الرياضيات المتقدمة

الوحدة الرابعة

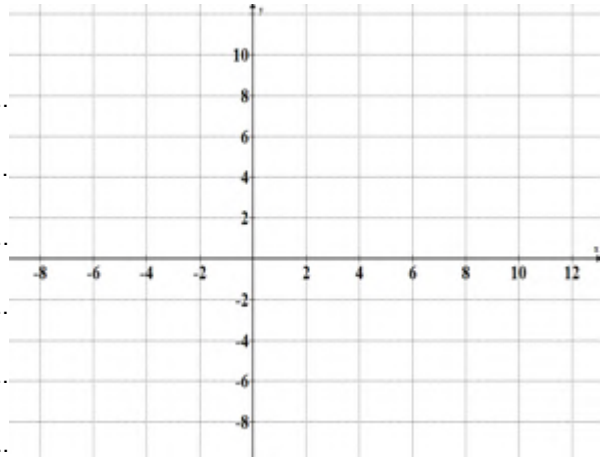
رسم المنحنيات ، القيم المثلى ، المعدلات المرتبطة

الفصل الدراسي الثاني 2018-2019

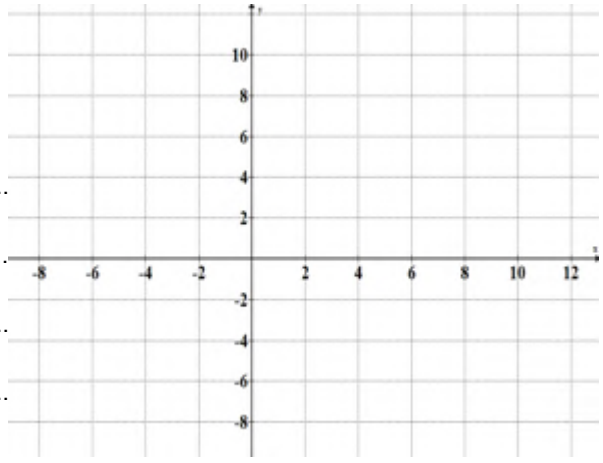
مدرس المادة :- صكبان صالح محمد

س1):- ارسم بيانياً كل من الدوال التالية مبيناً جميع المميزات المهمة .

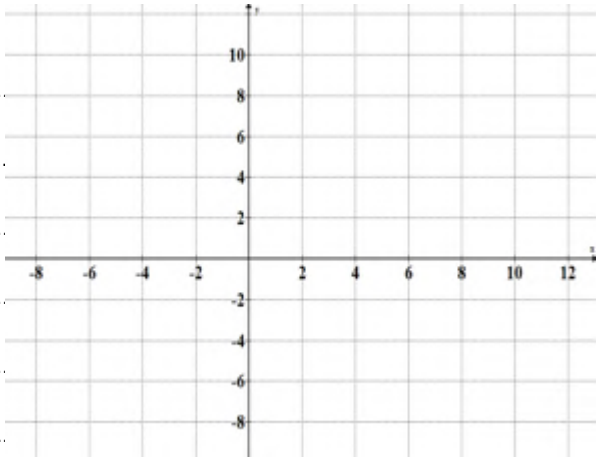
1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$



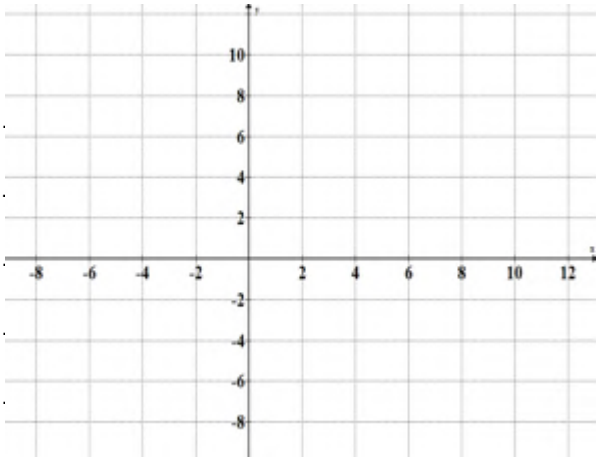
2) $f(x) = x + \frac{4}{x}$



3) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$



4) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$



القيم المثلى *optimization*

ملاحظة :- نتبع الخطوات التالية لتبسيط عملية إيجاد القيم القصوى للدالة .

1):- رسم شكلاً توضيحياً ثم نعين الرموز الجبرية لتلك المتغيرات .

2):- نكتب القانون المتعلق بالسؤال . ،وإذا كانت المتغيرات أكثر من واحد نلجأ الى إيجاد علاقة بين المتغيرات . لنجعلها متغير واحد فقط .

3):- نجد النقاط الحرجة بإيجاد $f'(x)$ ثم نجعل $f'(x)=0$. ثم نختبر إشارة المشتقة لنصل الى المطلوب .

س1):- عددين مجموعهما 20 . أوجد العددين إذا كان :-

1):- حاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

2) :- مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س2):- أوجد ابعاد اكبر مساحة أرض مستطيلة الشكل محيطها $40\ m$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س3):- قطعة نحاس مربعة الشكل طول ضلعها $12\,cm$ يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى وذلك بقص أربعة مربعات متساوية من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها . ماهو أكبر حجم لهذه الصندوق .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س4):- أوجد بعدي أكبر مثلث متساوي الضلعين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها $12\,cm$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س5):- علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $125\pi\,cm^3$. أوجد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س6) :- أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها $3cm$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س7):- يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته $12cm \times 16cm$. وذلك بقص مربعات من كل زاوية وطي الجوانب الأربعة . أوجد طول ضلع المربع المقطوع الذي يعطي أكبر حجم للصندوق

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س8):- أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $100\,cm^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س9):- طلبت شركة العين لإنتاج الحليب والألبان تصميم علبة حليب تتسع لـ 355 مليمتر . أوجد ابعاد العلبة التي تعطي القيمة الصغرى للمواد المستخدمة في صنعها .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س10):- أوجد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(3,9)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س11):- أوجد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س 12):- قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من إحدى جهاتها . أوجد أكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله $100\ m$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

س13):- نافذه على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل $8\ m$ **. أوجد أبعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن .**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المعدلات المرتبطة Related Rates

تذكر :- بعض قوانين الحجوم والمساحات :-

1):- مساحة القرص الدائري:- $A = r^2\pi$. **هنا نصف القطر يتغير بالنسبة للزمن ، وكذلك المساحة**

نعبر عن هذا التغير بالشكل $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$

2):- حجم الكرة :- $V = \frac{4}{3}\times r^3 \times \pi$ **حجم الكرة يتغير في حالة وضع فيها هواء ، نصف قطرها يتغير**

نعبر عن هذا بالشكل $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$

3):- حجم الأسطوانة :- $V = r^2\pi \times h$

4):- مساحة المثلث القائم الزاوية :- $A = \frac{1}{2}xy$

5):- نظرية فيثاغورث $x^2 + y^2 = b^2$

س1):- ينكمش طول نصف قطر كرة بمعدل $\frac{3}{\pi} cm/s$ **عندما يكون طول قطرها** $4\,cm$ **احسب معدل نقصان كل من :- مساحتها السطحية ، حجمها ؟**

.....

.....

.....

.....

س2):- يزداد حجم كرة بمعدل $36\pi\, cm^3/s$ **عندما يكون طول قطرها** $24\,cm$ **. أوجد :-**

1):- معدل الزيادة في طول نصف القطر . 2):- معدل الزيادة في مساحتها السطحية في تلك اللحظة .

.....

.....

.....

.....

س3):- قرص دائري من المعدن يتمدد بالحرارة محتفظاً بشكله الدائري . ويزاد طول قطره بمعدل $0.07\ ft/s$

أوجد معدل ازدياد مساحته عندما يصل طول نصف القطر الى $1\frac{1}{2}\ ft$ **.**

.....

.....

.....

.....

.....

س4):- مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $15\ cm$ **ويزداد طول الضلع بمعدل** $2\ cm/\min$ **. فما معدل ازدياد المساحة .**

.....

.....

.....

.....

س5):- مكعب طول حرفه $\frac{1}{2}\ m$ **ويزداد بمعدل** $2\ cm/h$ **. أوجد معدل زيادة الحجم ، ومعدل زيادة المساحة الكلية .**

.....

.....

.....

.....

س6):- مكعب طول حرفه x **يتمدد بانتظام . فاذا كان معدل ازدياد طول قطره** $\frac{2}{\sqrt{3}}\ cm/s$ **. احسب معدل الزيادة في حجمه عندما يكون طول ضلعه** $x=3\ cm$ **.**

.....

.....

.....

.....

س7):- اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $\frac{1}{2}m$. يتسرب منها الماء من ثقب بقاعدتها بمعدل $\frac{1}{8}\pi\ m^3/\min$. احسب معدل هبوط ارتفاع سطح الماء .

.....

.....

.....

.....

س8):- مخروط دائري قائم ذو حجم ثابت يزداد طول نصف قطر قاعدته بمعدل $1cm/s$. أوجد معدل تغير ارتفاع المخروط عندما يصل ارتفاعه الى $12\,cm$ ونصف قطر قاعدته الى $8\,cm$.

.....

.....

.....

.....

س9):- يتساقط الرمل مكوناً مخروطاً دائرياً ارتفاعه يساوي $\frac{3}{4}$ نصف قطر قاعدته بشكل دائم . فإذا كان معدل انسكاب الرمل $12\,cm^3/s$ أوجد :- معدل زيادة ارتفاع المـــــــــخروط عندما يصل هذا الأرتفاع الى $6\,cm$

.....

.....

.....

.....

س10):- سلم طوله $3\,m$ **موضوع على حائط ارتفاعه** $2.4\,m$ **ينزلق الى أسفل الجدار بمعدل** $0.6\ \ m/s$

فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعداً عن الحائط .

.....

.....

.....

.....

س11) تسير سيارة بسرعة $50\ kmph$ **تجاه الجنوب من نقطة تبعد** $\frac{1}{2}$ **كيلو متر شمال التقاطع . وتسير سيارة شرطة بسرعة** $40\ kmph$ **من نقطة تبعد** $\frac{1}{4}$ **كيلو متر شرق التقاطـــــــــع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين . فما الذي سيسجله الرادار .**

.....

.....

.....

.....

س12):- يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 120 **برميلاً في الدقيقة ينتشر النفط في دائرة بسمك** $\frac{1}{4}''$ **نظراً لأن** $1\,ft^3$ **يساوي** 7.5 **برميل . حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر الى** $100\,m$ **.**

.....

.....

.....

.....

مع خالص تحياتي