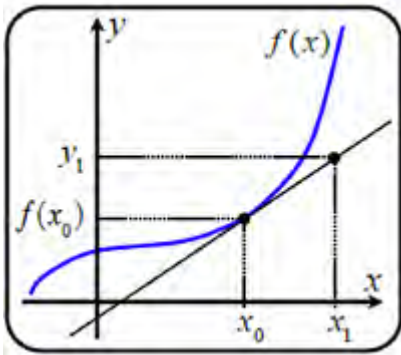




التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

نعلم أن ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند $x=x_0$ هو $m=f'(x)$

ومعادلة المماس عند $x=x_0$: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

أو $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

لنقاط القريبة من x_0 يكون $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

تعريف التقريب الخطي (أو المماس) للدالة $f(x)$ عند $x=x_0$ هو الدالة

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

لاحظ أن الاحداثي y_1 للنقطة الواقعة على المماس والمقابلة لـ x_1

يمكن إيجادها بالتعويض عن x بـ x_1 فيكون $y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

ملاحظة : نعرف $dx = \Delta x$ تفاضلة x ، وكذلك $dy = f'(x_0) dx$ تفاضلة y

مثال 1 أوجد التقريب الخطي لـ $f(x) = \cos x$ عند $x_0 = \pi/3$ واستخدمه لتقريب $\cos(1)$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f(\pi/3) = \cos \pi/3 = 1/2, \quad f'(\pi/3) = -\sin \pi/3 = -\sqrt{3}/2$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= \cos(\pi/3) - \sin(\pi/3)(x - \pi/3)$$

$$= 1/2 - \sqrt{3}/2(x - \pi/3)$$

$$L(1) = 1/2 - \sqrt{3}/2(1 - \pi/3) \approx 0.5409$$

الأمان العظيمة تصنع الأشخاص العظماء

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

مثال 2 أوجد التقريب الخطي لـ $f(x) = \sqrt{x+3}$ عند $x_0 = 1$ واستخدمه لتقريب العددين $\sqrt{3.98}$ و $\sqrt{4.05}$

$$f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \quad / \quad f(1) = 2 \quad \text{و} \quad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$L(1) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) \\ = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \quad (\text{لكل قيم } x \text{ القريبة من العدد } 1)$$

$$\sqrt{3.98} = \sqrt{3+0.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995$$

$$\sqrt{4.05} = \sqrt{3+1.05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1.05}{4} = 2.0125$$

طريقة نيوتن

لإيجاد حلول تقريبية للمعادلة $f(x) = 0$ أو لأصفار الدالة f نضع تخمين أولي x_0 ونوجد تقاطع المماس عند x_0 الذي نحصل عليه من معادلة المماس $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ بوضع $y = 0$ في المعادلة فيكون

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{حيث} \quad 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

باستخدام x_1 كتخمين جديد نحصل على تقريب أفضل $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ وباستخدام x_2 نحصل على x_3

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

ويمكن إيجاد حل تقريبي للمعادلة باستخدام الصيغة

وكما زادت n كلما اقتربت x_n أكثر وأكثر من الصفر وتعتبر طريقة نيوتن دقيقة وسريعة لتقريب أصفار الدالة

الذين لديهم الجرأة على مواجهة الفشل هم الذين يقهرون الصعاب وينجحون

رويتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع: تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

مثال 1

استخدم طريقة نيوتن لتقريب صفر للدالة $y = x^2 - 2$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad \text{بتوحيد المقامات نجد :}$$

نختار $x_0 = 1.5$ كتحمين أولي (لاحظ أن $\sqrt{4} < \sqrt{2} < \sqrt{1}$)

$$x_1 = \frac{(1.5)^2 + 2}{2(1.5)} = 1.41666667$$

$$x_2 = \frac{(1.41666667)^2 + 2}{2(1.41666667)} = 1.41421568$$

وهكذا نجد أن $x_3 = 1.41421356$ وكذلك $x_4 = 1.41421356$

وبما أن $x_4 = x_3$ نتوقف عن إجراء أي حساب آخر ويكون $x \approx 1.4142135$ صفر تقريبي للدالة f

(الابتسامة كلمة معروفة من غير حروف)

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

أوجد قيمة كل مما يلي :

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{\sin x}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

من يعيش على الأمل لا يعرف المستحيل

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



العام الدراسي
2018/2017
الفصل الثاني



هيئة المعرفة - دبي
مدرسة الشروق الخاصة
قسم الرياضيات

التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

أوجد قيمة كل مما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \ln x \right)$$

غضوا أبصاركم تنطلق أنوار بصائرهم

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ على الفترة $[-2, 3]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = 4x^{5/4} + 8x^{1/4}$ على الفترة $[0, 4]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & : x < 0 \\ x^3 - 4x & : x \geq 0 \end{cases}$ المتصلة على الفترة $[-3, 3]$

رأيت العزني أوب وعلم وفي الجهل المنزلة والهولان

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

القيم القصوى المحلية :

تعريف : إذا كانت c نقطة في مجال الدالة f فإن :

① $f(c)$ قيمة عظمى محلية عند c إذا كانت $f(x) \leq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

② قيمة صغرى محلية عند c إذا كانت $f(x) \geq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

نظرية القيم القصوى المحلية :

إذا كان $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية فإن c عدداً حرجاً للدالة f

ملاحظات هامة :

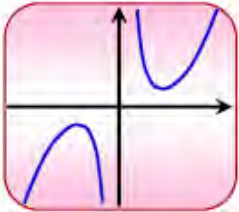
① كل قيمة عظمى أو صغرى مطلقة تكون قيمة عظمى أو صغرى محلية و لكن العكس غير صحيح .

② القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة ، لكن قد يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية .

③ إذا كانت القيمة القصوى المحلية وحيدة فإنها تكون قصوى مطلقة

④ دائماً القيمة العظمى المطلقة $\leq$ القيمة الصغرى المطلقة و لكن

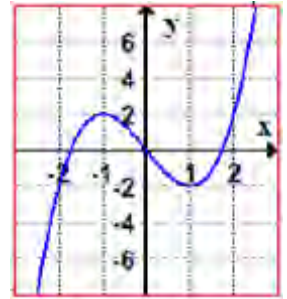
ليس من الضروري أن تكون القيمة العظمى المحلية $<$ القيمة الصغرى المحلية



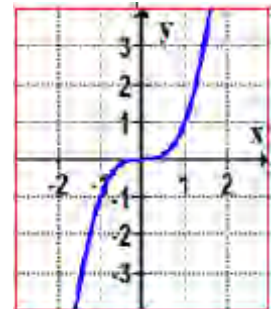
تدريب

أوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية لكل دالة :

① $f(x) = x^3 - 3x$



② $f(x) = x^3$



لا تيأس إذا رجعت خطوة للدرا، فالسهم يحتاج أن ترجعه للدرا، لينطلق بقوة إلى الأمام

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

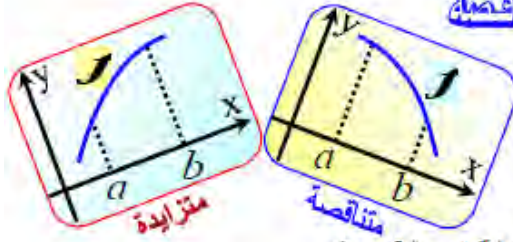
تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع: تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

(4 = 4) الدوال المتزايدة والمتناقصة



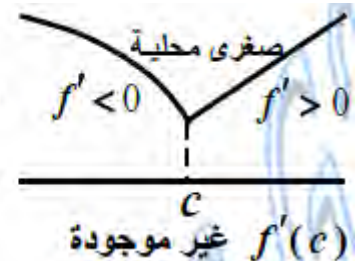
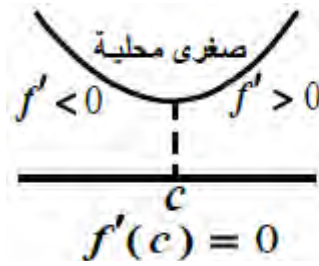
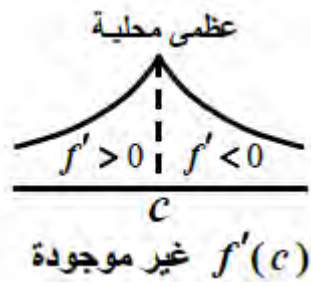
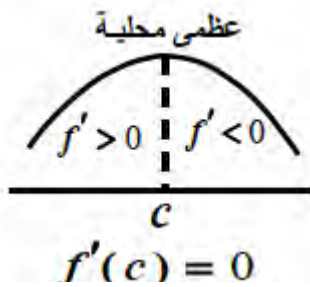
تعريف: لتكن f دالة معرفة على الفترة I و لتكن x_1, x_2 أي نقطتين في I

① f دالة متزايدة على I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$

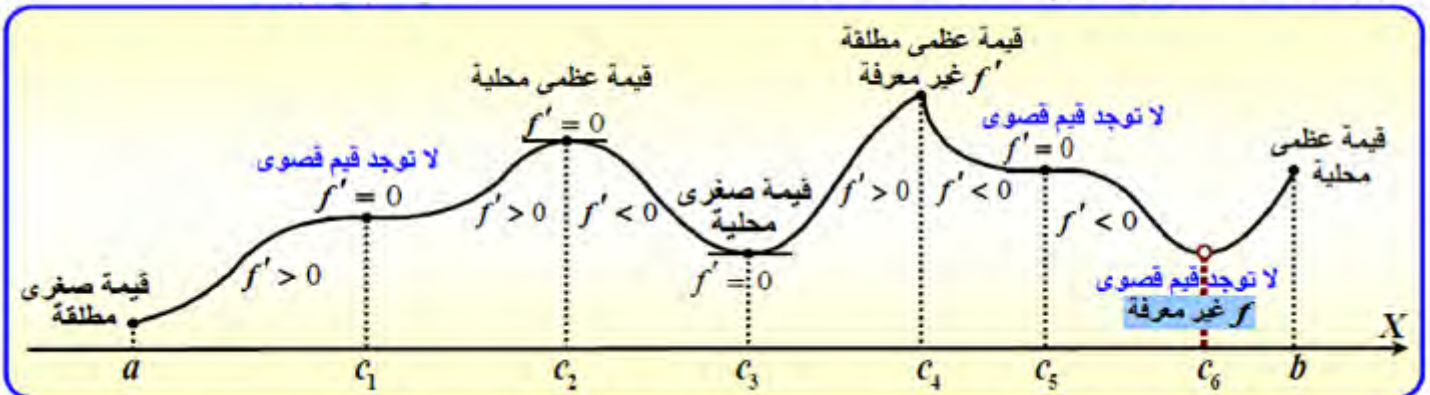
② f دالة متناقصة على I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$

نظرية ① f دالة متزايدة على (a, b) إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل نقطة في (a, b)

نظرية ② f دالة متناقصة على (a, b) إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل نقطة في (a, b)



اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية



اجعل من يراك يردك لمن يراك

رؤيتنا: المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

تمارين

① في كل مما يلي استخدم (اختبار المشتقة الأولى) لإيجاد :

(d) القيم القصوى المحلية

(c) فترات تناقص الدالة

(b) فترات تزايد الدالة

(a) النقاط الحرجة

① $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$

تزايد $(-\infty, 1]$, $[5, \infty)$, تناقص $[1, 5]$, عظمى $\frac{7}{3}$, صغرى $-\frac{25}{3}$

② $f(x) = x^3 - 12x + 3$

③ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

عاند الدنيا وابتسم إن بعد الليل فجر يرتسم

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

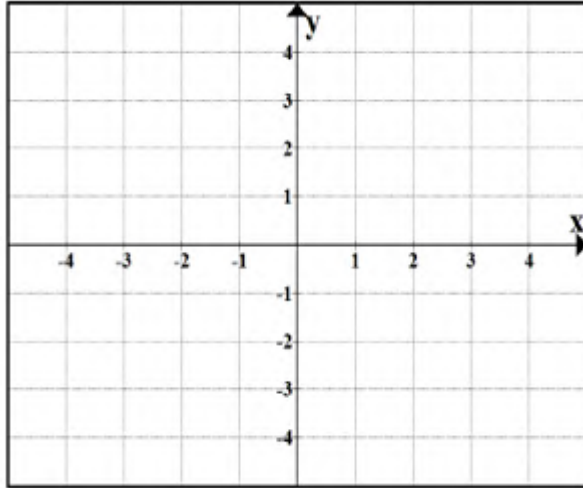
اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)



ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية :

$$f'(x) < 0, f(2) = 5, f(-1) = 1 \text{ لكل } x > 2 \text{ و } x < -1$$

$$f'(x) > 0 \text{ لكل } -1 < x < 2 \text{ و } f'(-1) = 0 \text{ و } f'(2) \text{ غير موجودة}$$

حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة المعطاة مقعرا لافلا و الفترات التي يكون فيها مقعرا لاسفل و حدد نقاط الانعطاف .

$$1) f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5$$

$$2) f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم القصوى المحلية و بين نوعها للدالة :-

$$f(x) = x^3 - 3x + 4$$

أكثر الرجال حكمة الذي يظن أنه أتل حكمة!

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

السؤال الاول

اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 2$

أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها من عبارات صحيحة :-

(1) القيمة العظمى المحلية للدالة هي عند $x =$

(2) القيمة الصغرى المحلية للدالة هي عند $x =$

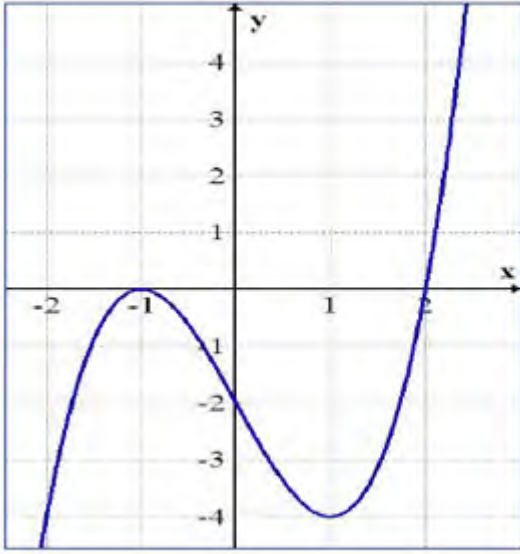
(3) فترات التزايد للدالة هي

(4) فترة التناقص للدالة هي

(5) فترة تقع الدالة للاحلي هي

(6) فترة تقع الدالة للاسفل هي

(7) نقطة الانعطاف للدالة هي



السؤال الثاني

لتكن الدالة $f(x)$ متصلة على $[-4, 5]$ و الشكل أدناه يمثل بيانها .

أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها من عبارات صحيحة :

(1) مجموعه النقاط الحرجة للدالة هي

(2) للدالة قيم صغرى محلية عند x تساوي

(3) للدالة قيم عظمى محلية عند x تساوي

(4) فترات التناقص للدالة هي

(5) فترة التزايد للدالة هي

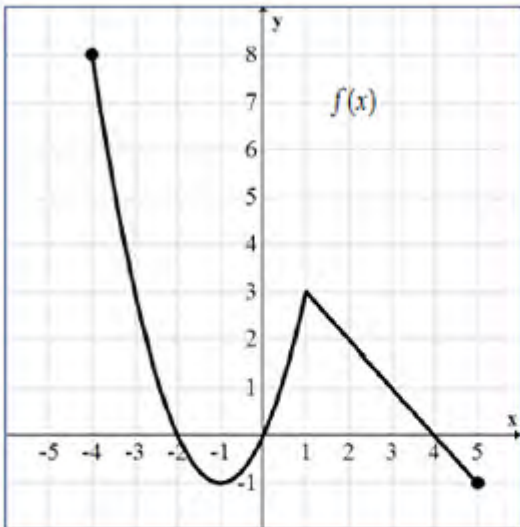
(6) فترة تقع الدالة للاحلي هي

(7) القيمة العظمى المطلقة للدالة هي

عند قيمة $x =$

(8) القيمة الصغرى المطلقة توجد عند $x =$

و قيمتها تساوي



ابتمسم لأنك تعبر رياً عظيماً تستطيع اللجوء إليه في أي وقت

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

السؤال الثالث

لتكن الدالة $f(x)$ متصلة علي $[-1, 6]$ و الشكل أدناه يمثل بيان $f'(x)$ علي مجالها

أكمل الفراغات الآتية بعبارات صحيحة :-

(1) مجموعه النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي

(2) فترات التزايد و فترات التناقص للدالة $f(x)$ هي

(3) قيم x التي تبلغ عندها الدالة $f(x)$ قيم قصوى محلية و حدد نوعها .

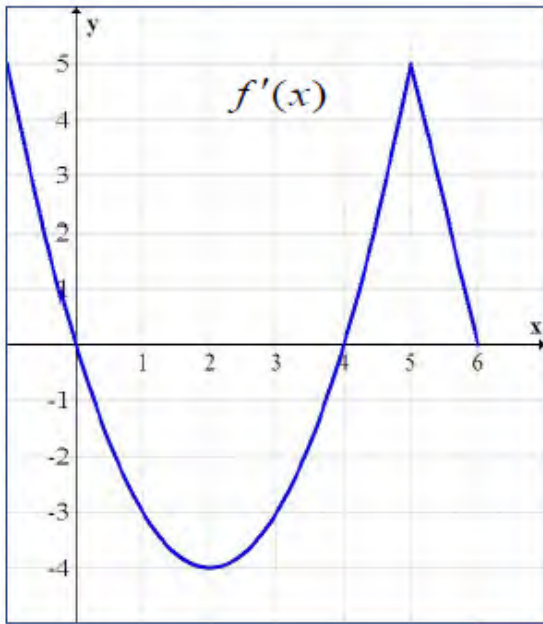
(4) قيمة $f''(2) = -$ - - - - -

(5) حدد نقاط الأنعطاف لمنحنى الدالة $f(x)$

(6) فترات تقعر منحنى الدالة لاسفل هي

(7) فترة تقعر منحنى الدالة لاعلي هي

(8) أيهما أكبر $f(3)$ أم $f(2)$ مع توضيح السبب



وراء كل شخص ناجح نت مقطوع



الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

نظرة عامة على رسم المنحنيات

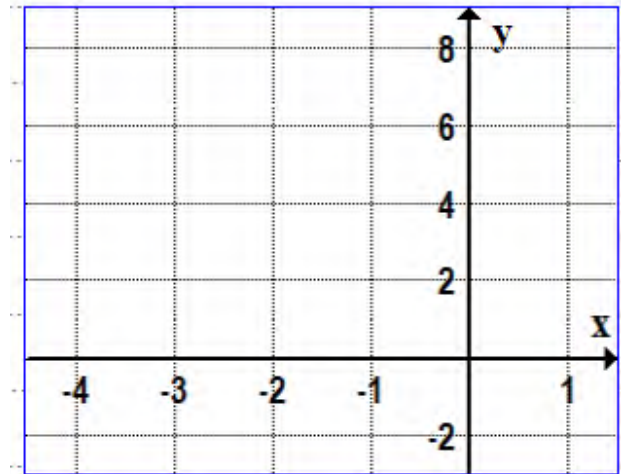
لرسم التمثيل البياني للدالة $y=f(x)$ نتبع الخطوات الآتية :

- نحدد مجال الدالة f
- نوجد خطوط التقارب الرأسية (إن وجدت) بإيجاد نهاية الدالة عندما تقترب x من النقاط المنعزلة (نقاط غير موجودة في مجال الدالة f) وقد يكون عندها فجوة أو قفزة أو انفصال لا نهائي .
- نوجد المشتقة الأولى للدالة f ونحدد فترات التزايد وفترات التناقص والقيم القصوى المحلية
- نوجد المشتقة الثانية للدالة f ونحدد فترات تقعر المنحنى للأعلى وفترات تقعر المنحنى للأسفل ونقاط الانعطاف.
- نوجد نقاط التقاطع مع المحور y بوضع $x=0$ ، والتقاطع مع المحور x (إن امكن) بوضع $y=0$ ونختار بعض النقاط الإضافية لما سبق .
- نحدد جميع النقاط السابقة على المستوى الاحداثي ثم نرسم المنحنى .



ملاحظة : ابدأ برسم خطوط التقارب الأفقية والرأسية (إن وجدت) ثم ارسم عند القيم القصوى وإثناء الرسم انتبه لسلوك المنحنى على جانبي خط التقارب الرأسى وانتبه لتقعر المنحنى.

تدريب ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ يوضّح جميع الميزات المهمة



هناك أشخاص حتى عندما يكون مزاجهم سيئاً يمدّونك بأوب هؤلاء فعلاً يستحقون الاحترام

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

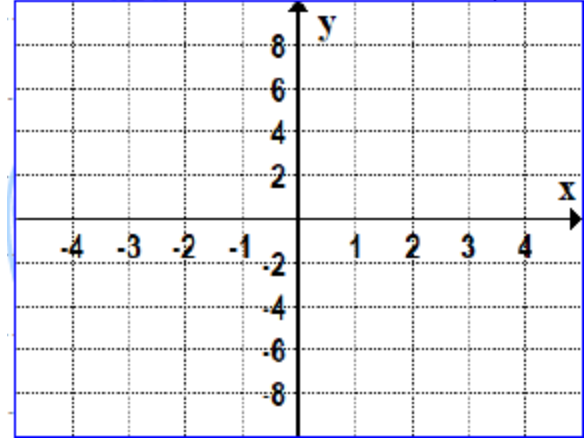
تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم :

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

① ارسم تمثيلاً بيانياً للدالة $f(x) = x + \frac{4}{x}$ يوضّح جميع الميزات المهمة



قل للذي أولئك أن الله لا ينساك

رؤيتنا : المساهمة في بناء جيل يحقق ذاته ضمن نظام تربوي رفيع المستوى .



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

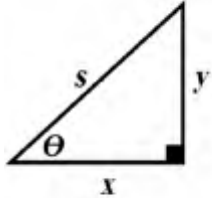
تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

المثلث القائم الزاوية :



" نظرية فيثاغورث "

$$S^2 = x^2 + y^2$$

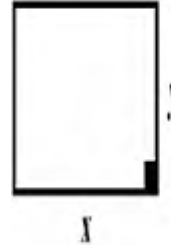
$$\frac{1}{2} x y$$

= مساحة المثلث القائم الزاوية

= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة

= محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$s + x + y$$



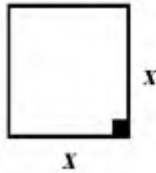
المستطيل :

= مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = x \cdot y$$

= محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$$2(x + y)$$



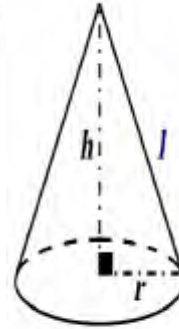
المربع :

= مساحة المربع = مربع طول ضلعه

$$A = x^2$$

= محيط المربع = طول الضلع × 4

$$4x$$



المخروط الدائري القائم :

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

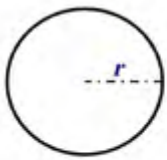
$$\frac{1}{3} \pi r^2 h$$

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = نصف محيط قاعدته × طول راسه

$$\pi r l$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة للمخروط الدائري القائم

$$\pi r l + \pi r^2$$



الدائرة :

$$\pi r^2$$

= مساحة الدائرة

$$2 \pi r$$

= محيط الدائرة

المكعب :

حجم المكعب = طول × عرضه × ارتفاعه

$$x^3$$

= حجم المكعب

المساحة الجانبية = 4 × (مربع طول الحرف)

$$4x^2$$

= المساحة الجانبية

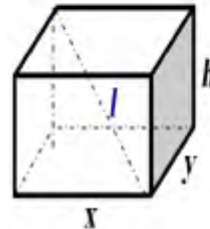
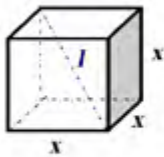
المساحة الكلية = 6 × (مربع طول الحرف)

$$6x^2$$

= المساحة الكلية

$$l = \sqrt{3} x$$

= طول قطر المكعب



شبه المكعب "متوازي مستطيلات" :

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$x y h$$

= حجم شبه المكعب

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$2(x + y) h$$

= المساحة الجانبية

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$2(x + y) h + 2 x y$$

= المساحة الكلية

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$$

= طول قطر شبه المكعب



التاريخ: 2018/1/----

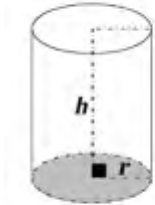
اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)



الأسطوانة الدائرية القائمة :

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

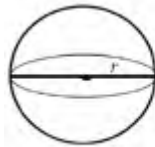
$$\pi r^2 h = \text{حجم الأسطوانة الدائرية القائمة}$$

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$2\pi r h = \text{المساحة الجانبية}$$

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

$$2\pi r h + 2\pi r^2 = \text{المساحة الكلية}$$



الكرة :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \text{حجم الكرة}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^2 = \text{المساحة}$$

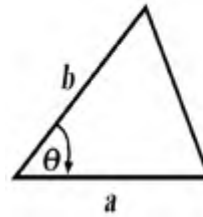


المشور القائم :

الحجم = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ($2 \times$ مساحة القاعدة) (حسب القاعدة)



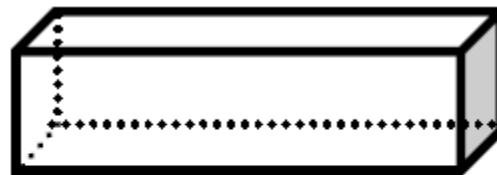
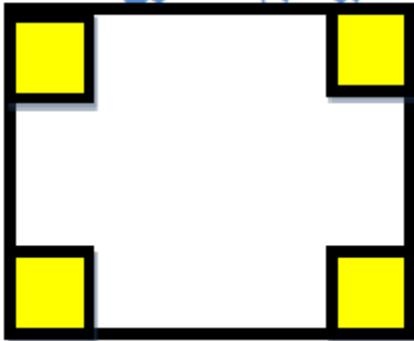
المثلث :

$$\frac{1}{2} a b \sin \theta = \text{مساحة المثلث}$$

(28) يراد صنع صندوق يدوي غطاء بقص مربعات متطابقة كل منها x من أركانها طبقة صفيح أبعادها

25×20 سنتيمتر وتني جوانبها إلى أعلي

ما الطول الذي تكون عليه المربعات لصنع صندوق سعته أكبر ما يمكن ؟ وما أكبر حجم للصندوق ؟





العام الدراسي
2018/2017
الفصل الثاني



هيئة المعرفة - دبي
مدرسة الشروق الخاصة
قسم الرياضيات

التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

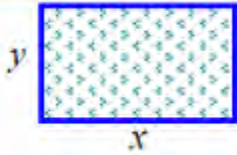
الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية ووتره يساوي 10 cm ؟ ما ؟ أبعاد

① لديك سياج طوله 40 m لتُحيط به حديقة مستطيلة الشكل أوجد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذا السياج وما أبعادها ؟

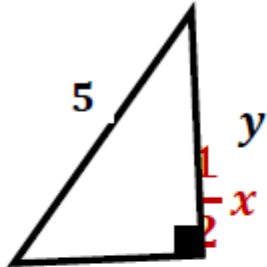
$$A = 100\text{ m}^2 \quad x = y = 10\text{ m}$$





الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية ووتره يساوي 5 cm ؟ ما أبعاده



$$\frac{1}{2} x \times y \Rightarrow A = \frac{1}{2} x (\sqrt{25 - x^2}) : x \in [0, 5]$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 \times (\sqrt{25 - x^2}) + \frac{-2x^2}{2(\sqrt{25 - x^2})} \right\} = 0$$

$$25 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.5 \in [0, 5]$$

$$x = -\sqrt{\frac{25}{2}} \approx 3.5 \notin [0, 5]$$

x	0	3.5	5
$f(x)$	0	6.25	0

∴ توجد قيمة عظمي مطلقة عند $x = \sqrt{\frac{25}{2}}$ الأبعاد هما 3.5 , 3.5

يجعلان المساحة أكبر ما يمكن



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع: تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على إسطوانة شكل دائرية قائمة. الأبعاد ما التي تستخدم أقل مادة؟ ممكنة

المعادلة المساعدة

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} : r > 0$$



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right)$$

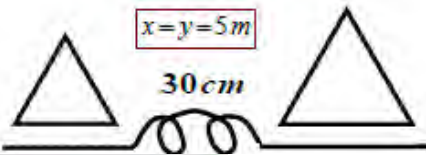
$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$$

r	05.42	∞
A'	-	+
A	$A(5.42)$	

أ. توجد قيمة صغرى مطلقة عند $r = 5.42$

$$\therefore h \approx 10.84, r \approx 5.42$$

17) سلك طوله 30 cm نريد أن نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الأضلاع عين طول ضلع كل منهما ليكون مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن.



المعادلة المساعدة

$$3x + 3L = 30$$

$$x + L = 10$$

$$L = 10 - x$$

$$x \in (0, 10)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2 + L^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2 + (10 - x)^2) = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$A'' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4|_{x=5} > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 5$ طول ضلعي المثلثين هي 5, 5 cm



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع: تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

(4 - 8) المدلات الرقطة

(3) عند تسخين طبق دائري من المعدن في الفرن . يتزايد طول نصف القطر بمعدل 0.01 cm/sec

بأي معدل تتزايد مساحة الطبق عندما يكون طول نصف قطره 50 cm ؟



$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\pi r \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\pi \times 50 \times 0.01 = \pi \text{ cm}^2/\text{sec}$$

(4) كانت طائرة محمد الورقية على ارتفاع 300 ft قذفتها الريح بمعدل 25 ft/sec .

ما السرعة التي يجب أن يترك فيها محمد خيط الطائرة عندما تكون الطائرة على بعد 500 ft منه ؟

$$\therefore y^2 = x^2 + (300)^2 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow 500 \frac{dy}{dt} = 400 \times 25$$

$$\frac{dy}{dt} = 20 \text{ ft/sec}$$

x



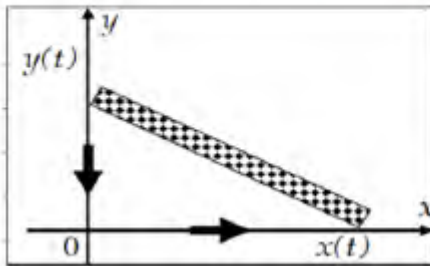
$y = 500$

300

(5) سلم طولة 13 ft موضوع أحد على جدار منزل والطرف الآخر موضوع على الأرض . يتحرك بعيداً عن

الحائط بمعدل 5 ft/sec عندما كان الطرف على بعد 12 ft من المنزل .

■ ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم على الحائط عند تلك اللحظة ؟



$$y^2 + x^2 = 169 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 10 \frac{dy}{dt} + 24 \times 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -12 \text{ ft/sec}$$



التاريخ: 2018/1/----

اليوم:

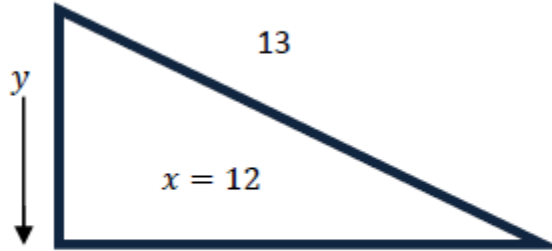
تدريبات

الصف والشعبة: A12/

الاسم:

الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

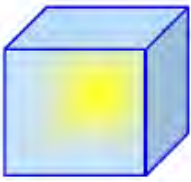
■ ما معدل تغير مساحة المثلث الذي يتكون من الحائط و الأرض السلم عند تلك اللحظة



$$A = \frac{1}{2}x \times y \Rightarrow A' = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x \right) = \frac{1}{2} (5 \times 5 - 12 \times 12) = -59.5 \text{ ft}^2/\text{sec}$$

تدريب

مكعب من المعدن يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله فإذا تزايد طول حرفه بمعدل ثابت 0.01 cm/min أوجد :



$$1.08 \text{ cm}^3 / \text{min}$$

(1) معدل تغير حجمه في اللحظة التي يكون فيها طول حرفه 6 cm .

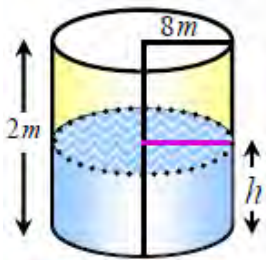
$$0.72 \text{ cm}^2 / \text{min}$$

(2) معدل تغير مساحته السطحية عند تلك اللحظة.

(2) خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة قائمة نصف قطره 8 m وارتفاعه 12 m يصب فيه الماء بمعدل $80 \pi \text{ m}^3/\text{h}$

(1) أوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان .

$$1.25 \text{ m/h}$$





الموضوع : تطبيقات الاشتقاق (الوحدة 4)

(8 - 4) معدلات التغير في الاقتصاد

يساهم علم التفاضل في الاقتصاد حيث يساعد في زيادة الربح إلى أقصى حد أو تخفيض التكلفة إلى أدنى حد ممكن .
تعريفات هامة :



✓ الدخل من بيع x سلعة $r(x)$ ، والدخل الحدي هو $r'(x) = \frac{dr}{dx}$

✓ تكلفة إنتاج x سلعة $C(x)$ ، والتكلفة الحدية هي $C'(x) = \frac{dc}{dx}$

✓ الربح من بيع x سلعة $p(x)$ ، والربح الحدي هو $p'(x) = \frac{dp}{dx}$

تدريب

والربح $p(x) = r(x) - c(x)$

نظرية القيمة العظمى للربح :

القيمة العظمى للربح (إن وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية $\frac{dr}{dx} = \frac{dc}{dx}$

إذا كان $p(x) = r(x) - C(x)$ له قيمة عظمى فإنها تحدث عند مستوى إنتاج يكون عنده $p'(x) = 0$

$$p'(x) = r'(x) - c'(x) = 0 \Rightarrow r'(x) = c'(x)$$

مثال 1

بفرض أن $c(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ إجمالي التكلفة (بالدرهم) لإنتاج x وحدة من منتج معين .
أوجد التكلفة الحدية عند $x=100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة .

التكلفة الحدية : $C'(x) = 0.04x + 2$

التكلفة الحدية لكل وحدة عند $x=100$: $C'(100) = 0.04(100) + 2 = 6$

التكلفة الفعلية عند $x=100$: $C(100) - C(99)$

$$= 0.02(100)^2 + 2(100) + 4000 - [0.02(99)^2 + 2(99) + 4000]$$

$$= 200 + 200 + 4000 - [196.2 + 198 + 4000]$$

$$= 4400 - 4394.02 = 5.98$$

لاحظ أن التكلفة الفعلية قريبة جداً من التكلفة الحدية

مثال 2

مصنع ينتج أجهزة حاسوب، يبيع المصنع x جهاز من نفس النوع أسبوعياً بمبلغ $r(x) = 20x$ درهم

فإذا كانت دالة التكلفة لإنتاج x جهاز تُعطى بالعلاقة $C(x) = 0.002x^2 + 8x + 5000$ درهم .

أوجد عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع ليحقق أكبر ربح ممكن ؟ وما قيمة هذا الربح ؟

يتحقق أكبر ربح عندما الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية $r'(x) = c'(x)$

$$20 = 0.004x + 8 \Rightarrow x = \frac{12}{0.004} = 3000 \text{ جهاز}$$

وأكبر ربح هو : $p(3000) = r(3000) - C(3000)$

$$= 60000 - 47000 = 13000$$