العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة :

بسط كل عبارة مما يأتي مفترضا أن أيا من المتغيرات لايساوي صفرا :

1) $a^4 a^3 a^5$ (a^{12})	2) $(2xy^3z^2)^3$ ($8x^3y^9z^6$)
3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$ ($\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$)	4) $(\frac{-8r^2n}{36n^3t})^2$ ($\frac{4r^4}{81n^4t^2}$)

5) **كثافة :** **تعرف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة علي الحجم . فإذا كانت كتلة جسم** $7\bullet5\times10^3 g$ **، وحجمه** $1\bullet5\times10^3 cm^3$ **، فما كثافته ؟**

الحل: الكثافة $= \frac{7\bullet5\times10^3 g}{1\bullet5\times10^3 cm^3} = 5 g / cm^3$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي :

6) $f(x) = 2x + 5$	7) $f(x) = x - 3$
8) $f(x) = -4x$	9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$	11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى ، أم لا ، وضح إجابتك :

12) $f(x) = x - 6$ ، $g(x) = x + 6$

الحل: نعم لأن : $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

13) $f(x) = 2x + 5$ ، $g(x) = 2x - 5$

الحل : لا لأن : $[f \circ g](x) = 4x - 5$

14) **طعام :** **تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات ، وتكلف كل إضافة عليها 0 • 5 ريال . فإذا كانت الدالة** $f(x) = 0 \bullet 5x + 4$ **تمثل تكلفة الشطيرة مضافا إليها x من الإضافات ،**

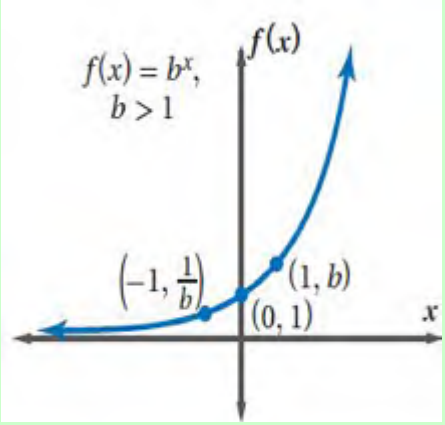
فأوجد $f^{-1}(x)$ **، موضحا ماذا تعني .**

الحل : $f^{-1}(x) = 2x - 8$

تمثل الدوال الأسية بيانيا 2 – 1

تعريف :

مفهوم أساسي	الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسى



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = b^x$, $b > 1$

خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

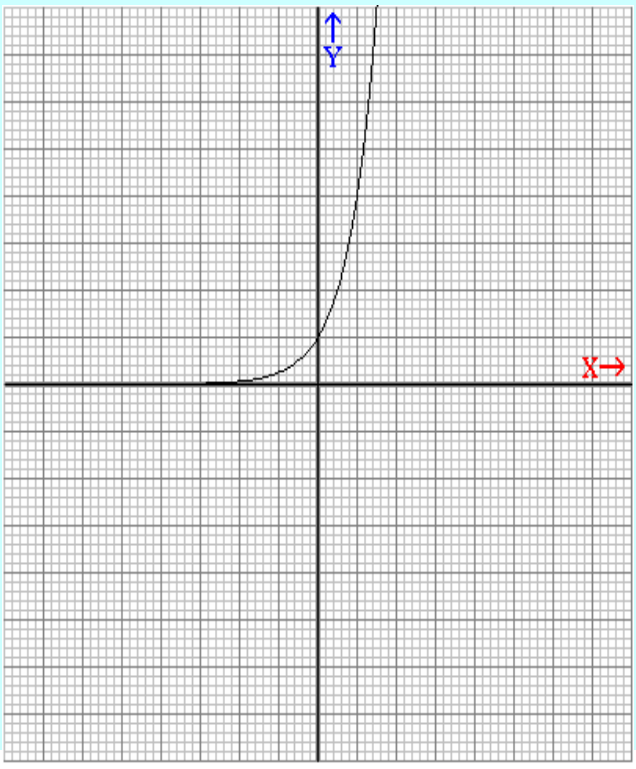
خط التقارب : المحور x

مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحقق من فهمك :

1) مثل الدالة $y = 4^x$ بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

الحل:



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

ألمدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

خط التقارب : المحور x

مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية :

<table>
<tr><td colspan="2">مفهوم أساسي   تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x) = ab^{x-h} + k$</td></tr>
<tr><td>k : إزاحة راسية
إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار │ k │ وحدة إلي الأعلى .
إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار │ k │ وحدة إلي الأسفل .</td><td>h : إزاحة أفقية
إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار │ h │ وحدة إلي اليمين .
إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار │ h │ وحدة إلي اليسار.</td></tr>
<tr><td colspan="2">a : الشكل والاتجاه
إذا كانت 0 > a ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما k = 0
إذا كانت 1 < │ a │ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيا .
إذا كانت 1 > │ a │ >0 ، فإن التمثيل البياني يضيق راسيا .</td></tr>
</table>

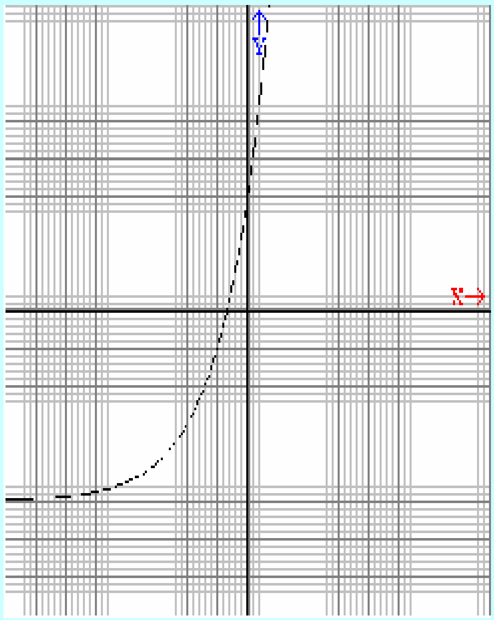
‘‘

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

2A) $y = 2^{x+3} - 5$

الحل :

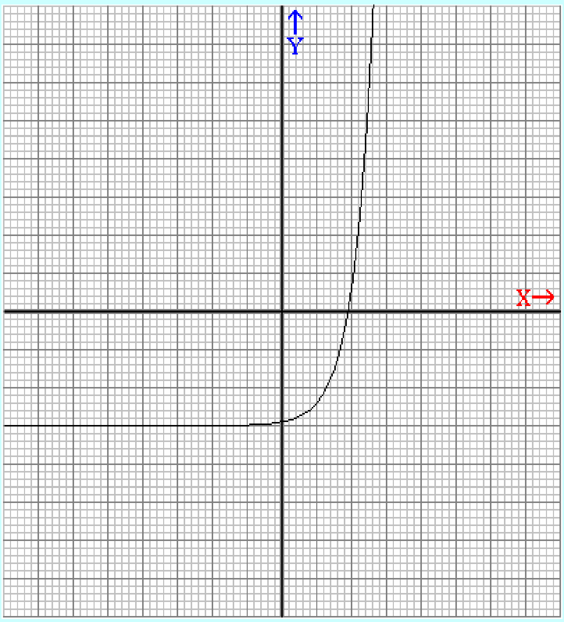


المجال = **R**

المدي = **{ y │ y > –2 }**

2B) $y = 0 \bullet 1(6)^x - 3$

الحل :

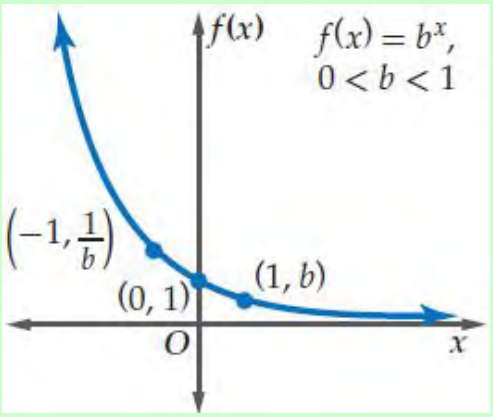


المجال = **R**

المدي = **{ y │ y > – 3 }**

الاضمحلال الأسي :

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسي**



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = b^x$, $b < 1$

خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب : المحور x

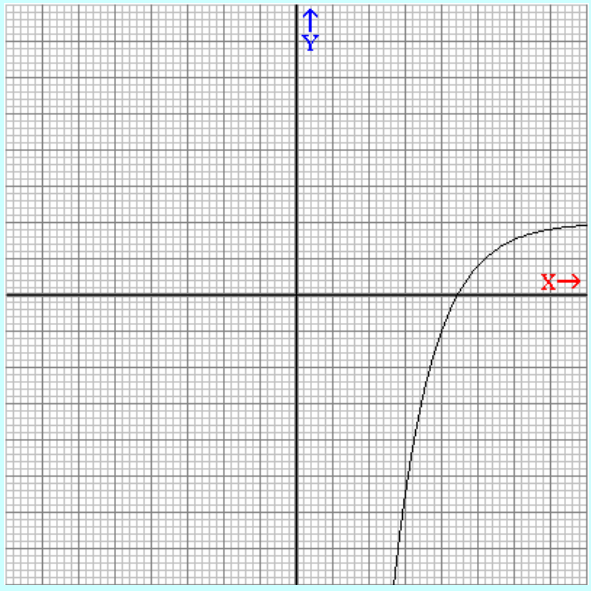
مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

(4A $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

الحل :

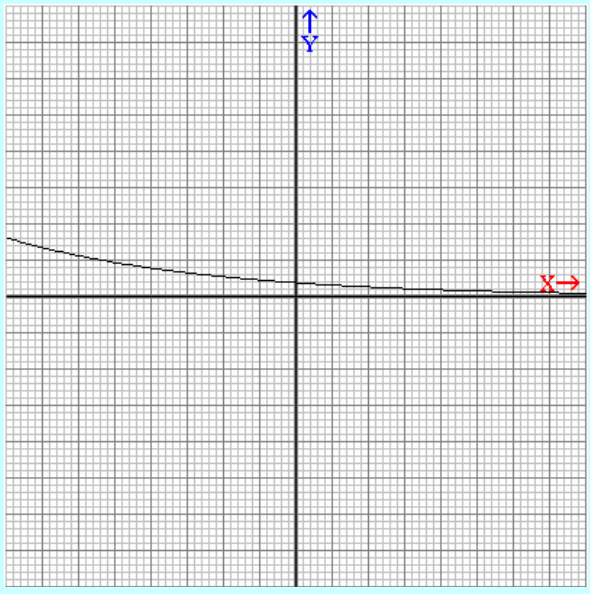


المجال = R

ألمدي = { y | y <2 }

(4B $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

الحل :



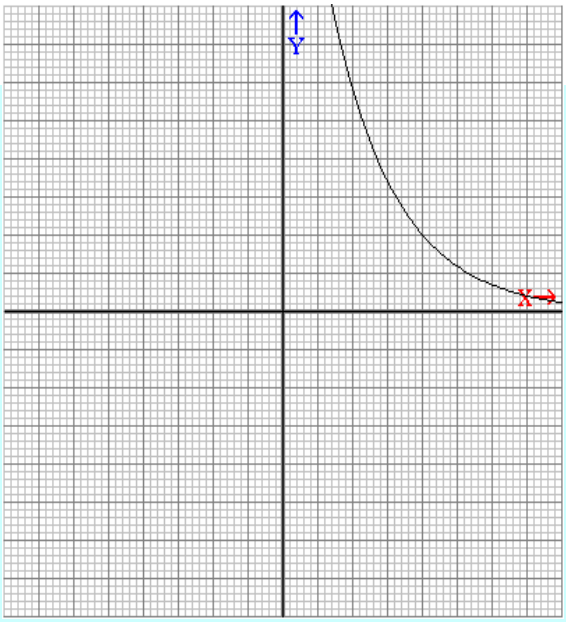
المجال = R

ألمدي = { y | y > 0 }

تحقق من فهمك :

5) يحتوي كوب الشاي الأسود علي 68 mg من الكافيين . أوجد معادلة أسية تمثل الكافيين المتبقية في جسم شخص بالغ بعد شربه كوبا من الشاي الأسود ، ومثلها مستعملا الحاسبة البيانية ، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب .

الحل :



$$y = a(1-r)^t = 68(1-0\bullet125)^t$$

بعد ساعتين

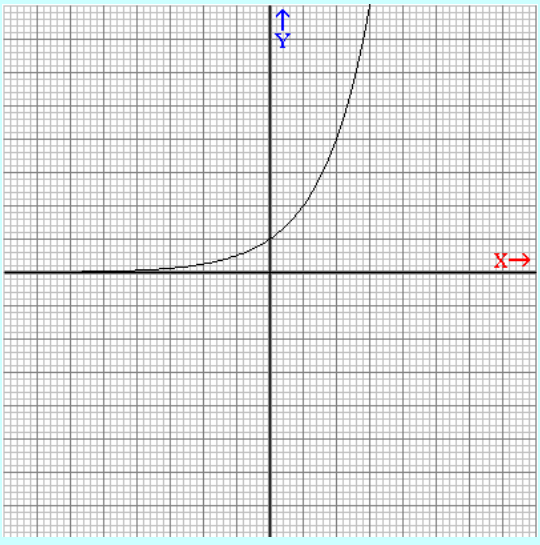
$$y = 68\,(\,0\bullet875\,)^2 \approx 52\bullet06$$

تدرب وحل المسائل :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

(1 $f\,(x) = 2^x$

الحل :

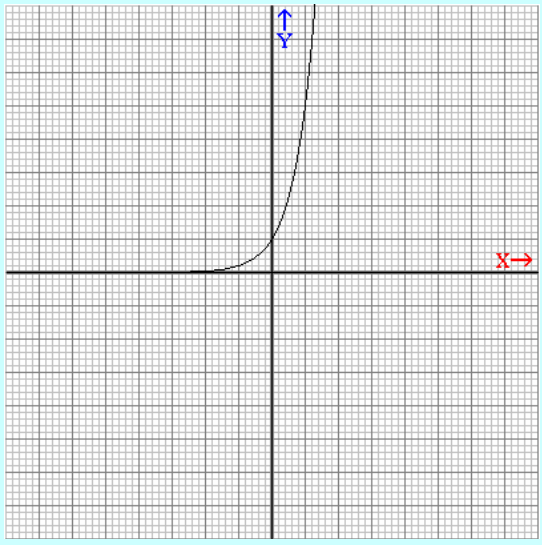


المجال = R

ألمدي = { y | y >0 }

(2 $f\,(x) = 5^x$

الحل :

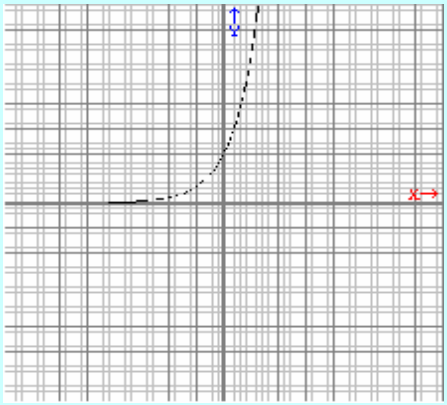


المجال = R

ألمدي = { y | y >0 }

(3 $f(x)=2(3^x)$

الحل :

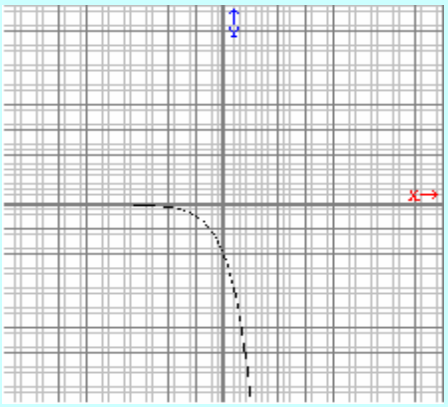


المجال = R

المدي = { y | y >0 }

(4 $f(x)=-2(4^x)$

الحل :

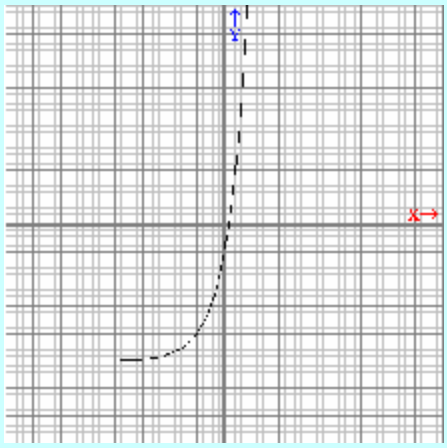


المجال = R

المدي = { y | y <0 }

(5 $f(x)=4^{x+1}-5$

الحل :

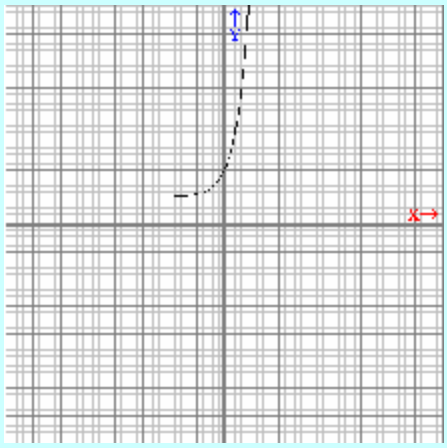


المجال = R

المدي = { y | y > – 5 }

(6 $f(x)=3^{2x}+1$

الحل :

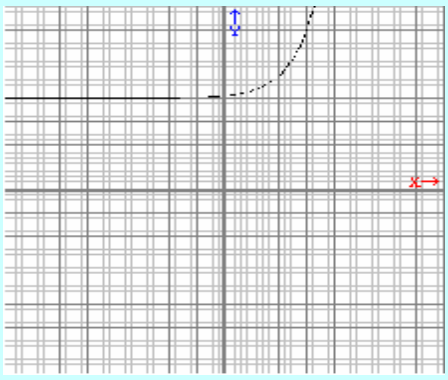


المجال = R

المدي = { y | y >1 }

(7 $f(x)=3^{x-2}+4$

الحل :

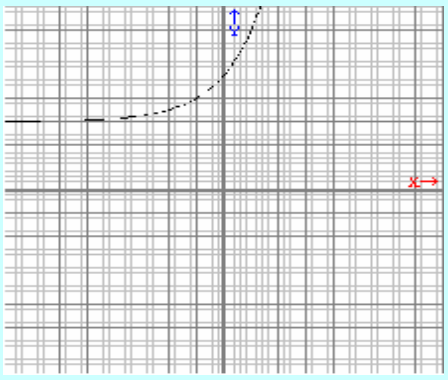


المجال = R

المدي = { y | y >4 }

(8 $f(x)=2^{x+1}+3$

الحل :

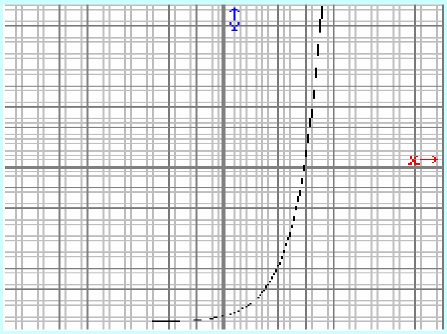


المجال = R

المدي = { y | y >3 }

9) $f(x) = 0\bullet 25(4^{x}) - 6$

الحل :

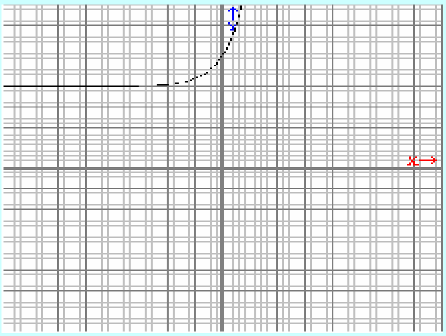


المجال = R

ألمدي = { y | y > ـ 6 }

10) $f(x) = 3(2^{x}) + 8$

الحل :



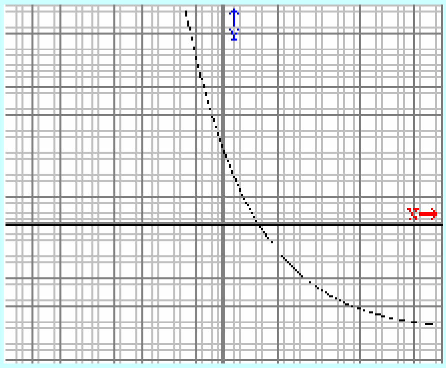
المجال = R

ألمدي = { y | y >8 }

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

12) $f(x) = 2(\frac{2}{3})^{x-3} - 4$

الحل :

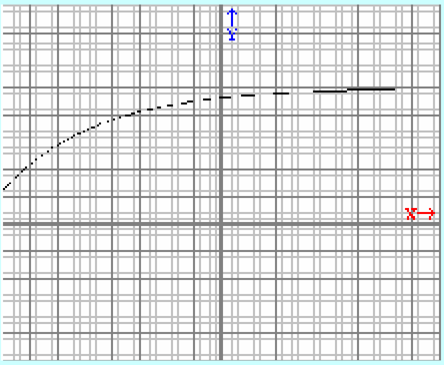


المجال = R

ألمدي = { y | y > ـ 4 }

13) $f(x) = -\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{x+1} + 5$

الحل :

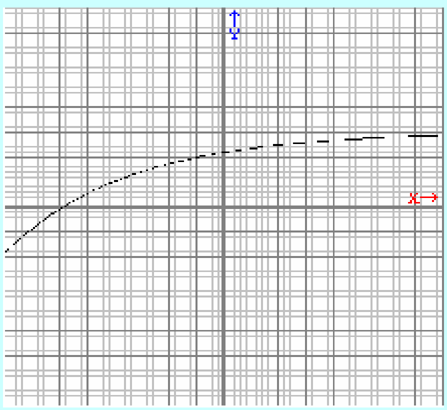


المجال = R

ألمدي = { y | y <5 }

14) $f(x) = -\frac{1}{3}(\frac{4}{5})^{x-4} + 3$

الحل :

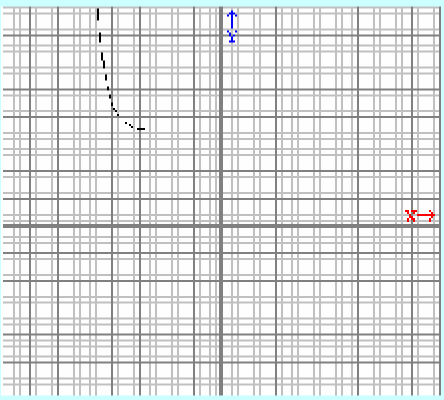


المجال = R

ألمدي = { y | y <3 }

15) $f(x) = \frac{1}{8}(\frac{1}{4})^{x+6} + 7$

الحل :

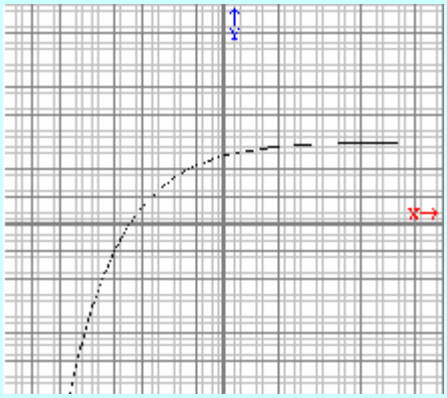


المجال = R

ألمدي = { y | y >7 }

16) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

الحل :

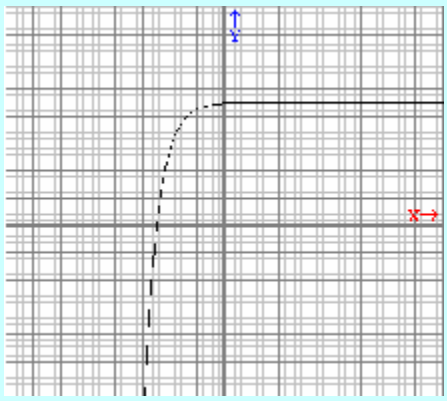


المجال = R

ألمدي = { y | y <3 }

17) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

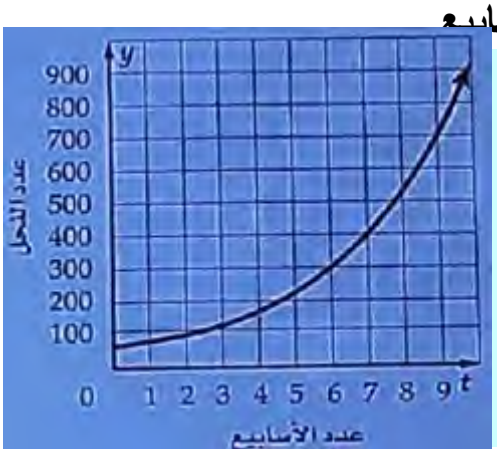
الحل :



المجال = R

ألمدي = { y | y <9 }

19) علوم : **يتكاثر نحل في خلية فيزداد العدد بمعدل % 30 كل أسبوع ، إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد النحل بعد 10 أسابيع**



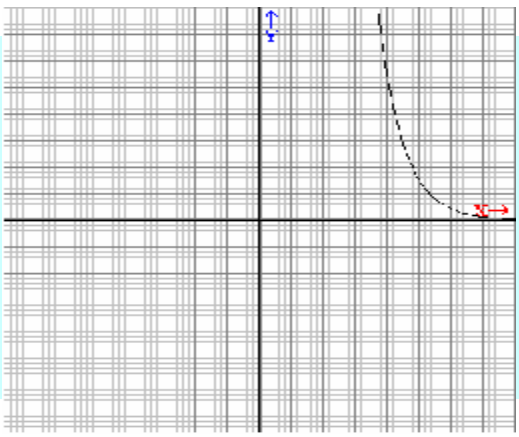
الحل :

$$y = a(1-r)^t = 65(1+0\bullet 3)^t$$

بعد 10 أسابيع

$$y = 65(1+0\bullet 3)^{10} = 65(1\bullet 3)^{10} \approx 896$$

20) كرة سلة : **تناقص عدد الحضور لمباريات كرة قدم بمعدل % 5 لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم ، أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور(y) في المباراة (t) ، إذا كان عددهم في المباراة الأولي 23500 ، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد الحضور في المباراة 15 .**



الحل:

$$y = a(1-r)^t = 23500(1-0\bullet 05)^t$$

بعد 15 مباراة

$$y = 23500(1-0\bullet 05)^{15}$$

$$= 23500(0\bullet 95)^{15} \approx 10887$$

2 ـ 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل المعادلات الآسية :

مفهوم أساسي — **خاصية المساواة للدوال الآسية**

التعبير اللفظي : إذا كان $b \neq 1$, $b > 0$ فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثـــــــــال : إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ ، وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.

تحقق من فهمك :

حل كل معادلة مما يأتي :

(1A $4^{2n-1} = 64$

الحل: $4^{2n-1} = 4^3 \rightarrow 2n - 1 = 3$

$2n = 3 + 1 \rightarrow 2n = 4 \rightarrow n = 2$

(1B $5^{5x} = 125^{x+2}$

الحل: $5^{5x} = 125^{x+2} \rightarrow 5^{5x} = (5^3)^{x+2}$

$5^{5x} = 5^{3x+6} \rightarrow 5x = 3x + 6$

$5x - 3x = 6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

الربح المركب :

مفهوم أساسي — **الربح المركب**

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنه ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلي رأس المال في السنة .

تحقق من فهمك :

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعا ربحا سنويا نسبته 12 % ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 100000 , r = 0 \bullet 12 , n = 24 , t = 5$

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt} = 100000(1 + \frac{0 \bullet 12}{24})^{120} \approx 181939 \bullet 67$$

حل المتباينات الأسية : المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر .

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال الأسية

التعبير اللفظي : إذا كان $b>1$, فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثـــــــــال : إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

(4A $3^{2X-1} \geqslant \frac{1}{243}$

الحل: $3^{2X-1} \geqslant \frac{1}{3^5} \rightarrow 3^{2X-1} \geqslant 3^{-5}$

$2x - 1 \geqslant -5 \rightarrow 2x \geqslant -4 \rightarrow x \geqslant -2$

(4B $2^{X+2} > \frac{1}{32}$

الحل: $2^{X+2} > \frac{1}{2^5} \rightarrow 2^{X+2} > 2^{-5}$

$x + 2 > -5 \rightarrow x > -7$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

(1 $8^{4x+2} = 64$

الحل: $8^{4x+2} = 8^2 \rightarrow 4x + 2 = 2$

$4x = 2 - 2 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$

(2 $5^{x-6} = 125$

الحل: $5^{x-6} = 5^3 \rightarrow x - 6 = 3$

$x = 3 + 6 \rightarrow x = 9$

(3 $3^{5x} = 27^{2x-4}$

الحل: $3^{5x} = (3^3)^{2x-4} \rightarrow 3^{5x} = 3^{6x-12}$

$5x = 6x - 12 \rightarrow x = 12$

(4 $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

الحل: $(4^2)^{2y-3} = 4^{y+1} \rightarrow 4^{4y-6} = 4^{y+1}$

$4y - 6 = y + 1 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{3}$

(5 $2^{6x} = 32^{x-2}$

الحل: $2^{6x} = (2^5)^{x-2} \rightarrow 2^{6x} = 2^{5x-10}$

$6x = 5x - 10 \rightarrow x = -10$

(6 $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

الحل: $(7^2)^{x+5} = 7^{8x-6} \rightarrow 7^{2x+10} = 7^{8x-6}$

$2x+10 = 8x - 6 \rightarrow 6x = 16$

$\rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$81^{a+2} = 3^{3a+1}$ (7 **الحل:** $(3^4)^{a+2} = 3^{3a+1} \rightarrow 3^{4a+8} = 3^{3a+1}$ $4\alpha + 8 = 3\alpha + 1 \rightarrow \alpha = -7$	$256^{b+2} = 4^{2-2b}$ (8 **الحل:** $(4^4)^{b+2} = 4^{2-2b} \Rightarrow 4^{4b+8} = 4^{2-2b}$ $4b + 8 = 2 - 2b \rightarrow 6b = -6 \rightarrow b = -1$
$9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ (9 **الحل:** $(3^2)^{3c+1} = (3^3)^{3c-1} \rightarrow 3^{6c+2} = 3^{9c-3}$ $6c + 2 = 9c - 3 \rightarrow 5 = 3c \rightarrow c = \frac{5}{3}$	$8^{2y+4} = 16^{y+1}$ (10 **الحل:** $(2^3)^{2y+4} = (2^4)^{y+1} \rightarrow 2^{6y+12} = 2^{4y+4}$ $6y + 12 = 4y + 4 \rightarrow 2y = -8 \rightarrow y = -4$

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعا ربحا سنويا نسبته% 3 • 4 ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال كل شهر . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 70000 , r = 0 \bullet 043 , n = 12 , t = 7$

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 70000(1+\frac{0 \bullet 043}{12})^{84} \approx 94533 \bullet 78$$

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعا ربحا سنويا نسبته % 25 • 2 ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 50000 , r = 0 \bullet 0225 , n = 24 , t = 6$

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 50000(1+\frac{0 \bullet 0225}{24})^{144} \approx 57223 \bullet 22$$

حل كل متباينة مما يأتي :

$4^{2x+6} \leqslant 64^{2x-4}$ (15 **الحل:** $4^{2x+6} \leqslant (4^3)^{2x-4}$ $4^{2x+6} \leqslant 4^{6x-12}$ $2x + 6 \leqslant 6x - 12 \rightarrow 18 \leqslant 4x$ $18 \leqslant 4x \geqslant 18 \rightarrow x \geqslant 4 \bullet 5$	$25^{y-3} \leqslant (\frac{1}{125})^{y+3}$ (16 **الحل:** $(5^2)^{y-3} \leqslant (5^{-3})^{y+3}$ $5^{2y-6} \leqslant 5^{-3y-9}$ $2y - 6 \leqslant -3y - 9 \rightarrow y \leqslant \frac{-3}{5}$

(17 $625 \geqslant 5^{a+8}$ الحل: $5^4 \geqslant 5^{a+8}$ $4 \geqslant \alpha + 8 \rightarrow -4 \geqslant \alpha \rightarrow \alpha \leqslant -4$	(18 $10^{5b+2} > 1000$ الحل: $10^{5b+2} > 10^3$ $5b + 2 > 3 \rightarrow 5b > 1 \rightarrow b > \frac{1}{5}$
(19 $(\frac{1}{64})^{c-2} < 32^{2c}$ الحل: $(2^{-6})^{c-2} < (2^5)^{2c}$ $2^{-6c+12} < 2^{10c}$ $-6c + 12 < 10c \rightarrow 12 < 16c$ $16c \geqslant 12 \rightarrow c > 0 \bullet 75$	(20 $(\frac{1}{9})^{3t+5} \geqslant (\frac{1}{243})^{t-6}$ الحل: $(3^{-2})^{3t+5} \geqslant (3^{-5})^{t-6}$ $3^{-6t-10} \geqslant 3^{-5t+30}$ $-6t - 10 \geqslant -5t + 30 \rightarrow -t \geqslant 40$ $t \leqslant -40$

اكتب دالة أسية علي الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي :

(21 $(0 , 6 \bullet 4)$,$(3 , 100)$ الحل: $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 6 \bullet 4)$ نجد أن $6 \bullet 4 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 6 \bullet 4$ $y = 6 \bullet 4\, b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(3 , 100)$نجد أن $100 = 6 \bullet 4 b^3 \rightarrow b^3 = \frac{100}{6 \bullet 4}$ $b^3 = \frac{125}{8} = (\frac{5}{2})^3 \rightarrow b = 2 \bullet 5$ $y = 6 \bullet 4(2 \bullet 5)^x$	(22 $(0 , 256)$, $(4 , 81)$ الحل: $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 256)$ نجد أن $256 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 256$ $y = 256\, b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(4 , 81)$نجد أن $81 = 256 b^4 \rightarrow b^4 = \frac{81}{256}$ $b^4 = \frac{81}{256} = (\frac{3}{4})^4 \rightarrow b = 0 \bullet 75$ $y = 256(0 \bullet 75)^x$
(23 $(0 , 128)$, $(5 , 371293)$ الحل: $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 128)$ نجد أن	(24 $(0 , 144)$, $(4 , 21609)$ الحل: $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 144)$ نجد أن

$128 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 128$ $y = 128\ b^x$ وبالتعويض بالنقطة (371293 , 5)نجد أن $371293 = 128b^5 \rightarrow b^5 = \frac{371293}{128}$ $b = \sqrt[5]{\frac{371293}{128}} \approx 4 \bullet 926$ $y = 128(4 \bullet 926)^x$	$144 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 144$ $y = 144\ b^x$ وبالتعويض بالنقطة (21609 , 4) نجد أن $21609 = 144b^4 \rightarrow b^4 = \frac{21609}{144}$ $b^4 = \frac{2401}{16} = (\frac{7}{2})^4 \rightarrow b = 3 \bullet 5$ $y = 144(3 \bullet 5)^x$

25) علوم : وضع كوب من الشاي درجة حرارته $90^\circ C$ في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي $20^\circ C$ فتناقصت درجة حرارة الشاي ، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة : $y(t) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة .

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة .

c) إذا كانت درجة حرارة الشاي المناسبة لشرب الشاي هي $60^\circ C$ ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساوية لها أم أقل منها بعد 10 دقائق ؟

الحل: a) $y(15) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-15} \approx 45 \bullet 02$

b) $y(30) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-30} \approx 28 \bullet 94$

c) $y(10) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-10} \approx 55 \bullet 25$ (أقل)

26) أشجار : يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6m ، وقطر قاعدة جذعها $19 \bullet 1\ cm$. أكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها hm .

الحل: $d = \alpha (h)^{\frac{3}{2}}$ ، وبالتعويض عن $d = 19 \bullet 1\ cm$ ، $h = 6m = 600cm$

$19 \bullet 1 = \alpha (600)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{19 \bullet 1}{(600)^{\frac{3}{2}}} = 19 \bullet 1 (600)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow d = 19 \bullet 1 (600)^{-\frac{3}{2}} (h)^{\frac{3}{2}}$

حل كل معادلة مما يأتي :

27) $(\frac{1}{2})^{4x+1} = 8^{2x+1}$

الحل:

$(2^{-1})^{4x+1} = (2^{3})^{2x+1}$

$2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$

$-4x - 1 = 6x + 3 \rightarrow 10x = -4$

$x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$

28) $(\frac{1}{5})^{x-5} = 25^{3x+2}$

الحل:

$((5^{-1}))^{x-5} = ((5^{2}))^{3x+2}$

$5^{-x+5} = 5^{6x+4}$

$-x + 5 = 6x + 4 \rightarrow 7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

29) $216 = (\frac{1}{6})^{x+3}$

الحل:

$6^{3} = (6^{-1})^{x+3}$

$6^{3} = 6^{-x-3}$

$3 = -x - 3 \rightarrow x = -3 - 3 \rightarrow x = -6$

30) $(\frac{1}{8})^{3x+4} = (\frac{1}{4})^{-2x+4}$

الحل:

$((2^{-3}))^{3x+4} = ((2^{-2}))^{-2x+4}$

$2^{-9x-12} = 2^{4x-8}$

$-9x - 12 = 4x - 8 \rightarrow 13x = -4$

$x = -\frac{4}{13}$

31) $(\frac{2}{3})^{5x+1} = (\frac{27}{8})^{x-4}$

الحل:

$(\frac{2}{3})^{5x+1} = ((\frac{2}{3})^{-3})^{x-4}$

$(\frac{2}{3})^{5x+1} = (\frac{2}{3})^{-3x+12}$

$5x + 1 = -3x + 12 \rightarrow 8x = 11$

$x = \frac{11}{8}$

32) $(\frac{25}{81})^{2x+1} = (\frac{729}{125})^{-3x+1}$

الحل:

$((\frac{5}{9})^{2})^{2x+1} = ((\frac{5}{9})^{-3})^{-3x+1}$

$(\frac{5}{9})^{4x+2} = (\frac{5}{9})^{9x-3}$

$4x + 2 = 9x - 3 \rightarrow 5x = 5$

$x = 1$

37) تحدٍ : حل المعادلة الآسية : $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^{x}$

الحل: $5(16)^{18} = 4^x \rightarrow \log 5(16)^{18} = \log 4^x$

$$\log 5 + 18\log 16 = x \log 4 \rightarrow x = \frac{\log 5 + 18\log 16}{\log 4} \approx 37 \bullet 161$$

39) **برهان :** أثبت أن : $27^{2x} \bullet 81^{x+1} = 3^{2x+2} \bullet 9^{4x+1}$

الحل:

الأيمن = $3^{2x+2} \bullet (3^2)^{4x+1} = 3^{2x+2} \bullet 3^{8x+2} = 3^{10x+4}$

الأيسر = $(3^3)^{2x} \bullet (3^4)^{x+1} = 3^{6x} \bullet 3^{4x+4} = 3^{10x+4}$

54) ماقيمة x التي تحقق المعادلة : $7^{x-1} + 7 = 8$

F) 1 – (H 1 (G 0 (J 2

الحل: الإجابة H $\rightarrow 7^{x-1} = 8 - 7 \rightarrow 7^{x-1} = 7^0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

55) إذا كانت $f(x) = 5x$ فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟

A) 25 – (B 5 – (C 25 (D

الحل: الإجابة A $\rightarrow f[f(-1)] = f(-5) = -25$.

2 – 3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تعريف :

مفهوم أساسي	اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي : إذا كان x , b عددين موجبين ، حيث $b \neq 1$ ، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ، ويعرف علي أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة .

الرمـــــوز : افرض أن $b > 0 , b \neq 1$ فإن لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$b^y = x \leftrightarrow \log_b x = y$$

مثـــــال : $3^y = 27 \leftrightarrow log_3 27 = y$

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

(1A $\log_4 16 = 2$ ($16 = 4^2$) (1B $\log_3 729 = 6$ ($729 = 3^6$)

''

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

(2A $4^3 = 64$ ($\log_4 64 = 3$) (2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$ ($\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$)

''

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

(3A $\log_3 81$ (4) (3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$ (– 8)

''

الخصائص الأساسية للوغاريتمات :

مفهوم أساسي	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
إذا كان $b > 0$, $b \neq 1$, x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة :	
الخاصية	**التبرير**
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x$, $x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

''

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(4A $\log_9 81$ (2) (4B $3^{\log_3 1}$ (1)

''

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيا :

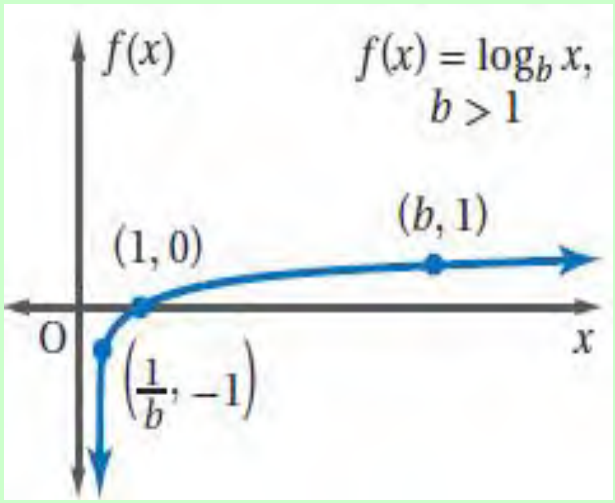
تسمي الدالة $f(x)=\log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x)=\log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأم)للدوال اللوغاريتمية .

مفهوم أساسي	الدالة الرئيسية (الأم)للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسية (الأم): $f(x)=\log_b x$

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

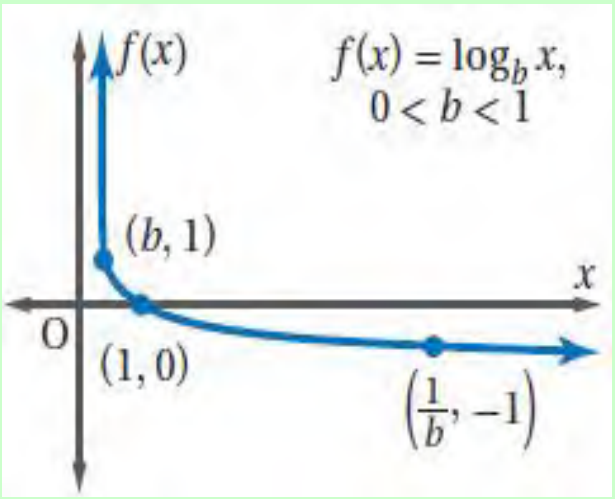
خط التقارب : المحور y



خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مقطع المحور x : النقطة (0 , 1)



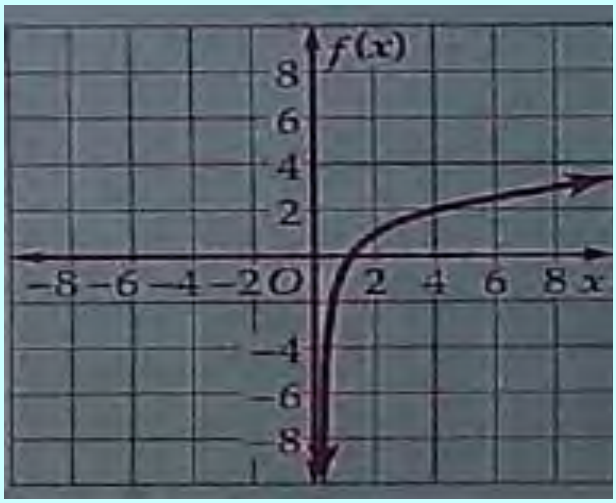
تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

(5A $f(x)=\log_2 x$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :

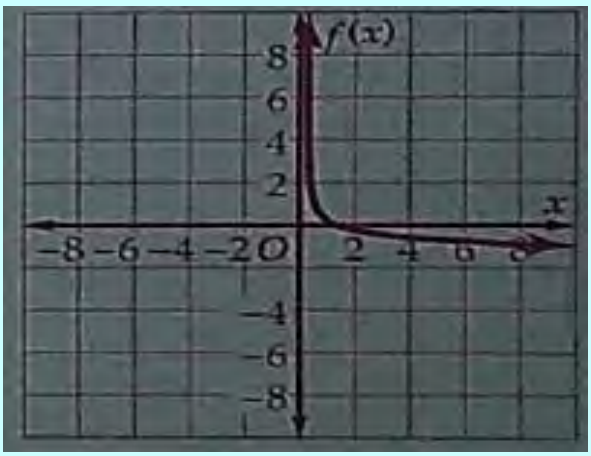
(2 , 1) ، (1 , 0) ، ($\frac{1}{2}$, – 1)



(5B $f(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :

($\frac{1}{8}$, 1) ، (1 , 0) ، (8 , – 1)



التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيا :

مفهوم أساسي	تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_b (x - h) + k$$

h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليمين . إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليسار.	إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأعلى . إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأسفل.

a : الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما $k = 0$

إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيا .

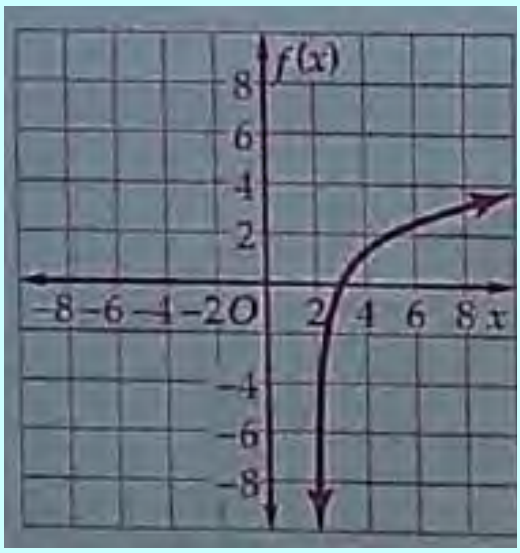
إذا كانت $|a| < 1$ ، $0 <$ فإن التمثيل البياني يضيق راسيا .

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

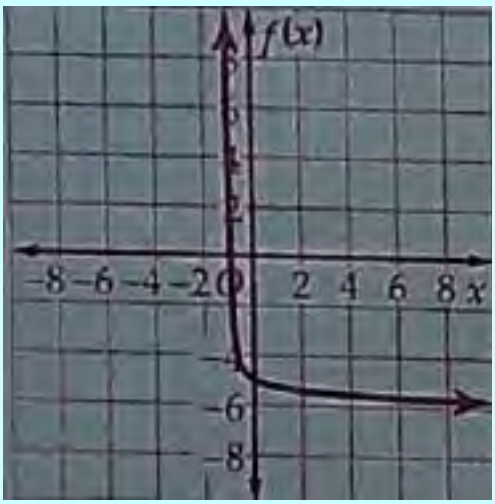
(6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

الحل:



(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

الحل:



تحقق من فهمك :

7) أوجد معادلة المعكوس الدالة : $y = 0 \bullet 5^x$

الحل: $x = (0 \bullet 5)^y \rightarrow y = \log_{0 \bullet 5} x$

تدرب وحل المسائل :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي علي الصورة الأسية :

(1 $\log_8 512 = 3$ **الحل :** $8^3 = 512$	**(2** $\log_5 625 = 4$ **الحل :** $5^4 = 625$
(3 $\log_2 16 = 4$ **الحل :** $2^4 = 16$	**(4** $\log_7 343 = 3$ **الحل :** $7^3 = 343$
(5 $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ **الحل :** $9^{-2} = \frac{1}{81}$	**(6** $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ **الحل :** $3^{-3} = \frac{1}{27}$
(7 $\log_{12} 144 = 2$ **الحل :** $(12)^2 = 144$	**(8** $\log_9 1 = 0$ **الحل :** $9^0 = 1$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي علي الصورة اللوغاريتمية :

(9 $11^3 = 1331$ **الحل :** $\log_{11} 1331 = 3$	**(10** $16^{\frac{3}{4}} = 8$ **الحل :** $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
(11 $9^{-1} = \frac{1}{9}$ **الحل :** $\log_9 \frac{1}{9} = -1$	**(12** $6^{-3} = \frac{1}{216}$ **الحل :** $\log_6 \frac{1}{216} = -3$
(13 $2^8 = 256$ **الحل :** $\log_2 256 = 8$	**(14** $4^6 = 4096$ **الحل :** $\log_4 4096 = 6$
(15 $27^{\frac{2}{3}} = 9$ **الحل :** $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$	**(16** $25^{\frac{3}{2}} = 125$ **الحل :** $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(17 $\log_{13} 169$

الحل : نفرض أن $x = \log_{13} 169$

$13^x = 169 = 13^2 \rightarrow x = 2$

(18 $\log_2 \frac{1}{128}$

الحل : نفرض أن $x = \log_2 \frac{1}{128}$

$2^x = \frac{1}{128} = 2^{-7} \rightarrow x = -7$

(19 $\log_6 1$

الحل : نفرض أن $x = \log_6 1$

$6^x = 1 = 6^0 \rightarrow x = 0$

(20 $\log_4 1$

الحل : نفرض أن $x = \log_4 1$

$4^x = 1 = 4^0 \rightarrow x = 0$

(21 $\log_{10} 10$

الحل : نفرض أن $x = \log_{10} 10$

$10^x = 10 \rightarrow x = 1$

(22 $\log_{10} 0 \bullet 01$

الحل : نفرض أن $x = \log_{10} 0 \bullet 01$

$10^x = 0 \bullet 01 = 10^{-2} \rightarrow x = -2$

(23 $\log_3 \frac{1}{9}$

الحل : نفرض أن $x = \log_3 \frac{1}{9}$

$3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \rightarrow x = -2$

(24 $\log_4 \frac{1}{64}$

الحل : نفرض أن $x = \log_4 \frac{1}{64}$

$4^x = \frac{1}{64} = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

(25 $\log_6 216$

الحل : نفرض أن $x = \log_6 216$

$6^x = 6^3 \rightarrow x = 3$

(26 $\log_{27} 3$

الحل : نفرض أن $x = \log_{27} 3$

$27^x = 3 \rightarrow 3^{3x} = 3$

$3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

(27 $\log_{32} 2$

الحل : نفرض أن $x = \log_{32} 2$

(28 $\log_{121} 11$

الحل : نفرض أن $x = \log_{121} 11$

$32^x = 2 \rightarrow 2^{5x} = 2$

5x = 1 → x = $\frac{1}{5}$

$121^x = 11 \rightarrow 11^{2x} = 11$

2x = 1 → x = $\frac{1}{2}$

(29 $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

الحل : نفرض أن x = $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

$(\frac{1}{5})^x = 5^5 \rightarrow 5^{-x} = 5^5$ **→x = –5**

(30 $\log_{\frac{1}{8}} 512$

الحل : نفرض أن x = $\log_{\frac{1}{8}} 512$

$(\frac{1}{8})^x = 8^3 \rightarrow 8^{-x} = 8^3$

– x = 3 → x = – 3

(31 $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

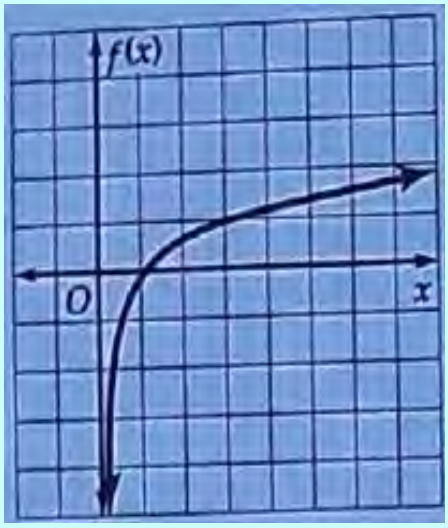
الحل : نفرض أن x = $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

$(\frac{1}{6})^x = \frac{1}{216} = (\frac{1}{6})^3$ **→ x = 3**

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

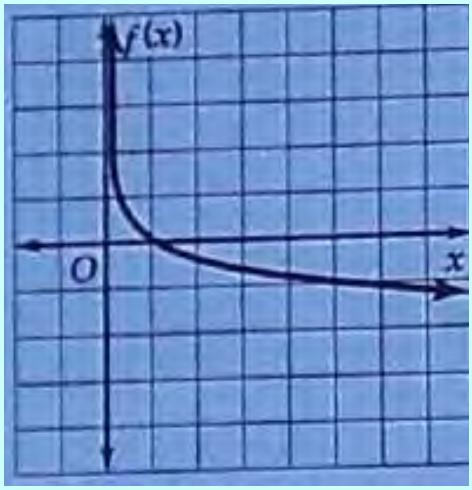
(32 $f(x) = \log_3 x$

الحل :



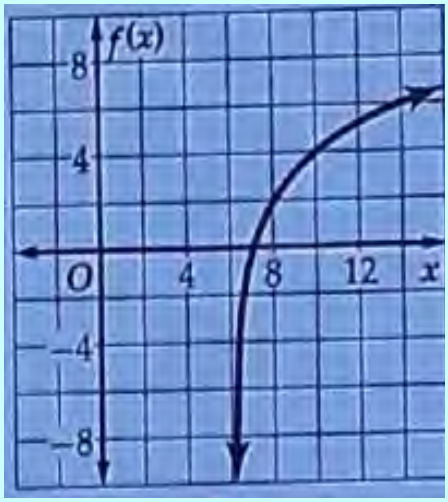
(33 $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

الحل :



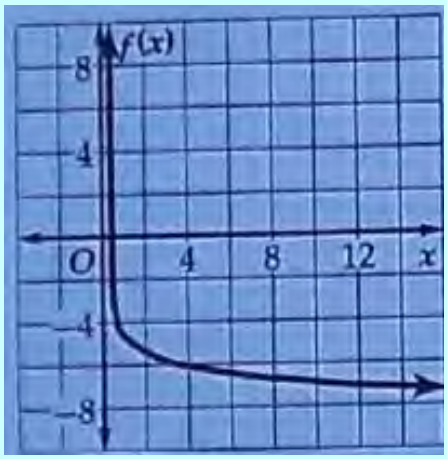
(34 $f(x)=4\log_4(x-6)$

الحل :



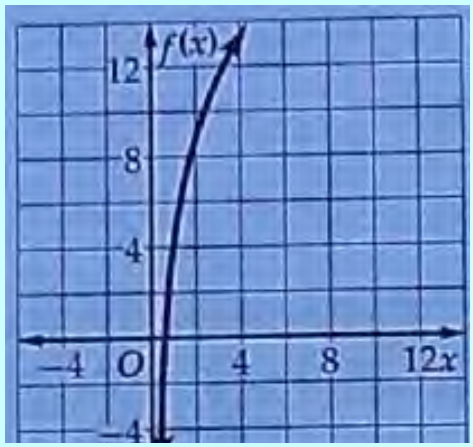
(35 $f(x)=2\log_{\frac{1}{10}}x-5$

الحل :



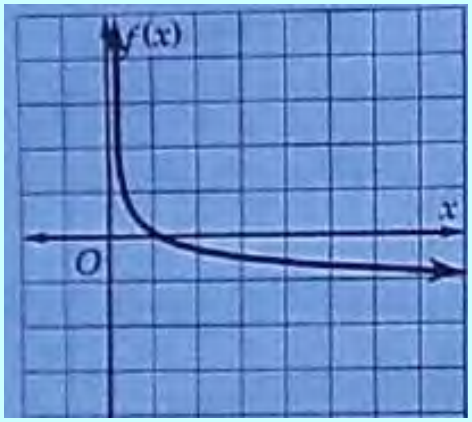
(36 $f(x)=4\log_2 x+6$

الحل :



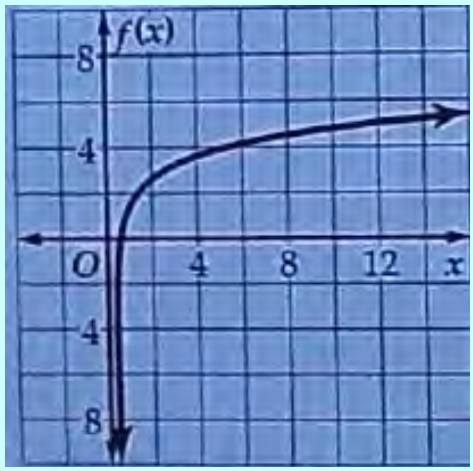
(37 $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}x$

الحل :



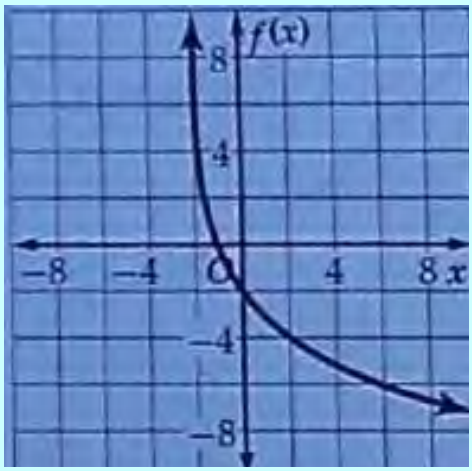
(38 $f(x)=-3\log_{\frac{1}{12}}x+2$

الحل :



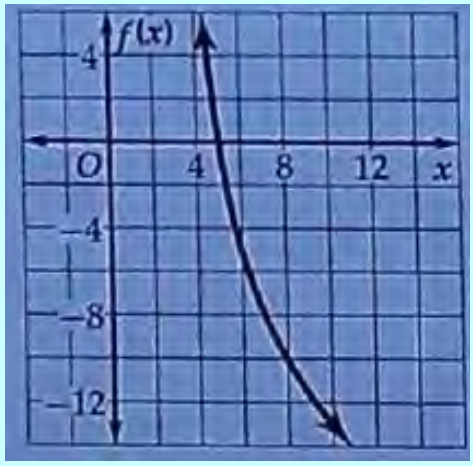
(39 $f(x)=6\log_{\frac{1}{8}}(x+2)$

الحل :



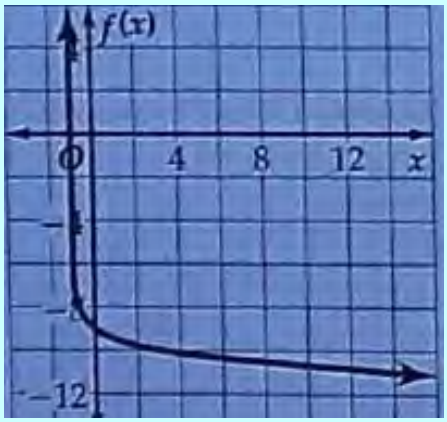
(40 $f(x) = -8\log_3(x-4)$

الحل :



(41 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+1) - 9$

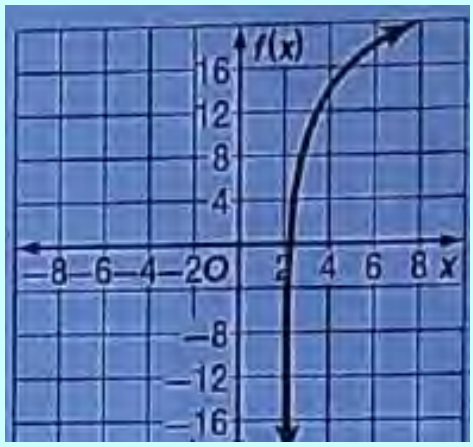
الحل :



مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

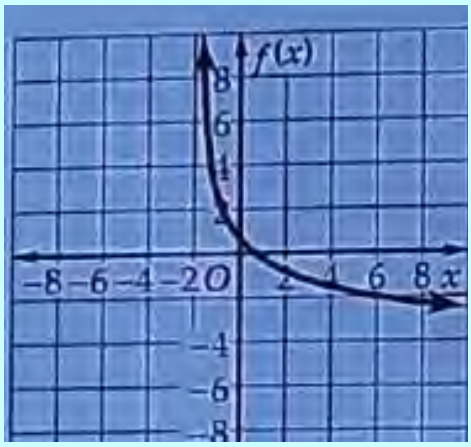
(45 $f(x) = 4\log_2(2x-4)+6$

الحل :



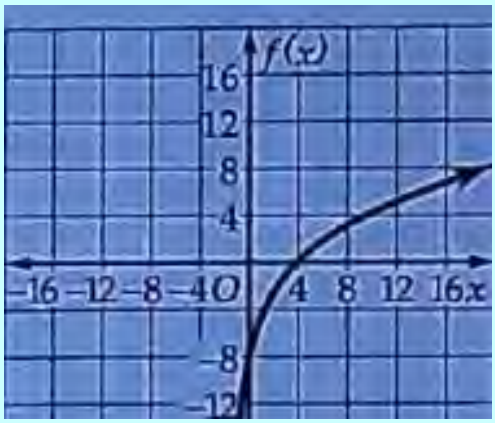
(46 $f(x) = -3\log_{12}(4x+3)+2$

الحل :



(47 $f(x) = 15\log_{14}(x+1) - 9$

الحل :



65) إذا كان $4^{x+2}=48$ فأوجد قيمة 4^x ؟

الحل: $4^{x+2}=48 \rightarrow 4^x \bullet 4^2=48 \rightarrow 4^x=\frac{48}{16}=3$

70) ماقيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$ ؟

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 2

الحل: الإجابة C) $8^x=16 \rightarrow 2^{3x}=2^4 \rightarrow 3x=4 \rightarrow x=\frac{4}{3}$.

71) ماقيمة $\log_2 \frac{1}{32}$

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) – 5

الحل: نفرض أن x = $\log_2 \frac{1}{32} \leftarrow 2^x=\frac{1}{32}=2^{-5} \leftarrow$ x = – 5 ← الإجابة D)

72) مامقطع y للدالة الأسية $y=4^x-1$ ؟

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

الحل: بوضع x = 0 ← y = 1 – 1 = 0 ← الإجابة A)

2 – 4 خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات :

مفهوم أساسي	خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي : لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .

الرمـــــوز : إذا كانت x , b , α أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

مثـــــال : $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

تحقق من فهمك :

1) استعمل $\log_4 2 = 0 \bullet 5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل: $\log_4 32 = \log_4 2^5 = 5\log_4 2 = 5(0 \bullet 5) = 2 \bullet 5$

مفهوم أساسي	خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي : لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروح منه لوغاريتم المقسوم علية .

الرمـــــــوز : إذا كانت x , b , α أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثـــــــال : $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

تحقق من فهمك :

2) صوت : يقاس ارتفاع الصوت **L** بالديسبل**(dB)** ، ويعطي بالصيغة $L = 10\log_{10} R$ ، حيث **R** شدة الصوت النسبية . أوجد شدة الصوت النسبية لصوت ارتفاعه **120dB** .

الحل: $120 = 10\log_{10} R \rightarrow 12 = \log_{10} R \rightarrow R = 10^{12}$

خاصية لوغاريتم القوة :

مفهوم أساسي	خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي : لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها .

الرمـــــــوز : لأي عدد حقيقي p , وأي عددين موجبين m , b ، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b m^{\,p} = p \log_b m$$

مثـــــــال : $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

تحقق من فهمك :

3) إذا كان $\log_3 7 \approx 1 \bullet 7712$ ، فقرب قيمة $\log_3 49$.

الحل: $\log_3 49 = \log_3 7^2 = 2\log_3 7 = 2(1 \bullet 7712) = 3 \bullet 5424$

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(4A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

الحل:

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 6^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\log_6 6 = \frac{2}{3}$$

(4B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل:

$$\log_7 \sqrt[6]{49} = \log_7 7^{\frac{2}{6}}$$

$$= \frac{2}{6}\log_7 7 = \frac{1}{3}$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

(5A $\log_{13} 6a^3bc^4$

الحل:

$$\log_{13} 6a^3bc^4 = \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$$

(5B $\log_6 5x^3y^7x^{0\bullet 5}$

$$\log_6 5x^3y^7x^{0\bullet 5} = \log_6 5 + \log_6 x^3 + \log_6 y^7 + \log_6 x^{0\bullet 5}$$

$$= \log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + 0\bullet 5\log_6 x$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة :

(6A $-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x)$

(6B $\log_3(2x-1) - \frac{1}{4}\log_3(x+1)$

الحل:

$$-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x) = \log_2(x+1)^{-5} + \log_2(6x)^3$$

$$= \log_2 216x^3(x+1)^{-5} = \log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

(6B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)=\log_3(2x-1)-\log_3(x+1)^{\frac{1}{4}}$

$$=\log_3\frac{(2x-1)}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=\log_3\frac{2x-1}{\sqrt[4]{x+1}}$$

تدرب وحل المسائل :

استعمل $\log_4 5\approx 1\bullet 1610, \log_4 3\approx 0\bullet 7925$ **لتقريب كل مما يأتي :**

(1 $\log_4 18$

الحل :

$\log_4 18=\log_4 2+\log_4 9$

$=\log_4 4^{\frac{1}{2}}+\log_4 3^2$

$=\frac{1}{2}\log_4 4+2\log_4 3$

$=\frac{1}{2}+2(0\bullet 7925)$

$=0\bullet 5+1\bullet 585=2\bullet 085$

(2 $\log_4 15$

الحل :

$\log_4 15=\log_4 3+\log_4 5$

$=0\bullet 7925+1\bullet 1610$

$=1\bullet 9535$

(3 $\log_4\frac{5}{3}$

الحل :

$\log_4\frac{5}{3}=\log_4 5-\log_4 3$

$=1\bullet 1610-0\bullet 7925$

$=0\bullet 3685$

(4 $\log_4\frac{3}{4}$

الحل :

$\log_4\frac{3}{4}=\log_4 3-\log_4 4$

$=0\bullet 7925-1$

$=-0\bullet 2075$

استعمل $\log_4 5=0\bullet 5$ **و** $\log_4 5\approx 1\bullet 1610, \log_4 3\approx 0\bullet 7925.\log_4 2=0\bullet 5$ **لتقريب كل مما يأتي :**

(5 $\log_4 30$

الحل :

$\log_4 30=\log_4 2+\log_4 3+\log_4 5$

(6 $\log_4 20$

الحل :

$\log_4 20 = \log_4 4 + \log_4 5$
$= 1 + 1 \bullet 1610 = 2 \bullet 1610$

$= 0 \bullet 5 + 0 \bullet 7925 + 1 \bullet 1610$
$= 2 \bullet 4535$

(7 $\log_4 \frac{2}{3}$

الحل : $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
$= 0 \bullet 5 - 0 \bullet 7925 = -0 \bullet 2925$

(8 $\log_4 \frac{4}{3}$

الحل : $\log_4 \frac{4}{3} = \log_4 4 - \log_4 3$
$= 1 - 0 \bullet 7925 = 0 \bullet 2075$

(9 $\log_4 9$

الحل : $\log_4 9 = \log_4 3^2 = 2\log_4 3$
$= 2(0 \bullet 7925) = 1 \bullet 585$

(10 $\log_4 8$

الحل : $\log_4 8 = \log_4 2^3 = 3\log_4 2$
$= 3(0 \bullet 5) = 1 \bullet 5$

إذا كان $\log_3 5 \approx 1 \bullet 465, \log_5 7 \approx 1 \bullet 2091. \log_6 8 = 1 \bullet 1606, \log_7 9 = 1 \bullet 1292$
لتقريب كل مما يأتي :

(13 $\log_3 25$

الحل : $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$
$= 2(1 \bullet 465) = 2 \bullet 93$

(14 $\log_5 49$

الحل : $\log_5 49 = \log_5 7^2 = 2\log_5 7$
$= 2(1 \bullet 2091) = 2 \bullet 4182$

(15 $\log_6 48$

الحل : $\log_6 48 = \log_6 6 + \log_6 8$
$= 1 + 1 \bullet 1606 = 2 \bullet 1606$

(16 $\log_7 81$

الحل : $\log_7 81 = \log_7 9^2 = 2\log_7 9$
$= 2\ (\ 1 \bullet 1292\ ) = 2 \bullet 2584$

(17 $\log_6 512$

الحل : $\log_6 512 = \log_6 8^3 = 3\log_6 8$
$= 3(1 \bullet 1606) = 3 \bullet 4818$

(18 $\log_7 729$

الحل : $\log_7 729 = \log_7 9^3 = 3\log_7 9$
$= 3(1 \bullet 1292) = 3 \bullet 3876$

احسب قيمة كل مما يأتي :

(19 $\log_5 \sqrt[4]{25}$

(20 $\log_2 \sqrt[5]{32}$

الحل : $\log_5 \sqrt[4]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{4}}$

$= \frac{2}{4} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

الحل : $\log_2 \sqrt[5]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{5}}$

$= \log_2 2 = 1$

(21 $3\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل : $3\log_7 \sqrt[6]{49} = 3\log_7 7^{\frac{2}{6}}$

$= 3(\frac{2}{6}) \log_7 7 = 1$

(22 $4\log_2 \sqrt{8}$

الحل : $4\log_2 \sqrt{8} = 4\log_2 2^{\frac{3}{2}}$

$= 4(\frac{3}{2}) \log_2 2 = 6$

(23 $50\log_5 \sqrt{125}$

الحل : $50\log_5 \sqrt{125} = 50\log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$= 50(\frac{3}{2}) \log_5 5 = 75$

(24 $\log_3 \sqrt[6]{243}$

الحل : $\log_3 \sqrt[6]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{6}}$

$= \frac{5}{6} \log_3 3 = \frac{5}{6}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

(25 $\log_9 6x^3y^5z$

الحل : $\log_9 6x^3y^5z = \log_9 6 + \log_9 x^3 + \log_9 y^5 + \log_9 z$

$= \log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

(26 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

الحل : $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7 = \log_{11} a + \log_{11} b^{-4} + \log_{11} c^{12} + \log_{11} d^7$

$= \log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

(27 $\log_7 h^2 j^{11} k^{-5}$

الحل : $\log_7 h^2 j^{11} k^{-5} = \log_7 h^2 + \log_7 j^{11} + \log_7 k^{-5}$

$= 2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

(28 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

الحل : $\log_4 10t^2uv^{-3} = \log_4 10 + \log_4 t^2 + \log_4 u + \log_4 v^{-3}$

$= \log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

(29 $\log_5 a^6 b^{-3} c^4$

الحل : $\log_5 a^6 b^{-3} c^4 = \log_5 a^6 + \log_5 b^{-3} + \log_5 c^4$

$= 6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

(30 $\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}}$

الحل : $\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}} = \log_2 (2x+3) - \log_2 \sqrt[7]{1-5x}$

$= \log_2 (2x+3) - \log_2 (1-5x)^{\frac{1}{7}}$

$= \log_2 (2x+3) - \frac{1}{7}\log_2 (1-5x)$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(31 $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$

الحل : $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x) = \log_5 x^3 - \log_5 \sqrt{6-x} = \log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}}$

(32 $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1)$

الحل : $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1) = \log_7 (2x)^5 - \log_7 \sqrt[3]{5x+1} = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

(33 $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$

الحل : $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c) = \log_3 a^7 + \log_3 b - \log_3 (8c)^2$

$= \log_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$
(34 $2\log_8(9x) - \log_8(2x-5)$ **الحل :** $2\log_8(9x) - \log_8(2x-5) = \log_8(9x)^2 - \log_8(2x-5)$ $= \log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$
(35 $2\log_6(5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$ **الحل :** $2\log_6(5a) + \log_6 b + 7\log_6 c = \log_6(5a)^2 + \log_6 b + \log_6 c^7$ $= \log_6 25a^2bc^7$
(36 $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$ **الحل :** $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z = \log_2 \frac{x}{yz^3}$

‘‘

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

(38 $\log_8(x-3) = \log_8 x - \log_8 3$ **الحل :** الأيسر $\neq$ $\log_8 x - \log_8 3 = \log_8 \frac{x}{3}$ = الأيمن   **الأيمن ≠ الأيسر ← العبارة خاطئة**
(39 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ **الحل :** الأيسر = $\log_5 22 + \log_5 x = \log_5 22x$ = الأيمن   **الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة**
(40 $\log_{10} 19k = 19\log_{10} k$ **الحل :** الأيسر $\neq$ $19\log_{10} k = \log_{10} k^{19}$ = الأيمن   **الأيمن ≠ الأيسر ← العبارة خاطئة**
(41 $\log_2 y^5 = 5\log_2 y$ **الحل :** الأيسر = $5\log_2 y = \log_2 y^5$ = الأيمن

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة
42) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ **الحل :** الأيسر = $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ = الأيمن الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة
43) $\log_4(z+2) = \log_4 z + \log_4 2$ **الحل :** الأيسر $\neq$ $\log_4 2z = \log_4 z + \log_4 2$ = الأيمن الأيمن $\neq$ الأيسر ← العبارة خاطئة
44) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ **الحل :** الأيمن $\neq$ الأيسر ← العبارة خاطئة
45) $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ **الحل :** الأيسر = $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = \log_9 x^2 + \log_9 y^3 - \log_9 z^4$ = الأيسر الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

49) **تحد :** بسط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة .

الحل: $\log_{\sqrt{a}}(a^2) = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a^4} = \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a})^4 = 4\log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a}) = 4$

50) **تبرير:** استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن : $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

الحل: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(55 $\log_{10} 0 \bullet 001$	**(– 3)**
(56 $\log_4 16^x$	**(2x)**
(57 $\log_3 27^x$	**(3x)**

58) كهرباء : يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = (\frac{P}{R})^{\frac{1}{2}}$ **، حيث P القدرة بالواط ، R المقاومة بالأوم ، ماكمية التيار الكهربائي اتلي يستهلكها جهاز ما إذا كانت P = 120 W ، R = 3Ω . قرب الناتج إلي أقرب عشر .**

الحل: $I = (\frac{P}{R})^{\frac{1}{2}} = (\frac{120}{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} \approx 6 \bullet 3$

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك :

(61 $3^{4x} = 3^{3-x}$	
(62 $3^{5x} \bullet 81^{1-x} = 9^{x-3}$	
(63 $49^x = 7^{x^2-15}$	
(64 $\log_2 (x + 6) = 5$	

65) ماقيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ **؟**

(A $\log_5 2$ **(B** $\log_5 0 \bullet 5$ **(C** $\log_5 3$ **(D 1**

66) مامقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x + 1) + 3$ **؟**

3 (A 2 (B 1(C 0 (D

2 – 5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل المعادلات اللوغاريتمية : تحتوي المعادلات اللوغاريتمية علي لوغاريتم واحد أو أكثر.
ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة عل حل معادلات لوغاريتمية .

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

(1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل: $x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

(1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

الحل: $x = 16^{\frac{5}{2}} = (4^2)^{\frac{5}{2}} = 4^5 = 1024$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية :

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية**

الرموز : إذا كان b عددا موجبا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$
إذا وفقط إذا كان $x = y$

مثـــال : إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

تحقق من فهمك :

2) حل المعادلة : $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$

(F – 3 **(G** – 1 **(H** 5 **(J** 15

الحل: $x^2 - 15 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$
$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$ أو $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ مرفوضة ← الإجابة (H

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

(3A $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل: $\log_7 x^2 = \log_7 27(3)$

$x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow x = 9$

(3B $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

الحل: $\log_6 x(x + 5) = 2$

$x(x + 5) = 6^2 \rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$(x - 4)(x + 9) = 0$

$x = 4$ أو $x = -9$ مرفوضة

حل المتباينات اللوغاريتمية : المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر. ويمكنك استعمال الخاصية التالية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة .

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
إذا كان $b > 1 , x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$	
إذا كان $b > 1 , x > 0$ و $\log_b x < y$ ، فإن $x < b^y$	

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

4A) $\log_4 x \geq 3$

الحل: $x \geq 4^3 \rightarrow x \geq 64$

$\{x | x \geq 16\}$

4B) $\log_2 x < 4$

الحل: $x < 2^4 \rightarrow x < 16$

$\{x | 0 < x < 16\}$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية :

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
الرموز : إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$	
و $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$	
مثـــال : إذا كان $\log_b x > \log_b 35$ فإن $x > 35$	

تحقق من فهمك :

5) حل المتباينة: $\log_5(2x+1) \leq \log_5(x+4)$

الحل: $2x + 1 \leq x + 4 \rightarrow 2x - x \leq 4 - 1 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \{x | -0.5 < x \leq 3\}$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

الحل: $x = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$	**الحل:** $x = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$
(3 $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ **الحل:** $x = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$	**(4** $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ **الحل:** $x = 25^{\frac{5}{2}} = (5^2)^{\frac{5}{2}} = 5^5 = 3125$
(5 $\log_8 \frac{1}{2} = x$ **الحل:** $8^x = \frac{1}{2} \to 2^{3x} = 2^{-1}$ $3x = -1 \to x = -\frac{1}{3}$	**(6** $\log_6 \frac{1}{36} = x$ **الحل:** $6^x = \frac{1}{36} \to 6^x = 6^{-2} \to x = -2$
(7 $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ **الحل:** $x^{\frac{5}{2}} = 32 \to x = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$	**(8** $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ **الحل:** $x^{\frac{3}{2}} = 27 \to x = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

حل كل معادلة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

(9 $5\log_2 x = \log_2 32$ **الحل:** $\log_2 x^5 = \log_2 32 \to x^5 = 32 \to x^5 = 2^5 \to x = 2$
(10 $3\log_2 x = \log_2 8$ **الحل:** $\log_2 x^3 = \log_2 8 \to x^3 = 8 \to x^3 = 2^3 \to x = 2$
(11 $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ **الحل:** $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6 \to \log_4 \frac{48}{n} = \log_4 6$ $\frac{48}{n} = 6 \to 6n = 48 \to n = 8$
(12 $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

الحل: $\log_3 14x = \log_3 28 \rightarrow 14x = 28 \rightarrow x = 2$

(13 $\log_2(4x)+\log_2 5=\log_2 40$

الحل: $\log_2 20x = \log_2 40 \rightarrow 20x = 40 \rightarrow x = 2$

(14 $\log_4 a+\log_4 8=\log_4 24$

الحل: $\log_4 a8 = \log_4 24 \rightarrow a8 = 24 \rightarrow a = 3$

(15 $\log_2 n=\frac{1}{3}\log_2 27+\log_2 36$

الحل: $\log_2 n=\log_2(3^3)^{\frac{1}{3}}+\log_2 36 \rightarrow \log_2 n=\log_2 108 \rightarrow n=108$

(16 $3\log_{10} 8-\frac{1}{2}\log_2 36=\log_2 x$

الحل: $\log_{10} 8^3-\log_2(36)^{\frac{1}{2}}=\log_2 x \rightarrow \log_2 x=\log_2 \frac{512}{6} \rightarrow x=\frac{256}{3}$

حل كل متباينة مما يأتي :

(17 $\log_5 x > 3$

الحل: $x > 5^3 \rightarrow x > 125$

$\{x| x > 125\}$

(18 $\log_8 x \leqslant -2$

الحل: $x \leqslant 8^{-2} \rightarrow x \leqslant \frac{1}{64}$

$\{x| 0 < x \leqslant \frac{1}{64}\}$

(19 $\log_6 x < -3$

الحل: $x < 6^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{216}$

$\{x| 0 < x < \frac{1}{216}\}$

(20 $\log_4 x \geqslant 4$

الحل: $x \geqslant 4^4 \rightarrow x \geqslant 256$

$\{x| x \geqslant 256\}$

(21 $\log_3 x \geqslant -4$

الحل: $x \geqslant 3^{-4} \rightarrow x \geqslant \frac{1}{81}$

(22 $\log_2 x \leqslant -2$

الحل: $x \leqslant 2^{-2} \rightarrow x \leqslant \frac{1}{4}$

$\{x \mid x \geq \frac{1}{81}\}$	$\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$

حل كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

(23 $\log_4(2x+5) \leq \log_4(4x-3)$

الحل: $2x+5 \leq 4x-3 \rightarrow 5+3 \leq 4x-2x \rightarrow 8 \leq 2x \rightarrow 4 \leq x \rightarrow x \geq 4$

$\{x \mid x \geq 4\}$

(24 $\log_8(2x) > \log_8(6x-8)$

الحل: $2x > 6x-8 \rightarrow 2x-6x > -8 \rightarrow -4x > -8 \rightarrow x < 2$

$\{x \mid \frac{4}{3} < x < 2\}$

(25 $\log_2(4x-6) > \log_2(2x+8)$

الحل: $4x-6 > 2x+8 \rightarrow 4x-2x > 8+6 \rightarrow 2x > 14 \rightarrow x > 7$

$\{x \mid x > 7\}$

(26 $\log_7(x+2) \geq \log_7(6x-3)$

الحل: $x+2 \geq 6x-3 \rightarrow 2+3 \geq 6x-x \rightarrow 5 \geq 5x \rightarrow 1 \geq x \rightarrow x \leq 1$

$\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$

27) صوت : يعطي ارتفاع الصوت **L** بالصيغة $L = 10\log_{10} R$ ، حيث **R** هي الشدة النسبية للصوت . احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع صوته **80** ديسبل .

الحل: $80 = 10\log_{10} R \rightarrow \log_{10} R = 8 \rightarrow R = 10^8$

30) علوم : تعطي سرعة الرياح **w** بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93\log_{10} d + 65$ ، حيث **d** المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل .

a) اكتب المعادلة بصورة أسية .

b) ماسرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة **525** ميلا ؟

الحل: **(a** $w = 93\log_{10} d + 65 \rightarrow w - 65 = \log_{10} d^{93}$

$$d^{93} = 10^{(w-65)} \rightarrow d = 10^{\frac{(w-65)}{93}}$$

(b $w = 93\log_{10} 525 + 65 \approx 317 \bullet 97$

33) تحد : اوجد قيمة $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$

الحل:

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

$$= \log_3 3^3 + \log_9 9^{\frac{3}{2}} + 1 + \log_{81} 81^{\frac{3}{4}} + \log_{243} 243^{\frac{3}{5}}$$

$$= 3\log_3 3 + \frac{3}{2}\log_9 9 + 1 + \frac{3}{4}\log_{81} 81 + \frac{3}{5}\log_{243} 243$$

$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{137}{20}$$

مراجعة تراكمية :

حل كل مما يأتي وتحقق من صحة حللك :

(39 $3^{3x-2} > 81$
(40 $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$
(41 $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي :

(42 $\log_4 256$	**(43** $\log_2 \frac{1}{8}$
(44 $\log_6 216$	**(45** $\log_7 2401$

بسط كلا مما يأتي مفترضا أن أي من المتغيرات لايساوي الصفر :

(46 $x^5 \bullet x^3$	**(47** $(2p^2n)^3$
(48 $\frac{x^4 y^6}{xy^2}$	**(49** $(\frac{c^9}{d^7})^0$

51) أي مما يأتي يمثل حلا للمعادلة : $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$

(A $-\frac{1}{2}$ (B $\frac{1}{2}$ (C -2 (D 2

الحل: $\log_4 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 2$

$2x - 2 = x \rightarrow 2x - x = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ الإجابة (D

2 – 6 اللوغاريتمات العشرية

اللوغاريتمات العشرية : نلاحظ أن أي دالة لوغاريتم للأساس 10 تكتب علي الصورة $y = \log_{10} x$ ، وتسمي باللوغاريتمات العشرية وتكتب دون الأساس 10 .

$\log_{10} x = \log x$, $x > 0$

تحقق من فهمك :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(1A log 7 الحل: 0•8451	(1B log 0 • 5 الحل: – 0• 3010

تحقق من فهمك :

2) هزات أرضية : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض علي مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات علي مقياس ريختر .

الحل: $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 (9) = 11 \cdot 8 + 13 \cdot 5 = 25 \cdot 3 \rightarrow E \approx 2(10^{25})$

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(3A $3^x = 15$ الحل: $\log 3^x = \log 15$ $x \log 3 = \log 15 \rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2 \bullet 46$	(3B $6^x = 42$ الحل: $\log 6^x = \log 42$ $x \log 6 = \log 42 \rightarrow x = \frac{\log 42}{\log 6} \approx 2 \bullet 09$

حل المتباينات الآتية وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(4A $3^{2x} \geqslant 6^{x+1}$

الحل:

$\log 3^{2x} \geqslant \log 6^{x+1}$

$2x \log 3 \geqslant (x+1) \log 6$

$2x \log 3 - x \log 6 \geqslant \log 6$

$x(2 \log 3 - \log 6) \geqslant \log 6$

$x(\log 9 - \log 6) \geqslant \log 6$

$x \log 1 \bullet 5 \geqslant \log 6$

$x \geqslant \dfrac{\log 6}{\log 1 \bullet 5} \rightarrow x \geqslant 4 \bullet 42$

$\{x | x \geqslant 4 \bullet 42\}$

(4B $4^{y} < 5^{2y+1}$

الحل:

$\log 4^{y} < \log 5^{2y+1}$

$y \log 4 < (2y+1) \log 5$

$y \log 4 - 2y \log 5 < \log 5$

$y(\log 4 - 2 \log 5) < \log 5$

$y(\log 4 - \log 25) < \log 5$

$y \log \dfrac{4}{25} < \log 5$

$y > \dfrac{\log 5}{\log \frac{4}{25}} \rightarrow y > -0 \bullet 8782$

$\{y | y > -0 \bullet 8782\}$

صيغة تغيير الأساس :

مفهوم أساسي	صيغة تغيير الأساس

الرموز : لأي أعداد موجبة a, b, n ، حيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ فإن : $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

مثـــال : $\log_3 11 = \dfrac{\log_5 11}{\log_5 3}$

تحقق من فهمك :

5) أكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

الحل: $\log_6 8 = \dfrac{\log 8}{\log 6} \approx 1 \bullet 16$

تدرب وحل المسائل :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

1) $\log 5$	**2)** $\log 21$	**3)** $\log 0 \bullet 4$
الحل: 0•6990	**الحل:** 1•3222	**الحل:** -0•3979

4) $\log 3$ الحل: 0•4771	5) $\log 11$ الحل: 1•0414	6) $\log 3 \bullet 2$ الحل: 0•5051
7) $\log 8 \bullet 2$ الحل: 0•9138	8) $\log 0 \bullet 9$ الحل: –0•0458	9) $\log 0 \bullet 04$ الحل: –1•3979

10) علوم : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة علي مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11 \bullet 8 + 1 \bullet 5 M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8 • 5 درجات علي مقياس ريختر

الحل: $\log E = 11 \bullet 8 + 1 \bullet 5 (8 \bullet 5) = 11 \bullet 8 + 12 \bullet 7\ 5 = 24 \bullet 55$

$$E = 10^{24 \bullet 55} \approx 3 \bullet 55 (10^{24})$$

حل كل معادلة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

12) $6^{X} = 40$

الحل:

$$\log 6^{X} = \log 40$$

$$x \log 6 = \log 40$$

$$x = \frac{\log 40}{\log 6} \approx 2 \bullet 0588$$

13) $2 \bullet 1^{a+2} = 8 \bullet 25$

الحل:

$$\log 2 \bullet 1^{a+2} = \log 8 \bullet 25$$

$$(a+2) \log 2 \bullet 1 = \log 8 \bullet 25$$

$$a + 2 = \frac{\log 8 \bullet 25}{\log 2 \bullet 1}$$

$$a = \frac{\log 8 \bullet 25}{\log 2 \bullet 1} - 2 \approx 0 \bullet 8442$$

14) $7^{x^2} = 20 \bullet 42$

الحل:

$$\log 7^{x^2} = \log 20 \bullet 42$$

$$x^2 \log 7 = \log 20 \bullet 42$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log 20 \bullet 42}{\log 7}} \approx \pm 1 \bullet 2451$$

15) $11^{b-3} = 5^{b}$

الحل:

$$\log 11^{b-3} = \log 5^{b}$$

$$(b-3) \log 11 = b \log 5$$

$$b \log 11 - 3 \log 11 = b \log 5$$

$$b \log 11 - b \log 5 = 3 \log 11$$

$$b (\log 11 - \log 5) = 3 \log 11$$

$$b = \frac{3 \log 11}{\log 11 - \log 5} \approx 9 \bullet 1237$$

16) $8^{x} = 40$

17) $5^{x} = 55$

الحل: $\log 8^x = \log 40$

$x \log 8 = \log 40$

$x = \dfrac{\log 40}{\log 8} \approx 1 \bullet 7740$

الحل: $\log 5^x = \log 55$

$x \log 5 = \log 55$

$x = \dfrac{\log 55}{\log 5} \approx 2 \bullet 4899$

(18 $9^{b-1} = 7^b$

الحل: $\log 9^{b-1} = \log 7^b$

$(b-1)\log 9 = b \log 7$

$b \log 9 - \log 9 = b \log 7$

$b \log 9 - b \log 7 = \log 9$

$b(\log 9 - \log 7) = \log 9$

$b = \dfrac{\log 9}{\log 9 - \log 7} \approx 8 \bullet 7429$

(19 $15^{x^2} = 110$

الحل: $\log 15^{x^2} = \log 110$

$x^2 \log 15 = \log 110$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{\log 110}{\log 15}} \approx \pm 1 \bullet 3175$

(20 $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$

الحل: $(3^2)^{6y-2} = 3^{3y+1}$

$3^{12y-4} = 3^{3y+1}$

12y – 4 = 3y + 1 → 9y = 5

y = $\dfrac{5}{9}$

(21 $8^{2x-4} = 4^{x+1}$

الحل: $(2^3)^{2x-4} = (2^2)^{x+1}$

$2^{6x-12} = 2^{2x+2}$

6x – 12 = 2x + 2 → 4x = 14

x = $\dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

(22 $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$

الحل: $2^{4x} = 2^{x+3}$

4x = x + 3 →3x = 3 → x = 1

(23 $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

الحل: $\log 2^y = \log \sqrt{3^{y-1}}$

$y \log 2 = \dfrac{1}{2}(y-1)\log 3$

$2y \log 2 = y \log 3 - \log 3$

$\log 3 = y \log 3 - 2y \log 2$

$\log 3 = y(\log 3 - 2\log 2)$

$y = \dfrac{\log 3}{\log 3 - 2\log 2} \approx -3 \bullet 8189$

حل كل متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(24 $5^{4n} > 33$

الحل: $4n \log 5 > \log 33$

$$n > \frac{\log 33}{4 \log 5} \rightarrow n > 0 \cdot 5431$$

$\{n | n > 0 \cdot 5431\}$

(25 $6^{p-1} \leq 4^{p}$

الحل: $(p-1)\log 6 \leqslant p \log 4$

$p \log 6 - \log 6 \leqslant p \log 4$

$p \log 6 - p \log 4 \leqslant \log 6$

$p(\log 6 - \log 4) \leqslant \log 6$

$$p \leqslant \frac{\log 6}{\log 6 - \log 4}$$

$p \leqslant 4 \cdot 4190 \rightarrow \{p | p \leqslant 4 \cdot 4190\}$

(26 $3^{y-1} \leqslant 4^{y}$

الحل: $(y-1)\log 3 \leqslant y \log 4$

$y \log 3 - \log 3 \leqslant y \log 4$

$y \log 3 - y \log 4 \leqslant \log 3$

$y(\log 3 - \log 4) \leqslant \log 3$

$$y \leqslant \frac{\log 3}{\log 3 - \log 4}$$

$y \geqslant -3 \cdot 8188$

$\{y | y \geqslant -3 \cdot 8188\}$

(27 $5^{p-2} \leqslant 2^{p}$

الحل: $(p-2)\log 5 \leqslant p \log 2$

$p \log 5 - 2 \log 5 \leqslant p \log 2$

$p \log 5 - p \log 2 \leqslant 2 \log 5$

$p(\log 5 - \log 2) \leqslant 2 \log 5$

$$p \leqslant \frac{2 \log 5}{\log 5 - \log 2}$$

$p \leqslant 3 \cdot 5129$

$\{p | p \leqslant 4 \cdot 4190\}$

(28 $2^{4x} \leqslant 20$

الحل: $4x \log 2 \leqslant \log 20$

$$x \leqslant \frac{\log 20}{4 \log 2} \rightarrow x \leqslant 1 \cdot 0805$$

$\{x | x \leqslant 1 \cdot 0805\}$

(29 $6^{3n} > 36$

الحل: $3n \log 6 > \log 36$

$$n > \frac{\log 36}{3 \log 6} \rightarrow n > \frac{2}{3}$$

$\{n | n > \frac{2}{3}\}$

أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(30 $\log_3 7$ **الحل:** $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1\bullet 7712$	**(31** $\log_2 16$ **الحل:** $\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2} = 4$
(32 $\log_4 9$ **الحل:** $\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} \approx 1\bullet 5850$	**(33** $\log_3 21$ **الحل:** $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} \approx 2\bullet 7712$
(34 $\log_5 (2\bullet 7)^2$ **الحل:** $\log_5 (2\bullet 7)^2 = \frac{2\log 2\bullet 7}{\log 5} \approx 1\bullet 2343$	**(35** $\log_7 \sqrt{5}$ **الحل:** $\log_7 \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2\log 7} \approx 0\bullet 4135$

41) تحد : حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ **لتجد قيمة x . وفسر كل خطوة .**

الحل: نفرض أن y = $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x \rightarrow$ **, x =** a^y

3 = $(\sqrt{a})^y$ **بالتربيع**

x = 9 ← $9 = a^y$

43) برهان : أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ ، $\log_{27} 3$ **واكتب تخمينا حول العلاقة بين** $\log_b a$ ، $\log_a b$ **وبرهن تخمينك .**

الحل:

$$\log_{27} 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_{27} 27 = \frac{1}{3}$$

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$$

بوضع α = 27 , b = 3 ←

$$\log_a b = \frac{1}{9}\log_b a$$

مراجعة تراكمية :

حل كل معادلة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

(45 $\log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 x$
(46 $2\log_2 x - \log_2(x+3) = 2$
(47 $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حل كل متباينة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

(48 $\log_8(3y-1) < \log_8(y+5) = x$
(49 $\log_9(9x+4) \leqslant \log_9(11x-12)$

50) افرض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم ، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة . تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ **لتقدير عدد السنوات t ليصبح هذا النوع من الطيور p طائرا . بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر ؟**

A) سنتان **B) 5 سنوات** **(C 3 سنوات** **D) 8 سنوات**

الحل: $t = \log_{0.95} \frac{3000}{3500} \approx 3$ **→ (C الإجابة**

51)أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ **إذا كان** $g(x) = x - 5$ ، $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **؟**

A) $x^2 + 4x - 2$ **(B** $x^2 - 6x + 8$ **C)** $x^2 - 9x + 23$ **D)** $x^2 - 14x + 6$

الحل:

$$f[g(x)] = f(x-5) = (x-5)^2 + 4(x-5) + 3$$

$$= x^2 - 10x + 25 + 4x - 20 + 3 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow \text{(B الإجابة}$$

52) أي مما يأتي يمثل حلا للمعادلة $27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$ **؟**

(F -4 **G)** -2 **H)** 2 **J)** 4

الحل: $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{5^3}{3^3} \rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{3}{5})^{-3} \rightarrow x+1 = -3$

الإجابة F) $x = -4 \rightarrow$

''

مراجعة الدروس :

2 – 1 تمثيل الدوال الأسية بيانيا

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها :

8) $f(x) = 3^x$	9) $f(x) = -5(2)^x$
10) $f(x) = 3(4)^x - 6$	11) $f(x) = 3^{3x} + 5$
12) $f(x) = 3(\frac{1}{4})^x + 3$	13) $f(x) = \frac{3}{5}(\frac{2}{3})^{x-2} + 3$

''

14) سكان : يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة ، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3 % سنويا .

a) أكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنه .

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات ؟

''

2 – 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل كل معادلة مما يأتي :

15) $16^x = \frac{1}{64}$	16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$
17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$	18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$
19) $9^{x-2} = (\frac{1}{81})^{x+2}$	20) $27^{3x} = 9^{2x-1}$

''

21) بكتيريا : بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية . وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبا .

a) أكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه .

b) ماعدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h ؟

''

2 – 3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ علي الصورة الأسية

''

23) أكتب $10^2 = 100$ علي الصورة اللوغاريتمية

''

أوجد قيمة كل مما يأتي :

24) $\log_4 256$	25) $\log_2 \frac{1}{8}$

''

مثل الدالتين الآتيتين بيانيا :

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$	27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

''

2 – 4 خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_5 16 \approx 1 \bullet 7227, \log_5 2 \approx 0 \bullet 4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي :

28) $\log_5 8$	29) $\log_5 64$
30) $\log_5 4$	31) $\log_5 \frac{1}{8}$
32) $\log_5 \frac{1}{2}$	

''

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة :

33) $\log_3 2x^5y^2z^3$
34) $\log_5 ab^{-3}c^4d^{-2}$

''

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة :

(35	$3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$
(36	$2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

(37 **هزات أرضية :** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يسمي مقياس ريختر ، وتعطي قوة الهزة M بالمعادلة $M = \log_{10} x$ ، حيث x سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض . كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت 10 درجات علي مقياس ريختر من سعة هزة أرضية أخري سجلت 7 درجات علي المقياس نفسه ؟

2 – 5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي :

(38	$\log_{16} x = \frac{3}{2}$	(39	$\log_2 \frac{1}{64} = x$
(40	$\log_4 x$	(41	$\log_5 x$
(42	$\log_9(3x-1) = \log_9(4x)$		
(43	$\log_2(x^2-18) = \log_2(-3x)$		
(44	$\log_3(3x+4) \leqslant \log_3(x-2)$		

(45 **صوت :** استعمل القانون $L = 10\log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت ، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنه بارتفاع صوت شخص واحد . علي فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

2 – 6 اللوغاريتمات العشرية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(46	$3^x = 15$	(47	$6^{x^2} = 28$
(48	$8^{m+1} = 30$	(49	$12^{r-1} = 7^r$

50) $3^{5n} > 24$	51) $5^{x+2} \leqslant 3^{x}$

،،،

52) أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

a) $\log_4 11$	b) $\log_2 15$

،،،

53) استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري ، وتوقع ربحا سنويا نسبته 5%
، وتضاف الأرباح إلي رأس المال كل 4 أشهر . استعمل القانون $A = p(1+\frac{0\bullet 5}{3})^{3t}$
حيث A المبلغ المتجمع بعد t سنة .
a) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع 15000 ريال ؟
b) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع مثلي المبلغ الأصلي ؟

،،،