

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر المتقدم

الوحدة الرابعة

الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2018-2019

مدرس المادة :- صكبان صالح محمد

الوحدة (4) :- تطبيقات الاشتقاق

- تتكون هذه الوحدة من المواضيع التالية .
- [4,1] - التقريبات الخطية وطريقة نيوتن .
 - [4,2] - الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال .
 - [4,3] - القيم العظمى والصغرى .
 - [4,4] - الدوال المتزايدة والمتناقصة .
 - [4,5] - التقعر واختبار المشتقة الثانية .
 - [4,6] - نظرة عامة على رسم المنحنيات .
 - [4,7] - القيم المثلى .
 - [4,8] - المعدلات المرتبطة .
 - [4,9] - معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم .

التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

تعريف : التقريب الخطي (أو المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

س1:- أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \cos x$ عند $x_0 = \frac{\pi}{3}$

.....

.....

.....

.....

س(2) :- أوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin x$ عندما تقترب x من الصفر .

.....

.....

.....

.....

س(3) :- استخدم التقريب الخطي لتقريب كل من الجذور :- $\sqrt{26}$, $\sqrt[3]{25.2}$, $\sqrt[3]{8.07}$

.....

.....

.....

.....

.....

س(4) :- قدرت شركة أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف آلة تصوير بسعر x درهم . كما هو معطى في الجدول المجاور . قدر عدد آلات التصوير التي يمكن بيعها بسعر 7 دراهم .

x	6	10	14
f(x)	84	60	32

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة نيوتن رافسون للتقريب :-

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

س(5):- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الصفر التقريبي للدالة $f(x) = x^5 - x + 1$

س(6):- استخدم طريقة نيوتن لتقريب الجذور $\sqrt{23}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{11}$

س(7):- قدرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجة بالسعر x درهم كما في الجدول المجاور . قدر عدد الألعاب التي يمكن بيعها بسعر 24 درهم .

x	20	30	40
f(x)	18	14	12

قاعدة لوبيتال

من الصيغ غير المعرفة التي مرت علينا ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty^0, \infty - \infty, 1^\infty, 0 \times \infty, 0^0$)

ملاحظة:- قاعدة لوبيتال تطبق فقط عندما يكون ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$) ،

س1):- أوجد النهايات التالية وذلك بتحديد ما إذا كان يمكن استخدام طريقة لوبيتال أم لا :-

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{3x} - 1}$

3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - 1}{t}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5}{x^2 + 6x + 5}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin^{-1} x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

.....
.....

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$

.....
.....

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

.....
.....

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

.....
.....
.....

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$

.....
.....
.....

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)^{\frac{2}{x}}$

.....
.....

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

13) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

س2): استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات التالية .

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}$

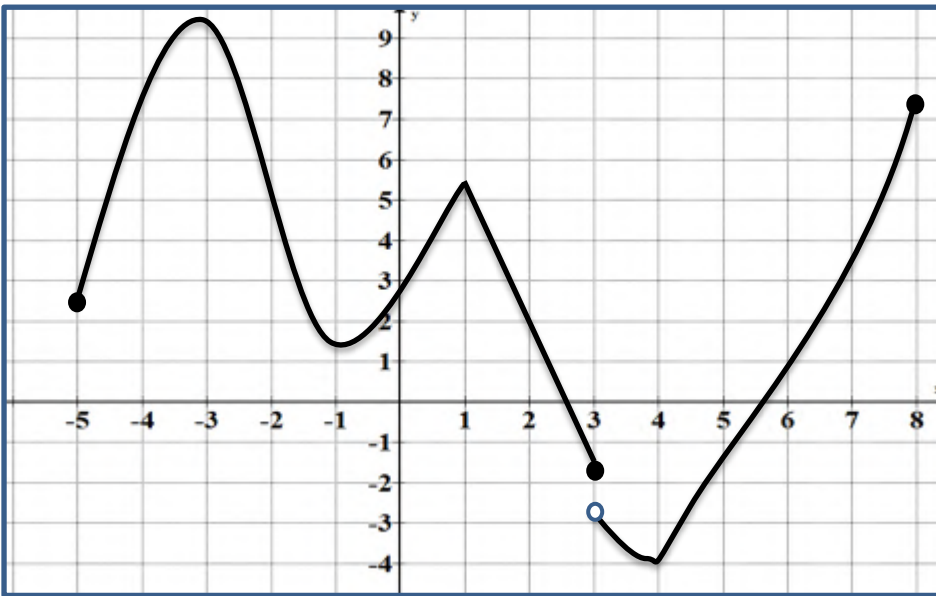
15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

القيم العظمى والصغرى [4, 3]

ملاحظة :- يمكن إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية (والقيم المطلقة) (بيانياً أو جبرياً) .

تعريف النقطة الحرجة (العدد الحرج) تكون النقطة a نقطة حرجة عندما تكون $f'(a) = 0$ أو $f'(a)$ غير معرفة . حيث النقطة a تقع في مجال الدالة f .

س(3) :- من الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f حدد ما يلي .



(1) :- النقاط الحرجة

(2) :- القيم العظمى والقيم

الصغرى المحلية .

(3) :- القيم العظمى والصغرى
المطلقة :-

الدوال المتزايدة والمتناقصة [4, 4]

$$1) \quad x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

تكون الدالة متزايدة في فترة إذا كانت

$$2) \quad x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

تكون الدالة متناقصة في فترة إذا كانت

كما مر بنا سابقاً في الفصل الدراسي الأول .

نظرية :- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في فترة معينة فإن :-

(1) :- تكون الدالة f متزايدة إذا كانت $f'(x) > 0$

(2) :- تكون الدالة f متناقصة إذا كانت $f'(x) < 0$

(س) :- متى تكون $f'(x) > 0$ ، ومتى تكون $f'(x) < 0$

الجواب :-

(س1) :- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f

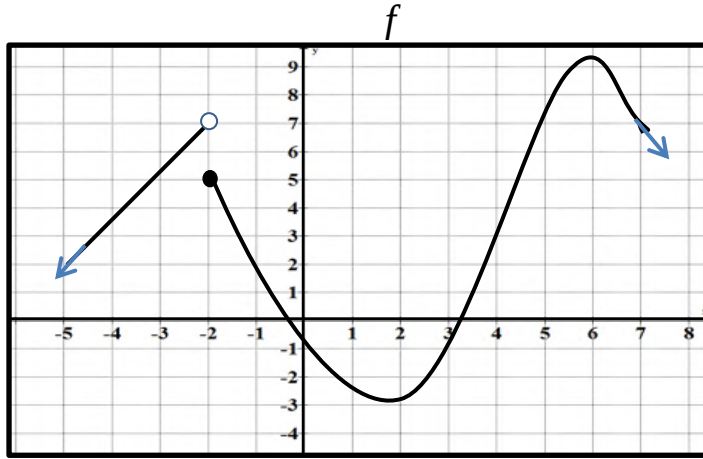
والمطلوب :-

(1) :- قيم x التي عندها نقاط حرجة

(2) :- فترات التزايد للدالة f

(3) :- فترات التناقص للدالة f

(4) :- قيم x التي عندها قيم عظمى وقيم x التي عندها قيم صغرى



(س2) :- لكل مما يلي أوجد (النقاط الحرجة ، فترات التزايد والتناقص ، القيم القصوى المحلية)

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

.....

.....

.....

.....

2) $f(x) = (3x + 1)^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

4) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

س3:- في كل مما يلي أوجد (النقاط الحرجة والقيم القصوى المطلقة) في الفترة المشار إليها .

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[-3, 2]$

.....

.....

.....

.....

.....

2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$, $[-3, 1]$

.....

.....

.....

.....

.....

3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-4, -2]$

.....

.....

.....

.....

.....

4) $f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$, $[-2, 2]$

.....

.....

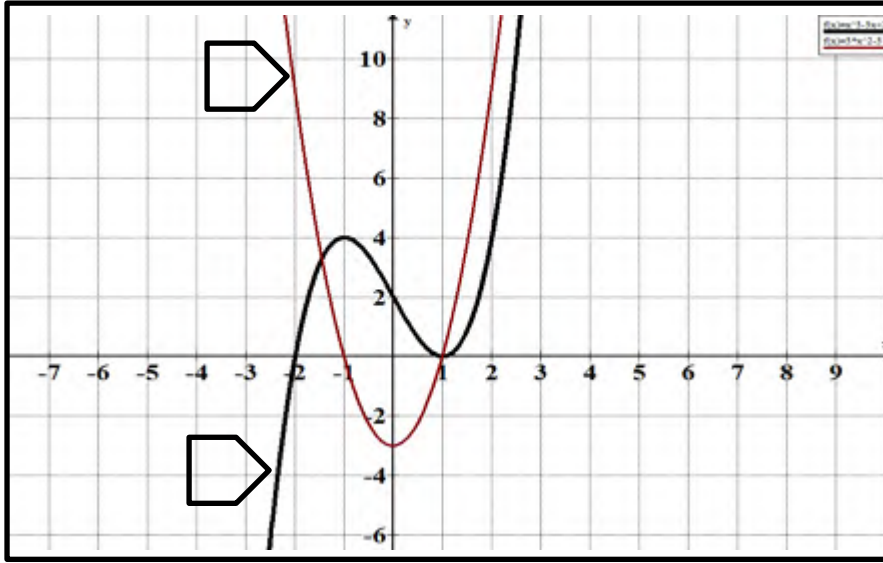
.....

.....

.....

كيفية إيجاد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية وفترات التزايد وفترات التناقص من رسم المشتقة الأولى :-

س4:- الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ وبيان مشتقتها الأولى $f'(x)$ والمطلوب :-



أين $f(x)$ وأين $f'(x)$

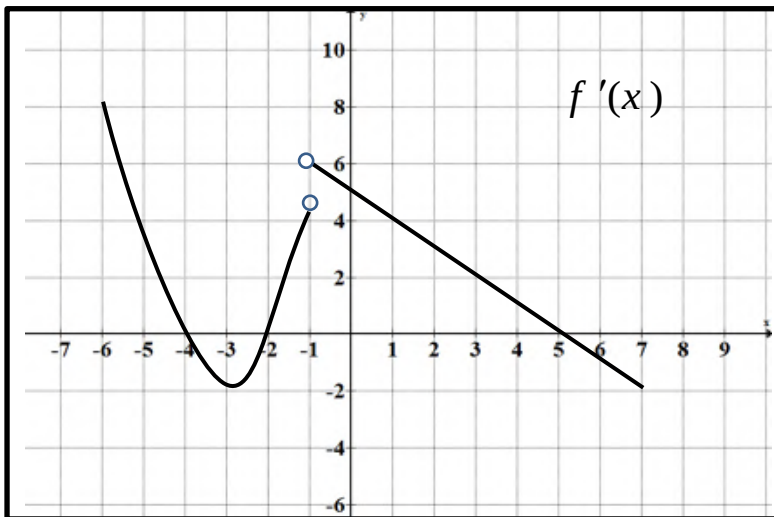
1:- النقاط الحرجة للدالة $f(x)$

2:- فترات التزايد للدالة $f(x)$

3:- فترة التناقص للدالة $f(x)$

4:- قيم x التي عندها قيم عظمى وصغرى ؟ هل توجد للدالة قيم قصوى مطلقة ؟

س5:- الشكل المجاور يمثل بيان المشتقة الأولى $f'(x)$ والمطلوب :-



1:- النقاط الحرجة

2:- قيم x التي عندها قيم قصوى محلية وقيم قصوى مطلقة .

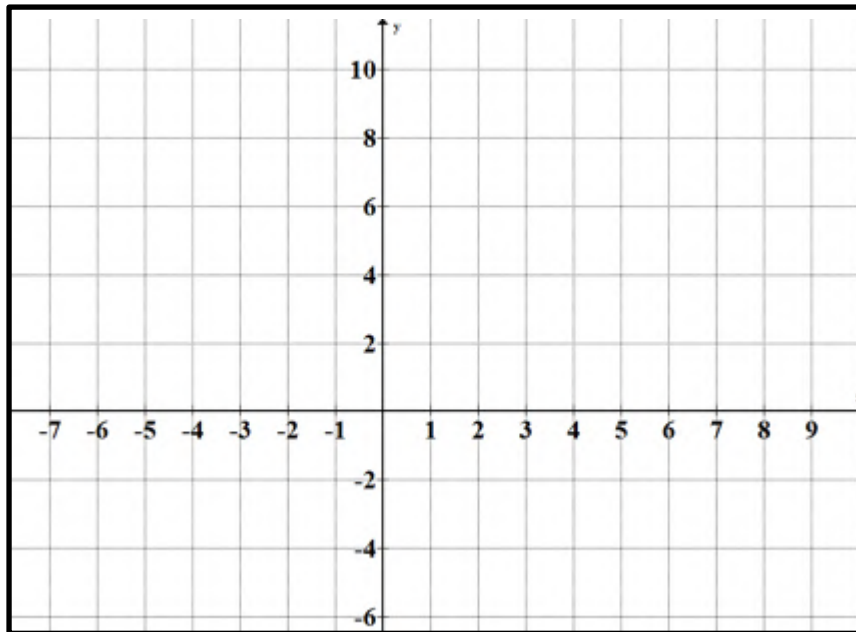
3:- فترات التزايد وفترات التناقص

س6:- ارسم كل من الدالتين التاليتين بيانياً بالخصائص التالية .

1) $f(-1)=1, f(2)=5, f'(x) < 0 \rightarrow x < -1, x > 2$

$$f'(x) > 0 \rightarrow -1 < x < 2$$

غير موجودة $f'(-1)=0, f'(2)$



2) $f(0)=1, f(2)=5, f'(x) < 0 \rightarrow x < 0, x > 2$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < 2$$

