12
عام

مدرسة عبد القادر الجزائري
قسم الرياضيات

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تحذير هام

هذه الأوراق بمثابة دفتر مساعد للطالب لتوفير الوقت في كتابة السؤال ولكن الحذر كل الحذر من الإكتفاء بها فقط حيث أن كتاب الوزارة هو المرجع الأساسي في كل شئ وعلى الطالب أن يتدرب على حل التمارين الواردة في الكتاب المدرسي الموجودة نهاية كل درس ويناقش المعلم بها

الوحدة السادسة
أنظمة المعادلات والمصفوفات

أ/ أحمد عطا

اسم الطالب / .....

اسم المدرسة / .....

1 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس

2 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس-جوردان

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

1 حذف جاوس

نظام خطي متعدد المتغيرات أو نظام خطي بأكثر من متغير واحد، عبارة عن نظام معادلات خطية ذات متغيرين أو أكثر. وفي المقررات الدراسية السابقة، ربما تكون قد استخدمت طريقة الحذف لحل مثل هذه الأنظمة. وتبدأ إحدى طرق الحذف بإعادة كتابة نظام باستخدام شكل مثلث مفكوس يكون فيه المعامل الرئيس يساوي 1.

يمكن استخدام طريقتي التعويض والحذف اللتين تعلمتهما سابقًا في تحويل نظام خطي متعدد المتغيرات إلى نظام مكافئ في صورة مثلث أو **نموذج درجة صف**.

المفهوم الأساسي العمليات التي تنتج أنظمة مكافئة

ينتج عن كل من العمليات التالية نظام مكافئ للمعادلات الخطية.

- بدّل بين أي معادلتين.
- اضرب إحدى المعادلتين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف إحدى المعادلات إلى المعادلة الأخرى.

مثال 1 حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُـلّ النظام.

$5x - 5y - 5z = 35$

$-x + 2y - 3z = -12$

$3x - 2y + 7z = 30$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُـلّ النظام.

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 8z &= -20 \\ -x + 2y - 4z &= 18 \\ -6x + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -28 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ x + y - z &= -5 \end{aligned}$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المصفوفة الموسعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية، والتي تكتب كل منها في صيغة قياسية مع كتابة الحدود الثابتة في الطرف الأيمن لعلامة يساوي. وإذا لم يتم إدراج الحدود الثابتة، تُختزل المصفوفة إلى **مصفوفة المعاملات** الخاصة بالنظام. وستستخدم هذا النوع من المصفوفات في الدرس 3-5.

نظام المعادلات	المصفوفة الموسعة	مصفوفة المعاملات
$5x - 5y - 5z = 35$ $-x + 2y - 3z = -12$ $3x - 2y + 7z = 30$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

مثال 2 كتابة مصفوفة موسعة

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$w + 4x + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$w - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y = 9$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$4w - 5x + 7z = -11$$
$$-w + 8x + 3y = 6$$
$$15x - 2y + 10z = 9$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$-3w + 7x + y = 21$$
$$4w - 12y + 8z = 5$$
$$16w - 14y + z = -2$$
$$w + x + 2y = 7$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المفهوم الأساسي عمليات الصف الأولية

تنتج كل عملية من عمليات الصف التالية مصفوفة موسعة مكافئة.

- بدّل بين أي صفين.
- اضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف أحد الصفين إلى الصف الآخر.

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- تظهر الصف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وُجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي 1. ويسمى *المعامل الرئيس* 1.
- بالنسبة للصفين التاليين اللذين يتمتعان بمدخلات غير صفرية، يكون المعامل الرئيس 1 في الصف الأعلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & c & \\ 0 & 1 & d & e & \\ 0 & 0 & 1 & f & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

مثال 3 تحديد المصفوفة الموسعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

b. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right]$

.....

.....

3A. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$

3B. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right]$

3C. $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$

.....

.....

مثال 4 من الحياة اليومية حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	البندقية	روما	نابولي	الإجمالي
الفنادق	AED 60	AED 120	AED 60	AED 720
الطعام	AED 40	AED 90	AED 30	AED 490
وسائل النقل	AED 15	AED 10	AED 20	AED 130

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

2 حذف جاوس-جوردان

إذا واصلت تطبيق عمليات الصف الأولية على نموذج درجة الصف من مصفوفة موسعة، فيمكنك الحصول على مصفوفة تكون قيمة أول عنصر غير صفري بكل صف فيها هي العدد 1، وتكون قيمة بقية العناصر في نفس العمود الخاص بهذا العنصر هي 0. وهذا ما يُطلق عليه **نموذج درجة الصف المنخفض** بالمصفوفة كما يظهر بالبسار. وداتما ما يكون نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة وحيدًا، بغض النظر عن ترتيب العمليات التي تم إجراؤها. ويطلق على حل النظام من خلال تحويل

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

حذف جاوس-جوردان.

مثال 5 استخدام طريقة حذف جاوس-جوردان

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$x - y + z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = -5$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$\begin{aligned} 4x + 9y + 16z &= 2 \\ -x - 2y - 4z &= -1 \\ 2x + 4y + 9z &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 7 \\ -3x - 7y + 9z &= -12 \\ 2x + y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 6 بدون حل وبعدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

$$-5x - 2y + z = 2$$
$$4x - y - 6z = 2$$
$$-3x - y + z = 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$3x + 5y - 8z = -3$$
$$2x + 5y - 2z = -7$$
$$-x - y + 4z = -1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 7 عدد لانهائي من الحلول

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$3x - 8y + 19z - 12w = 6$$
$$2x - 4y + 10z = -8$$
$$x - 3y + 5z - 2w = -1$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

$$-5w + 10x + 4y + 54z = 15$$
$$w - 2x - y - 9z = -1$$
$$-2w + 3x + y + 19z = 9$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

1 ضرب المصفوفات.

ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

2 إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2 × 2 والمصفوفة 3 × 3.

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفات

الشرح إذا كانت A مصفوفة $m \times r$ وكانت B مصفوفة $r \times n$، فإن ناتج ضربهما AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يمكن الحصول عليها بجمع ناتج ضرب مدخلات الصف في المصفوفة A في المدخلات المناظرة لعمود في المصفوفة B.

الرموز إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج الضرب AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mj} & & c_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 1 ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.

a. AB

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b. BA

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

أوجد AB و BA؛ إن أمكن.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد AB و BA؛ إن أمكن.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفات

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفات لها معروف وأي كمية قياسية k.
تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفات $(AB)C = A(BC)$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

خاصية التوزيع إلى اليسار $C(A + B) = CA + CB$

خاصية التوزيع إلى اليمين $(A + B)C = AC + BC$

مثال 2 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18-25	26-40	41-50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

2. **المبيعات** يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام. وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى.

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أنت تعلم أن *المحايد الضربي* للأعداد الحقيقية هو العدد 1. حيث إنه لأي عدد حقيقي a، $a \times 1 = a$. ويطلق على المصفوفة المربعة للمحايد الضربي $n \times n$ اسم **المصفوفة المحايدة**.

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الـــرتبة n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين. وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

الرموز

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 3 حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ لحل النظام.

3A. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$
$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

3B. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

2 المعكوسات والمحددات

أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقيًا غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $a\left(\frac{1}{a}\right) = a \times a^{-1} = 1$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$، فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

مثال 4 التحقق من المصفوفة العكسية

حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفتين متعاكستين.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 5 معكوس المصفوفة

أوجد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

أوجد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.

1. اكتب المصفوفة الموسعة $[A \mid I_n]$.
2. أجر عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى الصف المنخفض.
3. قرر إن كانت A لها معكوس.
   - إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n، فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n \mid A^{-1}]$.
   - إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n، فإن A مصفوفة منفردة.

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة 2×2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$. وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يسمى **مُحَدِّد** المصفوفة 2×2 ويُعبر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 6 محدد ومعكوس المصفوفة 2 × 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

6A. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

6B. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

افترض $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ إذًا $\det(A)=|A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

مثال 7 محدد ومعكوس مصفوفة 3 × 3

أوجد محدد $C=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. ثم أوجد C^{-1}، إن وُجدت.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوسها، إن وُجدت.

7A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

7B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

1 استخدام المصفوفات العكسية

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية. فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس. فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$. حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس. يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$.

مثال 1 إيجاد حل نظام 2X2 باستخدام المصفوفة العكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$2x - 3y = -1$$
$$-3x + 5y = 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1A. $6x + y = -8$
$-4x - 5y = -12$

1B. $-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3×3 باستخدام المصفوفة العكسية

المحافظ المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الآخرين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 استخدام قاعدة كرامر

طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تُعرف باسم **قاعدة كرامر**. وفيها تُستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات. وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$. فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_j باستبدال العمود j^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $|A| = 0$. فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 3 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2 × 2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3A. $2x - y = 4$
$5x - 3y = -6$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

3B. $-9x + 3y = 8$
$2x - y = -3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3X3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$-x - 2y = -4z + 12$
$3x - 6y + z = 15$
$2x + 5y + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
$3x - 8y + 12z = 23$
$2x + 3y - 6z = -10$

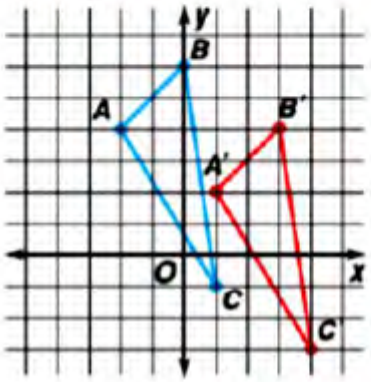
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

نمذجة الحركة باستخدام المصفوفات

1 استخدام المصفوفات لتحديد إحداثيات المضلعات في تحويل معطى.

1

بالرغم من أنّ المصفوفات الكبيرة تستخدم في الرسوم المتحركة التي تعتمد على الحاسوب، إلا أنه يمكنك استخدام مصفوفة بسيطة لوصف عدد كبير من الحركات التي تسمى **التحويلات** التي تعلمتها في الهندسة. إنّ بعض التحويلات التي سنقوم بفحصها في هذا الدرس هي **إزاحات** (انسحابات) و**انعكاسات** (طيّ) و**دورانات محورية** دوران) و**تمدد** (تكبير أو تصغير).



يمكن استخدام $2 \times n$ مصفوفة للتعبير عن رؤوس المضلع n-gon باستخدام الصف الأول من العناصر التي تمثّل إحداثيات المحور x والصف الثاني وهي إحداثيات المحور y لرؤوس المضلع.

يمكن تمثيل المثلث ABC **بمصفوفة الرأس** التالية.

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ \text{الإحداثي } x \\ \text{الإحداثي } y \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

إنّ المثلث $A'B'C'$ منطابق مع المثلث ABC وله الاتجاه نفسه لكن تم تحريكه ثلاث وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى الأسفل من مكان ΔABC. يمكن التعبير عن إحداثيات $\Delta A'B'C'$ مثل مصفوفة الرأس التالية.

$$\begin{matrix} & A' & B' & C' \\ \text{الإحداثي } x \\ \text{الإحداثي } y \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

قارن بين المصفوفتين. إذا أضفت $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ إلى المصفوفة الأولى.

فستحصل على المصفوفة الثانية. يمثّل العدد 3 تحريك ثلاث وحدات إلى اليمين لكل إحداثي x. وبالمثل، يمثّل العدد -2 تحريك وحدتين إلى الأسفل لكل إحداثي y. يسمى هذا النوع من المصفوفات **مصفوفة الإزاحة**. في هذا التحويل، يكون المثلث ΔABC هو **الصورة قبل التحويل**. ويكون $\Delta A'B'C'$ هو **الصورة** بعد الإزاحة.

المثال 1

على فرض الشكل الرباعي ABCD له الرؤوس $A(-1, 1)$ و $B(4, 0)$ و $C(4, -5)$ و $D(1, -3)$ تم ازاحته بمقدار وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى الأعلى.

a. مثّل رؤوس الشكل الرباعي كمصفوفة.

b. اكتب مصفوفة الإزاحة.

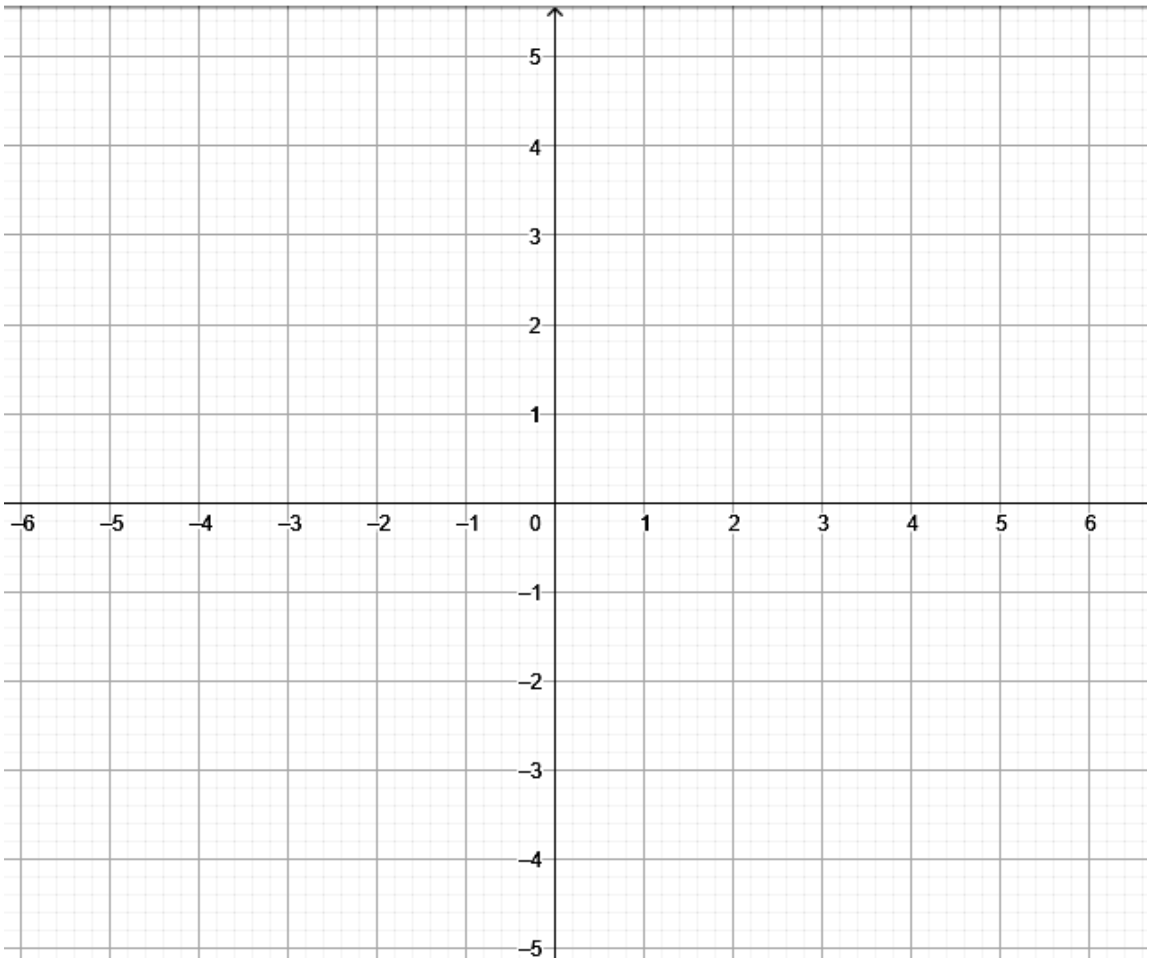
c. استخدم مصفوفة الإزاحة لإيجاد رؤوس $A'B'C'D'$، صورة الشكل الرباعي A,B,C,D بالازاحة

d. ارسم الشكل الرباعي ABCD وصورته.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



يمكن الحصول على مصفوفات للانعكاس في المحور y أو المستقيم $y = x$ بطريقة مشابهة. وهذا ملخص أدناه.

مصفوفات الانعكاس		
للانعكاس في:	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
المحور x	المحور R_x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
المحور y	المحور R_y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
المستقيم $y = x$	$R_{y=x}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

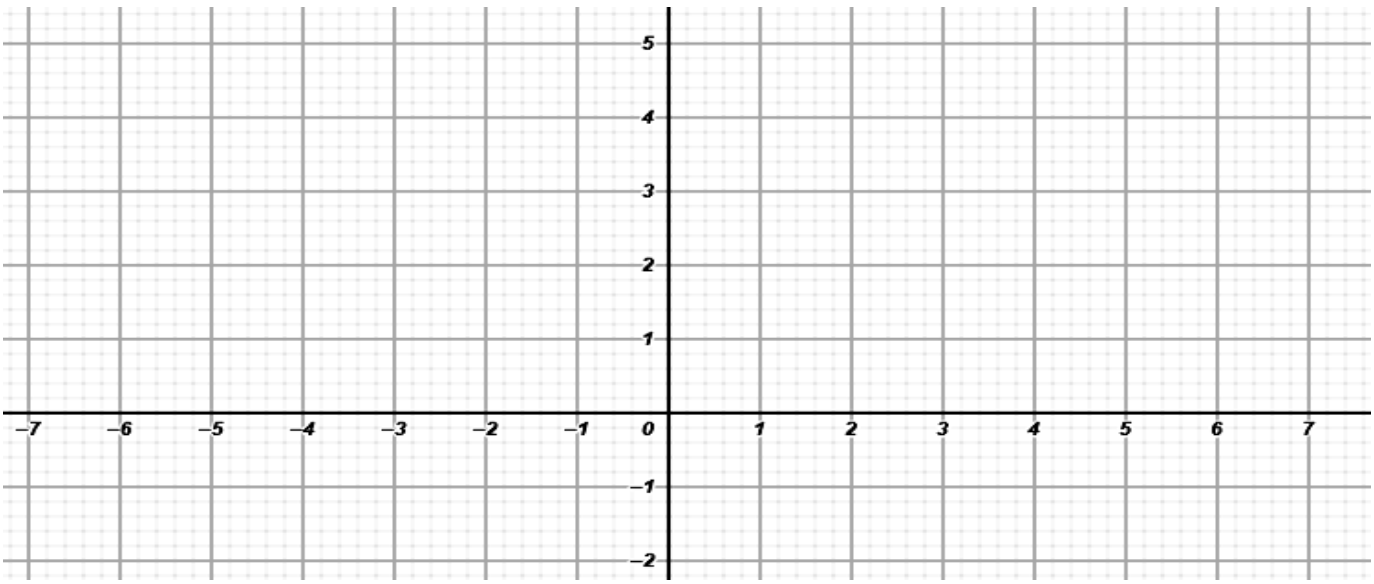
وبالمثل، فإنّ الدوران بزاوية $180°$ سيكون تدويرًا بزاوية $90°$ مرتين أو $Rot_{90} \cdot Rot_{90}$. يتكوّن الدوران بزاوية $270°$ من Rot_{180} و Rot_{90}. إنّ نتائج هذه التركيبات موضحة أدناه.

مصفوفات الدوران		
للدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة حول نقطة الأصل لـ	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
$90°$	Rot_{90}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$180°$	Rot_{180}	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$270°$	Rot_{270}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المثال 2

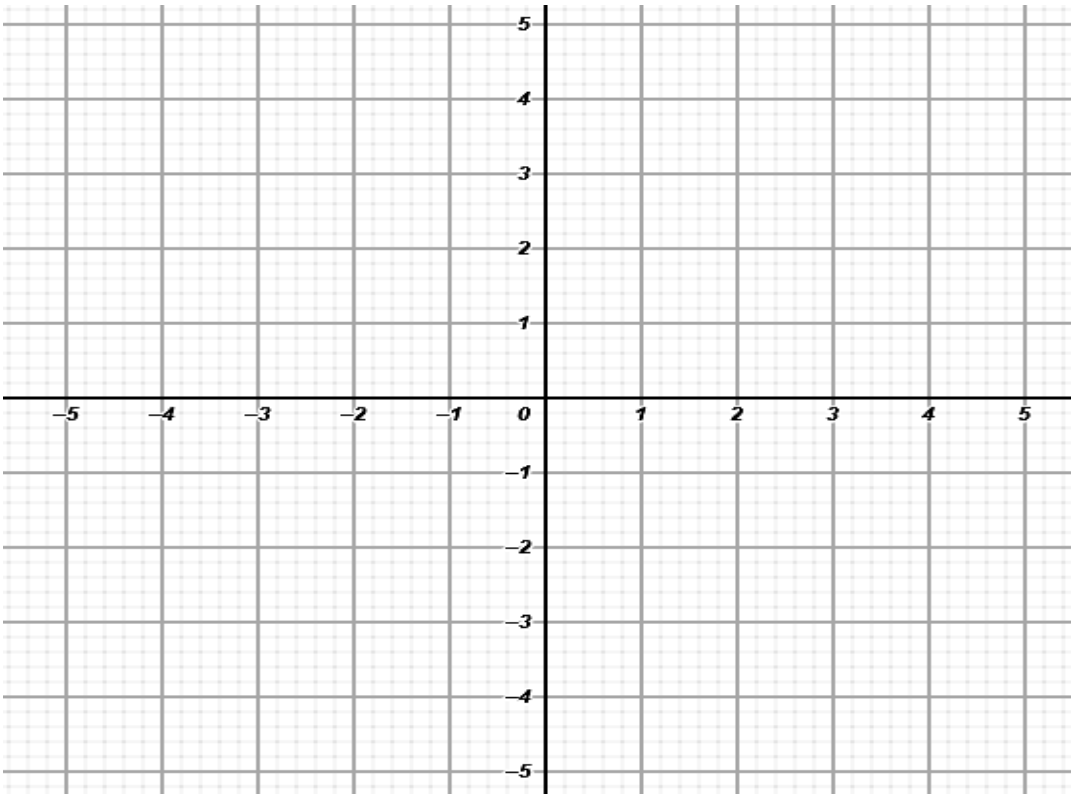
الرسوم المتحركة لإنشاء صورة تظهر معكوسة في المرآة، ستستخدم الرسوم المتحركة مصفوفة لعكس صورة في المحور y. استخدم مصفوفة انعكاس لإيجاد إحداثيات رؤوس نجمة معكوسة في المرآة (المحور y) إذا كانت إحداثيات النقاط المرتبطة لإنشاء النجمة هي $(4, -2)$ و $(4, -3.5)$ و $(5, -4)$ و $(4, -4.5)$ و $(4, -6)$ و $(3, -5)$ و $(1, -5)$ و $(2, -4)$ و $(1, -3)$ و $(3, -3)$.



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المثال 3

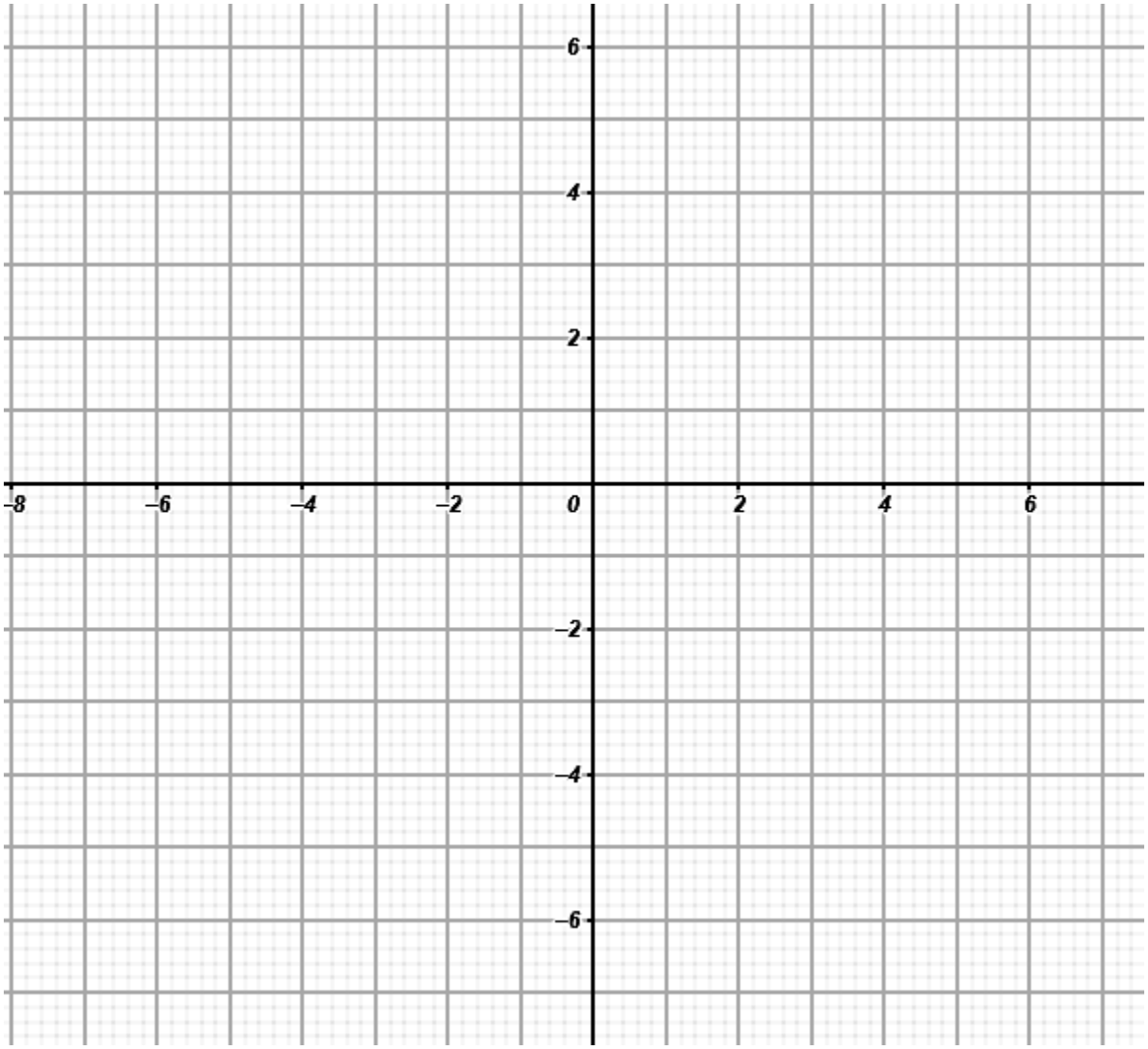
الرسوم المتحركة على فرض أنه يتم رسم الشكل المتحرّك لكي يدور حول نقطة معينة. إنّ صور الدوران المتعدد ضرورية من أجل تسهيل تحريك الصورة. إذا كانت الصورة تحتوي على نقاط رئيسية عند $(1, 1)$ و $(4, -1)$ و $(4, -2)$ و $(3, -2)$ والدوران مرتبط بنقطة الأصل، أوجد موقع هذه النقاط عند $90°$ و $180°$ و $270°$ والدورانات باتجاه معاكس لعقارب الساعة.



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المثال 4

شبه منحرف رؤوسه النقاط $L(-4, 1)$ و $M(1, 4)$ و $N(7, 0)$ و $P(-3, -6)$. أوجد إحداثيات شبه المنحرف $L'M'N'P'$ صورة شبه المنحرف $LMNP$ لمعامل المقياس 0.5 صف التمدد



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تدريب على الاختبار

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حلاً للنظام.

1. $-3x + y = 4$
   $5x - 7y = 20$

2. $x + 4y - 3z = -8$
   $5x - 7y + 3z = -4$
   $3x - 2y + 4z = 24$

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

3. $5x - 6y = 28$
   $6x + 5y = -3$

4. $2x - 4y + z = 8$
   $3x + 3y + 4z = 20$
   $5x + y - 3z = -13$

5. **المكتبة** استعارت ليلى كتبًا وأسطوانات مضغوطة وأسطوانات DVD من المكتبة. وبلغ إجمالي ما استعارته 16 عنصرًا. وكان إجمالي عدد الأسطوانات المضغوطة وأسطوانات DVD مساويًا لعدد الكتب. واستعارت ليلى أسطوانتين مضغوطتين زيادة عن أسطوانات DVD.

   a. افترض أن b = عدد الكتب، و c = عدد الأسطوانات المضغوطة، و d = عدد أسطوانات DVD. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل المسألة.

   b. أوجد حلاً لنظام المعادلات. فسر حلك.

أوجد *AB* و*BA*، إن أمكن.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [2 \quad -1 \quad -8]$

8. **الهندسة** يمكن كتابة إحداثيات النقطة (x, y) في صورة مصفوفة 2×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a. افترض أن P هي النقطة (4, −3). ناقش كيف يؤثر ضرب A في P على P.

   b. مثلث يحتوي على الرؤوس (0, 0) و(2, 6) و(8, 3). أنشئ مصفوفة 3×2 B لتمثيل المثلث. أوجد AB. ما التأثير الواقع على المثلث؟ هل يتفق مع إجابتك عن الجزء a؟

أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات. إن أمكن.

11. $2x - 3y = -7$
    $5x + 2y = 11$

12. $2x + 2y + 5z = -6$
    $2x - 3y + 7z = -7$
    $x - 5y + 9z = 4$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية. إن وُجد حل فريد.

13. $3x - 2y = -2$
    $4x - 2y = 2$

14. $3x - 2y - 3z = -24$
    $3x + 5y + 2z = 7$
    $-x + 5y + 3z = 25$

اجر العمليات المطلوبة. اكتب "مستحيل" في حال كانت المصفوفة غير موجودة.

15. $-3\begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. **مباراة غناء** فازت سهام بالمرتبة النهائية الثانية في مباراة غناء. قامت النتيجة على إعطاء كلّ متنافس ثلاث نقاط كلّما حصل على تصويت يختاره للمرتبة الأولى، ونقطتين للمرتبة الثانية ونقطة واحدة للمرتبة الثالثة. وقد حصلت سهام على مجموع 490 صوتًا يضم كلّ المراتب التي اختيرت لها. وبلغ عدد النقاط التي فازت بها 878 نقطة. إذا كان عدد الأصوات التي اختارتها للمرتبة الثانية مثلّي عدد الأصوات التي اختارتها للمرتبة الثالثة. فما عدد الأصوات التي حصلت عليها لكل مرتبة؟

20. ما نتيجة انعكاس مثلث رؤوسه A(a,d) ،B(b,e) ،C(c,f) في المحور x، ثم إعادة انعكاس صورته في المحور x؟ استخدم المصفوفات لتبرير إجابتك.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تدريب على الاختبار

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تدريب على الاختبار

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تدريب على الاختبار

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

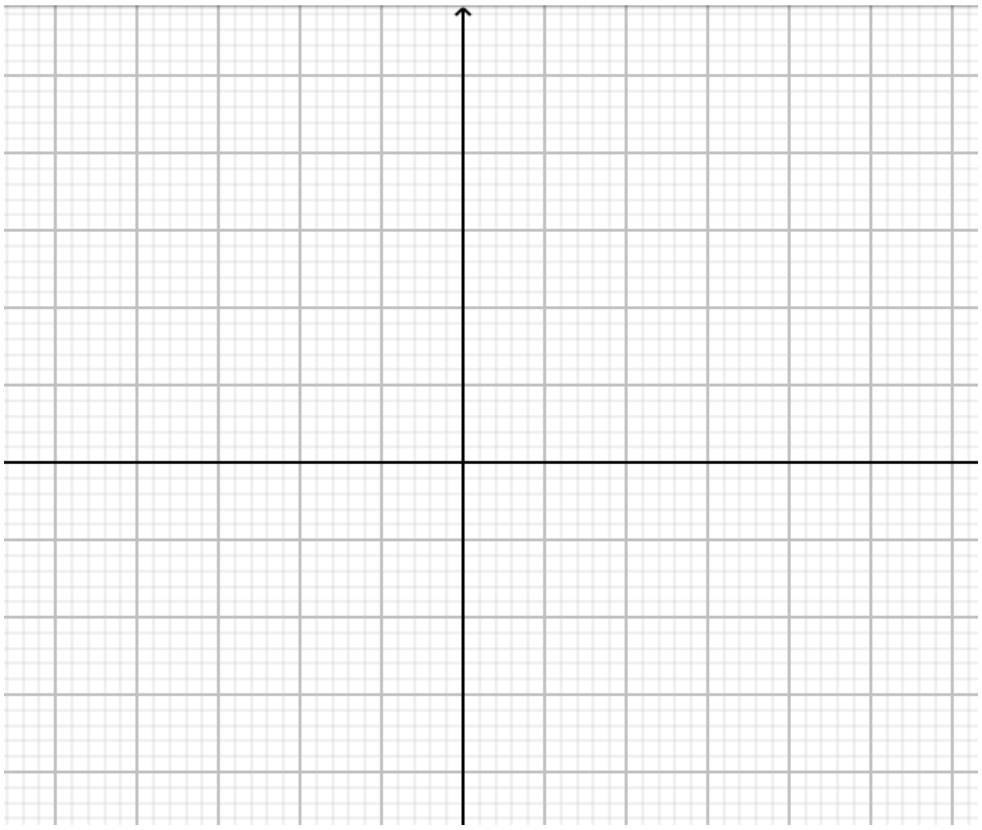
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

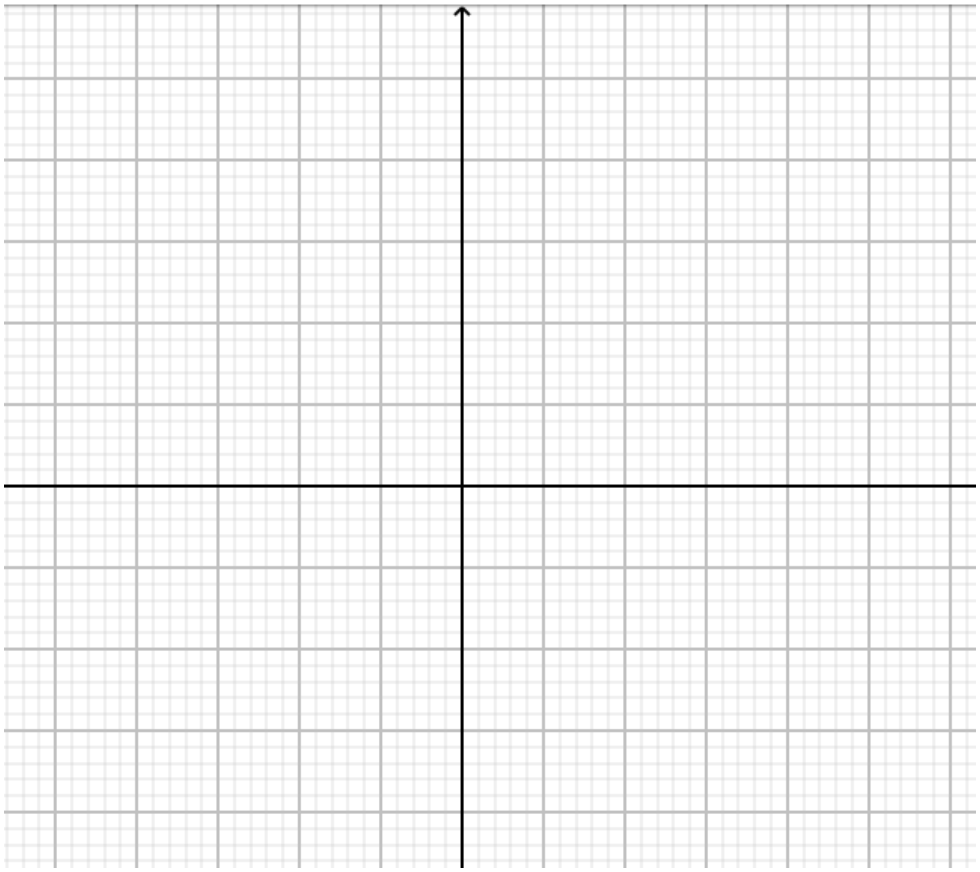
تدريب على الاختبار

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تدريب على الاختبار





ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL