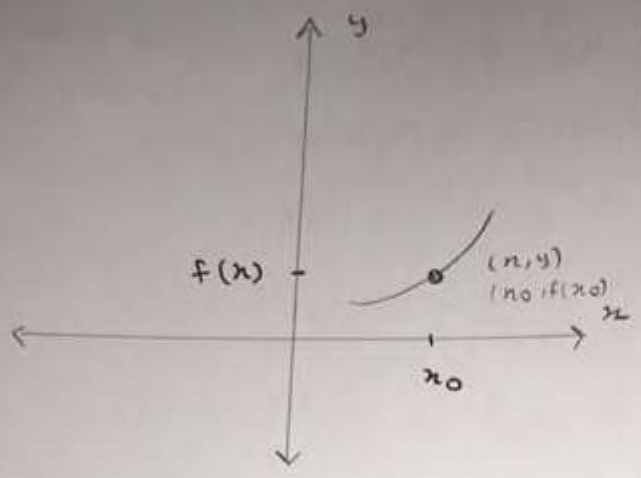
التقريبات الخطية



$$m = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x)$$

التقريب الخطي $f(x)$

صفحة 236

امثلة 1

1) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 1$, $\sqrt{1.2}$

$L(x) = ?!$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(1) + f'(1)(x - 1)$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \frac{(x)'}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$L(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$L(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

* إيجاد قيمة x ثم التعويض بالدالة الخطية :-

الأصلية $\sqrt{x}$ = الخطية $\sqrt{1.2} \rightarrow x = 1.2$

$L(1.2) = \frac{1}{2}(1.2) + \frac{1}{2}$

$L = 1.1$

صفحة 236

التمرين 1

3) $f(x) = \sqrt{2x+9}$ $\quad x_0 = 0 \;,\; \sqrt{8.8}$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(1) + f'(1)(x-1)$

$f(0) = \sqrt{2(0)+9} = 3$

$f'(x) = \dfrac{(2x+9)'}{2\sqrt{2x+9}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+9}} \rightarrow (2x+9)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2(0)+9}} = \dfrac{1}{3}$

$L(x) = 3 + \dfrac{1}{3}(x-0)$

$= 3 + \dfrac{1}{3}x$ أصلح!

$= \dfrac{1}{3}x + 3$

$\sqrt{2x+9} = \sqrt{8.8}$

$L(-0.1) = 3 + \dfrac{1}{3}(-0.1)$

$L = 2.96$

$2x + 9 = 8.8$

$2x = 8.8 - 9$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-0.2}{2}$

$x = -0.1$

4) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$, $\frac{2}{0.99}$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(x) = 2x^{-1}$$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f'(1) = -2(1)^{-3} = -2$$

$$L(x) = 2 - 2(x-1)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{0.99} \Rightarrow x = 0.99$$

$$L(0.99) = 2 - 2(0.99-1)$$

$$L = 2.02$$

صفحة 236

5) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = 0$, $\sin(0.3)$

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(0) = \sin 3(0) = 0$

$f'(x) = (3x)' \cdot \sin'(3x)$

$= 3 \cos 3x$

$f'(0) = 3 \cos 3(0) = 3$

$L(x) = 0 + 3(x - 0)$

$= 3x$

$\sin 3x = \sin 0.3$

$L(0.1) = 3(0.1)$

$L = 0.3$

$\sin 3x = \frac{\sin 0.3}{3}$

$x = 0.1$

6) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$, $\sin(3.0)$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$$

$$f(\pi) = \sin \underset{180}{\pi} = 0$$

$$f'(x) = x' \sin' x$$

$$= 1 \cos x$$

$$f'(\pi) = 1 \cos(\pi)$$

$$= -1$$

$$L(x) = 0 - 1(x - \pi)$$

$$\sin x = \sin 3 \longrightarrow x = 3$$

$$L(3) = 0 - 1(3 - \pi)$$

$$= 0.14$$

صفحة 236

امثلة 3

* استخدم التقريبات الخطية لتقدير الكمية :-

7-a : $\sqrt[4]{16.04}$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

العدد القريب

$x = 16.04 \Rightarrow x_0 = 16$

من 16.04

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_0) = f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$f'(16) = \left((x)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} (16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{32}$$

$$L(x) = 2 + \frac{1}{32} (16.04 - 16)$$

$$= 2.0012$$

7-b : $\sqrt[4]{16.08}$

$f(16) = 2 \quad f'(16) = \frac{1}{32}$

$x_0 = 16$

$x = 16.08$

$$L(x) = 2 + \frac{1}{32} (16.08 - 16)$$

$$= 2.0025$$

7-c : $\sqrt[4]{16.16}$

$f(16) = 2 \quad f'((6) = \frac{1}{32}$

$x_0 = 16$

$x = 16.16$

$$L(x) = 2 + \frac{1}{32} (16.16 - 16)$$

$$= 2.005$$

صفحة 236 استخدم الاستكمال الداخلي الخطي لتقدير الكمية المطلوبة :-

مثال 4

* قدرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بالسعر x AED كما هو معطى في الجدول ..

x_0	20	30	40
$f(x_0)$	18	14	12

قدر عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر

(a) 24 AED $\quad L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1) $x = 24$ نبحث عن x_0 الرقم القريب من 24 في الجدول :

$x = 24 \quad x_0 = 20$

$f(x_0) = f(20) = \underline{18}$ ← من الجدول

2) نوجد $f'(x_0)$ من خلال أخذ x_0 نقطة بجانبها من الجدول ونوجد $f' = m$

$$f'(20) = \frac{f(30) - f(20)}{30 - 20} = \frac{14 - 18}{10}$$

$$= \frac{-4}{10} = -0.4$$

$$L(x) = 18 + -0.4(24 - 20)$$

$$= 16.4$$

(b) 36 AED

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$x = 36 \quad x_0 = 40$

$f(x_0) = f(40) = 12$

$$f'(40) = \frac{f(40) - f(30)}{40-30} = \frac{12-14}{40-30} = -\frac{2}{10} = -0.2$$

$$L(x) = 12 + -0.2\,(36-40) = 12.8$$

صفحة 236 / التمرين 4

11) مخرج رسوم متحركة يدخل الموقع $f(t)$ لرأس شخصية ما بعد t إطار من الفيلم كما هو موضح في الجدول :

t	200	220	240
$f(t)$	128	142	136

(a) 208

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$x = 208 \quad x_0 = 200$

$f(x_0) = f(200) = 128$

$$f'(200) = \frac{f(220) - f(200)}{220 - 200} = \frac{142-128}{220-200} = 0.7$$

$$L(x) = 128 + 0.7\,(208 - 200)$$

$$= 133.6$$

(b) 232 $\quad L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$x = 232 \quad x_0 = 240$

$f(x_0) = f(240) = 136$

$$f'(240) = \frac{f(240) - f(220)}{240 - 220} = \frac{136 - 142}{240 - 220} = -0.3$$

$$L(x) = 136 + -0.3(232 - 240)$$

$$= 138.4$$

امثلة 5 : طريقة نيوتن في تقريب أصفار الدالة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

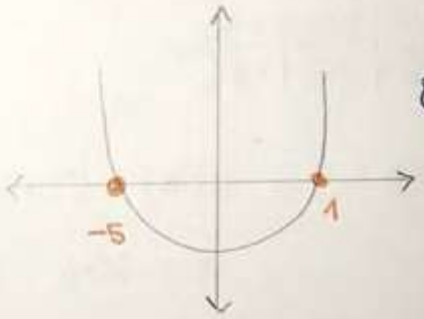
$(x-1)(x+5)$

$x = 1$

$x = -5$

حلول ، أصفار ، جذور

نقاط التقاطع مع محور x



---

* طريقة الأصفار :

x	-5	-3	-1		2
y	-3	-2	1		0

صفر

بينهم يوجد صفر

تحول + ← -

- ← +

$y = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

صفحة 236 / تمرين 5

استخدمي طريقة نيوتن مع قيم x_0 المعطاة لحساب x_1 ، x_2 بدوي:

13) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ، $x_0 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 9x$ $\Rightarrow$ $x_1 = 1 - \frac{3}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$f'(1) = 3(1)^2 + 9(1) = 9$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \longrightarrow x_2 = \frac{2}{3} - \frac{f(\frac{2}{3})}{f'(\frac{2}{3})}$$

$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 + 3(\frac{2}{3})^2 - 1 = \frac{17}{27} = 0.629$

$f'(x) = 3x^2 + 9x$

$f'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 + 9(\frac{2}{3}) = \frac{16}{3} = 5.33$

$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{0.629}{5.33} = \boxed{0.548}$

14) $x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0 \quad x_0 = -1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)}$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) - 1 = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 1$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) - 1 = -6$$

$$x_1 = -1 - \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{f(-\frac{1}{2})}{f'(-\frac{1}{2})}$$

$$f(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})^3 + 4(-\tfrac{1}{2})^2 - (-\tfrac{1}{2}) - 1 = \frac{3}{8}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 1$$

$$f'(-\tfrac{1}{2}) = 3(-\tfrac{1}{2})^2 + 8(-\tfrac{1}{2}) - 1 = -\frac{17}{4}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{17}{4}} = -0.411$$

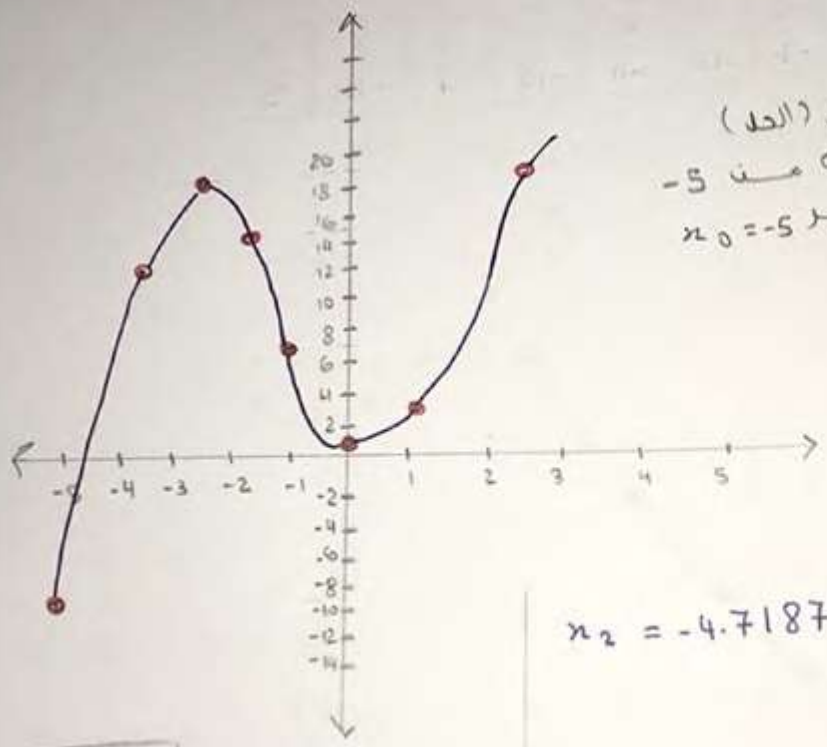
صفحة 236 / الكتاب

* استخدمي طريقة نيوتن لايجاد جذر تقريبي (دقيق لست منازل عشرية). ارسمي.

17) $x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-9	13	19	15	7	1	3	19	55	117	211

ملاحظة:
لايجاد الـ y
mode → 7
= -5 =5=



الصفر (الحل) قريب من -5
نعتبر $x_0 = -5$

$x_0 = -5$

$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = -5 - \frac{(-5)^3 + 4(-5)^2 - 3(-5) + 1}{3(-5)^2 + 8(-5) - 3}$

$x_1 = -4.718750$

$x_2 = -4.718750 - \frac{(-4.718750)^3 + 4(-4.718750)^2 - 3(-4.718750) + 1}{3(-4.718750)^2 + 8(-4.718750) - 3}$

$x_2 = -4.686202$

$x_3 = -4.718750 - \frac{(-4.686202)^3 + 4(-4.686202)^2 - 3(-4.686202) + 1}{3(-4.686202)^2 + 8(-4.686202) - 3}$

$x_3 = -4.6857796$

صفحة 236 / التمرين 5

استخدمي طريقة نيوتن (أذكري الدالة التي تستخدمها) لتقدير العدد المعطى :

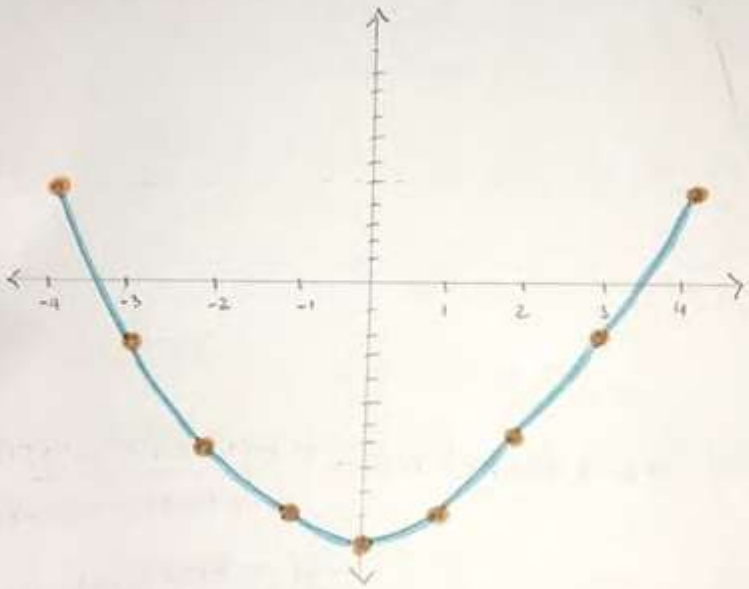
25) $\sqrt{11}$

$x = \sqrt{11}$

الدالة

$x^2 = 11 \longrightarrow \boxed{x^2 - 11 = 0}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	-2	-7	-10	-11	-10	-7	-2	5



$\boxed{x_0 = 3}$

$\boxed{f'(x) = 2x}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(3)^2 - 11}{2(3)}$$

$\boxed{x_1 = 3.33}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 3.33 - \frac{(3.33)^2 - 11}{2(3.33}$$

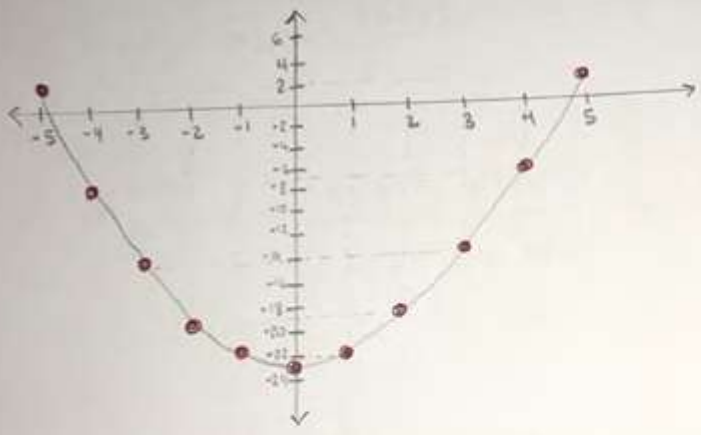
$\boxed{x_2 = 3.321}$

26) $\sqrt{23}$

$x = \sqrt{23}$

$x^2 = 23 \longrightarrow x^2 - 23 = 0$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	x
y	2	-7	-14	-19	-22	-23	-22	-19	-14	-7	2	y



$x_0 = 5$

$x_0 = 5$

$f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 5 - \frac{(5)^2 - 23}{2(5)}$$

$x_1 = 4.8$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 4.8 - \frac{(4.8)^2 - 23}{2(4.8)}$$

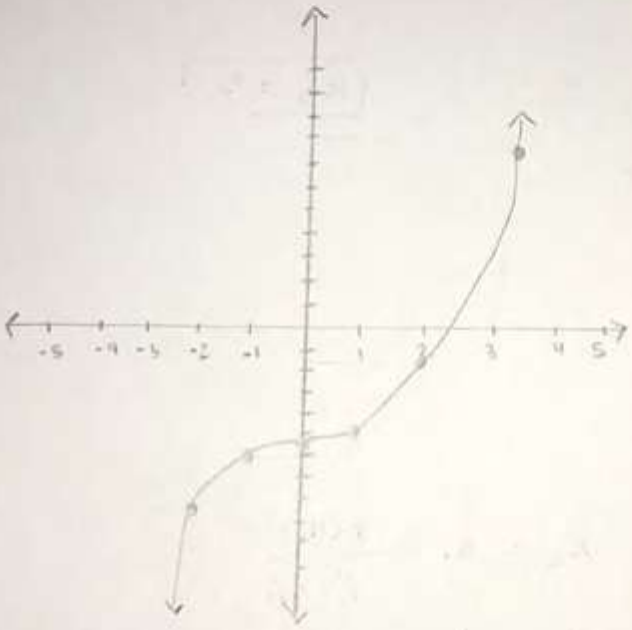
$x_2 = 4.795$

27) $\sqrt[3]{11}$

$x = \sqrt[3]{11}$

$x^3 = 11 \rightarrow x^3 - 11 = 0$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-38	-19	-12	-11	-10	-3	16	53



$x_0 = 2$

$f'(x) = 3x^2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{(2)^3 - 11}{3(2)^2}$$

$x_1 = 2.25$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 2.25 - \frac{(2.25)^3 - 11}{3(2.25)^2}$$

$x_2 = 2.22$

صفحة 236 / الأستاذ ؟

اشرحي ماذا تفشل طريقة نيوتن ان أمكن ؟!

31) $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0 \quad , \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = 12x^2 - 7x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{4(0)^3 - 7(0)^2 + 1}{12(0)^2 - 7(0)} = \boxed{\frac{1}{0}}$$

* ملاحظة:

- تفشل طريقة نيوتن عندما يكون $f'(x_0) = 0$
- بالرسم المماس أفقي ..

الدرس 2 : الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

صفحة 247

أوجد النهايات المعطاة :

1) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{-2+2}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0}$

سابقاً:

$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$

- باستخدام لوبيتال :
« نشتق البسط والمقام » :

$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)'}{(x^2-4)'} = \boxed{\frac{0}{0}}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{x \to -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$

ملاحظة :
الخطوة الأولى هي التعويض

2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ ✓ يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2(2)}{2(2)-3} = 4$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4}$

سابقاً:

$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}$

$= \frac{3 - \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = 3$

سابقاً "بطريقة الإيجاد" [نقسم على أكبر أس].

$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{x \to \infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$

ملاحظة :
$\frac{ax^n \ldots}{ax^m \ldots} = \frac{a}{b}$
$n = m$

صفحة 247 أوجد النهايات التالية :

4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+3} = \frac{-\infty}{-\infty}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x+4} = 0$

ملاحظة: $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

---

5) $\lim_{t \to 0} \frac{e^{2t}-1}{t} = \frac{e^{20}-1}{0} = \frac{0}{0}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{t \to 0} \frac{(2t)' e^{2t} \ln e}{1} = \frac{2e^{2t}}{1}$

$\lim_{t \to 0} \frac{2e^{2t}}{1} = \frac{2}{1} = 2$

---

6) $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{e^{3t}-1} = \frac{\sin 0}{e^{3(0)}-1} = \frac{0}{0}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{t \to 0} \frac{(t)' \sin' t}{(3t)' e^{3t} \ln e} = \frac{1 \cos t}{3 e^{3t}}$

$\lim_{t \to 0} \frac{1 \cos t}{3 e^{3t}} = \frac{1}{3}$

للتذكير:

$$(\sin^{-1} t)' = \frac{t'}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (\tan^{-1} t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(\cos^{-1} t)' = \frac{-t'}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (\cot^{-1} t)' = \frac{-1}{1+t^2}$$

صفحة 247 أوجد في النهايات الآتية:

7) $\lim_{t \to 0} \frac{\tan^{-1} t}{\sin t} = \frac{\tan^{-1} 0}{\sin 0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{(t)' \sin' t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1 \cos t} = \frac{\frac{1}{1+0^2}}{1 \cos 0} = 1$$

---

8) $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\sin^{-1} t} = \frac{\sin 0}{\sin^{-1} 0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{t \to 0} \frac{(t)' \sin' t}{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{1 \cos t}{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{1 \cos 0}{\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}} = 1$$

---

9) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2\pi}{\sin \pi} = \left[\frac{0}{0}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\sin 2 \times 180$

$\sin 180$ بالدرجات

$$\lim_{x \to \pi} \frac{(2x)' \sin' 2x}{x' \sin x} = \frac{2 \cos 2x}{1 \cos x} = \frac{2 \cos 2 \times 180}{1 \cos 180}$$

$$= \frac{2}{-1} = -2$$

صفحة 247 أوجدي النهايات التالية :

10) $\lim_{x \to -1} \frac{\cos^{-1} x}{x^2 - 1} = \frac{180}{0}$ ← لا يمكن تطبيق لوبيتال

* النهاية غير موجودة

---

11) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\sin 0 - 0}{(0)^3} = \frac{0}{0}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{x \to 0} \frac{x' \sin' x - x'}{(x^3)'} = \frac{1 \cos x - 1}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 \cos x - 1}{3x^2} = \frac{1 \cos 0 - 1}{3(0)^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{x' \cos' x - 1'}{(3x^2)'} = \frac{-\sin x}{6x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} = \frac{-\sin 0}{6(0)} = \frac{0}{0}$$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} = \frac{-\cos x}{6} = \frac{-\cos 0}{6} = \frac{-1}{6}$$

صفحة 247 أوجد النهايات التالية:

13) $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \boxed{\frac{0}{0}}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{t-1} = \frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{1}$

$\lim_{t\to 1} \frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2}$

---

14) $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = \frac{\ln 1}{1-1} = \boxed{\frac{0}{0}}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = \frac{\frac{1}{t}}{1} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

صفحة 248

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

① $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{3x^2}{e^x} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

② $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{6x}{e^x} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

③ $\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0$

ملاحظة:

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

صفحة 248 أوجدي النهايات التالية:

16) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

① $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4} = \frac{e^x}{4x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

② $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{4x^3} = \frac{e^x}{12x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

③ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{12x^2} = \frac{e^x}{24x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← نطبق لوبيتال مرة أخرى

④ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{24x} = \frac{e^x}{24} = \frac{\infty}{24} = \infty$

ملاحظة:

$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{0} = \pm\infty$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

أوجد النهايات التالية :

21) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

---

22) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

---

23) $\lim_{t \to \infty} te^{-t} \quad \frac{t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\infty} = 0$$

---

24) $\lim_{t \to \infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = \infty \cdot \sin\left(\frac{1}{\infty}\right) = [\infty \cdot 0]$

يمكن تطبيق لوبيتال .

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\not{t} \sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{\not{t}}} = \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \frac{(\frac{1}{t})\sin\frac{1}{t}}{(\frac{1}{t})} = \sin\frac{1}{t} \Longrightarrow = \cos\frac{1}{t}$$

$$\lim_{x \to \infty} \cos\frac{1}{t} = \cos\frac{1}{\infty} = \cos 0 = 1$$

السبع غير المعروفة الأخرى

∞^0 $\quad \infty-\infty$ $\quad 0\cdot\infty$ $\quad 0^0$ $\quad 1^\infty$

صفحة 248 أوجد النهايات التالية :

26) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\sin t)}{\sin t} = \frac{0}{0}$ ← يمكن تطبيق لوبيتال

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\sin t)'\sin'(\sin t)}{\sin' t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t \cdot \cos(\sin t)}{\cos t}$$

$$= \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1$$

27) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)} = \frac{\sin(\sinh 0)}{\sinh(\sin 0)} = \frac{0}{0}$ ← بالآلة hyp =

* هذا دون آلة:

$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)'\sin'(\sinh x)}{(\sin x)'\sinh'(\sin x)}$$

$$= \frac{\cosh x \cdot \cos(\sinh x)}{\cos x \cdot \cosh(\sin x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh 0 \cdot \cos(\sinh 0)}{\cos 0 \cdot \cosh(\sin 0)} = \frac{1}{1} = 1$$

ملاحظة:

$\sinh x \longrightarrow \cosh x$

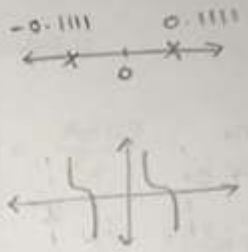
$\cosh x \longrightarrow \sinh x$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

صفحة 248 : أوجد النهايات التالية :

29) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{-\infty}{\infty}$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x'}{x}}{-\csc^2 x} = \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{x} \times \sin x$

$= -1 \times \sin 0$

$= \boxed{0}$

ملاحظة:

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

المثال 2.4 : الاستخدام الخاطئ لقاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{1}=2$$

$\frac{0}{0}$ يمكن تطبيق لوبيتال

$\frac{0}{1}=0$ لا يمكن تطبيق لوبيتال

α

صفحة 248 أوجدي كل الأتي :

41) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{0}$ لا يمكن تطبيق لوبيتال

α

---

42) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$ يمكن تطبيق لوبيتال

$\frac{1}{0}$ لا يمكن تطبيق لوبيتال

α

صفحة 248 أوجد النهايات التالية :

18) $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{\cos 0}{\sin 0} - \frac{1}{0} \right) = \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right)$$

$$= \boxed{\infty - \infty}$$

* توحيد المقامات

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x \cdot x}{\sin x \cdot x} - \frac{1 \cdot \sin x}{x \cdot \sin x} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin x} \right) = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x' \cdot \cos x + x (\cos x)' - x' \cdot \sin x}{x' \cdot \sin x + x \cdot \sin x'} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \frac{\cos 0 - 0 \sin 0 - \cos 0}{\sin 0 + 0 \cos 0}$$

$$= \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x}$$

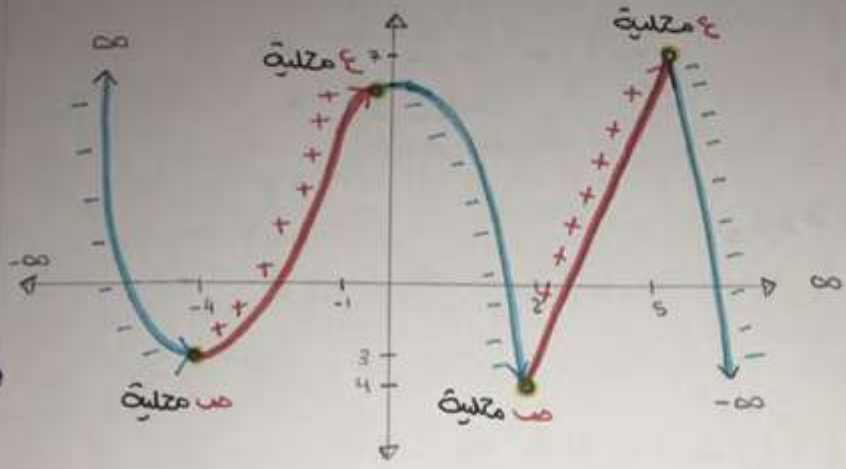
$$= \frac{(-x)' \sin x + -x (\sin x)'}{1 (x)' \sin' x + (x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)'}$$

$$= \frac{-\sin x - x \cdot \cos x}{\cos x + \cos x - \sin x} = \frac{-\sin 0 - 0 \cos 0}{\cos 0 + \cos 0 - \sin 0} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$\cos x + \cos x + x (-\sin x)$

الدرس 3 : القيم العظمى والصغرى

مطلقة — محلية



تزايد + : $(-4, -1)$ ، $(2, 5)$

تناقص − : $(-\infty, -4)$ ، $(-1, 2)$

عظمى (ع)

$x = -1 \rightarrow \boxed{y = 6}$ القيمة العظمى

$x = 5 \rightarrow \boxed{y = 7}$

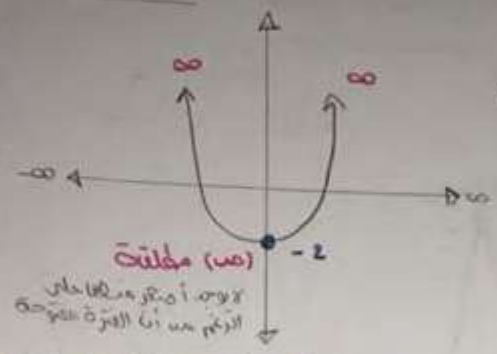
صغرى (ص)

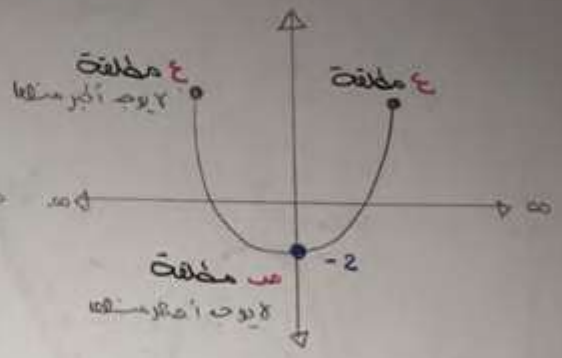
$x = -4 \rightarrow \boxed{y = 3}$ القيمة

$x = 2 \rightarrow \boxed{y = 4}$

* ملاحظة : في الغالب إذا كانت الرسمة ↕ ↕ سهم نحو الأعلى والآخر نحو الأسفل لا يوجد قيم كبرى أو صغرى مطلقة إنما يوجد محليان.

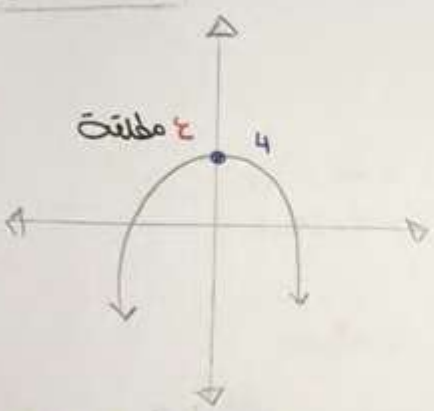
$y = x^2 - 2$

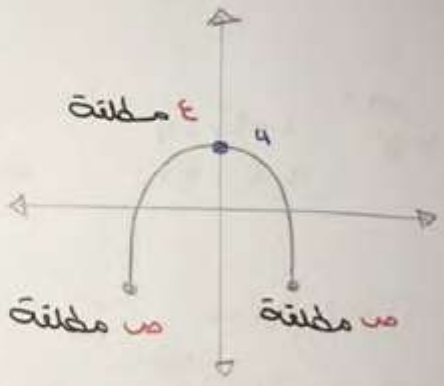




* لا يوجد قيم عظمى لا محلية ولا مطلقة

$y = -x^2 - 4$





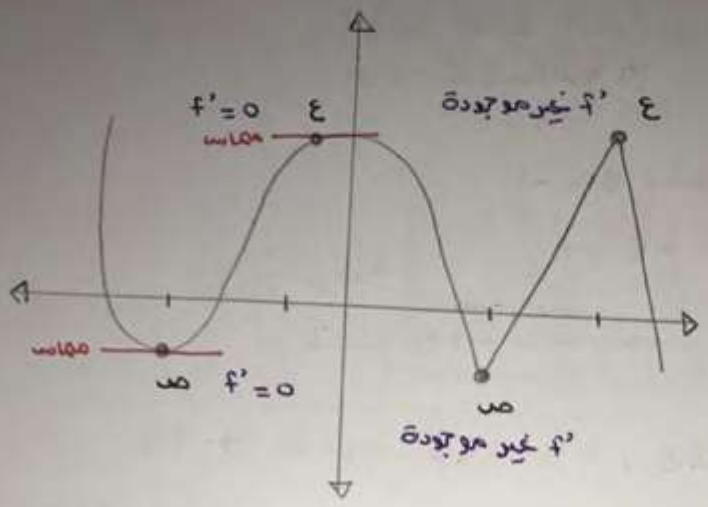
* لا يوجد قيمة صغرى لا محلية ولا مطلقة .

ملخص :-

ع ، ص المطلقة :

- فترة مغلقة
  - يوجد ع و ص إذا كانت الفترة مغلقة
- فترة مفتوحة
  - طرفا الدالة مختلفان عندها لا يوجد ع أو ص مطلقة كما في الرتبة 2
  - طرفا الدالة متماثلان عندها يوجد ع أو ص مطلقة كما في الرتبة 2

القيم القصوى
(العظمى - الصغرى)



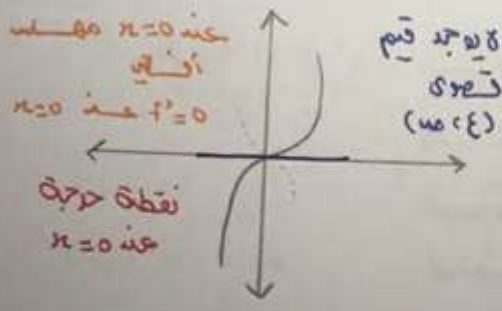
- القيم القصوى (ع ، صـ) موجودة حيث :-

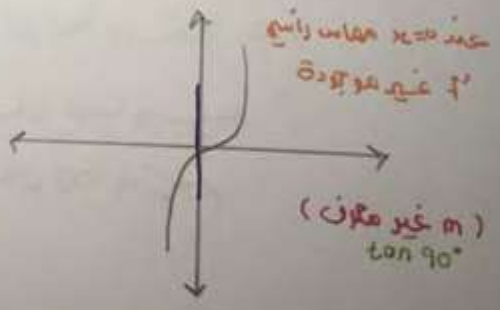
f' = 0 مماس أفقي ← → f' غير موجودة [رأس مدبب، إلتقاء مستقيمين] ∧ ∧ ∧

- النقاط الحرجة هي قيم x التي تكون فيها f' = 0 أو f' غير موجودة.

على x

- كل قيم ع ، صـ هي حرجة
- كل نقطة حرجة ليست ~~بالضرورة~~ بالضرورة قصوى (ع ، صـ)





* ملاحظة :-

- ع ، صـ ← أجزاء حرجة
- حرجة ← ليست بالضرورة (ع ، صـ)

صفحة 258 أوجدي كل الأعداد الحرجة بيدوياً، ارسمي، هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية ؟!

3) (a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 2x + 5 = 0$

نقطة حرجة

$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \rightarrow x = -2.5$

$f(-2.5) = (-2.5) + 5(-2.5) - 1 = 17.75$

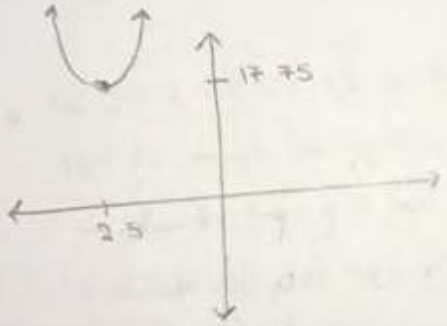
للتذكير: خطوات الحل:

1) نشتق ونجعل المشتقة = 0

2) نحل f'

3) نوجد $f(-2.5)$

4) نوجد y للنقطة الحرجة.



x	-3	-2.5	-2	0
y		17.75		

طريقة الرسم:

نأخذ النقطة الحرجة ونشكل جدول ونأخذ قيم على يمين ويسار النقطة الحرجة ونرسم الشكل العام.

7) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 = 0$

$x^2(4x - 9) = 0$

$x^2 = 0$ | $4x - 9 = 0$

$x = 0$ | $4x = 9$, $x = \frac{9}{4}$, $x = 2.25$

نقاط حرجة ..

$f(0) = 0^4 - 3(0)^3 + 2 = 2$ ← قيمة عظمى محلية

$f(2.25) = (2.25)^4 - 3(2.25)^3 + 2 = -6.54$ ← قيمة صغرى محلية.

---

8) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

$f'(x) = 4x^3 + 12x = 0$ $\quad x(4x^2 + 12) = 0$

نقطة حرجة ← $x = 0$ | $4x^2 + 12 = 0$

$\frac{4x^2}{4} = \frac{-12}{4}$ ✗

$x^2 = -3 \rightarrow x = \sqrt{-3}$

$f(0) = (0)^4 + 6(0)^2 - 2$

$= -2$

	نقطة على اليسار	نقطة حرجة	نقطة على اليمين
x	-1	0	1
f'	$-$	-2	$+$
	↘		↗

نلاحظ من f' أن f متناقصة ثم متزايدة وهي مطلقة

صفحة 258 أوجدي كل الأعداد الحرجة بدقة:

- هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أياً منهما.

13) $f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-2)'(x+2) - (x^2-2)(x+2)'}{(x+2)^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-2)(1)}{(x+2)^2} = 0$$

* نضرب بـ 1

إصلاحات $$\frac{2x^2+4x-x^2+2}{(x+2)^2} = 0$$

إصلاحات $$\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2} = 0$$

ملاحظة هامة:
كسر = 0
أي البسط = 0

النقطة الحرجة
↙ f' غير معرفة ↘ f' = 0

* أصفار المقام

$(x+2)^2 = 0$

$(x+2)(x+2) = 0$

$x+2=0$

$x=-2$

خارج المجال ليست حرجة.

$x+2=0$
$x=-2$

* أصفار البسط

$x^2+4x+2=0$

$x = -2-\sqrt{2} = \boxed{-3.41}$

$x = -2+\sqrt{2} = \boxed{-0.54}$

نقطة حرجة

$$f(-3.41) = \frac{(-3.41)^2-2}{-3.41-2} = \boxed{-6.8} \leftarrow y$$

$$f(-0.54) = \frac{(-0.54)^2-2}{-0.54-2} = \boxed{-1.17} \leftarrow y$$

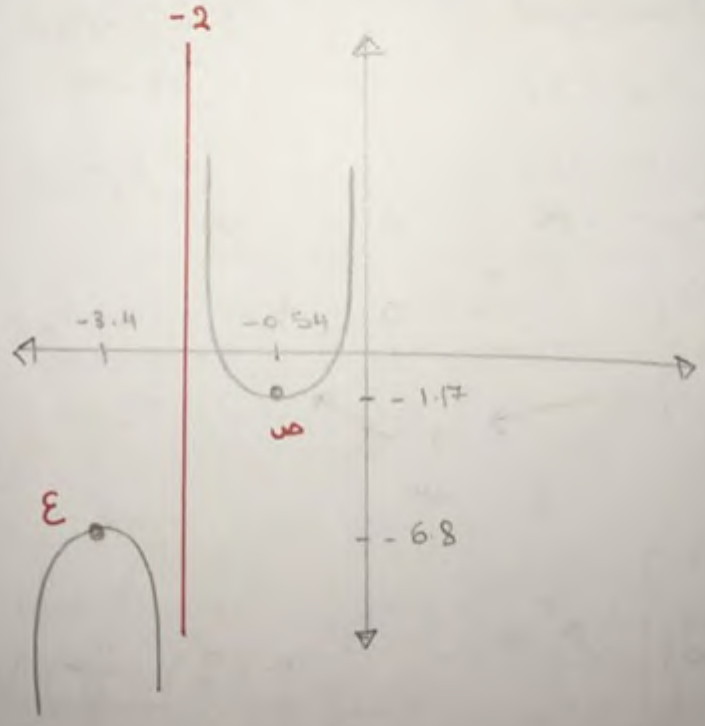
		$f'(-4)$		$f'(-3)$		$f'(-1)$		$f'(0)$
x حرجة	$-\infty$	↗	-3.41	↗	-2	↗	-0.54	↗ ∞
f' إشارات	+	0	−		−	0		+
f أرسم	↗	-6.8 ع	↘		↘	-1.17 ص		↗

$(-\infty, -3.41)$ $(0.54, \infty)$

$(-3.41, -2)$ $(-2, -0.54)$

ص -1.17 عند $x = -0.54$

ع -6.8 عند $x = -3.41$



صفحة 258

15) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + (-)e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0$

$e^x - e^{-x} = 0$

$e^x = e^{-x}$

$e^0 = e^{-0}$

$1 = 1$

معادلة بسيطة

متجهة عند $x=0$
نقطة حرجة

$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2}$

$= \frac{1+1}{2} = 1$

x	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		1	$\nearrow$	

ص

$(0, \infty)$ $\nearrow^+$

$(-\infty, 0)$ $\searrow_-$

ص 1 عند $x=0$

ع لا يوجد

22) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

$f(x) = (x^3 - 3x^2)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2)^{\frac{1}{3}-1}(x^3 - 3x^2)' = 0$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 6x) = 0$

$= \frac{3x^2 - 6x}{3(x^3 - 3x^2)^{\frac{2}{3}}} = 0$

* النقط الحرجة :

[f' غير موجودة "المقام"]

$3(x^3 - 3x^2)^{\frac{2}{3}} = 0$

$3 \neq 0$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x = 0$, $x = 3$ حرجة

[f' = 0 في "البسط"]

$3x^2 - 6x = 0$

$x(3x - 6) = 0$

$x = 0$, $3x - 6 = 0$

$x = 2$

* نحصر عن المستقيم لها مشتقة 0 و 2

$f(0) = 0$

$f(2) = -1.5$

$f(3) = 0$

نعوض بالدالة الأصلية

حرجة		$f'(-1) = +$		$f'(1) = -$		$f'(2.5)$		$f'(4)$
x	$-\infty$		0		2		3		∞
إشارة f'		+	‖	−	0	+	‖	+	
f		↗	ع م	↘	-1.5	↗	0	↗	

ع م

$(3, \infty)$ $(2, 3)$ $(-\infty, 0)$ $(0, 2)$ + −

ع م عند $x = 0$

م ع عند $x = 2$

(33) أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة محددة في الفترة المشار إليها :-

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad (a) \ [0,2]$$

ملاحظة:
مجال الدالة $\mathbb{R}$
وجود x^2 (قيم +)
مثال: x^2-1
$\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

$$f'(x) = 0 \qquad \frac{(x)'(x^2+1) - (x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1)(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = 0$$

إصلاحات: $1-2=-1$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(-x^2+1)}{(1+x^2)^2} = 0$$

النقاط الحرجة:

$f'=0$ من أصفار البسط:

$-x^2+1=0$

$x^2=1$

$x=+1$ حرجة

$x=-1$ خارج الفترة $[0,2]$ لذا هي ليست حرجة..

f' غير موجودة من أصفار المقام:

لا يوجد

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$f(0)=0$, $f(2)=\frac{2}{5}$

بما أن لدينا فترة مغلقة يجب أن نأخذ أطراف الفترة ونقوض بالدالة الأصلية..

x	0		1		2
f'		+	0	−	
f	0 ص	↗	$\frac{1}{2}$ ع	↘	$\frac{2}{5}$ ص

$(0,1)$ ↗ +

$(1,2)$ ↘ −

$x=2$ عند $\frac{2}{5}$ ص

$x=0$ عند 0

$x=1$ عند $\frac{1}{2}$ ع مطلقة

صفحة 258

23) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & x<0 \\ x^2-4x+3 & x \geq 0 \end{cases}$

$x^2+2x-1 \quad | \quad x^2-4x+3$ (0)

$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x<0 \\ 2x-4 & x>0 \end{cases}$ = غير موجود

$2x+2 \quad | \quad 2x-4$ (0)

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$2x+2=0$ $\qquad$ $2x-4=0$

$2x=-2$ $\qquad$ $2x=4$

$x=-1$ $\qquad$ $x=2$

نقاط حرجة

الاتصال:

$\lim_{x \to 0^-} x^2+2x-1 = -1$

$\lim_{x \to 0^+} x^2-4x+3 = 3$

$-1 \neq 3$

$x=0$ غير متصلة عند

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$

$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$

$f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
f'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-2 (ص)	$\nearrow$	3 (ع)	$\searrow$	0 (ص)	$\nearrow$	

صفحة 267 ارسمي تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية :

(ارسمي f) :

(27)

نقطة تقرر الدالة مشتقها : (2, 5)

$f(2) = 5$

(0,1)

$f(0) = 1$

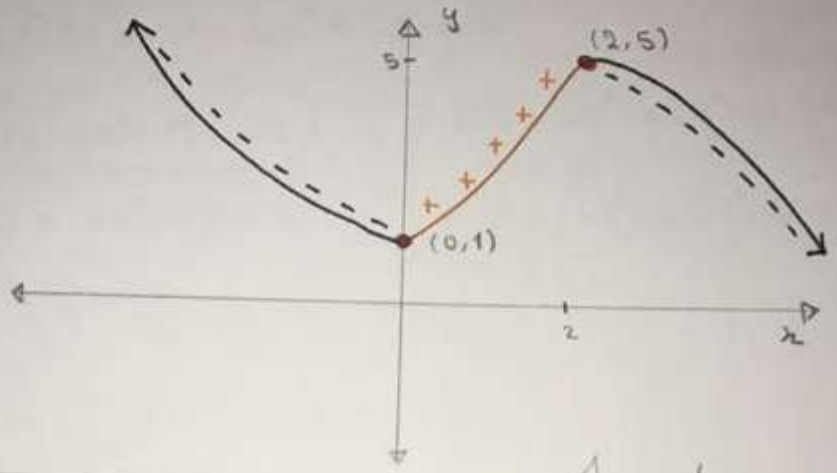
يسار (0)

$x > 2 \ , \ x < 0$

$0 < x < 2$

$f'(x) < 0$ ⇦ سالبة عند محور x ⇦ f متناقصة

$f'(x) > 0$ ⇦ موجبة عند محور x ⇦ f متزايدة



قفزة / فجوة / ناب / زاوية

(28)

نقطة تقرر الدالة عندها f = (2,5)

$f(2) = 5$

(-1, 1)

$f(-1) = 1$

f متناقصة

$x > 2 \ , \ x < -1$

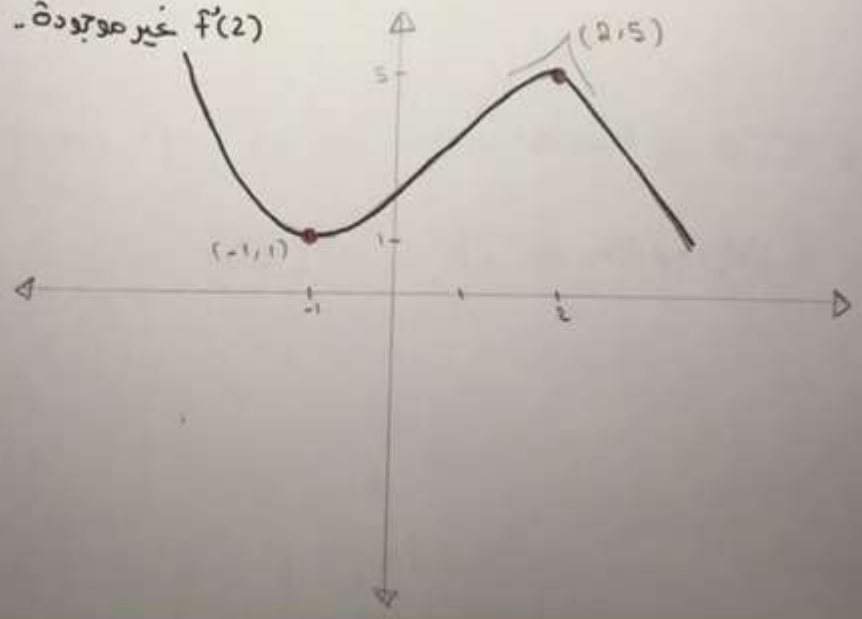
$f'(x) < 0$

f متزايدة

$-1 < x < 2$

$f'(x) > 0$

$f'(2)$ غير موجودة.



الدرس 5 : التقعر واختبار المشتقة الثانية

صفحة 276

حدود الفترات التي تكون فيها الدالة مقعرة نحو الأعلى ومقعرة نحو الأسفل ..
وحدود نقاط الإنعطاف. ← $f'' = 0$

- نوجد x لـ f''

(2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0$

$\frac{12x^2}{12} = \frac{12}{12}$

$x^2 = 1 \rightarrow x = 1$, $x = -1$

* نعوض بالدالة الأصلية:

$f(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 2(1) + 3 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 + 2(-1) + 3 = -4$

	$f''(-2)$		$f''(0)$		$f''(2)$	
x	$-\infty$	-1		1		∞
إشارة f''	+	0	−	0	+	
f تقعر	∪	-4	∩	0	∪	

* التقعر نحو الأعلى ∪ $(-\infty, -1)$ $(1, \infty)$

* التقعر نحو الأسفل ∩ $(-1, 1)$

③ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(x) = x + x^{-1}$

$f'(x) = 1 + -1\,x^{-1-1} = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 0 - (-2\,x^{-2-1}) = 2x^{-3}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} = 0$

منالبط $f'' = 0$

$2 \neq 0$

f'' غير موجودة من أصفار المقام

$x = 0$ خارج الفترة

x	$-\infty$		0		∞
f'		$-$		$+$	
f		∩		∪	

* لا يوجد نقطة انعطاف لأنه خط تقاربي رأسي (فصل أو باعد بين الفرعين).

A ∪

صفحة 276 حدي جميع المميزات المطلوبة ، وارسمي تمثيلا" بيانيا" :

29) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2-1}$

$f(x) = (2x^2-1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}(2x^2-1)'$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(4x)$

$f'(x) = \frac{4x}{3(2x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$ اصلاح =

$f''(x) = \frac{(4x)'(3)(2x^2-1)^{\frac{2}{3}} - (4x)(3)(2x^2-1)^{\frac{2}{3}})'}{3^2(2x^2-1)^{\frac{3}{3}\times 2}}$

$= \frac{4(3)(2x^2-1)^{\frac{2}{3}} - (4x)(3\times\frac{2}{3}(2x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}(2x^2-1)')}{9(2x^2-1)^{\frac{3}{3}}}$

$= \frac{12(2x^2-1)^{\frac{2}{3}} - 4x(\frac{2}{3}(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(4x))}{9(2x^2-1)^{\frac{3}{3}}}$

$f''(x) = \frac{12(2x^2-1)^{\frac{2}{3}} - 32x^2(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}}}{9(2x^2-1)^{\frac{3}{3}}} = 0$

$12(2x^2-1)^{\frac{2}{3}} - 32x^2(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}} = 0$

الأس $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

* لذا يوجد أس ..

$(2x^2-1)^{\frac{1}{3}} \times \frac{12(2x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{1} - \frac{32x^2}{(2x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \longrightarrow \frac{12(2x^2-1) - 32x^2}{(2x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = 0$

$\frac{24x^2 - 12 - 32x^2}{(2x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \longrightarrow \frac{-8x^2-12}{(2x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = 0$

$-8x^2 - 12 = 0$

ليس لها حلول

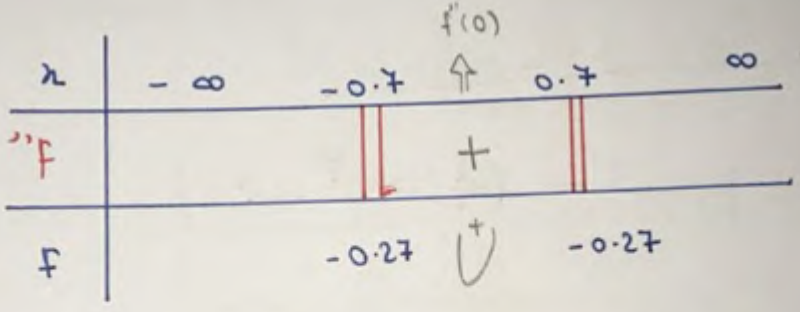
* أ: غير موجودة عند أصفار المقام :

$$2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0.7$$

$$f(0.7) = \sqrt[3]{2(0.7)^2 - 1} = -0.27$$

$$f(-0.7) = \sqrt[3]{2(-0.7)^2 - 1} = -0.27$$



ص 276

أوجد في جميع الأعداد الحقيقية واستخدم المشتقة الثانية لإيجاد جميع القيم القصوى المحلية :-

ع.ص

9) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 0$

$x = 0$ (عند $f'(x)=0$ نقاط حرجة) ⇐ عظمى عوتاه

$x = -3$

$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(0) = 12(0)^2 + 24(0) = 0$

السالب صفر ، لا يوجد قيم ع أو ص عند $x=0$

$f''(-3) = 12(-3)^2 + 24(-3) = +36$

بما أن السالب موجب هذا يعني أنه يوجد تقعر للأعلى عند $x=-3$

$f'' > 0$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x=-3$

(+)

* التعليمات :-

① نوجد النقاط الحرجة من $f'(x)=0$

② نوجد f''

③ نكون النقاط الحرجة في f''

- إذا كان السالب + ← (+) ← ص
- " " " - ← (-) ← ع
- " " " 0 ← لا يوجد قيم قصوى

12) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = (-x^2)' e^{-x^2} = 0$

$f'(x) = -2x e^{-x^2} = 0$

$-2x = 0$ ⇐ $x = 0$

$e^{-x^2} = 0$ لا يوجد

أو نعوضها $x = 200$

$f''(x) = (-2x)' e^{-x^2} + (-2x)(e^{-x^2})'$

$= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x e^{-x^2})$

$f''(0) = -2e^0 + (-2(0)) = -2$

$f'(0) = -2$ (-)

التقعر نحو الأسفل (-)

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x=0$

لو عوضنا

$f''(200) = 0$

لا يوجد "

الدرس 6 : نظرة عامة على رسم المنحنيات

صفحة 286

ارسمي بيانيا" الدالة التي تناقش بشكل تام التمثيل البياني..

① المجال $\mathbb{R}$

② يوجد خطوط تقاربية أو نقطة كثيرة حدود

③ معلومات حول f'

f' / تنعدم / موجبة / $= 0$ / $\neq 0$

④ في كثيرة الحدود يوجد مماسان رأسيين.

① $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0$

$x = 1$ عكبر "موجبة"

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) = 1$

x	$-\infty$		1		∞
f'		$+$	0	$+$	
f		↗	1	↗	

$\nearrow^{+}$ $(-\infty, 1)$ و $(1, \infty)$

أو $(-\infty, \infty)$

لا يوجد قيم قصوى (x, y)

⑤ ∩ ∪ انطفاف $f'' = 0$

$f''(0) = 6x - 6 = 0$

$x = 1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) = 1$

x	$-\infty$		1		∞
f''		$-$	0	$+$	
f		∩	1	∪	

* تقعر للأسفل $(-\infty, 1)$

* تقعر للأعلى $(1, \infty)$

⇐ انطفاف $(1, 1)$

⑥ الخطوط التقاربية الأفقية

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = (\infty)^3 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)^3 = (-)^3 \infty$$

$$= -\infty$$

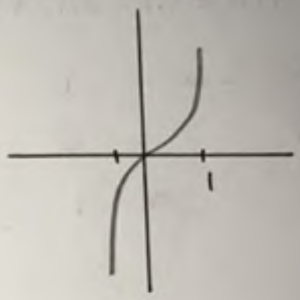
④ نقاط التقاطع مع المحاورين :

تقاطع مع x
نجعل $y = 0$
ونوجد x

$0 = x^3 - 3x^2 + 3x$

$x = 0$

$(0, 0)$

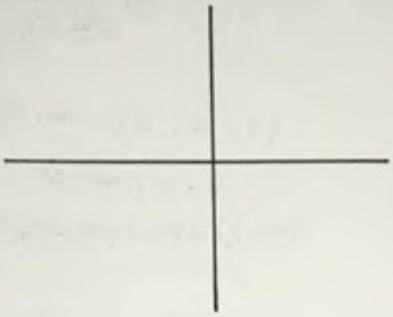


تقاطع مع y
نجعل $x = 0$
ونوجد y

$y = (0)^3 - 3(0)^2 + 3(0)$

$y = 0$

$(0, 0)$



① مجال الدالة :

كثيرة الحدود $\mathbb{R}$

الكسرية $\mathbb{R} \setminus \{$أصفار المقام$\}$

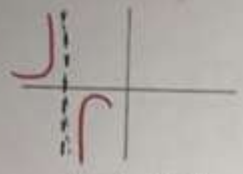
$\sqrt{f(x)}$ $\quad f(x) \geq 0$

$\ln f(x)$ $\quad f(x) > 0$

---

② الخطوط التقاربية :

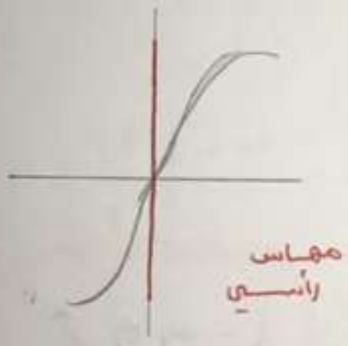
موجودة في الدالة الكسرية حيث تكون الخطوط التقاربية الرأسية عند أصفار المقام ..



---

③ المماسات الرأسية :

النقطة التي عندها مماس رأسي ينتمي لمجال f ، لكن لا ينتمي لمجال f' وهذا يحدث في الدالة الجذرية..



$\sqrt[n]{f(x)}$ أو $(f(x))^{\frac{1}{n}}$

صفحة 286 ارسمي بيانياً الدالة :

6) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

① المجال $\mathbb{R}/\{0\}$

② نقطة التقاطع مع المحور الرأسي (أصفر المقام) $x = 0$

③ $f' = 0$ حوجة ع مـ

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x) - (x^2-1)(x)'}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x) - (x^2-1)(1)}{x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = 0 \quad \text{إصلاحات}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 0$$

$f' = 0$ أصفار البسط	f' غير موجودة أصفار المقام
$x^2 + 1 = 0$	$x^2 = 0$
ليس لها حل	$x = 0$
	لا توجد نقطة حرجة (التقاطع)

x	$-\infty$	$f'(-1)$	0	$f'(1)$	∞
f'		+	‖	+	
f		↗	‖	↗	

$(-\infty, 0)$ ↗ +
$(0, \infty)$

④ مقاربات رأسية : لا يوجد ، لأنها ليست دالة جذرية ..

⑤ $f'' = 0$ ∩ انعطاف

$$f' = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$f'' = \frac{(x^2+1)'(x^2) - (x^2+1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x(x^2) - (x^2+1)(2x)}{x^4} = 0$$

$$f'' = \frac{2x^3 - (2x^3+2x)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = 0$$

إصلاحات

$$f'' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} = 0$$

⑥ $f'' = 0$ في البسط

$-2 \neq 0$

$-2x = 0$

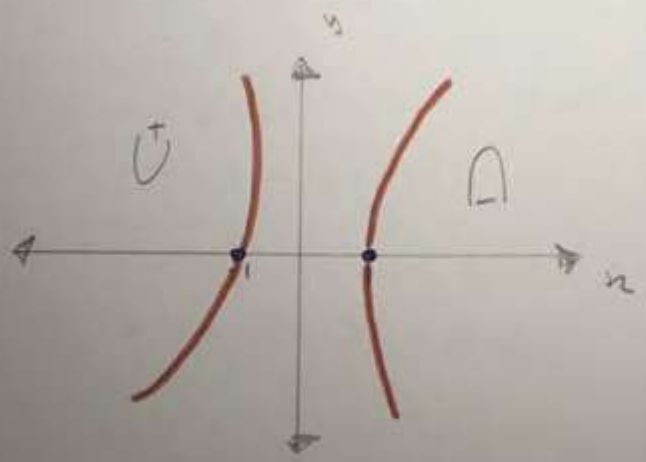
$x = 0 \notin$ المجال

f'' غير موجودة (أصفار المقام)

$x^3 = 0$

$x = 0 \notin$ المجال

x	$-\infty$	$f''(-1)$	0	∞
f''		$+$	$\|\|$	$-$
f		$\cup$	$\|\|$	$\cap$



* $\lim_{x \to \infty} f(x) =$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

التقاطع مع محور y

$x = 0$

$y = \frac{0-1}{0}$

لا يوجد تقاطع مع y

التقاطع مع محور x

$y = 0$

$y = \frac{x^2-1}{x} = 0$

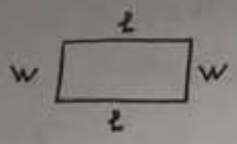
البسط

$x^2 = 1$

$x = +1$

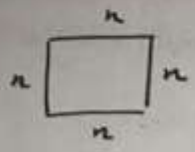
$x = -1$

الدرس 7 : القيم القصوى



* محيط المستطيل
$C = (l+w)^2$
$= 2L + 2w$

* مساحة المستطيل
$A = L \times w$



* محيط المربع
$= 4x$

* مساحة المربع
$= x^2$

ملاحظة :

مثلي	= ضعفي =	ضرب X 2
3 أمثال	= 3 أضعاف =	X 3

* مسألة خارجية

* ما أصغر محيط لمستطيل مساحته $16\,in^2$.

"دالة" ← ص
"فرضيات" ← $16\,in^2$

* الفرضيات : من المساحة :

① نفرض الطول l

② نفرض العرض w بدلالة l

③ من المساحة

$A = l \times w$
$16 = l \times w$
$\rightarrow \frac{16}{l} = \frac{l \times w}{l} \rightarrow w = \frac{16}{l}$

* الدالة من المحيط :

① $P(l) = 2l + 2w$

② $P(l) = 2l + 2\frac{16}{l}$

③ $P(l) = 2l + \frac{32}{l}$

④ $P(l)' = 2l' + \frac{(32)'(l) - (32)(l)'}{l^2}$

$P'(l) = 2 + \frac{-32}{l^2}$

⑤ $P'(l) = \frac{2 \times l^2}{1 \times l^2} + \frac{-32}{l^2}$ توحيد المقامات

⑥ $P'(l) = \frac{2l^2 - 32}{l^2} = 0$ $P'(l) = 0$

$2l^2 - 32 = 0 \rightarrow 2l^2 = 32$ البسط $= 0$ بما أن المقام $\neq 0$

$l^2 = 16 \rightarrow \boxed{l = \pm 4}$

$l = -4$ مرفوض $\quad 0 < l \leq 4$

$l = 4 \Rightarrow w = \frac{16}{l} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \boxed{w = 4}$

l		4	
P'	−	0	+
P	↘	min	↗

المحيط $= 2l + 2w$
$2(4) + 2(4) = 16$
$\boxed{l = 4 \quad w = 4}$ أصغرية

صلا!

$C = 2L + 2w$

محيط

* مسألة حياتية :

أثبتي أنا من بين المستطيلات التي محيطها 8m واحد منها يعطي أكبر مساحة (ربح) ويكون مربع ؟!

* الفرضيات :

① نفرض الطول ℓ

② نفرض العرض w ونكتبها بدلالة ℓ

$w = \ldots \ell$

$\text{المحيط} = 2\ell + 2w$

$8 = 2\ell + 2w$

$\frac{2w}{2} = \frac{8}{2} - \frac{2\ell}{2}$

$w = 4 - \ell$

* الدالة :

$P(\ell) = \ell \times w$

$P(\ell) = \ell(4 - \ell)$

$P(\ell) = 4\ell - \ell^2$

$P'(\ell) = 4 - 2\ell = 0$

$\frac{4}{2} = \frac{2\ell}{2} \rightarrow \boxed{\ell = 2}$

ℓ		2	
A	+	0	−
A	↗		↘

$w = 4 - \ell = 4 - 2 = 2$

$\boxed{w = 2}$

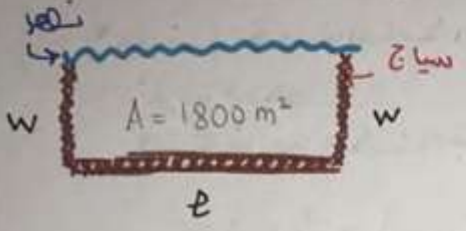
أكبر مساحة

$A = \ell \times w$

$= 2 \times 2 = 4$

صفحة 296

1 يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار القسم المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي 1800 متراً². أوجد القيمة الصغرى للمحيط وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.



* الفرضية من المساحة:

- نفرض الطول ℓ
- نفرض العرض w ونكتبه بدلالة ℓ

$$A = \ell \times w \rightarrow 1800 = \ell \times w$$

$$\frac{1800}{\ell} = \frac{\ell \times w}{\ell} \rightarrow \boxed{w = \frac{1800}{\ell}}$$

* الدالة من المحيط :-

$$P = w + w + \ell$$

((يوجد جزء رابع [نهر]))

$$P = 2w + \ell$$

$$P = 2\frac{1800}{\ell} + \ell \rightarrow P = \frac{3600}{\ell} + \ell$$

$$P' = \frac{-3600}{\ell^2} + \frac{1 \times \ell^2}{1 \times \ell^2}$$

* توحيد المقامات

$$P' = \frac{-3600 + \ell^2}{\ell^2} = 0$$

$$-3600 + \ell^2 = 0$$

$$\ell^2 = 3600 \rightarrow \boxed{\ell = 60}$$

* الطول

$$w = \frac{1800}{60} = 30 \rightarrow \boxed{w = 30}$$

* العرض

ℓ		60	
P'	-	0	+
P	↘		↗

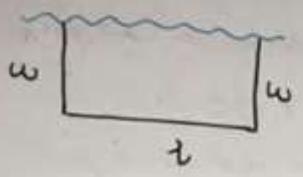
أصغر محيط

$$P = 2(30) + 60$$

$$= \boxed{120}$$

صفحة 296

② يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار القسم المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر 96 أمتار من السياج. أوجد القيم العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المحاطة لهذه المساحة.



* الدالة من المحيط:

نفرض الطول ℓ

والعرض w ونكتبه بدلالة ℓ

المحيط = $\ell + 2w$

$96 = \ell + 2w$

$\frac{2w}{2} = \frac{96}{2} - \frac{\ell}{2}$

$w = 48 - 0.5\ell$

أكبر مساحة $A = \ell \times w$

$= 48 \times 24$

$= 1152\ m^2$

* الدالة من المساحة:

$A(\ell) = \ell \times w$

$A = \ell \times (48 - 0.5\ell)$

$= 48\ell - 0.5\ell^2$

$A' = 48 - 0.5(2L) = 0$

$= 48 - \ell = 0$

$\ell = 48$ ⟹ لحساب العرض

$w = 48 - 0.5\ell$

$= 48 - 0.5(48)$

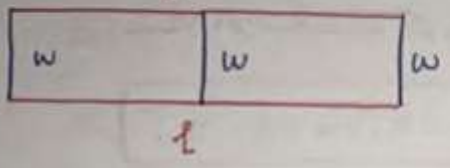
$= 24$

$w = 24$

ℓ		48	
A'	+	0	−
A	↗		↘

صفحة 296

8 يجب بناء إسطبل مكون من حظيرتين. بشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك 120 متر" من السياج متوفر، فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج ؟!



* الدالة من المحيط:

- نفرض الطول ℓ
- ونفرض العرض w ونكتبه بدلالة ℓ

المحيط = $2\ell + 3w$

$120 = 2\ell + 3w$

$\frac{3w}{3} = \frac{120}{3} - \frac{2\ell}{3}$

$w = 40 - \frac{2}{3}\ell$

* الدالة من المساحة:

$A = \ell \times w$

$A = \ell \times (40 - \frac{2}{3}\ell)$

$A = 40\ell - \frac{2}{3}\ell^2$

$A' = 40 - \frac{4}{3}L = 0$

$\frac{3}{4} \times 40 = \frac{4}{3}\ell \times \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \times 40 = \ell$

$\ell = 30$ ← الطول

$w = 40 - \frac{2}{3}\ell$

$w = 40 - \frac{2}{3}(30)$

$w = 20$ ← العرض

ℓ		30	
A'	+	0	−
A	↗		↘

أكبر مساحة

$A = \ell \times w$

$= 20 \times 30$

$= 600$

صفحة 297

(11) أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(0, 1)$

① نفرض النقطة (x, y)

② نشكل الدالة من قانون المسافة d

$$d = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$ ← الدالة

$$d = (x-0)^2 + (y-1)^2$$

③ نبدل y بما يساويها من الدالة الأصلية حتى يكون لدينا متغير واحد فقط..

$$d = (x-0)^2 + (x^2-1)^2$$
$$d = x^2 + (x^2-1)^2$$

④ نشتق ونساوي المشتقة بالصفر..

$$d'' = (x^2)' + 2(x^2-1)^{2-1}(x^2-1)' = 0$$
$$= 2x + 2(x^2-1)(2x) = 0$$
$$= 2x + (2x^2-2)(2x) = 0$$
$$= 2x + 4x^3 - 4x = 0$$
$$= 4x^3 - 2x = 0$$
$$= x(4x^2-2) = 0$$

$x = 0$	$4x^2 - 2 = 0$
$x = 0$	$\frac{4x^2}{4} = \frac{2}{4}$
	$x^2 = \frac{1}{2}$
حرجة	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

⑤ نأخذ النقاط الحرجة بالإضافة إلى النقطة المعطاة ونوعز بالمسافة..

$x = 0$

$$d = x^2 + (x^2-1)^2$$
$$= 0^2 + (0^2-1)^2 = 1$$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$d = x^2 + (x^2-1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right)^2$$
$$= 0.75$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$d = x^2 + (x^2-1)^2$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right)^2$$
$$= 0.75$$

أصغر مسافة عن النقطة $(0,1)$ هي 0.75 عند

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ , } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

صفحة 297

(المسافة الأقصر)

15 أوجد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقطة $(0,0)$

1) نفرض النقطة (x,y)

2) نشتق الدالة من قانون المسافة d

$$d = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$$

$$d = (x-0)^2 + (y-0)^2$$

$$= x^2 + y^2$$

3) نبدل y بما يساويها في الدالة لأن المسافة حتى يكون لدينا متحول واحد فقط.

$$d = x^2 + \cos^2 x$$

4) نشتق:

$$d' = 2x + 2\cos x(-\sin x)$$

$$= 2x - 2\cos x \cdot \sin x = 0$$

$$2x - \sin 2x = 0$$

$2x = 0$	$\sin 2x = 0$
$\frac{2x}{2} = \frac{0}{2}$	$\sin^{-1} \times \sin 2x = 0 \times \sin^{-1}$
$x = 0$	$\frac{2x}{2} = \frac{0}{2}$
	$x = 0$

$d = x^2 + y^2$

$x = 0$

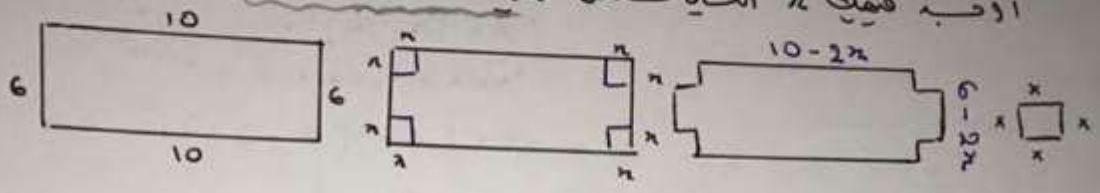
$d = 0^2 + 0^2 = 0$

أصغر مسافة عن النقطة $(0,0)$ هي

$x = 0$

صفحة 296

(7) يتم بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته 6cm في 10cm، وقص مربعات بحجم x cm من كل زاوية و طي الجوانب.
أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوق.



- الدالة من الحجم
"القيمة العظمى لحجم الصندوق".

$V = l \times w \times h$

$V = (10-2x)(6-2x)x$

$V = (10-2x)(6x-2x^2)$

$V' = (10-2x)'(6x-2x^2) + (10-2x)(6x-2x^2)'$

$V = (-2)(6x-2x^2) + (10-2x)(6-4x) = 0$

$V = -12x + 4x^2 + 60 - 40x - 12x + 8x^2 = 0$

$V = 12x^2 - 64x + 60 = 0$

$x = 4.11 \quad x = 1.21$

$x = 0 \rightarrow V = (10-2(0))(6(0)-2(0)^2)$

$= \boxed{0}$

$x = 1.21 \rightarrow V = (10-2(1.21))(6(1.21)-2(1.21)^2)$

$= \boxed{32.8}$

$x = 4.11 \rightarrow V = (10-2(4.11))(6(4.11)-2(4.11)^2)$

$= \boxed{-16.24}$ مرفوض

أكبر حجم صندوق

$x = 1.21$

↓

$V = 32.8$

الدرس 8 : المعادلات المرتبطة

صفحة 303

1 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 120 برميلاً في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة سمكها $\frac{1}{4}$ " لأن $1ft^3$ يساوي 7.5 براميل. حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى (a) 100m و (b) 200m. اشرح سبب تناقص المعدل بتزايد نصف القطر.

$V' = -120$ سالبة

$V' = -120$ النفط يتسرب

"برميل 7.5 → $1ft^3$

"برميل -120 → ؟

$\frac{1ft^3 \times -120}{7.5}$

$V' = -16\ ft^3$

$h = \frac{1}{4}$" $\Rightarrow$ $h = \frac{1}{4} \div \frac{12}{1} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$

$r' = ?$ $r = 100m$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \times \frac{1}{48} r^2$

$V' = \frac{\pi}{48}(2rr')$

$-16 = \frac{\pi}{48}(2(100)r')$

$\frac{-16}{\frac{25\pi}{6}} = \frac{\frac{25\pi}{6}}{\frac{25\pi}{6}} r'$

$r' = -1.22$

يتناقص معدل r بمقدار 1.22

$r = 200m$

$-16 = \frac{\pi}{48}(2(200)r')$

$\frac{-16}{\frac{25\pi}{3}} = \frac{\frac{25}{3}\pi}{\frac{25\pi}{3}} r'$

$r' = -0.61$

يتناقص معدل r بمقدار 0.61

(b) :-

$r = 100m \rightarrow r' = -1.22$

$r = 200m \rightarrow r' = -0.61$

العلاقة عكسية :

* كلما كبر المقام r صغر الكسر.
* كلما صغر المقام r كبر الكسر.

صفحة 303

$V' = -90$ مشتقة

سالب

يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 90 برميلا" في الدقيقة.

مشتقة

يبتعد النفط في دائرة بسمك "$\frac{1}{8}$" حدي معدل تزايد نصف القطر $r' = +$

للتسرب عند وصول نصف القطر إلى 100 متر.

$$V' = -90 \xrightarrow{\text{نحول}} V' = \frac{-90}{7.5} = -12 \text{ ft}^3$$

$$h = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{نحول}} h = \frac{\frac{1}{8}}{12} = \frac{1}{96}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{96}\right) r^2$$

$$V' = \frac{\pi}{96} (2rr')$$

$$-12 = \frac{2\pi}{96} ((100) r')$$

$$\frac{-12}{\frac{25\pi}{12}} = \frac{25\pi}{12} (r')$$

$$r' = -1.833$$

يتناقص معدل نصف القطر بمقدار 1.833

$V' = q = ?!$

3 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل q برميل في الدقيقة. ينتشر النفط في طبقة دائرية بسمك $h = \frac{1}{4}$" (a) على فرض أن نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل $r' = 0.6 m/min$ عندما يساوي نصف القطر 100 متر. فحدد قيمة q. (b). إذا تضاعف سمك النفط. فكيف يتغير معدل تزايد نصف القطر ؟!

$r = 100$

$V' = q = ? \xrightarrow{\div 7.5} v' = \frac{q}{7.5}$

$h = \frac{1}{4}" \xrightarrow{\div 12} h = \frac{1}{48}$

$r' = 0.6 \rightarrow r = 100$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \times \frac{1}{48} r^2 \rightarrow V = \frac{\pi}{48} r^2$

$V' = \frac{\pi}{48} (2\pi r r')$

$V' = \frac{\pi}{48} (2 \times 100 \times 0.6)$

$V' = \frac{5\pi}{2} = 7.85$

$\frac{V'}{1} \times \frac{q}{7.5} = 7.85 \times 7.5$

$= 58.875 \ gal/min$

(b)

$V = \pi r^2 h$

$r^2 = \frac{V}{\pi h}$ عكسية

$V' = \pi h \cdot 2 r r'$

$r' = \frac{V'}{2\pi \cdot h \cdot r}$

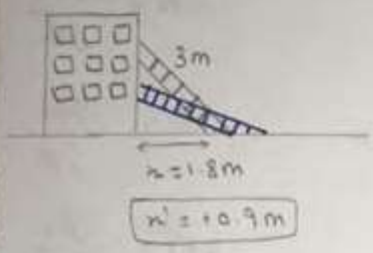
* يتزايد معدل نصف القطر كلما قل الارتفاع.

صفحة 303 :

7 يرتكز سلم يطول 3 أمتار على جانب المبنى كما في المثال 8.2 فإذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيداً عن الجدار بمعدل 0.9 متراً/ثانية وبقي السلم ملامساً للجدار . (a) أوجد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيداً بمقدار 1.8 أمتار عن الجدار . (b) أوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والأفق عندما يبعد أسفل السلم مسافة مترا من الجدار . $x = 4$

$y' = ?$

$\theta' = ?$



$x^2 + y^2 = 3^2$

$y^2 = 9 - x^2$

$y = \sqrt{9 - x^2}$

$y' = \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}}$

$y' = \frac{-2x x'}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x \cdot x'}{\sqrt{9-x^2}}$

$y' = \frac{-(1.8)(0.9)}{\sqrt{9-(1.8)^2}} = -0.675$

يتناقص الجزء العلوي بمعدل 0.675 .

* الطريقة 1

* الطريقة 2

$y^2 + x^2 = 9$

$2yy' + 2xx' = 0$

$2yy' = -2xx'$

$y' = \frac{-2xx'}{2y} = \frac{-x \cdot x'}{y}$

y في فيثاغورث

$x^2 + y^2 = 9$

$y = \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(1.8)^2}$

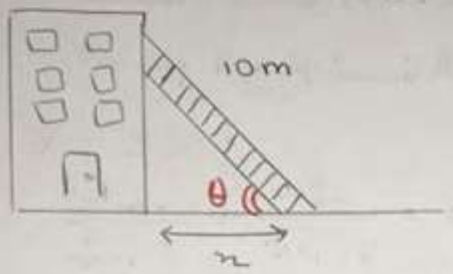
$= 2.4$

$y' = \frac{-(1.8)(0.9)}{2.4}$

$= -0.675$

سؤال خارجي:

سلم طوله 10m يستند بأحد طرفيه على حائط مبنى رأسي والطرف الآخر على الأرض أفقية يصنع معها زاوية مقدارها θ راديان. بدأ الطرف السفلي للسلم بالتحرك مبتعداً عن المبنى بسرعة ثابتة مقدارها 2m/sec أوجدي معدل تغير الزاوية في اللحظة التي تكون فيها $\theta = \frac{\pi}{6}$ ..



$x' = 2$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta' = ?!$

$\sin = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cos = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{10} = \frac{1}{10}x$$

$$\theta' \cos'\theta = \frac{1}{10}(x)'$$

$$-\theta \frac{\sin\theta}{1} = \frac{x'}{10} \rightarrow \frac{-10\sin\theta\ \boxed{\theta'}}{-10\sin\theta} = \frac{x'}{-10\sin\theta}$$

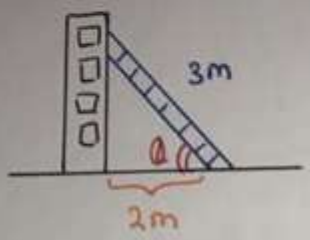
$$\theta = \frac{x'}{-10\sin\theta} = \frac{-2}{10\sin\frac{\pi}{6}} = -\frac{2}{5}$$

$$\theta = -\frac{2}{5}$$

7 - b:

θ'

أوجدي معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الأفقي عندما يبعد أسفل السلم 2 متر في الجدار ..



$x' = -0.9$

$\cos\theta = \frac{x}{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}x$

$\theta' \cos'\theta = \frac{1}{3}(x)'$

$\theta'(-\sin\theta) = \frac{1}{3}(x)'$

$\theta' = \frac{\frac{1}{3}x'}{-\sin\theta} = \frac{\frac{1}{3}(0.9)}{-\sin(48.18)}$ ← $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 48.18$

$= -0.402$

تتناقص الزاوية بمعدل 0.402

الدرس ٩ : معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

تطبيقات التفاضل في الاقتصاد :

يستخدم معدل التغير اللحظي في الاقتصاد بالمصطلح "حدي"

* المفاهيم الرئيسية في الدرس :

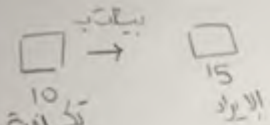
$R(x)$ = دالة الإيراد من بيع x وحدة من المنتجات ..

$C(x)$ = دالة تكلفة إنتاج x وحدة من المنتجات .

$P(x)$ = دالة الربح من بيع x وحدة من المنتجات ..

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

الربح = الإيراد − التكلفة



$R'(x)$ = دالة الإيراد الحدي لبيع الوحدة x

$C'(x)$ = دالة التكلفة الحدية لإنتاج الوحدة x

$P'(x)$ = دالة الربح الحدي لبيع الوحدة x

أولاً : تحليل التكلفة الحدية :

[1] صفحة 313

$C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ $\quad x = 50 \quad C' = ? \quad C = ?$

* التكلفة الحدية ⇔ مشتقة التكلفة

$C'(x) = 3x^2 + 40x + 90$

$C'(50) = 3(50)^2 + 40(50) + 90 = \boxed{9590}$

* التكلفة الفعلية

$C(50) = (50)^3 + 20(50)^2 + 90(50) + 15$
$= 179515$

$C(49) = (49)^3 + 20(49)^2 + 90(49) + 15$
$= 170094$

التكلفة الفعلية = $C(50) - C(49) = 179515 - 170094 = \boxed{9421}$

القيم متقاربة.

* تمارين
صفحة 313

[3] $x = 100$, $C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$

* التكلفة الحدية ← مشتقة التكلفة

$C(x)' = 3x^2 + 42x + 110$

$= 3(100)^2 + 42(100) + 110$

$= \boxed{34310}$

* التكلفة الفعلية

التكلفة الفعلية = $C(100) - C(99)$

$C(100) = (100)^3 + 21(100)^2 + 110(100) + 20$

$= 1221020$

$C(99) = (99)^3 + 21(99)^2 + 110(99) + 20$

$= 1187030$

التكلفة الفعلية = $1221020 - 1187030 = \boxed{33990}$

القيم متقاربة.

ثانيا: القيم الصغرى لمتوسط التكلفة

متوسط التكلفة = $\frac{\text{التكلفة}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$

$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

7) 313

أوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيم الصغرى لمتوسط التكلفة :

7) $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$

متوسط التكلفة $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.1x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{2000}{x}$

$\bar{C}(x) = 0.1x + 3 + \frac{2000}{x}$

$(C(x))' = 0.1 + 0 - \frac{2000}{x^2} = 0$

$= 0.1 - \frac{2000}{x^2} = 0$

$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \frac{0(x) - 2000(x)}{x^2}$

$\frac{0.1}{1} \times \frac{2000}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{2000}{0.1} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2000}{0.1}} = \pm 141.4$

$x = 141.4$ مرفوض

$\bar{C}(x) = 0.1 - 2000x^{-2}$

$(\bar{C}(x))'' = -2000(-2x^{-3})$

$(\bar{C}(x))'' = +4000x^{-3}$

x		141.4	
$(\bar{C})'$	−	0	+
$\bar{C}$	↘		↗

$(\bar{C}(141.4))'' = 4000(141.4)^{-3} = +1.4 \times 10^{-3} = 0.0014$

* المشتق موجب لذا فإن التقعر نحو الأعلى ∪

يوجد قيمة صغرى عند $x = 141.4$

+ تمرين

8/313

[8] $C(x) = 0.2x^3 + 4x + 4000$

متوسط التكلفة $= \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0.2x^3}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{4000}{x}$

$\bar{C}(x) = 0.2x^2 + 4 + \frac{4000}{x}$

$(C(x))' = 0.4x + 0 + -\frac{4000}{x^2}$

$= 0.4x - \frac{4000}{x^2} = 0$

$\frac{(0.4x^3 - 4000)}{x^2} = 0$

$(x^2)\ 0.4x \times \frac{4000}{x^2} \Rightarrow \frac{0.4x^3}{x^2} \times \frac{4000}{x^2} \Rightarrow \frac{4000}{0.4} = \frac{0.4x^3}{0.4}$

$(x^2)\ 1$

$x^3 = 10000 \rightarrow x = \sqrt[3]{10000} \Rightarrow x = 21.544$

x	21.544
$(\bar{C})'$	$-\ \ 0\ \ +$
C	$\searrow\ \ \nearrow$

يوجد قيمة صغرى عند $x = 21.544$

القيمة العظمى للأرباح

$P'(x)=0$ ⟷ $C'(x)=R'(x)$

ثالثاً: القيمة العظمى للربح: $P(x)$

تذكري: $P(x) = R(x) - C(x)$ (الربح = الإيراد − الكلفة)

ملاحظة:

لإيجاد القيمة العظمى للأرباح هناك نقطتان للمسائل:

1. سيعطينا في نص المسألة دالة الربح جاهزة عندها نشتق $P'(x)=0$ ونتابع لإيجاد x .....
2. سيعطينا في نص المسألة دالة الإيراد لوحدها ودالة التكلفة لوحدها عندها نشتق R، ونشتق C ونساوي بينهما $C'(x) = R'(x)$ ونحل ..

page 313 [12]

$R(x) = 10x - 0.001x^2$

$C(x) = 2x + 5000$

$R'(x) = C'(x)$

$10 - 0.001(2x) = 2 + 0$

$10 - 0.002x = 2$

$-0.002x = 2 - 10$

$-0.002x = -8$

$-0.002 \quad -0.002$

$x = 4000$

x		4000	
P'	+	0	−
P	↗		↘

$P(x) = R(x) - C(x)$ نعوض 4000 في $P(x)$

$P(x) = R(4000) - C(4000)$

$R(4000) = 10(4000) - 0.001(4000)^2 = 24000$

$C(4000) = 2(4000) + 5000 = 13000$

$P(x) = R(x) - C(x)$

$= 24000 - 13000$

$= 11000$

رابعاً: مرونة الطلب:

مرونة الطلب هي مدى إستجابة متغير أو أكثر للتغيرات التي تحدث في متغير آخر أو أكثر، أي كيف أن متغير اقتصادي واحد سيؤثر بتغيرة على باقي المتغيرات الاقتصادية.

مثلاً: « إذا قمت بتخفيض سعر المنتج الذي أبيعه، هل سأتمكن من زيادة المبيعات ؟

دالة الطلب = $f(P)$ ، P ← السعر، f ← مستوى متغير

$$E = \frac{P\ f'(P)}{f(P)}$$

ص 313

أوجد (a) مرونة الطلب E (b) مدى الأسعار P الذي يكون فيه الطلب مرناً ($E < -1$):

13) $f(P) = 200(30 - P)$

$$E = \frac{P f'(P)}{f(P)} \quad \rightarrow f'(P) = 200(0-1) = \boxed{-200}$$

$$E = \frac{P\ (-200)}{200(30-P)} = \frac{-P}{30-P}$$

$E < -1$

$$\frac{-P}{30-P} < \frac{-1}{1}$$

$$-P < -1(30-P)$$

$$-P < -30 + P$$

$$\frac{30}{2} < \frac{2P}{2} \qquad 15 < 2 \qquad P < 30$$

$$\boxed{15 < P < 30}$$

المرونة بالطلب عندما السعر بين 15 و 30

ملاحظة:

$P < 30$ لأنها إذا كانت أكبر من 30 ستكون سالبة.

* كيفية الاشتقاق:

$f = 4x^6 - 4$

$= 4(6x^5) - 0$

* حل المثل

$3 + 2x < x$

$3 < x + 2x$ (أنقل السالب)

$\frac{-2x}{-2} < \frac{4}{-2}$

$x > \frac{4}{-2}$

عند القسمة على عدد سالب تنقلب إشارة المتباينة!

تعريف: أوجدي (a) مرونة الطلب و (b) مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنا" ($E < -1$). $P < 20$

15) $f(P) = 100P(20-P)$

$E = \frac{P \cdot f'(P)}{f(P)} = \frac{P(100)(20-2P)}{100P(20-P)} \Rightarrow$

$E = \frac{20-2P}{20-P}$

لمشتقة الاستيفاق

$f(P) = 100P(20-P)$

$f(P) = 100(20P - P^2)$

$f'(P) = 100(20-2P)$

$E < -1$

$\frac{20-2P}{20-P} < \frac{-1}{1}$

$20-2P < -1(20-P)$

$20-2P < -20+P$

$20 < -20 + P + 2P$

$20+20 < 3P$

$\frac{40}{3} < \frac{3P}{3}$

$P > 13.3$

المرونة

$13.3 < P < 20$

مدى الأسعار المطلوب