

العلاقات والدوال الأسيّة واللوغاریتميّة

1- تمثيل الدوال الأسيّة بيانياً

فكرة الدرس : ① أمثل دوال النمو الأسّي بيانياً ② أمثل دوال الاضمحلال الأسّي بيانياً

مفردات الدرس :

هي الدالة التي يكون الأساس فيها عدد ثابت والأس هو المتغير المستقل **الدالة الأسّية**

هي دالة أسيّة بحيث يكون الأساس أكبر من الواحد الصحيح **النمو الأسّي**

هو قيمة $1+r$ في الصيغة $A(t) = a(1+r)^t$ **عامل النمو**

هي دالة أسيّة بحيث يكون الأساس أكبر من الصفر وأقل من الواحد **الاضمحلال الأسّي**

هو قيمة $r-1$ في الصيغة $A(t) = a(1-r)^t$ **عامل الاضمحلال**

ملاحظات الدرس : ① الدالة الرئيّسة (الأم) لدوال النمو الأسّي تأخذ الصيغة $f(x) = b^x$ ، $b > 1$ ، b

② دائمًا تكون دالة النمو الأسّي متصلة ومتباينة ومتزايدة ومجالها \mathbb{R} ومداها $(0, \infty)$ وخط تقاربها محور x وقطع المحور y هو النقطة $(0, 1)$

③ تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسّي تأخذ الصيغة $f(x) = a b^{x-h} + k$ حيث أن a تحدد الشكل والاتجاه و h الإزاحة الأفقيّة و k الإزاحة الرأسية ، إذا كانت a سالب فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور $y=k$ وإذا كانت $|a| < 0$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً وإذا كان $0 < |a|$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً

④ إذا كان النمو الأسّي يزداد في دورات زمنية متساوية وبنسبة مئوية ثابتة نستخدم الدالة $A(t) = a(1+r)^t$ حيث أن a القيمة الإبتدائية ، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية t

⑤ إذا كان الاضمحلال الأسّي يتناقص في دورات زمنية متساوية وبنسبة مئوية ثابتة نستخدم الدالة $A(t) = a(1-r)^t$

⑥ جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية فمثلاً $5\% = \frac{5}{100}$ تصبح

ضلل على الدائرة ✓ إذا كانت الإجابة صحيحة أو على الدائرة ✗ إذا كانت الإجابة خاطئة فيما يلي :

✓	الدالة $f(x) = 5(3)^{x-2}$ تسمى دالة النمو الأسّي	1
✓	الدالة $f(x) = -2(\frac{6}{5})^{x-6}$ تسمى دالة الاضمحلال الأسّي	2
✓	مجال الدوال الأسّية دائمًا \mathbb{R}	3
✓	الدالة $f(x) = -2^{x+2}$ يكون التمثيل البياني منعكس حول المحور $y=2$	4
✓	الدالة $f(x) = -2^{x+2}$ لها إزاحة أفقية بمقدار خطوتين يمين	5
✓	الدالة $f(x) = 7^{x+3}$ لها إزاحة رأسية بمقدار أربع خطوات أسفل	6
✓	في الدالة $f(x) = b^x$ إذا كان $b > 1$ فإن التمثيل البياني للدالة لا يقطع المحور x	7
✓	في الدالة $f(x) = b^x$ إذا كان $0 < b < 1$ فإن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y	8
✓	في دالة الاضمحلال الأسّي (الأم) قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x	9
✓	يمكن أن يكون مدى الدالة الأسّية \mathbb{R}	10

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

- 2 حل المعادلات والمتبادرات الأسيّة

فكرة الدرس : ① أحل معادلة أسيّة ② أحل متبادرة أسيّة ③ أحل مسائل تتضمن نموًّا أسيًّا وضمحلال أسيًّا

مفردات الدرس

المعادلة الأسيّة	هي المساواة بين عبارتين يكون الأسس متغير
الربح المركب	هو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافةً إليه أي أرباح سابقة
المتبادرة الأسيّة	هي متبادرة تتضمن عبارة أسيّة أو أكثر (يعني تحتوي على أحد الرموز < ، > ، \geq ، \leq)

ملاحظات الدرس : ① إذا تساوى الأساس في حالة التساوي تتساوى الأساس

② يمكن حساب الربح المركب باستعمال الصيغة $A=p(1+\frac{r}{n})^{nt}$ حيث أن: A: المبلغ الكلي بعد t سنة، p: المبلغ الأصلي

(رأس المال) ، r: معدل الربح السنوي ، n: عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة

③ تغيير إشارة التباين عند الضرب أو القسمة على عدد سالب أو تربيع عددين سالبين

ضلل على الدائرة ✓) إذا كانت الإجابة صحيحة أو على الدائرة ✗) إذا كانت الإجابة خاطئة فيما يلي :

المتبادرة ✓	المتبادرة $(8^{20x}-2^x)$ تكون صحيحة دائمًا لجميع قيم x	1
✗ ✓	التمثيل البياني لمعادلة النمو الأسني متزايدة دائمًا	2
✗ ✓	التمثيل البياني لمعادلة الضمحلال الأسني متزايدة دائمًا	3
✗ ✓	حل المعادلة الأسيّة هو المقطع x	4

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

9(d)	8(c)	7(b)	6(a) $3^x=9^4$
			حل المعادلة $3^{5x}=9^{2x-1}$
-4(d)	-3(c)	-2(b)	-1(a)
			$81^{a+2}=3^{3a+1}$
-8(d)	-7(c)	-6(b)	-5(a)
			حل المعادلة $5^{2x+8}+10=11$
-6(d)	-5(c)	-4(b)	-3(a)
			حل المعادلة $3^4+3^4+3^4+3^4+3^4+3^4+3^4=27^x$
4(d)	3(c)	2(b)	1(a)
			يقدر عدد سكان إحدى المدن عام 1420هـ بـ 1321045 نسمة وفي عام 1427هـ قدرـ بـ 1512986 نسمة تنبأ بعدد سكان تلك المدينة عام 1433هـ
141593(d)	157777(c)	1601154(b)	1700221(a)
			يعطي استثمار ما ربحًا مركبًا معدل نسبته 5.4% سنويًا ويتم إضافة الربح إلى رأس المال 4 مرات سنويًا فإذا تم استثمار مبلغ 40000 ريال فكم سيصبح المبلغ الكلي بعد 8 سنوات
61435.6(d)	62934.2(c)	62988.8(b)	63201.4(a)

$x > \frac{7}{2}(d)$	$x > \frac{8}{3}(c)$	$x < \frac{7}{2}(b)$	$x > \frac{9}{4}(a)$	8
استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوفقاً بـ 2.25% سنوياً بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتبة شهرياً كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات ؟	58931.63(d)	57223.22(c)	56839.88(b)	55342.47(a)
استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوفقاً بـ 2.25% سنوياً بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر فإذا كان المبلغ المتوقع بعد 7 سنوات يساوي 94533.78 ريالاً فما نسبه الربح تقريباً ؟	5.1% (d)	4.3% (c)	3.4% (b)	2.7% (a)
إذا كان $4^{x+2} = 48$ فأوجد x	4 (d)	3 (c)	2 (b)	1 (a)
ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$	3 (d)	2 (c)	1 (b)	0 (a)

-3- اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

فكرة الدرس : ① أجد قيمة عبارات لوغاريتمية ② أمثل دوال لوغاريتمية بيانياً

مفردات الدرس

هو الصورة العكssية للدالة الأسية	اللوغاريتم
هي الدالة التي تأخذ الصورة $x = b^y$	الدالة اللوغاريتمية

ملاحظات الدرس : ① العلاقة التي تربط الدالة الأسية بالدالة اللوغاريتمية هي $x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b x$ حيث $b > 0, b \neq 1$

② تسمى $y = \log_b x$ الصورة اللوغاريتمية و $x = b^y$ الصورة الأسية المكافئة لها ③ $y = \log_b x$ تقرأ y يساوي لوغاریتم x للأساس b

الخصائص الأساسية للлогاريتمات

$\log_b 0 =$ غير معروف	$b > 0, b^{\log_b x} = x$	$\log_b b^x = x$	$\log_b b = 1$	$\log_b 1 = 0$	4
------------------------	---------------------------	------------------	----------------	----------------	---

٥) مجال الدالة اللوغاريتمية $(0, \infty)$ ومداها R ، خط التقارب y مقطع محور x هو $(1, 0)$

٦) تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية تأخذ الصيغة $f(x) = a \log_b(x-h)+k$

ضلل على الدائرة ✓ إذا كانت الإجابة صحيحة أو على الدائرة ✗ إذا كانت الإجابة خاطئة فيما يلي :

✓	الأساس في الدالة اللوغاريتمية دائمًا عدد موجب لا يساوي الواحد	1
✓	الدالة اللوغاريتمية يكون مجالها R	2
✓	إذا كان $a < 0$ في الدالة اللوغاريتمية فإن التمثيل البياني يعكس حول المحور x	3
✓	إذا كان x, y, b أعداد حقيقة فإن الصفر يتبع إلى المجال $y = \log_b x$ حيث	4
✓	التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$	5

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

أكتب المعادلة اللوغاريتمية $\log_3 x = 2$ على الصورة الأسيّة

$3=2^x$ (d)

$3=x^2$ (c)

$x=2^3$ (b)

$x=3^2$ (a)

1

أكتب المعادلة الأسيّة $81=3^x$ على الصورة اللوغاريتمية

$\log_x 81 = 3$ (d)

$\log_3 81 = x$ (c)

$\log_3 x = 81$ (b)

$\log_{81} 3 = x$ (a)

2

أوجد قيمة $\log_3 243$

5 (d)

4 (c)

3 (b)

2 (a)

3

أوجد قيمة $\log_8 512$

5 (d)

4 (c)

3 (b)

2 (a)

4

أوجد قيمة $9\log_9 17.3$

19.4 (d)

17.3 (c)

14.6 (b)

9 (a)

5

أوجد قيمة $6^{\log_6 8}$

10 (d)

8 (c)

6 (b)

1 (a)

6

أوجد قيمة $\log_{121} 11$

1 (d)

$\frac{1}{4}$ (c)

$\frac{1}{3}$ (b)

$\frac{1}{2}$ (a)

7

أوجد قيمة $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

5 (d)

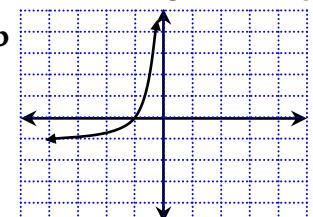
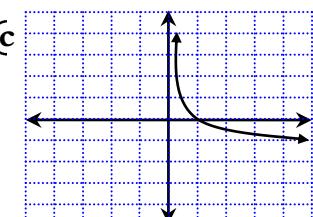
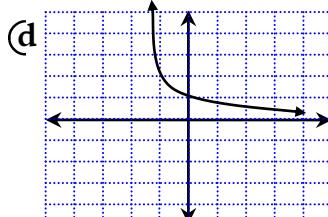
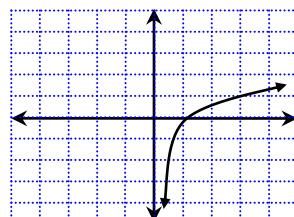
4 (c)

3 (b)

2 (a)

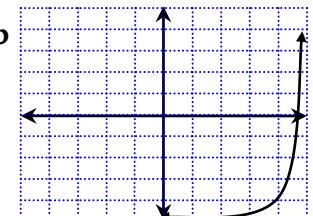
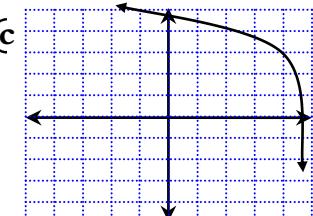
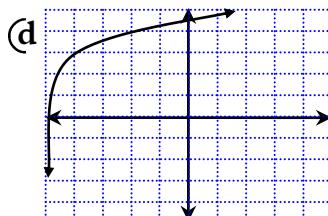
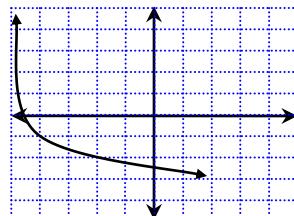
8

مثل الدالة $f(x) = \log_3 x$ بياناً



9

مثل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ بياناً



10

أوجد معادلة لمعكوس الدالة $y=0.5^x$

$x = \log_{0.5} y$ (d)

$y = \log_{0.5} x$ (c)

$y = \log_x 0.5$ (b)

$x = \log_y 0.5$ (a)

11

ما هو المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y=\log_3(x+3)+3$

4 (d)

3 (c)

2 (b)

1 (a)

12

4 - خصائص اللوغاريتمات

فكرة الدرس : أبسط عبارات وأوجد قيمها بأسعمال خصائص اللوغاريتمات

ملاحظات الدرس :

(1) لوغاریتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاریتمات عوامله

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad \text{إذا كانت } b \neq 1$$

(2) إذا كانت $b = y$, $x, b \neq 1$ أعداد حقيقة موجبة فإن $\log_b x = \log_b y$

(3) لوغاریتم ناتج القسمة يساوي لوغاریتم المقسم مطروح منه لوغاریتم المقسم عليه

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \quad \text{إذا كانت } b \neq 1$$

(4) لوغاریتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاریتم أساسها

$$\log_b x^m = m \log_b x \quad \text{حيث } b \neq 1$$

ضلل على الدائرة ✓) إذا كانت الإجابة صحيحة أو على الدائرة ✗) إذا كانت الإجابة خاطئة فيما يلي :

(x) ✓	$\log_b 30 = \log_b 26 + \log_b 4$	1
(x) ✓	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b y - \log_b x \quad \text{إذا كانت } b \neq 1$	2
(x) ✓	$\log_b \frac{fh}{7} = \log_b f - \log_b h - \log_b 7$	3
(x) ✓	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$	4
(x) ✓	$\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$	5
(x) ✓	يوجد قيم للوغاريتمات الأعداد السالبة	6
(x) ✓	إذا كان $b, a > 0$ ، $a < b$ أعداد موجبة فإن قيمة $\log_b a$ عدد نسي	7

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

4.4307 (d)	3.4307 (c)	2.4307 (b)	1.4307 (a)	استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ لنقريب قيمة $\log_5 250$	1
0.5291 (d)	1.3725 (c)	2.1342 (b)	3.3399 (a)	إذا كان $\log_5 6 \approx 1.1133$ لنقريب قيمة $\log_5 216$	2
$\frac{7}{6}$ (d)	$\frac{6}{5}$ (c)	$\frac{5}{4}$ (b)	$\frac{4}{3}$ (a)	احسب قيمة $\sqrt[5]{729}$	3
$-2 \log_3 5 - 4 \log_3 a + 6 \log_3 b$ (b)	$2 \log_3 5 - \log_3 a + 6 \log_3 b$ (a)	$2 \log_3 5 + 4 \log_3 a + 6 \log_3 b$ (d)	$2 \log_3 5 - 4 \log_3 a - \log_3 b$ (c)	أكتب العبارة $\log_3 25a^{-4} b^6$ بالصورة المطلولة	4
$\log_5 y^2 \sqrt{x-1}$ (d)	$\log_5 y^2 \sqrt{x-1} - 1$ (c)	$\log_5 y \sqrt{x-1}$ (b)	$\log_2 y^5 \sqrt{x-1}$ (a)	أكتب العبارة $(1 - x)^{-1} + 0.5 \log_5(x-1)$ بالصورة المختصرة	5
1 (d)	2 (c)	3 (b)	4 (a)	احسب قيمة $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$	6

1(d)	$\log_5 3$ (c)	$\log_5 0.5$ (b)	$\log_5 2$ (a)	ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$	7
6 (d)	5 (c)	4 (b)	3 (a)	احسب $\log 100000$	8
$\log_b 48 = \log_b 12 + \log_b 4$ (b)	$\log_b 48 = \log_b 6 + \log_b 8$ (a)	$\log_b 48 = \log_b 44 + \log_b 4$ (c)	حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى	9	
$\log_b 48 = \log_b 16 + \log_b 3$ (d)					
-3 (d)	3 (c)	-2 (b)	-1 (a)	احسب $\log_{10} 0.001$	10
تقاس قوة الهازة الأرضية بمقاييس لوغاریتمي يسمى مقاييس ريختر وتعطى قوة الهازة $M = \log_{10} x$ بالمعادلة x					
حيث x شدة الهازة الأرضية كم مرة تعادل شدة هزة أرضية سُجلت 10 درجات على مقاييس ريختر شدة هزة أرضية أخرى سُجلت 7 درجات على المقاييس نفسه ؟				11	
1150 (d)	1100 (c)	1000 (b)	900 (a)		
إذا كان $\log_7 2x = \log_7 8$ فأوجد قيمة x					
8 (d)	6 (c)	4 (b)	2 (a)		12

2- حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

فكرة الدرس : (1) أحل معادلات لوغاریتمية (2) أحل متباينات لوغاریتمية

مفهودات الدرس

هي المساواة بين عبارتين تحتوي على لوغاریتم أو أكثر	المعادلة اللوغاريتمية
هي المقارنة بين عبارتين تحتوي على لوغاریتم أو أكثر	المتباعدة اللوغاريتمية

ضلل على الدائرة ✓ إذا كانت الإجابة صحيحة أو على الدائرة ✗ إذا كانت الإجابة خاطئة فيما يلي :

(x) ✓	لا يوجد لوغاریتم للعدد السالب	1
(x) ✓	إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0,1 فإن قيمة $y = \log_b x$ تكون أكبر من الصفر	2
(x) ✓	إذا كان أساس اللوغاريتم بين 0,1 وقيمة x أكبر من 1 فإن قيمة $y = \log_b x$ تكون أصغر من الصفر	3
(x) ✓	المعادلة $y = \log_b 0$ لا حل لها بالنسبة لـ b	4
(x) ✓	المعادلة $y = \log_b 1$ لها عدد لا نهائي من الحلول بالنسبة لـ b	5
(x) ✓	مجال الدالة اللوغاريتمية شبيه مجال دالة الجذر التربيعي	6
(x) ✓	المعادلة $\log_3(x+3) = \log_3(3x+12)$ ليس لها حل	7
(x) ✓	عند حل متباينة لوغاریتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معروفاً	8

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

		$\log_4 x = \frac{5}{2}$	حل المعادلة	1
26 (d)	28 (c)	30 (b)	32 (a)	
لا يوجد حل	-4,-2 (c)	2 (b)	4 (a)	حل المعادلة
9 ,2 (d)	7 (c)	8 (b)	9 (a)	حل المعادلة
7 (d)	6 (c)	5 (b)	4 (a)	حل المعادلة
2 (d)	-2 (c)	$\frac{1}{2}$ (b)	$\frac{-1}{2}$ (a)	أي مما يأتي يمثل حل للمعادلة
27 (d)	26 (c)	25 (b)	24 (a)	حل المعادلة
$\{x x > 3\}$ (d)	$\{x x < -3\}$ (c)	$\{x x < 3\}$ (b)	$\{x x > -3\}$ (a)	حل المتباعدة
6 $\frac{17}{20}$ (d)	7 $\frac{15}{16}$ (c)	8 $\frac{23}{25}$ (b)	9 $\frac{11}{12}$ (a)	أوجد قيمة
4(d)	2(c)	-2(b)	-4(a)	$27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$ حل للمعادلة

6 - اللوغاريتمات العشرية

فكرة الدرس : ① أحل معادلات ومتباينات أساسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية ② أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس

مفردات الدرس

هي اللوغاريتم الذي أساسه 10 (ويكتب اللوغاريتم دون كتابة أساسه)

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad \text{لأي أعداد موجبة } a, b, n \text{ حيث } b \neq 1, a \neq 1$$

ملاحظات الدرس : ① عند كتابة اللوغاريتم دون أساس فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log_{10} x$ تعني $\log x$

② يمكن استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

أوجد قيمة $\log 6$ تقربياً

1
0.7827 (d) 0.8277 (c) 0.7782 (b) 0.8772 (a)

أوجد قيمة $\log 0.35$ تقربياً

2
- 0.4559 (d) -0.3941 (c) -0.5495 (b) - 0.3618 (a)

حل المعادلة $6^x = 40$ مقربياً الحل لأقرب جزء من ألف

3
3.006 (d) 2.601 (c) 2.059 (b) 1.147 (a)

حل المعادلة $2.1^{x+2} = 8.25$ مقربياً الحل لأقرب جزء من ألف

4
0.702 (d) 0.383 (c) 0.241 (b) 0.844 (a)

حل المتباينة $3^{7x} > 2^{5x-3}$

5
 $\{x \mid x > -0.2846\} (d) \quad \{x \mid x < -0.3912\} (c) \quad \{x \mid x > -0.3991\} (b) \quad \{x \mid x < -0.4922\} (a)$

أكتب $\log_5 140$ باستعمال اللوغاريتم العشري

6
 $\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 140} (d) \quad \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5} (c) \quad \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 140} (b) \quad \frac{\log_5 140}{\log_{10} 5} (a)$

أكتب $\log_7 \sqrt{5}$ باستعمال اللوغاريتم العشري

7
 $\frac{\log \sqrt{7}}{\log 5} (d) \quad \frac{\log 7}{\log \sqrt{5}} (c) \quad \frac{\log 5}{\log \sqrt{7}} (b) \quad \frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} (a)$

أغلق حسن نوافذ السيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 73dB إلى 85dB كم مرة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن

الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m=1$ تقربياً

8
40044337 (d) 394462296 (c) 316227766 (b) 294322654 (a)

حل المعادلة $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$

9
3 (d) 2 (c) 1 (b) 0 (a)