



12

عام

مدرسة عبد القادر الجزائري قسم الرياضيات

تحذير هام

هذه الأوراق بمثابة دفتر مساعد للطالب لتوفير الوقت في كتابة السؤال ولكن الحذر كل الحذر من الإكتفاء بها فقط حيث أن كتاب الوزارة هو المرجع الأساسي في كل شئ وعلى الطالب أن يتدرب على حل التمارين الواردة في الكتاب المدرسي الموجودة نهاية كل درس ويناقش المعلم بها



الوحدة الثامنة المتجهات

أ / أحمد عطا

اسم الطالب /

اسم المدرسة /

2 حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

1 تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذ تُسمى كمية قياسية (عددية)، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما الكمية المتجهة فهي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلاً سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوباً تمثل كلاً من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كل مما يأتي:

(1) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

(2) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

(3) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

(4) تسير سيارة بسرعة 60 mi/h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي.

(5) هبوط مظلي رأسياً إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h .

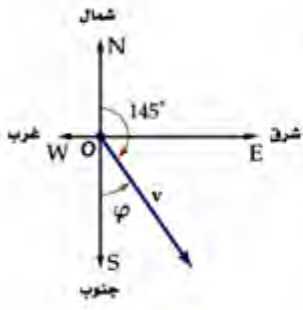
(6) طول قطعة مستقيمة 5 cm .

المتجهات،

يمكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم يُظهر كلاً من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل متجهًا. ويمثل الشكل المجاور المتجه الذي له نقطة البداية A ، ونقطة النهاية B . ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\vec{a}$.

أما طول المتجه فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1 \text{ cm} = 5 \text{ ft/s}$ ، فإن طول المتجه $\vec{a}$ ، ويرمز له بالرمز $|\vec{a}|$ ، يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في الوضع القياسي. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلاً: اتجاه المتجه $\vec{a}$ هو 35° .



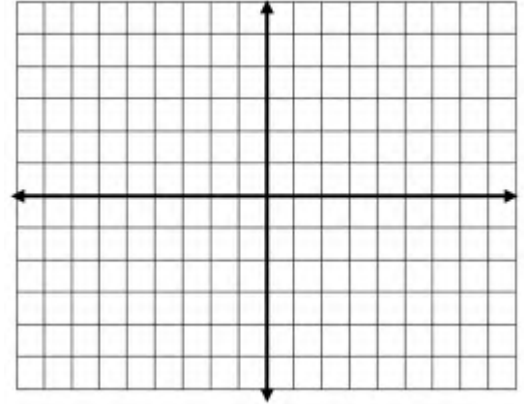
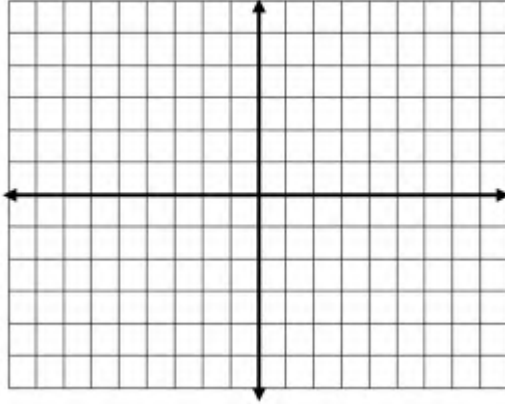
ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية الاتجاه الرباعي φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال - جنوب). فمثلاً زاوية الاتجاه الرباعي للمتجه v في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35^\circ\ E$. كما يمكن استعمال زاوية الاتجاه الحقيقي، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءاً من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلاً يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

تمثيل المتجه هندسياً

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

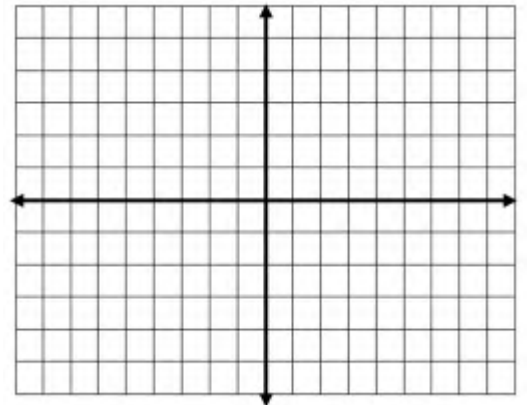
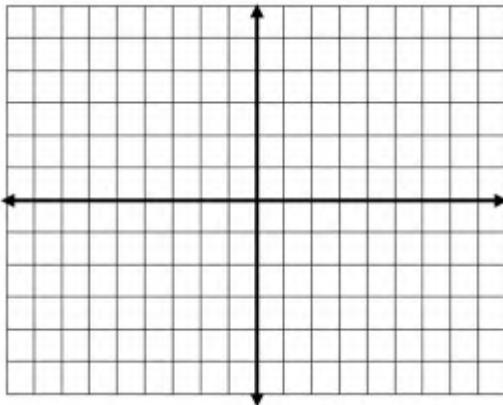
(7) $a = 20\text{ ft/s}$ باتجاه 030° .

(8) $v = 75\text{ N}$ ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

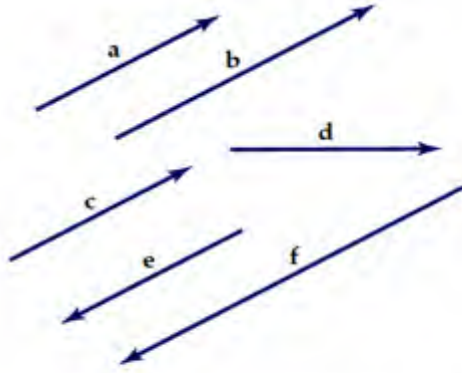
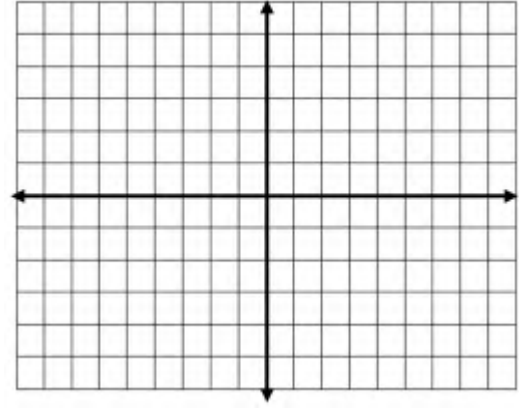
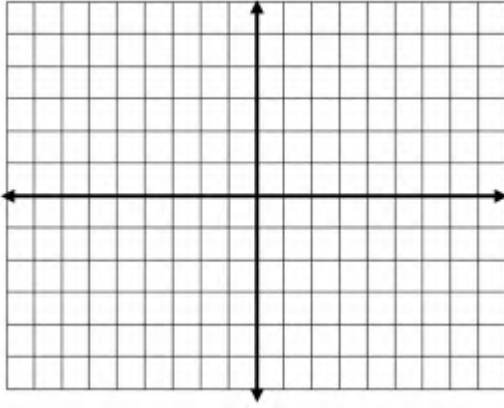


(9) $z = 30\text{ mi/h}$ ، باتجاه $S\ 60^\circ\ W$.

(10) $t = 20\text{ ft/s}$ ، باتجاه 065° .



[11] $m = 60 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي . [12] $u = 15 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 25^\circ E$. [11]



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلاً في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.

- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور a, c ؛ لهما الطول والاتجاه نفسهما، لذا هما متساويان، ويعبر عنه بالرموز: $a = c$.

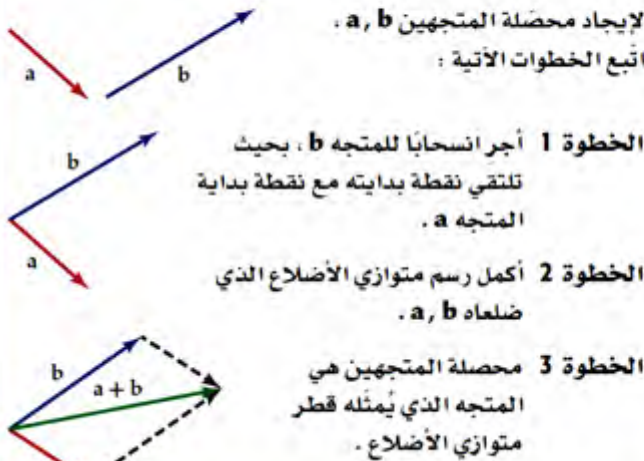
لاحظ أن $a \neq b$ ؛ لأن $|a| \neq |b|$ و $a \neq d$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.

- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه a ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-a$ ، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

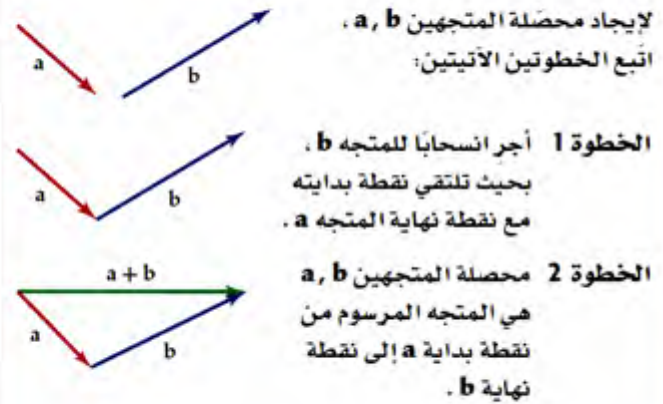
إيجاد المحصلة

مفهوم أساسي

قاعدة متوازي الأضلاع



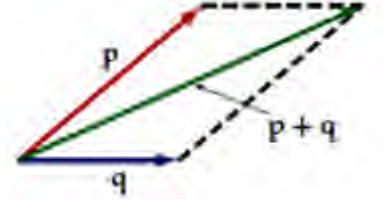
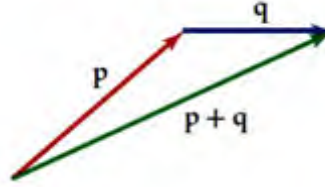
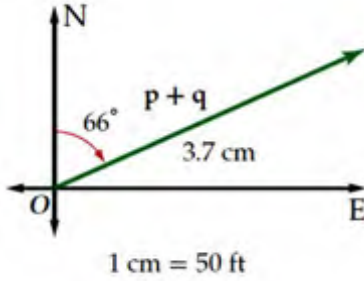
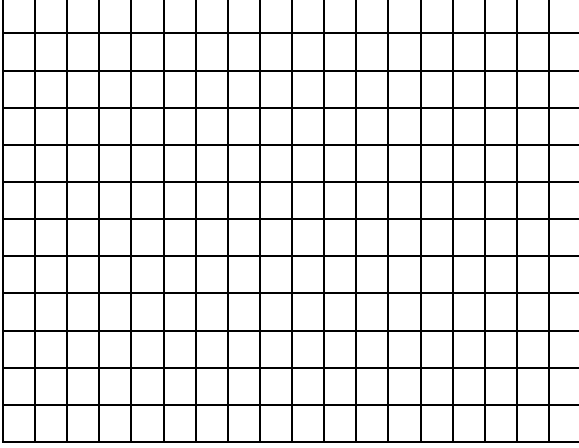
قاعدة المثلث



إيجاد محصلة متجهين

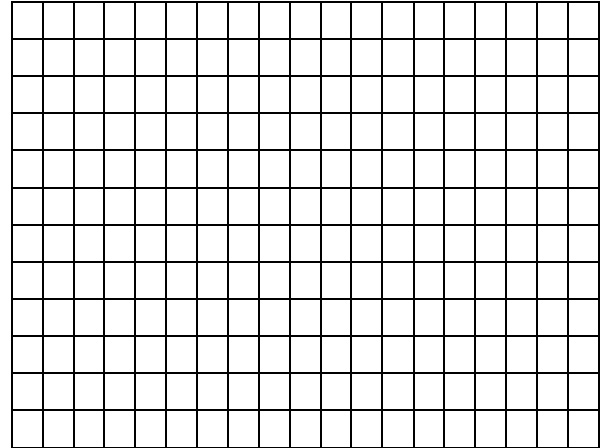
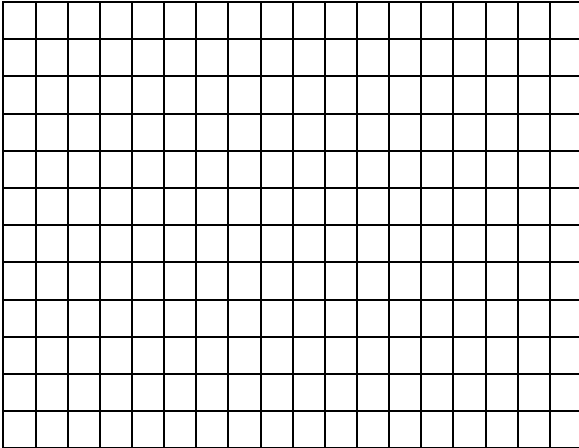
رياضة المشي: قطع عبد الله في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه $N 50^\circ E$ ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الرباعي؟ (13)

خطوات الحل

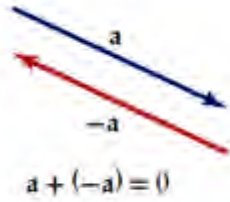
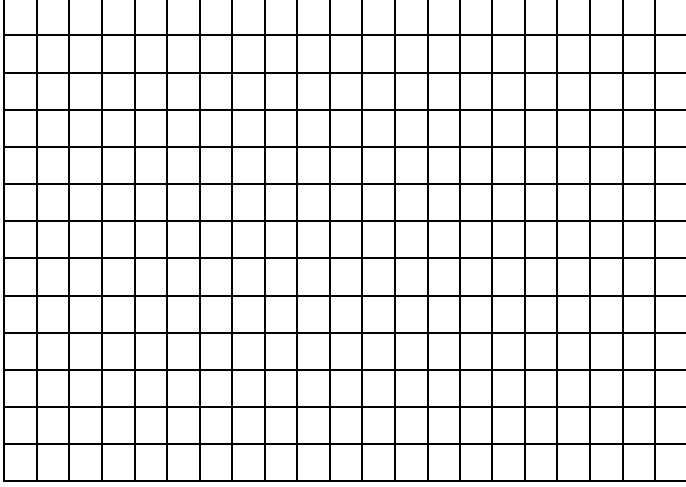


الإجابة

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملاً قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفق.



14 لعبة أطفال: رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s ، باتجاه 310° ، فارتدت باتجاه 055° ، وبسرعة 4 in/s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة والاتجاه الحقيقي لها. (قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي المتجه الصفري، ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $p - q$ ، اجمع معكوس q إلى p ؛ أي أن: $p - q = p + (-q)$. وكذلك يمكن ضرب المتجه في عدد حقيقي.

ضرب المتجه في عدد حقيقي

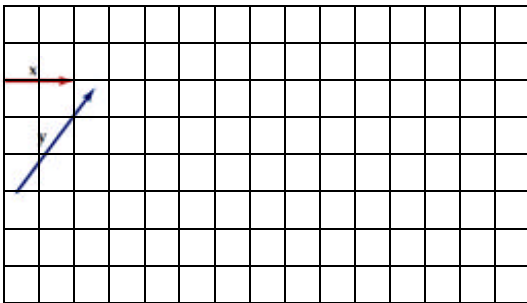
مفهوم أساسي

إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k ينتج المتجه kv الذي يوازي المتجه v ، ويكون طول المتجه kv هو $|k| |v|$. ويتحدد اتجاهه بإشارة k .

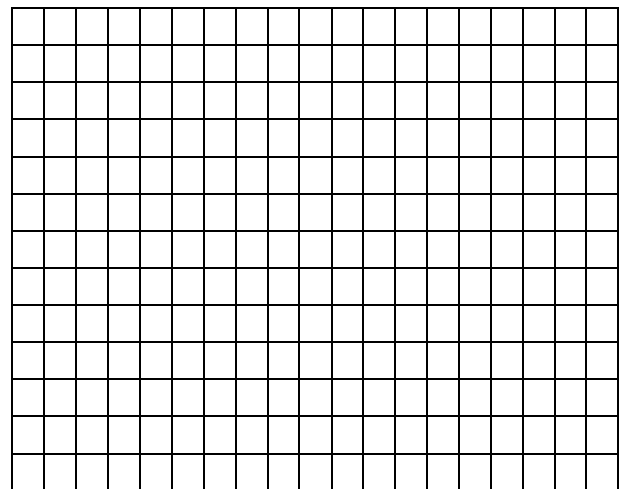
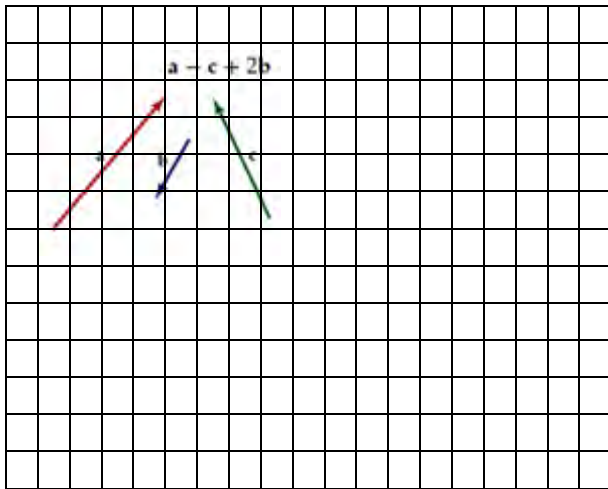
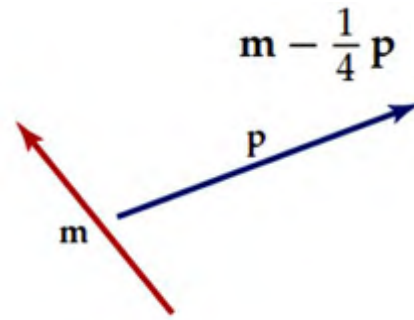
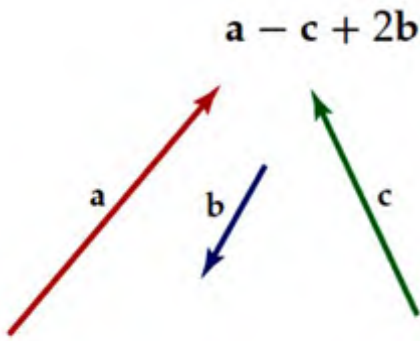
- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .

العمليات على المتجهات

15 ارسم المتجه $3x - \frac{3}{4}y$ ، حيث x, y متجهان كما في الشكل المجاور.



16 ارسـم المتجه الذي يُمثـل كلاً مما يأتي :



تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللذان ناتج جمعهما المتجه r ، مركبتين r . ومع أن مركبتين المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالباً تحليل المتجه إلى مركبتين متعامدتين، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

2 استخدامات المتجهات يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرًا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

الملاحة الجوية تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه 050° . إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي 125° ، فحدد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

(17)

يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 متر في الثانية عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل مترين في الثانية. أوجد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

(18)

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

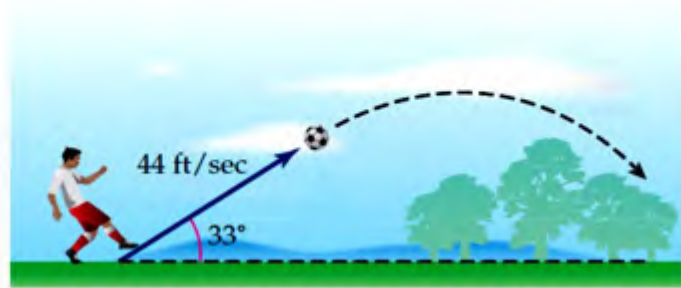
قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها 56° مع الأفقي (سطح الأرض).



(a) ارسم شكلاً يوضح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

(b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

كرة قدم: يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



(A) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

(B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .



تنظيف: يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف

بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. (مثال 5)

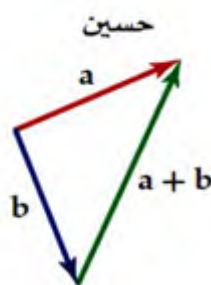
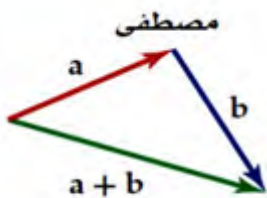
(21)

(a) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه القوة إلى

(b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

اكتشف الخطأ: حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a, b . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

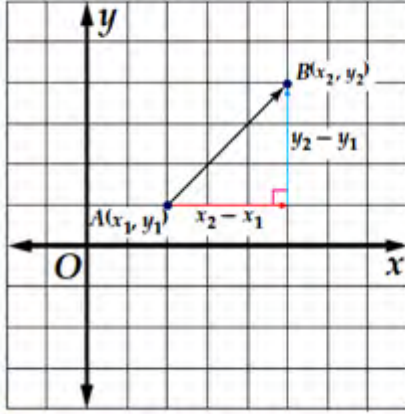
(22)



2 كتابة متجه كنوفيق خطي
لمتجهات الوحدة.

المتجهات في المستوى الإحداثي

1 تمثيل وإجراء العمليات على
المتجهات في المستوى
الإحداثي.



الصورة الإحداثية لمتجه

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

(الصورة المركبة تعني الصورة الإحداثية)

1 أوجد الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

.....

.....

.....

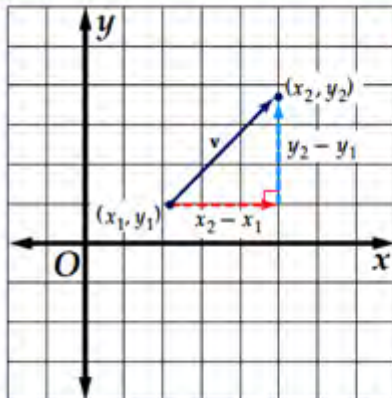
أوجد الصورة الإحداثية لـ $\vec{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلِّ ممَّا يأتي : (الصورة المركبة)

2 $A(-2, -7), B(6, 1)$ 3 $A(0, 8), B(-9, -3)$

.....

.....

.....



طول المتجه في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أوجد طول $\overline{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$. [4]

.....

.....

.....

أوجد طول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي :

$A(-2, -7), B(6, 1)$ [5]

.....

.....

.....

$A(0, 8), B(-9, -3)$ [6]

.....

.....

.....

$A(-3, 1), B(4, 5)$ [7]

.....

.....

.....

$A(-2, 6), B(1, 10)$ [8]

.....

.....

.....

$A(10, -2), B(3, -5)$ [9]

.....

.....

.....

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات

إذا كان $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

$$a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \quad \text{جمع متجهين}$$

$$a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle \quad \text{طرح متجهين}$$

$$ka = \langle ka_1, ka_2 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات $a = \langle 2, 5 \rangle$, $b = \langle -3, 0 \rangle$, $c = \langle -4, 1 \rangle$ (10)

$$b - 2a$$

$$c + a$$

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $a = \langle 2, 5 \rangle$, $b = \langle -3, 0 \rangle$, $c = \langle -4, 1 \rangle$ (11)

$$2c + 4a - b$$

$$-3c$$

$$4c + b$$

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة، ويرمز له بالرمز u ، ولإيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه v على طوله $|v|$.

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|}v$$

وبذلك يكون $|v|u = v$. ونكون قد عبّرنا عن المتجه غير الصفري v في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه v في عدد حقيقي.

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

12 أوجد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $v = \langle -2, 3 \rangle$.

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كلِّ ممَّا يأتي:

13 $w = \langle 6, -2 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

14 $x = \langle -4, -8 \rangle$

.....

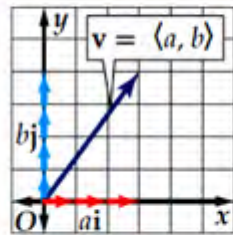
.....

.....

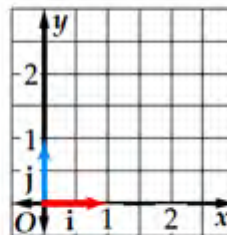
.....

.....

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $i = \langle 1, 0 \rangle$ ، $j = \langle 0, 1 \rangle$ على الترتيب كما في الشكل 3.2.3. كما يُسمَّى المتجهان i ، j متجهي الوحدة القياسيين.



الشكل 3.2.4



الشكل 3.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = \langle a, b \rangle$ على الصورة $v = ai + bj$ كما في الشكل 3.2.4؛ وذلك لأن:

$$\begin{aligned} v &= \langle a, b \rangle && \text{الصورة الإحداثية} \\ &= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle && \text{أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين} \\ &= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle && \text{اضرب متجه في عدد حقيقي} \\ &= ai + bj && \langle 1, 0 \rangle = i, \langle 0, 1 \rangle = j \end{aligned}$$

تسمى الصورة $ai + bj$ **توافقًا خطيًا** للمتجهين i, j . ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة i, j .

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

15 إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i, j .

.....

.....

.....

.....

.....

16 اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i, j في كلِّ ممَّا يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

.....

.....

.....

.....

.....

17 $D(-3, -8), E(7, 1)$

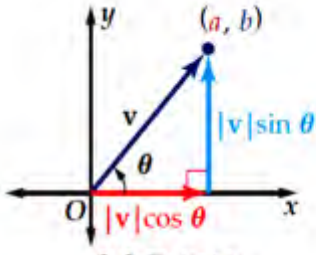
.....

.....

.....

.....

.....



الشكل 3.2.5

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 3.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$$\text{الصورة الإحداثية} \quad \mathbf{v} = \langle a, b \rangle$$

$$\text{عوض} \quad = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

$$\text{توافق خطي من } \mathbf{i}, \mathbf{j} \quad = |v| (\cos \theta) \mathbf{i} + |v| (\sin \theta) \mathbf{j}$$

(الصورة المركبة تعني الصورة الاحداثية)

إيجاد الصورة الإحداثية

18 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه 120° مع الأفقي .

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلِّ ممَّا يأتي :

$$|v| = 8, \theta = 45^\circ \quad 19$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$|v| = 24, \theta = 210^\circ \quad 20$$

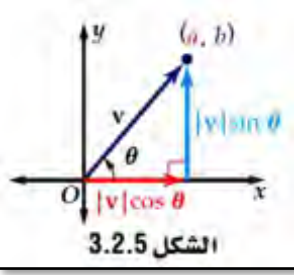
.....

.....

.....

.....

.....



فمن الشكل 3.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $v = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحل المعادلة المثلثية: $\tan \theta = \frac{b}{a}$ أو $\tan \theta = \frac{|v| \sin \theta}{|v| \cos \theta}$.

زوايا الاتجاه للمتجهات

21) أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

(a) $p = 3i + 7j$

.....

.....

.....

.....

(b) $r = \langle 4, -5 \rangle$

.....

.....

.....

.....

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتين مع الاتجاه الموجب لمحور x .

22) $-6i + 2j$

.....

.....

.....

.....

$\langle -3, -8 \rangle$ (23)

.....

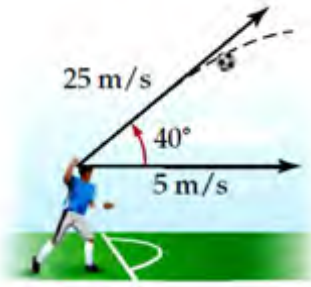
.....

.....

.....

.....

تطبيق العمليات على المتجهات



كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي ، أوجد محصلة السرعة ، واتجاه حركة الكرة.

(24)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

كرة قدم: أوجد محصلة السرعة ، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إيجاد مسقط متجه على آخر. 2

الضرب النقطي
ومساقط المتجهات

1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما.

الضرب النقطي
يعني الضرب
الداخلي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

لاحظ أنه خلافاً لعملية الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عدداً وليس متجهاً. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربيهما الداخلي صفراً. ويقال للمتجهين اللذين حاصل ضربيهما الداخلي صفراً: متجهان متعامدان.

المتجهان المتعامدان

مفهوم أساسي

يكون المتجهان غير الصفريين a , b متعامدين، إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$.

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

(1) $u = \langle 3, 6 \rangle$, $v = \langle -4, 2 \rangle$

(2) $u = \langle 2, 5 \rangle$, $v = \langle 8, 4 \rangle$

(3) $u = \langle -2, -3 \rangle$, $v = \langle 9, -6 \rangle$

(4) $u = \langle 3, -2 \rangle$, $v = \langle -5, 1 \rangle$

(5) $u = -i + 4j$, $v = 3i - 2j$

(6) $u = 11i + 7j$, $v = -7i + 11j$

نظرية

خصائص الضرب الداخلي (الضرب النقطي)

إذا كانت u, v, w متجهات، وكان k عدداً حقيقياً، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

الخاصية الإبدالية

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية التوزيع

$$k(u \cdot v) = k u \cdot v = u \cdot k v$$

خاصية الضرب في عدد حقيقي

$$0 \cdot u = 0$$

خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري

$$u \cdot u = |u|^2$$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

البرهان

$$u \cdot u = |u|^2 \text{ إثبات أن:}$$

$$u = \langle u_1, u_2 \rangle \text{ افترض أن:}$$

$$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 \quad \text{الضرب الداخلي}$$

اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |u|$$

$$= (\sqrt{u_1^2 + u_2^2})^2$$

$$= |u|^2$$

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

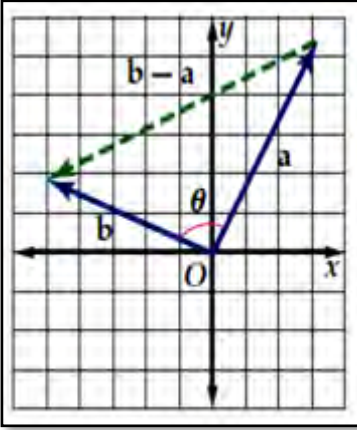
(7) استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية: (الضرب النقطي)

$$c = \langle -1, -7 \rangle$$

$$b = \langle 12, 16 \rangle$$

$$a = \langle -5, 12 \rangle$$

.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		



الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين a, b هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.

الزاوية بين متجهين

مفهوم أساسي

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كل مما يأتي:

$$u = \langle 6, 2 \rangle, v = \langle -4, 3 \rangle$$

8

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u = \langle 3, 1 \rangle, v = \langle 3, -3 \rangle$$

9

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

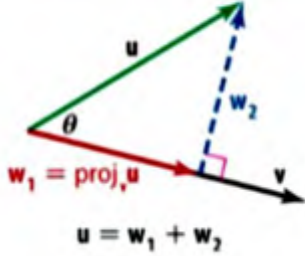
$$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle \quad (11)$$

(12) مواصلات: انطلق القطاران A, B من نقطة واحدة. إذا كان $(33, 12)$ يُمثل مسار القطار A، و $(55, 4)$ يُمثل مسار القطار B، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

2 مسقط المتجه في الدرس 1-8. تعلمت أنه يمكن تحليل متجه إلى مركبين متعامدين. بينما تكون هذه المركبات أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحياناً أن يكون أحدها موازياً للآخر.

المفهوم الأساسي مسقط u على v



افترض أن u و v متجهان غير صفريين. وافترض أن w_1 و w_2 مركبتا المتجه u بحيث w_1 نوازي v كما هو موضح. إذا، المتجه w_1 يسمى **مسقط المتجه u على v** . المشار إليه بالعبارة $\text{proj}_v u$ و

$$\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v$$

13 أوجد مسقط $u = \langle 3, 2 \rangle$ على $v = \langle 5, -5 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه u على v .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14 أوجد مسقط $u = \langle 1, 2 \rangle$ على $v = \langle 8, 5 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه u على v .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15 أوجد مسقط $u = \langle 4, -3 \rangle$ على $v = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه u على v .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16 أوجد مسقط $u = \langle -3, 4 \rangle$ على $v = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتجه u على v .

.....

.....

.....

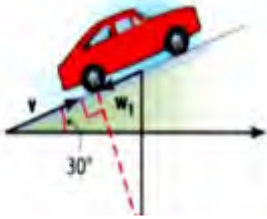
.....

.....

.....

.....

.....



17 السيارات تقف سيارة تزن 1360 كيلوجرام على تل مائل بزاوية 30° كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

18) **التزلج** تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية 60° . ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن نسرين والزلاجة 125 كيلوجرام؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....



19) **سيارة** يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

.....

.....

.....

.....

.....

.....



20) **تنظيف** يدفع إبراهيم مكينة كهربائية بقوة مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكينة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكينة مسافة 6 m؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

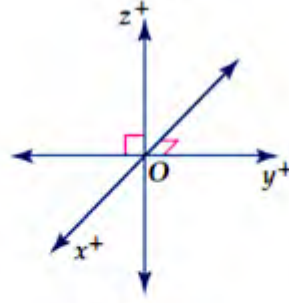
2 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

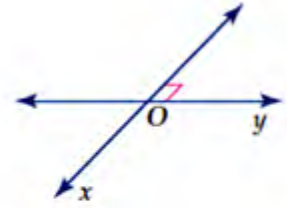
1 تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.



الشكل 6.4.3



الشكل 6.4.2



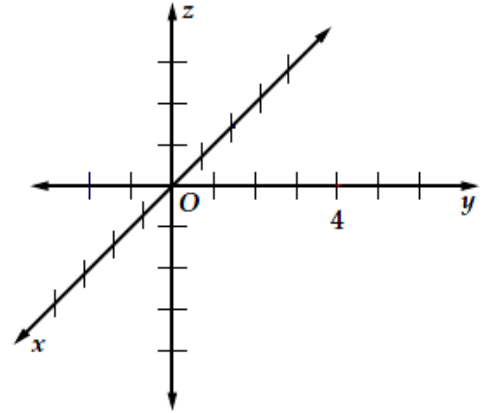
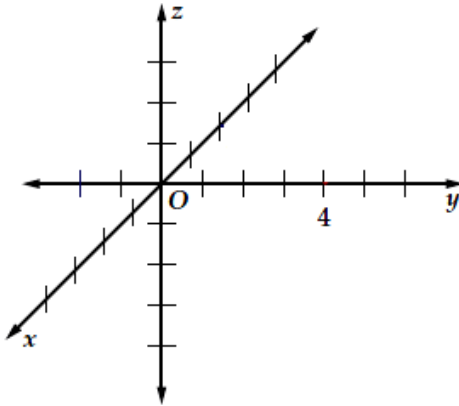
الشكل 6.4.1

تمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x, y, z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولاً النقطة (x, y) في المستوى xy ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثلها z .

1 عيّن كلاً من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

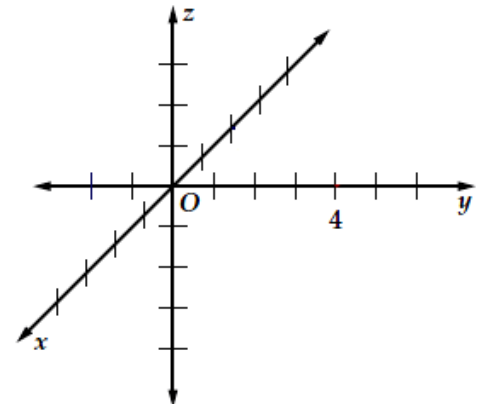
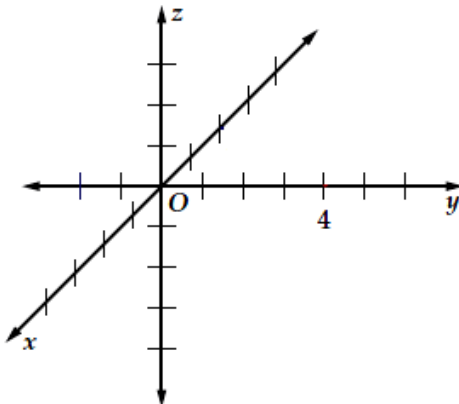
$(-2, 4, -5)$

$(4, 6, 2)$

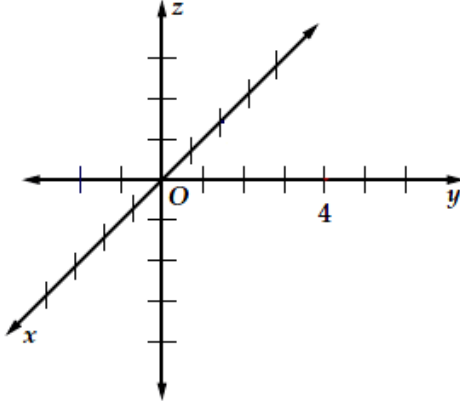


$(3, 2, -3)$

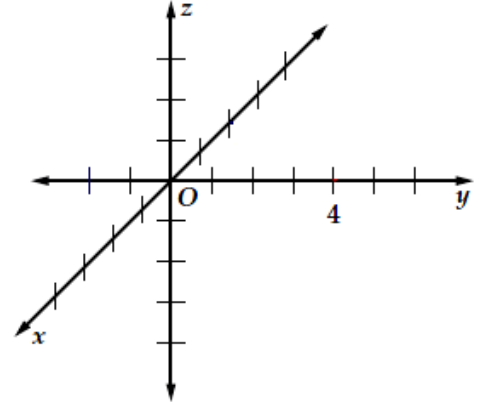
$(-3, -4, 2)$



(5, -4, -1)



(1, -2, -4)



صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

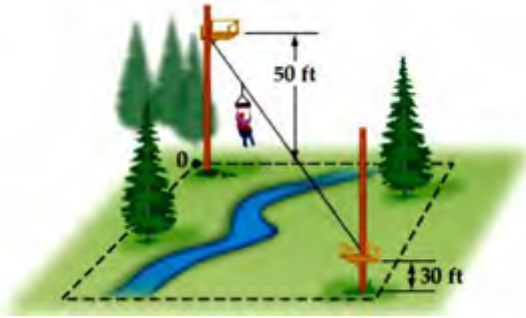
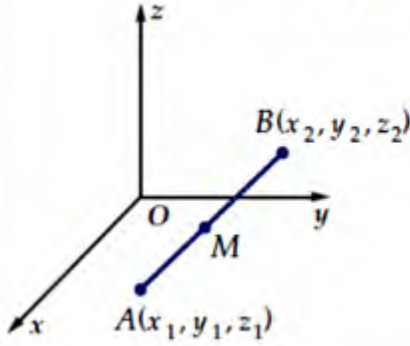
مفهوم أساسي

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



رحلة: تنحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصّتين تسمح للمتزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مثلت المنصّتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$ ، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصّتين إلى أقرب قدم.

.....

.....

.....

.....

(b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.

.....

.....

.....

.....

(3) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$ ، $(300, 150, 30000)$ ، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

.....

.....

.....

.....

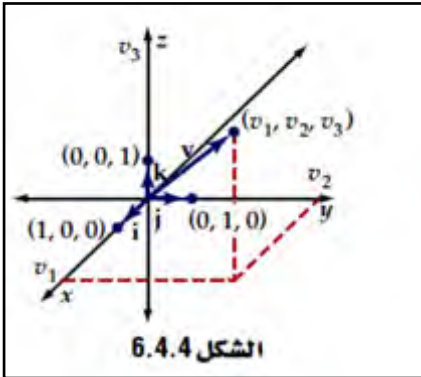
(B) إذا أطلقت ألعاب نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟
إرشاد: الميل = 5280 قدماً

.....

.....

.....

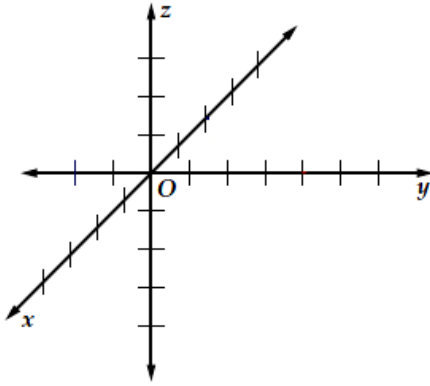
.....



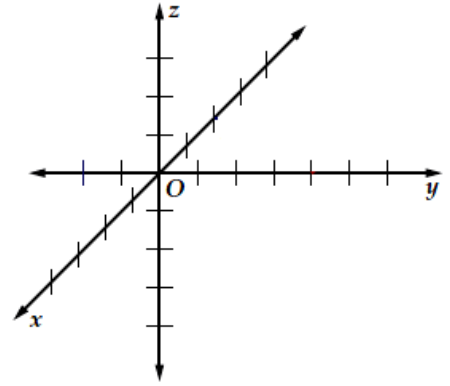
المتجهات في الفضاء إذا كان v متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية (v_1, v_2, v_3) ، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $0 = (0, 0, 0)$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $i = (1, 0, 0)$ ، $j = (0, 1, 0)$ ، $k = (0, 0, 1)$ ، كما في الشكل 6.4.4، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه v على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة i, j, k كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 i + v_2 j + v_3 k$.

(4) مثل بيانيًا كلاً من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

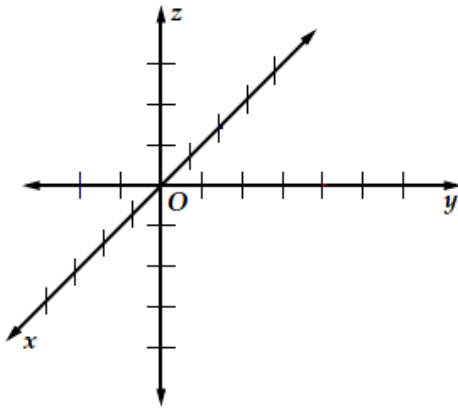
$$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$$



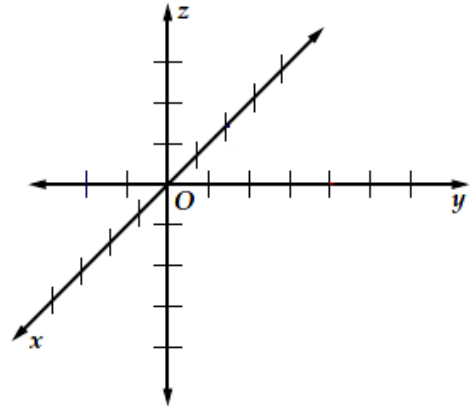
$$\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$$



$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



العمليات على المتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عدداً حقيقياً، فإن:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

جمع متجهين

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

طرح متجهين

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$$

ضرب متجه في عدد حقيقي

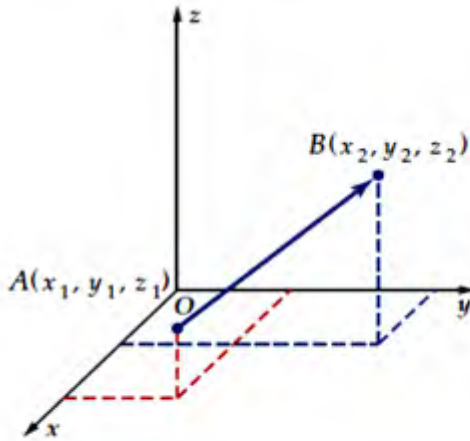
5 أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$, $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$
 $4y + 2z$

$$2w - z + 3y$$

6 أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$, $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$, $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$
 $4w - 8z$

$$3y + 3z - 6w$$

$$3y + 3z - 6w$$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

7 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

.....

.....

.....

.....

.....

8 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كل مما يأتي:

$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

.....

.....

.....

.....

.....

$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

.....

.....

.....

.....

.....

9 حدد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كل مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

$$A(3, 1, 2), B(5, -1, 1), C(1, 3, 1)$$

$$A(4, 3, 4), B(4, 6, 4), C(4, 3, 6) \quad 10$$

11 الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية 75° بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 كيلومتر في الساعة، فأوجد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة للنقطة الانطلاق.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12 الملاحة الجوية بعد إقلاع طائرة، انجبت شرقاً واستمرت في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمحور الأفقي. وكانت سرعتها في الهواء 250 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 كيلومتر في الساعة، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة للنقطة الإقلاع افترض أن النقطة أ في الغرب، والنقطة ب في الشمال والنقطة ك أعلى.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء واستخدام ناتج الضرب المتجهي في إيجاد المساحة والحجم

الضرب النقطي والضرب المتجهي في الفضاء

1 إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين متجهات في الفضاء

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

مفهوم أساسي

يُعرّف الضرب الداخلي للمتجهين: $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالاتي:
 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفرين a, b متعامدين ، إذا وفقط إذا كان
 $a \cdot b = 0$

(1) أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين:

$$u = \langle -7, 3, -3 \rangle, v = \langle 5, 17, 5 \rangle$$

$$u = \langle 3, -3, 3 \rangle, v = \langle 4, 7, 3 \rangle$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle$$

$$u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle$$

.....

.....

.....

.....

.....

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفرين a, b في الفضاء فإن $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$.

(2) أوجد قياس الزاوية θ بين u, v ، إذا كان: $u = \langle 3, 2, -1 \rangle, v = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزء من عشرة.

.....

.....

.....

.....

.....

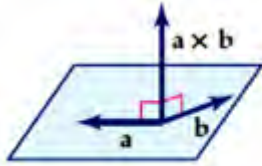
3 أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $u = -4i + 2j + k$, $v = 4i + 3k$ ، إلى أقرب منزلة عشرية.

.....

.....

.....

.....



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين a, b هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $a \times b$ ، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه $a \times b$ عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b .

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان: $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b

هو المتجه: $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$

إذا طبقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة i, j, k ، وإحداثيات كل من a, b ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $a \times b$.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة i, j, k في الصف 1 ←
 بوضع إحداثيات a في الصف 2 ←
 بوضع إحداثيات b في الصف 3 ←

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدّدة.

4 أوجد الضرب الاتجاهي $u \times v$ حيث: $u = \langle 3, -2, 1 \rangle$, $v = \langle -3, 3, 1 \rangle$ ، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلًا من u, v .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5 أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كل ممائتي، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلًا من u, v :

$$u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u = \langle -2, -1, -3 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$$

.....

.....

.....

.....

.....

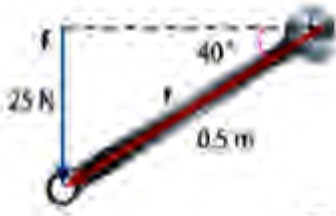
.....

.....

.....

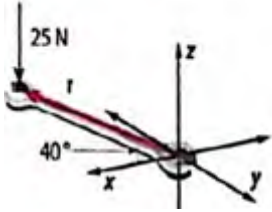
.....

.....



إصلاح السيارات يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 سنتيمتراً أو 0.5 متر. أوجد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 نيوتن لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون 40° أسفل محور x الموجب كما هو موضح.

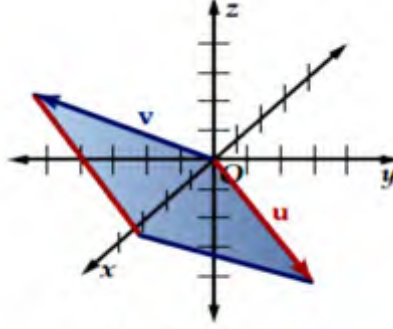
6



إصلاح السيارات أوجد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرة عندما يكون ذراع التوجيه زاوية 40° أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.

7

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلاً مقدار المتجه $u \times v$ أو المقدار $|u \times v|$ يُعبّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u, v ضلعان متجاوران كما في الشكل 6.5.1.



الشكل 6.5.1

8 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $u = 2i + 4j - 3k, v = i - 5j + 3k$ ضلعان متجاوران.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $u = -6i - 2j + 3k, v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

.....

.....

.....

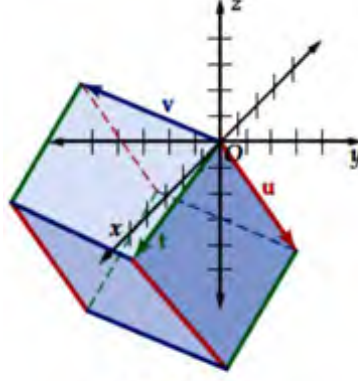
.....

.....

.....

.....

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكون أحرفاً متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 6.5.2. أدناه، إن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي لهذه المتجهات هو عدد يمثل حجم متوازي السطوح.



الشكل 6.5.2

مفهوم أساسي

الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, $v = v_1i + v_2j + v_3k$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات t, u, v يُعرف كالآتي

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $t = 4i - 2j - 2k$, $u = 2i + 4j - 3k$, $v = i - 5j + 3k$ (10) أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ (11)
أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مصنوفات التحويلات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

1 تحويل الأشكال ثلاثية الأبعاد باستخدام عمليات المصفوفات لوصف التحويل.

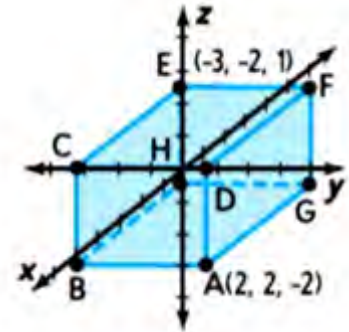
1 الرسوم المتحركة الحاسوبية استخدم كريس ويدج من استوديوهات Blue Sky Studios, Inc. برمجيات لعمل فيلم فاز بجائزة الأوسكار لعام 1999 لفئة أفلام الرسوم المتحركة القصيرة. تسمح البرمجيات للسيد ويدج برسم أجسام ثلاثية الأبعاد وتحريكها وتحويلها لابتكار حركة ولون واتجاه للضوء. العمليات الرياضية التي يستخدمها الحاسب الآلي شديدة التعقيد. وسنقوم بحل مسألة ذات صلة بالرسوم المتحركة في المثال 2.

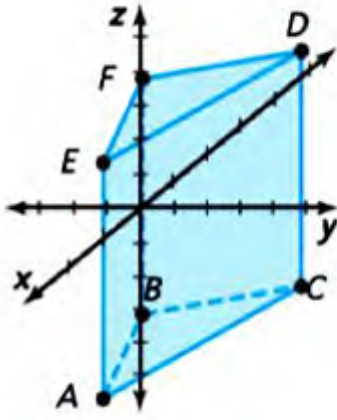
يمكن وصف الحركات الأساسية في الفضاء ثلاثي الأبعاد باستخدام المتجهات ومصفوفات التحويل. نذكر أنه يمكن تمثيل نقطة عند (x, y) في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد من خلال المصفوفة $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

يمكن التعبير عن نقطة عند (x, y, z) بالمصفوفة $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

أوجد إحداثيات رؤوس المنشور المستطيل ومثلها في صورة مصفوفة الرؤوس.

$$\overrightarrow{AE} = \langle -3 - 2, -2 - 2, 1 - (-2) \rangle \text{ أو } \langle -5 - 4, 3 \rangle$$





$$A(2, 1, -4)$$

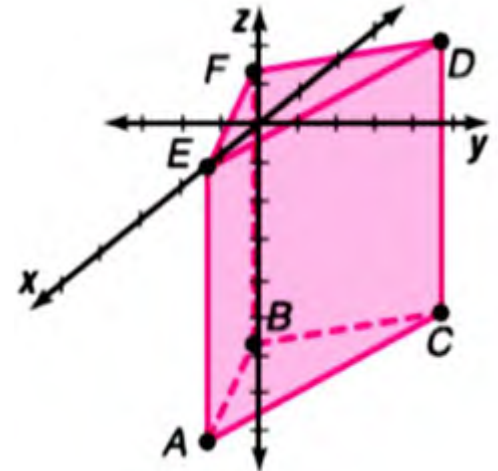
$$D(-2, 3, 3)$$

تحتاج إلى إزاحة منشور باستخدام المتجه $\vec{a} = \langle 3, 3, 0 \rangle$ لدى رؤوس المنشور الإحداثيات التالية.

$$B(-1, -1, -4) \quad C(-2, 3, -4)$$

$$E(2, 1, 3) \quad F(-1, -1, 3)$$

- اكتب مصنوفة سيكون لديها مثل ذلك التأثير على الشكل.
- أوجد إحداثيات رؤوس الصورة المزاخة.
- مثل الصورة المزاخة بيانياً.



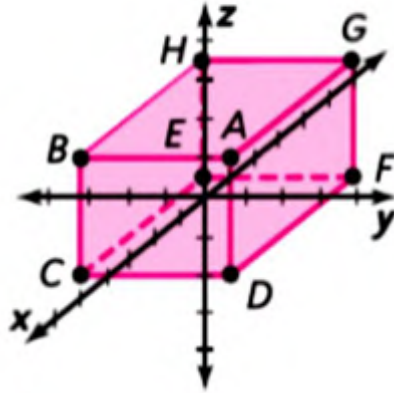
افترض أن M يمثل مصفوفة رأس المنشور المستطيل في المثال 1.

a. أوجد TM إذا كان $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

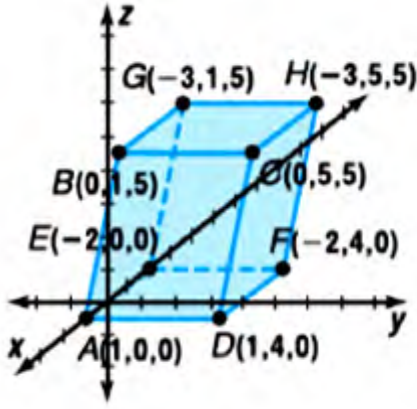
b. مثل الصورة الناتجة بيانيًا.

c. صف التحويل الذي تمثله المصفوفة T .

ثم مثل بيانيًا النقاط التي تمثلها المصفوفة الناتجة.



مصفوفات الانعكاس		
الصورة الناتجة	اضرب مصفوفة الرؤوس في:	بالنسبة لانعكاس على:
	$R_{yz-\text{المستوى}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	المستوى yz
	$R_{xz-\text{المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	المستوى xz
	$R_{xy-\text{المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	المستوى xy



متوازي المستطيلات هو منشور تكون جميع وجوهه متوازيات أضلاع كما هو موضح في التمثيل البياني.

- أوجد مصفوفة الرؤوس للتحويل D حيث $k = 2$.
- ارسم تمثيلاً بيانياً للشكل الناتج.
- ما التأثير الذي يحدثه D على الشكل الأصلي؟

