



الفصل الخامس

التمهيد



الفصل الخامس المتجهات

التهيئة : ص 9

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية ، ثم أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

$$[3 , (-2 , 4)]$$

$$(1 , 4) , (-2 , 4) (1$$

$$[5 , (-5 , 2)]$$

$$(-5 , 3) , (-5 , 8) (2$$

$$[\sqrt{29} , (-2 , -8)]$$

$$(2 , -9) , (-3 , -7) (3$$

$$[\sqrt{53} , (-5 , -2)]$$

$$(-4 , -1) , (-6 , -8) (4$$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقربا الناتج إلى أقرب عشر .



(6



(5



(8



(7

$$(36 \cdot 1 , 4 , 11 \cdot 1 , 5 \cdot 4)$$

(9) بالون : أطلق بالون يحتوي علي هواء ساخن في الفضاء . إذا كان البالون مربوطا بحبلين يمسك بكل منهما شخص يقف علي سطح الأرض ، والمسافة بين الشخصين 35ft بحيث كان قياس الزاوية بين كل من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كل من الحبلين إلى أقرب جزء من عشرة .

$$(22 \cdot 8ft)$$

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن ، وإذا لم يوجد حل فاكتب لا يوجد حل مقربا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح ، وقياس الزوايا إلى أقرب درجة .

$$(B = 33^\circ , C = 19^\circ , c \approx 4)$$

$$a = 10 , b = 7 , A = 128^\circ (10$$

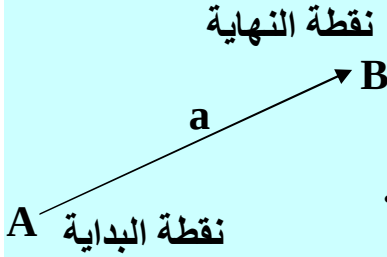
$$(لا يوجد حل)$$

$$a = 15 , b = 16 , A = 127^\circ (11$$

$$(B = 39^\circ , C = 50^\circ , c \approx 23)$$

$$a = 30 , b = 10 , A = 91^\circ (12$$

المتجه: هو كمية لها طول واتجاه ، فمثلا السرعة المتجهة للكرة تصف كلا من مقدار سرعة الكرة ، واتجاه حركتها .

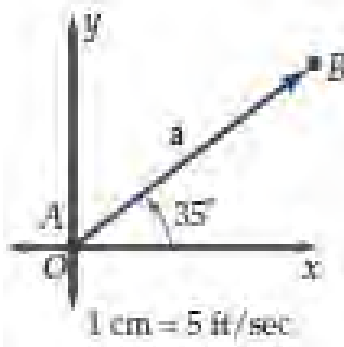


يمكن تمثيل المتجه هندسيا بقطعة مستقيمة متجهة ، أو سهم يظهر كل من القيمة والاتجاه . ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها نقطة البداية A ، ونقطة النهاية B .

uuuv

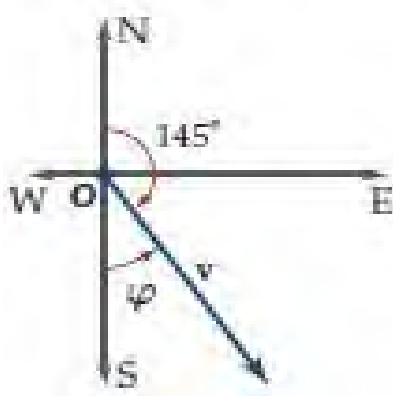
ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{AB}$ أو $\vec{a}$

إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ، فإن المتجه يكون في الوضع القياسي ، ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x) . فمثلا : اتجاه المتجه $\vec{a}$ هو 35° .



أما طول المتجه فيمثله طول القطعة المستقيمة . إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$ ، فإن طول المتجه $\vec{a}$ ، ويرمز له بالرمز $|\vec{a}|$ ، يساوي $2 \cdot 6 \times 5$ أو 13 ft/s .

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضا باستعمال زاوية الاتجاه الرباعي ϕ ، وتقرأ فاي ، وهي قياس اتجاهي بين 0° ، 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال - جنوب) . فمثلا زاوية اتجاه الرباعي للمتجه $\vec{v}$ في الشكل المجاور هي 35° شرق الجنوب ، وتكتب $S 35^\circ E$. كما يمكن استعمال زاوية الاتجاه الحقيقي ، حيث تقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءا من الشمال . ويقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام ، فمثلا يكتب الاتجاه الذي يحدد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي علي الصورة 025° .



تحقق من فهمك :

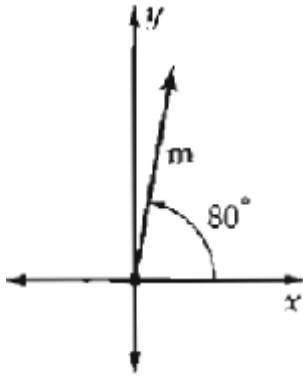
استعمل مسطرة ومنقلة ، لرسم متجه لكل من الكميات الآتية ، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

(2A) $t = 20\text{ ft/s}$ ، باتجاه 065° .

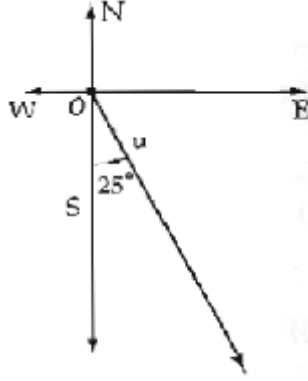
(2B) $u = 15\text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 25^\circ E$.

(2C) $m = 60\text{ N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الأفقي .

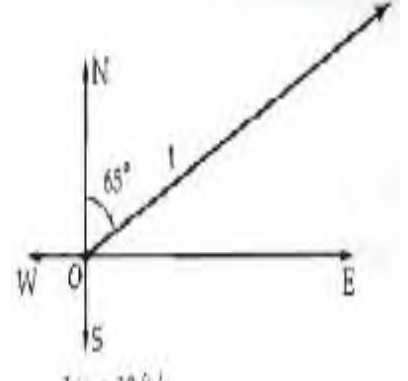
الحل:



$$1 \text{ cm} = 30 \text{ N}$$



$$1 \text{ in} = 10 \text{ m/h}$$



$$1 \text{ in} = 10 \text{ ft/s}$$

أنواع المتجهات:

- المتجهات المتوازية لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلا في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- المتجهات المتكافئة لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. كما في الشكل المجاور، $a = c$ ، لأن لهما الطول والاتجاه نفسيهما، لاحظ أن $a \neq b$ لأن $a \neq d$ ، $|a| \neq |b|$ ، لأن لهما اتجاهين مختلفين.

- المتجهان المتعاكسان لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه a على الصورة $-a$ ، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

المحصلة : عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجها ، يسمى المحصلة . ويكون لمتجه المحصلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين واحدا تلو الآخر . ويمكن إيجاد المحصلة هندسيا باستعمال قاعدة المثلث ، أو قاعدة متوازي الأضلاع .

إيجاد المحصلة

مفهوم أساسي

قاعدة متوازي الأضلاع



لإيجاد محصلة المتجهين a , b نتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 :

أجر انسحابا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a

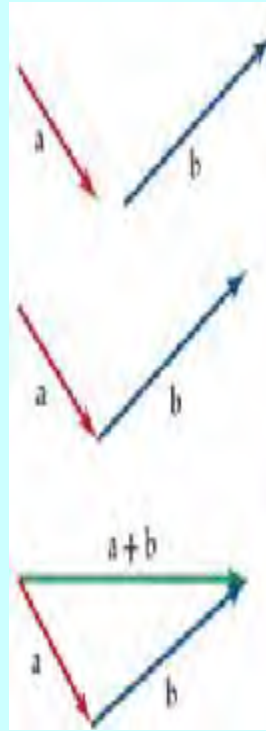
الخطوة 2 :

أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعا a , b

الخطوة 3 :

محصلة المتجهين a , b هو المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع .

قاعدة المثلث



لإيجاد محصلة المتجهين a , b نتبع الخطوات الآتيتين :

الخطوة 1 :

أجر انسحابا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه a

الخطوة 2 :

محصلة المتجهين a , b هو المتجه المرسوم من بداية a إلى نقطة نهاية b

المتجه الصفري :

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه ، فإن المحصلة هي المتجه الصفري ، ويرمز بالرمز 0 ، وطوله صفر وليس له اتجاه .

ضرب المتجه في عدد حقيقي :

ضرب المتجه في عدد حقيقي

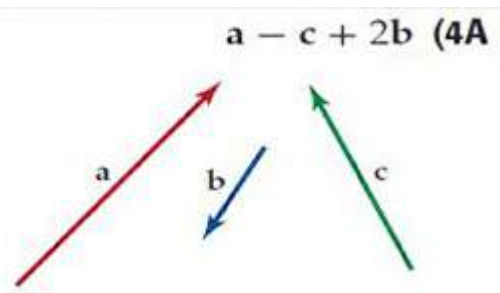
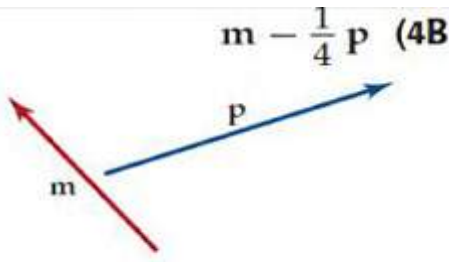
مفهوم أساسي

إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k فإن طول المتجه kv هو $|k| |v|$ ، ويتحدد اتجاهه بإشارة k .

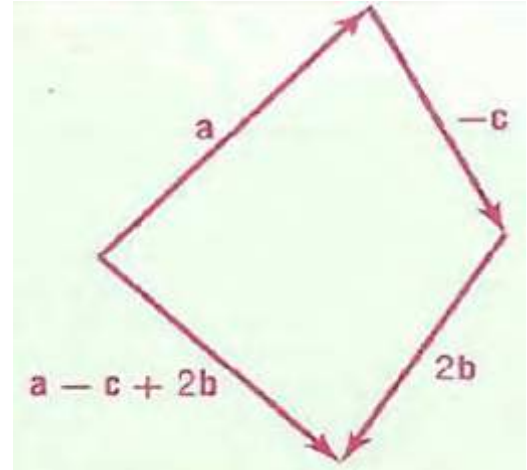
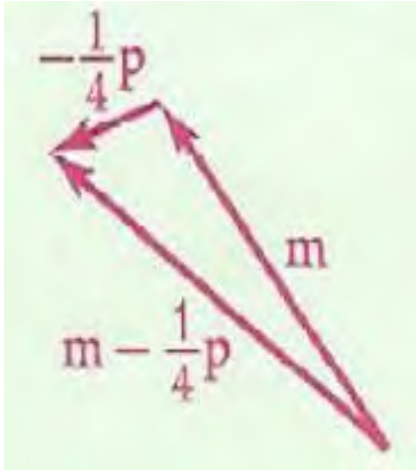
- إذا كانت $k > 0$. فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه .
- إذا كانت $k < 0$. فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .

تحقق من فهمك :

ارسم المتجه الذي يمثل كلا مما يأتي :



الحل:



تدرب وحل المسائل:

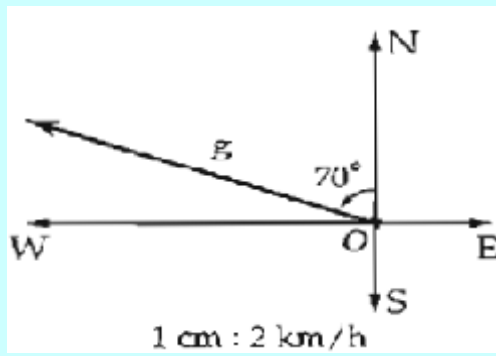
حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي :

- (كمية قياسية) 1. دفع صندوق بقوة مقدارها 125 N .
- (كمية قياسية) 2. تهب الرياح بسرعة 20 عقدة .
- (كمية متجهة) 3. يركض غزال بسرعة 15 m / s باتجاه الغرب .
- (كمية قياسية) 4. ضربت كرة قدم بسرعة 85 km / h .
- (كمية متجهة) 5. إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل .
- (كمية متجهة) 6. رمي حجر راسيا إلى أعلى بسرعة 50 ft / s .

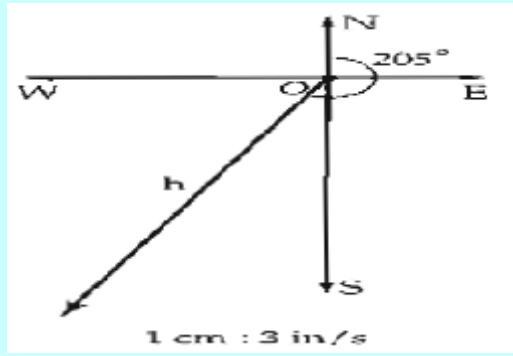
استعمل المسطرة والمنقلة ، لرسم متجه لكل من الكميات الآتية . واكتب مقياس الرسم في كل حالة .

7. $h = 13 \text{ in} / \text{s}$ باتجاه 205° .
8. $g = 6 \text{ km} / \text{h}$ باتجاه 70° W .
9. $J = 5 \text{ ft} / \text{s}$ وبزاوية قياسها 300° مع الأفقي .
10. $d = 28 \text{ km}$ وبزاوية قياسها 35° مع الأفقي .
11. $R = 40 \text{ m}$ وبزاوية قياسها 35° مع الأفقي .
12. $n = 32 \text{ m} / \text{s}$ باتجاه 030° .

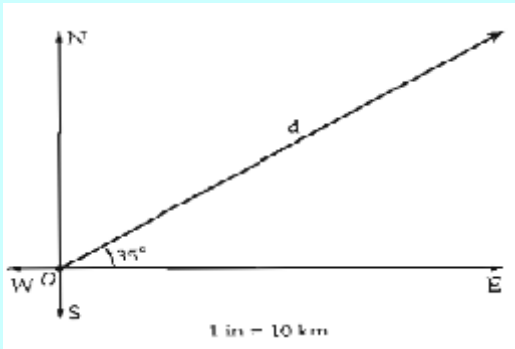
الحل:



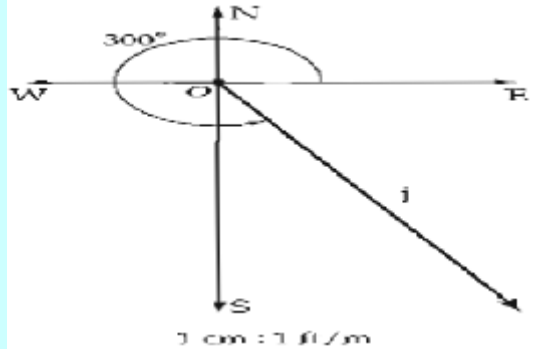
(8)



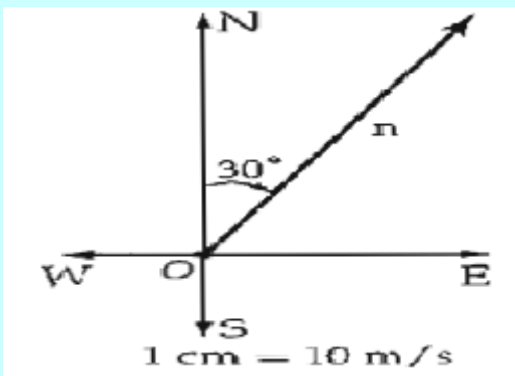
(7)



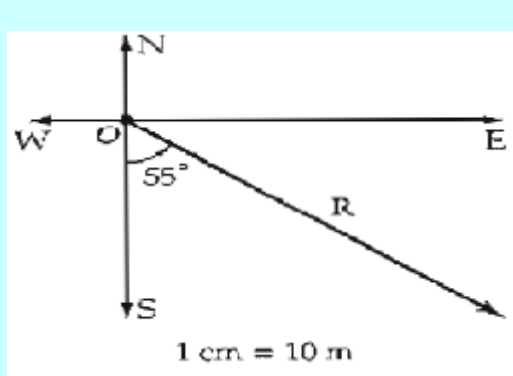
(10)



(9)

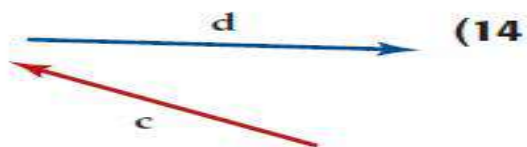


(12)

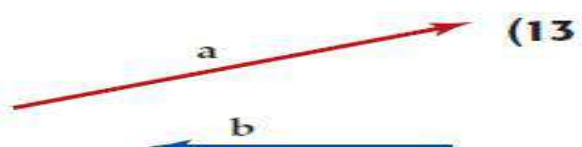


(11)

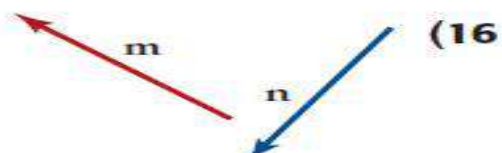
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع ، قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملا المسطرة والمنقلة .



(14)



(13)



(16)



(15)

(13) نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع ، 45° ، $1 \cdot 4 \text{ cm}$

(14) نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع ، 58° ، 1 cm

(15) نستخدم قاعدة المثلث ، 308° ، $1 \cdot 1 \text{ cm}$

(16) نستخدم قاعدة المثلث ، 188° ، $2 \cdot 3 \text{ cm}$

حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي :

(18) 18 N للأمام ، ثم 20 N للخلف .

(19) 100 m للشمال ، ثم 350 m للجنوب .

(21) 15 m/s^2 باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي ، $9 \cdot 8 \text{ m/s}^2$ للأسفل .

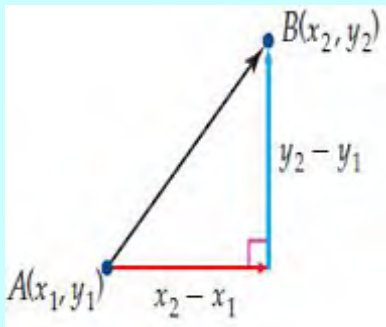
($8 \cdot 15 \text{ m/s}^2$ ، 23° مع الأفقي)

المتجهات في المستوى الإحداثي 2 – 5

الصورة الإحداثية لمتجه :

الصورة الإحداثية لمتجه

مفهوم أساسي



الصورة الإحداثية لـ AB الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :
 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

تحقق من فهمك :

أوجد الصورة الإحداثية لـ AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي :

(1A) $A(-2, -7)$ ، $B(6, 1)$

(1B) $A(0, 8)$ ، $B(-9, -3)$

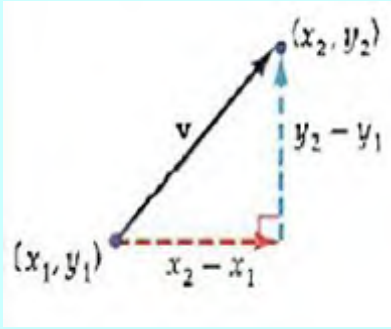
الحل : (1A) $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 + 2, 1 + 7) = (8, 8)$

(1B) $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-9 - 0, -3 - 8) = (-9, -11)$

طول المتجه في المستوى الإحداثي :

طول المتجه في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي



إذا كان V متجهها ، وكانت نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول V يعطي بالصيغة :

$$|V| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت (a, b) هي الصورة الإحداثية للمتجه V فإن :

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

تحقق من فهمك :

أوجد طول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي :

$A(-2, -7), B(6, 1)$ (2A)

$A(0, 8), B(-9, -3)$ (2B)

الحل :

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 + 2)^2 + (1 + 7)^2} \quad (2A)$$

$$= \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-9 - 0)^2 + (-3 - 8)^2} \quad (2B)$$

$$= \sqrt{81 + 121} = \sqrt{202} \approx 14.2$$

العمليات على المتجهات :

العمليات على المتجهات

مفهوم أساسي

إذا كان $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ متجهين ، و k عددا حقيقيا ، فإن :

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

جمع متجهين :

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

طرح متجهين :

$$k a = (k a_1, k a_2)$$

ضرب متجه في عدد حقيقي :

تحقق من فهمك :

كلا مما يأتي للمتجهات $y = (2, 5)$, $z = (-3, 0)$, $w = (-4, 1)$

$$2w + 4y - z \quad (3C)$$

$$-3w \quad (3B)$$

$$4w + z \quad (3A)$$

الحل :

$$4w + z = 4(-4, 1) + (-3, 0) = (-16, 4) + (-3, 0) = (-19, 4) \quad (3A)$$

$$-3w = -3(-4, 1) = (12, -3) \quad (3B)$$

$$2w + 4y - z = 2(-4, 1) + 4(2, 5) - (-3, 0) \quad (3C)$$

$$= (-8, 2) + (8, 20) + (3, 0) = (3, 22)$$

متجهات الوحدة :

يسمى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة ويمكن التعبير عن المتجه غير الصفري v علي أنه حاصل ضرب متجه وحدة u في عدد حقيقي بنفس إتجاه v ، ولإيجاد u اقسم المتجه v علي طوله $|v|$

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|}v$$

تحقق من فهمك :

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي :

$$x = (-4, -8) \quad (4B)$$

$$w = (6, -2) \quad (4A)$$

الحل :

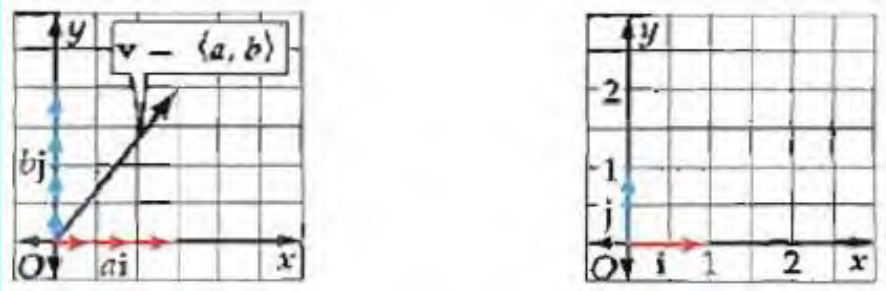
$$u = \frac{1}{|w|}w = \frac{1}{|(6, -2)|}(6, -2) = \frac{1}{\sqrt{36+4}}(6, -2) = \frac{1}{\sqrt{40}}(6, -2) \quad (4A)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{10}}(6, -2) = \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}}, \frac{-2}{2\sqrt{10}} \right\rangle = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

$$u = \frac{1}{|x|}x = \frac{1}{|(-4, -8)|}(-4, -8) = \frac{1}{\sqrt{16+64}}(-4, -8) = \frac{1}{\sqrt{80}}(-4, -8) \quad (4B)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}(-4, -8) = \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}}, \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

ملاحظة: يرمز لمتجهي الوحدة باتجاه المحور x الموجب ، والمحور y الموجب بالرمزين $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$ ، كما يسمى المتجهان i, j متجهي الوحدة القياسيين .



ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = (a, b)$ علي الصورة $v = ai + bj$ ، يسمى ناتج الجمع $ai + bj$ توافقا خطيا للمتجهين i, j ، ويقصد به كتابة ناتج الجمع بدلالة متجهي الوحدة i, j .

تحقق من فهمك:

اكتب المتجه DE المعطي نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i, j في كل مما يأتي :

5A $D(-6, 0), E(2, 5)$

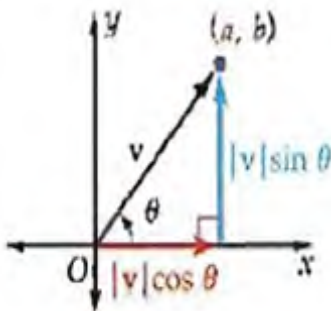
5B $D(-3, -8), E(7, 1)$

الحل:

5A $DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (2 + 6, 5 - 0) = (8, 5) = 8i + 5j$

5B $DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (7 + 3, 1 + 8) = (10, 9) = 10i + 9j$

ملاحظة:



يمكن تحديد اتجاه المتجه $v = (a, b)$ باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها v مع المحور x الموجب ، ويمكن كتابة v علي الصورة الإحداثية ، أو بدلالة متجهي الوحدة i, j كما يأتي :

$$v = (a, b) = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = |v| \cos \theta i + |v| \sin \theta j$$

تحقق من فهمك:

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطي طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يأتي :

6B $|v| = 24, 210^\circ$

6A $|v| = 8, 45^\circ$

الحل:

6A $v = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = (8 \cos 45^\circ, 8 \sin 45^\circ)$

$$= \left\langle 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$$

$$\mathbf{v} = (|\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta) = (24 \cos 210^\circ, 24 \sin 210^\circ) \quad (6B)$$

$$= \left\langle 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 24\left(\frac{1}{2}\right) \right\rangle = (12\sqrt{3}, 12)$$

ملاحظة:

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = (a, b)$ مع المحور x الموجب بحل المعادلة

$$\tan q = \frac{b}{a}, \tan q = \frac{|\mathbf{v}| \sin q}{|\mathbf{v}| \cos q} \quad \text{المثلثية نحصل علي:}$$

تحقق من فهمك:

x الموجب :

$$(-3, -8) \quad (6B)$$

$$-6i + 2j \quad (6A)$$

الحل:

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{2}{-6} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-3}\right) = 161.6^\circ \quad (6A)$$

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{-8}{-3} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 249.4^\circ \quad (6B)$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي

$$A(-3, 1), B(4, 5) \quad (1)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 + 3, 5 - 1) = (7, 4) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \approx 8.1$$

$$A(2, -7), B(-6, 9) \quad (2)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-6 - 2, 9 + 7) = (-8, 16) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} \approx 17.9$$

$$A(10, -2), B(3, -5) \quad (3)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (3 - 10, -5 + 2) = (-7, -3) \text{ :الحل}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7.6$$

$$A(-2, 6), B(1, 10) \text{ (4)}$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (1 + 2, 10 - 6) = (3, 4) \text{ :الحل}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$A(2 \cdot 5, -3), B(-4, 1 \cdot 5) \text{ (5)}$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-4 - 2 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 3) = (-6 \cdot 5, 4 \cdot 5) \text{ :الحل}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{42 \cdot 25 + 20 \cdot 25} = \sqrt{62 \cdot 5} \approx 7.9$$

$$A(\frac{1}{2}, -9), B(6, \frac{1}{2}) \text{ (6)}$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 9) = (\frac{11}{2}, \frac{19}{2}) \text{ :الحل}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{529}{4}} = \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$$

إذا كان $f = (8, 0)$, $g = (-3, -5)$, $h = (-6, 2)$ ، فأوجد كلا مما يأتي :

$$4h - g \text{ (7)}$$

$$4h - g = 4(-6, 2) - (-3, -5) = (-24, 8) + (3, 5) = (-21, 13) \text{ :الحل}$$

$$f + 2h \text{ (8)}$$

$$f + 2h = (8, 0) + 2(-6, 2) = (8, 0) + (-12, 4) = (-4, 4) \text{ :الحل}$$

$$2f + g - 3h \text{ (9)}$$

$$2f + g - 3h = 2(8, 0) + (-3, -5) - 3(-6, 2) = (16, 0) + (-3, -5) + (18, -6) = (31, -11) \text{ :الحل}$$

$$f - 2g - 2h \text{ (10)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h} &= (8, 0) - 2(-3, -5) - 2(-6, 2) \\ &= (8, 0) + (6, 10) + (12, -4) = (26, 6) \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g} &= (-6, 2) - 4(8, 0) + 5(-3, -5) \\ &= (-6, 2) + (-32, 0) + (-15, -25) = (-53, -23) \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h} &= 4(-3, -5) - 3(8, 0) + (-6, 2) \\ &= (-12, -20) + (-24, 0) + (-6, 2) = (-42, -18) \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كل مما يأتي :

$$\mathbf{v} = (-2, 7) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{|(-2, 7)|} (-2, 7) = \frac{1}{\sqrt{4 + 49}} (-2, 7) = \frac{1}{\sqrt{53}} (-2, 7) \\ &= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{\sqrt{53}} \right\rangle = \left\langle \frac{-2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\mathbf{v} = (9, -3) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{|(9, -3)|} (9, -3) = \frac{1}{\sqrt{81 + 9}} (9, -3) = \frac{1}{\sqrt{90}} (9, -3) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{10}} (9, -3) = \left\langle \frac{9}{3\sqrt{10}}, \frac{-3}{3\sqrt{10}} \right\rangle = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\mathbf{v} = (-8, -5) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{|(-8, -5)|} (-8, -5) = \frac{1}{\sqrt{64 + 25}} (-8, -5) = \frac{1}{\sqrt{89}} (-8, -5) \\ &= \left\langle \frac{-8}{\sqrt{89}}, \frac{-5}{\sqrt{89}} \right\rangle = \left\langle \frac{-8\sqrt{89}}{89}, \frac{-5\sqrt{89}}{89} \right\rangle \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\mathbf{v} = (6, 3) \quad (17)$$

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(6,3)|}(6,3) = \frac{1}{\sqrt{36+9}}(6,3) = \frac{1}{\sqrt{45}}(6,3) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}(6,3) = \left\langle \frac{6}{3\sqrt{5}}, \frac{3}{3\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

$$v = (-1, -5) \quad (18)$$

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(-1,-5)|}(-1,-5) = \frac{1}{\sqrt{1+25}}(-1,-5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-1,-5) \quad \text{الحل:}$$

$$= \left\langle \frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}} \right\rangle = \left\langle \frac{-\sqrt{26}}{26}, \frac{-5\sqrt{26}}{26} \right\rangle$$

$$v = (1, 7) \quad (19)$$

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(1,7)|}(1,7) = \frac{1}{\sqrt{1+49}}(1,7) = \frac{1}{\sqrt{50}}(1,7) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}(1,7) = \left\langle \frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10} \right\rangle$$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطي نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة i, j :

$$D(4, -1), E(5, -7) \quad (20)$$

الحل:

$$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (5 - 4, -7 - (-1)) = (1, -6) = i - 6j$$

$$D(9, -6), E(-7, 2) \quad (21)$$

الحل:

$$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-7 - 9, 2 - (-6)) = (-16, 8) = -16i + 8j$$

$$D(3, 11), E(-2, -8) \quad (22)$$

الحل:

$$DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-2 - 3, -8 - 11) = (-5, -19) = -5i - 19j$$

$$D(9 \cdot 5, 1), E(0, -7 \cdot 3) \quad (23)$$

$$DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (0 - 9 \cdot 5, -7 \cdot 3 - 1) \quad \text{الحل:}$$

$$= (-9 \cdot 5, -8 \cdot 3) = -9 \cdot 5i - 8 \cdot 3j$$

$$D(-4, -6), E(9, 5) \quad (24)$$

$$DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (9 + 4, 5 + 6) = (13, 11) = 13i + 11j$$

$$D(8, 3), E(-4, 7) \quad (25)$$

$$DE = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (4 + 8, 7 - 3) = (8, -7) = 8i - 7j$$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطي طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يأتي:

$$|v| = 12, 60^\circ \quad (27)$$

$$v = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = (12 \cos 60^\circ, 12 \sin 60^\circ) \quad \text{الحل:}$$

$$= \left\langle 12\left(\frac{1}{2}\right), 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = (6, 6\sqrt{3})$$

$$|v| = 16, 330^\circ \quad (28)$$

$$v = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = (16 \cos 330^\circ, 16 \sin 330^\circ) \quad \text{الحل:}$$

$$= \left\langle 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 16\left(\frac{-1}{2}\right) \right\rangle = (8\sqrt{3}, -8)$$

$$|v| = 4, 135^\circ \quad (29)$$

$$v = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = (4 \cos 135^\circ, 4 \sin 135^\circ) \quad \text{الحل:}$$

$$= \left\langle 4\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right), 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

$$|v| = 15, 125^\circ (30)$$

$$v = (|v| \cos \theta, |v| \sin \theta) = (15 \cos 125^\circ, 15 \sin 125^\circ) \quad \text{الحل:}$$

$$= (-8.6, 12.9)$$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب :

$$3i + 6j (31)$$

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{6}{3} \rightarrow q = \tan^{-1}(2) = 63.4^\circ \quad \text{الحل:}$$

$$-2i + 5j (32)$$

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{5}{-2} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-2}\right) = 111.8^\circ \quad \text{الحل:}$$

$$-4i - 3j (33)$$

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{-3}{-4} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-4}\right) = 216.9^\circ \quad \text{الحل:}$$

$$(-5, 9) (34)$$

$$\tan q = \frac{b}{a} = \frac{9}{-5} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\frac{9}{-5}\right) = 119.1^\circ \quad \text{الحل:}$$

بين إذا كان $\overline{AB}, \overline{CD}$ المعطاة نقطتا البداية والنهاية لكل منهما فيما يأتي متكافئين أولا وإذا كانا متكافئين ، فاثبت أن $AB = CD$ ، وإذا كانا غير ذلك ، فاذكر السبب :

$$A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0) (37)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 - 3, 9 - 5) = (3, 4) \quad \text{الحل:}$$

$$CD = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-2 + 4, 0 + 4) = (2, 4)$$

المتجهان مختلفان في المقدار والاتجاه لذا فهما غير متكافئان

$$A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1) (38)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (0 - 1, -10 + 3) = (-1, -7) \quad \text{الحل:}$$

$$CD = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (10 - 11, 1 - 8) = (-1, -7)$$

المتجهان لهما نفس المقدار والاتجاه لذا فهما متكافئان

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي :

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ كالآتي :

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

المتجهان المتعامدان :

المتجهان المتعامدان

مفهوم أساسي

يكون المتجهان a, b متعامدين إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$

ملاحظة : علي الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر أي أن $(0, 0) \cdot (a_1, a_2) = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر، لأن ليس له طول أو اتجاه.

تحقق من فهمك :

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

$$(1A) \quad u(3, -2), v(-5, 1)$$

$$(1B) \quad u(-2, -3), v(9, -6)$$

الحل : (1A) ليسا متعامدين ، $u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -15 - 2 = -17$

$$(1B) \text{ متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -18 + 18 = 0$$

خصائص الضرب الداخلي :

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

خصائص الضرب الداخلي

مفهوم أساسي

إذا كانت u, v, w وكان k عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة :

$$u \cdot v = v \cdot u$$

الخاصية الإبدالية :

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية التوزيع :

$$k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$$

خاصية الضرب في عدد حقيقي :

$$0 \cdot u = 0$$

خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري :

$$u \cdot u = |u|^2$$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه :

تحقق من فهمك :

استعمل الضرب الداخلي ، لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

$$b (12, 16) \quad (2A)$$

$$c (-1, -7) \quad (2B)$$

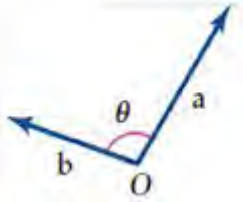
الحل : (2A) بما أن $|b|^2 = b \cdot b$ فإن :

$$|b| = \sqrt{b \cdot b} = \sqrt{(12,16) \cdot (12,16)} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

(2B) بما أن $|c|^2 = c \cdot c$ فإن :

$$|c| = \sqrt{c \cdot c} = \sqrt{(-1,-7) \cdot (-1,-7)} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ملاحظة :



الزاوية بين أي متجهين غير صفريين b , a هي الزاوية بين هذين المتجهين عندما يكونان في وضع قياسي ، وتقاس هذه الزاوية دائما بحيث $0 \leq \theta \leq \pi$ أو $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين .

الزاوية بين متجهين :

الزاوية بين متجهين

مفهوم أساسي

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a , b فإن : $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$

تحقق من فهمك :

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u , v في كل مما يأتي :

$$u(-5, -2), v(4, 4) \quad (3A)$$

$$u(9, 5), v(-6, 7) \quad (3B)$$

الحل :

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(-5,-2) \cdot (4,4)}{|(-5,-2)|| (4,4)|} = \frac{-20-8}{\sqrt{25+4}\sqrt{16+16}} = \frac{-28}{4\sqrt{58}} = \frac{-7}{\sqrt{58}} \quad (3A)$$

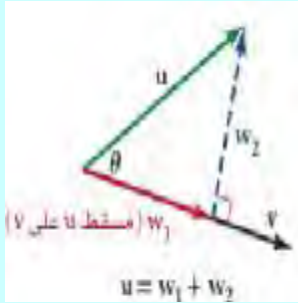
$$q = \cos^{-1} \frac{-7}{\sqrt{58}} \approx 157$$

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(9,5) \cdot (-6,7)}{|(9,5)|| (-6,7)|} = \frac{-54+35}{\sqrt{81+25}\sqrt{36+49}} = \frac{-19}{\sqrt{106}\sqrt{85}} \quad (3B)$$

$$q = \cos^{-1} \frac{-19}{\sqrt{106} \sqrt{85}} \approx 102$$

مسقط المتجه :

مفهوم أساسي مسقط u علي v



إذا كان v, u متجهين غير صفريين وكان w_1, w_2 مركبتي u بحيث w_1 مواز للمتجه v ، فإن w_1 يسمى مسقط المتجه u علي المتجه v ويكون :

$$w_1 = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v$$

تحقق من فهمك :

4) أوجد مسقط $u = (1, 2)$ علي $v = (8, 5)$ ، ثم أكتب u علي صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

$$w_1 = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v = \frac{(1, 2) \cdot (8, 5)}{|(8, 5)|^2} (8, 5) = \frac{8 + 10}{64 + 25} (8, 5) = \frac{18}{89} (8, 5) = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = u - w_1 = (1, 2) - \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle = \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

ملاحظة :

بالرغم من أن مسقط u علي v هو متجه يوازي v فإنه ليس من الضروري أن يكون لهذا المتجه اتجاه v نفسه .

تحقق من فهمك :

5) أوجد مسقط $u = (-3, 4)$ علي $v = (6, 1)$ ، ثم أكتب u علي صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

$$w_1 = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v = \frac{(-3, 4) \cdot (6, 1)}{|(6, 1)|^2} (6, 1) = \frac{-18 + 4}{36 + 1} (6, 1) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{-14}{37} (6, 1) = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = u - w_1 = (-3, 4) - \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle = \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \right\rangle$$

ملاحظة:

إذا مثل المتجه u قوة فإن مسقط u على v يمثل تأثير هذه القوة باتجاه v فمثلا إذا كنت تدفع صندوقا على أرض مائلة باتجاه v بقوة مقدارها u فإن مسقط u على v يمثل القوة التي تدفع الصندوق باتجاه v .

تدرب وحل المسائل:

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا :

(1) $u(3, -5), v(6, 2)$

$$\text{الحل: ليسا متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 18 - 10 = 8$$

$$(2) u(9, -3), v(1, 3)$$

$$\text{الحل: متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 9 - 9 = 0$$

$$(3) u(4, -4), v(7, 5)$$

$$\text{الحل: ليسا متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 28 - 20 = 8$$

$$(4) u = 11i + 7j, v = -7i + 11j$$

$$\text{الحل: متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -77 + 77 = 0$$

$$(5) u(-4, 6), v(-5, -2)$$

$$\text{الحل: ليسا متعامدين ، } u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 20 - 12 = 8$$

6) زيت الزيتون : يمثل المتجه $u = (406, 297)$ أعداد عبوتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر ، ويمثل المتجه $v = (27 \cdot 5, 15)$ سعر العبوة من كل من النوعين على الترتيب :

(a) أوجد $u \cdot v$

(b) فسر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة .

الحل : (a) $u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 11165 + 4455 = 16520$

(b) ثمن العبوات جميعها هو 16520

استعمل الضرب الداخلي ، لإيجاد طول المتجه المعطي :

(7) $m = (-3, 11)$

الحل : بما أن $|m|^2 = m \cdot m$ فإن :

$$|m| = \sqrt{m \cdot m} = \sqrt{(-3, 11) \cdot (-3, 11)} = \sqrt{9 + 121} = \sqrt{130}$$

(8) $r = (-9, -4)$

الحل : بما أن $|r|^2 = r \cdot r$ فإن :

$$|r| = \sqrt{r \cdot r} = \sqrt{(-9, -4) \cdot (-9, -4)} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$$

(9) $v = (1, -18)$

الحل : بما أن $|v|^2 = v \cdot v$ فإن :

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(1, -18) \cdot (1, -18)} = \sqrt{1 + 324} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

(10) $t = (23, -16)$

الحل : بما أن $|t|^2 = t \cdot t$ فإن :

$$|t| = \sqrt{t \cdot t} = \sqrt{(23, -16) \cdot (23, -16)} = \sqrt{529 + 256} = \sqrt{785}$$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u, v في كل مما يأتي ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة :

(11) $u(0, -5), v(1, -4)$

الحل : $\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(0, -5) \cdot (1, -4)}{|(0, -5)|| (1, -4)|} = \frac{0 + 20}{\sqrt{0 + 25} \sqrt{1 + 16}} = \frac{20}{5\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$q = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{17}} \approx 14$$

$$u(7, 10), v(4, -4) \quad (12)$$

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(7,10) \cdot (4,-4)}{|(7,10)|| (4,-4)|} = \frac{28-40}{\sqrt{49+100}\sqrt{16+16}} = \frac{-12}{4\sqrt{298}} = \frac{-3}{\sqrt{298}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{298}} \approx 100$$

$$u(-2, 4), v(2, -10) \quad (13)$$

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(-2,4) \cdot (2,-10)}{|(-2,4)|| (2,-10)|} = \frac{-4-40}{\sqrt{4+16}\sqrt{4+100}} = \frac{-44}{4\sqrt{130}} = \frac{-11}{\sqrt{130}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1} \frac{-11}{\sqrt{130}} \approx 164.7$$

$$u = -2i + 3j, v = -4i - 2j \quad (14)$$

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(-2,3) \cdot (-4,-2)}{|(-2,3)|| (-4,-2)|} = \frac{8-6}{\sqrt{4+9}\sqrt{16+4}} = \frac{2}{2\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{65}} \approx 82.9$$

(15) مخيم كشفى: غادر يوسف ويحي مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب إذا كان المتجه $u(3, -5)$ يمثل الطريق الذي سلكه يوسف ، والمتجه $v(-7, 6)$ يمثل الطريق الذي سلكه يحي ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين .

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(3,-5) \cdot (-7,6)}{|(3,-5)|| (-7,6)|} = \frac{-21-30}{\sqrt{9+25}\sqrt{49+36}} = \frac{-51}{17\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{10}} \approx 161.6$$

أوجد مسقط u علي v ، ثم أكتب u علي صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad (16)$$

$$w_1 = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{(3, 6) \cdot (-5, 2)}{|(-5, 2)|^2} (-5, 2) = \frac{-15 + 12}{25 + 4} (-5, 2) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{-3}{29} (-5, 2) = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = \mathbf{u} - w_1 = (3, 6) - \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle = \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29} \right\rangle$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29} \right\rangle$$

$$\mathbf{u}(5, 7), \mathbf{v}(-4, 4) \quad (17)$$

$$w_1 = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{(5, 7) \cdot (-4, 4)}{|(-4, 4)|^2} (-4, 4) = \frac{-20 + 28}{16 + 16} (-4, 4) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{1}{4} (-4, 4) = (-1, 1)$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = \mathbf{u} - w_1 = (5, 7) - (-1, 1) = (6, 6)$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 = (-1, 1) + (6, 6)$$

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} \quad (18)$$

$$w_1 = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{(6, 1) \cdot (-3, 9)}{|(-3, 9)|^2} (-3, 9) = \frac{-18 + 9}{9 + 81} (-3, 9) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{-9}{90} (-3, 9) = \frac{-1}{10} (-3, 9) = \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = \mathbf{u} - w_1 = (6, 1) - \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle = \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10} \right\rangle$$

$$\mathbf{u} = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10} \right\rangle$$

$$u(2, 4), v(-3, 8) \quad (19)$$

$$w_1 = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2} \right) v = \frac{(2, 4) \cdot (-3, 8)}{|(-3, 8)|^2} (-3, 8) = \frac{-6 + 32}{9 + 64} (-3, 8) \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{26}{73} (-3, 8) = \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = u - w_1 = (2, 4) - \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle = \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73} \right\rangle$$

أوجد متجهها يعامد المتجه المعطي في كل مما يأتي :

$$(-2, -8) \quad (22)$$

الحل: لإيجاد متجه يعامد المتجه المعطي نبدل الإحداثيات مع تغيير إشارة أحدهما
إجابة ممكنة: $(8, -2)$

$$(3, 5) \quad (23)$$

الحل: إجابة ممكنة: $(5, -3)$

$$(7, -4) \quad (24)$$

الحل: إجابة ممكنة: $(4, 7)$

$$(-1, 6) \quad (25)$$

الحل: إجابة ممكنة: $(6, 1)$

إذا علمت كلا من $u \cdot v$ و v فأوجد u في كل مما يأتي :

$$v = (3, -6), u \cdot v = 33 \quad (27)$$

الحل: نفرض أن $u = (a, b)$ وبما أن $u \cdot v = (a, b) \cdot (3, -6)$
 $33 = 3a - 6b$ نفرض أن $b = 1$ ، بالتعويض $33 = 3a - 6$ ← $39 = 3a$
إذن $a = 13$ وبالتالي $u = (13, 1)$ تكون إجابة ممكنة

$$v = (4, 6), u \cdot v = 38 \quad (28)$$

الحل: نفرض أن $u = (a, b)$ وبما أن $u \cdot v = (a, b) \cdot (4, 6)$
 $38 = 4a + 6b$ نفرض أن $b = 1$ ، بالتعويض $38 = 4a + 6$ $\leftarrow 32 = 4a$
 إذن $a = 8$ وبالتالي $u = (8, 1)$ تكون إجابة ممكنة

اختبر كل زوج من المتجهات في كل مما يأتي من حيث كونها متعامدة أو متوازية أو ليس كليهما :

$$(30) \quad u\left(-\frac{1}{3}, 4\right), v(9, 8)$$

الحل: متعامدان ، $u \cdot v = \left(-\frac{1}{3}, 4\right) \cdot (9, 8) = -6 + 6 = 0$

$$(31) \quad u(-1, -4), v(3, 6)$$

الحل: غير ذلك ، $u \cdot v = (-1, -4) \cdot (3, 6) = -3 - 24 = -27$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي ، قرب الناتج إلي أقرب جزء من عشر :

$$(32) \quad u = i + 5j, v = -2i + 6j$$

الحل: $\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(1,5) \cdot (-2,6)}{|(1,5)||(-2,6)|} = \frac{-2+30}{\sqrt{1+25}\sqrt{4+36}} = \frac{28}{4\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$$q = \cos^{-1} \frac{7}{\sqrt{65}} \approx 29.7$$

$$(33) \quad u = 4i + 3j, v = -5i - 2j$$

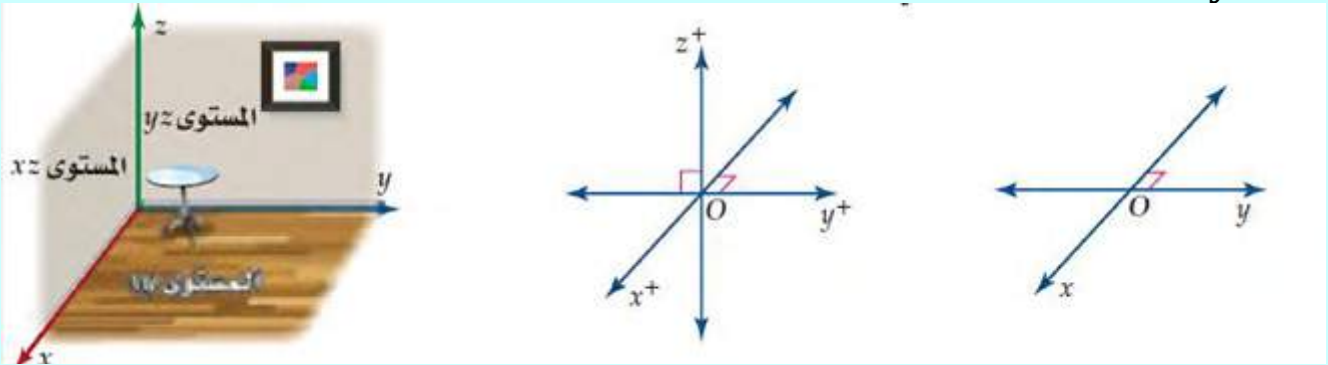
الحل: $\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(4,3) \cdot (-5,-2)}{|(4,3)||(-5,-2)|} = \frac{-20-6}{\sqrt{16+9}\sqrt{25+4}} = \frac{-26}{5\sqrt{29}}$

$$q = \cos^{-1} \frac{-26}{5\sqrt{29}} \approx 164.9$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد 4 - 5

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد :

يتكون المستوي الإحداثي الثلاثي الأبعاد من خطي إعداد متعامدين هما المحور x والمحور y اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل ، ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط المستوي ، وبينما تحتاج إلى نظام إحداثي مكون من ثلاثة أبعاد ، لتعيين نقطة في الفضاء فنبدأ بالمستوي xy ثم نضيف محورا ثالثا يسمى المحور z يمر بنقطة الأصل ويعامد كلا من المحورين x , y ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلى 8 مناطق يسمى كل منها الثمن حيث يمثل سطح الأرض المستوي xy ويمثل الجدران المسويين yz , xz

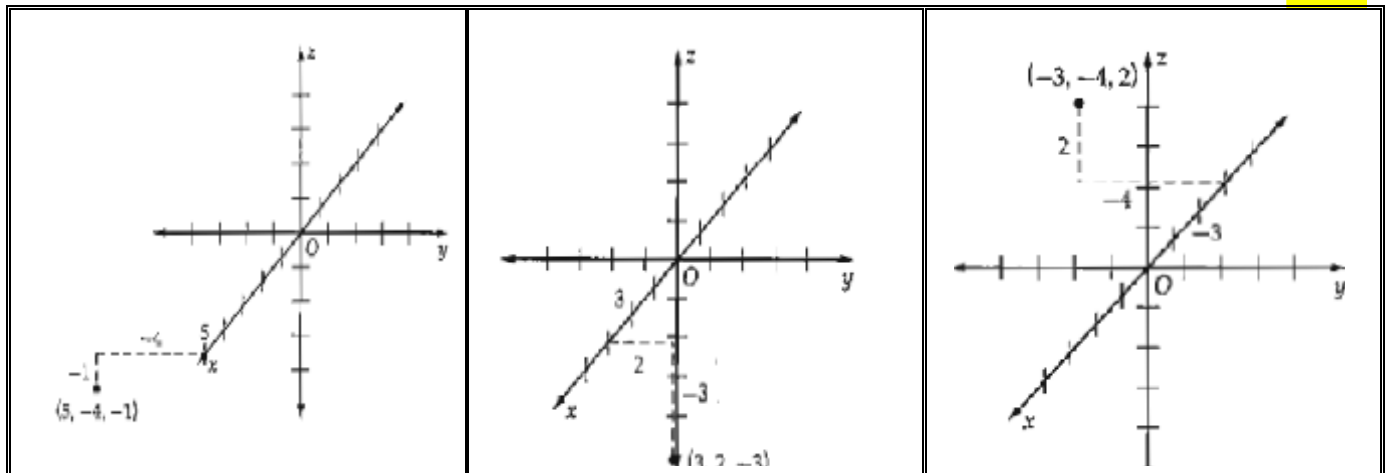


تمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x, y, z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة ، عين أولا النقطة (x, y) في المستوي xy ، ثم تتحرك للأعلى أو الأسفل موازيا للمحور z حسب المسافة المتجهة التي يمثلها z

تحقق من فهمك :

عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :
 (1A) $(-3, -4, 2)$ (1B) $(3, 2, -3)$ (1C) $(5, -4, -1)$

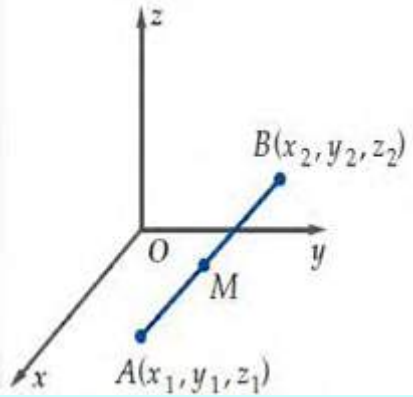
الحل :



قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء :

قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

مفهوم أساسي



تعطي المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ بالقانون :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطي نقطة المنتصف M لـ AB بالقانون :

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

تحقق من فهمك :

(2) **طائرات :** تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها ، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق احدي المناطق ، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين (450 , - 250 , 28000) , (300 , 150 , 30000) ، مع العلم أن الإحداثيات معطاة بالأقدام ، فأجب :
(A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة ؟
(B) إذا أطلقت ألعاب نارية ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين ، فم إحداثيات نقطة الانفجار .

(الحل : A) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$= \sqrt{(300 - 450)^2 + (150 + 250)^2 + (30000 - 28000)^2}$$

$$= \sqrt{22500 + 160000 + 4000000} = \sqrt{4182500} \approx 2045$$

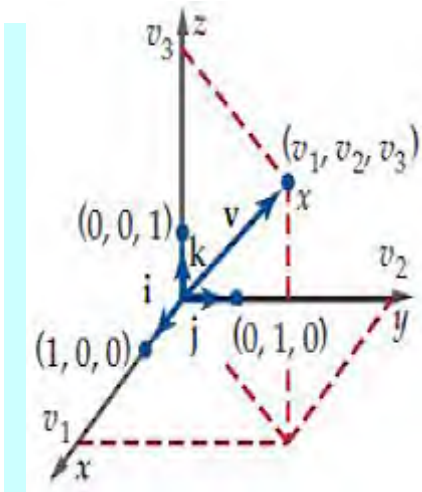
نعم لان البعد بين الطائرتين حوالي 2045 قدم وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل .

(B) $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$

$$= \left(\frac{300 + 450}{2}, \frac{150 - 250}{2}, \frac{30000 + 28000}{2} \right) = \left(\frac{750}{2}, -\frac{100}{2}, \frac{58000}{2} \right)$$

$$= (375, -50, 2900)$$

المتجهات في الفضاء :



إذا كان v متجهاً في الفضاء في وضع قياسي ، وكانت نقطة نهايته (u_1, u_2, u_3) ، فإننا نعبر عنه بالثلاثي المرتب (u_1, u_2, u_3) ، كما يعبر عن المتجه الصفري بالثلاثي $0 = (0, 0, 0)$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالثلاثيات $j = (0, 1, 0)$ ، $k = (0, 0, 1)$ ، $i = (1, 0, 0)$ ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه v بدلالة متجهات الوحدة i, j, k بالصورة

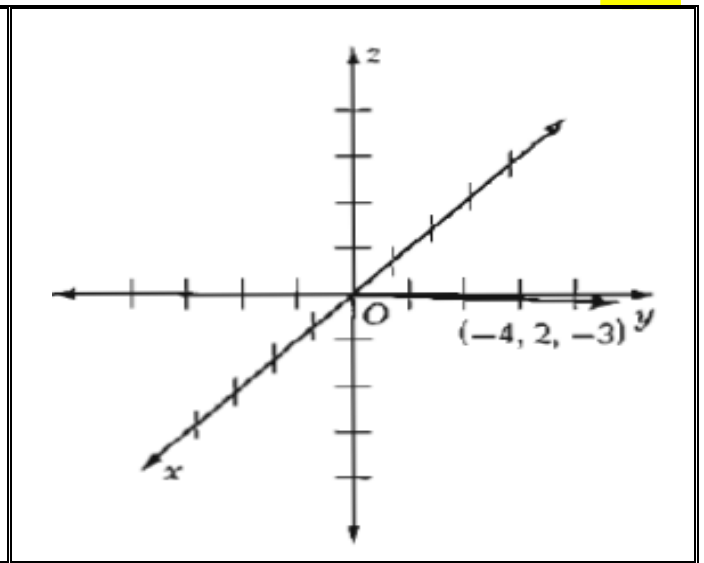
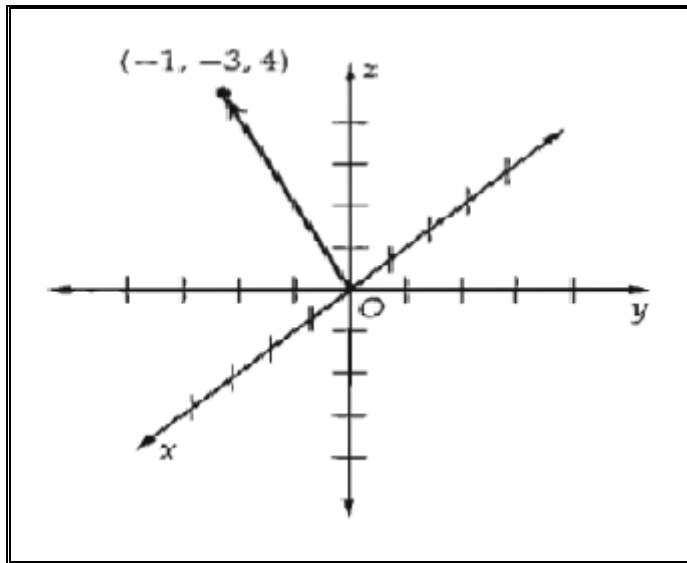
$$(u_1, u_2, u_3) = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

تحقق من فهمك :

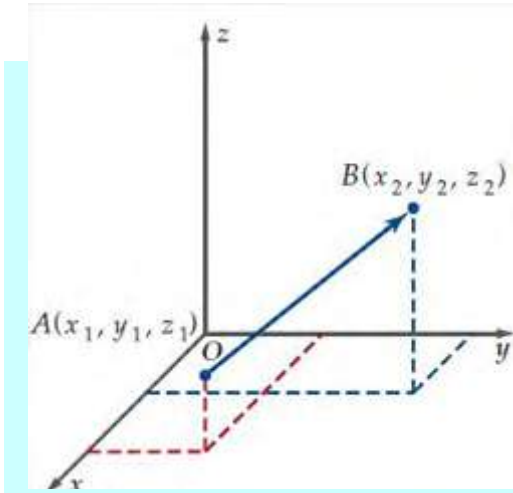
عين موقع كل من المتجهين الآتيين في الفضاء ومثلها بيانياً :

$w = -i - 3j + 4k$ (3B) $u = (-4, 2, -3)$ (3A)

الحل :



ملاحظة :



كما في المتجهات ذات البعدين نجد الصورة الإحداثية لقطعة مستقيمة متجهة من

$A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$ ، وذلك

ب طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وهذا يعني انه إذا كان $AB = (a_1, a_2, a_3)$ ، فإن : $|AB| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ويكون متجه الوحدة u باتجاه AB هو $u = \frac{AB}{|AB|}$

تحقق من فهمك :

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم اوجد متجه الوحدة باتجاه AB في كل مما يأتي :

$$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2) \quad (4A)$$

$$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8) \quad (4B)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (1, 9, 3) \quad (4A) \text{ الحل: }$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{1 + 81 + 9} = \sqrt{91}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}, \frac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (4, -1, 2) \quad (4B)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle = \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$$

العمليات على المتجهات في الفضاء :

العمليات على المتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $a = (a_1, a_2, a_3)$ ، $b = (b_1, b_2, b_3)$ متجهين في الفضاء ، وكان k عددا حقيقيا فإن :

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

جمع متجهين

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

طرح متجهين

$$ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

ضرب متجه في عدد حقيقي

تحقق من فهمك :

كلا مما يأتي للمتجهات $y(3, -6, 2)$ ، $w(-1, 4, -4)$ ، $z(-2, 0, 5)$

$$3y + 3z - 6w \text{ (5B)}$$

$$4w - 8z \text{ (5A)}$$

$$4w - 8z = 4(-1, 4, -4) - 8(-2, 0, 5) \quad \text{(5A: الحل)}$$

$$= (-4, 16, -16) + (16, 0, -40) = (12, 16, -56)$$

$$3y + 3z - 6w = 3(3, -6, 2) + 3(-2, 0, 5) - 6(-1, 4, -4) \text{ (5B)}$$

$$= (9, -18, 6) + (-6, 0, 15) + (6, -24, 24) = (9, -42, 45)$$

تدرب وحل المسائل:

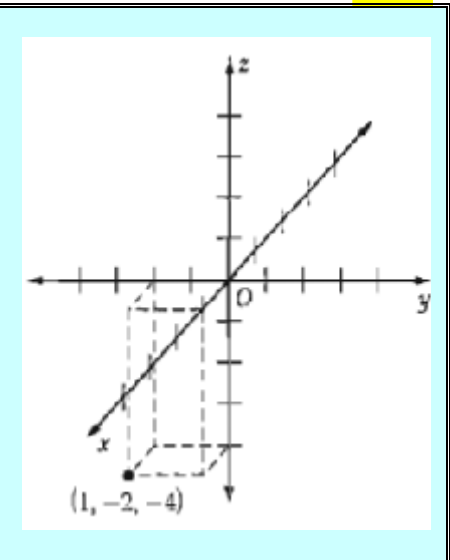
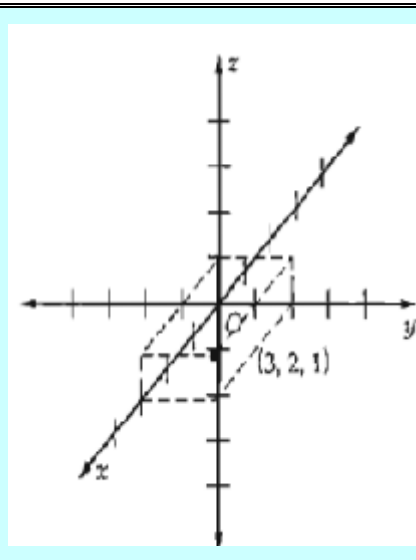
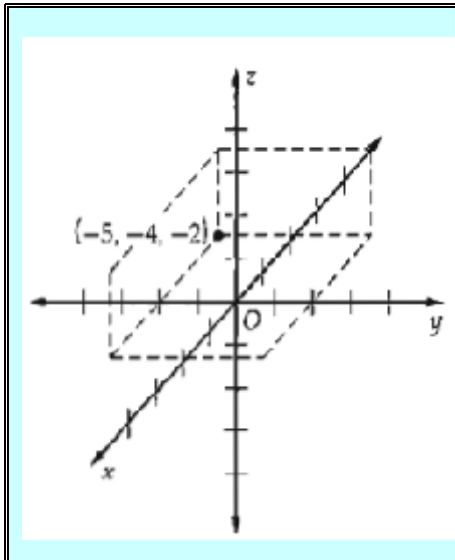
عين كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

$$(-5, -4, -2) \text{ (3)}$$

$$(3, 2, 1) \text{ (2)}$$

$$(1, -2, -4) \text{ (1)}$$

الحل:

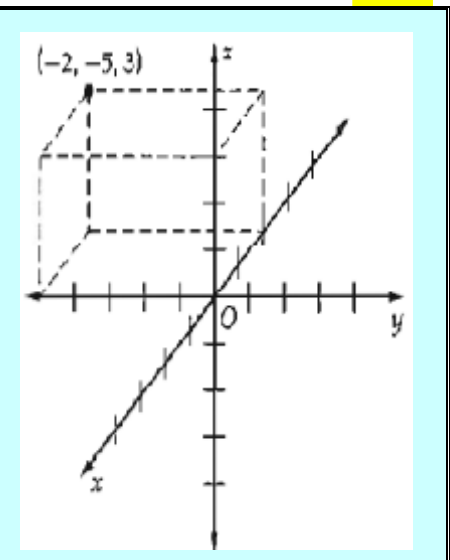
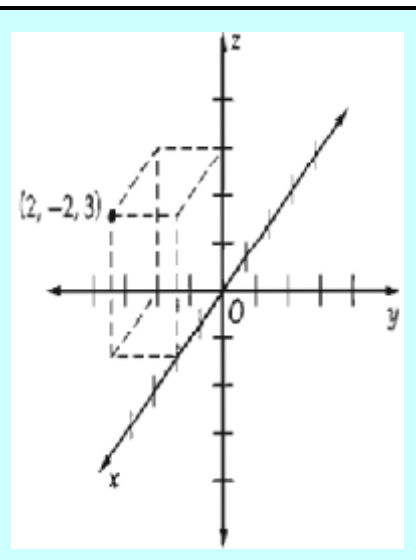
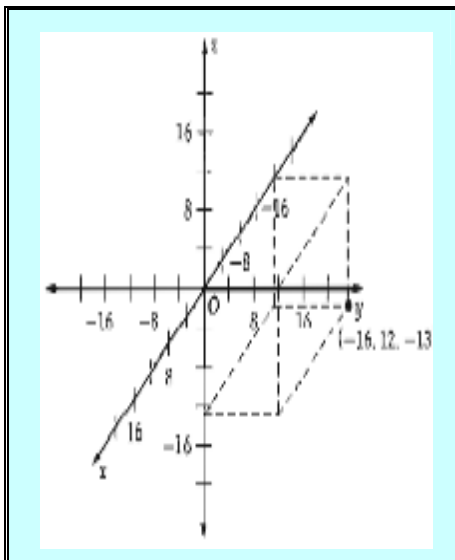


$$(-16, 12, -13) \text{ (6)}$$

$$(2, -2, 3) \text{ (5)}$$

$$(-2, -5, 3) \text{ (4)}$$

الحل:



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها ، ثم أوجد إحداثيات منتصفها في كل مما يأتي :

$$(-4, 10, 4), (1, 0, 9) \quad (7)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{الحل:}$$

$$= \sqrt{(1+4)^2 + (0-10)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{25+100+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-4+1}{2}, \frac{0+10}{2}, \frac{9+4}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2} \right)$$

$$(-6, 6, 3), (-9, -2, -2) \quad (8)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{الحل:}$$

$$= \sqrt{(-9+6)^2 + (-2-6)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+64+25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-6-9}{2}, \frac{-2+6}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2} \right)$$

$$(8, 3, 4), (-4, -7, 5) \quad (9)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{الحل:}$$

$$= \sqrt{(-4-8)^2 + (-7-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{144+100+1} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-4+8}{2}, \frac{-7+3}{2}, \frac{5+4}{2} \right) = \left(2, -2, \frac{9}{2} \right)$$

$$(-7, 2, -5), (-2, -5, -8) \quad (10)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{الحل:}$$

$$= \sqrt{(-2 + 7)^2 + (-5 - 2)^2 + (-8 + 5)^2} = \sqrt{25 + 49 + 9} = \sqrt{83}$$

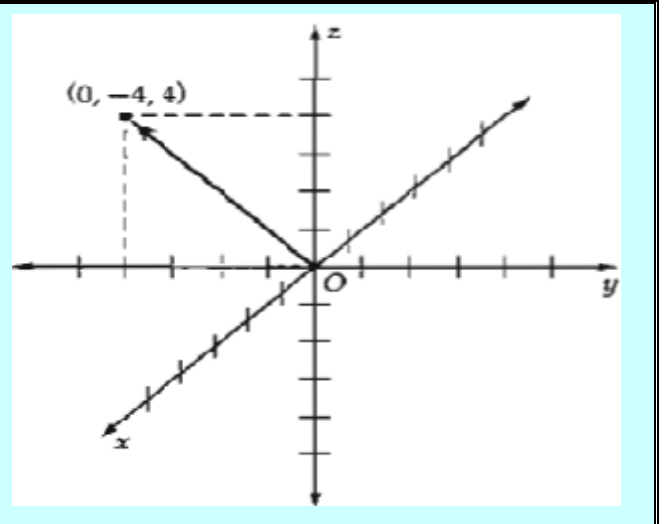
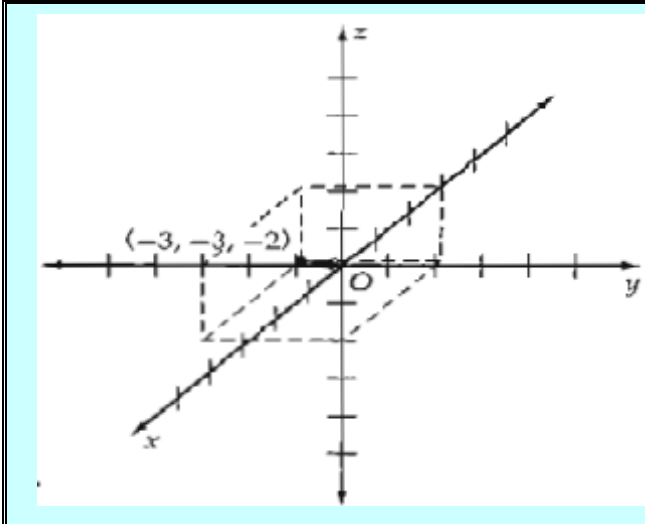
$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-2 - 7}{2}, \frac{-5 + 2}{2}, \frac{-8 - 5}{2} \right) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2} \right)$$

عين موقع كل من المتجهات الآتية في الفضاء ، ثم مثله بيانيا :

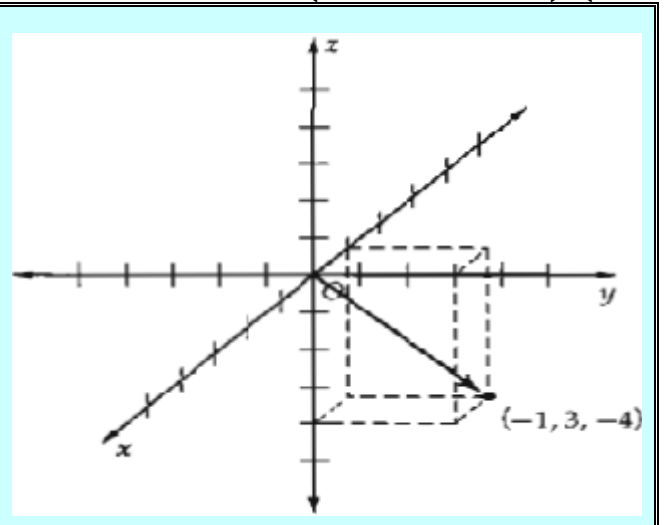
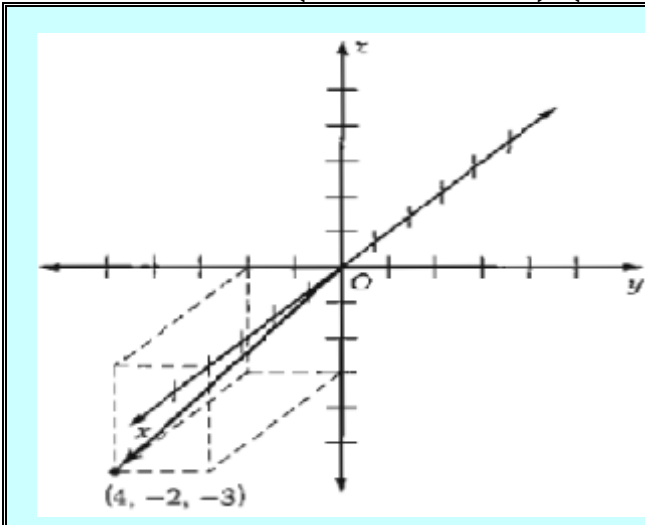
$$b = (-3, -3, -2) \quad (13)$$

$$a = (0, -4, 4) \quad (12)$$



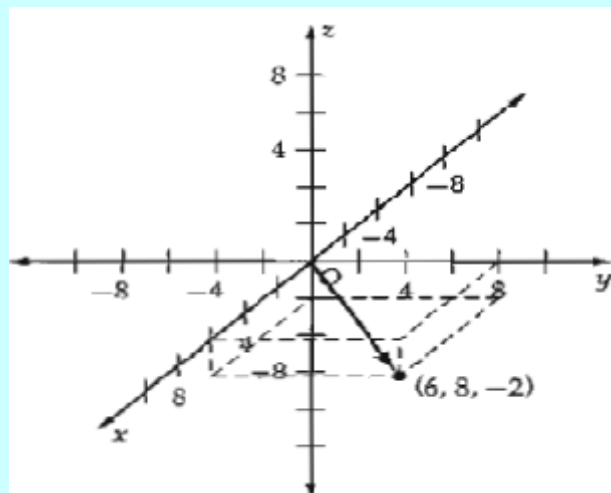
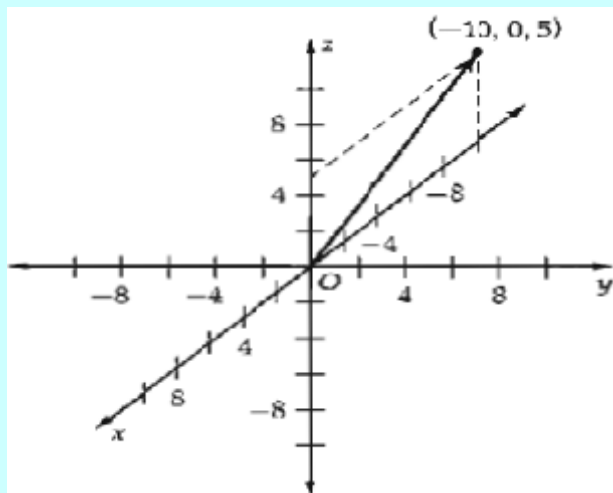
$$d = (4, -2, -3) \quad (15)$$

$$c = (-1, 3, -4) \quad (14)$$



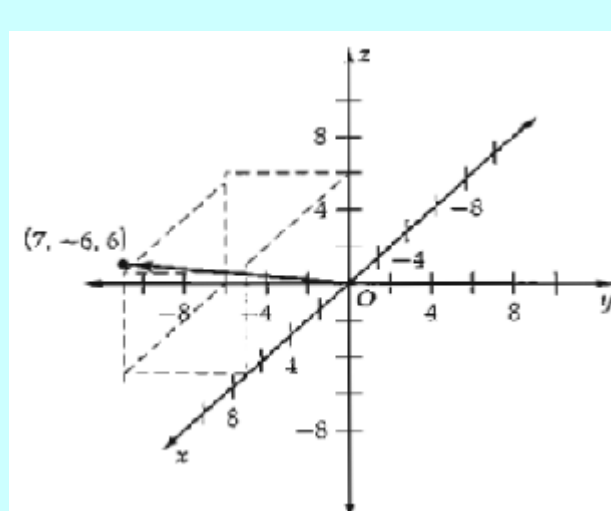
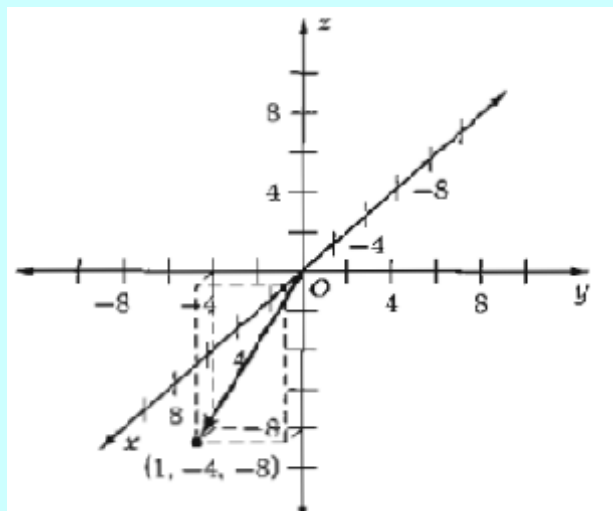
$$w = -10i + 5k \quad (17)$$

$$v = 6i + 8j - 2k \quad (16)$$



$$n = i - 4j - 8k \quad (19)$$

$$m = 7i - 6j + 6k \quad (18)$$



أوجد الصورة الإحداثية وطول $\vec{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي ، ثم
أوجد متجه الوحدة باتجاه $\vec{AB}$:

$$A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1) \quad (20)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (16, 2, 8) \quad \text{الحل:}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{256 + 4 + 64} = \sqrt{324} = 18$$

$$u = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \left\langle \frac{16}{18}, \frac{2}{18}, \frac{8}{18} \right\rangle = \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

$$A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9) \quad (21)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (0, -8, 12) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{0 + 64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{0}{4\sqrt{13}}, \frac{-8}{4\sqrt{13}}, \frac{12}{4\sqrt{13}} \right\rangle = \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$

$$A(3, 5, 1), B(0, 0, -9) \quad (22)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-3, -5, -10) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{9 + 25 + 100} = \sqrt{134}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{-3}{\sqrt{134}}, \frac{-5}{\sqrt{134}}, \frac{-10}{\sqrt{134}} \right\rangle = \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{10\sqrt{134}}{134} \right\rangle$$

$$A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8) \quad (23)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-4, 8, 20) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 64 + 400} = \sqrt{480} = 4\sqrt{30}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{30}}, \frac{8}{4\sqrt{30}}, \frac{20}{4\sqrt{30}} \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$$

$$A(2, -5, 4), B(1, 3, -6) \quad (24)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-1, 8, -10) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{1 + 64 + 100} = \sqrt{165}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{165}}, \frac{8}{\sqrt{165}}, \frac{-10}{\sqrt{165}} \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{10\sqrt{165}}{165} \right\rangle$$

$$A(8, 12, 7), B(2, -3, 11) \quad (25)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-6, -15, 4) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{36 + 225 + 16} = \sqrt{277}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{-6}{\sqrt{277}}, \frac{-15}{\sqrt{277}}, \frac{4}{\sqrt{277}} \right\rangle = \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$$

$$A(3, 14, -5), B(7, -1, 0) \quad (26)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (4, -15, 5) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 225 + 25} = \sqrt{266}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{266}}, \frac{-15}{\sqrt{266}}, \frac{5}{\sqrt{266}} \right\rangle = \left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$$

$$A(1, -18, -13), B(21, 14, 29) \quad (27)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (20, 32, 42) \quad \text{الحل:}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{400 + 1024 + 1764} = \sqrt{3188} = 2\sqrt{797}$$

$$u = \frac{AB}{|AB|} = \left\langle \frac{20}{2\sqrt{797}}, \frac{32}{2\sqrt{797}}, \frac{42}{2\sqrt{797}} \right\rangle = \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$$

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

$$a = (-5, -4, 3), b = (6, -2, -7), c = (-2, 2, 4)$$

$$6a - 7b + 8c \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 6a - 7b + 8c &= 6(-5, -4, 3) - 7(6, -2, -7) + 8(-2, 2, 4) \quad \text{الحل:} \\ &= (-30, -24, 18) + (-42, 14, 49) + (-16, 16, 32) \\ &= (-88, 6, 99) \end{aligned}$$

$$7a - 5b \quad (29)$$

$$7a - 5b = 7(-5, -4, 3) - 5(6, -2, -7) \quad \text{الحل:}$$

$$= (-35, -28, 21) + (-30, 10, 35) = (-65, -18, 56)$$

$$2a + 5b - 9c \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 2a + 5b - 9c &= 2(-5, -4, 3) + 5(6, -2, -7) - 9(-2, 2, 4) \quad \text{الحل:} \\ &= (-10, -8, 6) + (30, -10, -35) + (18, -18, -36) \\ &= (38, -36, -65) \end{aligned}$$

$$6b + 4c - 4a \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 6b + 4c - 4a &= 6(6, -2, -7) + 4(-2, 2, 4) - 4(-5, -4, 3) \quad \text{الحل:} \\ &= (36, -12, -42) + (-8, 8, 16) + (20, 16, -12) \\ &= (48, 12, -38) \end{aligned}$$

$$8a - 5b - c \quad (32)$$

$$\begin{aligned} 8a - 5b - c &= 8(-5, -4, 3) - 5(6, -2, -7) - (-2, 2, 4) \quad \text{الحل:} \\ &= (-40, -32, 24) + (-30, 10, 35) + (2, -2, -4) \\ &= (-68, -24, 55) \end{aligned}$$

$$-6a + b + 7c \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -6a + b + 7c &= -6(-5, -4, 3) + (6, -2, -7) + 7(-2, 2, 4) \quad \text{الحل:} \\ &= (30, 24, -18) + (6, -2, -7) + (-14, 14, 28) = (22, 36, 3) \end{aligned}$$

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

$$x = -9i + 4j + 3k, y = 6i - 2j - 7k, z = -2i + 2j + 4k$$

$$7x + 6y \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 7x + 6y &= 7(-9i + 4j + 3k) + 6(6i - 2j - 7k) \quad \text{الحل:} \\ &= (-63i + 28j + 21k) + (36i - 12j - 42k) \\ &= (-27i + 16j - 21k) = (-27, 16, -21) \end{aligned}$$

$$3x - 5y + 3z \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 3z &= 3(-9i + 4j + 3k) - 5(6i - 2j - 7k) + 3(-2i + 2j + 4k) \quad \text{الحل:} \\ &= (-27i + 12j + 9k) + (-30i + 10j + 35k) + (-6i + 6j + 12k) \\ &= (-63i + 28j + 56k) = (-63, 28, 56) \end{aligned}$$

$$4x + 3y + 2z \quad (36)$$

الحل:

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 4(-9i + 4j + 3k) + 3(6i - 2j - 7k) + 2(-2i + 2j + 4k) \\ &= (-36i + 16j + 12k) + (18i - 6j - 21k) + (-4i + 4j + 8k) \\ &= (-22i + 14j - k) = (-22, 14, -1) \end{aligned}$$

.....

$$-8x - 2y + 5z \quad (37)$$

الحل:

$$\begin{aligned} -8x - 2y + 5z &= -8(-9i + 4j + 3k) - 2(6i - 2j - 7k) + 5(-2i + 2j + 4k) \\ &= (72i - 32j - 24k) + (-12i + 4j + 14k) + (-10i + 10j + 20k) \\ &= (50i - 18j + 10k) = (50, -18, 10) \end{aligned}$$

.....

$$-6y - 9z \quad (38)$$

$$\begin{aligned} -6y - 9z &= -6(6i - 2j - 7k) - 9(-2i + 2j + 4k) \quad \text{الحل:} \\ &= (-36i + 12j + 42k) + (18i - 18j - 36k) \\ &= (-18i - 6j + 6k) = (-18, -6, 6) \end{aligned}$$

.....

$$-x - 4y - z \quad (39)$$

الحل:

$$\begin{aligned} -x - 4y - z &= -(-9i + 4j + 3k) - 4(6i - 2j - 7k) - (-2i + 2j + 4k) \\ &= (9i - 4j - 3k) + (-24i + 8j + 28k) + (2i - 2j - 4k) \\ &= -13i + 2j + 21k = (-13, 2, 21) \end{aligned}$$

.....

إذا كانت N منتصف MP ، فأوجد النقطة P في كل مما يأتي :

$$M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right) \quad (40)$$

$$N = \frac{M + P}{2} \rightarrow N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{الحل:}$$

$$\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right) = \left(\frac{x_1 + 3}{2}, \frac{y_1 + 4}{2}, \frac{z_1 + 5}{2}\right)$$

$$\frac{x_1 + 3}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x_1 + 3 = 7 \rightarrow x_1 = 4$$

$$\frac{y_1 + 4}{2} = 1 \rightarrow y_1 + 4 = 2 \rightarrow y_1 = -2$$

$$\frac{z_1 + 5}{2} = 2 \rightarrow z_1 + 5 = 4 \rightarrow z_1 = -1$$

$$\therefore P(4, -2, -1)$$

$$M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5) \quad (41)$$

$$N = \frac{M + P}{2} \rightarrow N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \text{الحل:}$$

$$(-2, 1, -5) = \left(\frac{x_1 - 1}{2}, \frac{y_1 - 4}{2}, \frac{z_1 - 9}{2} \right)$$

$$\frac{x_1 - 1}{2} = -2 \rightarrow x_1 - 1 = -4 \rightarrow x_1 = -3$$

$$\frac{y_1 - 4}{2} = 1 \rightarrow y_1 - 4 = 2 \rightarrow y_1 = 6$$

$$\frac{z_1 - 9}{2} = -5 \rightarrow z_1 - 9 = -10 \rightarrow z_1 = -1$$

$$\therefore P(-3, 6, -1)$$

$$M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right) \quad (42)$$

$$N = \frac{M + P}{2} \rightarrow N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \text{الحل:}$$

$$\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right) = \left(\frac{x_1 + 7}{2}, \frac{y_1 + 1}{2}, \frac{z_1 + 5}{2} \right)$$

$$\frac{x_1 + 7}{2} = 5 \rightarrow x_1 + 7 = 10 \rightarrow x_1 = 3$$

$$\frac{y_1 + 1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow y_1 + 1 = -1 \rightarrow y_1 = -2$$

$$\frac{z_1 + 5}{2} = 6 \rightarrow z_1 + 5 = 12 \rightarrow z_1 = 7$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء 5 - 5

الضرب الداخلي في الفضاء:

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

مفهوم أساسي

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ في الفضاء كالاتي :
 $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ ، ويكون المتجهان a , b متعامدين إذا وفقط إذا كانا
 $a \cdot b = 0$

تحقق من فهمك : ص 41

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

$$u = (3, -5, 4), v = (5, 7, 5) \quad (1A)$$

$$u = (4, -2, -3), v = (1, 3, -2) \quad (1B)$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (1A) \text{ الحل :}$$

$$u \cdot v = 15 - 35 + 20 = 0 \rightarrow \text{المتجهين متعامدان}$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (1B)$$

$$u \cdot v = 4 - 6 + 6 = 4 \rightarrow \text{المتجهين غير متعامدان}$$

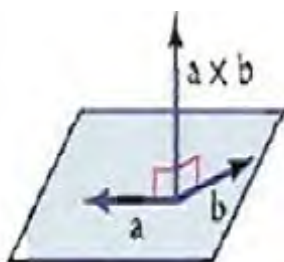
تحقق من فهمك : ص 41

(2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $u = -4i + 2j + k$, $v = -4i + 3k$ ، إلى أقرب منزلة عشرية .

$$\cos q = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(-4, 2, 1) \cdot (-4, 0, 3)}{|(-4, 2, 1)||(-4, 0, 3)|} = \frac{-16 + 0 + 3}{\sqrt{16 + 4 + 1} \sqrt{16 + 9}} = \frac{-13}{5\sqrt{21}} \quad \text{الحل :}$$

$$q = \cos^{-1} \left(\frac{-13}{5\sqrt{21}} \right) \approx 124.6^\circ$$

الضرب الاتجاهي:



هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء ، وبخلاف الضرب الداخلي ، فإن الضرب الاتجاهي لمتجهين a , b هو متجه وليس عددا ، ويرمز له بالرمز $a \times b$ ويقرأ a cross b ويكون المتجه $a \times b$ عموديا علي المستوي الذي يحوي المتجهين a , b

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء:

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$ فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a , b هو المتجه:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

تحقق من فهمك : ص 42

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلا من u , v :

$$(3A) \quad u = (4, 2, -1), v = (5, 1, 4)$$

$$(3B) \quad u = (-2, -1, -3), v = (5, 1, 4)$$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (3A) \text{ الحل:}$$

$$= (8 + 1)\mathbf{i} - (16 + 5)\mathbf{j} + (4 - 10)\mathbf{k} = 9\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = (9, -21, -6)$$

$$(u \times v) \cdot u = (9, -21, -6) \cdot (4, 2, -1) = 36 - 42 + 6 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (9, -21, -6) \cdot (5, 1, 4) = 45 - 21 - 24 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (3B)$$

$$= (-4 + 3)\mathbf{i} - (-8 + 15)\mathbf{j} + (-2 + 5)\mathbf{k} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (-1, -7, 3)$$

$$(u \times v) \cdot u = (-1, -7, 3) \cdot (-2, -1, -3) = 2 + 7 - 9 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (-1, -7, 3) \cdot (5, 1, 4) = -5 - 7 + 12 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

ملاحظة:

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة ، فمثلا يعبر المقدار $u \times v$ عن مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران .

تحقق من فهمك : ص 43

(4) أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه :

جمال السيد سليمان - ثانوية ساجر - المشرف التربوي : بندر تركي الروقي - 3ث - ف2

ضلعان متجاوران $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

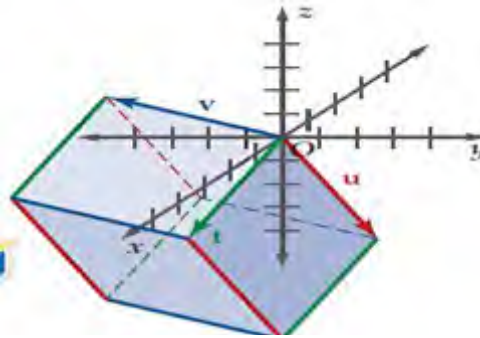
الحل:

$$= (-2 - 9)i - (-6 - 12)j + (-18 + 8)k = -11i + 18j - 10k$$

$$= (-11, 18, -10)$$

$$|u \times v| = \sqrt{121 + 324 + 100} = \sqrt{545} \approx 23.35$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع $23 \cdot 35$ وحدة مربعة تقريبا



ملاحظة: إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية ، فإنها تكون أحرفا متجاورة لمتوازي سطوح ، وهو عبارة عن مجسم متعدد الأوجه ، كل وجه منها علي شكل متوازي أضلاع وأن القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات لهذه المتجهات يمثل حجم متوازي السطوح .

الضرب القياسي للثلاثيات:

الضرب القياسي للثلاثيات

مفهوم أساسي

إذا كان $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, $v = v_1i + v_2j + v_3k$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

فإن الضرب القياسي للثلاثيات يعرف كالآتي :

تحقق من فهمك: ص 43

(5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ، $t = 2j - 5k$ ،

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$0(-2 - 9) - 2(-6 - 12) - 5(-18 + 8) = 36 + 50 = 86$$

أي أن حجم متوازي السطوح 86 وحدة مكعبة

تدرب وحل المسائل : ص 39

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

$$(1) \quad u = (3, -9, 6), v = (-8, 2, 7)$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = -24 - 18 + 42 = 0 \rightarrow \text{المتجهين متعامدان}$$

$$(2) \quad u = (5, 0, -4), v = (6, -1, 4)$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = 30 + 0 - 16 = 14 \rightarrow \text{المتجهين غير متعامدان}$$

$$(3) \quad u = (-7, -3, 1), v = (-4, 5, -13)$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = 28 - 15 - 13 = 0 \rightarrow \text{المتجهين متعامدان}$$

$$(4) \quad u = (11, 4, -2), v = (-1, 3, 8)$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = -11 + 12 - 16 = -15 \rightarrow \text{المتجهين غير متعامدان}$$

$$(5) \quad u = 6i - 2j - 5k, v = 3i - 2j + 6k$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = 18 + 4 - 30 = -8 \rightarrow \text{المتجهين غير متعامدان}$$

$$(6) \quad u = 9i - 9j + 6k, v = 6i + 4j - 3k$$

$$u \cdot v = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad \text{الحل :}$$

$$u \cdot v = 54 - 36 - 18 = 0 \rightarrow \text{المتجهين متعامدان}$$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u, v في كل مما يأتي ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

$$(8) \quad u = (6, -5, 1), v = (-8, -9, 5)$$

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(6, -5, 1) \bullet (-8, -9, 5)}{|(6, -5, 1)||(-8, -9, 5)|} = \frac{-48 + 45 + 5}{\sqrt{36 + 25 + 1} \sqrt{64 + 81 + 25}} = \frac{2}{12\sqrt{85}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6\sqrt{85}}\right) \approx 88 \bullet 96$$

$$u = (-8, 1, 12), v = (-6, 4, 2) \quad (9)$$

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(-8, 1, 12) \bullet (-6, 4, 2)}{|(-8, 1, 12)||(-6, 4, 2)|} = \frac{48 + 4 + 24}{\sqrt{64 + 1 + 144} \sqrt{36 + 16 + 4}} = \frac{76}{\sqrt{11704}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{76}{\sqrt{11704}}\right) \approx 45 \bullet 4$$

$$u = (10, 0, -8), v = (3, -1, -12) \quad (10)$$

الحل:

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(10, 0, -8) \bullet (3, -1, -12)}{|(10, 0, -8)|(3, -1, -12)|} = \frac{30 + 96}{\sqrt{100 + 64} \sqrt{9 + 1 + 144}} = \frac{126}{\sqrt{25256}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{126}{\sqrt{25256}}\right) \approx 37 \bullet 5$$

$$u = -3i + 2j + 9k, v = 4i + 3j - 10k \quad (11)$$

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(-3, 2, 9) \bullet (4, 3, -10)}{|(-3, 2, 9)|(4, 3, -10)|} = \frac{-12 + 6 - 90}{\sqrt{9 + 4 + 81} \sqrt{16 + 9 + 100}} = \frac{-96}{5\sqrt{470}} \quad \text{الحل:}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{-96}{5\sqrt{470}}\right) \approx 152 \bullet 3$$

أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين u, v في كل مما يأتي ، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلا من u, v :

$$u = (-1, 3, 5), v = (2, -6, -3) \quad (12)$$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= (-9 + 30) i - (3 - 10) j + (6 - 6) k = 21 i + 7 j = (21, 7, 0)$$

$$(u \times v) \cdot u = (21, 7, 0) \cdot (-1, 3, 5) = -21 + 21 + 0 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (21, 7, 0) \cdot (2, -6, -3) = 42 - 42 + 0 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

$$u = (4, 7, -2), v = (-5, 9, 1) \quad (13)$$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$= (7 + 18) i - (4 - 10) j + (36 + 35) k = 25 i + 6 j + 71 k = (25, 6, 71)$$

$$(u \times v) \cdot u = (25, 6, 71) \cdot (4, 7, -2) = 100 + 42 - 142 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (25, 6, 71) \cdot (-5, 9, 1) = -125 + 54 + 71 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

$$u = (3, -6, 2), v = (1, 5, -8) \quad (14)$$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$= (48 - 10) i - (-24 - 2) j + (15 + 6) k = 38 i + 6 j + 21 k = (38, 26, 21)$$

$$(u \times v) \cdot u = (38, 26, 21) \cdot (3, -6, 2) = 114 - 156 + 42 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (38, 26, 21) \cdot (1, 5, -8) = 38 + 130 - 168 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

$$u = -2 i - 2 j + 5 k, v = 7 i + j - 6 k \quad (15)$$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -6 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$= (12 - 5) i - (12 - 35) j + (-2 + 14) k = 7 i + 23 j + 12 k = (7, 23, 12)$$

$$(u \times v) \cdot u = (7, 23, 12) \cdot (-2, -2, 5) = -14 - 46 + 60 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = (7, 23, 12) \cdot (7, 1, -6) = 49 + 23 - 72 = 0$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن $u \times v$ يعامد كلا من u , v

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران في كل مما يأتي :

(16) $u = (-9, 1, 2)$, $v = (6, -5, 3)$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -9 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= (3 + 10) i - (-27 - 12) j + (45 - 6)k = 13 i + 39j + 39k = (13, 39, 39)$$

$$|u \times v| = \sqrt{169 + 1521 + 1521} = \sqrt{3211} = 13\sqrt{19} \approx 56 \cdot 7$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع $56 \cdot 7$ وحدة مربعة تقريبا

(17) $u = (4, 3, -1)$, $v = (7, 2, -2)$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= (-6 + 2) i - (-8 + 7) j + (8 - 21)k = -4 i + j - 13k = (-4, 1, -13)$$

$$|u \times v| = \sqrt{16 + 1 + 169} = \sqrt{186} \approx 13 \cdot 6$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع $13 \cdot 6$ وحدة مربعة تقريبا

(18) $u = 6 i - 2 j + 5k$, $v = 5 i - 4 j - 8 k$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= (16 + 20) i - (-48 - 25) j + (-24 + 10)k = 36 i + 73j - 14k$$

$$= (36, 73, -14)$$

$$|u \times v| = \sqrt{1296 + 5329 + 196} = \sqrt{6821} \approx 82 \cdot 6$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع $82 \cdot 6$ وحدة مربعة تقريبا

(19) $u = i + 4 j - 8k$, $v = -2 i + 3 j - 7 k$

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= (-28+24)i - (-7-16) + (3+8)k = -4 i - 23j+11k = (-4, -23, 11)$$

$$|u \times v| = \sqrt{16 + 529 + 121} = \sqrt{666} = 3\sqrt{74} \approx 25 \cdot 8$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع $25 \cdot 8$ وحدة مربعة تقريبا

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه v ، u ، t أحرف متجاورة في كل مما يأتي :

$$(20) \quad t = (-1, -9, 2), \quad u = (4, -7, -5), \quad v = (3, -2, 6)$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= -1(-42 - 10) + 9(24 + 15) + 2(-8 + 21) = 52 + 351 + 26 = 429$$

أي أن حجم متوازي السطوح 429 وحدة مكعبة

$$(21) \quad t = (2, -3, -1), \quad u = (4, -6, 3), \quad v = (-9, 5, -4)$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -9 & 5 & -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -9 & -4 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= 2(24 - 15) + 3(-16 + 27) - 1(20 - 54) = 18 + 33 + 34 = 85$$

أي أن حجم متوازي السطوح 85 وحدة مكعبة

$$(22) \quad t = i + j - 4k, \quad u = -3i + 2j + 7k, \quad v = 2i - 6j + 8k$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 7 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= 1(16 + 42) - 1(-24 - 14) - 4(18 - 4) = 58 + 38 - 56 = 40$$

أي أن حجم متوازي السطوح 40 وحدة مكعبة

$$(23) \quad t = 5i - 2j + 6k, \quad u = 3i - 5j + 7k, \quad v = 8i - j + 4k$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$= 5(-20 + 7) + 2(12 - 56) + 6(-3 + 40) = -65 - 88 + 222 = 69$$

أي أن حجم متوازي السطوح 69 وحدة مكعبة

أوجد متجهها يعامد المتجه المعطي في كل مما يأتي :
(24) (3 , - 8 , 4)

الحل : المتجهان متعامدان فإن $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 = 0$

$$3b_1 - 8b_2 + 4b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 3 , b_1 = 4$$

$$12 - 24 + 4b_3 = 0 \rightarrow 4b_3 = 12 \rightarrow b_3 = 3$$

إذن المتجه العمودي هو (4 , 3 , 3)

(25) (-1 , - 2 , 5)

الحل : المتجهان متعامدان فإن $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 = 0$

$$-b_1 - 2b_2 + 5b_3 = 0 \rightarrow b_2 = 5 , b_1 = 5$$

$$-5 - 10 + 5b_3 = 0 \rightarrow 5b_3 = 15 \rightarrow b_3 = 3$$

إذن المتجه العمودي هو (5 , 5 , 3)

إذا علم كل من $u \bullet v$ فأوجد u في كل مما يأتي :

(28) $v = (2 , - 4 , - 6) , v = - 22$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 \rightarrow -22 = 2b_1 - 4b_2 - 6b_3$

$$b_2 = 2 , b_1 = 2 \text{ بوضع } \rightarrow -22 = 4 - 8 - 6b_3 \rightarrow 6b_3 = 13 \rightarrow b_3 = 3$$

إذن المتجه : $u = (2 , 2 , 3)$

(30) $v = (- 2 , - 6 , - 5) , v = 35$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 \rightarrow 35 = -2b_1 - 6b_2 - 5b_3$

$$b_2 = 1 , b_1 = 2 \text{ بوضع } \rightarrow 35 = -4 - 6 - 5b_3 \rightarrow 5b_3 = -45 \rightarrow b_3 = -9$$

إذن المتجه : $u = (2 , 1 , - 9)$

حدد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أولاً :

(33) $m = (2 , - 10 , 6) , n = (3 , - 15 , 9)$

الحل : لكي يكون المتجهين متوازيين لابد من توافر الشرط $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{3} , \frac{a_2}{b_2} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3} , \frac{a_3}{b_3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

المتجهين متوازيين

$$a = (6, 3, -7), b = (-4, -2, 3) \quad (34)$$

الحل :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad \text{لكي يكون المتجهين متوازيين لابد من توافر الشرط}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}, \frac{a_3}{b_3} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$$

المتجهين غير متوازيين

دليل الدراسة والمراجعة :

5 - 1

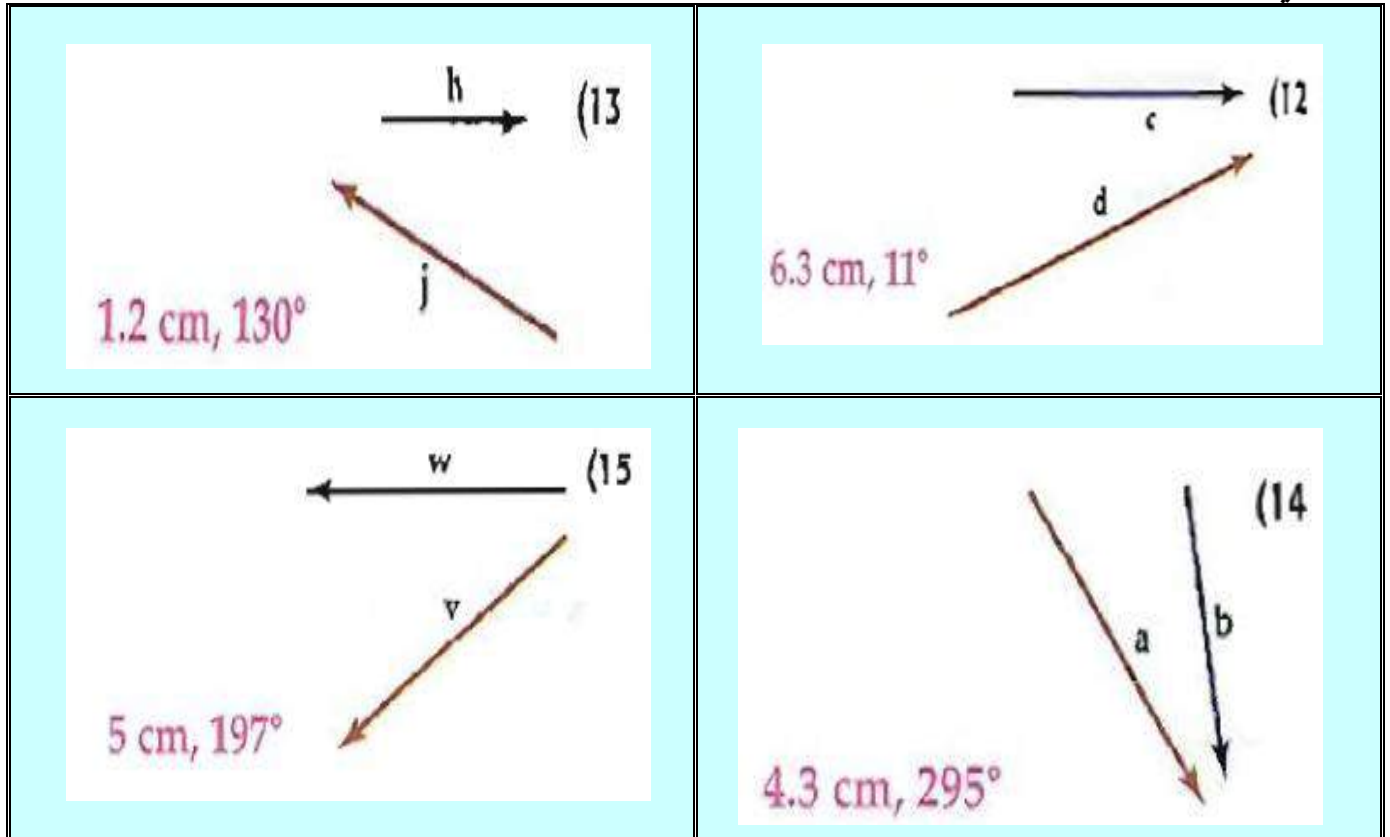
مقدمة في المتجهات :

حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية في كل مما يأتي :

(10) تسير سيارة بسرعة 50 mi / h باتجاه الشرق .

(11) شجرة طولها 20 ft .

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث ، أو قاعدة متوازي الأضلاع ، قرب المحصلة لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملا المسطرة والمنقلة .



أوجد طول المحصلة لنتائج جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي :
 (16) 70m باتجاه الغرب ، ثم 150m باتجاه الشرق .
 (17) 8N للخلف ن ، 12N للخلف

المتجهات في المستوى الإحداثي :

5 - 2

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\vec{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي

(18) $A(-1, 3)$, $B(5, 4)$

(19) $A(7, -2)$, $B(-9, 6)$

(20) $A(-8, -4)$, $B(6, 1)$

(21) $A(2, -10)$, $B(3, -5)$

إذا كان $p(4, 0)$, $q(-2, -3)$, $t(-4, 2)$ ، فأوجد كلا مما يأتي :

(22) $2q - p$ (23) $p + 2t$ (24) $t - 3p + q$ (25) $p2 + t - 3q$

أوجد متجه وحدة u باتجاه v في كل مما يأتي :

(27) $v = (3, -3)$

(26) $v = (-7, 2)$

(26) $v = (9, 3)$

(26) $v = (-5, -8)$

الضرب الداخلي :

5 - 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم تحقق مما يأتي إذا كانا متعامدين أو لا :

(30) $u = (-3, 5)$, $v = (2, 1)$

(31) $u = (4, 4)$, $v = (5, 7)$

(32) $u = (-1, 4)$, $v = (8, 2)$

(33) $u = (-2, 3)$, $v = (1, 3)$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u , v في كل مما يأتي

(30) $u = (5, -1)$, $v = (-2, 3)$

(31) $u = (-1, 8)$, $v = (4, 2)$

عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد :

$$(36) (1, 2, -4)$$

$$(37) (3, 5, 3)$$

$$(38) (5, -3, -2)$$

$$(39) (-2, -3, -2)$$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي ، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها :

$$(40) (-4, 10, 4), (2, 0, 8)$$

$$(41) (-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$$

$$(42) (3, 2, 0), (-9, -10, 4)$$

$$(43) (8, 3, 2), (-4, -6, 6)$$

مثل بيانيا كلا من المتجهات الآتية في الفضاء :

$$b = -3i + 3j + 2k \quad (45)$$

$$a = (0, -3, 4) \quad (44)$$

$$d = (-4, -5, -3) \quad (47)$$

$$c = -2i - 3j + 5k \quad (46)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء :

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

$$u = (2, 5, 2), v = (8, 2, -13) \quad (48)$$

$$u = (5, 0, -6), v = (-6, 1, 3) \quad (49)$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v في كل مما يأتي ، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلا من u, v :

$$u = (1, -3, -2), v = (2, 4, -3) \quad (50)$$

$$u = (4, 1, -2), v = (5, -4, -1) \quad (51)$$