frac{dR_2}{dt}$

⑥ $\frac{d}{dt}(\tan \theta) = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$

المعدلات الزمنية

- 1] سلم طول 10^m يستند على حائط عمودي على أرض أفقية ، بدأ أسفل السلم بالانزلاق على الأرض مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/sec ، في اللحظة التي يبعد فيها أسفل السلم عن الحائط 8 m اوجد :
- (1) سرعة نزول أعلى السلم
- (2) معدل التغير في مساحة المثلث المحصور بين الأرض و السلم و الحائط
- (3) معدل التغير في زاوية ميل السلم على الأرض

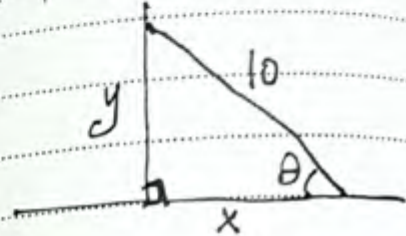
$$\frac{dx}{dt} = +2, \quad x = 8$$

$$\textcircled{1} \frac{dy}{dt} = ? \quad x^2 + y^2 = 100$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$8(2) + (6) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100, \quad x = 8 \\ 8^2 + y^2 = 100 \end{array} \right.$$

$$y^2 = 36$$

$$(y = 6)$$

أي السلم يتناقص بمعدل $\frac{8}{3}$ m/sec

$$\textcircled{2} \frac{dA}{dt} = ? \quad A = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} y + \frac{1}{2} x \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(2)(6) + \frac{1}{2}(8)\left(-\frac{8}{3}\right) =$$

المساحة بمعدل $\frac{8}{3}$ m²/sec

$$\textcircled{3} \frac{d\theta}{dt} = ? \quad \cos \theta = \frac{x}{10}$$

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dx}{dt}$$

$$-\left(\frac{6}{10}\right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}(2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{10}, \quad x = 8 \\ \cos \theta = \frac{8}{10} \end{array} \right.$$

$$\cos \theta = \frac{8}{10}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = 36.87^\circ$$

$$\sin \theta = 0.6$$

منطقة عجم ————— ان التعليمية / مركز ابو ذر الغفاري (معلم المادة عبد صالح)

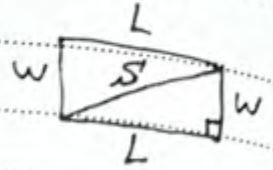
زاوية ميل السلم θ لا تتناقص بمعدل $\frac{1}{3}$ rad/sec

مباشرة ١ - مستطيل يزيد طوله بمعدل 2 cm/sec ، بينما يتناقص عرضه بمعدل 1 cm/sec في اللحظة التي فيها طوله 12 cm و عرضه 5 cm اوجد :

- (1) معدل التغير في مساحة المستطيل
- (2) معدل التغير في محيط المستطيل
- (3) معدل التغير في طول قطر المستطيل

$$\frac{dl}{dt} = +2, \quad \frac{dw}{dt} = -1$$

$$L = 12, \quad w = 5$$



نستعمل

$$\textcircled{1} \frac{dA}{dt} = ?? \quad A = Lw$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dL}{dt} w + L \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2)(5) + (12)(-1)$$

$$\frac{dA}{dt} = -2$$

المساحة تتناقص بمعدل $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$

$$\textcircled{2} \frac{dp}{dt} = ??$$

$$p = 2L + 2w$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \frac{dL}{dt} + 2 \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 2(2) + 2(-1) = 2$$

المحيط يزيد بمعدل 2 cm/sec

$$\textcircled{3} \frac{ds}{dt} = ??$$

$$s^2 = L^2 + w^2$$

$$2s \frac{ds}{dt} = 2L \frac{dL}{dt} + 2w \frac{dw}{dt}$$

$$(13) \frac{ds}{dt} = (12)(2) + (5)(-1)$$

$$13 \frac{ds}{dt} = 19$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{19}{13}$$

$$\frac{19}{13}$$

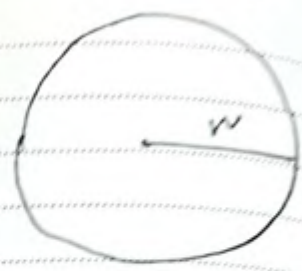
طول القطر يزيد بمعدل $\frac{19}{13} \text{ cm/sec}$

بالون كروي يتمزق منه الهواء بمعدل $1000\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$ ، اوجد معدل التغير في مساحة سطح البالون في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر البالون 10 cm

$$\frac{dv}{dt} = -1000\pi \quad , \quad \frac{dA}{dt} = ? \quad , \quad r = 10$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-1000\pi = 4\pi(10)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(10)(-2.5)$$

$$-1000\pi = 400\pi \frac{dr}{dt}$$

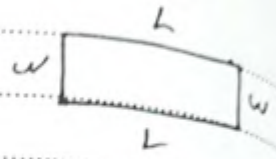
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1000}{400} = -2.5$$

$$\frac{dA}{dt} = -200\pi$$

المعدل $200\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$ انحسار

4] مستطيل يتغير بعديه مع بقاء مساحته ثابتة في المقدار ، إذا علمت أن طوله يزيد بمعدل 2 m/sec ، أوجد معدل التغير في عرض المستطيل في اللحظة التي فيها طول المستطيل 10 m و عرضه 8 m

$\frac{dA}{dt} = 0$ ← $L^2 = A$
 $\frac{dL}{dt} = +2$, $\frac{dw}{dt} = ?$, $L = 10$, $w = 8$



$A = L w$

$\frac{dA}{dt} = \frac{dL}{dt} w + L \frac{dw}{dt}$
 $0 = (2)(8) + 10 \frac{dw}{dt}$

$\frac{dw}{dt} = \frac{-16}{10} = -1.6$

العرض يتناقص بمعدل 1.6 m/sec

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} , \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} , \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

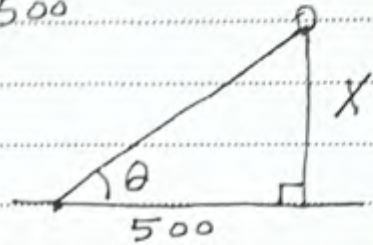
منطقة عجمان التعليمية / مركز ابو ذر الفخاري (معلم المادة عبد صالح)

الترتيب :-

[[5]] يرتفع بالون للأعلى بسرعة 104 m/min ، جلس رجل على ارض افقية يراقب البالون من على بعد 500 m عن اسفل البالون ، اوجد معدل التغير في زاوية ارتفاع البالون في اللحظة التي فيها البالون على ارتفاع 500 m

$$\frac{dx}{dt} = +104 , \frac{d\theta}{dt} = ?? , x = 500$$

$$\tan \theta = \frac{x}{500}$$



$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$(\sqrt{2})^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500} (104)$$

$$2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{104}{500}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

زيادة ارتفاع البالون تزداد بمعدل 0.104 rad/sec

$$\tan \theta = \frac{x}{500} , x = 500$$

$$\tan \theta = \frac{500}{500} = 1$$

$$\theta = 45^\circ \quad \sqrt{8}$$

$$\sec 45 = \frac{1}{\cos 45} = \sqrt{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + (1)^2 = \sec^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta = 2$$

$$y = 500$$

$$x = 500$$

$$\frac{dy}{dt} = +104$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{500}{500} \right) = 45^\circ$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500} \frac{dy}{dt}$$

مثال: طريقين مستقيمين يلتقيان في النقطة O ، الزاوية المحصورة بينهما 60° ، يوجد بيت على أحد الطريقين على بعد 80 km من النقطة O ، انطلق رجل على دراجة من النقطة O على الطريق الثاني لسريته 30 km/h ، اوجد معدل التغير في بعد الرجل عن البيت بعد ساعتين من انطلاقه الرجل .

$$\frac{ds}{dt} = ? , \frac{dx}{dt} = 30$$

بعد ساعتين .

$$S^2 = x^2 + 80^2 - 2(80)x \cos 60^\circ$$

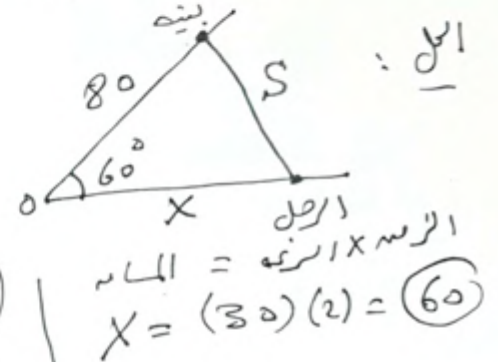
$$S^2 = x^2 + 6400 - 2(80)x \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S^2 = x^2 + 6400 - 80x$$

$$S = \sqrt{x^2 - 80x + 6400}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2x - 80) \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 - 80x + 6400}} =$$

المتغير

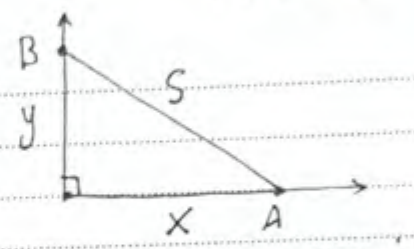


6] اتجهت السفينة A باتجاه الشرق بسرعة 20 mil/h و بعد ساعة من انطلاق السفينة A تحركت السفينة B باتجاه الشمال بسرعة 40 mil/h ، اوجد معدل التغير في البعد بين السفينتين بعد ساعتين من انطلاق السفينة الثانية B

$$\frac{dx}{dt} = +20 \quad \frac{dy}{dt} = +40$$

$$\frac{ds}{dt} = ? \quad \text{بعد ساعتين من حركة B}$$

$$s^2 = x^2 + y^2$$



$$2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$(100) \frac{ds}{dt} = (60)(20) + (80)(40)$$

$$\frac{ds}{dt} = 44$$

الزمن x السريره = المسافه

$$\text{سريره B} = 2$$

$$\text{سريره A} = 1 + 2 = 3$$

$$x = 20 \times 3 = 60$$

$$y = 40 \times 2 = 80$$

$$s^2 = x^2 + y^2$$

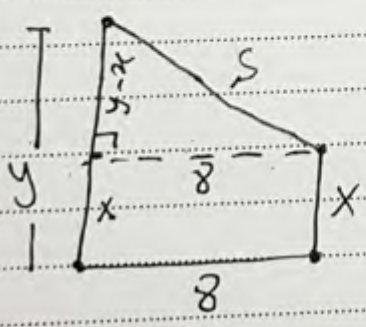
$$s^2 = 60^2 + 80^2$$

$$s = 100$$

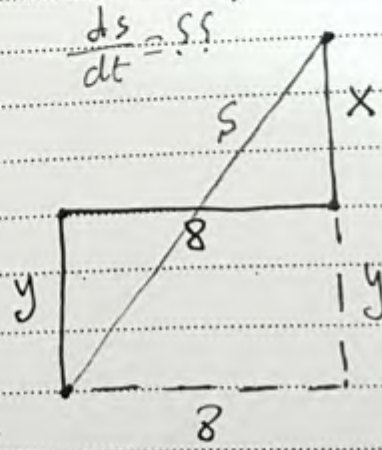
المسافه بين السفينتين تزيد بمعدل 44 mil/h

~~طريقه اخرى~~

افكار اخرى



$$s^2 = (y-8)^2 + 8^2$$



$$s^2 = (x+y)^2 + 8^2$$

$$2s \frac{ds}{dt} = 2(x+y) \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right)$$

مسائل السائل حية وعاء :-

الحجم $V =$ حجم السائل .

وعاء اسطوانى : نصف القطر ثابته والارتفاع متغير

وعاء مخروطى : نصف القطر متغير والارتفاع متغير

بركة : شكل متوازى مستطيلات : البعاد القاعدة ثابته والارتفاع متغير

ملاحظة : حية مسائل السائل حية مخروط ارضى وارضى اقصى

لفضل قبل الاشتقاق استبدال المتغير غير المطلوب

ومن بعض هذه معلومات في السوال

- [[7]] وعاء اسطواني الشكل قائم طول نصف قطر قاعدته 5 cm ، ينسكب فيه الماء بمعدل $75\text{ cm}^3/\text{min}$
- (1) اوجد معدل التغير في ارتفاع الماء في الوعاء
- (2) اذا علمت ان الوعاء امتلأ بعد 12 دقيقة اوجد حجم الوعاء

$$\frac{dV}{dt} = +75 \quad , \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

$$V = \pi (5)^2 h$$

$$V = 25\pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi \frac{dh}{dt}$$

$$75 = 25\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \left(\frac{3}{\pi}\right)$$

العلية

منطقة

②

$$S = \frac{dS}{dt} \times t$$

$$A = \frac{dA}{dt} \times t$$

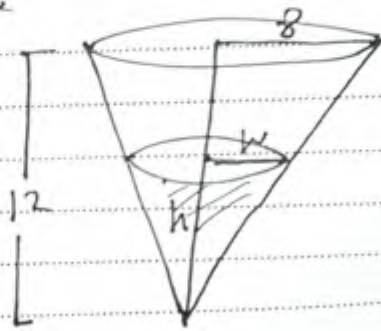
$$V = \frac{dV}{dt} \times t$$

$$V = (75)(12) = 900$$

[8]

خزان للماء مخروطي الشكل قائم الزاوية رأسه للأسفل ، نصف قطر الوعاء 8m و ارتفاعه 12m يتسرب منه الماء بمعدل $80\pi m^3/hr$ ، اوجد معدل التغير في ارتفاع الماء في الخزان في اللحظة التي يكون فيها الماء على عمق يساوي نصف ارتفاع الخزان .

$$\frac{dV}{dt} = -80\pi \quad , \quad \frac{dh}{dt} = ? \quad , \quad h = 6$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{4\pi}{27} h^3$$

نسبة

$$\frac{r}{8} = \frac{h}{12}$$

$$r = \frac{8}{12} h = \frac{2}{3} h$$

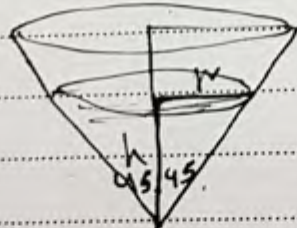
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-80\pi = \frac{4\pi}{27} (6)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -5$$

الماء ينخفض بمعدل 5 m/h

امكنا ايضا عليه : بدك الارتفاع 12 ، نصف القطر 8 ،
المحيط زاوية رأس المخروط 90°



$$\tan 45 = \frac{r}{h}$$

$$1 = \frac{r}{h}$$

$$h = r$$

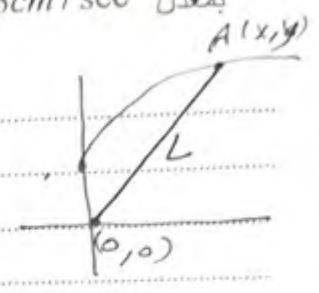
$$\text{الارتفاع} = \frac{3}{5} \text{القطر}$$

$$2r = \frac{3}{5} h$$

$$r = \frac{3}{10} h$$

9

تتحرك النقطة $A(x, y)$ على منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ إذا علمت ان الاحداثي السيني يزيد بمعدل 3 cm/sec اوجد معدل التغير في بعد النقطة A عن نقطة الاصل في اللحظة التي تكون $x = 2$



$$\frac{dx}{dt} = +3, \quad \frac{dL}{dt} = ? , \quad x = 2$$

$$L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{كأن} \quad y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$L = \sqrt{x^2 + x^2 + 1}$$

$$L = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2(2)(3)}{\sqrt{9}} = 4$$

الاجابة

$$L = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أو حرك

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x = 2$$

$$y = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{(2)(3) + \sqrt{5}(\frac{6}{\sqrt{5}})}{\sqrt{4 + 5}}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(3)}{\sqrt{5}}$$

مدرس المادة : عبد صالح

$$1 \quad A = \pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$2 \quad S = 4\pi r^2 \rightarrow \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$3 \quad (i) P = RI^2$$

$$(b) \frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} I^2 + 2RI \frac{dI}{dt}$$

$$(\rightarrow) 0 = \frac{dR}{dt} I^2 + 2RI \frac{dI}{dt}$$

$$4 \quad \frac{dS}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$5 \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} (b \sin \theta \frac{da}{dt} + a \sin \theta \frac{db}{dt} + ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt})$$

$$6 \quad \frac{dr}{dt} = 0.01, \quad r = 50$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(0.01)(50) = \pi \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

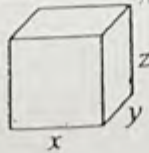
المساحة تزداد بمعدل $\pi \text{ cm}^2 / \text{sec}$ 

$$7 \quad (i) V = xyz$$

$$\frac{dV}{dt} = yz \frac{dx}{dt} + xz \frac{dy}{dt} + xy \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = (3)(2)(1) + (4)(2)(-2) + (4)(3)(1)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ cm}^3 / \text{sec}$$

الحجم يزداد بمعدل $2 \text{ cm}^3 / \text{sec}$ 

$$(b) A = 2(xy + xz + yz)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2(y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} + x \frac{dz}{dt} + z \frac{dx}{dt} + y \frac{dz}{dt} + z \frac{dy}{dt})$$

$$\frac{dA}{dt} = 2((3)(1) + (4)(-2) + (4)(1) + (2)(1) + (3)(1) + (2)(-2))$$

$$\frac{dA}{dt} = 0 \text{ m}^2 / \text{sec}$$

معدل التغير المساحة هو $0 \text{ cm}^2 / \text{sec}$

$$(\rightarrow) \frac{dS}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2(4)(1) + 2(3)(-2) + 2(2)(1)}{2\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{29}} = 0 \text{ m / sec}$$

معدل التغير في طول القطر 0 m / sec

$$8 \quad s = 500 \text{ ft}, \quad \frac{dx}{dt} = 25 \text{ ft / sec}, \quad \frac{ds}{dt} = ??$$

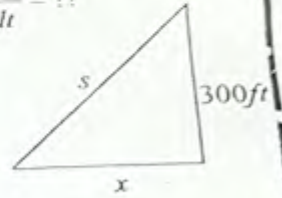
$$x^2 + 90000 = s^2$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2s \frac{ds}{dt}$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2s \frac{ds}{dt}$$

$$2(400)(25) = 2(500) \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = 20 \text{ ft / sec}$$

يتحرك الخيط بسرعة 20 ft / sec 

$$s = 500 \text{ ft}, \quad x^2 + 90000 = s^2$$

$$x^2 + 90000 = (500)^2$$

$$x^2 = 160000$$

$$x = 400$$

$$9 \quad (i) V = \frac{\pi}{3} y^2 (3(13) - y) = 13\pi y^2 - \frac{\pi}{3} y^3$$

$$\frac{dV}{dt} = (26\pi y - \pi y^2) \frac{dy}{dt}$$

$$-6 = (26\pi(8) - \pi(8)^2) \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{24\pi} \text{ cm / min}$$

$$(b) r^2 + (13 - y)^2 = 13^2 \rightarrow r = \sqrt{26y - y^2}$$

$$(\rightarrow) \frac{dr}{dt} = \frac{(26 - 2y) \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{26y - y^2}} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{(26 - 2(8))(\frac{-1}{24\pi})}{2\sqrt{26(8) - (8)^2}} = \frac{-5}{288} \text{ m / min}$$

$$10 \quad \text{المطلوب إثبات أن } \frac{dr}{dt} = \text{ثابت} \text{ و حيث أن}$$

$$\frac{dV}{dt} = ls = l(4\pi r^2), \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$l(4\pi r^2) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = l$$

$$11 \quad \frac{dr}{dt} = \frac{0.001}{3}$$

$$V = \pi r^2 h = 6\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 12\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 12\pi(1.9)\left(\frac{0.001}{3}\right) = 0.0239 \text{ in}^3 / \text{min}$$

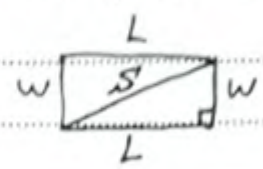
الحجم يزداد بمعدل $0.0239 \text{ in}^3 / \text{min}$

مبا مشوة

[[2]] مستطيل يزيد طوله بمعدل 2 cm/sec ، بينما يتناقص عرضه بمعدل 1 cm/sec في اللحظة التي فيها طوله 12 cm و عرضه 5 cm اوجد :

- (1) معدل التغير في مساحة المستطيل
- (2) معدل التغير في محيط المستطيل
- (3) معدل التغير في طول قطر المستطيل

$$\frac{dl}{dt} = +2 \quad \frac{dw}{dt} = -1$$



$$L = 12, \quad w = 5$$

① $\frac{dA}{dt} = ?$

نستخدم النسبة $A = Lw$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dl}{dt} w + L \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2)(5) + (12)(-1)$$

$$\frac{dA}{dt} = -2$$

المساحة تتناقص بمعدل $2 \text{ cm}^2/\text{sec}$

② $\frac{dp}{dt} = ?$

p: المحيط

$$p = 2L + 2w$$

$$\frac{dp}{dt} = 2 \frac{dl}{dt} + 2 \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 2(2) + 2(-1) = 2$$

المحيط يزيد بمعدل 2 cm/sec

s: القطر

③ $\frac{ds}{dt} = ?$

$$s^2 = l^2 + w^2$$

$$2s \frac{ds}{dt} = 2l \frac{dl}{dt} + 2w \frac{dw}{dt}$$

$$(13) \frac{ds}{dt} = (12)(2) + (5)(-1)$$

$$13 \frac{ds}{dt} = 19$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{19}{13}$$

طول القطر يزيد بمعدل $\frac{19}{13} \text{ cm/sec}$

$$\begin{aligned} s^2 &= l^2 + w^2 \\ L &= 12, \quad w = 5 \\ s^2 &= 12^2 + 5^2 \\ \boxed{s = 13} \end{aligned}$$

مثال 3: قطره ماء 3 cm وضعت المقاومة R_1 و R_2 على التوالي
 مثال: في الشكل المجاور وضعت المقاومة R_1 و R_2 على التوالي
 إذا علمت أن R_1 تزيد بمعدل $2 \Omega/\text{min}$ وأن R_2 تتناقص بمعدل $1 \Omega/\text{min}$ ، أوجد معدل التغير في المقاومة المكافئة R في اللحظة التي

حيث $R_1 = 75 \Omega$ ، $R_2 = 50 \Omega$
 الحل: $\frac{dR_1}{dt} = +2$ ، $\frac{dR_2}{dt} = -1$ ، $\frac{dR}{dt} = ?$

$R_1 = 75$ ، $R_2 = 50$

★

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} = \frac{-1}{R_1^2} \frac{dR_1}{dt} + \frac{-1}{R_2^2} \frac{dR_2}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} = \frac{1}{75} + \frac{1}{50} \\ R = 30 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{(30)^2} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{(75)^2} (2) + \frac{1}{(50)^2} (-1)$$

$$\frac{1}{900} \frac{dR}{dt} =$$

$$\frac{dR}{dt} =$$

العلف

★

مثال: تتحرك نقطة على منحنى الدالة $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$

بحيث يزيد الإحداثي السيني بمعدل $2 \text{ cm}/\text{min}$

أوجد معدل التغير في المساحة عند $x = 1$

الحل: $\frac{dx}{dt} = +2$ ، $\frac{dm}{dt} = ?$ ، $x = 1$

$$m = f'(x)$$

$$m = 3x^2 + 10x \quad \text{نسبة التغير}$$

$$\frac{dm}{dt} = (6x + 10) \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = (6(1) + 10) (2) = \underline{\underline{32}}$$

مركبة :-

3] بالون كروي يتسرب منه الهواء بمعدل $1000\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$ ، اوجد معدل التغير في مساحة سطح البالون

في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر البالون 10 cm

$$\frac{dv}{dt} = -1000\pi$$

$$\frac{dA}{dt} = ? , r = 10$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

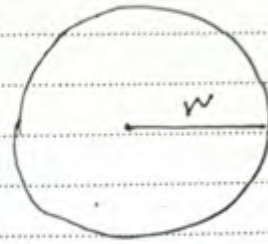
$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(10)(-2.5)$$

$$-1000\pi = 4\pi(10)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-1000\pi = 400\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1000}{400} = -2.5$$

$$\frac{dA}{dt} = -200\pi$$



المساحة السطحية لمعدل $200\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$

مثال : تكعب من الجليد لذوب مع بقاء شكله مكعباً بمعدل

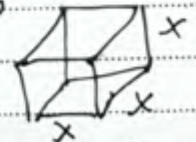
$150 \text{ cm}^3/\text{sec}$ ، اوجد معدل التغير في مساحة سطحه

الخارجي في اللحظة التي فيها معدل التغير في طول ضلعه $0.5 \text{ cm}/\text{sec}$

$$\frac{dv}{dt} = -150 , \frac{dA}{dt} = ? , \frac{dx}{dt} = -0.5$$

$$V = x^3$$

$$A = 6x^2$$



$$\frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$-150 = 3x^2(-0.5)$$

$$\frac{dA}{dt} = 12(10)(-0.5)$$

$$-150 = -1.5x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = -60$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

النتيجة

مثال: دائرتان متحدتان في المركز يتغير نصف قطرها بحيث
يزيد نصف قطر الخارجية بمعدل 2 m/sec ، ويباقي

نصف قطر الداخلية بمعدل 1 m/sec ، ارصد معدل التغير

في مساحة المنطقة المحصورة بينهما في اللحظة التي فيها

نصف قطر الخارجية 10 m ونصف قطر الداخلية 8 m

$$\frac{dy}{dt} = +2, \quad \frac{dx}{dt} = -1, \quad \frac{dA}{dt} = ?$$

$$y = 10, \quad x = 8$$

$$A = \pi y^2 - \pi x^2$$



★

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi y \frac{dy}{dt} - 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi (10)(2) - 2\pi (8)(-1) \Rightarrow \frac{dA}{dt} =$$

السؤال

مثال: دائرتان متحدتان في المركز يتغير نصف قطرها مع تباين

المساحة المحصورة بينهما بحيث في المقدار ، اذا علمت

ان نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد بمعدل 2 m/sec

او بمعدل التغير في طول نصف قطر الداخلية

في اللحظة التي فيها نصف قطر الخارجية 10 m ونصف

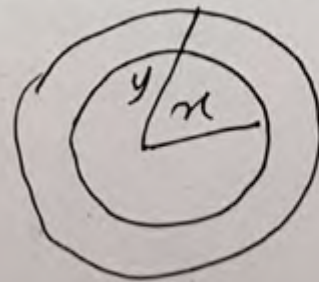
قطر الداخلية 8 m

$$\frac{dy}{dt} = +2, \quad \frac{dx}{dt} = ?$$

$$y = 10, \quad x = 8$$

$$\frac{dA}{dt} = 0 \leftarrow A = \text{ثابت}$$

$$A = \pi y^2 - \pi x^2$$



$$\frac{dA}{dt} = 2\pi y \frac{dy}{dt} - 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

$$0 = 2\pi (10)(2) - 2\pi (8) \frac{dx}{dt}$$

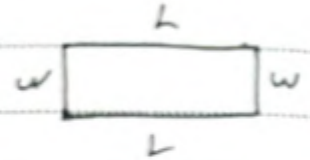
$$\frac{dx}{dt} = \frac{20}{8} = 2.5$$

السؤال

4] مستطيل يتغير بعديه مع بقاء مساحته ثابتة في المقدار ، اذا علمت ان طوله يزيد بمعدل 2 m/sec ، اوجد معدل التغير في عرض المستطيل في اللحظة التي فيها طول المستطيل 10 m و عرضه 8 m

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad \leftarrow \quad A = L^2$$

$$\frac{dL}{dt} = +2, \quad \frac{dw}{dt} = ? , \quad L = 10, \quad w = 8$$



$$A = L w$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dL}{dt} w + L \frac{dw}{dt}$$

$$0 = (2)(8) + 10 \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-16}{10} = -1.6$$

العرض يتناقص بمعدل 1.6 m/sec

مثال: يرتفع مصباح عمود طوله 5m على ارض افقية،
بدأ رجل طوله 1.8m بالاقتراب من العمود بسرعة 2m/sec
اريد

① معدل التغير في طول ظل الرجل على الارض

② معدل التغير في بعد رأس الرجل عن المصباح في اللحظة
التي تبعد فيها الرجل عن العمود مسافة 4m

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dt} = ? \quad \quad \frac{1.8}{5} = \frac{y}{x+y}$$

$$5y = 1.8x + 1.8y$$

$$3.2y = 1.8x \quad \text{نسبة}$$

$$3.2 \frac{dy}{dt} = 1.8 \frac{dx}{dt}$$

$$3.2 \frac{dy}{dt} = (1.8)(-2) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-3.6}{3.2} = \frac{-36}{32}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{ds}{dt} = ? \quad , \quad x = 4$$

$$s^2 = x^2 + 3.2^2$$

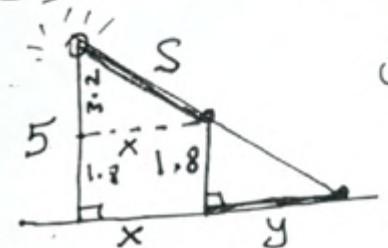
$$2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 0$$

$$(5.12) \frac{ds}{dt} = (4)(-2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-8}{5.12}$$

$$s^2 = 4^2 + 3.2^2$$

$$s = 5.12$$



الحل

مثال: اوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 3 cm

الحل

A: أكبر مساحة

$$A = xy$$

$$A = x \sqrt{36 - x^2}$$

$$A^2 = x^2 (36 - x^2)$$

$$A^2 = 36x^2 - x^4$$

$$(2AA' = 72x - 4x^3 = 0 \quad A' = 0)$$

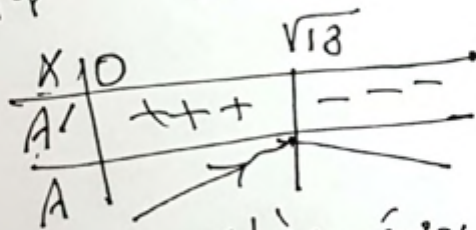
$$18x - x^3 = 0$$

$$x(18 - x^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \sqrt{18}$$

$$x = \sqrt{18}$$



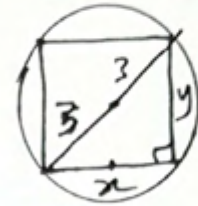
عظمى محلية دالة عند $x = \sqrt{18}$ هي أقصى مساحة

$$x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{18}$$

$$A = 18$$

نصف القطر 3



$$x^2 + y^2 = 36$$

$$y^2 = 36 - x^2$$

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$

المتغير x

$$0 < x$$

1- رسم مستقيم يمر من (2,1) فقط المحاورين على الخ والـ
 وجد أقل مساحه ممكنه للمثلث المحصور بين المستقيم
 والمحاورين الموجبين.
 الحل: A : مساحه المثلث اقل فاممكن

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2x}{x-1}$$

$$A = \frac{x^2}{x-1}$$

$$A' = \frac{2x(x-1) - 1(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{0}{1}$$

$$2x^2 - 2x - x^2 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0$$

$$(x=2)$$

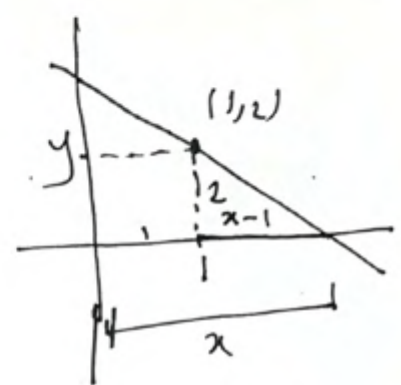
x	0	2
A'	-	++
A		

منفرد حليه وحده عند $x=2$ فحله

اقل مساحه ممكنه للمثلث عند

$$x=2, y = \frac{2(2)}{2-1} = 4$$

$$A = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$



$$\frac{2}{y} = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x-1}{x-1}$$

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

المطل

$$x > 0$$

فب

سلك حيطه 24 متر داره كائنه صولامه
املا به قطع اسطوانه ار جدر كبر حجم ممكن
للاسطوانه .

$$V = \pi x^2 y$$

$$V = \pi x^2 (12 - x)$$

$$V = 12\pi x^2 - \pi x^3$$

$$V' = 24\pi x - 3\pi x^2 = 0$$

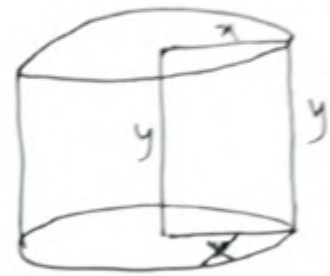
$$8x - x^2 = 0$$

$$x(8 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad \boxed{x = 8}$$

أصل

سب



$$2x + 2y = 24$$

$$x + y = 12$$

$$y = 12 - x$$

$$\boxed{y = 12 - 8 = 4}$$

مثال :- حديق مستطيله الشكل يراد احاطتها بسياج
تكلفته 60000 درهم ، اذا علمت انه كل m متر الوجهين
المتوازيين تكلف 30 درهم و 20 درهم للتر الواحد ، ار جدر كبر مساحه الحديق
A : مساحه كبرها كبر حاطه

$$A = xy$$

$$A = \frac{1}{2}x(6000 - 6x)$$

$$A = \frac{1}{2}(6000x - 6x^2)$$

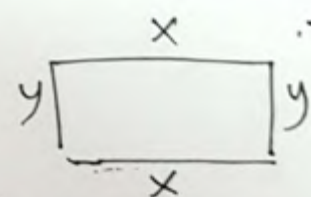
$$A' = \frac{1}{2}(6000 - 12x) = 0$$

$$12x = 6000$$

$$\boxed{x = 500}$$

سب

$$y = \frac{1}{2}(6000 - 3000) = 750$$



$$\text{المساحة} = 60000$$

$$30(2x) + 20(2y) = 60000$$

$$60x + 40y = 60000$$

$$6x + 4y = 6000$$

$$y = \frac{1}{4}(6000 - 6x)$$

ج : يتحرك جسم بحسب مرقعة يعطى بالعلامة

$$s(t) = t^4 - 4t^3 + 5t^2 + 7$$

ارعب انك فيه ممكنة للحل

$$v(t) = 4t^3 - 12t^2 + 10t$$

الكل

$$a(t) = 12t^2 - 24t + 10$$

لشبه

$$a'(t) = 24t - 24 = 0$$

$$\boxed{t=1}$$

$$a''(t) = 24$$

مست

$$a''(1) = 24 > 0$$

منه

معرفة محلياً ومعرفة عند $t=1$ هي نقطة

انك محلياً ممكنة عند $t=1$

$$a(1) = 12 - 24 + 10 = -2$$

سأول : ستأكل مساحة 12 m^2 ارعب انك ممكنة للشيء

الكل

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$L^2 = x^2 + \frac{144}{x^2}$$

$$2L L' = 2x + \frac{-288}{x^3} = 0$$

$$2x = \frac{288}{x^3}$$

$$2x^4 = 288$$

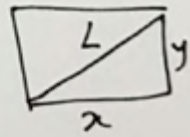
$$x^4 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 3.46$$

هو

$$x = -\sqrt{144}$$

مست



$$xy = 12$$

$$y = \frac{12}{x}$$