إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الحادي عشر

للفرعين

الأدبي، والفندقي والسياحي

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٦/١٩، تاريخ ٢٠١٦/١/١٢م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦م / ٢٠١٧م.

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٦/٣/١٢٧٢)
ISBN: 978 - 9957 - 84 - 746 -3

أشرف على تأليف هذا الكتاب كلٌ من:

أ.د. وصفي أحمد الشطناوي (رئيسًا) — أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة — أ.د. ربى محمد مقدادي
عصام سليمان الشطناوي (مقررًا)

وقام بتأليفه كلٌ من:
جهاد حسين أبو الركب — د. أحمد جميل المساعفة
روان يوسف علي — علية محمد أبو شتية

التحرير العلمي: عصام سليمان الشطناوي

التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى — التحرير الفني: نرمين داوود العزة
الرسم والتصميم: عمر أحمد أبوعليان — الإنتاج: سليمان أحمد الخلايلة

دقق الطباعة وراجعها: نڤين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٧هـ / ٢٠١٦م
أعيدت طباعته ٢٠١٧-٢٠١٨م

قائمة المحتويات

الفصل الدراسي الأول

المقدمة	٥

الوحدة الأولى: الاقترانات كثيرات الحدود

الفصل الأول: تحليل كثيرات الحدود	١٠
أولًا: نظرية الباقي والعامل	١٠
ثانيًا: تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية	١٧
الفصل الثاني: التعابير النسبية	٢٢
الفصل الثالث: رسم كثيرات الحدود	٢٦
الفصل الرابع: المتباينات غير الخطية	٣٣
أسئلة الوحدة	٣٧

الوحدة الثانية: الاقترانات

الفصل الأول: الاقتران الحقيقي	٤٢
الفصل الثاني: اقترانات خاصة	٥١
أولًا: الاقترانات المتشعبة	٥١
ثانيًا: اقتران القيمة المطلقة	٥٧
الفصل الثالث: العمليات على الاقترانات	٦٢
أولًا: تركيب الاقترانات	٦٢
ثانيًا: الاقتران العكسي	٧٠
أسئلة الوحدة	٧٨

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الثالثة: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الفصل الأول: الاقترانات والمعادلات الأسية	٨٤
أولًا: الاقتران الأسي	٨٤
ثانيًا: رسم الاقتران الأسي	٩٠
ثالثًا: المعادلة الأسية	٩٧
الفصل الثاني: الاقترانات اللوغاريتمية	١٠٢
أولًا: اللوغاريتمات	١٠٢
ثانيًا: الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه	١١٤
أسئلة الوحدة	١٢٥

الوحدة الرابعة: المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية

الفصل الأول: المتتاليات والمتسلسلات	١٣٠
أولًا: المتتالية	١٣٠
ثانيًا: المتسلسلة	١٣٦
الفصل الثاني: المتتاليات والمتسلسلات الحسابية	١٤٢
أولًا: المتتالية الحسابية	١٤٢
ثانيًا: مجموع المتسلسلة الحسابية	١٤٩
الفصل الثالث: المتتاليات والمتسلسلات الهندسية	١٥٤
أولًا: المتتالية الهندسية	١٥٤
ثانيًا: مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية	١٦٠
ثالثًا: مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية	١٦٥
أسئلة الوحدة	١٦٩

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

يسرنا أن نضع بين أيدي أعزائنا الطلبة وزملائنا المعلمين كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر للفروع الأدبي، والفندقي والسياحي، والصناعي / مسار (كليات المجتمع)، انسجامًا مع خطة وزارة التربية والتعليم لتطوير المناهج والكتب المدرسية حسب الإطار العام والنتاجات العامة والخاصة لمبحث الرياضيات، وقد حرصنا في تأليف الكتاب على مراعاة الفروق الفردية بين الطلبة، وتنمية مهارات التفكير وحل المشكلات لديهم، والإفادة من المهارات الحاسوبية في تعلم الرياضيات.

يتكون الكتاب من أربع وحدات موزعة على فصلين دراسيين؛ يتضمن أولهما وحدة الاقترانات كثيرات الحدود، وهي من الموضوعات المهمة في الرياضيات؛ نظرًا إلى تطبيقاتها الواسعة في مجالات العلوم المختلفة، مثل: الفيزياء، والكيمياء، والاقتصاد، والعلوم الطبية والتربوية. ويتضمن الفصل الدراسي الأول أيضًا وحدة الاقترانات التي يُعَدُّ الجبر محورها الرئيس، والتي تضم اقترانات متنوعة، مثل اقتران القيمة المطلقة، والاقترانات المتشعبة، والاقترانات الكسرية التي تهيئ الطالب لتعلم التفاضل والتكامل في الصف اللاحق.

أمّا الفصل الدراسي الثاني فيضم وحدة الاقترانات الأسية واللوغاريتمية التي تهدف إلى إكساب الطلبة جملة من المهارات العملية في الرياضيات والعلوم الأخرى وحل المسائل الحياتية، ويضم هذا الفصل أيضًا وحدة المتتاليات والمتسلسلات التي تتضمن تطبيقات عملية مهمة في العديد من المجالات، مثل: الحسابات الخاصة بسقوط الأجسام وارتدادها، والنمو السكاني، والحركة البندولية، وحساب النمو في الاستثمارات المالية، وغير ذلك.

نسأل الله العلي العظيم أن نكون قد وُفِّقنا في تقديم هذا الكتاب ليكون نافعًا ومفيدًا.

١

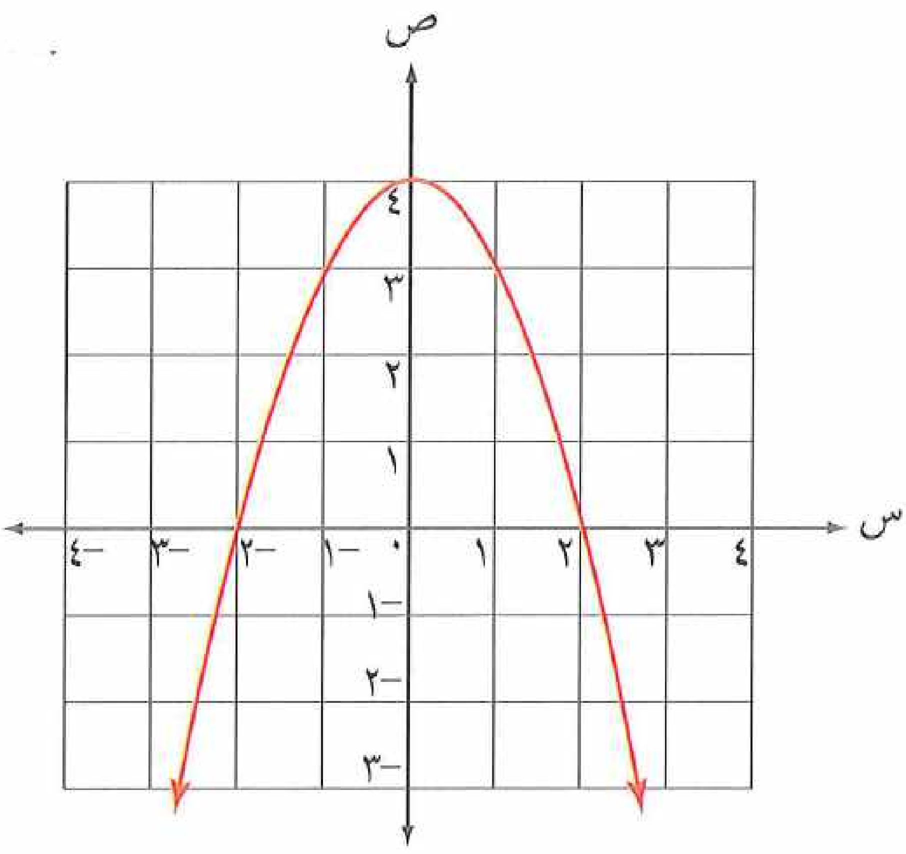
الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى

١

الاقترانات كثيرات الحدود

الاقترانات كثيرات الحدود هي من موضوعات الجبر الذي يُعَدُّ فرعًا من فروع الرياضيات المهمة؛ نظرًا إلى تطبيقاته الواسعة في مجالات العلوم المختلفة، مثل: الفيزياء، والكيمياء، والاقتصاد، والعلوم الطبية والتربوية، مما يؤكد الأثر الفاعل للرياضيات في عالمنا الذي نعيش فيه.



Polynomial Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف نظرية الباقي والعامل، واستخدامها في تحليل اقترانات كثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.
- إيجاد الصيغ المكافئة للتعابير النسبية.
- استخدام التكنولوجيا في تمثيل الاقترانات كثيرات الحدود، واستقصاء خصائصها.
- حل متباينات غير خطية ذات متغير واحد اعتمادًا على إشارة اقترانات كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.
- حل مسائل تتضمن اقترانات كثيرات الحدود، مُبرِّرًا الحل.

تحليل كثيرات الحدود

Factoring Polynomials

النتاجات

- تتعرف نظرية الباقي والعامل.
- تستخدم نظرية الباقي والعامل في بحث قابلية قسمة كثير حدود على آخر، وإيجاد الباقي (إن وُجِد).
- تحلل اقترانات كثيرات حدود حتى الدرجة الثالثة.

أولًا نظرية الباقي والعامل Remainder and factor theorem

بركة ماء مستطيلة الشكل، مساحتها تعطى وفق الاقتران م (س) = ($٣س^٢$ + ٢١س + ٣٠) متر مربع، هل يمكن أن يكون بُعْداها (٣س + ٦) متر، (س + ٥) متر؟

لإيجاد باقي قسمة الاقتران ق (س) = $س^٣$ + ٢س − ٤ على الاقتران هـ (س) = س − ٢، يمكن استخدام خوارزمية القسمة الطويلة:

$$
\begin{array}{r|l}
\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٦ & \\
\hline
\text{س}^٣ + ٢\text{س} - ٤ & \text{س} - ٢ \\
-\ (\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢) & \\
\hline
٢\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٤ & \\
-\ (٢\text{س}^٢ - ٤\text{س}) & \\
\hline
٦\text{س} - ٤ & \\
-\ (٦\text{س} - ١٢) & \\
\hline
\boxed{٨} &
\end{array}
$$

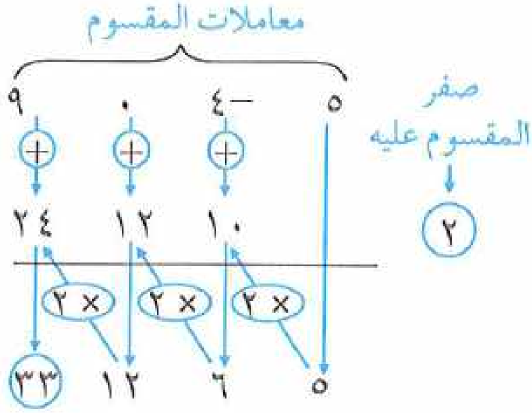
ناتج القسمة يساوي $س^٢$ + ٢س + ٦، وباقي القسمة يساوي ٨.

استُخدِمت خوارزمية القسمة الطويلة لقسمة كثيرات الحدود في المثال السابق، وتوجد طريقة أخرى مختصرة لقسمة كثير حدود على كثير حدود آخر شريطة أن يكون المقسوم عليه بصورة (س – أ)، فيما يُعرَف بطريقة القسمة التركيبية (Synthetic Division).

المثال ١

استخدم طريقة القسمة التركيبية في قسمة $ق(س) = ٥س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩$ على $هـ(س) = س - ٢$.

الحل



(١) رتب معاملات حدود المقسوم تنازليًا حسب قوى (س)، وضع صفرًا معاملًا للحد غير الموجود، واكتب صفر الاقتران (س – ٢) إلى اليمين.

(٢) أنزل معامل الحد الأول (٥)، واضربه في العدد (٢)، واكتب الناتج تحت المعامل الثاني ثم اجمع.

(٣) كرر عملية الضرب والجمع إلى آخر معامل؛ فيكون العدد الأول والثاني والثالث معاملات حدود خارج القسمة، والعدد الأخير هو الباقي.

∴ خارج القسمة هو $٥س^{٢} + ٦س + ١٢$، والباقي ٣٣.

التدريب (١)

جد خارج وباقي قسمة $ق(س) = ٦س^{٣} + ٤س + ٢$ على $هـ(س) = س - ١$ باستخدام طريقة القسمة التركيبية.

بناءً على المثال السابق، جد ما يأتي:

درجة الاقتران هـ (المقسوم عليه)، صفر المقسوم عليه، ق (٢). ماذا تلاحظ؟

يمكن تحليل الاقتران كثير الحدود ق (س) = س^{٢} − ٨س + ١٥ إلى عوامله الأولية على النحو الآتي:

س^{٢} − ٨س + ١٥ = (س − ٥) (س − ٣)

العامل الأول (س − ٥)، وصفره العدد (٥):

ق (٥) = (٥)^{٢} − ٨ × ٥ + ١٥ = صفرًا.

العامل الثاني (س − ٣)، وصفره العدد (٣):

ق (٣) = (٣)^{٢} − ٨ × ٣ + ١٥ = صفرًا.

ماذا تلاحظ؟

نظرية الباقي والعامل

باقي قسمة كثير الحدود ق على الاقتران هـ (س) = أس + ب هو ق ($\frac{-ب}{أ}$)، أ ≠ ٠، ويكون الاقتران هـ عاملًا من عوامل الاقتران ق إذا (وفقط) إذا كانت قيمة الباقي تساوي صفرًا.

المثال ٢

استخدم نظرية الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة الاقتران:

ق (س) = س^{٢} − ٥س + ٣ على الاقتران ل (س) = س + ٤

الحل

١) س + ٤ = صفر ⟵ س = −٤ (إيجاد صفر الاقتران للمقسوم عليه ل)

٢) ق (−٤) = (−٤)^{٢} − ٥ (−٤) + ٣

= ١٦ + ٢٠ + ٣ = ٣٩ (تعويض صفر المقسوم عليه في المقسوم)

فيكون باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران ل هو ٣٩. (تطبيق نظرية)

التدريب (٢)

استخدم نظرية الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران ك لكل مما يأتي:

١) ق (س) = ٤س^{٣} − س + ٥ ، ك (س) = س + ٢

٢) ق (س) = −س^{٢} + ٢س + ١ ، ك (س) = ٣س − ٩

٣) ق (س) = ٥س − ١٢ ، ك (س) = ٤س + ١

المثال ٣

إذا كان باقي قسمة الاقتران م (س) = س^{٣} − أ س + ٤ على الاقتران ل (س) = ٤ − ٢س يساوي ٦، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

ل (س)=٠ ⟵ ٤ − ٢س = صفرًا ⟵ س = ٢ (إيجاد صفر الاقتران ل(س))

فيكون الباقي = م (٢) = (٢)^{٣} − أ × ٢ + ٤ (تطبيق نظرية)

= ٨ − ٢أ + ٤

= ١٢ − ٢ أ

لكن الباقي = ٦ (استخدام المعطيات)

∴ ١٢ − ٢أ = ٦ (حل المعادلة الخطية)

−٢أ = − ٦

أ = ٣

التدريب (٣)

إذا كان باقي قسمة الاقتران ق (س) = ٣أ س^{٢} + أ س − ٦ على الاقتران ل (س) = ١ − س يساوي ١٠، فما قيمة الثابت أ ؟

المثال ٤

إذا كان باقي قسمة الاقتران ق (س) = س^{٢} + ٣س على الاقتران ل (س) = س − ب يساوي ٤، فما قيمة الثابت ب؟

الحل

ل (س) = ٠ ⟵ س − ب = ٠ ⟵ س = ب (إيجاد صفر الاقتران ل(س))

الباقي = ق (ب) = (ب)^{٢} +٣ ب (تطبيق نظرية)

لكن الباقي = ٤ (استخدام المعطيات)

∴ $ب^٢ + ٣ب = ٤$ (حل المعادلة التربيعية)

$ب^٢ + ٣ب - ٤ = ٠$

(ب + ٤) (ب - ١) = ٠

ب = -٤ ، ب = ١

التدريب (٤)

إذا كان ق (س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية، وباقي قسمة ق على الاقتران ل (س) = س - ٢ يساوي ٥، وباقي قسمة ق على الاقتران م (س) = س + ١ يساوي ٤، وق (٠) = ٣، فجد قاعدة الاقتران ق (س).

فكّر

هل يكون باقي قسمة اقتران كثير حدود على آخر دائمًا عددًا ثابتًا؟ برّر إجابتك.

المثال ٥

بيّن باستخدام نظرية الباقي والعامل أيّ الاقترانين الآتيين هو عامل من عوامل الاقتران

$ق (س) = ٢س^٢ - ٧٢$

ل (س) = س - ٦، أم م (س) = س - ١

الحل

١) لمعرفة إذا كان الاقتران ل عاملًا من عوامل الاقتران ق، يتعين إيجاد صفر الاقتران ل:

ل (س) = ٠ ⟵ س - ٦ = صفرًا ⟵ س = ٦

$ق (٦) = ٢ \times (٦)^٢ - ٧٢$

= ٧٢ - ٧٢ = صفرًا.

وبما أن ق (٦) = صفرًا، فإن الاقتران ل هو عامل من عوامل الاقتران ق.

٢) لمعرفة إذا كان الاقتران م عاملًا من عوامل الاقتران ق، يتعين إيجاد صفر الاقتران م:

م (س) = ٠ ⟵ س − ١ = صفرًا ⟵ س = ١

ق (١) = ٢ × (١)^{٢} − ٧٢

= ٢ − ٧٢

= −٧٠

وبما أن ق (١) = −٧٠ ≠ صفرًا، فإن الاقتران م ليس عاملًا من عوامل الاقتران ق.

التدريب (٥)

استخدم نظرية الباقي والعامل في تحديد إذا كان الاقتران ك عاملًا من عوامل الاقتران ق في كل مما يأتي:

١) ق (س) = ٤س^{٤} − ٢س − ٢ ، ك (س) = س − ١

٢) ق (س) = ٣ − ٦س ، ك (س) = ٢ − س

٣) ق (س) = −س^{٣} + ٢س − ١ ، ك (س) = ٢س + ٥

المثال ٦

إذا كان الاقتران م (س) = ٤ − س عاملًا من عوامل الاقتران ل (س) = أ س^{٢} − ١٥س + ٤أ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن الاقتران م هو عامل من عوامل الاقتران ل، فإن ل (٤) = صفرًا.

أ (٤)^{٢} − ١٥ (٤) + ٤أ = صفرًا.

٢٠ أ − ٦٠ = صفرًا.

أ = ٣

فكّر

هل يمكن أن يكون الاقتران الخطي عاملًا من عوامل اقتران خطي آخر؟

التدريب (٦)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة ؟

١) استخدم نظرية الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران ل لكل مما يأتي:

أ) ق (س) = ٢س^{٥} − ٤س + ١ ، ل (س) = س − ١

ب) ق (س) = − ٣س^{٢} + س − ١ ، ل (س) = ٢س − ٦

جـ) ق (س) = س − ٤ ، ل (س) = −٣س − ١

٢) إذا كان باقي قسمة الاقتران ق (س) = ٢أ س^{٣} − أ س^{٢} − ٦ على الاقتران ل (س) = س − ١ يساوي −٤ ، فجد قيمة الثابت أ.

٣) استخدم نظرية الباقي والعامل في تحديد إذا كان الاقتران م عاملًا من عوامل الاقتران ق لكل مما يأتي:

أ) ق (س) = ٤س^{٢} − س − ٢ ، م (س) = س − ٢

ب) ق (س) = − س^{٢} + س − ١ ، م (س) = ٢س + ٥

جـ) ق (س) = ١ − ٦س ، م (س) = ٥ − ٢س

٤) اختلف الطالبان أحمد وعلي بخصوص قابلية قسمة الاقتران ق (س) = − س^{٤} + ٥س^{٣} − ٣س − ١ على الاقتران م (س) = ١ − س، فقال أحمد إن ق يقبل القسمة على م، في حين قال علي إن ق لا يقبل القسمة على م. في رأيك، أيّهما أصاب في إجابته؟ برِّر إجابتك.

٥) إذا كان ق اقترانًا كثير الحدود من الدرجة الثالثة، وعوامله (س − ١) ، (٢س − ٤)، (٣ − س)، فاكتب قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ق(٠)=٤

ثانيًا تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية Factorization of Polynomials

يمثل الاقتران الآتي مساحة موقف حافلات مربع الشكل:

م (س) = (٢٥س^{٢} + ٧٠س + ٤٩) متر مربع. إذا كان طول الموقف يساوي (أس + ب) متر، فجد محيطه عندما تكون قيمة س = ٢٠ مترًا.

يمكن تحليل المقدار الجبري التربيعي أس^{٢} + ب س + جـ إلى عوامله الأولية، اعتمادًا على قيمة المميز (ب^{٢} − ٤أجـ)؛ فإذا كانت القيمة موجبةً أو صفرًا أمكن تحليل المقدار إلى مقادير جبرية خطية أولية، أمَّا إذا كانت قيمة المميز سالبةً فيكون المقدار التربيعي أوليًّا. والمثال الآتي يوضح أهمية معرفة إشارة مميز المقدار التربيعي في تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة إلى عواملها الأولية.

المثال ١

حلل الاقتران ق (س) = س^{٣} − ٨ إلى عوامله الأولية.

العامل الأولي للمقدار الجبري
مقدار جبري لا يمكن تحليله إلى مقدار جبري أقل منه درجة.

الحل

يمكن تحليل الاقتران بوصفه فرقًا بين مكعبين على النحو الآتي:

س^{٣} − ٨ = (س − ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤)

بما أن مميز العبارة التربيعية (س^{٢} + ٢س + ٤) يساوي

(٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = −١٢، فهي عبارة أولية غير قابلة للتحليل.

ولكن، هل توجد طريقة أخرى لتحليل الاقتران ق إلى عوامله الأولية؟

يمكن تحليل الاقتران ق إلى عوامله الأولية بالبحث عن صفر للاقتران (قيمة س التي تجعل قيمة الاقتران تساوي صفرًا)، والأصفار المحتملة للاقتران هي عوامل الحد الثابت (−٨) الآتية: {∓١، ∓٢، ∓٤، ∓٨}.

وبالتجريب يتبين أن ق(٢) = (٢)^{٣} − ٨ = صفرًا، وهذا يعني أن (س − ٢) هو عامل من عوامل الاقتران ق. ولإيجاد بقية العوامل، يتعين إيجاد ناتج قسمة ق (س) على (س − ٢) بإحدى طرائق القسمة:

بما أن المميز > ٠؛ لذا فإن هذا المقدار قابل للتحليل إلى عوامله الأولية:

٢س^{٢} + س − ٣ = (٢س + ٣)(س − ١)

∴ ق (س) = س (٢س + ٣)(س − ١)

التدريب (٢)

حلل الاقتران ق (س) = س^{٣} − س^{٢} + ٤س إلى عوامله الأولية.

التدريب (٣)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

وبما أن باق

(س^{٢} + ٢

س^{٣} − ٨

لاحِظ أن

المثال

حلل الاقتر

الحل

قيمة الحد

{∓١، ∓

وبالتجري

عامل من

(س + ١)

الأسئلة ؟

١) حلل كلًّا من الاقترانات الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) ق (س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٤س + ١٢$

ب) ل (س) = $٢س^٣ - ٥٤$

جـ) م (س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٦س + ٨$

د) و(س) = $س^٣ - ٩س$

٢) هل يمكن أن يكون لاقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة أربعة عوامل أولية ؟ برِّر إجابتك.

٣) أعطِ مثالًا على اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة له عاملان أوليان فقط.

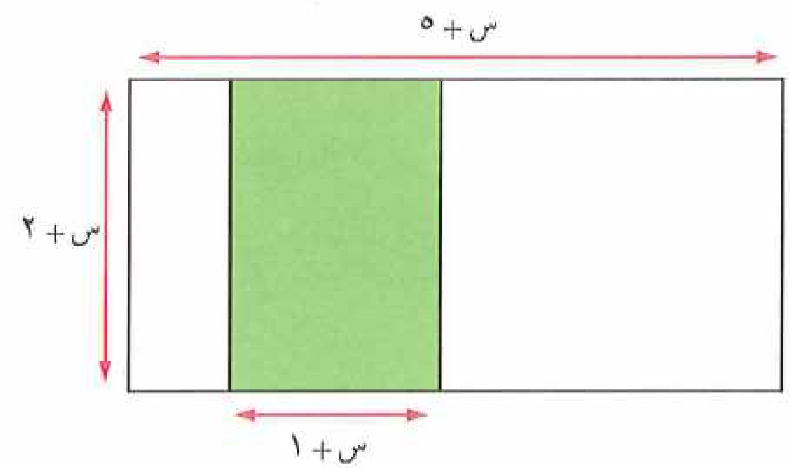
٤) إذا كان حجم متوازي مستطيلات يعطى بالاقتران ح الذي قاعدته ح(س) = $س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣$ متر مكعب، وكان بُعْده الأول (س − ١) متر، وبُعْده الثاني (س + ١) متر، فجد بُعْده الثالث بدلالة س.

التعابير النسبية
Rational Expressions

النتاجات

- تميز التعبير النسبي من غيره من التعابير الجبرية.
- تكتب صيغًا مكافئةً للتعابير النسبية.

ما نسبة المساحة المظللة إلى المساحة الكلية في الشكل الآتي؟



تأمل البسط والمقام لكلٍّ من المقادير الجبرية الآتية:

١) $\frac{س^{٣} - س}{س + ١}$ ، $س \neq -١$

٢) $\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{٢س - ٦}$ ، $س \neq ٣$

٣) $\frac{س^{٧} - ٦س}{\sqrt{٧س}}$ ، $س > ٠$

٤) $\frac{٥س^{٠,٢}}{س^{٢} + ٢س}$ ، $س \neq ٠، ٢$

لاحِظ أن البسط والمقام للمقادير الجبرية في الفرعين: (١)، و(٢) هما من كثيرات الحدود، وأن مقام المقدار الجبري في الفرع (٣) ليس كثير حدود، وأن بسط المقدار الجبري في الفرع (٤) ليس كثير حدود، فما سبب ذلك؟

يسمى كلٌّ من المقدارين الجبريين في الفرعين: (١)، و(٢) تعبيرًا نسبيًّا، ولا يُعَدُّ المقدار الجبري في الفرعين: (٣)، و(٤) تعبيرًا نسبيًّا.

يمثل الاقتران الآتي مساحة موقف حافلات مربع الشكل:

م (س) = (٢٥س^{٢} + ٧٠س + ٤٩) متر مربع. إذا كان طول الموقف يساوي (أس + ب) متر، فجد محيطه عندما تكون قيمة س = ٢٠ مترًا.

يمكن تحليل المقدار الجبري التربيعي أس^{٢} + ب س + جـ إلى عوامله الأولية، اعتمادًا على قيمة المميز (ب^{٢} − ٤أجـ)؛ فإذا كانت القيمة موجبةً أو صفرًا أمكن تحليل المقدار إلى مقادير جبرية خطية أولية، أمّا إذا كانت قيمة المميز سالبةً فيكون المقدار التربيعي أوليًّا. والمثال الآتي يوضح أهمية معرفة إشارة مميز المقدار التربيعي في تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة إلى عواملها الأولية.

المثال ١

حلل الاقتران ق (س) = س^{٣} − ٨ إلى عوامله الأولية.

العامل الأولي للمقدار الجبري
مقدار جبري لا يمكن تحليله إلى مقدار جبري أقل منه درجة.

الحل

يمكن تحليل الاقتران بوصفه فرقًا بين مكعبين على النحو الآتي:

س^{٣} − ٨ = (س − ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤)

بما أن مميز العبارة التربيعية (س^{٢} + ٢س + ٤) يساوي

(٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = −١٢، فهي عبارة أولية غير قابلة للتحليل.

ولكن، هل توجد طريقة أخرى لتحليل الاقتران ق إلى عوامله الأولية؟

يمكن تحليل الاقتران ق إلى عوامله الأولية بالبحث عن صفر للاقتران (قيمة س التي تجعل قيمة الاقتران تساوي صفرًا)، والأصفار المحتملة للاقتران هي عوامل الحد الثابت (−٨) الآتية: {∓١، ∓٢، ∓٤، ∓٨}.

وبالتجريب يتبين أن ق(٢) = (٢)^{٣} − ٨ = صفرًا، وهذا يعني أن (س − ٢) هو عامل من عوامل الاقتران ق. ولإيجاد بقية العوامل، يتعين إيجاد ناتج قسمة ق (س) على (س − ٢) بإحدى طرائق القسمة:

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	الحد الثابت
	١	٠	٠	−٨
٢		٢	٤	٨
	١	٢	٤	$\boxed{\text{صفر}}$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن:

$(س^{٢} + ٢س + ٤)$ هو عامل آخر من عوامل الاقتران ق؛ لذا فإن:

$س^{٣} - ٨ = (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)$

لاحِظ أن $(س - ٢)$، $(س^{٢} + ٢س + ٤)$ هما عاملان أوليان (تحقق من ذلك).

المثال ٢

حلل الاقتران $ق(س) = س^{٣} - ٣س - ٢$ إلى عوامله الأولية.

الحل

قيمة الحد الثابت تساوي -٢، والأصفار المحتملة للاقتران هي عوامل الحد الثابت (-٢) الآتية:

$\{\mp ١، \mp ٢\}$.

وبالتجريب يتبين أن $ق(-١) = (-١)^{٣} - ٣(-١) - ٢ =$ صفرًا، وهذا يعني أن $(س + ١)$ هو عامل من عوامل الاقتران ق. ولإيجاد بقية العوامل، يتعين إيجاد ناتج قسمة $ق(س)$ على $(س + ١)$ بإحدى طرائق القسمة:

$$
\begin{array}{rl}
 & س^{٢} - س - ٢ \\
\hline
س + ١ \; \big) & س^{٣} - ٣س - ٢ \\
- & س^{٣} + س^{٢} \\
\hline
 & -س^{٢} - ٣س - ٢ \\
- & -س^{٢} - س \\
\hline
 & -٢س - ٢ \\
- & -٢س - ٢ \\
\hline
 & \boxed{\text{صفر}}
\end{array}
$$

بما أن قيمة الباقي تساوي صفرًا، فإن:

($س^٢$ – س – ٢) هو عامل آخر من عوامل الاقتران ق.

$س^٣$ – ٣س – ٢ = (س + ١)($س^٢$ – س – ٢).

لمعرفة إذا كان المقدار ($س^٢$ – س – ٢) يحلل أم لا، يتعين إيجاد قيمة المميز:

المميز = $ب^٢$ – ٤ × أ × جـ

= $(-١)^٢$ – ٤ × ١ × –٢ = ٩ > ٠

أي إن $س^٢$ – س – ٢ ليس عاملًا أوليًّا؛

$س^٢$ – س – ٢ = (س + ١)(س – ٢)

∴ ق (س) = $س^٣$ – ٣س – ٢ = (س + ١)(س – ٢)(س + ١)

= $(س + ١)^٢$(س – ٢)

التدريب (١)

حلل الاقترانين الآتيين إلى عواملهما الأولية:

١) ق (س) = $س^٣$ + $س^٢$ – ١٢ ٢) ل (س) = $س^٣$ – ٦٤

المثال ٣

حلل الاقتران ق (س) = ٢$س^٣$ + $س^٢$ – ٣س إلى عوامله الأولية.

الحل

لاحِظ أن الحد الثابت في الاقتران ق يساوي صفرًا؛ لذا فإنه يُنظر إلى س بوصفها عاملًا مشتركًا.

∴ الاقتران ق (س) = ٢$س^٣$ + $س^٢$ – ٣س = س(٢$س^٢$ + س – ٣).

والآن، يتعين إيجاد المميز للمقدار ٢$س^٢$ + س – ٣:

المميز = $ب^٢$ – ٤ أجـ

= $(١)^٢$ – ٤ × ٢ × (–٣) = ٢٥ > ٠

بما أن المميز > ٠؛ لذا فإن هذا المقدار قابل للتحليل إلى عوامله الأولية:

$٢س^٢ + س - ٣ = (٢س + ٣)(س - ١)$

$\therefore$ ق (س) = س (٢س + ٣)(س - ١)

التدريب (٢)

حلل الاقتران ق (س) = $س^٣ - س^٢ + ٤س$ إلى عوامله الأولية.

التدريب (٣)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة ؟

١) حلل كلًّا من الاقترانات الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) ق (س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٤س + ١٢$

ب) ل (س) = $٢س^٣ - ٥٤$

جـ) م (س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٦س + ٨$

د) و(س) = $س^٣ - ٩س$

٢) هل يمكن أن يكون لاقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة أربعة عوامل أولية ؟ برِّر إجابتك.

٣) أعطِ مثالًا على اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة له عاملان أوليان فقط.

٤) إذا كان حجم متوازي مستطيلات يعطى بالاقتران ح الذي قاعدته ح(س) = $س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣$ متر مكعب، وكان بُعْده الأول (س − ١) متر، وبُعْده الثاني (س + ١) متر، فجد بُعْده الثالث بدلالة س.

الفصل الثاني

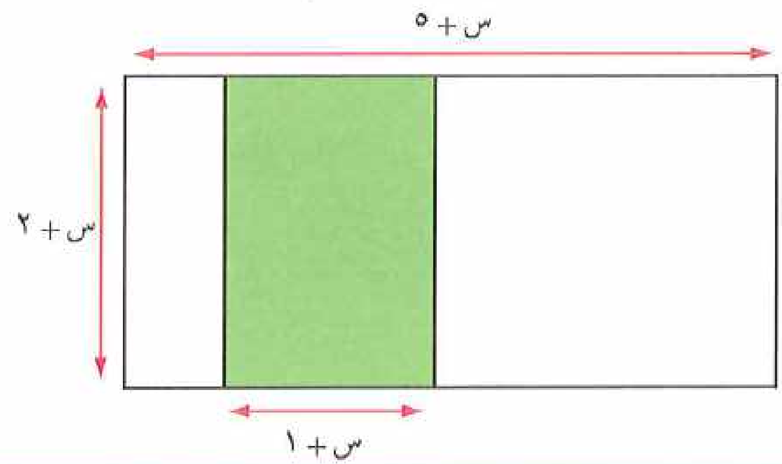
التعابير النسبية

Rational Expressions

النتاجات

- تميز التعبير النسبي من غيره من التعابير الجبرية.
- تكتب صيغًا مكافئةً للتعابير النسبية.

ما نسبة المساحة المظللة إلى المساحة الكلية في الشكل الآتي؟



تأمل البسط والمقام لكلٍّ من المقادير الجبرية الآتية:

١) $\frac{س^٣ - س}{س + ١}$ ، س $\neq$ −١

٢) $\frac{س^٢ - ٤س + ٣}{٢س - ٦}$ ، س $\neq$ ٣

٣) $\frac{س^٧ - ٦س}{\sqrt{٧س}}$ ، س $>$ ٠

٤) $\frac{٥س^{٠,٢}}{س^٢ + ٢س}$ ، س $\neq$ ٠، ٢

لاحِظ أن البسط والمقام للمقادير الجبرية في الفرعين: (١)، و(٢) هما من كثيرات الحدود، وأن مقام المقدار الجبري في الفرع (٣) ليس كثير حدود، وأن بسط المقدار الجبري في الفرع (٤) ليس كثير حدود، فما سبب ذلك؟

يسمى كلٌّ من المقدارين الجبريين في الفرعين: (١)، و(٢) تعبيرًا نسبيًا، ولا يُعَدُّ المقدار الجبري في الفرعين: (٣)، و(٤) تعبيرًا نسبيًا.

يمكن كتابة التعبير النسبي الذي يحوي عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه بصيغة أخرى مكافئة، في أبسط صورة، عن طريق تحليل كلٍّ من البسط والمقام إلى عوامله الأولية، واختصار العوامل المتشابهة.

المثال ١

اكتب صيغًا مكافئةً لكل تعبير نسبي مما يأتي في أبسط صورة:

١) $\dfrac{س^{٢} - ٥س + ٤}{س^{٢} - ١٦}$ ٢) $\dfrac{س^{٣} - ٨}{٢س - ٤}$

الحل

١) $\dfrac{س^{٢} - ٥س + ٤}{س^{٢} - ١٦} = \dfrac{(س - ١)\cancel{(س - ٤)}}{\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)} = \dfrac{س - ١}{س + ٤}$

لاحظِ أن البسط والمقام هما من العوامل الأولية التي لا يمكن تحليلها؛ لذا يكون التعبير النسبي في أبسط صورة.

٢) $\dfrac{س^{٣} - ٨}{٢س - ٤} = \dfrac{\cancel{(س - ٢)}(س^{٢} + ٢س + ٤)}{٢\cancel{(س - ٢)}} = \dfrac{س^{٢} + ٢س + ٤}{٢}$

لاحظِ أن البسط هو عبارة تربيعية قيمة المميز فيها سالبة؛ لذا فهي عامل أولي لا يمكن تحليله.

التدريب (١)

اكتب صيغًا مكافئةً لكل تعبير نسبي مما يأتي في أبسط صورة:

١) $\dfrac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٤}$ ٢) $\dfrac{٢٧ - س^{٣}}{٦ - ٢س}$

المثال (٢)

اكتب صيغًا مكافئةً لكل تعبير نسبي مما يأتي في أبسط صورة:

١) $\frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٢س}{س^٢ - ١}$ ٢) $\frac{س^٢ + ٥}{٤س}$

الحل

١) $\frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٢س}{س^٢ - ١} = \frac{س(س - ٢)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{(س - ١)}(س + ١)}$

$= \frac{س(س - ٢)}{(س + ١)}$

٢) لاحِظ أن المقدار (س^٢ + ٥) في البسط هو عبارة تربيعية أولية لأن قيمة المميز فيها سالبة، كذلك المقدار (٤س) في المقام هو عامل أولي، وهذا يعني أن التعبير النسبي في أبسط صورة.

التدريب (٢)

اكتب صيغًا مكافئةً لكلٍّ من التعابير النسبية الآتية في أبسط صورة:

١) $\frac{س^٢ - ٤س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ٢) $\frac{س^٣ - س^٢ - ٧س + ٧}{س^٢ + س - ٢}$

٣) $\frac{س - ٢}{س^٣ - ٣س^٢ + ٤س - ٤}$ ٤) $\frac{س^٣ + ٢س^٢ + ١}{س + ٣}$

٥) $\frac{س^٢ - س - ٢}{٢ - س}$ ٦) $\frac{س - ٢}{٤ - س^٢}$

الأسئلة

١) أيّ التعابير الآتية يُعَدُّ تعبيرًا نسبيًّا، مُبيِّنًا السبب:

أ) $\frac{٥س^{٢} - ١٢س}{٢س^{٣} + ٤}$

ب) $\frac{س - ٢}{س + ٣}$

جـ) $\frac{س^{٣} + س^{-٠,٨}}{٤ + س}$

د) $\frac{٢س}{\sqrt{س^{٣}} + ٣}$

٢) اكتب صيغًا مكافئةً لكلٍّ من التعابير النسبية الآتية في أبسط صورة:

أ) $\frac{س^{٣} + ٢س}{س}$

ب) $\frac{(س - ٣)(س + ٢)}{٣س^{٢} - ١٢}$

جـ) $\frac{٢س - ٨}{٦٤ - س^{٣}}$

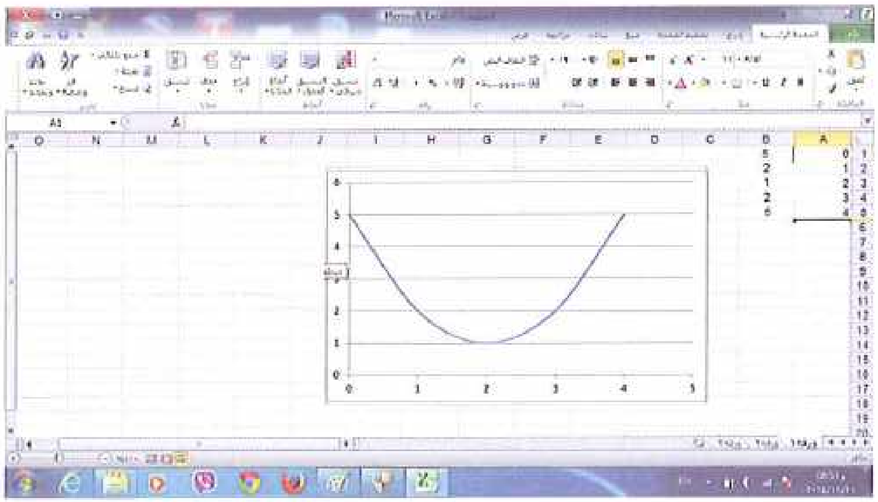
د) $\frac{س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

رسم كثيرات الحدود

Graphing Polynomials

النتاجات

- تستخدم التكنولوجيا في تمثيل اقتران كثير الحدود.
- تتعرف خصائص الاقترانات كثيرات الحدود.



المثال ١

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} − ٤س + ٥ يدويًا، ثم ارسمه باستخدام برمجية إكسل (Excel).

الحل

رسم منحنى الاقتران يدويًا

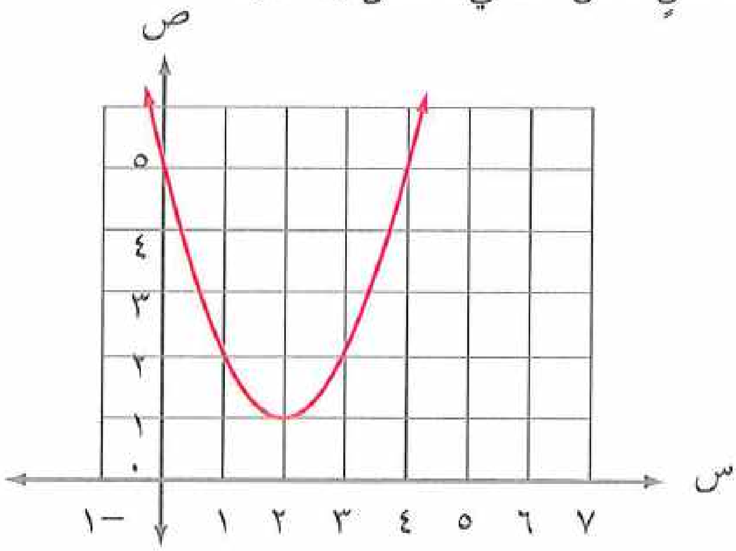
الاقتران ق كثير حدود من الدرجة الثانية، ومنحناه يمثل قطعًا مكافئًا، والإحداثي السيني لرأس القطع هو: $\frac{-\text{معامل س}}{٢ \times \text{معامل س}^{٢}}$، ويساوي:

$$\frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = ٢$$

(١) أنشئ جدولًا لقيم س و ص الناتجة من تعويض قيم س في الاقتران ق، بحيث يكون الإحداثي السيني لرأس القطع في المنتصف كما في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣	٤
ص = ق (س)	٥	٢	١	٢	٥

(٢) ارسم المستوى الإحداثي على ورقة الرسم البياني، ثم مثِّل الأزواج المرتبة عليه، ثم صِل بينها بخط منحنٍ أملس كما في الشكل (١-١).

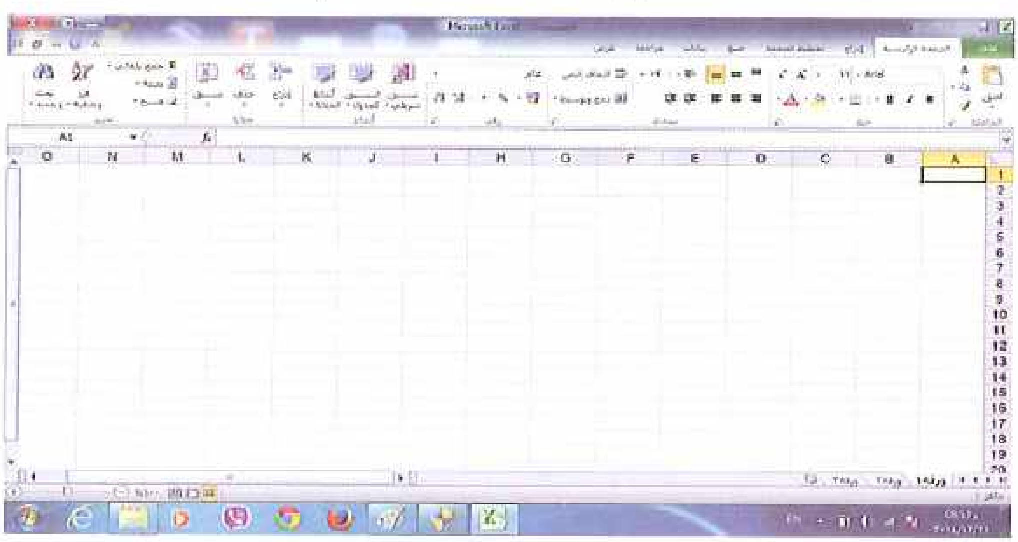


الشكل (١-١).

رسم منحنى الاقتران باستخدام برمجية إكسل (Excel)

يمكن استخدام برمجية إكسل لرسم الاقتران ق (س) = س^{٢} − ٤س + ٥، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

(١) افتح برمجية إكسل من قائمة البرامج، فتظهر النافذة كما في الشكل (١-٢).



الشكل (١-٢).

(٢) اختر عمودًا (ليكن العمود A)، وضع المؤشر في الخلية (A1)، واكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (٠)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A2)، واكتب القيمة الثانية للمتغير س وهي (١).

(٣) ظلِّل الخليتين، ثم اسحب المؤشر إلى الأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س وهي (٤) كما في الشكل (١-٣).

	A
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

الشكل (١-٣).

(٤) ضع المؤشر في الخلية (B1)، واكتب فيها قاعدة الاقتران على النحو الآتي:

$=(A1^2-4*A1+5)$،

ثم اضغط على زر الإدخال، فيظهر الناتج في الخلية، ثم انسخ محتوى الخلية إلى بقية الخلايا في العمود (B).

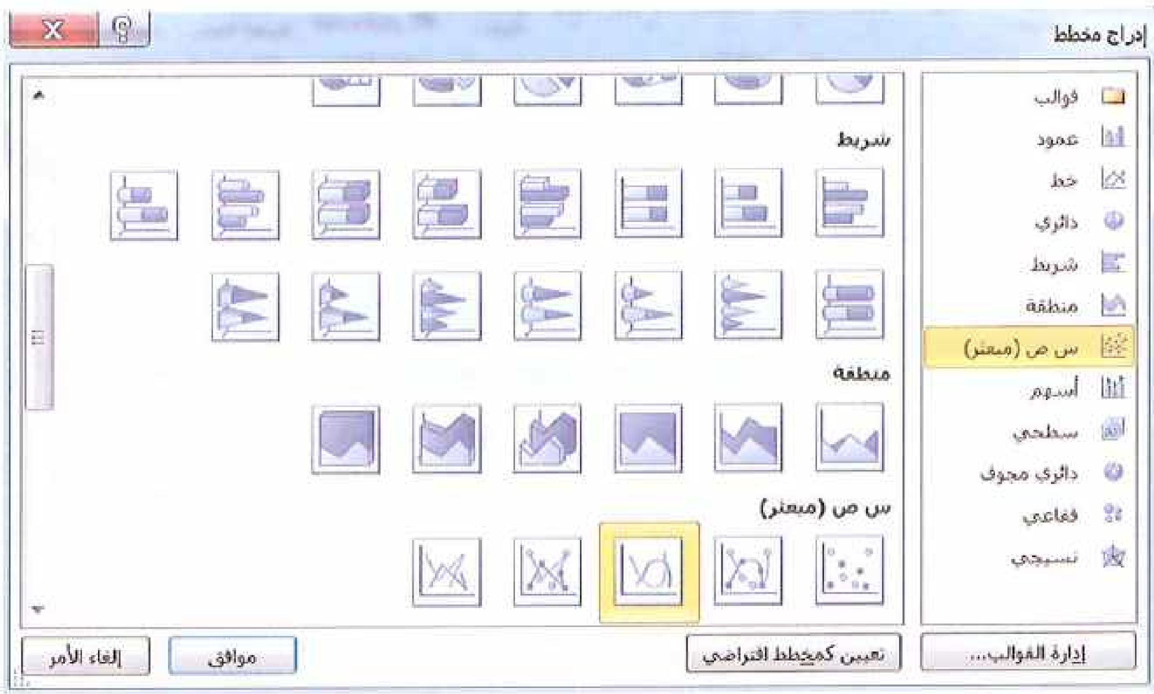
(٥) ظلِّل العمودين (A)، و(B)، ثم اختر خيار (إدراج مخطط)، ومنه اختر (س ص مبعثر) كما في الشكل (١-٤).

تعلّم

A1 = س في قاعدة الاقتران.

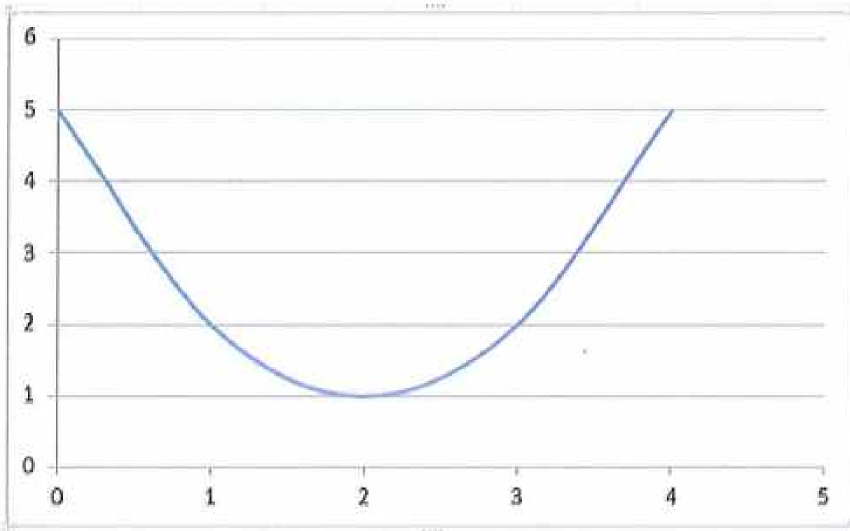
إشارة ^ تعني أس.

إشارة * تعني الضرب بالنسبة إلى العملية.



الشكل (١-٤).

(٦) انقر زر موافق (OK)، فيظهر التمثيل البياني للاقتران كما في الشكل (١ – ٥).



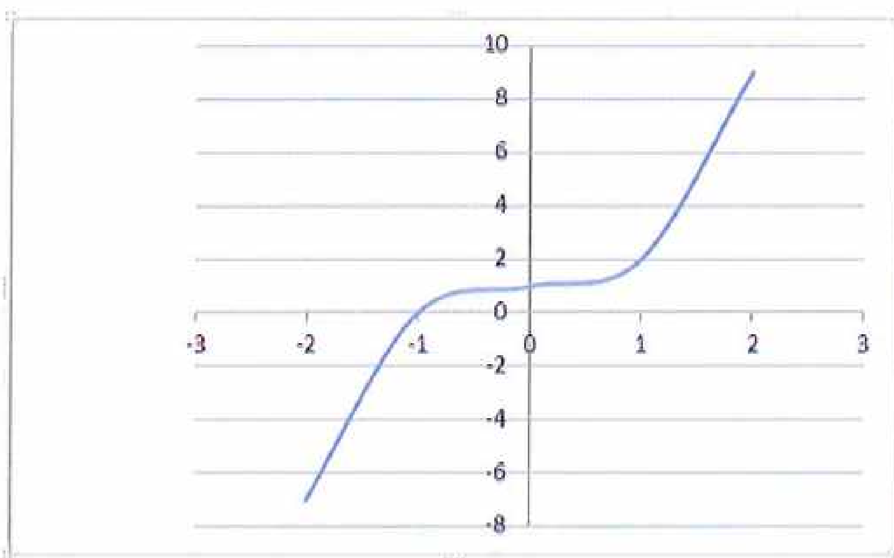
الشكل (١–٥).

المثال ٢

استخدم برمجية إكسل في رسم منحنى الاقتران ق (س) = س^{٣} + ١

الحل

باتباع الخطوات السابقة في المثال رقم (١)، وكتابة المعادلة (A1 ^ 3 + 1) = في الخلية (B1)، يكون التمثيل البياني للاقتران ق كما في الشكل (١ – ٦).



الشكل (١–٦).

التدريب (١)

استخدم برمجية إكسل في رسم الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = س^{٢} − ١

٢) ل (س) = س^{٣} − ٦س + ٨

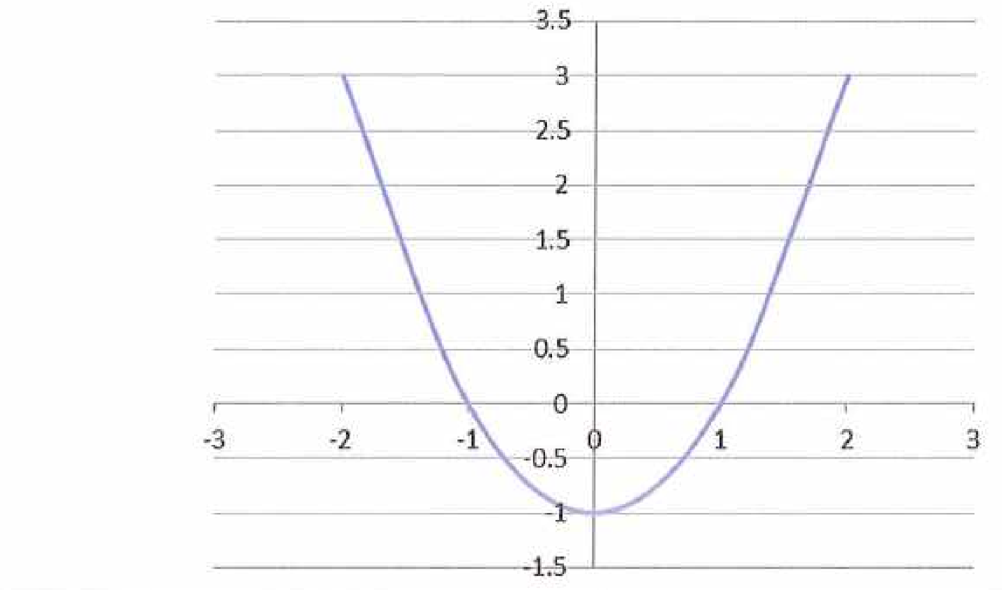
٣) ع (س) = ٢س − ٦

٤) م (س) = − ٥

يتميز الاقتران كثير الحدود بخصائص عدَّة يمكن استنتاجها من المثال الآتي.

المثال ٣

يمثل الشكل (١−٧) منحنى كثير الحدود ق (س) = س^{٢} − ١، تأمله، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:



الشكل (١−٧).

١) ما مجال الاقتران ق؟

٢) ما مدى الاقتران ق؟

٣) أين يقطع الاقتران ق محور الصادات؟ ما علاقة ذلك بالحد الثابت من الاقتران ق؟

٤) أين يقطع الاقتران ق محور السينات؟ ماذا تسمى هذه القيم؟

٥) هل منحنى الاقتران ق متصل (أي يمكن رسمه من دون انقطاع)؟

الحل

١) مجال الاقتران ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

٢) مدى الاقتران ق هو ص ≥ −١، لماذا؟

٣) يقطع منحنى الاقتران ق محور الصادات عند ص = −١، ويحدث ذلك عند تعويض س بالعدد صفر في قاعدة الاقتران ق؛ أي إن:

ق (٠) = − ١، وهو نفسه الحد الثابت في الاقتران ق.

٤) يقطع الاقتران ق محور السينات عندما س = ١، س = −١، وتسمى هذه القيم أصفارًا للاقتران، ويمكن إيجادها عن طريق مساواة الاقتران ق بالصفر، وحل المعادلة الناتجة.

٥) منحنى الاقتران ق متصل على مجاله.

التدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران ل (س) = س^{٢} + ٢س − ٥ باستخدام برمجية إكسل، ثم استخدم الرسم لتحديد خصائصه.

الأسئلة ؟

١) استخدم برمجية إكسل في رسم الاقترانات الآتية، وإيجاد مجالها، ومداها، والمقطع السيني، والمقطع الصادي لكلٍّ منها:

أ) ق (س) = س^{٣} – ١

ب) ك (س) = ١٢٥ – س^{٣}

جـ) ل (س) = ٢س^{٢} – س + ١

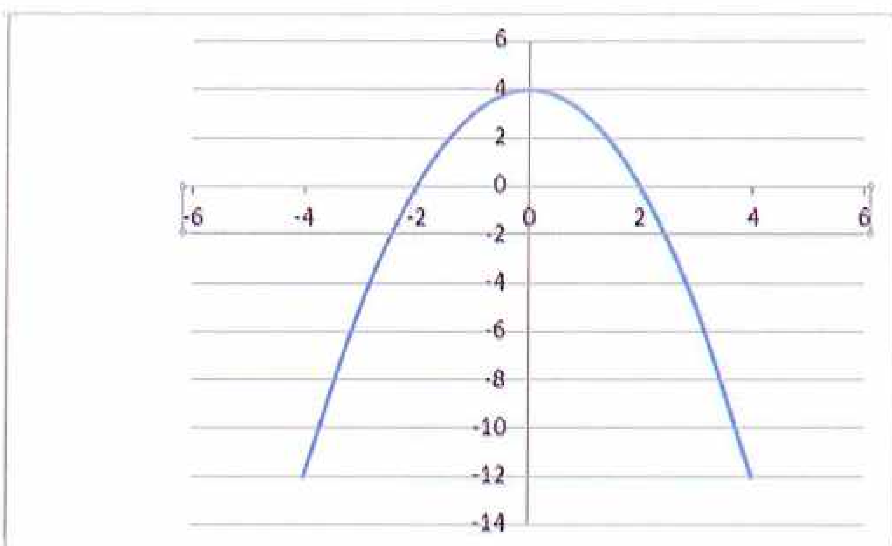
د) ن (س) = ٤س^{٣} – ٣س^{٢} – س + ١

هـ) ع (س) = ٧ – س

و) م (س) = – ٢

٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل، بُعْداها (٢س + ١) متر، (س + ٣) متر. ارسم الاقتران الذي يمثل مساحتها، والاقتران الذي يمثل محيطها باستخدام برمجية إكسل.

٣) يمثل الشكل (١ – ٨) رسمًا بيانيًا لمنحنى الاقتران ع (س) = ٤ – س^{٢}، ادرسه، ثم حدد خصائصه.



الشكل (١–٨).

المتباينات غير الخطية

NonLinear Inequalities

النتاجات

- تحل متباينة غير خطية ذات متغير واحد.

وجد صاحب محل لبيع الحقائب المدرسية أن الربح الناتج من بيع س من الحقائب يعطى بالاقتران: ر(س) = $س^٢ - ١٠$س دينار. ما عدد الحقائب اللازم بيعها حتى يحقق صاحب المحل ربحًا؟

تعرفت سابقًا أن المتباينة هي جملة مفتوحة تحوي أحد الرموز الآتية: (< ، > ، ≥ ، ≤)، وتعرفت أيضًا كيفية حل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد مثل (٢س + ٤ ≥ ٦)، وستتعرف في هذا الدرس حل المتباينة غير الخطية (من الدرجة الثانية) ذات المتغير الواحد مثل: ($س^٢$ − ١١س + ٣٠ ≥ ٠)، و($س^٢$ − ٧س > ٠).

يمكن حل متباينة غير خطية ذات متغير واحد باتباع الخطوات الآتية:

١) كتابة المعادلة المرافقة للمتباينة بصورتها القياسية:

الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي: أ$س^٢$ + ب س + جـ = ٠

وللمعادلة التكعيبية هي: أ$س^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س + د = ٠

٢) تحليل العبارة التربيعية أو التكعيبية إلى عواملها الأولية، ثم دراسة إشارة كل عامل على حِدَة، يلي ذلك دراسة إشارة المعادلة كلها، وتحديد الفترة التي تحقق حل المتباينة.

المثال ١

جد مجموعة الحل لكلٍّ من المتباينات الآتية:

١) $س^٢$ − ٧س + ١٠ ≥ صفر

٢) $س^٢$ − ٦س + ٩ > صفر

٣) $س^٢$ + ٢س > − ٣

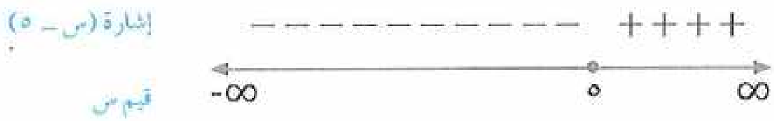
الحل

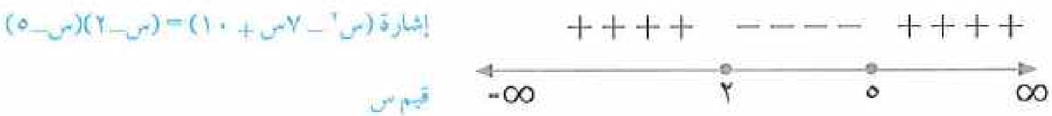
١) س^{٢} – ٧س + ١٠ =٠

قيمة المميز (ب^{٢} – ٤أجـ) = (– ٧)^{٢} – ٤ × ١ × ١٠ = ٩ > ٠

∴ يمكن تحليل العبارة التربيعية س^{٢} – ٧س + ١٠ إلى عواملها الأولية:

س^{٢} – ٧س + ١٠ = (س – ٢)(س – ٥)، ثم دراسة إشارة (س – ٢)، و(س – ٥)؛ كلٌّ على حِدَة، ثم دراسة الإشارة لحاصل ضربهما: (س^{٢} – ٧س + ١٠).





لاحِظ أن س^{٢} – ٧س + ١٠ ≤ صفر عندما س ∈ [٢، ٥].

∴ مجموعة حل المتباينة هي الفترة [٢، ٥].

٢) س^{٢} – ٦س + ٩ = صفرًا.

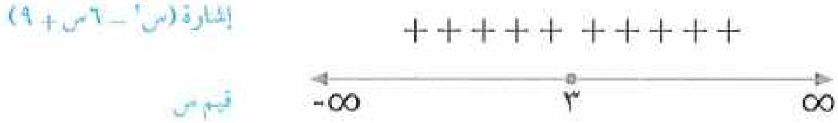
بحساب مميز العبارة التربيعية (ب^{٢} – ٤ × أ × جـ)، فإن قيمته تساوي:

(–٦)^{٢} – ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ العبارة التربيعية س^{٢} – ٦س + ٩ قابلة للتحليل، ولها جذران متساويان، وتكون إشارة الاقتران هي إشارة معامل س^{٢} نفسها:

س^{٢} – ٦س + ٩ = (س – ٣)(س – ٣) = (س – ٣)^{٢}

بما أن إشارة معامل س^{٢} موجبة، فإن إشارة س^{٢} – ٦س + ٩ أيضًا موجبة.



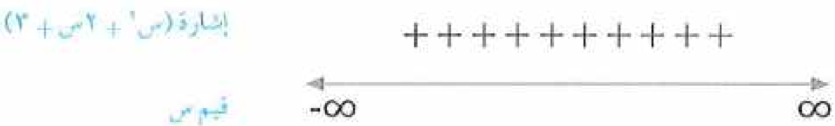
لاحِظ أن س^{٢} − ٦س + ٩ ≥ ٠ لقيم س جميعها، ولهذا فإن مجموعة حل المتباينة
س^{٢} − ٦س + ٩ < ٠ هي ∅.

٣) س^{٢} + ٢س > − ٣ ⟵ س^{٢} + ٢س + ٣ > ٠

س^{٢} + ٢س + ٣ = ٠

بما أن مميز المعادلة = − ٨ (سالب)، فإن العبارة التربيعية س^{٢} + ٢س + ٣ غير قابلة للتحليل، وتكون إشارتها مماثلة لإشارة معامل س^{٢}.

لاحِظ أن إشارة معامل س^{٢} موجبة، ولهذا فإن إشارة س^{٢} + ٢س + ٣ أيضًا موجبة.



يتبين مما سبق أن س^{٢} + ٢س + ٣ > ٠ لقيم س جميعها، ولهذا فإن مجموعة حل المتباينة هي الفترة (−∞، ∞)، أو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

التدريب (١)

جد مجموعة الحل لكلٍّ من المتباينات الآتية:

١) ٢س^{٢} − ٢س ≥ س^{٢} − ٨

٢) س^{٢} > ٥س − ٦

٣) ٤س + ١ ≥ − ٤س^{٢}

التدريب (٢)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة ؟

١) أعطِ مثالًا على متباينة غير خطية ذات متغير واحد.

٢) إذا كان $س^٣ + ١ \geq س^٢ + ١٩$، هل $س = ٣$ تنتمي إلى مجموعة حل هذه المتباينة؟

٣) اكتب المتباينات الآتية بالصورة القياسية:

أ) $٥س^٢ - س \geq ١٠$

ب) $س^٣ \leq ٩س + ١$

جـ) $س^٢ + ٢س \geq س + ٢$

٤) جد مجموعة الحل لكلٍّ من المتباينات الآتية:

أ) $س^٢ - ٩س + ٢٠ >$ صفر

ب) $س^٢ - ٨س \geq -١٦$

جـ) $س^٢ + ٤س > -٦$

٥) وجد محل أحذية رياضية أن اقتران الإيراد الكلي الناتج من بيع س من القطع هو:

$د(س) = ٤س^٢ + ٦س$،

وأن اقتران التكلفة الكلية هو:

$ك(س) = س^٢ + ١٢س$

جد عدد القطع التي يمكن للمحل أن يبيعها ليحقق ربحًا.

أسئلة الوحدة

١) استخدم نظرية الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة الاقتران ل على الاقتران م لكلٍّ مما يأتي:

أ) ل (س) = ٢س^{٤} − س − ٣ ، م (س) = س + ١

ب) ل (س) = − ٣س^{٣} + ٣س − ٤ ، م (س) = ٣س − ٩

٢) استخدم نظرية الباقي والعامل في تحديد إذا كان الاقتران م عاملًا من عوامل الاقتران ق لكلٍّ مما يأتي:

أ) ق (س) = ٢س^{٢} − ٤س + ٢ ، م (س) = س − ٢

ب) ق (س) = − ٢س^{٣} + ٥س − ٣ ، م (س) = ٢س + ٦

٣) اكتب قاعدة اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة إذا كانت عوامله:

(س − ٢) ، (٣س − ٤) ، (٣ + س).

٤) اكتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية إذا كانت عوامله (س−١)، (س+٣)، علمًا بأن ق(٠) = −٦

٥) حلِّل كلًّا من الاقترانات الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) ق (س) = س^{٣} − س^{٢} − س + ١

ب) ل (س) = ٢س^{٣} − ١٦

جـ) م (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤

٦) أيّ التعابير الآتية يُعَدُّ تعبيرًا نسبيًّا، مُبيِّنًا السبب:

أ) $\frac{٢س^{-٤٫٠} - س}{٢س + ٤}$ ، س ≠ −٢

ب) $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ ، س ≠ −٣

٧) اكتب صيغًا مكافئةً لكلٍّ من التعابير النسبية الآتية في أبسط صورة:

أ) $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ١٨}{س^{٢} - ٧س + ١٢}$

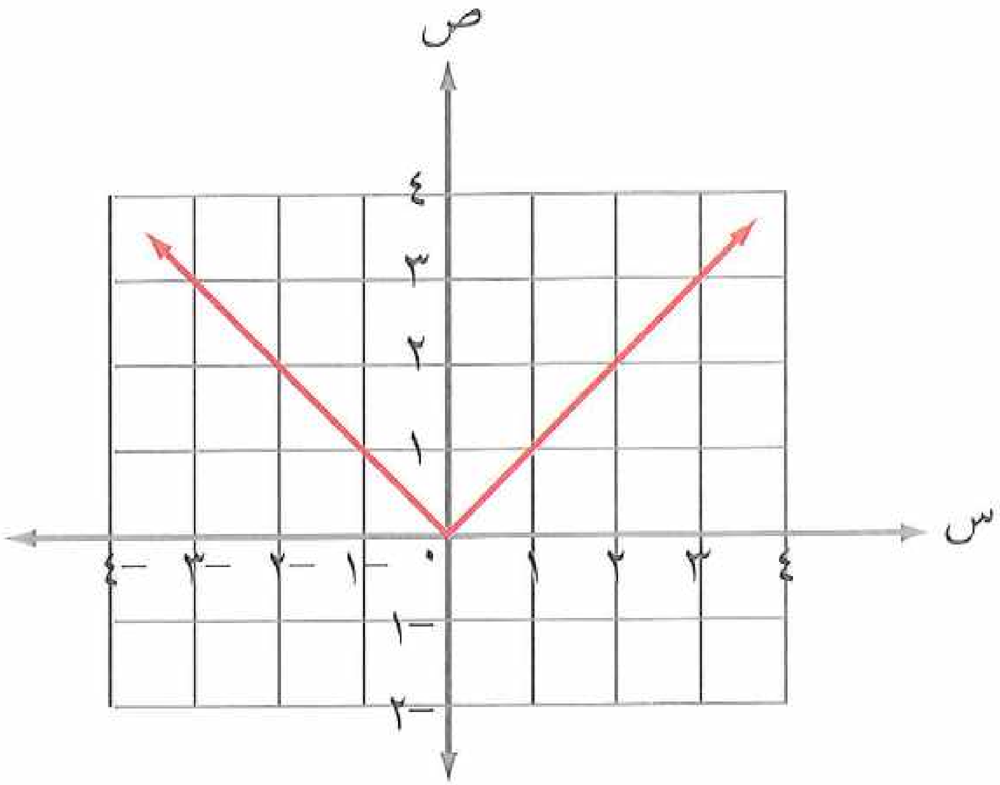
الوحدة الثانية ٢

الاقترانات

(٨

تدخل الرياضيات في دراسة الكثير من العلوم، مثل: الفيزياء، والكيمياء، والطب، والهندسة، والعلوم الإنسانية، ويستفاد منها عن طريق الربط بين المتغيرات وفق قواعد وعلاقات تساعد على التنبؤ بحدث قادم، ويطلق على هذه القواعد اسم الاقترانات التي تُعَدُّ من موضوعات الرياضيات المهمة؛ نظرًا إلى حاجة العلوم الأخرى إليها.

(٩



(١٠

(١١

أسئلة الوحدة

١) استخدم نظرية الباقي والعامل في إيجاد باقي قسمة الاقتران ل على الاقتران م لكلٍّ مما يأتي:

أ) ل (س) = ٢س^{٤} − س − ٣ ، م (س) = س + ١

ب) ل (س) = − ٣س^{٣} + ٣س − ٤ ، م (س) = ٣س − ٩

٢) استخدم نظرية الباقي والعامل في تحديد إذا كان الاقتران م عاملًا من عوامل الاقتران ق لكلٍّ مما يأتي:

أ) ق (س) = ٢س^{٢} − ٤س + ٢ ، م (س) = س − ٢

ب) ق (س) = − ٢س^{٣} + ٥س −٣ ، م (س) = ٢س + ٦

٣) اكتب قاعدة اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة إذا كانت عوامله:

(س − ٢) ، (٣س − ٤) ، (٣ + س).

٤) اكتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية إذا كانت عوامله (س− ١)، (س+٣)، علمًا بأن ق(٠) = −٦

٥) حلّل كلًّا من الاقترانات الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) ق (س) = س^{٣} − س^{٢} − س + ١

ب) ل (س) = ٢س^{٣} − ١٦

جـ) م (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤

٦) أيّ التعابير الآتية يُعَدُّ تعبيرًا نسبيًا، مُبيّنًا السبب:

أ) $\frac{\text{٢س}^{-٠{,}٤} - \text{س}}{\text{٢س} + ٤}$ ، س ≠ −٢

ب) $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ ، س ≠ −٣

٧) اكتب صيغًا مكافئةً لكلٍّ من التعابير النسبية الآتية في أبسط صورة:

أ) $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ١٨}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}$

ب) $\frac{٢س - ٤}{س^٣ + س^٢ - ١٢}$

جـ) $\frac{٢ - س}{س^٢ - ٧س + ١٠}$

٨) استخدم برمجية إكسل في رسم الاقترانات الآتية:

أ) ق (س) = $س^٣$

ب) ل (س) = $س^٢$ − ٢س

جـ) ع (س) = ٥ − س

د) هـ (س) = $س^٣$ − ٨

٩) جد مجموعة الحل لكل متباينة مما يأتي:

أ) $س^٢$ − س + ٥ > صفر

ب) $س^٢$ − س ≥ ٦

جـ) $س^٢$ − ٢س ≤ −١

١٠) تقدم شركة مبيعات للأجهزة الطبية لمندوبيها عرضين للأجور الشهرية، فإذا كان عدد القطع التي يبيعها المندوب هو س من القطع شهريًا، فإن العرض الأول يعطى بالاقتران:

$ع_١$ (س) = $س^٢$ − ٢٠س + ١٥٠ دينار

أمّا العرض الثاني فيعطى بالاقتران:

$ع_٢$ (س) = ٧س + ١٠٠ دينار

متى يكون العرض الأول أفضل من العرض الثاني؟

١١) يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) باقي قسمة ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س على ل (س) = ٢س − ٤ هو:

أ) ٢٢ ب) ١٠

جـ) ٢ د) −٤

(٢) المقدار س − ١ هو عامل من عوامل الاقتران:

أ) ق(س) = س^{٣} − ١ ب) ق(س) = س^{٣} + ١

جـ) ق(س) = س^{٢} + ١ د) ق(س) = س^{٣} + ٨

(٣) العوامل الأولية للاقتران ق (س) = س^{٣} − ١ هي:

أ) (س − ١) (س^{٢} − ٢) ب) (س − ١) (س^{٢} + س + ١)

جـ) س (س^{٢} − ٢) د) س (س − ١)

(٤) حل المتباينة س^{٢} −٢ س $\geq$ ٣ هو:

أ) (−١، ٣) ب) [−١، ٣]

جـ) [٣، ∞) د) (−∞، −١] ∪ [٣، ∞)

(٥) قيمة س التي تمثل أحد حلول المتباينة س^{٢} + س > ٢ هي:

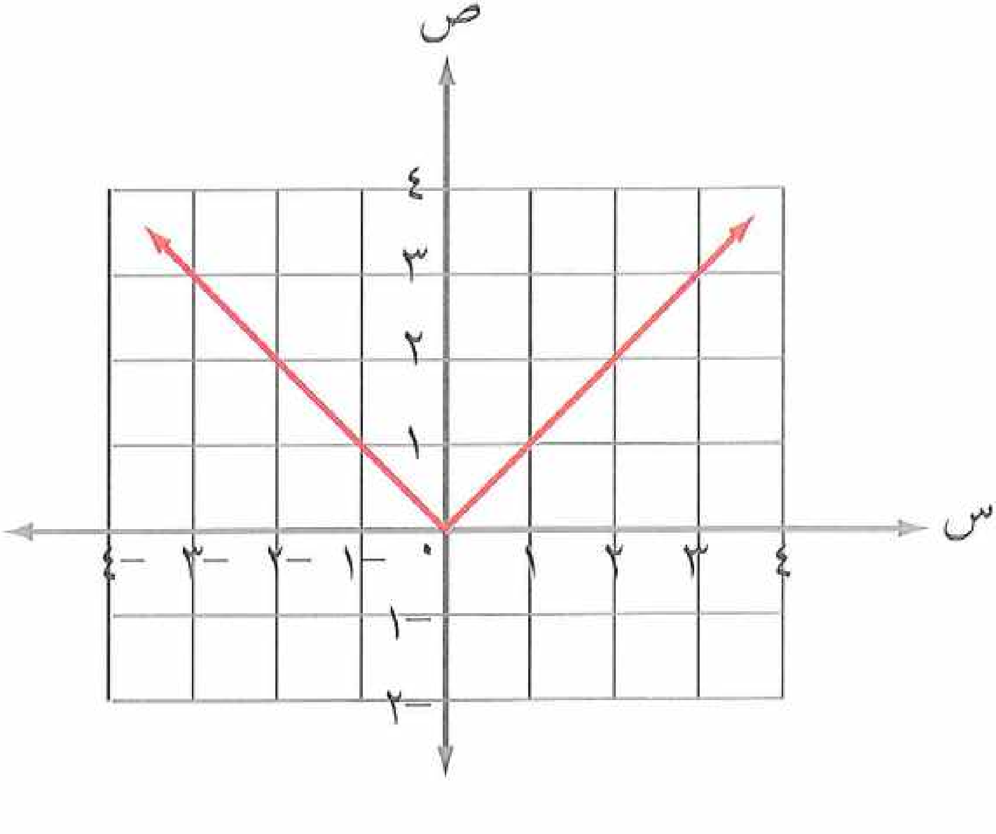
أ) ١ ب) صفر

جـ) −١ د) ٢

الوحدة الثانية ٢

الاقترانات

تدخل الرياضيات في دراسة الكثير من العلوم، مثل: الفيزياء، والكيمياء، والطب، والهندسة، والعلوم الإنسانية، ويستفاد منها عن طريق الربط بين المتغيرات وفق قواعد وعلاقات تساعد على التنبؤ بحدث قادم، ويطلق على هذه القواعد اسم الاقترانات التي تُعَدُّ من موضوعات الرياضيات المهمة؛ نظرًا إلى حاجة العلوم الأخرى إليها.



Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف بعض الاقترانات، مثل:
  - الاقترانات الحقيقية.
  - الاقترانات المتشعبة.
  - اقترانات القيمة المطلقة.
- تمثيل الاقترانات المتشعبة واقترانات القيمة المطلقة بيانيًّا.
- إظهار فهم لعملية تركيب الاقترانات واستخدامها في إيجاد الاقتران العكسي لاقتران خطي.
- استخدام الاقترانات الخاصة في النمذجة وحل المسائل في مواقف حياتية عدّة، مُبرِّرًا الحل.

الاقتران الحقيقي

Real Function

النتاجات

- تجد المجال والمدى لبعض الاقترانات الحقيقية، وتمثلها بيانيًّا.

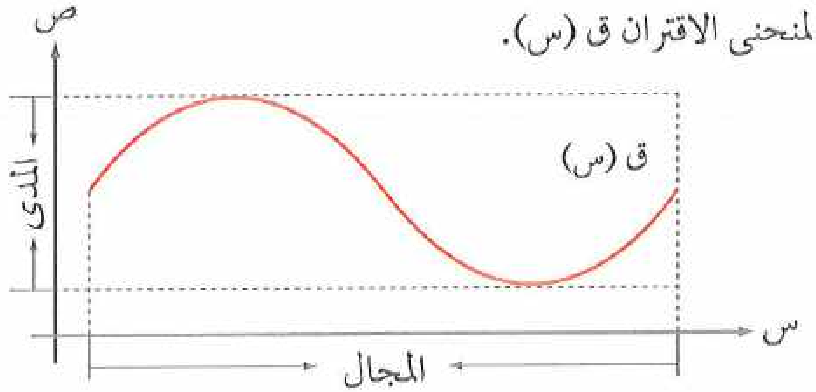
يتحرك جسيم في خط مستقيم، بحيث تعطى سرعته وفق العلاقة الآتية:

ع(ن) = $\sqrt{\text{٢ ن} - \text{٦}}$ م/ث، حيث: ن: الزمن بالثواني.

ع: سرعة الجسيم.

كيف يمكن تحديد مجال العلاقة ع (ن)؟

يطلق على مجموعة الأعداد التي يمكن تعويضها بدل س في أيّ اقتران اسم مجال الاقتران، في حين تعرف مجموعة الأعداد الناتجة من التعويض (أي قيم ص) باسم مدى الاقتران. والشكل (٢-١) يمثل المجال والمدى لمنحنى الاقتران ق (س).



المثال ١

يمثل الجدول الآتي بعض قيم الاقتران ق (س)= س^{٢} + ١

س	٠	١	٢	٣
ق (س)	١	٢	٥	١٠

الحل

لاحظ أن مجموعة الأعداد: { ٠، ١، ٢، ٣ } ∋ مجال الاقتران ق،

وأن مجموعة الأعداد: { ١، ٢، ٥، ١٠ } ∋ مدى الاقتران ق.

المثال ٢

إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٢س + ١ ، فارسم منحنى الاقتران ق، مُحدِّدًا مجاله ومداه.

الحل

الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ هو:

$$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢} = -١$$

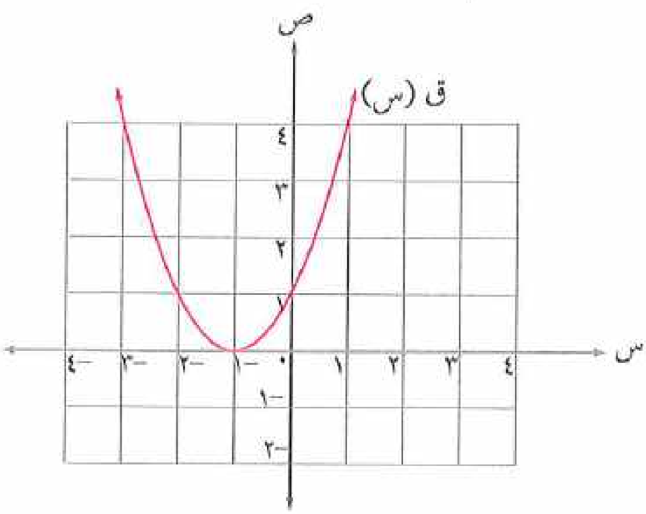
الإحداثي الصادي لرأس القطع المكافئ هو:

ص = ق (-١) = (-١)^{٢} + ٢ (-١) + ١ = ٠

∴ رأس القطع هو النقطة (-١ ، ٠).

يمكن اختيار النقطتين (٠ ، ق (٠))، و(-٢ ، ق (-٢)) لرسم منحنى الاقتران ق.

ق (س) = س^{٢} + ٢س + ١			
س	٠	-١	-٢
ق (س)	١	٠	١



الشكل (٢-١).

يتبين مما سبق أن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

∴ المدى هو:

$\{ص: ص \geq ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\} = \{ص: ص \geq ٠\} = [\,٠ ، \infty)$.

لاحِظ أن الشكل (٢-١) يبين أن للاقتران ق قيمة صغرى عند س = -١، هي ق (-١) = ٠

الاقتران الحقيقي

يسمى الاقتران ق اقترانًا حقيقيًا إذا كان مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية ح أو مجموعة جزئية منها.

التدريب (١)

إذا كان ق (س) = ٤ − $س^٢$:

١− ارسم منحنى الاقتران ق.

٢− جد أكبر قيمة للاقتران ق من الرسم.

٣− حدِّد مجال الاقتران ق ومداه من الرسم.

في ما يأتي بيان لكلٍّ من المجال والمدى لاقترانات الجذور، والاقترانات النسبية والكسرية.

اقترانات الجذور

إذا كان ق (س) = $\sqrt{هـ (س)}$ ، فإن مجال الاقتران ق هو مجموعة حل المتباينة هـ (س) ≥ ٠ ،

وإن مدى الاقتران ق هو مجموعة الصور الناتجة من تعويض قيم س في قاعدة الاقتران ق (س).

المثال ٣

إذا كان الاقتران ق (س) = $\sqrt{س − ١}$ ، فما مجاله؟ وما مداه؟

الحل

المجال هو مجموعة حل المتباينة س−١ ≥ ٠

س−١ = ٠ (تحويل المتباينة إلى معادلة)

س= ١ (حل المعادلة)

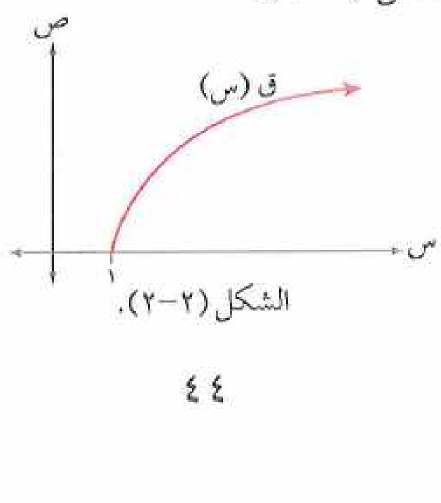
− − − − ⁝ + + + + + + + + + + (دراسة إشارة المقدار س−١)

∞− ١ ∞

س−١ يكون موجبًا أو صفرًا في الفترة [١، ∞)، ولهذا فإن مجال الاقتران ق (س) هو: [١، ∞)،

وإن مدى ق هو: {ص: ص ≥ ٠} = [٠، ∞)،

ويكون تمثيله البياني كما في الشكل (٢−٢).



الشكل (٢−٢).

فكّر

لماذا وضع الشرط هـ (س) $\geq$ ٠ عند تحديد مجال الاقتران ق (س)= $\sqrt{\text{هـ (س)}}$ ؟

المثال ٤

إذا كان الاقتران ق (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، فما مجاله؟

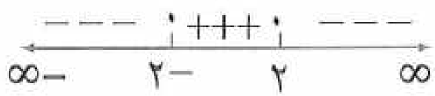
الحل

المجال هو مجموعة حل المتباينة ٤ − $س^{٢} \geq$ ٠

٤ − $س^{٢}$ = ٠ (تحويل المتباينة إلى معادلة)

$س^{٢}$ = ٤ (حل المعادلة التربيعية $س^{٢}$ = ٤)

س = $\pm$٢ (أخذ الجذر التربيعي للطرفين)



(دراسة إشارة المقدار ٤ − $س^{٢}$ عن طريق التعويض في قيم لـ س في كل فترة)

$\therefore$ مجال ق (س) هو: [−٢ ، ٢].

فكّر

جد مجال الاقتران ق (س)= $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ بطريقة أخرى؟

التدريب (٢)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{١ + س^{٢}}$ ، فما مجال ق (س)؟

إذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{هـ (س)}}$ ، وكان هـ (س) كثير حدود، فإن مجال الاقتران ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

المثال ٥

إذا كان الاقتران ق (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$ ، فما مجاله؟ وما مداه؟

الحل

مجال الاقتران ق هو ح، ومداه هو ح. (لماذا؟)

التدريب (٣)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{١ - \text{س}}$ ، فجد ق (٩)، ثم حدِّد المجال والمدى.

فكر

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{ن}]{\text{هـ}(\text{س})}$ ، وكان هـ (س) كثير حدود، فما مجال الاقتران ق عندما تكون ن:

- عددًا زوجيًا.
- عددًا فرديًا.

الاقترانات النسبية

تأمل البسط والمقام لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}}{\text{س} + ١}$

٢) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{٢\text{س} - ٦}$

٣) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٧} - ٦\text{س}}{٧\text{س}^{-٠,٢}}$

٤) $\text{م}(\text{س}) = \dfrac{٥\text{س}^{\frac{١}{٤}}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

لاحِظ أن البسط والمقام للاقترانين: ق، ل هما من كثيرات الحدود، وأن مقام الاقتران هـ ليس كثير حدود، وأن بسط الاقتران م ليس كثير حدود، لماذا؟

يطلق على كلٍّ من الاقترانين: ق، ل اسم الاقتران النسبي، وذلك خلافًا للاقترانين: ك، م؛ فهما لا يمثلان اقترانًا نسبيًا.

الاقتران النسبي

يسمى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$ ، $\text{ل}(\text{س}) \neq ٠$ اقترانًا نسبيًا إذا كان كلٌّ من الاقترانين: هـ، ل كثير حدود.

المثال ٦

أيّ الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقترانًا نسبيًا، مُبيِّنًا السبب:

١) ق (س) = $\frac{\sqrt{س}}{س^٢ + ٥س + ٦}$ ، س ≠ −٣، س ≠ −٢

٢) هـ (س) = $\frac{٣س - ٥}{س^٣ + ٢س}$ ، س ≠ ٠

الحل

١) الاقتران ق(س) ليس اقترانًا نسبيًا؛ لأن بسطه ليس كثير حدود.

٢) الاقتران هـ(س) هو اقتران نسبي؛ لأن كلًّا من البسط والمقام فيه كثير حدود، ومقامه لا يساوي صفرًا.

المثال ٧

إذا كان الاقتران ق (س) = $\frac{٣س + ١}{س^٢ - ٤}$ ، فما مجاله؟

الحل

لإيجاد مجال الاقتران ق(س)، أجب عن الأسئلة الآتية:

١) ما نوع الاقتران ق؟ لماذا؟

٢) ما مجال ٣س + ١؟

٣) ما مجال $س^٢$ − ٤؟

٤) ما القيم التي تجعل $س^٢$ − ٤ = ٠؟

٥) هل يمكن إيجاد قيمة ق(٢) ؟ لماذا؟

٦) هل يمكن إيجاد قيمة ق(−٢)؟ لماذا؟

٧) جد قيمة: ق (٠)، ق (١)، ق (−٣).

مجال الاقتران النسبي هو { مجال البسط ∩ مجال المقام } − { أصفار المقام }.

∴ مجال ق (س) هو: ح ∩ ح − {−٢ ، ٢} = ح − {−٢ ، ٢}.

فكِّر

لماذا استُثنِيت أصفار المقام من (مجال البسط ∩ مجال المقام)؟

المثال ٨

إذا كان ق (س) = $\frac{س}{س + ١}$، فحدِّد مجال الاقتران ق (س).

الحل

مجال البسط = مجال (س) = ح

مجال المقام = مجال (س+١) = ح

أصفار المقام = { س: س+١ = ٠ } ⟵ س = −١

لهذا يكون مجال ق (س): ح − {أصفار المقام}؛ أي إن مجال ق (س) هو ح − {−١}.

المثال ٩

إذا كان ق (س) = $\frac{-٣}{س^٢ - ٤س + ٣}$، فحدِّد مجال الاقتران ق (س).

الحل

مجال البسط = ح

مجال المقام = ح

أصفار المقام = { س: $س^٢$ − ٤س + ٣ = ٠ }، ومنه { س: (س−٣) (س − ١) = ٠ }

ومنه س = { ١، ٣ }

∴ مجال ق (س) هو: ح − { أصفار المقام }.

= ح − { ١، ٣ }

التدريب (٤)

إذا كان ق (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س + ٥}$ ، فحدِّد مجال الاقتران ق (س).

الاقترانات الكسرية

تأمل الاقترانين ق(س)، هـ(س) حيث:

$$ق(س) = \frac{\sqrt{س}}{س - ٤}، \quad هـ(س) = \frac{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٣}}{\sqrt[٣]{س} + ١}$$

لاحِظ أن كلًّا منهما ليس اقترانًا نسبيًّا، لماذا؟

الاقتران الكسري

يسمى الاقتران ق(س) $= \frac{هـ(س)}{ل(س)}$، ل(س) $\neq$ ٠ اقترانًا كسريًّا عندما يكون أحد الاقترانين: هـ(س)، ل(س) على الأقل ليس كثير حدود.

المثال ١٠

إذا كان ق(س) $= \frac{\sqrt{س}}{س^٢ - ٢٥}$، فما مجاله؟

الحل

ق(س) اقتران كسري، وليس اقترانًا نسبيًّا؛ لأن بسطه $\sqrt{س}$.

لاحِظ أن مجال البسط = [٠،∞)، لماذا؟ ومجال المقام = ح، لماذا؟

أصفار المقام: {−٥ ، ٥}.

∴ مجال الاقتران ق(س) هو: ح ∩ [٠،∞) − {−٥ ، ٥}

= [٠،∞) − {−٥ ، ٥} = [٠،∞) − {٥}.

فكِّر

لماذا استُثنِيت س = −٥ من الصورة النهائية لمجال الاقتران السابق؟

التدريب (٥)

إذا كان هـ(س) $= \frac{\sqrt{س + ٥}}{س^٢ + ١}$:

١) حدِّد مجال هـ(س).

٢) جد: هـ(−٥)، هـ(٠)، هـ(٥).

الأسئلة ؟

١) ارسم منحنى كل اقتران من الاقترانات الآتية، مُحدِّدًا نوعه ومجاله ومداه:

أ) ق (س) = $\frac{-١}{٢}$ س

ب) هـ (س) = ٤ + ٢س

جـ) د (س) = س^{٢} + ١

٢) إذا كان ق (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٩}$ ، فجد:

أ) ق (٣)، ق (−٣)، ق (٥).

ب) مجال ق (س).

٣) جد مجال كل اقتران من الاقترانات الآتية:

أ) ق (س) = $\frac{س^{٢}}{\sqrt{س + ٣}}$

ب) هـ (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٥}$

جـ) د (س) = $\frac{-٣}{٥ + س}$

د) ل (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥س + ٦}$

هـ) م (س) = $\frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

و) ك (س) = $\frac{٣س^{٣}}{(س - ٢)^{٢}}$

ز) ع (س) = $\sqrt{٤ - س}$

حـ) د (س) = $\sqrt{(س - ١)^{٢}}$

٤) جد مجال ومدى الاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

٥) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

اقترانات خاصة

Special Functions

النتاجات

- تتعرف الاقتران المتشعب، وتمثله بيانيًا.
- تتعرف اقتران القيمة المطلقة، وتمثله بيانيًا.

أولًا الاقترانات المتشعبة Piecewise Functions

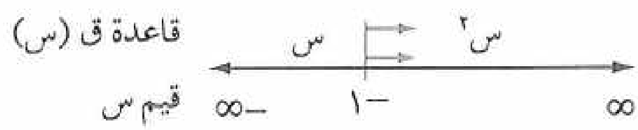
يعمل محمد في مصنع عدد ساعات العمل الرسمية فيه ٨ ساعات، فإذا كانت أجرة ساعة العمل الواحدة دينارين، وأجرة ساعة العمل الإضافية ٣ دنانير، فاكتب الاقتران الذي يمثل الأجر اليومي لهذا العامل.

ستتعرف في هذا الدرس نوعًا جديدًا من الاقترانات له اكثر من قاعدة، مثل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} &، \text{س} < -١ \\ \text{س}^٢ &، \text{س} \geq -١ \end{cases}$$ ، فماذا يسمى هذا الاقتران؟

إذا كان للاقتران ق أكثر من قاعدة، وكل قاعدة معرفة ضمن مجال معين، فإن هذا الاقتران يسمى **اقترانًا متشعبًا**، وقيمة س في المجال التي تتغير حولها قاعدة الاقتران تسمى الإحداثي السيني لنقطة التشعب (س، ق (س)).

يمكن توزيع الاقتران على خط الأعداد كالآتي:



بما أن المساواة موجودة في الفترة س $\geq$ -١، وقاعدة الاقتران في تلك الفترة هي ق (س) = س٢، فإن اتجاه السهم عند الإحداثي السيني لنقطة التشعب س = -١ يكون باتجاه القاعدة ق (س) = س٢.

المثال ١

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & ، \text{س} \leq ٤ \\ -٢ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$ ، فجد: ق (٠)، ق (٤)، ق (٥).

الحل

الاقتران ق (س) متشعب، وقاعدته تتغير عندما س = ٤ .

بما أن ٠ ≤ ٤، فإن $\text{ق}(٠) = (٠)^{٢} - ١$ (التعويض في القاعدة $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$)

$= -١$

بما أن ٤ ≤ ٤، فإن $\text{ق}(٤) = (٤)^{٢} - ١$ (التعويض في القاعدة $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$)

$= ١٥$

بما أن ٥ > ٤، فإن $\text{ق}(٥) = -٢$ (التعويض في القاعدة $\text{ق}(\text{س}) = -٢$)

التدريب (١)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ & ، \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^{٢} & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ١ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$

فجد: ق (١)، ق (٢,٥)، ق (٠)، ق (٣)، ق (٤).

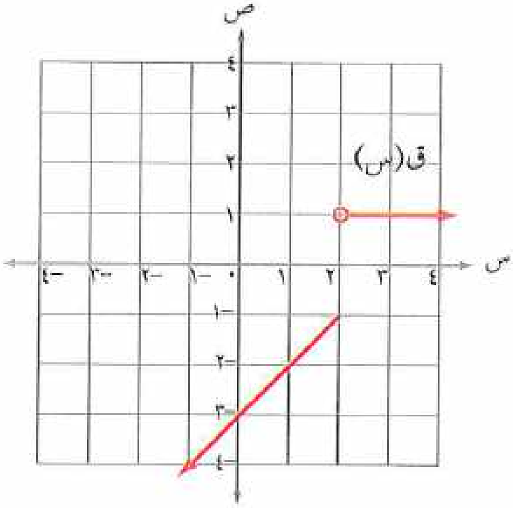
المثال ٢

ارسم منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \text{س} \leq ٢ \\ ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

الحل

لرسم منحنى الاقتران ق، نرسم منحنى كل قاعدة على حِدَة في المجال الذي عُرِّفت عليه القاعدة، حسب الرسم البياني الممثل في الشكل (٢−٣).

يتبين من الشكل وجود دائرة عند النقطة (٢ ، ١)؛ لأن س = ٢ ∉ مجال القاعدة ق (س) = ١، وهذا يعني أن صورة العدد ٢ تحسب من القاعدة ق (س) = س−٣.



الشكل (٢−٣).

المثال ٣

إذا كان الاقتران $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ \text{ ،} & \text{س} < -٣ \\ \text{س}^{٢} - ٣ \text{ ،} & -٣ \leq \text{س} < ١ \\ ٥ \text{ ،} & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

١) جد: ق (−٤)، ق(−٣)، ق (٠)، ق (٢)، ق (١).

٢) ارسم منحنى الاقتران ق (س).

الحل

١) ق (−٤) = −٤ + ٢ = −٢

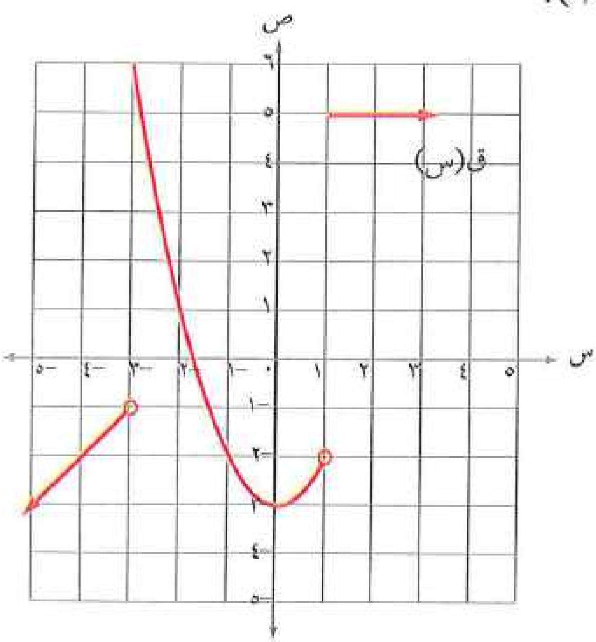
ق (−٣) = (−٣)^{٢}−٣ = ٦

ق (٠) = (٠)^{٢}−٣ = −٣

ق (١) = ٥

ق (٢) = ٥

٢) الشكل (٢−٤) يمثل منحنى الاقتران ق (س).



الشكل (٢−٤).

فكّر

لماذا وضعت دوائر عند النقطة (١، −٢)، و (−٣، −١) على الرسم في الشكل (٢ − ٤)؟

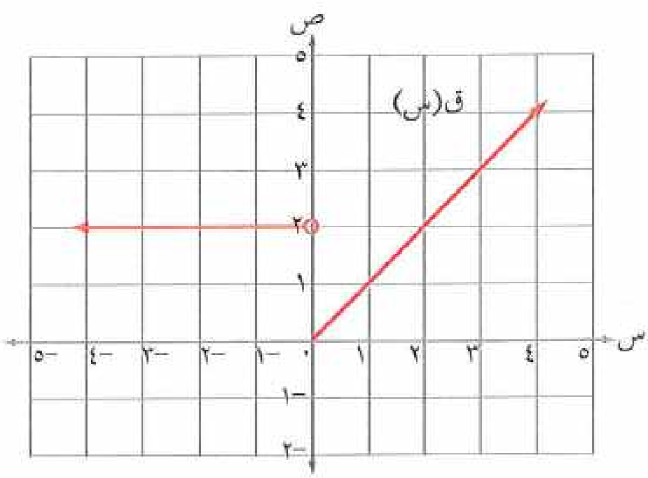
تدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق (س) =

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} ، & \text{س} \le ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ ، & \text{س} > ١ \end{cases}$$

المثال ٤

اكتب قاعدة الاقتران ق الممثل في الشكل (٢ − ٥).



الحل

لاحِظ أن الجزء المرسوم على الفترة (− ∞، ٠) في الشكل (٢ − ٥) يمثل منحنى الاقتران الثابت ق(س) = ٢، وأنه توجد دائرة عند النقطة (٠، ٢)، وهذا يعني أن صورة العدد (٠) لا تحسب من هذه القاعدة.

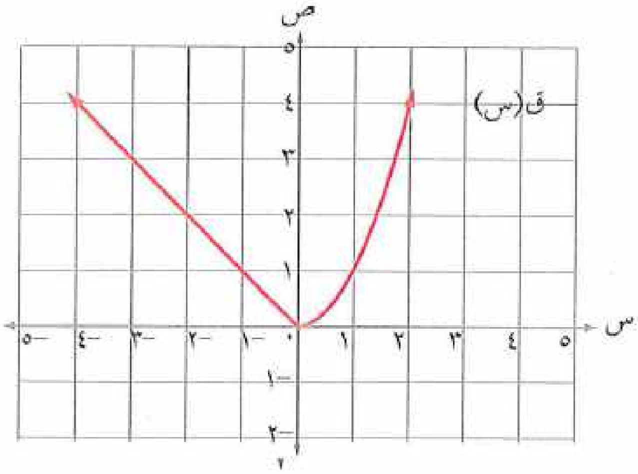
أمّا الجزء المرسوم على الفترة [٠، ∞) في الشكل (٢ − ٥) فيمثل منحنى الاقتران ق (س) = س، لماذا؟

∴ تكتب قاعدة الاقتران بصورة اقتران متشعب كما يأتي:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ ، & \text{س} < ٠ \\ \text{س} ، & \text{س} \ge ٠ \end{cases}$$

المثال ٥

اكتــب قاعدة الاقــتران ق الممثل في الشكل (٢-٦).



الشكل (٢-٦).

الحل

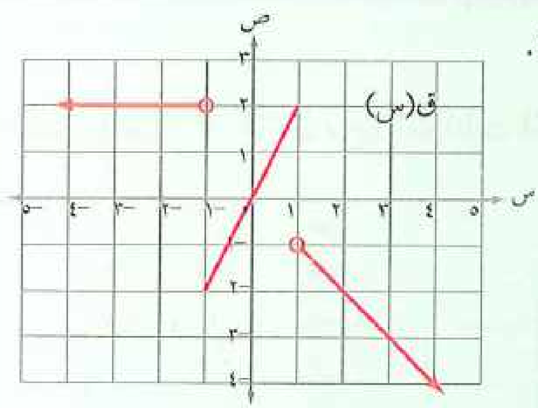
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} & \text{، س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & \text{، س} \geq ٠ \end{cases}$$

فكّر

لماذا لم تظهر دائرة عند النقطة (٠ ، ٠) في الرسم؟

تدريب (٣)

اكتب قاعدة الاقتران ق الممثل في الشكل (٢-٧).



الشكل (٢-٧).

المثال ٦

أجرة الاصطفاف في أحد مواقف السيارات هي نصف دينار عن أول ساعة أو أيّ جزء منها، ثم يُضاف ٢٠ قرشًا عن كل ساعة أو أيّ جزء منها بعد ذلك. اكتب قاعدة اقتران الأجرة لهذا الموقف.

الحل

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥٠ & \text{، } ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ٧٠ & \text{، } ١ < \text{س} \leq ٢ \\ ٩٠ & \text{، } ٢ < \text{س} \leq ٣ \\ \vdots & \end{cases}$$

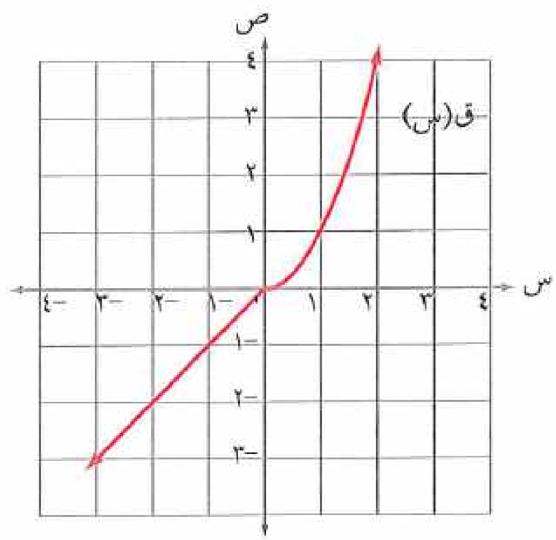
الأسئلة ؟

١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ١-س &، س < -٢ \\ ٢س-١ &، -٢ \leq س < ٠ \\ ٥ &، س \geq ٠ \end{cases}$ ، فجد:

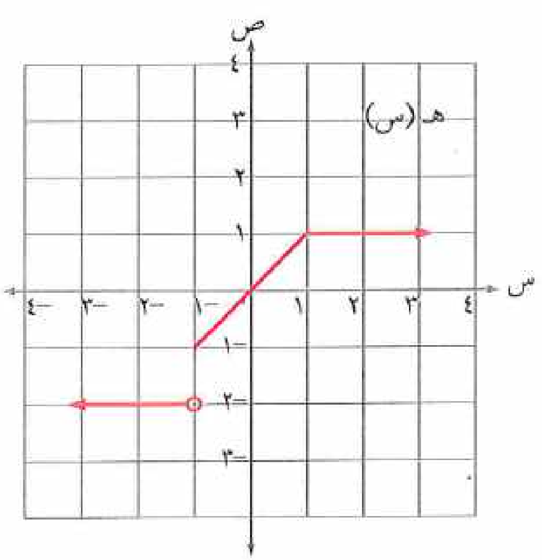
ق (٢)، ق (−٤)، ق (−٢)، ق (٠)، ق (١)، ق $(-\frac{١}{٢})$.

٢) ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = \begin{cases} ٢س+١ &، س < ١ \\ س^{٢} &، ١ \leq س < ٣ \\ -٢ &، س \geq ٣ \end{cases}$

٣) اكتب قاعدة كل اقتران من الاقترانات الممثلة في الشكل (٢−٨/أ، ب).



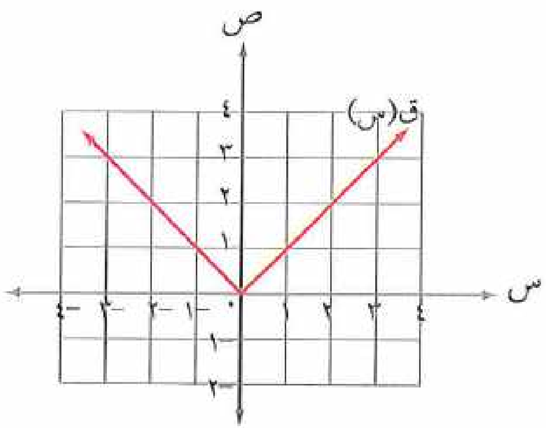
الشكل (٢−٨/أ).



الشكل (٢−٨/ب).

٤) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

ما قاعدة الاقتران ق الممثل في الشكل (٢–٩)؟



الشكل (٢–٩).

إذا كان أ ∈ ح، فإن القيمة المطلقة للعدد أ تعني بُعْد النقطة أ عن الصفر على خط الأعداد، ويرمز إليها بالرمز |أ|. وبناءً عليه، فإن:

|–٢| = ٢ |٢| = ٢

|–٣| = ٣ |٣| = ٣

|–٥,٥| = ٥,٥ |٥,٥| = ٥,٥

يمكن تعريف **اقتران القيمة المطلقة** ق(س) = |س|، أو كتابته بصورة مجزأة من دون استخدام رمز القيمة المطلقة، على النحو الآتي:

$$\text{ق (س)} = |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq ٠ \\ \text{–س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

المثال ١

إذا كان ق(س) = |٢ – ٣ س|، فجد:

ق (٠)، ق (٣)، ق ($\frac{١}{٣}$)، ق (–١).

الحل

$$ق(٠) = |٢ - ٣(٠)| = |٢| = ٢$$

$$ق(٣) = |٢ - ٣(٣)| = |-٧| = ٧$$

$$ق(\frac{١}{٣}) = |٢ - ٣(\frac{١}{٣})| = |١| = ١$$

$$ق(-١) = |٢ - ٣(-١)| = |٥| = ٥$$

تدريب (١)

إذا كان ق(س) = |٥ + س|، فجد:

ق(-٢)، ق(-٥,٦)، ق(٠)، ق(-١٠)، ق($\frac{١}{٤}$).

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة، يتعين اتباع الخطوات الآتية:

١) إيجاد أصفار الاقتران داخل رمز القيمة المطلقة.

٢) تعيين أصفار الاقتران على خط الأعداد، ودراسة الإشارة حول هذه الأصفار.

٣) كتابة قاعدة الاقتران بصورة اقتران متشعب، علمًا بأن قيم س التي يتشعب عندها الاقتران هي أصفار الاقتران.

المثال ٢

أعد تعريف الاقتران هـ(س) = |٣ + س|، ثم ارسم منحناه.

الحل

٣ + س = ٠ (إيجاد أصفار الاقتران هـ داخل القيمة المطلقة)

س = -٣ (حل المعادلة الناتجة)

(دراسة إشارة الاقتران هـ حول أصفاره)

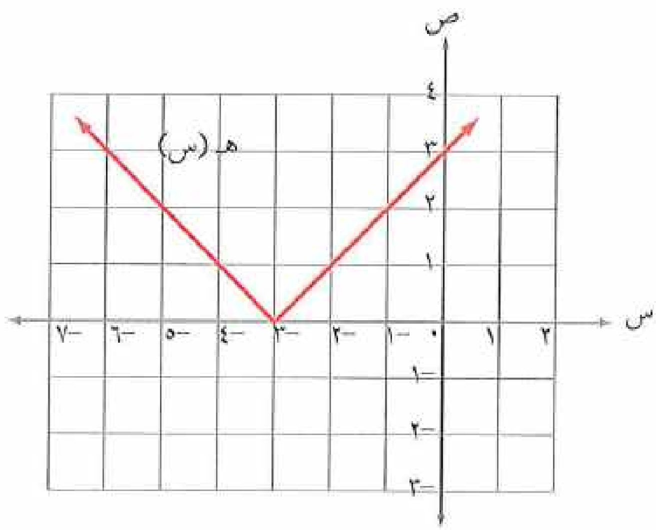
قاعدة هـ(س)	-(٣ + س)	(٣ + س)
إشارة هـ(س)	- - -	+ + +
س	-٣	

من جدول الإشارة يكون الاقتران:

$$هـ(س) = \begin{cases} -(٣ + س) & ، س \leq -٣ \\ ٣ + س & ، س > -٣ \end{cases}$$

$$\therefore\ هـ(س) = \begin{cases} -٣ - س & ، س \leq -٣ \\ ٣ + س & ، س > -٣ \end{cases}$$

والشكل (٢-١٠) يمثل منحنى الاقتران هـ.



الشكل (٢-١٠).

أين يقطع الاقتران هـ محور السينات؟

فكّر

هل يمكن وضع إشارة المساواة عند س > -٣ في المثال السابق؟ لماذا؟

التدريب (٢)

اكتب قاعدة الاقتران ق(س) = | ٢ س - ٥ | بصورة مجزأة من دون استخدام رمز القيمة المطلقة، ثم ارسم منحناه.

المثال ٣

أعد تعريف الاقتران ق (س) = | س٢ – ٩ |، ثم جد:

ق (٠)، ق (١)، ق (٤)، ق (–٥).

الحل

س٢ – ٩ = ٠ (إيجاد أصفار الاقتران داخل القيمة المطلقة)

س٢ = ٩ (حل المعادلة الناتجة)

س = ±٣ (أخذ الجذر التربيعي)

(دراسة إشارة الاقتران ق حول أصفاره)

قاعدة ق (س)	س٢ – ٩	٩ – س٢	س٢ – ٩
إشارة ق (س)	+ + +	– – –	+ + +
س		–٣	٣

ق (س) = { س٢ – ٩ ، س ≤ –٣
٩ – س٢ ، –٣ < س ≤ ٣
س٢ – ٩ ، س > ٣ }

ق (٠) = ٩ – (٠)٢ = ٩

ق (١) = ٩ – (١)٢ = ٨

ق (٤) = (٤)٢ – ٩ = ١٦ – ٩ = ٧

ق (–٥) = (–٥)٢ – ٩ = ٢٥ – ٩ = ١٦

الأسئلة

١) إذا كان ق(س) = | ٢ س + ٤ |، فجد:

ق (− ٢)، ق (٣)، ق (٠)، ق (− ٥).

٢) أعد تعريف الاقتران ق(س) = | ٣ س + ٤ |، ثم ارسم منحناه.

٣) أعد تعريف الاقتران ق(س) = | ٤ − س^{٢} |.

٤) اكتب قاعدة الاقتران ق(س) = | س − ١ | − ٣ بصورة مجزأة من دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

٥) أعد تعريف الاقتران ق(س) = | س^{٢} − ٥س + ٦ |.

٦) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٦ & ، \text{س} \geq ٦ \\ ٦ - \text{س} & ، \text{س} < ٦ \end{cases}$ ،

فأعد كتابة قاعدة الاقتران ق باستخدام رمز القيمة المطلقة.

٧) اكتب قاعدة الاقتران م (س) = |س^{٢} − س| من دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

العمليات على الاقترانات

Operations On Functions

النتاجات

- تجد الاقتران الناتج من عملية تركيب الاقترانات.
- تجد قيمة الاقتران (ق ه هـ) (س) عند نقطة.
- تتعرف مفهوم الاقتران واحد لواحد.
- تتعرف مفهوم الاقتران المحايد.
- تتعرف مفهوم الاقتران العكسي ق$^{-١}$(س).
- تستنتج قاعدة الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد.
- تستنتج علاقة ق (س) بـِ ق$^{-١}$ (س).

أولاً تركيب الاقترانات Composition Of Functions

حوض ماء على شكل نصف كرة، يتسرَّب منه الماء بحيث يتحدَّد نصف قطر سطح الماء فيه

وفق العلاقة: ر(ن) = $\frac{١٨}{ن٢ + ٣}$ متر، حيث:

ن: الزمن بالثواني.

ر: نصف القطر.

جد مساحة سطح الماء بعد مرور ١٢ ثانية.

إذا كان ق(س) = ٤س − ٣، هـ (س) = ١ − س، فإن:

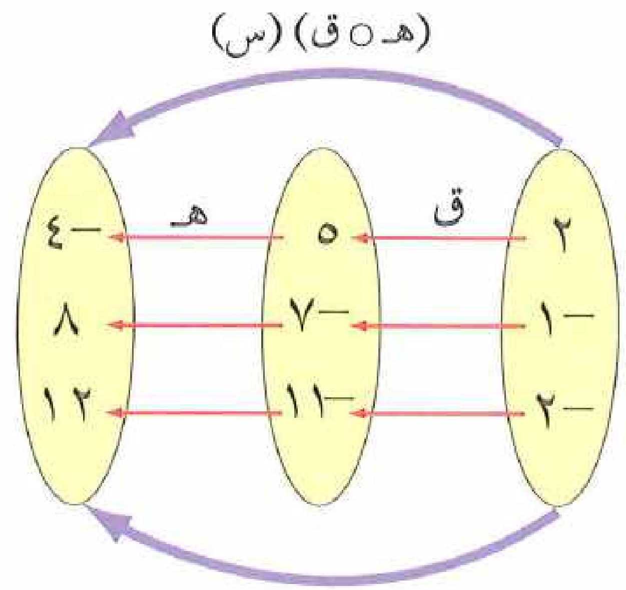
ق (٢) = ٥ ، هـ (٥) = −٤

ق (−١) = −٧ ، هـ (−٧) = ٨

ق (−٢) = −١١ ، هـ (−١١) = ١٢

لاحِظ أن صورة العدد (٢) في الاقتران ق هي ق (٢) = ٥، وأن صورة العدد (٥) في الاقتران هـ هي هـ (٥) = − ٤ كما في الشكل (٢−١١).

∴ هـ (ق(٢)) = − ٤



الشكل (٢−١١).

أمّا صورة العدد (−١) في الاقتران ق فهي ق (−١) = − ٧، وصورة العدد (− ٧) في الاقتران هـ هي هـ (− ٧) = ٨؛

أي إن: هـ (ق(−١)) = ٨

وأمّا صورة العدد (− ٢) في الاقتران ق فهي ق (− ٢) = − ١١، وصورة العدد (− ١١) في الاقتران هـ هي هـ (− ١١) = ١٢؛

أي إن: هـ (ق(− ٢)) = ١٢

تعرف هذه العملية باسم عملية تركيب الاقترانين: ق، هـ.

تركيب الاقترانات

إذا كان ق (س)، هـ (س) اقترانين، فإن الاقتران الناتج من تركيب الاقترانين ق، هـ هو: (ق ∘ هـ)(س) = ق (هـ (س))، ويقرأ: ق بعد هـ شريطة أن يكون مدى الاقتران هـ مجموعة جزئية من مجال الاقتران ق.

المثال ١

إذا كان ق(س) = ٣ س − ٢، هـ (س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠، فجد:

(ق ∘ هـ) (−١)　　(ق ∘ هـ) (٣)　　(هـ ∘ هـ) (−١)　　(ق ∘ ق) (٢)

الحل

لاحظ أن مدى هـ مجموعة جزئية من ق ، لذا؛

(ق ∘ هـ) (−١) = ق (هـ (−١))　　(أولاً هـ (−١) = −١)

= ق (−١)　　(ثانيًا ق (−١) = ٣ (−١) − ٢)

= −٥

(ق ∘ هـ) (٣) = ق (هـ (٣))　　(هـ (٣) = $\frac{١}{٣}$)

= ق ($\frac{١}{٣}$)　　(ق ($\frac{١}{٣}$) = ٣ ($\frac{١}{٣}$) − ٢)

= −١

لاحظ أن مدى هـ مجموعة جزئية من مجال هـ ، لذا؛

(هـ ∘ هـ) (−١) = هـ (هـ (−١))　　(هـ (−١) = −١)

= هـ (−١)　　(هـ (−١) = −١)

= −١

لاحظ أن مدى ق مجموعة جزئية من مجال ق ، لذا؛

(ق ∘ ق) (٢) = ق (ق(٢))　　(ق(٢) = ٣(٢) − ٢ = ٤)

= ق (٤)　　(ق(٤) = ٣(٤) − ٢)

= ١٠

التدريب (١)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، س ≥ صفر ، هـ(س) = س^{٢} + ١ ، فجد (إن أمكن):

١) (ق ∘ هـ) (١)　　　٢) (هـ ∘ ق) (١)

٣) (هـ ∘ ق) (٣)　　　٤) (ق ∘ هـ) (٣)

٥) (ق ∘ ق) (٤)　　　٦) (هـ ∘ هـ) (− ٢)

فكّر

هل تُعَدُّ عملية تركيب الاقترانات عملية تبديلية؟

المثال ٢

إذا كان ق(س) = س^{٢}، هـ(س) = س + ٣، فجد قاعدة:

(ق ∘ هـ) (س)

(هـ ∘ ق) (س)

الحل

إن المجال والمدى لكلٍّ من الاقترانين: (ق)، و(هـ) هما مجموعة الأعداد الحقيقية ح، وهذا يعني أنه يمكن إيجاد كلٍّ من (ق ∘ هـ) (س)، و(هـ ∘ ق) (س):

(ق ∘ هـ) (س) = ق (هـ (س))

= ق (س + ٣)　　　(هـ (س) = س + ٣)

= (س + ٣)^{٢}　　　(تعويض س + ٣ في الاقتران ق (س))

= س^{٢} + ٦س + ٩.　　　(إيجاد مفكوك مربع مجموع حدين)

(هـ ∘ ق) (س) = هـ (ق (س))

= هـ (س^{٢})　　　(ق (س) = س^{٢})

= س^{٢} + ٣　　　(تعويض س^{٢} في الاقتران هـ (س))

التدريب (٢)

إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س + ١}$ ، س ≠ −١ ، هـ (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، فجد قاعدة كلٍّ من:

١) (ق ∘ هـ) (س). ٢) (هـ ∘ ق) (س) .

المثال ٣

إذا كان ق(س) = ٢س^{٢} + ٣ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٢س & ، س \geq -١ \\ -٣ & ، س < -١ \end{cases}$ ، فجد:

(ق ∘ هـ) (−٢)، (هـ ∘ ق) (٠)، (هـ ∘ هـ) (−١).

الحل

لاحظ أن مدى هـ مجموعة جزئية من مجال ق ، لماذا؟

∴ (ق ∘ هـ) (− ٢) = ق (هـ (− ٢))

= ق (− ٤) (إيجاد هـ (− ٢) من القاعدة هـ (س) = ٢س)

= ٢(− ٤)^{٢} + ٣ (إيجاد ق (− ٤) من قاعدة الاقتران ق (س))

= ٣٥

لاحظ أن مدى ق مجموعة جزئية من مجال هـ ، لذا؛

∴ (هـ ∘ ق) (٠) = هـ (ق (٠))

= هـ (٣) (إيجاد ق (٠) من قاعدة الاقتران ق (س))

= − ٣ (إيجاد هـ (٣) من القاعدة هـ (س) = − ٣)

لاحظ أن مدى هـ مجموعة جزئية من مجال هـ ، لذا؛

∴ (هـ ∘ هـ) (−١) = هـ (هـ (−١))

= هـ (− ٢) (إيجاد هـ (−١) من القاعدة هـ (س) = ٢س)

= − ٤ (إيجاد هـ (− ٢) من القاعدة هـ (س) = ٢س)

التدريب (٣)

إذا كان ق (س) = | س + ٢ | ، هـ (س) = −س^{٢}، فجد:

١) (ق ∘ هـ) (١). ٢) (هـ ∘ ق) (٣).

المثال ٤

إذا كان ق (س) = ٢س + ١ ، هـ (س) = ٤س − ٣، فجد قيمة س في كلٍّ مما يأتي:

١) (هـ ∘ ق) (س) = ١٧

٢) (ق ∘ هـ) (س) = − ٥

الحل

لاحظ أن المجال والمدى لكل من الاقترانين: ق، هـ هما مجموعة الأعداد الحقيقية، ومنه ؛

١) هـ (ق(س)) = ١٧

هـ (٢س + ١) = ١٧ (تعويض (٢س + ١) بدلًا من الاقتران ق (س))

٤ (٢س + ١) − ٣ = ١٧

٨س + ٤ − ٣ = ١٧ (تبسيط المقدار الجبري)

٨س = ١٦

س = ٢ (القسمة على ٨)

أي إن (هـ ∘ ق) (٢) = ١٧

٢) ق (هـ (س)) = − ٥

ق(٤س − ٣) = − ٥

٢(٤ س − ٣) + ١ = − ٥ (تعويض (٤س − ٣) في الاقتران ق(س))

٨س − ٦ + ١ = − ٥ (تبسيط المقدار الجبري)

٨س − ٥ = − ٥

٨س = ٠ (تبسيط المقدار الجبري)

س = ٠ (القسمة على ٨)

التدريب (٤)

إذا كان ق (س) = س^{٢} + ١ ، هـ (س) = ٣س، فجد قيم س، علمًا بأن (هـ ∘ ق) (س) = ١٥ .

المثال ٥

إذا كان ق(س) = ٤ − ٢س، هـ (س) = ٢ − $\frac{١}{٢}$ س، فجد:

١) (ق ∘ هـ) (س).

٢) (هـ ∘ ق) (س).

الحل

لاحظ أن المجال والمدى لكل من الاقترانين: ق، هـ هما مجموعة الأعداد الحقيقية، ومنه ؛

١) (ق ∘ هـ) (س) = ق (هـ (س))

= ق (٢ − $\frac{١}{٢}$ س) (تعويض هـ (س) = ٢ − $\frac{١}{٢}$ س)

= ٤ − ٢ (٢ − $\frac{١}{٢}$ س) (تعويض (٢ − $\frac{١}{٢}$ س) في ق (س))

= ٤ − ٤ + س (تبسيط المقدار الجبري)

= س

٢) (هـ ∘ ق) (س) = هـ (ق (س))

= هـ (٤ − ٢س) (تعويض ق(س) = ٤ − ٢س)

= ٢ − $\frac{١}{٢}$ (٤ − ٢س) (تعويض (٤ − ٢س) في هـ (س))

= ٢ − $\frac{١}{٢}$ × ٤ − $\frac{١}{٢}$ (− ٢س) (تبسيط المقدار الجبري)

= ٢ − ٢ + س (تبسيط المقدار الجبري)

= س

ماذا تلاحظ؟

التدريب (٥)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة ؟

١) جد قيمة (ق ∘ هـ) (١)، (هـ ∘ ق) (٠)، (هـ ∘ ق) (− ٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق (س) = $س^{٢}$ ، هـ (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

ب) ق (س) = $س^{٣}$ ، هـ (س) = $|س + ١|$

جـ) ق (س) = ٢ − س ، هـ (س) = ٣س + ١

د) ق (س) = س − ٥ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٢س ، & س > ١ \\ ٢ ، & س \leq ١ \end{cases}$

٢) جد قاعدة (ق ∘ هـ) (س)، (ق ∘ ق) (س)، (هـ ∘ ق) (س) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٣س − ١، هـ (س) = $\frac{١ + س}{٣}$

ب) ق(س) = ٢س ، هـ (س) = $\sqrt[٣]{س}$

٣) أجب عمّا يأتي، مستعينًا بالجدولين الظاهرين في الشكل (٢−١٢):

أ) جد قيمة ما يأتي:

(١) (هـ ∘ ق) (٥).

(٢) (ق ∘ هـ) (٣).

(٣) هـ (ق (٤)).

(٤) ق (هـ (٢)) .

س	٢	٣	٤	٥
ق (س)	٠	١	٢	٣

س	١	٢	٣	٤
هـ (س)	١	٢	٤	٨

الشكل (٢−١٢).

ب) هل يمكن إيجاد ق (هـ (٥))؟ لماذا؟

٤) إذا كان ق(س) = ٣س + ٥، هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ س − $\frac{٥}{٣}$، فجد:

أ) (ق ∘ هـ)(س).

ب) (هـ ∘ ق)(س).

توصلت إحدى الباحثات إلى علاقة تربط بين طول الطفل وعمره خلال أول ثلاث سنوات من ولادته، وهي:

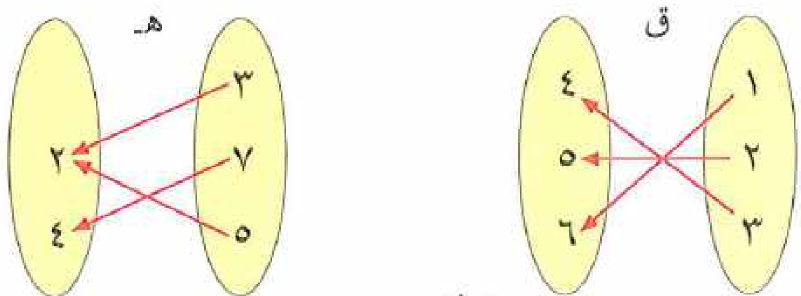
هـ(س) = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ + ٦٠، حيث:

س: عمر الطفل بالأشهر.

هـ: طول الطفل بالسنتيمتر.

اكتب علاقة تبين عمر الطفل بدلالة طوله.

تأمل المخططات السهمية الممثلة في الشكل (٢-١٣).



الشكل (٢-١٣).

لاحِظ أن كل عنصر في مدى ق هو صورة لعنصر واحد فقط في مجال ق، وذلك خلافًا للاقتران هـ؛ إذ إن العدد (٢) في مدى هـ هو صورة لأكثر من عنصر في مجال هـ.

الاقتران واحد لواحد

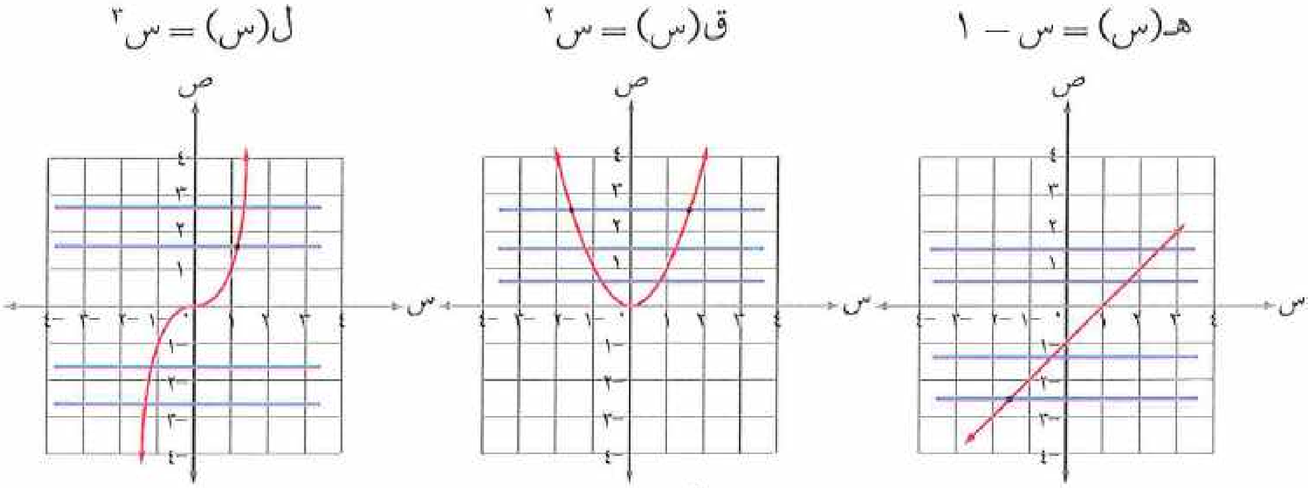
يسمى الاقتران ق واحدًا لواحد إذا كان كل عنصر في مداه صورة لعنصر واحد فقط في مجاله؛ أي إذا كان س_1، س_2 $\in$ مجال ق، وكان $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$، فإن ق($\text{س}_1$) $\neq$ ق(س_2).

اختبار الخط الأفقي

يكون الاقتران واحدًا لواحد إذا (وفقط) إذا كان أيّ خط أفقي يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة على الأكثر.

المثال ١

أيّ الاقترانات المبينة في الشكل (٢–١٤) تمثل اقتران واحد لواحد؟



الشكل (٢–١٤).

الحل

لاحِظ أن هـ(س) = س – ١، ل(س) = س٣ يمثلان اقتران واحد لواحد؛ لأن كل مستقيم أفقي يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة فقط. أمّا ق(س) = س٢ فإنه لا يمثل اقتران واحد لواحد؛ لأنه يوجد (على الأقل) خط أفقي مثل ص = ١,٥ يقطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة.

التدريب (١)

١) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ٣، مُبيِّنًا إذا كان ق(س) اقتران واحد لواحد أم لا.

٢) أيّ الاقترانين الآتيين يمثل اقتران واحد لواحد:

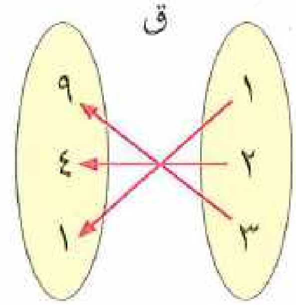
أ) ق = {(٢،٥)، (٣،١٠)، (٤،١٧)}.

ب) هـ = {(–١،٢)، (٠،٣)، (٢،٢)، (٥،٧)}.

فكِّر

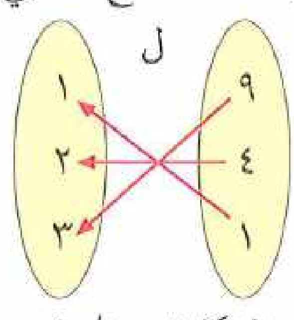
هل يُعَدُّ الاقتران الخطي ق(س) = أس + ب ، أ ≠ ٠ اقتران واحد لواحد؟

يمثل الشكل (٢–١٥/أ) المخطط السهمي للاقتران ق.



الشكل(٢–١٥/أ).

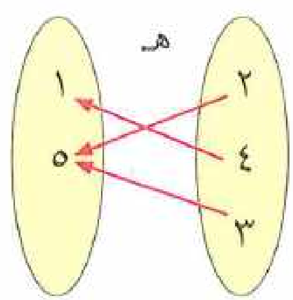
لاحِظ أن عكس اتجاه الأسهم يؤثر في المخطط الناتج كما في الشكل (٢–١٥/ب).



الشكل(٢–١٥/ب).

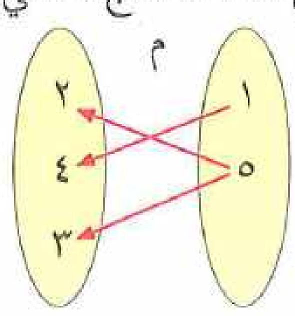
هل يمثل المخطط السهمي في هذا الشكل اقترانًا؟ لماذا؟

تأمل المخطط السهمي الذي يمثل الاقتران هـ في الشكل (٢–١٦/أ).



الشكل(٢–١٦/أ).

لاحِظ أن عكس اتجاه الأسهم يؤثر في المخطط الناتج كما في الشكل (٢–١٦/ب).



الشكل(٢–١٦/ب).

هل يمثل المخطط السهمي في هذا الشكل اقترانًا؟ لماذا؟

بالرجوع إلى الاقترانين: ق، ل في الشكل (٢−١٥)، يمكن التعبير عن هذين الاقترانين بصورة مجموعتين من الأزواج المرتبة:

ق = {(١،١) ، (٢،٤) ، (٣،٩)}

ل = {(١،١) ، (٤،٢) ، (٩،٣)}

وبمقارنة هاتين المجموعتين يتبين أن كل زوج مرتب في ل قد نتج من إبدال مسقطي زوج مرتب في ق.

∴ يسمى الاقتران ل اقترانًا عكسيًا للاقتران ق، ويرمز إليه بالرمز ق$^{-1}$(س)؛ على أن يكون الاقتران ق واحدًا لواحد.

فكّر

هل يمكن إيجاد اقتران عكسي للاقتران هـ الممثل في الشكل (٢−١٦)؟ لماذا؟

المثال ٢

إذا كان ق(س) = {(١، ١)، (٢، ٨)، (٣، ٢٧)، (٤، ٦٤)}، فجد:

١) ق$^{-1}$(س) بوصفها مجموعة أزواج مرتبة.

٢) ق$^{-1}$(٢٧)، (ق ∘ ق$^{-1}$)(٢٧)، (ق$^{-1}$ ∘ ق)(٢).

الحل

لاحِظ أن الاقتران ق هو اقتران واحد لواحد؛ لأن كل عنصر في مدى ق هو صورة لعنصر واحد فقط من مجاله، ولهذا فإن:

ق$^{-1}$ = {(١، ١)، (٨، ٢)، (٢٧، ٣)، (٦٤، ٤)}

بما أن (٢٧، ٣) ∈ ق$^{-1}$، فإن ق$^{-1}$(٢٧) = ٣

(ق ∘ ق$^{-1}$)(٢٧) = ق (ق$^{-1}$(٢٧)) = ق(٣) = ٢٧

∴ (ق ∘ ق$^{-1}$)(٢٧) = ٢٧

بما أن (٢،٨) ∈ ق، فإن ق(٢) = ٨

$(ق^{-1} \circ ق)(٢) = ق^{-1}(ق(٢)) = ق^{-1}(٨) = ٢$

$\therefore$ $(ق^{-1} \circ ق)(٢) = ٢$

ماذا تلاحظ على $(ق \circ ق^{-1})(٢٧)$، $(ق^{-1} \circ ق)(٢)$؟

التدريب (٢)

إذا كان هـ = {(٤، ١)، (٥، ٢)، (٦، ٣)، (٧، ٤)}، فجد:

١) $هـ^{-1}(س)$ بوصفها مجموعة أزواج مرتبة.

٢) $هـ^{-1}(٢)$، $هـ^{-1}(٤)$، هـ(٥)، هـ(٧)، $(هـ^{-1} \circ هـ)(٦)$، $(هـ \circ هـ^{-1})(٢)$.

الاقتران العكسي

إذا كان ق اقتران واحد لواحد، وكان $ق^{-1}$ هو الاقتران العكسي له، فإن:

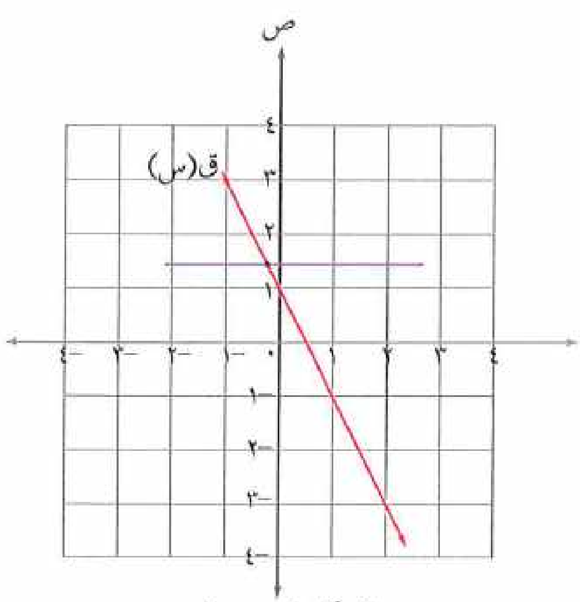
$(ق \circ ق^{-1})(س) = س$، $(ق^{-1} \circ ق)(س) = س$، ويسمى الاقتران الناتج من تركيب الاقتران والاقتران العكسي له اقترانًا محايدًا.

المثال ٣

ارسم منحنى ق(س) = ١ – ٢س، مُبيِّنًا إذا كان ق اقتران واحد لواحد، ثم جد $ق^{-1}(س)$ إن أمكن.

الحل

س	١–	٠	١
ق(س)	٣	١	١–



الشكل(٢–١٧).

التمثيل البياني للاقتران ق(س) هو الخط المستقيم الظاهر في الشكل (٢–١٧).

يُظهر اختبار الخط الأفقي أن الاقتران ق(س) هو اقتران واحد لواحد، ولهذا يمكن إيجاد الاقتران العكسي له $ق^{-1}(س)$ بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى

$(\text{ق} \circ \text{ق}^{-1})(\text{س}) = \text{س}$ (توظيف قاعدة)

$\text{ق}\,(\text{ق}^{-1}(\text{س})) = \text{س}$ (كتابة القاعدة بصورة مكافئة)

$١ - ٢\,\text{ق}^{-1}(\text{س}) = \text{س}$ (التعويض في قاعدة الاقتران ق (س))

$-٢\,\text{ق}^{-1}(\text{س}) = \text{س} - ١$ (حل المعادلة الناتجة بحيث نجد ق$^{-1}$ (س))

$$\text{ق}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{-٢}$$

$$\text{ق}^{-1}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}\,\text{س} + \frac{١}{٢}$$

الطريقة الثانية

اكتب الاقتران ق (س) بالصورة الآتية:

$\text{ص} = ١ - ٢\text{س}$ (كتابة الاقتران بصورة علاقة تربط س بـ ص)

$٢\text{س} = ١ - \text{ص}$ (تعيين س موضوعًا للقانون)

$\text{س} = \frac{١ - \text{ص}}{٢}$ (القسمة على ٢)

$\therefore\ \text{ق}^{-1}(\text{ص}) = \frac{١ - \text{ص}}{٢}$

$\text{ق}^{-1}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}\,\text{س} + \frac{١}{٢}$ (تعويض س بدلًا من ص)

التدريب (٣)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س} - ٦$ اقتران واحد لواحد:

١) جد $\text{ق}^{-1}(\text{س})$.

٢) جد $(\text{ق} \circ \text{ق}^{-1})(\text{س})$.

٣) مَثِّل $\text{ق}^{-1}(\text{س})$ بيانيًّا.

فكِّر

- هل توجد علاقة بين $\text{ق}^{-1}(\text{س})$ و $\frac{١}{\text{ق}(\text{س})}$ ؟ برِّر إجابتك.
- أعطِ مثالًا على اقتران ليس له اقتران عكسي.

المثال ٤

بين إذا كان ق(س) = ٣س + ٧ هو الاقتران العكسي للاقتران هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٧}{٣}$.

الحل

إذا كان (ق ∘ هـ) (س) = س، فإن هـ(س) هو الاقتران العكسي للاقتران ق(س).

∴ (ق ∘ هـ) (س) = ق(هـ(س))

= ق ($\frac{\text{س} - ٧}{٣}$) (التعويض في قاعدة هـ(س))

= ٣ × $\frac{\text{س} - ٧}{٣}$ + ٧ (التعويض في قاعدة ق(س) والتبسيط)

= س

∴ الاقتران هـ هو الاقتران العكسي للاقتران ق.

التدريب (٤)

بين إذا كان ل(س) هو الاقتران العكسي للاقتران ع(س) في ما يأتي:

١) ل(س) = ٢س ، ع(س) = $\frac{\text{س}}{٢}$

٢) ل(س) = ٥ − $\frac{١}{٣}$س ، ع(س) = ٣س − $\frac{١}{٥}$

فكر

اقترح طريقة أخرى لحل المثال (٤).

الأسئلة ؟

١) جد قاعدة الاقتران ق$^{-1}$ لكلٍّ مما يأتي:

أ) ق = {(ـ ٢، ـ ١) ، (ـ ٣، ـ ٢) ، (ـ ٤، ـ ٣) ، (ـ ٥، ـ ٤)}.

ب) ق(س) = ـ س

جـ) ق(س) = ٣ س ـ ٢

٢) بين إذا كان الاقتران ق(س) هو الاقتران العكسي للاقتران هـ (س) في ما يأتي:

أ) ق(س) = ٢س ـ ٦، هـ(س) = $\frac{\text{س}}{٢}$ + ٣

ب) ق(س) = س + ١ ، هـ(س) = ١ ـ س

٣) إذا كان ق$^{-1}$ هو الاقتران العكسي للاقتران ق، فجد:

أ) (ق o ق$^{-1}$)(ـ٢).

ب) (ق$^{-1}$ o ق)(٥).

جـ) ق$^{-1}$ (٣) إذا كان ق(٥) = ٣.

٤) لتحويل درجات الحرارة من سلسيوس إلى فهرنهايت، تُستخدم العلاقة: ف = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢،

حيث:

ف: درجة الحرارة بالفهرنهايت.

س°: درجة الحرارة بالسلسيوس.

أ) اكتب علاقة التحويل من فهرنهايت إلى سلسيوس.

ب) أكمل جدول الحرارة الآتي:

س	٢٠		٣٥	
ف		١١٣		٨٦

٥) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

١) إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt[3]{س + ٥}}{\sqrt{س^{٢} - ٤}}$، فجد:

أ) مجال ق(س).　　ب) ق(−٦)، ق(٣)، ق(٠).

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س + ١ &، س \geq -٢ \\ |س - ١| &، س < -٢ \end{cases}$، فجد:

أ) ق(− ٥).　　ب) ق(− ١,٥).　　جـ) ق(− ٢).　　د) ق(٠).

٣) إذا كان ق(س) = ٧ + ٣ س، فهل يُعَدُّ ق(س) اقتران واحد لواحد؟ جد ق$^{-١}$(س) إن أمكن.

٤) إذا كان الاقتران ع = {(١، − ١) ، (٠، ٥) ، (٢، ص) ، (٧، ٣)}، فأجب عمّا يأتي:

أ) جد قيمةً لِـ ص تجعل الاقتران ع واحدًا لواحد.

ب) جد قيمةً لِـ ص لا تجعل الاقتران ع واحدًا لواحد.

٥) إذا كان ق(س) = ٣س + ٥، هـ(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٦، فجد:

أ) (ق ∘ ق)(س).　　ب) (ق ∘ هـ)(س).　　جـ) (هـ ∘ ق$^{-١}$)(س).

د) (ق ∘ ق$^{-١}$)(س).　　هـ) (هـ ∘ هـ)(− ٤).

٦) أعد تعريف كلٍّ من الاقترانين الآتيين:

أ) ق(س) = |٤ − س^{٢}|　　ب) هـ (س) = $\frac{|س|}{س}$، س ≠ ٠

٧) إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt{٢س + ٤}}{٣ - س}$:

أ) حدِّد مجال ق(س).　　ب) جد: ق(١)، ق(−١).

جـ) هل يمكن إيجاد ق(٣)، ق(٤)، ق(− ٥)؟ لماذا؟

٨) إذا كان الاقتران ق (س) = $\begin{cases} \text{٣س} + ١ & ، \quad \text{س} \leq -١ \\ -\text{٢س} & ، \quad -١ < \text{س} < ١ ، \\ \text{س}^{٢} - ٣ & ، \quad \text{س} \geq ١ \end{cases}$

أ) ارسم منحنى الاقتران ق.

ب) جد ق(٠)، ق(−١)، ق(١)، ق(− ٣)، ق(٢).

٩) بين إذا كان الاقتران ق(س) = ٣س − ٢ هو الاقتران العكسي للاقتران هـ(س) = $\frac{١}{٣}$ س + ٢ .

١٠) يقود رياضي دراجته الهوائية بسرعة ٥٠ كم/ ساعة:

أ) اكتب الاقتران الذي يدل على المسافة المقطوعة.

ب) جد الاقتران العكسي لهذا الاقتران.

١١) يتكون هذا السؤال من سبع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) مجال ق(س) = $\frac{\text{س} - ٧}{\sqrt{٤ - \text{س}}}$ هو:

أ) (−∞، ٤)   ب) (−∞، ٤]   جـ) (٤، ∞)   د) [٤، ∞)

(٢) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{٥س} - ١ & ، \quad \text{س} < -٥ \\ ٣ - \text{س}^{٣} & ، \quad -٥ \leq \text{س} < -٢ \\ ٥ - \text{س}^{٢} & ، \quad \text{س} \geq -٢ \end{cases}$. فإن ق(− ٢) =

أ) ٩   ب) ١١   جـ) −٥   د) ١

(٣) إذا كان ق(س) = |س + ٣|، فإن ق(− ٥) =

أ) −٢   ب) ٥   جـ) ٢   د) −٥

(٤) إذا كان ق(س)= س^{٢} + ١، فإن (ق ∘ ق)(س) =

أ) س^{٤} + ٢س^{٢} + ١   ب) س^{٤} + ٢س^{٢} + ٢

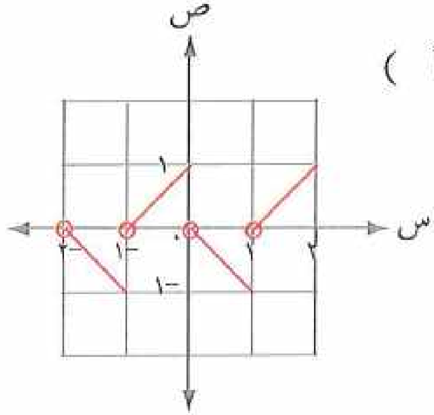
جـ) ٢س^{٢} + ١   د) س^{٤} + ١

(٥) إذا كان ق(س) = ٣س − ٢ ، فإن قاعدة ق$^{-١}$(س) هي:

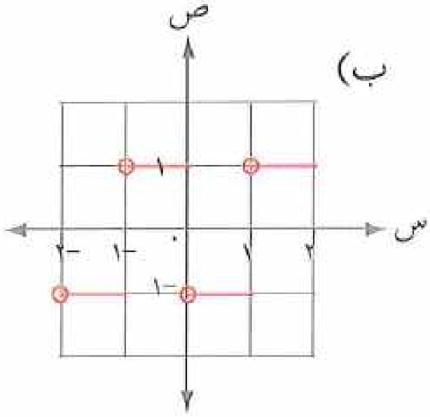
أ) $\frac{س}{٣} + ٢$ ب) $\frac{س + ٢}{٣}$ جـ) $\frac{س - ٣}{٢}$ د) ٢ − ٣س

*(٦) إذا كان الاقتران ق (س) =
$$\begin{cases} -س - ١ &، \quad -٢ < س \le -١ \\ س + ١ &، \quad -١ < س \le ٠ \\ -س + ١ &، \quad ٠ < س \le ١ \\ س - ١ &، \quad ١ < س \le ٢ \end{cases}$$
، فأيّ الأشكال الآتية يُعبّر عن الاقتران ق (س):

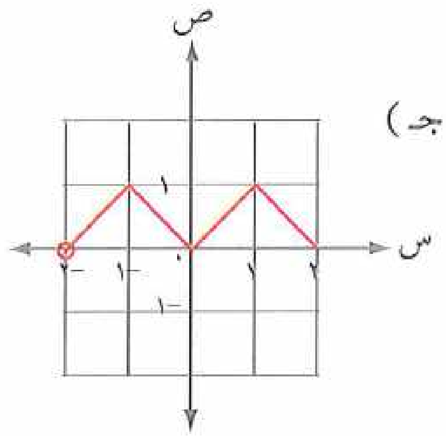
أ)



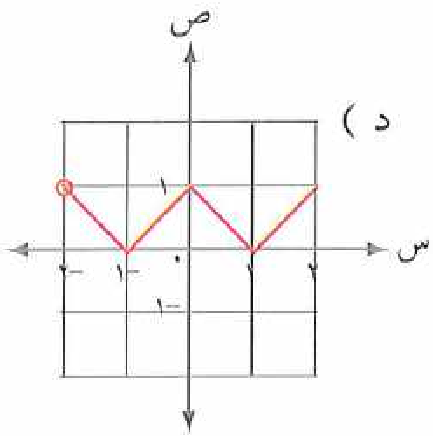
ب)



جـ)



د)



*(٧) إذا كان هـ(س) = س − ١ ، ق(س) = (س + ٣)^{٢}، فإن قاعدة ق(هـ(س)) تساوي:

أ) (س − ١)(س + ٣)^{٢} ب) (س + ٣)^{٢} − ١

جـ) (س + ٢)^{٢} د) س^{٢} + ٨

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

٢

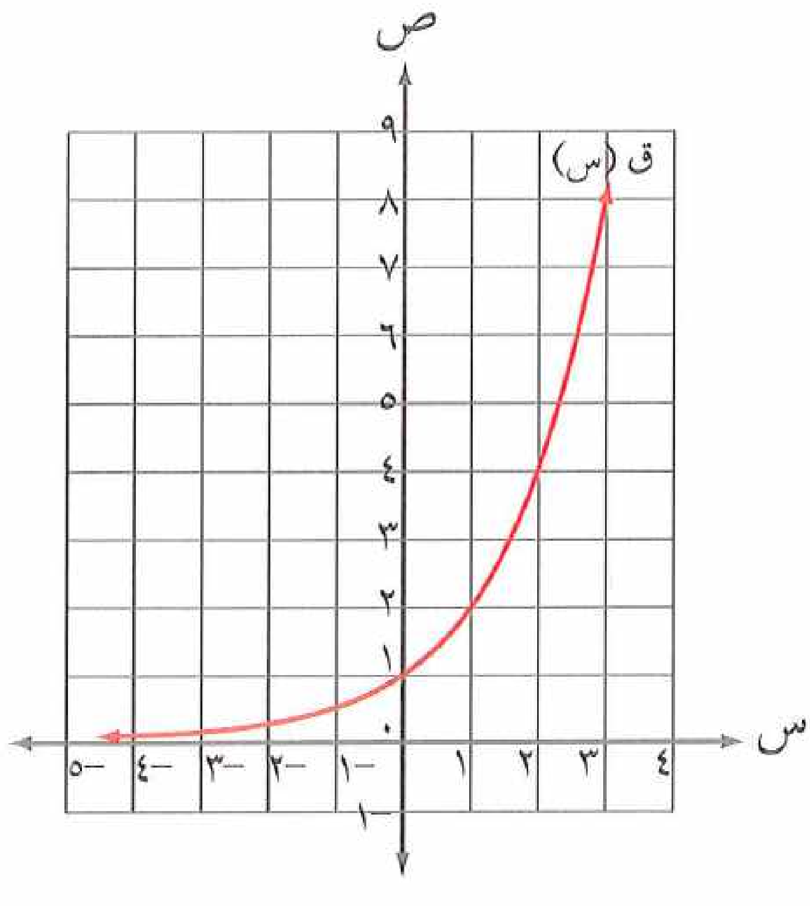
الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الثالثة

٣

الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

تُعَدُّ الاقترانات أحد الموضوعات المهمة في الرياضيات، وقد تعرفت في الفصل الأول أنواعًا منها، مثل: الاقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات النسبية، والاقتران الحقيقي، وستتعرف في هذه الوحدة أنواعًا أخرى، مثل: الاقترانات الأسية و الاقترانات اللوغاريتمية التي تسهم إسهامًا فاعلًا في حياتنا اليومية؛ نظرًا إلى تطبيقاتها الواسعة في مجال الرياضيات والعلوم الأخرى، فضلًا عن استخدام الأسس واللوغاريتمات في حل مسائل حياتية.



The Logarithmic and Exponential Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعـرف خصائص الاقترانـات الأسيـة واللوغاريتمية عن طريق الاستقصاء والبرامج الحاسوبية.
- حل معادلات أسية تكون فيها الأساسات قوى للعدد (أ)، حيث (أ > صفر).
- الإفـادة من التقنية في حساب لوغاريتمات الأعداد في أثناء حل مسائل عملية.
- تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- حـل مسائل تتضمن تطبيقات اقتصاديـة على الاقترانات الأسية واللوغاريتميـة، مثل الربـح المركب باستخدام وسائـل التقنية، مبرِّرًا الحل.

الفصل الأول

الاقترانات والمعادلات الأسية
Exponential Functions and Equations

النتاجات

- تتعرف الاقتران الأسي، والاقتران الأسي الطبيعي.
- تمثل منحنى الاقتران الأسي بيانيًا.
- تحل معادلة أسية بحيث تكون الأساسات قوى للعدد أ، أ > صفر.

أولًا: الاقتران الأسي Exponential Function

أودع سفيان مبلغ ٦٠٠٠ دينار في مصرف مدة ١٠ سنوات بفائدة مركبة قدرها ٦ ٪ تضاف إلى المبلغ سنويًا. كم دينارًا تصبح جملة المبلغ في نهاية المدة؟

عرفت أن ق (س) = ٧ اقتران ثابت، وأن هـ (س) = ٣−٥س اقتران خطي، فما نوع كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ع (س) = |س − ٤| ٢) م (س) = $س^{٣}$ − ٢س

٣) ل (س) = $س^{٢}$ ٤) ك (س) = $٢^{س}$

الاقتران ع هو اقتران قيمة مطلقة، والاقتران م كثير حدود من الدرجة الثالثة، والاقتران ل كثير حدود من الدرجة الثانية، أمّا الاقتران ك فلا ينتمي إلى أيّ من الاقترانات التي عرفتها سابقًا، ويسمى هذا الاقتران اقترانًا أسيًا، ويكون فيه الأس هو القيمة المتغيرة.

يسمى الاقتران المكتوب بصورة ق (س) = أ × $ب^{هـ(س)}$ اقترانًا أسيًا، حيث هـ (س) اقتران حقيقي، و أ ∈ ح، و أ ≠ ٠، و ب > ٠، و ب ≠ ١، ويسمى ب أساس الاقتران.

فكّر

لماذا وُضِع الشرط: أ ≠ ٠، و ب ≠ ١ في التعريف؟

المثال ١

حدِّد نوع كل اقتران من الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = ٢ (٢س + ١)　　　٢) هـ (س) = $(٢)^{-س}$

٣) ع (س) = $\sqrt{س}$ + ٥　　　٤) م (س) = $(٤)^{٢س}$

الحل

١) الاقتران ق (س) = ٢ (٢س + ١) اقتران خطي.

٢) الاقتران هـ (س) = $(٢)^{-س}$ اقتران أسي.

٣) الاقتران ع (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ اقتران جذر تربيعي.

٤) الاقتران م (س) = $(٤)^{٢س}$ اقتران أسي.

التدريب (١)

أيّ الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقترانًا أسيًّا:

١) ق (س) = ٥ × $(٤)^{س}$　　　٢) هـ (س) = $|س^{٣} - ٥|$

٣) ع (س) = $(س)^{٢٠}$ + ٣　　　٤) م (س) = $(٣)^{٢س}$

التدريب (٢)

أعطِ أمثلة على ثلاثة اقترانات أسية.

المثال ٢

إذا كان ق (س) = ٣ × $(٢)^{س}$ ، فجد: ق (٠)، ق (٣)، ق (−١).

الحل

بالتعويض في قاعدة الاقتران ق (س) = ٣ × $(٢)^{س}$، فإن:

ق (٠) = ٣ × $(٢)^{٠}$ = ٣ × ١ = ٣

ق (٣) = ٣ × $(٢)^{٣}$ = ٣ × ٨ = ٢٤

ق (−١) = ٣ × $(٢)^{-١}$ = ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

التدريب (٣)

إذا كان ق (س) = ٢ × $(٣)^{\text{س}}$، فجد: ق (١)، ق (٢)، ق (−٢).

الاقتران الأسي الطبيعي

يسمى الاقتران ق (س) = أ$(\text{هـ})^{\text{س}}$ اقترانًا أسيًّا طبيعيًّا، حيث هـ العدد النابيري، وهو عدد غير نسبي، وقيمته التقريبية ٢,٧٢.

المثال ٣

إذا كان ق (س) = $(\text{هـ})^{\text{س}}$، فجد ناتج ما يأتي (إلى أقرب منزلتين عشريتين) باستخدام الآلة الحاسبة:

ق (٢)، ق (−٣).

الحل

لإيجاد ق (٢)، اتبع الخطوات الواردة في الشكل (٣− ١/ أ)، فيكون:

ق(٢) = $(\text{هـ})^{٢}$ ≈ ٧,٣٩

shift → e^x → 2 → = → 7.39

الشكل (٣− ١/ أ).

لإيجاد ق (−٣)، اتبع الخطوات الواردة في الشكل (٣− ١/ ب)، فيكون:

ق (−٣) = $(\text{هـ})^{-٣}$ ≈ ٠,٠٥

shift → e^x → (−) → 3 → = → 0.05

الشكل (٣− ١/ ب).

التدريب (٤)

إذا كان ق (س) = $(\text{هـ})^{-\text{س}+١}$، فجد ناتج ما يأتي (إلى أقرب منزلتين عشريتين) باستخدام الآلة الحاسبة: ق (٣)، ق(−٢) ، ق(٠,٣).

فكِّر

هل يمكن أن تكون قيم الاقتران الأسي سالبة؟ ناقش زملاءك في إجابتك.

يُذكَر أن التطبيقات الاقتصادية من أهم التطبيقات الحياتية على الاقتران الأسي.

المثال ٤

كم دينارًا جملة مبلغ ٤٠٠٠ دينار استُثمِر في مصرف مدة ٢٠ سنة، إذا كانت نسبة الفائدة المركبة ٨ ٪ سنويًّا؟

الحل

المبلغ (م) = ٤٠٠٠، الزمن (ن) = ٢٠، نسبة الفائدة (ف) = ٨ ٪ ، جملة المبلغ (جـ)؟

جملة المبلغ جـ = م (١ + ف)^{ن} (القانون)

= ٤٠٠٠ (١+٠,٠٨)^{٢٠} (التعويض في القانون)

= ٤٠٠٠ (١,٠٨)^{٢٠} (الحساب باستخدام الآلة الحاسبة)

= ١٨٦٤٣,٨٢ دينارًا.

التدريب (٥)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

لاحظ أن الفائدة المركبة في المثال السابق قد أضيفت في نهاية السنة لذا استُخدم القانون جـ = م (١ + ف)^{ن}. ولحساب جملة المبلغ الذي تضاف فائدته بصورة مستمرة، يستخدم القانون الآتي:

جـ = م × هـ$^{ف×ن}$، حيث: هـ ≈ ٢,٧٢ .

جـ : جملة المبلغ .

م : المبلغ .

ف: الفائدة .

ن : المدة الزمنية .

المثال ٥

أودع زيد مبلغ ٣٠٠ دينار في حساب التوفير بفائدة قدرها ٨ ٪ سنويًّا. فإذا كان المصرف يضيف الفائدة باستمرار، فما جملة المبلغ بعد ٢٠ سنة؟

الحل

م = ٣٠٠، ف = ٠,٠٨، ن = ٢٠ سنة.

المطلوب: جملة المبلغ.

جـ = م × هـ $^{\text{ف}\times\text{ن}}$ (كتابة القانون)

جـ = ٣٠٠ × (هـ)$^{٠,٠٨ \times ٢٠}$ (التعويض في القانون)

= ٣٠٠ × (هـ)^{١,٦} = ٣٠٠ × ٤,٩٥٣٠٣ (الحساب باستخدام الآلة الحاسبة)

= ١٤٨٥,٩٠٩٧ دينارًا.

التدريب (٦)

أودع عمر مبلغ ٢٠٠٠ دينار في حساب التوفير بفائدة قدرها ٦ ٪ سنويًا. فإذا كان المصرف يضيف الفائدة باستمرار، فما جملة المبلغ بعد ١٠ سنوات؟

المثال ٦

اكتب قاعدة الاقتران الأسي الذي يمر بالنقطتين: (٠، ٢)، (١، ٦).

الحل

الصورة العامة للاقتران الأسي: ق (س) = أ × ب$^{\text{س}}$ هي:

٢ = أ × ب$^{\text{صفر}}$ (التعويض في النقطة (٠، ٢))

٢ = أ × ١

∴ أ = ٢

٦ = ٢ × ب^{١} (التعويض في النقطة (١، ٦))

∴ ب = ٣ (قسمة الطرفين على ٢)

∴ قاعدة الاقتران الأسي هي: ق (س) = ٢ × (٣)$^{\text{س}}$.

التدريب (٧)

اكتب قاعدة الاقتران الأسي الذي يمر بالنقطتين: (٠، ٣)، (٢، ١٢).

فكر

ما قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران ق(س) = (م + ٢) س + (٧)$^{\text{س}}$ اقترانًا أسيًا؟

الأسئلة ؟

١) أيّ الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقترانًا أسيًّا:

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - (٤)^{\text{س}}$ ب) $\text{هـ}(\text{س}) = ١$

جـ) $\text{ع}(\text{س}) = ٣ \times (\text{هـ})^{\text{س}}$ د) $\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + ١$

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣^{(\text{س} - ٢)}$، فجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) ق (٢) ب) ق (٤) جـ) ق(−١)

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - (\text{هـ})^{\text{س} + ١}$، فاستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) ق (٣) ب) ق (−٢) جـ) ق (٢)

٤) اكتب قاعدة الاقتران الأسي الذي يمر بالنقطتين: (١، ٤)، (٢، ٨).

٥) إذا كان النمو السكاني في إحدى البلدات يخضع لقانون النمو، وكان عدد سكان البلدة ٣٠٠ نسمة عام ٢٠٠٠م، وازداد العدد بانتظام بمعدل ٤ ٪ سنويًّا، فاحسب عدد سكان البلدة عام ٢٠٢٥م ، علمًا بأن النمو السكاني يعطى بالعلاقة:

$\text{ع}(\text{ن}) = \text{ع}_{.} \times (\text{هـ})^{\text{أن}}$ ، حيث $\text{ع}_{.}$: عدد السكان الأصلي.

أ : معدل النمو.

ن: الزمن بالسنوات.

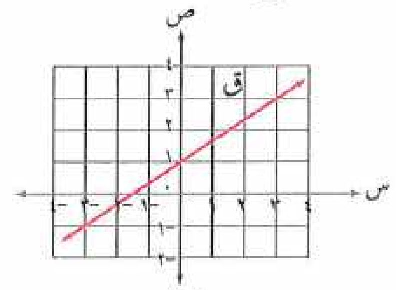
هـ: العدد النابيري.

ع (ن): عدد السكان الحالي.

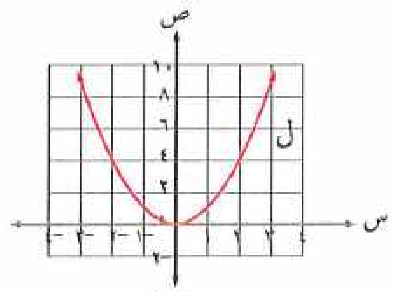
٦) أودع أحمد مبلغًا من المال في مصرف بفائدة مركبة قدرها ٦ ٪سنويًّا مدة ٥ سنوات. فإذا كانت جملة المبلغ بعد انقضاء المدة ٣٣٧٠,٨ دينارًا، فجد قيمة المبلغ الذي أودعه أحمد.

ثانيًا رسم الاقتران الأسي Graphing Of Exponential Function

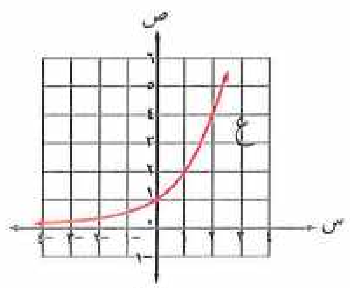
ما نوع كل اقتران من الاقترانات المبينة في الأشكال الآتية:



(١)



(٢)



(٣)

لاحِظ أن المنحنى الممثل للاقتران ق في الأشكال السابقة هو خط مستقيم، وأن المنحنى الممثل للاقتران ل هو قطع مكافئ. أمّا المنحنى الممثل للاقتران ع فهو نوع جديد من الاقترانات ستتعرفه في هذا الدرس.

المثال ١

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = ٢^{س}$.

الحل

(١) اختر قيمًا للمتغير س بحيث يسهل حساب قيم الاقتران ق (س) لها، ولتكن حول العدد صفر.

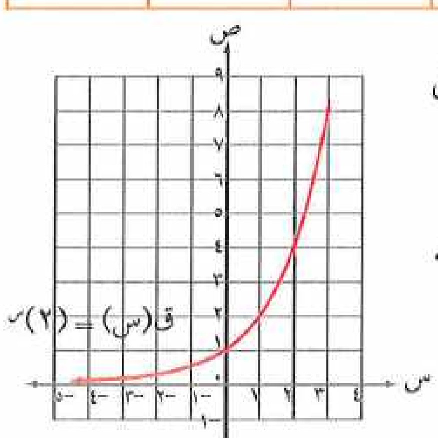
(٢) جد قيم ق المناظرة لقيم س المختارة، بالتعويض في الاقتران ق.

(٣) أنشئ الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	١−	٢−	٣−
$ق(س) = ٢^{س}$	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

(٤) ارسم المستوى الإحداثي لتعيين النقاط الواردة في الجدول السابق.

(٥) صِل بين النقاط بخط منحنٍ أملس كما في الشكل (٣-٢).



الشكل (٣-٢).

التدريب (١)

ارسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = $٣^{س}$.　　　　٢) ل (س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$.

المثال ٢

معتمدًا الجدول الآتي الذي يمثل قيم س وقيم ص المناظرة لها، أجب عمّا يلي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

١) اكتب قاعدة الاقتران ق.　　　　٢) ارسم منحنى الاقتران ق.

الحل

١) لاحِظ من الجدول أن: $\frac{١}{٨} = \frac{١}{٢^{٣}} = ٢^{-٣}$

$$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٢^{٢}} = ٢^{-٢}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢^{١}} = ٢^{-١}$$

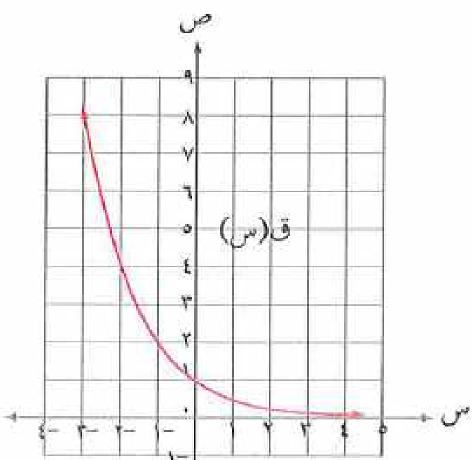
$$١ = ٢^{٠}$$

$$٢ = ٢^{١} = ٢^{-(-١)}$$

$$٤ = ٢^{٢} = ٢^{-(-٢)}$$

$$٨ = ٢^{٣} = ٢^{-(-٣)}$$

∴ القاعدة ق (س) = $(\frac{١}{٢})^{س} = (٢)^{-س}$، (لماذا؟)



الشكل (٣-٣).

٢) لرسم منحنى الاقتران ق:

أ) ارسم المستوى البياني.

ب) عيِّن النقاط الواردة في الجدول السابق في المستوى البياني.

جـ) صِل بين هذه النقاط بخط منحنٍ أملس كما في الشكل (٣-٣).

اعتمادًا على الشكل (٣-٣)، أجب عمَّا يأتي:

١) ما مجال الاقتران ق؟

٢) ما مدى الاقتران ق؟

٣) ما المقطع الصادي لمنحنى الاقتران ق؟

٤) ما المقطع السيني لمنحنى الاقتران ق (إن وجد)؟

٥) هل يُعَدُّ الاقتران ق واحدًا لواحد؟

٦) هل يُعَدُّ الاقتران ق متناقصًا على مجاله؟

التدريب (٢)

معتمدًا الجدول الآتي الذي يمثل بعض قيم س وقيم ص المناظرة لها للاقتران الأسي ق الذي قاعدته ق (س) = $٢^{(س+١)}$، أجب عمَّا يلي:

س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

١) ارسم منحنى ق.

٢) ما مجال الاقتران ق؟

٣) ما مدى الاقتران ق؟

٤) ما المقطع الصادي للاقتران ق؟

٥) ما المقطع السيني للاقتران ق (إن وجد)؟

٦) هل الاقتران (ق) متزايد أم متناقص على مجاله؟

خصائص الاقتران الأسي

ق (س) = أ × $ب^{س}$ ، ب ≠ ١ ، ب > ٠ ، أ > ٠ :

١) مجال ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية (ح).

٢) مدى ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ($ح^{+}$).

٣) ق اقتران واحد لواحد.

٤) منحنى ق يمر بالنقطة (٠ ، أ)؛ أي إن المقطع الصادي ص = أ.

٥) منحناه لا يقطع محور السينات.

٦) يكون ق متزايدًا إذا كانت ب > ١.

٧) يكون ق متناقصًا إذا كانت ٠ < ب < ١.

المثال ٣

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $(٣)^{س}$ ، س ∈ [−٣ ، ٣] باستخدام برمجية إكسل.

الحل

اتبع الخطوات الآتية:

(١) انقر أيقونة برمجية إكسل، فتظهر نافذة إكسل المبينة في الشكل (٣−٤).

الشكل (٣−٤).

(٢) اختر عمودًا (ليكن العمود A)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A1)، واكتب القيمة الأولى للمتغير س، وهي (−٣)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A2)، واكتب القيمة الثانية للمتغير س، وهي (−٢,٥).

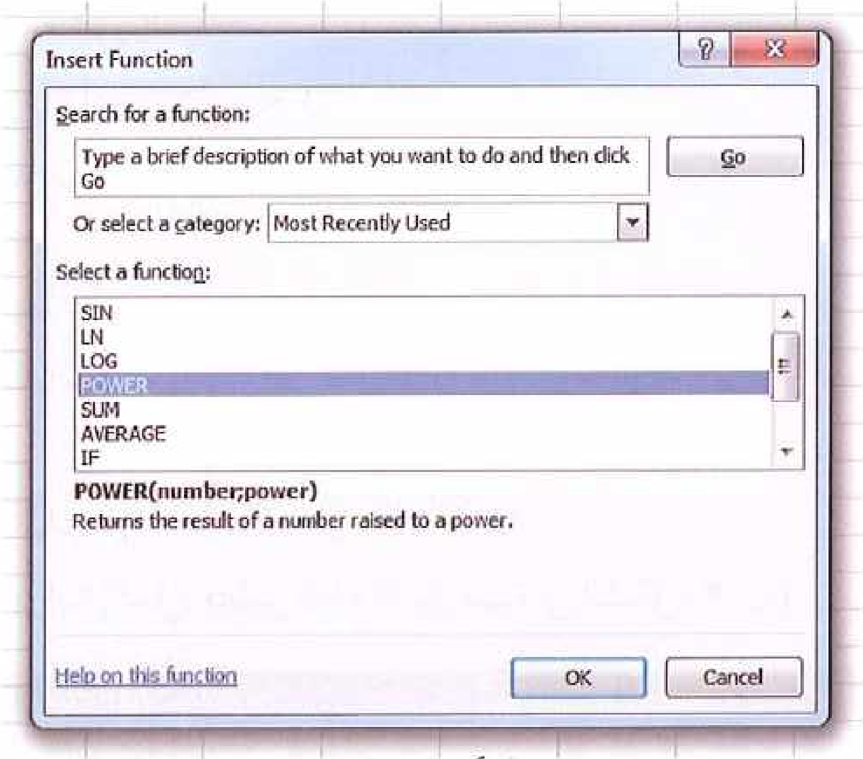
(٣) ظلِّل الخليتين، ثم اسحب المؤشر إلى الأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س، وهي (٣) كما في الشكل (٣−٥).

	A	B
1	-3	
2	-2.5	
3	-2	
4	-1.5	
5	-1	
6	-0.5	
7	0	
8	0.5	
9	1	
10	1.5	
11	2	
12	2.5	
13	3	

الشكل (٣−٥).

(٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

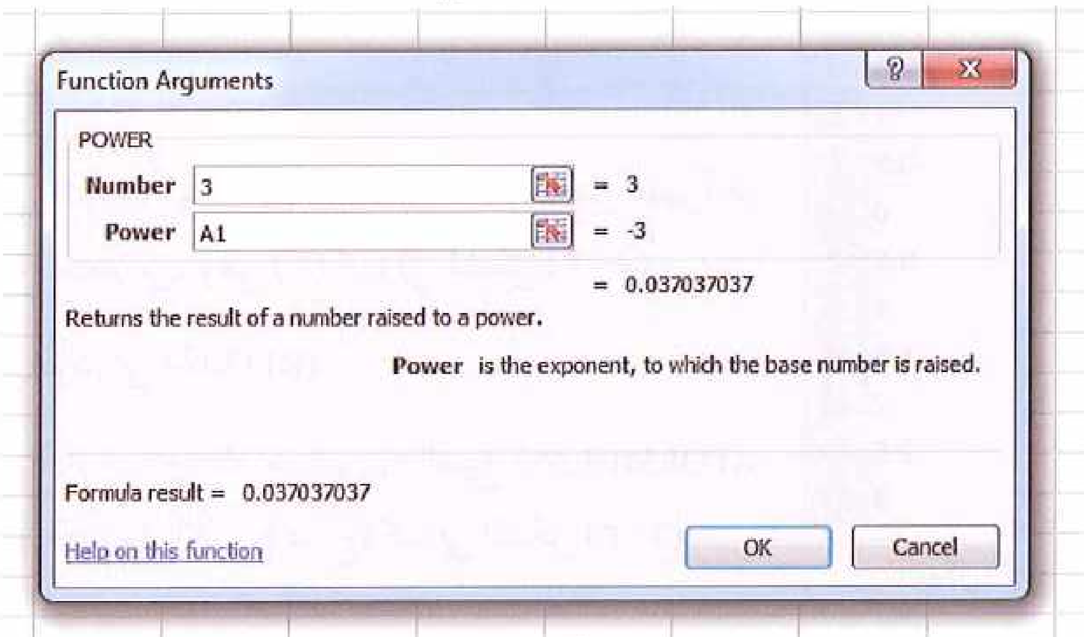
(٥) اختر أداة إدراج دالة من تبويب الصيغ (FORMULAS)، فيظهر صندوق الحوار (إدراج) كما في الشكل (٣−٦).



الشكل (٣-٦).

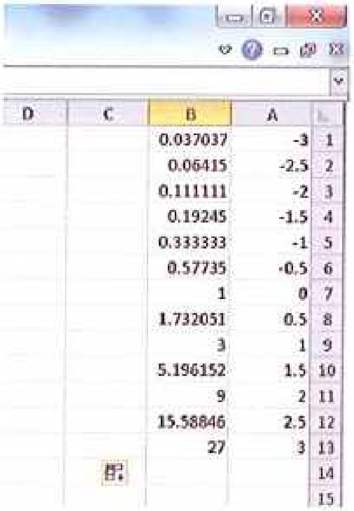
(٦) اختر الدالة (POWER)، ثم انقر زر (موافق)، فيظهر صندوق (حوار الدالة) كما في الشكل (٣-٧).

(٧) اكتب أسـاس الاقتران ق في مستطيل (Number)، ثم اكتب (A1) في مستطيل (Power)، ثم انقر زر (موافق)، فتظهر صورة القيمة (A1) في الخلية (B1).



الشكل (٣-٧).

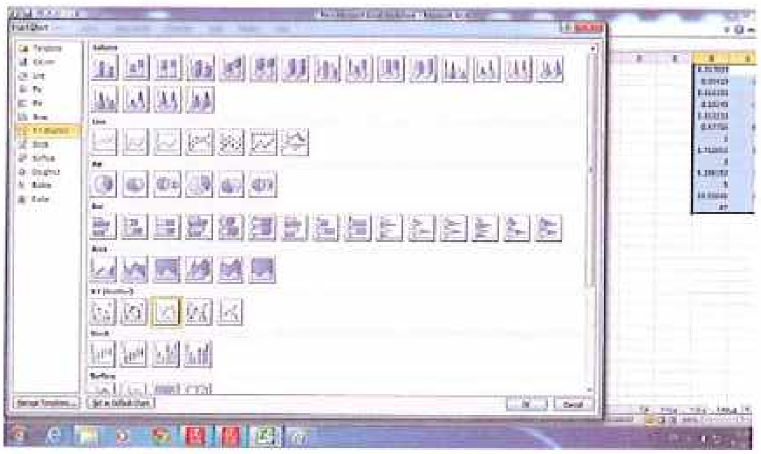
(٨) اسحب المؤشر إلى جميع الخلايا التي كتبتها لتظهر مجموعة صور قيم المتغير س في العمود (B) كما في الشكل (٣–٨).



	A	B	C	D
1	-3	0.037037		
2	-2.5	0.06415		
3	-2	0.111111		
4	-1.5	0.19245		
5	-1	0.333333		
6	-0.5	0.57735		
7	0	1		
8	0.5	1.732051		
9	1	3		
10	1.5	5.196152		
11	2	9		
12	2.5	15.58846		
13	3	27		
14				
15				

الشكل (٣–٨).

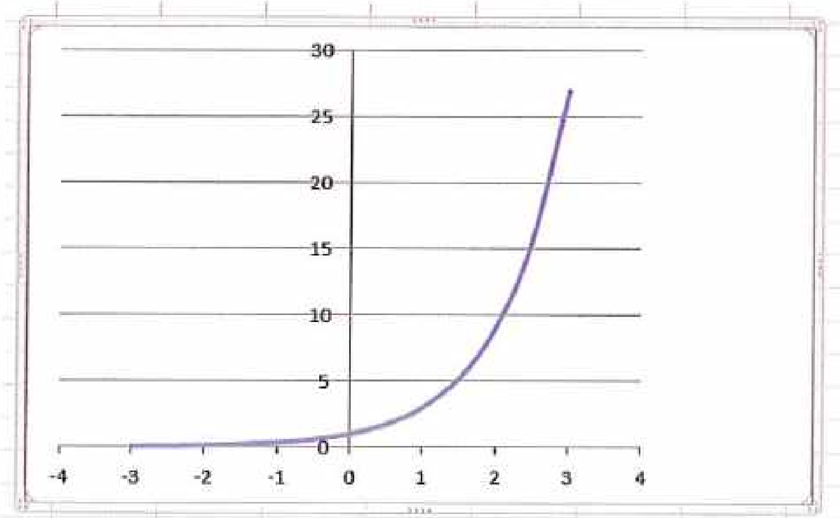
(٩) ظلّل العمودين: (A)، و(B)، ثم اختر من تبويب إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (LINE)، ثم اختر الشكل س ص مبعثر (XY–Scatter)، ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٣–٩).



الشكل (٣–٩).

(١٠) انقر زر (موافق)، فيظهر رسم الاقتران:

ق (س) = $(٣)^{س}$ بالفترة [−٣،٣] كما في الشكل (٣–١٠).



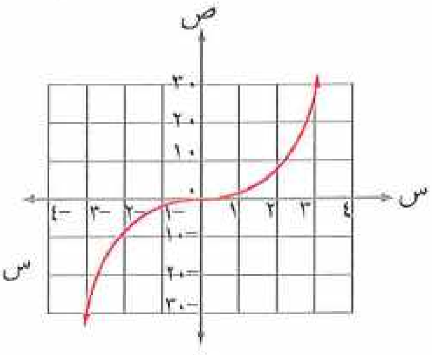
الشكل (٣–١٠).

الأسئلة ؟

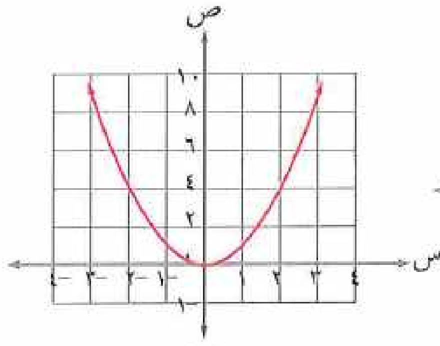
١) ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $(٢)^{س-١}$، مُستقصِيًا خصائصه.

٢) ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $(٥)^{س}$، س ∋ [−٣ ، ٤] باستخدام برمجية إكسل، مُستقصِيًا خصائصه.

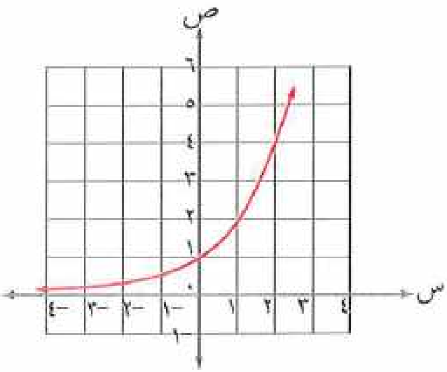
٣) أيّ الأشكال الآتية يمثل اقترانًا أسيًّا:



(أ)

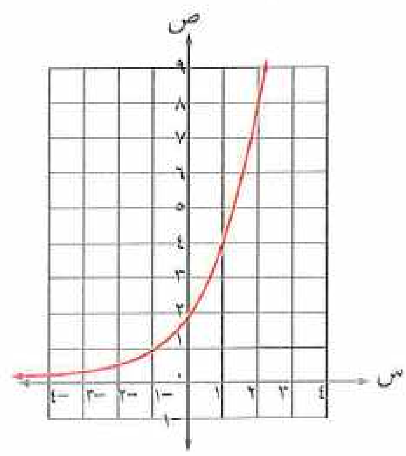


(ب)

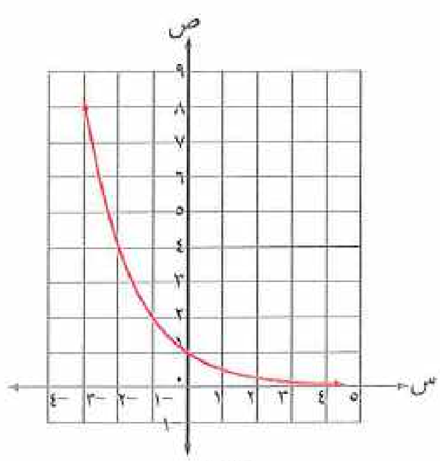


(جـ)

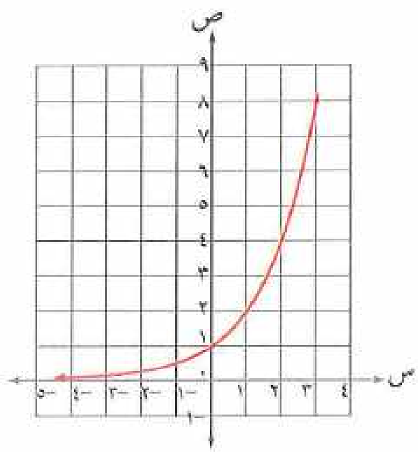
٤) تأمّل الأشكال الآتية، ثم اكتب رقم الشكل المناسب لكل قاعدة من قواعد الاقترانات، ذاكرًا السبب:



(١)



(٢)



(٣)

أ) ق (س) = $(٢)^{-س}$ (   )

ب) هـ (س) = $(٢)^{س}$ (   )

جـ) ل (س) = $(٢)^{(س+١)}$ (   )

ثالثًا المعادلة الأسية Exponential Equation

إذا كان النمو السكاني في إحدى المدن يخضع لقانون النمو والاضمحلال، وكان عدد سكان المدينة ٢٧٠٠٠ نسمة عام ٢٠٠٠م، وازداد العدد بانتظام بمعدل ٤ ٪ سنويًا، فكم كان عدد سكان المدينة عام ١٩٧٥م، علمًا بأن النمو معطى بالعلاقة:

ع (ن) = ع. × هـ $^{\text{أن}}$ ؟

ما نوع كل معادلة من المعادلات الآتية:

١) ٣س$^{-٤}$ = ٨   ٢) س^{٢} − س = ٦

٣) س^{٣} + ٤س^{٢} − ٦س +٧ = ١٢   ٤) (٢)$^{\text{س}}$ = ٨

المعادلة (٢)$^{\text{س}}$ = ٨ هي نوع مختلف عمّا تعلمته سابقًا، وتسمى **معادلة أسية**، وهي معادلة يظهر فيها المتغير بصورة أسٍّ، وحلها يعني إيجاد قيم المتغير فيها، علمًا بأن حل **المعادلة الأسية** يعتمد على إيجاد مقدارين أسيين متساويين لهما الأساس نفسه، مثل: أ$^{\text{ق(س)}}$ = أ$^{\text{هـ(س)}}$.

تعميم

إذا كان أ$^{\text{ق(س)}}$ = أ$^{\text{هـ(س)}}$، فإن ق (س) = هـ (س)   حيث أ ≠ ١

نتيجة

إذا كان أ$^{\text{ق(س)}}$ = ١، فإن ق (س) = ٠   حيث أ ≠ ١

المثال ١

أيّ المعادلات الآتية تُعَدُّ معادلة أسية:

١) س^{١٠٠} = ١   ٢) ٤ = ٥ × (٢)$^{\text{س}}$

٣) ٤ = (٢)$^{\text{س}}$ ٤) (٧)$^{\text{س}+٥}$ = ٦٣

الحل

المعادلة في كلٍّ من (٢) ،و(٣)، و(٤) هي معادلة أسية، أمّا المعادلة: س^{١٠٠} = ١ فليست أسية؛ لأن الأس فيها ليس متغيرًا.

التدريب (١)

أيّ المعادلات الآتية تُعَدُّ معادلة أسية:

١) $(٣)^{س} = ٢٧$ ٢) $(٨)^{س} + ٣ = ٢س$

٣) $٥ \times (٤)^{س} = ٩$ ٤) $س^{٣} = ٤^{س}$

المثال ٢

حل المعادلات الأسية الآتية:

١) $٧^{س^{٢} - س} = ٧^{٦}$ ٢) $(٣)^{س-٢} = ٢٧$

٣) $(٥)^{٣س-٦} = ١$ ٤) $(٧)^{٢س-٨} = (٥)^{٢س-٨}$

الحل

١) $(٧)^{س^{٢} - س} = ٧^{٦}$

بما أن الأساسات في طرفي المعادلة متساوية، فإن:

$س^{٢} - س = ٦$ (مساواة الأسس)

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$ (طرح ٦ من طرفي المعادلة)

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$ (تحليل الطرف الأيمن إلى العوامل)

$س = ٣$، $س = -٢$ (إيجاد جذور المعادلة)

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٢ ، ٣\}$.

٢) $(٣)^{س-٢} = ٢٧$

$(٣)^{س-٢} = (٣)^{٣}$ (تعويض $٢٧ = ٣^{٣}$)

$س - ٢ = ٣$ (الأساسات متساوية)

$س = ٥$ (جمع ٢ لطرفي المعادلة)

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٥\}$.

٣) $(٥)^{٣س - ٦} = ١$

$٣س - ٦ = ٠$ (نتيجة)

$٣س = ٦$ (جمع ٦ لطرفي المعادلة)

∴ $س = ٢$ (قسمة طرفي المعادلة على العدد ٣)

∴ مجموعة الحل = $\{٢\}$.

٤) $(٧)^{٢س-٨} = (٥)^{٢س-٨}$

لاحِظ أن الأسس متساوية والأساسات مختلفة، وأنه لا يمكن تساوي طرفي المعادلة الأسية إلّا في حالة واحدة فقط هي أن يكون أس كليهما صفرًا.

بما أن: $٧^{٠} = ٥^{٠} = ١$ ، فإن:

$٢س - ٨ = ٠$ ، وإن: (مساواة الأس بالعدد صفر)

$٢س = ٨$ (جمع ٨ لطرفي المعادلة)

∴ $س = ٤$ (قسمة طرفي المعادلة على ٢)

∴ مجموعة الحل = $\{٤\}$.

التدريب (٢)

حل المعادلات الأسية الآتية:

١) $(٥)^{س^٢} = (٥)^{س}$

٢) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٣٢$

٣) $(٧)^{س^٢-س} = ١$

٤) $(٤)^{٢س-١} = (٨)^{٢س}$

المثال ٣

حل المعادلتين الأسيتين الآتيتين:

١) $(٢)^{س} \times (٢)^{٣س+٤} = (٣٢)^{س}$

٢) $\frac{٩^{٢س}}{٣^{س}} = (٢٧)^{٢س+١}$

الحل

١) $(٢)^{س} \times (٢)^{٣س+٤} = (٣٢)^{س}$

$(٢)^{٤س+٤} = (٣٢)^{س}$ (قوانين الأسس)

$(٢)^{٤س+٤} = (٢^{٥})^{س}$ ($٣٢ = ٢^{٥}$)

$(٢)^{٤س+٤} = (٢)^{٥س}$ (قوانين الأسس)

$٤س + ٤ = ٥س$ (الأساسات متساوية)

$٤ = س$ (طرح ٤ س من الطرفين)

∴ مجموعة الحل = $\{٤\}$.

٢) $\dfrac{٩^{٢س}}{٣^{س}} = (٢٧)^{٢س+١}$

$\dfrac{٣^{٤س}}{٣^{س}} = (٢٧)^{٢س+١}$ ($(٩)^{٢س} = (٣^{٢})^{٢س} = (٣)^{٤س}$)

$(٣)^{٣س} = (٢٧)^{٢س+١}$ (قوانين الأسس)

$(٣)^{٣س} = (٣)^{٦س+٣}$ ($٢٧ = ٣^{٣}$)

$٣س = ٦س + ٣$ (الأساسات متساوية)

$٣س = -٣$ (حل المعادلة الخطية)

$س = -١$

∴ مجموعة الحل = $\{-١\}$.

التدريب (٣)

حل المعادلتين الأسيتين الآتيتين:

١) $(٥)^{-س} \times (٥)^{س-٢} = (١٢٥)^{-س}$ ٢) $\dfrac{(٤)^{س+٢}}{(٢)^{س}} = ١٦$

التدريب (٤)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $(٢)^{٣س} = ٦٤$ ب) $(٥)^{س^{٢}-س} = ١$

جـ) $(٣)^{٢س-١} = ٢٤٣$ د) $(٩)^{س-١} = (٢٧)^{س+١}$

٢) حل المعادلات الآتية:

أ) $(٣)^{س-٢} \times (٣)^{٢س} = ٢٧$ ب) $\frac{(٥)^{س+١}}{(٢٥)^{س-١}} = \frac{١}{١٢٥}$

جـ) $(٢)^{س+١} = ١٦$ د) $(٣) \times ٤^{س-١} = ١٢$

٣) أثبت أنه إذا كان $(هـ)^{س} + ٥ = (٦)\, هـ^{س}$ ، فإن $س = ٠$

٤) أثبت أنه إذا كان $(هـ)^{س} + ٢١ = ٤(هـ)^{س}$ ، فإن $(هـ)^{٢س} = ٤٩$

٥) إذا كانت $ع = ٥٠٠ - ٠,٥ \times (٢)^{٠,٠٠٤س}$ تمثل معادلة السعر – الطلب، حيث: س: عدد الوحدات المبيعة من سلعة ما، ع: السعر بالدينار للوحدة الواحدة، فجد عدد الوحدات المبيعة إذا كان السعر ٤٩٢ دينارًا.

الاقترانات اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

النتاجات

- تتعرف مفهوم اللوغاريتم.
- تتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- تتعرف الاقتران اللوغاريتمي.
- تمثل منحنى الاقتران اللوغاريتمي بيانيًّا، وتستنتج خصائصه.

أولًا اللوغاريتمات Logarithms

إذا كانت قوة الإبصار المحددة (ل) لتلسكوب طول قطر عدسته ق تعطى بالعلاقة:
ل= ٨,٨ + ٥,١ لو ق، فجد قيمة قوة الإبصار المحددة لتلسكوب طول قطر عدسته ٦٠ سم.

تعلمت في الأسس أن: $٢^{٣} = ٨$، $٣^{٢} = ٩$، ويمكن التعبير عن ذلك بصورة جديدة تسمى الصورة **اللوغاريتمية**.

فمثلًا يسمى العدد ٣ في $٢^{٣} = ٨$ **لوغاريتم ٨ للأساس ٢**، ويكتب $لو_{٢}$ **٨ = ٣**

وفي $٣^{٢} = ٩$، يسمى العدد ٢ **لوغاريتم ٩ للأساس ٣**، ويكتب $لو_{٣}$ **٩ = ٢**.

إذا كان أ، جـ عددين حقيقيين موجبين، وكان أ ≠ ١، فإن $أ^{ب}$ = جـ إذا (وفقط) إذا $لو_{أ}$ جـ = ب.

إذا كانت قيمة أ = ١٠، فإن اللوغاريتم يسمى **اللوغاريتم الاعتيادي (Log)** من دون ذكر الأساس، ويكتب بصورة لو جـ، مثل $لو_{١٠}$ ٢ الذي يكتب بصورة لو ٢.

أمّا إذا كانت قيمة أ = هـ (العدد النابييري)، فإن اللوغاريتم يسمى اللوغاريتم الطبيعي (Ln)، ويكتب بصورة $لو_{هـ}$ جـ.

المثال ١

عبِّر عن كلٍّ مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية:

١) $(٢)^{٤} = ١٦$ ٢) $(٥)^{٠} = ١$

٣) $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ٤) $(١٠)^{٢} = ١٠٠$

الحل

١) $٢^{٤} = ١٦ \longleftrightarrow لو_{٢}\ ١٦ = ٤$

٢) $(٥)^{٠} = ١ \longleftrightarrow لو_{٥}\ ١ = ٠$

٣) $٣^{-٢} = \frac{١}{٩} \longleftrightarrow لو_{٣}\ \frac{١}{٩} = -٢$

٤) $(١٠)^{٢} = ١٠٠ \longleftrightarrow لو\ ١٠٠ = ٢$

التدريب (١)

عبِّر عن كلٍّ مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية:

١) $(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = ٣$ ٢) $(٥)^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$

٣) $(٣)^{٥} = ٢٤٣$ ٤) $(هـ)^{٠} = ١$

المثال ٢

عبِّر عن كلٍّ مما يأتي بالصورة الأسية:

١) $لو_{٢}\ ٦٤ = ٦$ ٢) $لو\ ٠,٠٠١ = -٣$

٣) $لو_{٧}\ ٧ = ١$ ٤) $لو_{٤}\ ٨ = \frac{٣}{٢}$

الحل

١) الأساس = ٢، الأس = ٦

$\therefore لو_{٢}\ ٦٤ = ٦ \longleftrightarrow (٢)^{٦} = ٦٤$

٢) الأساس = ١٠، الأس = −٣

$\therefore لو\ ٠,٠٠١ = -٣ \longleftrightarrow ١٠^{-٣} = ٠,٠٠١$

٣) الأساس = ٧، الأس = ١

∴ $لو_{٧}\ ٧ = ١ \longleftrightarrow ٧^{١} = ٧$

٤) الأساس = ٤، الأس = $\frac{٣}{٢}$

∴ $لو_{٤}\ ٨ = \frac{٣}{٢} \longleftrightarrow ٤^{\frac{٣}{٢}} = ٨$

التدريب (٢)

عبِّر عن كلٍّ مما يأتي بالصورة الأسية:

١) $لو_{٣}\ ٨١ = ٤$ ٢) $لو_{٥}\ ٥ = ١$

٣) $لو_{هـ}\ هـ^{٢} = ٢$ ٤) $لو\ ١٠٠٠٠ = ٤$

المثال ٣

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $لو_{٢}\ ٣٢$ ٢) $لو_{هـ}\ هـ^{٢}$

٣) $لو_{٩}\ ٣$ ٤) $لو\ ٠,٠١$

الحل

١) افرض أن $س = لو_{٢}\ ٣٢$

$٢^{س} = ٣٢$ (التحويل إلى الصورة الأسية)

$٢^{س} = ٢^{٥}$ $(٣٢ = ٢^{٥})$

$س = ٥$ (الأساسات متساوية)

∴ $لو_{٢}\ ٣٢ = ٥$

٢) افرض أن $س = لو_{هـ}\ هـ^{٢}$

$هـ^{س} = هـ^{٢}$ (التحويل إلى الصورة الأسية)

$س = ٢$ (حل المعادلة الأسية)

∴ $لو_{هـ}\ هـ^{٢} = ٢$

٣) افرض أن س = لـو$_{٩}$ ٣

٣ = ٩^{س} (التحويل إلى الصورة الأسية)

٣ = ٣^{٢س} (٩ = ٣^{٢})

٢س = ١ (الأساسات متساوية)

س = $\frac{١}{٢}$ (قسمة طرفي المعادلة على ٢)

∴ لـو$_{٩}$ ٣ = $\frac{١}{٢}$

٤) افرض أن س = لـو ٠,٠١

١٠^{س} = ٠,٠١ (التحويل إلى الصورة الأسية)

١٠^{س} = ١٠$^{-٢}$ (قوانين الأسس)

س = −٢ (الأساسات متساوية)

∴ لـو ٠,٠١ = −٢

التدريب (٣)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لـو$_{٢}$ ٨$^{-١}$ ٢) لـو$_{٥}$ ١٢٥

٣) لـو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ ٤) لـو ٥

التدريب (٤)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لـو$_{٢}$ ١ ، لـو$_{٣}$ ١ ، لـو$_{٥}$ ١

٢) لـو$_{٢}$ ٢ ، لـو$_{٣}$ ٣ ، لـو$_{٥}$ ٥

ماذا تستنتج؟

القانون (١)

إذا كان (أ) عددًا حقيقيًا موجبًا، و أ $\neq$ ١، فإن:

(١) $لو_{أ}\ ١ = $ صفرًا

(٢) $لو_{أ}\ أ = ١$

التدريب (٥)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $لو_{٢}\ ٢^{٣}$ ٢) $٣ \times لو_{٢}\ ٢$

٣) $لو_{٧}\ ٧^{-٢}$ ٤) $-٢ \times لو_{٧}\ ٧$

ماذا تستنتج؟

القانون (٢)

إذا كان (أ) عددًا حقيقيًا موجبًا، و أ $\neq$ ١، فإن:

$لو_{أ}\ أ^{ن} = ن$

المثال ٤

استخدم قوانين اللوغاريتمات في إيجاد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $لو_{٨}\ ٨$ ٢) $لو_{١١}\ ١$

٣) $لو_{٢}\ ٦٤$ ٤) $لو_{٥}\ ١٢٥$

الحل

١) $لو_{٨}\ ٨ = ١$ (القانون رقم ١)

٢) $لو_{١١}\ ١ = ٠$ (القانون رقم ١)

٣) $لو_{٢}\ ٦٤ = لو_{٢}\ ٢^{٦} = ٦$ (القانون رقم ٢)

٤) $لو_{٥}\ ١٢٥ = لو_{٥}\ ٥^{٣} = ٣$ (القانون رقم ٢)

التدريب (٦)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لو$_{٧٥}$ ١ ٢) لو$_{٥}$ ٥

٣) لو$_{٢}$ ١٦ ٤) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$

النشاط (١)

جد قيمة ما يأتي اعتمادًا على الجدول التالي:

١) لو$_{٢}$ (٤ × ٨) ٢) لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ٨

٣) لو$_{٢}$ (١٦ × ٤) ٤) لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٢}$ ٤

ماذا تستنتج؟

س	١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
لو$_{٢}$ س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦

القانون (٣)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، و جـ ≠ ١، فإن:

لو$_{جـ}$ (أ × ب) = لو$_{جـ}$ أ + لو$_{جـ}$ ب

النشاط (٢)

جد قيمة ما يأتي اعتمادًا على الجدول التالي:

١) لو$_{٢}$ $\frac{٣٢}{٨}$ ٢) لو$_{٢}$ ٣٢ − لو$_{٢}$ ٨

٣) لو$_{٢}$ $\frac{٦٤}{٢}$ ٤) لو$_{٢}$ ٦٤ − لو$_{٢}$ ٢

ماذا تستنتج؟

س	١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
لو$_{٢}$ س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦

القانون (٤)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، و جـ $\neq$ ١، فإن:

$$\text{لو}_{\text{جـ}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \text{لو}_{\text{جـ}}\ \text{أ} - \text{لو}_{\text{جـ}}\ \text{ب}$$

المثال ٥

استخدم قوانين اللوغاريتمات في إيجاد قيمة ما يأتي:

١) $\text{لو}_{٣}\ (٨١ \times ٢٧)$ ٢) $\text{لو}_{٣}\ \frac{٨١}{٢٧}$

٣) $\text{لو}_{٨}\ ١٦ + \text{لو}_{٨}\ ٤$ ٤) $\text{لو}_{١٢}\ ٢٤ - \text{لو}_{١٢}\ ٢$

الحل

١) $\text{لو}_{٣}\ (٨١ \times ٢٧) = \text{لو}_{٣}\ ٨١ + \text{لو}_{٣}\ ٢٧$ (القانون رقم٣)

$= \text{لو}_{٣}\ ٣^{٤} + \text{لو}_{٣}\ ٣^{٣}$ ($٨١ = ٣^{٤}$، $٢٧ = ٣^{٣}$)

$= ٤ + ٣ = ٧$ (القانون رقم ٢)

٢) $\text{لو}_{٣}\ \frac{٨١}{٢٧} = \text{لو}_{٣}\ ٨١ - \text{لو}_{٣}\ ٢٧$ (القانون رقم ٤)

$= \text{لو}_{٣}\ ٣^{٤} - \text{لو}_{٣}\ ٣^{٣}$ ($٨١ = ٣^{٤}$، $٢٧ = ٣^{٣}$)

$= ٤ - ٣ = ١$ (القانون رقم ٢)

٣) $\text{لو}_{٨}\ ١٦ + \text{لو}_{٨}\ ٤ = \text{لو}_{٨}\ (١٦ \times ٤)$ (القانون رقم ٣)

$= \text{لو}_{٨}\ (٦٤)$

$= \text{لو}_{٨}\ (٨)^{٢}$ ($٦٤ = ٨^{٢}$)

$= ٢$ (القانون رقم ٢)

٤) $\text{لو}_{١٢}\ ٢٤ - \text{لو}_{١٢}\ ٢ = \text{لو}_{١٢}\ \frac{٢٤}{٢}$ (القانون رقم ٤)

$= \text{لو}_{١٢}\ ١٢ = ١$ (القانون رقم ١)

التدريب (٧)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لو$_{٢}$ (٣٢ × ٦٤) ‏ ‏ ‏ ‏ ٢) لو$_{٢}$ $\frac{١٢٨}{١٦}$

٣) لو$_{٧}$ ١٤ − لو$_{٧}$ ٢ ‏ ‏ ‏ ‏ ٤) لو ٥٠ + لو ٢

فكِّر

إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١٠، فما قيمة لو ٥؟

النشاط (٣)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي اعتمادًا على الجدول التالي:

١) لو$_{أ}$ ٣^{٢} ‏ ‏ ‏ ‏ ٢) ٢ لو$_{أ}$ ٣

٣) لو$_{أ}$ ٣^{٤} ‏ ‏ ‏ ‏ ٤) ٤ لو$_{أ}$ ٣

٥) لو$_{أ}$ ٣^{٥} ‏ ‏ ‏ ‏ ٦) ٥ لو$_{أ}$ ٣

ماذا تستنتج؟

س	١	٣	٩	٢٧	٨١	٢٤٣
لو$_{أ}$ س	٠	١	٢	٣	٤	٥

فكِّر

ما قيمة أ في النشاط رقم (٣)؟

القانون (٥)

إذا كان أ، ب عددين حقيقيين موجبين، و ب ≠ ١، و(ن) عددًا حقيقيًا، فإن:

لو$_{ب}$ (أ)^{ن} = ن لو$_{ب}$ أ

المثال ٦

إذا علمت أن $\text{لو}_{\text{أ}}\,٣ = -٢$ ، فجد قيمة ما يأتي:

١) $\text{لو}_{\text{أ}}\,٣^{٥}$ ٢) $\text{لو}_{\text{أ}}\,٢٧$ ٣) $\text{لو}_{\text{أ}}\sqrt{٣^{٣}}$

الحل

١) $\text{لو}_{\text{أ}}\,٣^{٥} = ٥ \times \text{لو}_{\text{أ}}\,٣$ (القانون رقم ٥)

$= ٥ \times -٢ = -١٠$

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}\,٢٧ = \text{لو}_{\text{أ}}\,٣^{٣}$ $(٢٧ = ٣^{٣})$

$= ٣ \times \text{لو}_{\text{أ}}\,٣$ (القانون رقم ٥)

$= ٣ \times -٢ = -٦$

٣) $\text{لو}_{\text{أ}}\sqrt{٣^{٣}} = \text{لو}_{\text{أ}}(٣)^{\frac{٣}{٢}}$ (قوانين الأسس)

$= \frac{٣}{٢} \times \text{لو}_{\text{أ}}\,٣$ (القانون رقم ٥)

$= \frac{٣}{٢} \times -٢ = -٣$

التدريب (٨)

إذا علمت أن $\text{لو}_{\text{أ}}\,٢ = ٣$، فجد قيمة ما يأتي:

١) $\text{لو}_{\text{أ}}(\sqrt{٢})$ ٢) $\text{لو}_{\text{أ}}(\frac{١}{٨})$

٣) $\text{لو}_{\text{أ}}(٤\sqrt{٢})$ ٤) $\text{لو}_{\text{أ}}\,٦ - \text{لو}_{\text{أ}}\,٣$

النشاط (٤)

جد ناتج ما يأتي:

١) $\text{لو}_{٨}\,٦٤ \times \text{لو}_{٢}\,٨$ ٢) $\text{لو}_{٢}\,٦٤$

٣) $\text{لو}_{٢٥}\,٦٢٥ \times \text{لو}_{٥}\,٢٥$ ٤) $\text{لو}_{٥}\,٦٢٥$

ماذا تستنتج؟

القانون (٦)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا موجبةً، و ب ≠ ١، و جـ ≠ ١، فإن:

لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب = لو$_{جـ}$ أ

المثال ٧

جد ناتج ما يأتي: لو$_{٨}$ ٤٩ × لو$_{٧}$ ٨

الحل

لو$_{٨}$ ٤٩ × لو$_{٧}$ ٨ = لو$_{٧}$ ٤٩ (القانون رقم ٦)

= لو$_{٧}$ ٧^{٢} (٤٩ = ٧^{٢})

= ٢

التدريب (٩)

جد ناتج ما يأتي: لو$_{٢}$ ٢٧ × لو$_{٦}$ ٢ × لو$_{٣}$ ٦

فكّر

ما العلاقة بين لو$_{أ}$ ب ، لو$_{ب}$ أ؟

المثال ٨

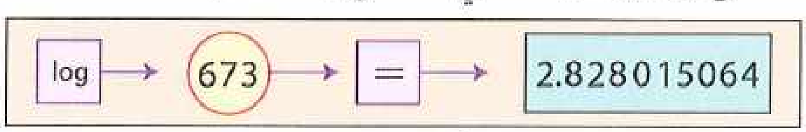
جد قيمة تقريبية (إلى أقرب منزلتين عشريتين) لكلٍّ مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

١) لو ٦٧٣ ٢) لو$_{هـ}$ ٧,٥ ٣) لو$_{٢}$ ٧

الحل

١) لإيجاد لو ٦٧٣، اتبع الخطوات الآتية:

أ) اضغط على زر (Log) كما في الشكل (٣− ١١).



الشكل (٣− ١١).

ب) أدخل العدد ٦٧٣.

ج) لو ٦٧٣ ≈ ٢,٨٣

٢) اضغط على زر (ln)، كما في الشكل (٣-١٢).

لو$_{\text{هـ}}$ ٧,٥ ≈ ٢,٠١

ln → 7.5 → $\boxed{=}$ → 2.014903021

الشكل (٣-١٢).

٣) لو$_{٢}$ ٧ × لو ٢ = لو٧ (القانون رقم ٦)

لو$_{٢}$ ٧ = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٢}}$ (قسمة الطرفين على لو ٢)

= $\frac{٠,٨٤٥}{٠,٣٠١}$

التدريب (١٠)

جد قيمة تقريبية (إلى أقرب منزلتين عشريتين) لكلٍّ مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

١) لو٣٧٢ ٢) لو$_{\text{هـ}}$ ٥,٧ ٣) لو$_{٥}$ ٦

التدريب (١١)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) عبّر عن كلٍّ مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية:

أ) $٥^٣ = ١٢٥$ ب) $٤^{-٣} = \frac{١}{٦٤}$ جـ) $٤٩^{\frac{١}{٢}} = ٧$

٢) عبّر عن كلٍّ مما يأتي بالصيغة الأسية:

أ) $لو_{٢}\, ٣٢ = ٥$ ب) $لو_{٤}\, ٢ = \frac{١}{٢}$ جـ) $لو_{٥}\, ٥ = ١$

٣) جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $لو_{٥}\, ٦٢٥$ ب) $لو_{٣}\, \frac{١}{٢٧}$

جـ) $لو_{٢٥}\, ١ + لو\, ١٠٠٠$ د) $لو_{هـ}\, هـ^{٢}$

٤) جد ناتج ما يأتي:

أ) $لو_{٥}\, (٢٥ \times ٦٢٥)$ ب) $لو_{٣}\, (\frac{٢٧}{٨١}) \times لو_{٥}\, ١٠ \times لو\, ٢٥$

جـ) $لو_{٦}\, ٢ + لو_{٦}\, ٣$ د) $لو\, ٦٠ - لو\, ٦$ هـ) $٢لو_{٩}\, ٣ + لو_{٧}\, ٤٩$

٥) إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١٠ ، لو ٣ = ٠,٤٧٧١ ، فجد:

أ) لو ٦   ب) لو ١,٥

جـ) لو ٤   د) $لو_{٢}\, ٣$

٦) اكتشف الخطأ ثم صححه في كلٍّ مما يأتي:

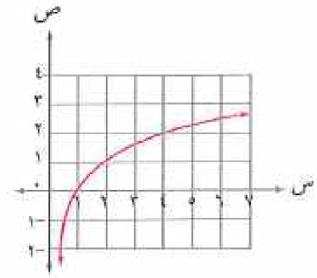
أ) $لو_{٣}\, (٩ \times ٢٧) = لو_{٣}\, ٩ \times لو_{٣}\, ٧$ ب) $لو_{٦}\, (٢ + ٤) = لو_{٦}\, ٢ + لو_{٦}\, ٤$

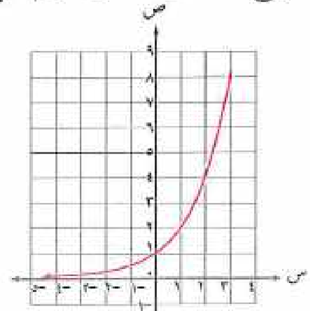
جـ) $لو_{٢}\, (٢ \times ٤) = لو_{٢}\, ٢ \times لو_{٢}\, ٤$ د) $(لو_{٣}\, ٩)^{٢} = ٢ \times لو_{٣}\, ٩$

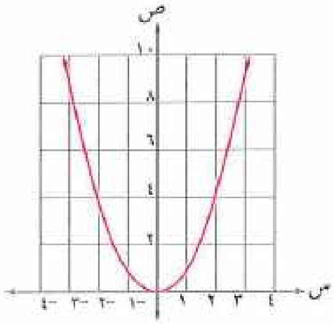
هـ) $لو_{٢}\, (٨ - ٤) = لو_{٢}\, ٨ - لو_{٢}\, ٤$ و) $لو_{٨}\, (\frac{٣٢}{٤}) = \frac{لو_{٨}\, ٣٢}{لو_{٨}\, ٤}$

ثانيًا الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه The Logarithmic Functions and its Properties

تأمَّل الأشكال الآتية، ثم بيِّن نوع الاقتران المرسوم في كلٍّ منها:


(١)


(٢)


(٣)

تعرفت أن ص = ق (س) = (٢)$^{\text{س}}$ هي اقتران أسي. وبالتحويل إلى الصيغة اللوغاريتمية، فإن: س = لـو$_{٢}$ ص، علمًا بأن الاقتران ص = لـو$_{٢}$ س يسمى **اقترانًا لوغاريتميًا**.

> يسمى الاقتران ق (س) = لـو$_{ب}$ ل (س) اقترانًا لوغاريتميًا إذا (وفقط) إذا كان ل (س) = ب$^{\text{ق(س)}}$،
> حيث ب ≠ ١، ب > ٠
> ل (س) > صفر

وفي ما يأتي بعض الاقترانات اللوغاريتمية:

١) ق (س) = لـو$_{٢}$ (س + ١)   ٢) هـ(س) = لـو (٢س − ٣)

٣) ل (س) = لـو$_{هـ}$ س

أعطِ ثلاثة أمثلة على اقترانات لوغاريتمية.

المثال ١

إذا كان ق (س) = لـو$_{٢}$ س، فجد: ق (١)، ق (٢)، ق (٤).

الحل

ق (١) = لـو$_{٢}$ ١ = صفرًا

ق (٢) = لـو$_{٢}$ ٢ = ١

ق (٤) = لـو$_{٢}$ ٤ = ٢

التدريب (١)

إذا كان ق (س) = لو$_{٣}$ س، فجد: ق (١)، ق ($٣^{٤}$)، ق ($\frac{١}{٣}$).

المثال ٢

حدِّد المجال لكل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

١) م (س) = لو (س ـ ١) ٢) ل (س) = لو$_{٧}$ (٤ ـ $س^{٢}$)

الحل

١) لتحديد مجال الاقتران اللوغاريتمي، يجب أن يكون ما في داخل اللوغاريتم موجبًا:

∴ س − ١ > ٠

وبحل المتباينة، فإن: س > ١

ولهذا فإن مجال الاقتران هو المجموعة ف = {س: س ∈ ح، س > ١} = (١، ∞).

٢) ل (س) = لو$_{٧}$ (٤ ـ $س^{٢}$)

أ) لتحديد مجال الاقتران اللوغاريتمي، يجب أن يكون ما في داخل اللوغاريتم موجبًا:

∴ ٤ ـ $س^{٢}$ > ٠

ب) جد أصفار الاقتران داخل اللوغاريتم:

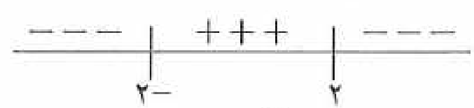
(٤ ـ $س^{٢}$) = ٠ (ما في داخل اللوغاريتم = ٠)

(٢ ـ س) (٢ + س) = صفرًا (تحليل الفرق بين مربعين)

∴ إمَّا ٢ ـ س = صفرًا، ومنها س = ٢

وإمَّا ٢ + س = صفرًا، ومنها س = − ٢

ابحث في إشارة المقدار داخل اللوغاريتم، واختر المنطقة الموجبة:



∴ المجال = {س: س ∈ ح، −٢ > س > ٢} = (−٢، ٢).

فكّر

لماذا استُثنِيت القيمتان: −٢، و ٢ من المجال؟

التدريب (٢)

حدِّد المجال لكل اقتران مما يأتي:

١) ق (س) = لو$_{هـ}$ (٣س − ٦)

٢) ل (س) = لو (س^{٢} − ٥ س + ٦)

٣) هـ (س) = لو (س^{٢} + ١)

المثال ٣

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = لو$_{٢}$ س.

الحل

(١) اختر مجموعة من قيم س بحيث تكون قوى للأساس ٢، وليكن س = $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٢}$، ١، ٢، ٤، ٨.

(٢) جد قيم ق (س) للقيم المختارة على النحو الآتي:

أ) ق ($\frac{١}{٨}$) = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-٣}$ = −٣ (لو$_{٢}$ ٢$^{-٣}$ = −٣ لو$_{٢}$ ٢ = −٣ × ١ = −٣)

ب) ق ($\frac{١}{٤}$) = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-٢}$ = −٢

جـ) ق ($\frac{١}{٢}$) = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-١}$ = −١

د) ق (١) = لو$_{٢}$ ١ = ٠

هـ) ق (٢) = لو$_{٢}$ ٢ = ١

و) ق (٤) = لو$_{٢}$ ٤ = لو$_{٢}$ ٢^{٢} = ٢

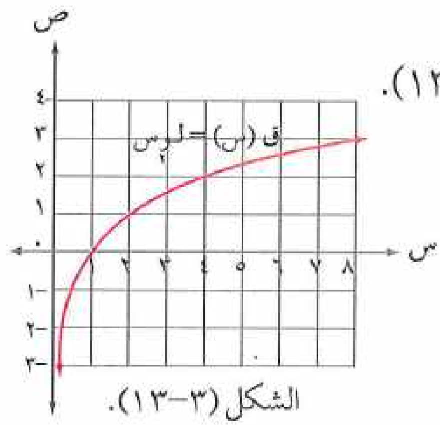
ز) ق (٨) = لو$_{٢}$ ٨ = لو$_{٢}$ ٢^{٣} = ٣

(٣) أنشئ جدولًا يحوي قيم س المختارة، وقيم ق (س) المحسوبة.

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق (س) = لو$_{٢}$ س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣

(٤) عيّن الأزواج المرتبة (س، ق(س)) في المستوى البياني.

(٥) صِل النقاط بعضها ببعض بخط منحنٍ أملس كما في الشكل (٣-١٣).



الشكل (٣-١٣).

معتمدًا الشكل (٣-١٣)، أجب عمّا يأتي:

١) حدّد مجال الاقتران ق ومداه.

٢) ما المقطع السيني لمنحنى ق؟

٣) ما المقطع الصادي لمنحنى ق (إن وجد)؟

٤) هل الاقتران ق اقتران واحد لواحد؟

٥) هل منحنى الاقتران متزايد أم متناقص؟

التدريب (٣)

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = لو٣ س، ثم استقصِ خصائصه.

المثال ٤

معتمدًا الشكل (٣-١٤) الذي يمثل الرسم البياني لمنحنى الاقتران ق (س) = لو$_{\frac{1}{2}}$س، أجب عمّا يأتي:

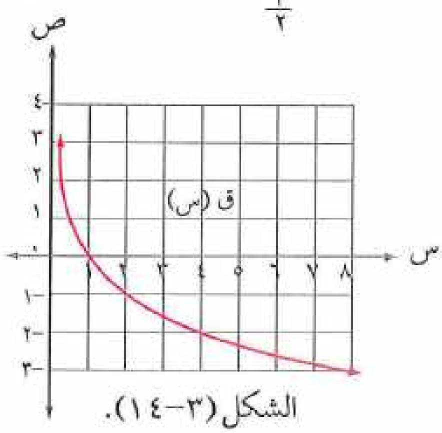
١) ما مجال الاقتران ؟ ما مداه؟

٢) ما المقطع السيني لمنحنى ق؟

٣) ما المقطع الصادي لمنحنى ق؟

٤) هل الاقتران ق اقتران واحد لواحد؟

٥) هل منحنى الاقتران ق متزايد أم متناقص؟



الشكل (٣-١٤).

الحل

١) مجال الاقتران ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة س > ٠ ، ومداه ح.

٢) المقطع السيني للمنحنى ق هو س = ١.

٣) لا يقطع المنحنى ق محور الصادات.

٤) نعم، الاقتران ق هو اقتران واحد لواحد.

٥) منحنى الاقتران ق متناقص.

التدريب (٤)

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $لو_{\frac{1}{3}}$ س، ثم استقصِ خصائصه.

يتبين من الأمثلة والتدريبات السابقة أن الاقتران ق (س) = $لو_{ب}$ س يمتاز بالخصائص الآتية:

١) مجال الاقتران ق (س) هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

٢) مدى الاقتران ق (س) هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

٣) منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (١، ٠).

٤) الاقتران ق هو اقتران واحد لواحد.

٥) منحنى ق لا يقطع محور الصادات.

تعلمت في درس سابق رسم منحنى الاقتران الأسي والاقتران الأسي الطبيعي باستخدام برمجية إكسل، ويمكنك الآن رسم منحنى الاقتران اللوغاريتمي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي باستخدام البرمجية نفسها.

المثال ٥

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $لو_{2}$س، س ∋ [٠,٥ ، ٨] باستخدام برمجية إكسل.

الحل

اتبع الخطوات الآتية:

(١) انقر أيقونة برمجية إكسل.

(٢) اختر عمودًا (ليكن العمود A)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A1)، واكتب القيمة الأولى للمتغير س، وهي (٠,٥)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A2)، واكتب القيمة الثانية للمتغير س، وهي (١).

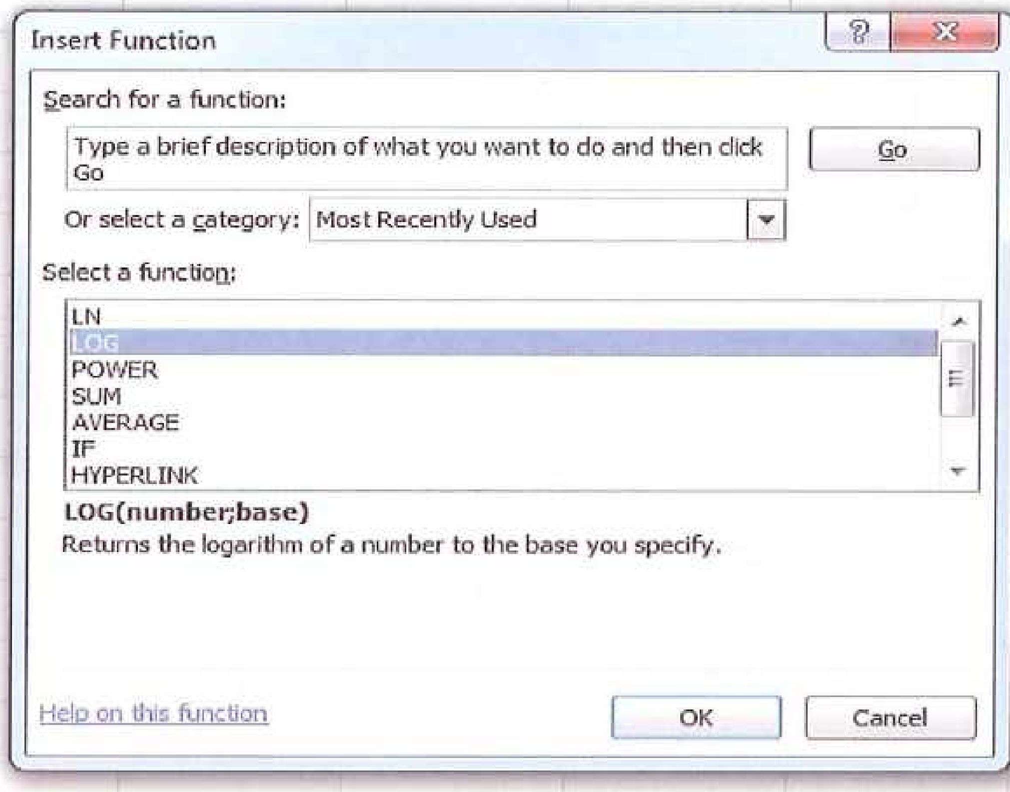
(٣) ظلِّل الخليتين، ثم اسحب المؤشر إلى الأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س، وهي (٨) كما في الشكل (٣-١٥).

(٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

	A
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
9	4.5
10	5
11	5.5
12	6
13	6.5
14	7
15	7.5
16	8

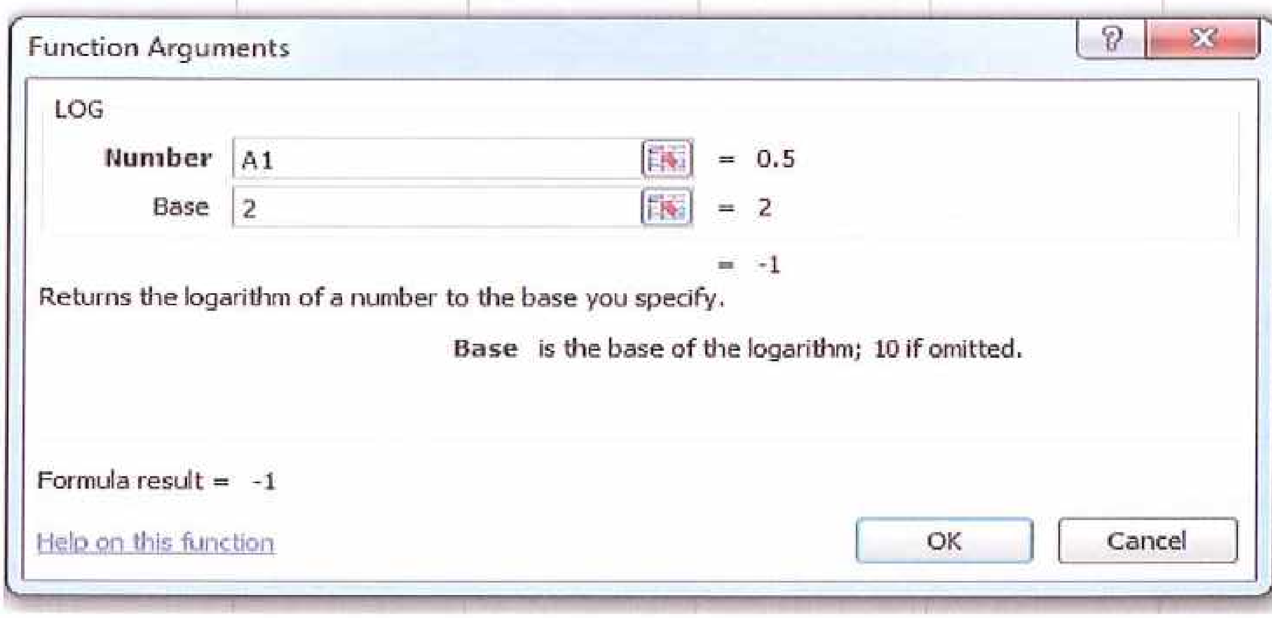
الشكل (٣-١٥).

(٥) من تبويب الصيغ (FORMULAS)، اختر أداة إدراج دالة، فيظهر صندوق الحوار (إدراج) كما في الشكل (٣-١٦).



الشكل (٣-١٦).

(٦) اختر الدالة (LOG)، ثم انقر زر (موافق)، فيظهر صندوق (حوار الدالة) كما في الشكل (٣-١٧).



الشكل (٣-١٧).

	A	B
1	0.5	-1
2	1	0
3	1.5	0.584963
4	2	1
5	2.5	1.321928
6	3	1.584963
7	3.5	1.807355
8	4	2
9	4.5	2.169925
10	5	2.321928
11	5.5	2.459432
12	6	2.584963
13	6.5	2.70044
14	7	2.807355
15	7.5	2.906891
16	8	3

الشكل (٣-١٨).

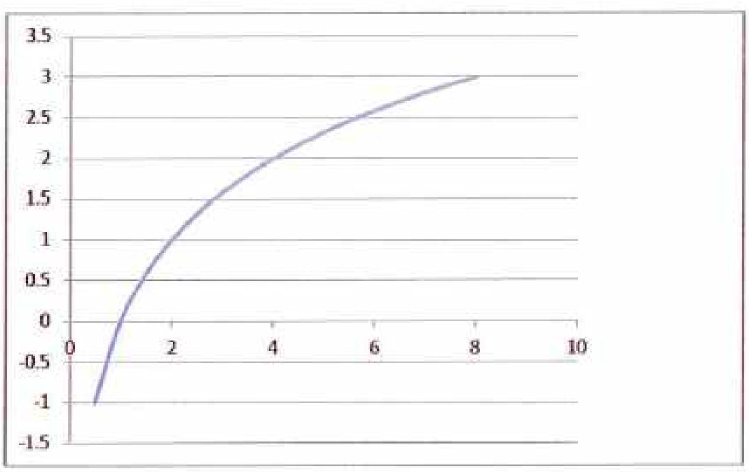
(٧) اكتب (A1) في مستطيل (Number)، ثم اكتب (٢) في مستطيل (Base)، ثم انقر زر (موافق)، فتظهر صورة القيمة (A1) في الخلية (B1).

(٨) اسحب المؤشر إلى جميع الخلايا التي كتبتها لتظهر مجموعة صور قيم المتغير س في العمود (B) كما في الشكل (٣-١٨).

(٩) ظلِّل العمودين: (A)، و(B)، ثم اختر من تبويب إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (LINE)، ثم اختر الشكل س ص مبعثر (XY-Scatter)، ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٣-١٩).

الشكل (٣-١٩).

(١٠) انقر زر (موافق)، فيظهر رسم منحنى الاقتران: ق (س) = لو$_{٢}$س، س $\in$ [٠,٥ ، ٨] كما في الشكل (٣-٢٠).



الشكل (٣-٢٠).

التدريب (٥)

ارسم منحنى الاقتران اللوغاريتمي ق (س) = لو$_{٢}$س، س $\in$ [١ ، ٩] باستخدام برمجية إكسل.

المثال ٦

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = لوهـ س، س ∈ [٠,٥ ، ٨] باستخدام برمجية إكسل.

الحل

اتبع الخطوات الآتية:

(١) انقر أيقونة برمجية إكسل.

(٢) اختر عمودًا (ليكن العمود A)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A1)، واكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (٠,٥)، ثم اكتب القيمة الثانية للمتغير س، وهي (١).

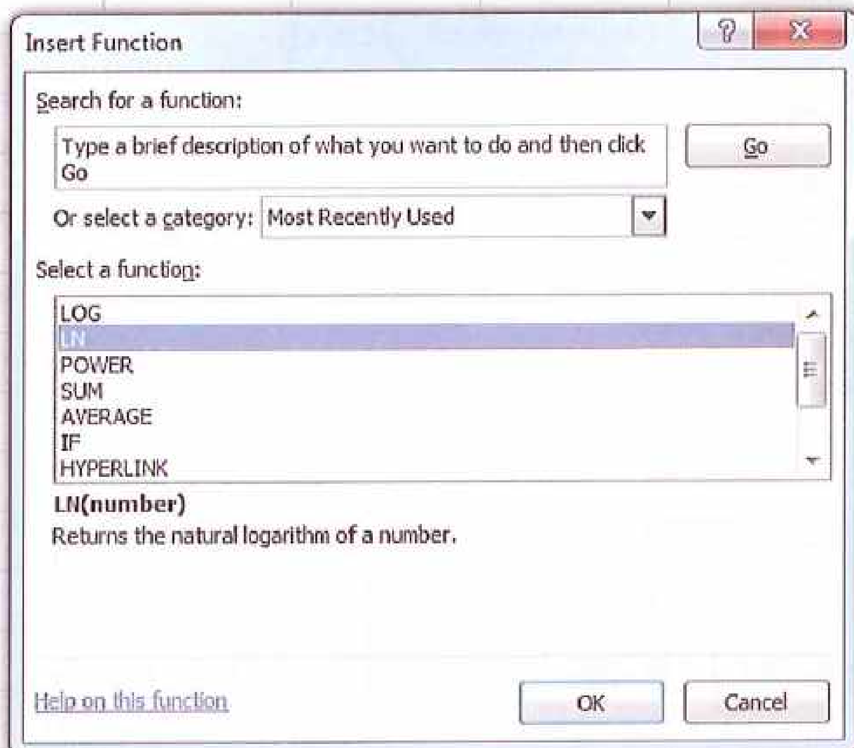
(٣) ظلِّل الخليتين، ثم اسحب المؤشر إلى الأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س، وهي (٨) كما في الشكل (٣-٢١).

	A
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
9	4.5
10	5
11	5.5
12	6
13	6.5
14	7
15	7.5
16	8

الشكل (٣-٢١).

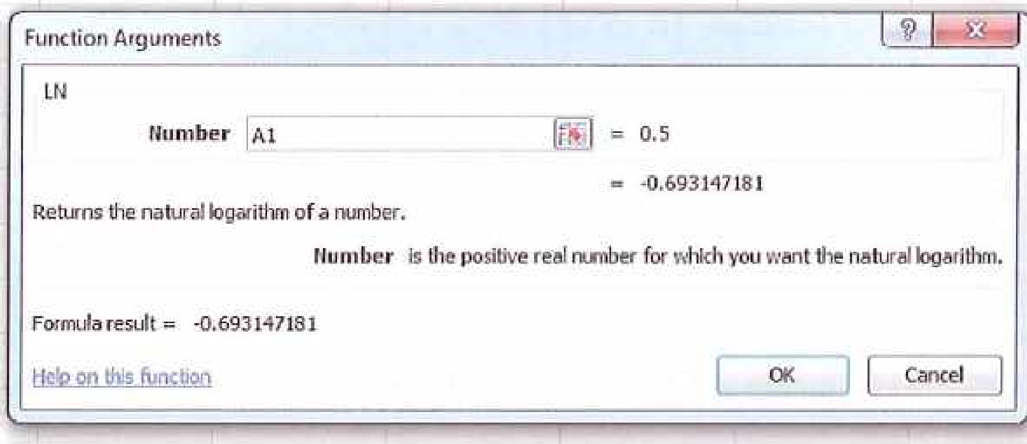
(٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

(٥) من تبويب الصيغ (FORMULAS)، اختر أداة إدراج دالة، فيظهر صندوق الحوار (إدراج) كما في الشكل (٣-٢٢).



الشكل (٣-٢٢).

(٦) اختر الدالة (Ln)، ثم انقر زر (موافق)، فيظهر صندوق (حوار الدالة) كما في الشكل (٣-٢٣).



الشكل (٣-٢٣).

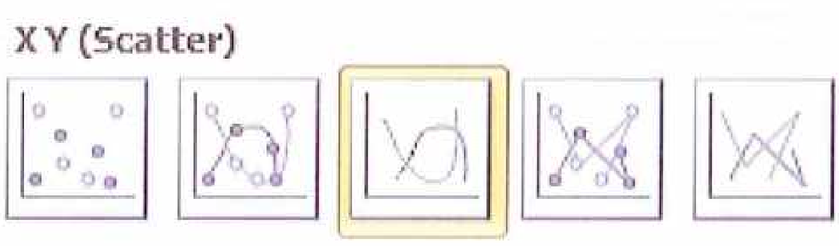
(٧) اكتب (A1) في مستطيل (Number)، ثم انقر زر (موافق)، فتظهر صورة القيمة (A1) في الخلية (B1).

(٨) اسحب المؤشر إلى جميع الخلايا التي كتبتها لتظهر مجموعة صور قيم المتغير س في العمود (B) كما في الشكل (٣-٢٤).

(٩) ظلّل العمودين: (A)، و(B)، ثم اختر من تبويب إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (LINE)، ثم اختر الشكل س ص مبعثر (XY-Scatter)، ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٣-٢٥).

B	A	
-0.69315	0.5	1
0	1	2
0.405465	1.5	3
0.693147	2	4
0.916291	2.5	5
1.098612	3	6
1.252763	3.5	7
1.386294	4	8
1.504077	4.5	9
1.609438	5	10
1.704748	5.5	11
1.791759	6	12
1.871802	6.5	13
1.94591	7	14
2.014903	7.5	15
2.079442	8	16

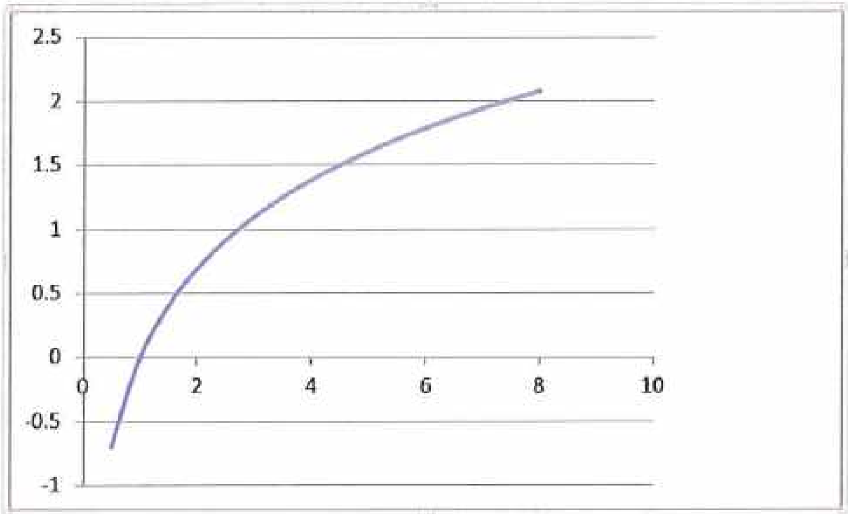
الشكل (٣-٢٤).



الشكل (٣-٢٥).

(١٠) انقر زر (موافق)، فيظهر رسم منحنى الاقتران:

ق (س) = لـو س، بالفترة [٠,٥ ، ٨] كما في الشكل (٣-٢٦).



الشكل (٣-٢٦).

التدريب (٦)

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = لـو (س + ٢)، س ∋ [٠ ، ٤] باستخدام برمجية إكسل.

الأسئلة

١) إذا كان ق (س) = لو$_{٣}$(س−٢)، فأجب عمّا يأتي:

أ) ما قيمة كلٍّ من: ق (٣)، ق (١١)، ق (٢٩)، ق ($\frac{٧}{٣}$)؟

ب) حدِّد مجال الاقتران ق.

جـ) ما إحداثي نقطة تقاطع منحنى ق مع محور السينات؟

د) ما مدى الاقتران ق؟

٢) ارسم منحنى الاقتران ق (س)= لو$_{٢}$(س+١)، ثم حدِّد خصائصه.

٣) ارسم منحنى الاقتران ق (س)= لو$_{٢}$ (س+٣) س $\in$ [−٢، ٧] باستخدام برمجية إكسل.

٤) حدِّد المجال لكل اقتران مما يأتي:

أ) ل (س) = لو$_{٩}$(٤س+١٢).

ب) م (س) = لو (س^{٢} − س).

أسئلة الوحدة

١) أكمل الجدول الآتي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
أ) $٣^{٤} = ٨١$	
ب)	$لو_{٤}\ ٢ = \frac{١}{٢}$
جـ) $٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$	
د)	$لو_{٥}\ ١ = ٠$

٢) إذا كان $ق(س) = (٢)^{س} \times لو_{٢}(س+٢)$:

أ) جد: ق(٠)، ق(٢)، ق(٦).

ب) جد قيمة س حيث ق (س) = صفرًا.

جـ) ما إحداثي نقطة تقاطع منحنى ق مع محور السينات؟

٣) حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $(٥)^{٢س-٦} = ١٢٥$

ب) $(٨)^{٢س} = (٤)^{س-٣}$

جـ) $(٧)^{س^{٢}-٩} = ١$

د) $(هـ)^{س-١} = (هـ)^{٢}$

هـ) $(٣)^{س-٢} = (٩)^{س+٢}$

و) $(٨)^{س} = \frac{٤}{(٨)^{س+١}}$

٤) أ) إذا علمت أن $ق(س) = أ \times ب^{س}$، وأن ق (٠) = ٥، وأن ق (١) = ١٠، فجد قيمة كلٍّ من أ ، ب.

ب) إذا علمت أن $لو_{٢}\ ٣^{ن} = ٥$، فجد قيمة $(٢)^{ن}$.

جـ) إذا علمت أن $(٢)^{ن} = ١٦$، فجد $لو_{٤}\ ن$.

٥) أ) ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = (٣)^{س-٢}$، ثم استقصِ خصائصه.

ب) ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = لو_{\frac{١}{٤}}\ س$.

٦) جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $\frac{\text{لو}_{٢}\ ١٦}{\text{لو}_{٢}\ ٤}$ ب) $٢\ \text{لو}_{٢٧}\ ٣ \times \text{لو}_{٩}\ ٢٧$

جـ) $\text{لو}_{٢}\ \frac{٢٠}{٧} - \text{لو}_{٢}\ \frac{١٠}{٧} \times \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{٢}\ ٩$

٧) جد قيمة كلٍّ مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

أ) $(-٦)^{\frac{١}{٥}}$ ب) $\frac{١}{٧^{٥}}$

جـ) لو ٠,٠٣٢ د) $\text{لو}_{هـ}\ ١٠$

هـ) $\text{لو}_{٥}\ ٧$

٨) أودع زيد مبلغ ٣٠٠٠ دينار في مصرف مدة ١٥ سنة بفائدة مركبة قدرها ٨ ٪ سنويًّا. جد جملة المبلغ بعد انقضاء هذه المدة.

٩) إذا كان لو ٢ = س، لو ٣ = ص، فاكتب ما يأتي بدلالة س، ص:

أ) لو ١٢ ب) لو ١,٥

جـ) لو ٦٠ د) $\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}\ ٣$

١٠) إذا كانت العلاقة بين عدد عناصر البكتيريا ع في تجمع جرثومي والزمن ن تعطى بالعلاقة:

ع = ٨ × $(٢)^{ن}$، حيث ن: الزمن بالساعات، فما عدد الساعات اللازمة ليصل عدد البكتيريا في هذا التجمع إلى ٥١٢ عنصرًا؟

١١) يتكون هذا السؤال من إحدى عشرة فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) الصورة الأسية للمعادلة $\text{لو}_{٩}\ ٢٧ = \frac{٣}{٢}$ هي:

أ) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ ب) $(٩)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$

جـ) $(٢٧)^{\frac{٣}{٢}} = ٩$ د) $(٩)^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$

(٢) الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ هي:

أ) $لو_{٨}\ ٤ = \frac{٢}{٣}$ ب) $لو_{٤}\ ٨ = \frac{٢}{٣}$

جـ) $لو_{٤} \frac{٢}{٣} = ٨$ د) $لو_{٨}\ ٤ = \frac{٣}{٢}$

(٣) قيمة المقدار $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} + لو_{٢}\ ٣٢$ تساوي:

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ٨ د) ٧

(٤) مجموعة قيم (س) التي تحقق المعادلة $٣^{س} \times ٩^{س-٢} = ٣^{٢س}$ هي:

أ) {٣} ب) {٢} جـ) {-٤} د) {٤}

(٥) إذا كان ق (س) = ٣س + $لو_{٢}$ (س − ١)، فإن ق (٢) تساوي:

أ) ٨ ب) ٧ جـ) ٦ د) ٠

(٦) إذا كان الاقتران ق (س) = ٣ × $ل^{س}$، وكان ق(س) يمر بالنقطة (١، ٦)، فإن قيمة الثابت ل تساوي:

أ) ٦ ب) ١ جـ) ٣ د) ٢

(٧) قيمة المقدار ٢$لو_{٣}$ ٣ + لو $١٠^{-٣}$ تساوي:

أ) ٢ ب) −١ جـ) −٢ د) ١

(٨) إذا كان $لو_{٨}\ (٢)^{٣}$ × $لو_{٢}$ م = ٥، فإن قيمة م تساوي:

أ) ٣٢ ب) ٢ جـ) ٨ د) ٥

(٩) المقطع الصادي للاقتران ق (س) = لو (س + ١٠) يساوي:

أ) ١٠ ب) صفرًا جـ) ١ د) لا يوجد

(١٠) مجال الاقتران ق (س) = لو (س − ١) هو:

أ) ف = {س: س ∈ ح، س > ٠} ب) ف = {س: س ∈ ح، س < ١}

جـ) ف = {س: س ∈ ح، س > ١} د) ف = {س: س ∈ ح، س < ٠}

(١١) * إذا كان $لو_{ب}$ ٢ = $\frac{١}{٣}$، فإن $لو_{ب}$ ٣٢ يساوي:

أ) ٢ ب) ٥ جـ) $-\frac{٣}{٥}$ د) $\frac{٥}{٣}$

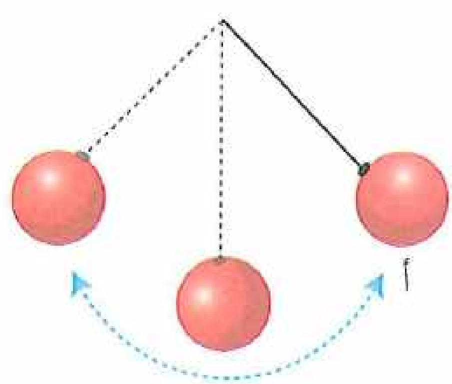
(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

الوحدة الرابعة

٤

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية

المتتاليات والمتسلسلات هي من الموضوعات الرياضية التي تُعَدُّ جزءًا من علم الجبر، والتي يُعتمَد عليها في اكتشاف العلاقات التي تربط مجموعة أعداد بعضها ببعض، مما يساعد على تنمية التفكير الرياضي للمتعلم، علمًا بأنه توجد تطبيقات عملية مهمة لهذا الموضوع في العديد من المجالات، مثل: الحسابات الخاصة بسقوط الأجسام وارتدادها، والنمو السكاني، والحركة البندولية، وحساب النمو في الاستثمارات المالية.



Arithmetic and Geometric Sequences and Series

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تحديد خصائص المتتاليات الحسابية والهندسية.
- تمييز المتتاليات الحسابية والهندسية بعضها من بعض.
- كتابة حدود متتالية عُلِم حدُّها العام.
- إيجاد الحد العام لمتتالية إذا عُلِم بعض حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلة حسابية أو هندسية منتهية.
- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية تقاربية غير منتهية.
- حل مسائل تتضمن تطبيقات عملية على مواقف حياتية ذات صلة بالموضوع، مُبرِّرًا الحل.

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

النتاجات

- تتعرف المتتالية.
- تكتب بعض حدود متتالية عُلِم حدُّها العام.
- تجد الحد العام لمتتالية عُلِم بعض حدودها.
- تتعرف المتسلسلة.
- تستخدم رمز المجموع في التعبير عن متسلسلة معطاة.
- تكتب حدود مفكوك متسلسلة.

أولاً المتتالية Sequence

مَثَّل طلبةُ الصف الثامن الأردنَّ في الدراسة الدولية للرياضيات والعلوم (TIMSS) في الأعوام ١٩٩٩م، ٢٠٠٣م، ٢٠٠٧م:

- هل تستطيع تحديد السنة التي شارك فيها الأردن في هذه الدراسة مرة رابعة؟
- إذا استمرت مشاركة الأردن في هذه الدراسة، ففي أيّ سنة ستُعقَد الدراسة مرة عاشرة؟

انظر إلى مجموعات الأعداد الآتية:

١) ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ....

٢) ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ....

٣) ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥ .

٤) ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥ .

لاحِظ أن كلاً منها هي مجموعة من الأعداد المرتبة ترتيبًا معينًا. فمثلًا عناصر المجموعة (١) أعداد فردية، وعناصر المجموعة (٢) أعداد زوجية، وعناصر المجموعة (٣) مربعات كاملة،

وعناصر المجموعة (٤) هي مضاعفات للعدد ٥.

تسمى كل مجموعة من هذه الأعداد متتالية. ولمّا كان ترتيب عناصر المتتالية مهمًّا، فإن المتتالية (٢، ٤، ٦، ٨) تختلف عن المتتالية (٢، ٤، ٨، ٦)، ويسمى كل عدد منها حدًّا، ويرمز إلى الحد المُرتَّب ن بالرمز $ح_ن$، ويسمى **الحد العام** أو **الحد النوني** للمتتالية.

فمثلًا (٣، ٥، ٧، ٩) تسمى متتالية، والعدد ٣ هو حدها الأول، ويرمز إليه بالرمز $ح_١$، ورتبته ١، والعدد ٥ هو حدها الثاني، ويرمز إليه بالرمز $ح_٢$، ورتبته ٢، والعدد ٧ هو حدها الثالث، ويرمز إليه بالرمز $ح_٣$، ورتبته ٣، وهكذا؛ ما يعني أن هذه المتتالية تتكون من: $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، $ح_٤$.

المتتالية

اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (تسمى في هذه الحالة متتالية غير منتهية)، أو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بصورة {١، ٢، ٣، ...، ن} (تسمى في هذه الحالة متتالية منتهية).

بما أن المتتالية هي اقتران، فإن لكل عدد صحيح موجب (ن) صورة واحدة فقط في المدى هي $ح_ن$ كما في الجدول الآتي:

رتبة الحد	ن	١	٢	٣	٤	المجال
قيمة الحد	$ح_ن$	٣	٥	٧	٩	المدى

المثال ١

في المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥:

١) ما قيمة: $ح_٣$، $ح_٥$، $ح_٦$؟
٢) ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٠؟
٣) ما مجال الاقتران الدال على هذه المتتالية؟
٤) ما مدى الاقتران الدال على هذه المتتالية؟

الحل

١) تُقارَن المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥ بالمتتالية: $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، $ح_٤$، $ح_٥$، $ح_٦$، $ح_٧$

فيكون $ح_٣ = ١٥$، $ح_٥ = ٢٥$، $ح_٦ = ٣٠$

٢) رتبة الحد ٢٠ هي ٤؛ لأن ترتيب الحد ٢٠ هو الرابع في المتتالية.

٣) مجال الاقتران الدال على المتتالية هو: {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}.

٤) مدى الاقتران الدال على المتتالية هو: {٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥}.

التدريب (١)

في المتتالية: ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٨ ، ...:

١) ما قيمة: $ح_{٢}$ ، $ح_{٤}$؟

٢) ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٨؟

المثال ٢

جد الحد العام للمتتالية: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...

الحل

يمكن إعادة كتابة حدود المتتالية على النحو الآتي:

٢ × ١ = ٢

٢ × ٢ = ٤

٢ × ٣ = ٦

٢ × ٤ = ٨

٢ × ٥ = ١٠

٢	٤	٦	٨	١٠
↓	↓	↓	↓	↓
٢ × ١	٢ × ٢	٢ × ٣	٢ × ٤	٢ × ٥

لاحِظ أن العدد ٢ وإشارة (×) يتكرران في كل حد، وأن الذي يتغير من حد إلى آخر هو الأعداد: ١، ٢، ٣، ٤، ٥؛ فالحد السادس ($ح_{٦}$) هو ٢ × ٦ = ١٢، والحد العاشر ($ح_{١٠}$) هو ٢ × ١٠ = ٢٠، والحد العام هو ($ح_{ن}$) = ٢ × ن = ٢ن.

المثال ٣

جد الحد العام للمتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ...

الحل

$ح_١ = ٥ \times ١ = ٥$ $\qquad$ $ح_٢ = ٥ \times ٢ = ١٠$

$ح_٣ = ٥ \times ٣ = ١٥$ $\qquad$ $ح_٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

$ح_٥ = ٥ \times ٥ = ٢٥$

$ح_ن = ٥ \times ن = ٥ن$

أي إن قيمة الحد تساوي حاصل ضرب رتبته في العدد ٥

التدريب (٢)

جد الحد العام للمتتاليات الآتية:

١) ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٤}$، ... $\qquad$ ٢) ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ...

٣) ١، ٨، ٢٧، ٦٤، ... $\qquad$ ٤) ٠، ٣، ٨، ١٥، ...

المثال ٤

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام: $ح_ن = \frac{ن}{ن^٢ + ١}$

الحل

لإيجاد حدود المتتالية، يجب التعويض في قاعدة الحد العام:

$ح_١ = \frac{١}{(١)^٢ + ١} = \frac{١}{٢}$، $\qquad$ $ح_٢ = \frac{٢}{(٢)^٢ + ١} = \frac{٢}{٥}$،

$ح_٣ = \frac{٣}{(٣)^٢ + ١} = \frac{٣}{١٠}$، $\qquad$ $ح_٤ = \frac{٤}{(٤)^٢ + ١} = \frac{٤}{١٧}$،

$ح_٥ = \frac{٥}{(٥)^٢ + ١} = \frac{٥}{٢٦}$

التدريب (٣)

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام: $ح_ن = (٥ن - ١)$.

المثال ٥

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي فيها $ح_١ = ٥$، $ح_ن = ٢ح_{ن-١} + ٣$، $ن \geq ٢$

الحل

الحد الأول معطى، وهو $ح_١ = ٥$.

يتبين من قاعدة الحد العام للمتتالية أن حساب قيمة أيّ حد في المتتالية يعتمد على معرفة قيمة الحد السابق له:

$ح_٢ = ٢(ح_١) + ٣$ (التعويض في القاعدة: $ح_ن = ٢ح_{ن-١} + ٣$)

$ح_٢ = ٢(٥) + ٣ = ١٣$ (تعويض $ح_١ = ٥$)

$ح_٣ = ٢(١٣) + ٣ = ٢٩$ (تعويض $ح_٢ = ١٣$)

$ح_٤ = ٢(٢٩) + ٣ = ٦١$ (تعويض $ح_٣ = ٢٩$)

$ح_٥ = ٢(٦١) + ٣ = ١٢٥$ (تعويض $ح_٤ = ٦١$)

التدريب (٤)

جد الحدود الخمسة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

١) $ح_١ = -٣$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} - ٥$

٢) $ح_١ = ٢$ ، $ح_ن = \frac{٣}{١٠} ح_{ن-١}$

التدريب (٥)

جد الحد العام للمتتالية: ١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...

الأسئلة

١) جد الحدود الخمسة الأولى لكلٍّ من المتتاليات التي حدها العام:

أ) $ح_ن = ن^٣$

ب) $ح_ن = ٧ + ٢ن$

جـ) $ح_ن = ٢^ن - ١$

د) $ح_ن = (\frac{٢}{٣})^ن$

هـ) $ح_ن = ح_{ن-١} + ١$ ، $ح_١ = -٣$ ، $ن \geq ٢$

و) $ح_ن = \frac{١}{٣} ح_{ن-١}$ ، $ح_١ = ٨١$ ، $ن \geq ٢$

٢) اكتب الحد العام لكل متتالية من المتتاليات الآتية:

أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$

ب) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{١٦}$

جـ) ٥ ، −٥ ، ٥ ، −٥ ، ٥ ، . . .

د) −١ ، −٢ ، −٤ ، −٨ ، −١٦

هـ) −٤ ، ٤ ، −٤ ، ٤ ، −٤ ، . . .

و) $\frac{١}{٢}$ ، $(\frac{١}{٢})^٢$ ، $(\frac{١}{٢})^٣$ ، $(\frac{١}{٢})^٤$

٣) جد الحد الثمانين للمتتالية: ٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، . . .

٤) هل متتالية الأعداد الزوجية منتهية ؟ برِّر إجابتك.

٥) أخبر معلم الرياضيات طلبته أن امتحان الرياضيات سيكون بتاريخ ٣٠/١٠ ، علمًا بأن ١/١٠ يصادف يوم الأحد:

أ) كوِّن متتالية منتهية تدل على تواريخ أيام الأحد في شهر ١٠ .

ب) في أيِّ أيام الأسبوع سيكون موعد الامتحان؟

٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

ثانيا المتسلسلة Series

يحوي مسرح ٢٠ صفًّا من المقاعد المرتبة في صفوف. فإذا كان عدد مقاعد الصف الأول ١٤ مقعدًا، والثاني ١٦ مقعدًا، والثالث ١٨ مقعدًا، وهكذا، فما عدد المقاعد في المسرح؟

المتتالية هي مجموعة من الأعداد رُتِّبت ترتيبًا معينًا وفق قاعدة معينة (صريحة، أو ضمنية)، وفُصِل فيها بين الحد والحد بالفاصلة (،). تنشأ المتسلسلة من وضع إشارة الجمع (+) بدلًا من علامة الترقيم (،)، فينتج من ذلك متسلسلة منتهية أو متسلسلة غير منتهية. فمثلًا ترتبط المتسلسلة: ٢+٤+٦+٨+١٠ بالمتتالية: ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، وترتبط المتسلسلة: ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ... بالمتتالية: ١، ٤، ٩، ١٦، ...

المثال ١

اكتب المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية: ١، −٢، ٣، −٤، ٥، −٦، ٧، −٨

الحل

يستعاض عن إشارة (،) الموجودة بين حدود المتتالية بإشارة الجمع (+)، فتكون المتسلسلة:

١ + (−٢) + ٣ + (−٤) + ٥ + (−٦) + ٧ + (−٨)

التدريب (١)

اكتب المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية: ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٥}$، ...

يمكن التعبير عن المتسلسلة بصيغة مختصرة باستخدام رمز المجموع، وهو الحرف اليوناني ($\sum$)، ويقرأ: سيجما، ويمكن كتابة المتسلسلة: $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥$ بالصورة الآتية:

عدد الحدود ← ٥

رمز المجموع ← $\sum_{ن=١}^{٥} ح_ن$ ← صيغة الحد العام

رتبة الحد الأول ← ن = ١

إذا كانت $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، ...، $ح_ن$ متتالية، فإن المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتالية هي:

$$\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر = ح_1 + ح_2 + ح_3 + \cdots + ح_ن$$

المثال ٢

استخدم رمز المجموع $\sum$ للتعبير عن المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية: ٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ٣٧

الحل

يجب أولًا إيجاد صيغة الحد العام للمتتالية، وهي: $ح_ن = ن^2 + 1$، حيث ن تتغير من الرقم (١) إلى (٦)، فتصبح المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتالية:

$$٢ + ٥ + ١٠ + ١٧ + ٢٦ + ٣٧ = \sum_{ن=1}^{6} (ن^2 + 1)$$

التدريب (٢)

استخدم رمز المجموع $\sum$ للتعبير عن المتسلسلتين الآتيتين:

١) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨

٢) −٢ + ٤ − ٦ + ٨ − ١٠ + ١٢ − ١٤

عرفت سابقًا أن المتسلسلات قد تكون منتهية أو غير منتهية، وستتعرف الآن أن ن في المتسلسلة المنتهية تتغير من ١ إلى رتبة الحد الأخير فيها، وأن الرمز ∞ في المتسلسلة غير المنتهية يُعوَّض مكان الحد الأخير فيها، فتتغير ن من ١ إلى ∞، وتكتب بالرموز:

$$\sum_{ن=1}^{\infty} ح_ن$$

المثال ٣

اكتب المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية الآتية باستخدام رمز المجموع:

٣، −٣، ٣، −٣، ٣، −٣، ...

الحل

الحد العام لهذه المتتالية هو: $ح_ن = ٣ \times (-١)^{ن+١}$، وبما أنها متسلسلة غير منتهية، فإنه يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ٣ \times (-١)^{ن+١}$$

التدريب (٣)

اكتب المتسلسلة المرتبطة بكلٍّ من المتتاليتين الآتيتين باستخدام رمز المجموع $\sum$:

١) ٠، ٧، ٢٦، ٦٣، ...

٢) $\frac{٥}{٤}$، $\frac{٥}{٨}$، $\frac{٥}{١٢}$، $\frac{٥}{١٦}$، ...

يمكن كتابة حدود $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ بتعويض قيم ر في الحد العام بدءًا بالعدد ١، وتسمى الحدود الناتجة مفكوك رمز المجموع.

المثال ٤

عبِّر عن المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{٥} (٤-ن)$ بكتابة حدودها.

الحل

كتابة حدود المتسلسلة يعني إيجاد مفكوك $\sum$:

$$\sum_{ن=١}^{٥} (٤-ن) = (٤-١) + (٤-٢) + (٤-٣) + (٤-٤) + (٤-٥)$$

$$= ٣ + ٢ + ١ + ٠ + -١$$

التدريب (٤)

اكتب مفكوك $\sum$ لكل متسلسلة مما يأتي:

١) $\sum_{ن=١}^{٧} ٣ن$ ٢) $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣^{ن}$

المثال ٥

جد مجموع كل متسلسلة مما يأتي:

١) $\sum_{ن=١}^{٥} \frac{١}{٣^{ن-١}}$ ٢) $\sum_{ن=١}^{٧} ٥$

الحل:

١) جد مفكوك $\sum_{ن=١}^{٥} \frac{١}{٣^{ن-١}}$ بتعويض قيمة ن في كل حد، ثم اجمع قيم الحدود:

$$\sum_{ن=١}^{٥} \frac{١}{٣^{ن-١}} = \frac{١}{٣^{١-١}} + \frac{١}{٣^{٢-١}} + \frac{١}{٣^{٣-١}} + \frac{١}{٣^{٤-١}} + \frac{١}{٣^{٥-١}}$$

$$= ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} = \frac{١٢١}{٨١}$$

٢) $\sum_{ن=١}^{٧} ٥ = ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ = ٥ \times ٧ = ٣٥$

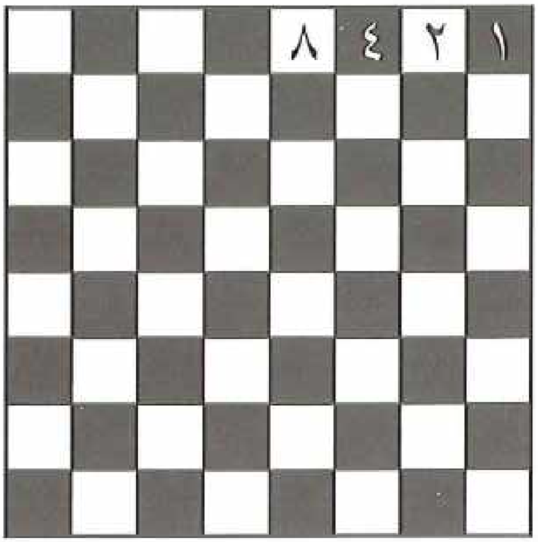
التدريب (٥)

جد مجموع كل متسلسلة مما يأتي:

١) $\sum_{ن=١}^{٤} ٢ن+١$ ٢) $\sum_{ن=١}^{٤}$ ك ، ك عدد ثابت.

المثال ٦

تحتوي رقعة الشطرنج على ٦٤ مربعًا. فإذا وضعنا في المربع الأول حبة قمح واحدة، وفي المربع الثاني حبتي قمح، وفي المربع الثالث أربع حبات قمح، وفي المربع الرابع ثماني حبات قمح، وهكذا حتى المربع الأخير في رقعة الشطرنج. عبِّر عن مجموع حبات القمح الموضوعة على رقعة الشطرنج باستخدام رمز المجموع $\sum$.



الحل

المتتالية المرتبطة بهذه المسألة هي: ١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...، $ح_{٦٤}$، وحدها العام هو $ح_{ن} = ٢^{ن-١}$، وعدد حدودها ٦٤ حدًّا، ويمكن التعبير عن المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتالية بالصورة الآتية:

$$\sum_{ن=١}^{٦٤} ٢^{ن-١}$$

التدريب (٦)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

فكِّر

قارن بين المتسلسلتين الآتيتين: (١ + ٣ + ٥ + ٧)، (٧ + ٥ + ٣ + ١)

الأسئلة ؟

١) اكتب المتسلسلات المرتبطة بكل متتالية مما يأتي، معبّرًا عنها باستخدام رمز المجموع $\sum$:

أ) ٧، ١٤، ٢١، ٢٨، ٣٥

ب) $\frac{-٢}{٣}$، $\frac{-٢}{٥}$، $\frac{-٢}{٧}$، $\frac{-٢}{٩}$

جـ) ١، −٣، ٩، −٢٧، ٨١

٢) اكتب مفكوك كل متسلسلة مما يأتي:

أ) $\sum_{ن=١}^{٦} (-٢)^{ن}$

ب) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{ن+١}$

٣) جد مجموع كل متسلسلة من المتسلسلات الآتية:

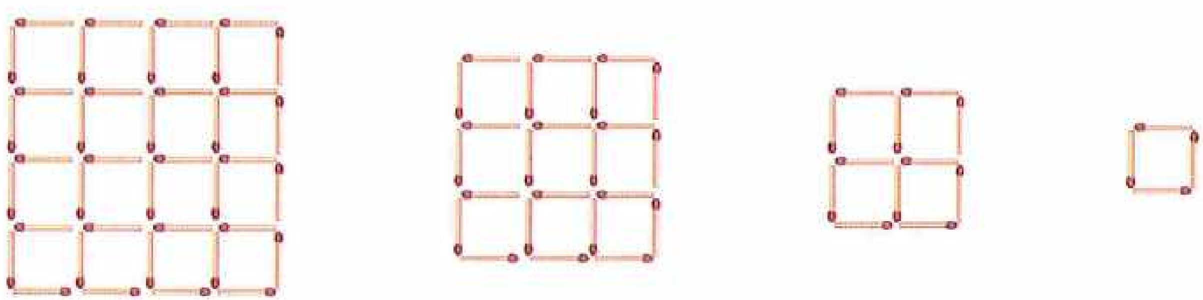
أ) $\sum_{ن=١}^{٥} (٠,٥)^{ن}$

ب) $\sum_{ن=١}^{٤} (ن^{٢}-١)$

جـ) $\sum_{ن=١}^{٨} ٩$

٤) اشترى خالد سيارة بالأقساط، بحيث يدفع ٢٥٠ دينارًا شهريًّا مدة ٣ سنوات. عبّر عن متسلسلة الأقساط باستخدام رمز المجموع.

٥) رُتِّبت مجموعة من أعواد الثقاب كما في الشكل الآتي:



(١) (٢) (٣) (٤)

اكتب المتتالية التي تمثل عدد أعواد الثقاب المستخدمة في تكوين الأشكال، ثم اكتب المتسلسلة المرتبطة بها.

الفصل الثاني

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

النتاجات

- تتعرف المتتالية الحسابية، وتميزها من غيرها.
- تجد الحد العام لمتتالية حسابية معطاة.
- تجد عدد حدود متتالية حسابية منتهية.
- تجد مجموع متسلسلة حسابية.
- تستخدم مجموع المتسلسلة الحسابية في حل مسائل رياضية وعملية.

أولاً المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

قررت سلمى المشاركة في سباق للجري، فبدأت تتدرب ٢٠ دقيقة في اليوم الأول، وفي بداية اليوم الثاني زادت مدة التدريب ٥ دقائق، وفي اليوم الذي يليه زادت المدة ٥ دقائق أخرى، وهكذا. كم ساعة تدربت سلمى في اليوم العاشر؟

انظر إلى المتتاليات الآتية:

١) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ...

٢) ٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ...

٣) ٨ ، ٥ ، ٢ ، ‎-١ ، ...

لاحِظ أن كل حد في المتتاليات نتج من إضافة عدد ثابت إلى الحد السابق له مباشرة؛ ففي المتتالية:

١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، أُضيف العدد ٢ في كل مرة، وفي المتتالية:

+٢ +٢ +٢ +٢

٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ... ، نتج كل حد من إضافة العدد ١٠ إلى الحد السابق له.

+١٠ +١٠ +١٠ +١٠

أمّا في المتتالية: ٨ ، ٥ ، ٢ ، −١ ، −٣ ، ... ، فإن المقدار الثابت الذي أُضيف إلى الحد السابق لينتج حد جديد هو (−٣)، وهذا النوع من المتتاليات يسمى متتاليات حسابية.

المتتالية الحسابية

متتالية يكون الفرق بين كل حد فيها ($ح_{ن}$) والحد السابق له مباشرة ($ح_{ن-١}$) مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية، ويرمز إليه بالرمز (د)، ويرمز إلى الحد الأول فيها بالرمز (أ). فالمتتالية الحسابية هي: أ ، أ + د، أ + ٢د، أ + ٣د، ... .

المثال ١

أيّ المتتاليتين الآتيتين حسابية:

١) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١

٢) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

الحل

١) بحساب $ح_{ن} - ح_{ن-١}$ لحدود المتتالية جميعها، فإن:

$ح_{٢} - ح_{١}$ ، $ح_{٣} - ح_{٢}$ ، $ح_{٤} - ح_{٣}$ ، $ح_{٥} - ح_{٤}$ ، $ح_{٦} - ح_{٥}$

٣ − ١ = ٢ ، ٥ − ٣ = ٢ ، ٧ − ٥ = ٢ ، ٩ − ٧ = ٢ ، ١١ − ٩ = ٢

بما أن $ح_{ن} - ح_{ن-١}$ = ٢ (مقدارًا ثابتًا) لحدود المتتالية جميعها، فإن هذه المتتالية حسابية.

٢) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

٤ − ٢ = ٢

٨ − ٤ = ٤

بما أن ٤ − ٢ ≠ ٨ − ٤ ، فإن هذه المتتالية غير حسابية.

التدريب (١)

أيّ المتتاليات الآتية حسابية:

١) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $١\frac{١}{٤}$ ، $١\frac{٣}{٤}$

٢) ٤ ، ١ ، −٢ ، −٥ ، ...

٣) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...

٤) ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ... ، ٧

المثال ٢

اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الحسابية: ١ ، ٤ ، ٧ ، ...

الحل

أساس المتتالية الحسابية: ١ ، ٤ ، ٧ ، ... هو د = ٤ − ١ = ٣

∴ الحدود الثلاثة المطلوبة هي : ١٠ ، ١٣ ، ١٦

وبذلك تكون المتتالية: ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...

التدريب (٢)

اكتب الحدود الخمسة التالية في المتتالية الحسابية: ١ ، ٥ ، ٩ ، ...

ادرس المتتالية الآتية: ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...:

$ح_{١}$ = ١ + ٢ × ٠ = ١

$ح_{٢}$ = ١ + ٢ × ١ = ٣

$ح_{٣}$ = ١ + ٢ × ٢ = ٥

$ح_{٤}$ = ١ + ٢ × ٣ = ٧

$ح_{٥}$ = ١ + ٢ × ٤ = ٩

$ح_{٩}$ = ١ + ٢ × ٨ = ١٧

$ح_{٢٠}$ = ١ + ٢ × ١٩ = ٣٩

لاحِظ أن العدد ١ ظهر في الحدود جميعها، وهو الحد الأول في المتتالية، وأن العدد ٢ (هو الفرق الثابت بين كل حدين متتاليين) ظهر أيضًا في الحدود جميعها؛ لذا فإن صورة الحد العام لهذه المتتالية هي: $ح_{ن}$ = ١ + ٢(ن − ١).

إذا علمت أن الحد الأول في المتتالية الحسابية يرمز إليه بالرمز (أ)، وأن الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يسمى أساس المتتالية، ويرمز إليه بالرمز (د)، فإن صيغة الحد العام لأيّ متتالية حسابية هي:

الحد العام ← $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د → أساس المتتالية الحسابية

الحد الأول   رتبة الحد

المثال ٣

بيِّن أن المتتالية الآتية حسابية، ثم جد حدها العام:

١٢ ، ٢٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ٥٢ ، . . .

الحل

بما أن ٢٢ − ١٢ = ١٠ ، و ٣٢ − ٢٢ = ١٠ ، . . . ، فإن المتتالية حسابية، وحدها الأول أ = ١٢ ، وأساسها د = ١٠ ، وحدها العام هو : $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د

وبتعويض قيمتي أ، د، فإن الحد العام لهذه المتتالية هو: $ح_{ن}$ = ١٢ + ١٠(ن − ١)

التدريب (٣)

جد صيغة الحد العام لكلٍّ مما يأتي:

١) المتتالية الحسابية: ٢٤ ، ١٨ ، ١٢ ، ٦ ، . . .

٢) المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥، وأساسها ٢

بناءً على قاعدة الحد العام للمتتالية الحسابية: $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د، فإن المتغيرات هي: أ ، د، $ح_{ن}$، ن، ويمكن إيجاد قيمة أيّ متغير منها إذا توافرت معطيات كافية.

المثال ٤

جد الحدود المفقودة في المتتالية الحسابية: ١١، ــــ ، ــــ ، ــــ ، −١٧

الحل

$ح_ن = أ + (ن - ١) د$ (قاعدة الحد العام)

$-١٧ = ١١ + (٥ - ١) د$ (تعويض قيم: أ ، حـن ، ن)

$-٧ = د$ (إيجاد قيمة د)

$ح_٢ = ١١ + (٢ - ١) \times -٧ = ٤$ (تعويض قيمة ن=٢)

$ح_٣ = ١١ + (٣ - ١) \times -٧ = -٣$ (تعويض قيمة ن=٣)

$ح_٤ = ١١ + (٤ - ١) \times -٧ = -١٠$ (تعويض قيمة ن=٤)

التدريب (٤)

جد قيمة الحدود المفقودة في المتتالية الحسابية: ١ ، ــــ ، ــــ ، ١٣

المثال ٥

يحتوي خزان على ٩٠م^{٣} من الماء، ويُستهلَك منه يوميًا نحو ٥ م^{٣}:

١) جد كمية الماء المتبقية في الخزان في نهاية اليوم العاشر.

٢) بعد كم يوم ينفد الماء كله من الخزان؟

الحل

١) كمية الماء في الخزان في نهاية اليوم الأول = ٨٥

كمية الماء في الخزان في نهاية اليوم الثاني = ٨٠

كمية الماء في الخزان في نهاية اليوم الثالث = ٧٥

∴ المتتالية التي تمثل كمية الماء في الخزان هي: ٨٥ ، ٨٠ ، ٧٥ ، . . .

لاحِظ أن المتتالية حسابية، وأن حدها الأول أ = ٨٥، وأساسها د = −٥

$ح_ن = أ + (ن - ١)\ د$ (قاعدة الحد العام)

$ح_{١٠} = ٨٥ + (١٠ - ١) \times -٥$ (تعويض قيم : أ ، ن ، د)

$= ٨٥ - ٤٥ = ٤٠$ م^٣ (حساب وتبسيط)

٢) نفاد الماء من الخزان يعني أن $ح_ن = ٠$

$ح_ن = أ + (ن - ١)\ د$ (قاعدة الحد العام)

$صفر = ٨٥ + (ن - ١) \times -٥$ (تعويض قيم: أ، د ، $ح_ن$)

$-٨٥ = (ن - ١) \times -٥$ (طرح ٨٥ من طرفي المعادلة)

$١٧ = ن - ١$ (القسمة على -٥)

$ن = ١٨$ (إضافة العدد ١ إلى طرفي المعادلة)

∴ ينفد الماء بعد ١٨ يومًا.

التدريب (٥)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

فكر

كيف تصف المتتالية الحسابية في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) المتتالية التي أساسها عدد صحيح موجب؟

٢) المتتالية التي أساسها عدد صحيح سالب؟

٣) المتتالية التي أساسها صفر؟

الأسئلة ؟

١) صنف المتتاليات الآتية إلى حسابية وغير حسابية:

أ) ٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ٢٠ ، ... ب) ١١ ، ٩ ، ٧ ، ...

جـ) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... د) $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...

٢) جد الحد السادس والخمسين لمتتالية حسابية:

أ) حدها الأول (أ) = −٧ ، وأساسها (د) = ٢

ب) حدها الأول (أ) = ٣ ، وأساسها (د) = −٧

٣) جد الحد العام لكلٍّ مما يأتي:

أ) المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٣ ، وأساسها ٦

ب) المتتالية الحسابية: ٠,٧ ، ٠,٩ ، ١,١ ، ١,٣ ، ...

٤) متتالية حسابية حدودها ٣ ، س، ص، ١٢ . جد قيمة كلٍّ من س ، ص.

٥) جد الحد الخامس عشر في المتتالية الحسابية التي فيها $ح_{٤}$ = ٠,١ ، و $ح_{٢}$ = ١,٦

٦) متتالية حسابية الفرق بين كل حدين فيها يساوي ٤ ، وحدها الثاني (٨). اكتب الحدود الخمسة الأولى فيها.

٧) تعاقد موظف مع إحدى الشركات للعمل فيها لقاء راتب سنوي مقداره ٣٦٠٠ دينار، وزيادة سنوية قدرها ٦٠ دينارًا يحصل عليها في نهاية كل سنة. احسب الراتب السنوي الذي يستلمه الموظف من الشركة في نهاية السنة الخامسة عشرة من بدء عمله في الشركة.

ثانيًا مجموع المتسلسلة الحسابية Sum of Arithmetic Series

طلب معلم الرياضيات إلى طلبة الصف الثالث الأساسي جمع الأعداد الصحيحة بدءًا بالعدد ١ وانتهاءً بالعدد ١٠٠، مُعتقِدًا أنهم سيستغرقون وقتًا طويلًا في الحل، بَيْدَ أن أحد الطلبة تمكن بعد دقائق معدودة من إيجاد المجموع وهو ٥٠٥٠، فكيف توصل هذا الطالب العبقري إلى الإجابة بهذه السرعة؟

المتسلسلة: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ... + ١٠٠ هي متسلسلة حسابية منتهية.

افرض أن المجموع المطلوب هو (جـ):

$$جـ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ... + ١٠٠ \quad .... (١)$$

يمكن كتابة المتسلسلة بعكس ترتيب حدودها، لتصبح:

$$جـ = ١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ + ٩٧ + ٩٦ + ٩٥ + ... + ١ \quad .... (٢)$$

عند جمع الحدود المتناظرة في المتسلسلتين: (١)، و(٢) ينتج:

$$٢جـ = ١٠١ + ١٠١ + ١٠١ + ... + ١٠١$$

وبما أن عدد الحدود ١٠٠، فإن:

$$٢جـ = ١٠٠ \times ١٠١$$

$$٢جـ = ١٠٠ \times (١٠٠ + ١)$$

$$جـ = \frac{١٠٠}{٢} \times (١ + ١٠٠) = ٥٠٥٠$$

يمكن استنتاج قاعدة عامة لإيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متتالية حسابية يرمز إليه بالرمز ($جـ_ن$)، وذلك على النحو الآتي:

$$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + د) + (ح_١ + ٢د) + (ح_١ + ٣د) + ... + ح_ن$$

$$+$$

$$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - ٢د) + (ح_ن - ٣د) + ... + ح_١$$

$$٢ جـ_ن = ن (ح_١ + ح_ن)$$

∴ $\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن)}$ هي القاعدة العامة لإيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متتالية حسابية عُلِم حدها الأول وحدها الأخير.

المثال ١

١) جد مجموع أول ٢٥ حدًّا من المتسلسلة الحسابية: ٤٠ + ٣٨ + ٣٦ + ٣٤ + ...

٢) جد $\sum_{ن=١}^{١٢} (٣+٥ن)$

الحل

١) $د = ٣٨ - ٤٠ = -٢$ (إيجاد قيمة الأساس)

$ح_ن = أ + (ن - ١) د$ (قاعدة الحد العام)

$ح_{٢٥} = ٤٠ + (٢٥ - ١)(-٢) = -٨$ (التعويض في قاعدة الحد العام)

$جـ_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}(٤٠ + -٨) = ٤٠٠$ (التعويض في قاعدة المجموع)

٢) $\sum_{ن=١}^{١٢} (٣ + ٥ن)$

جد قيمة الحد الأول $ح_١$، والحد الأخير $ح_{١٢}$:

$ح_١ = ٣ + ٥(١) = ٨$ (تعويض ن = ١)

$ح_{١٢} = ٣ + ٥(١٢) = ٦٣$ (تعويض ن = ١٢)

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_{١٢})$ (قاعدة المجموع)

$= \frac{١٢}{٢}(٨ + ٦٣) = ٤٢٦$ (حساب وتبسيط)

التدريب (١)

١) جد مجموع أول ١٠ حدود من المتتالية الحسابية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ...

٢) جد $\sum_{ن=١}^{٥} (٢ن - ١)$

تستخدم القاعدة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$ لإيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متسلسلة حسابية معروف حدها الأول والأخير. وفي حال عدم معرفة الحد الأخير يستعاض عن $ح_ن$ بـ$(أ + (ن - ١) د)$،

وعن $ح_{١}$ بـ(أ)، فينتج:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left(\text{أ} + \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right)$$

$$\boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left(٢\,\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right)}$$

وهذه صيغة أخرى لإيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متتالية حسابية عُلِم حدها الأول وأساسها.

يمكن حل الفرع (١) من المثال السابق باستخدام هذه الصيغة على الآتي:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left(٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\right)$$

$$\text{جـ}_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}\left(٢(٤٠) + ٢٤(-٢)\right)$$

$$= \frac{٢٥}{٢}(٨٠ - ٤٨) = \frac{٢٥}{٢}(٣٢) = ٤٠٠$$

المثال ٢

متتالية حسابية مجموع ثلاثة حدود متتالية فيها ٦٠، وحاصل ضرب هذه الحدود ٧٥٠٠. جد قيمة كل حد من هذه الحدود.

الحل

يمكن افتراض أن الحدود الثلاثة هي: أ − د ، أ ، أ + د.

$\therefore\ (\text{أ} - \text{د}) + \text{أ} + (\text{أ} + \text{د}) = ٦٠$ (مجموع الحدود الثلاثة= ٦٠)

$٣\text{أ} = ٦٠$ (ناتج الجمع)

$\text{أ} = ٢٠$ (حل المعادلة)

$(\text{أ} - \text{د})(\text{أ})(\text{أ} + \text{د}) = ٧٥٠٠$ (حاصل ضرب الأعداد الثلاثة ٧٥٠٠)

$(٢٠ - \text{د})(٢٠)(٢٠ + \text{د}) = ٧٥٠٠$ (تعويض قيمة أ)

$٢٠(٤٠٠ - \text{د}^{٢}) = ٧٥٠٠$ (حاصل الضرب)

$\text{د}^{٢} = ٢٥$

$\therefore\ \text{د} = \pm ٥$ (حل المعادلة)

وإذا كان $د = ٥$، فإن الحدود هي: ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ (التعويض في قيمة د)

وإذا كان $د = -٥$، فإن الحدود هي: ٢٥ ، ٢٠ ، ١٥

التدريب (٢)

متتالية حسابية أساسها ٢، ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي ٤٠ ، جد قيمة حدها الأول.

المثال ٣

رتَّب تاجر عددًا من علب العصير في ١٣ صفًّا بعضها فوق بعض، فكان في الصف الأول ٢٥ علبة، وفي الصف الثاني ٢٣ علبة، وفي الصف الثالث ٢١ علبة، وهكذا. كم عدد علب العصير جميعها؟

الحل

$أ = ٢٥$ (إيجاد قيمة الحد الأول)

$د = ح_٢ - ح_١ = ٢٣ - ٢٥ = -٢$ (إيجاد قيمة الأساس)

$جـ_ن = \frac{١٣}{٢} (٢(٢٥) + ١٢(-٢))$ (التعويض في قاعدة المجموع)

$جـ_ن = ١٦٩$ (حساب وتبسيط)

∴ عدد علب العصير ١٦٩ علبة.

التدريب (٣)

صُمِّمت ساعة لتوضع في أحد الميادين العامة بحيث تدق في اللحظة التي يصل فيها عقرب الساعات عند كلٍّ من الساعة الواحدة، والثانية، والثالثة، ...، والثانية عشرة عددًا من المرات يساوي العدد الذي يشير إليه عقرب الساعات. كم دقة تدق الساعة في أسبوع؟

الأسئلة ؟

١) جد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

أ) ١ + ٢ + ٣ + ... + ١٠٠

ب) ٢١ + ١٩ + ١٧ + ... + (−٢١)

جـ) $\sum_{ن=١}^{١٢} (٢ن + ١)$

٢) كم حدًّا من المتسلسلة: ١١ + ٩ + ٧ + ٥ + ... يجب جمعها ليكون الناتج ٢٠؟ اكتب الحلول الممكنة جميعها.

٣) متتالية حسابية أساسها ٣، ومجموع أول ١٠ حدود فيها يساوي ١٢٦. جد قيمة حدها الأول.

٤) إذا كان مجموع ٣ أعداد متتالية في متتالية حسابية يساوي ١٢، وحاصل ضربها يساوي ٢٨، فجد هذه الأعداد.

٥) مسرح مدرسة يحوي ٢٠ صفًّا من المقاعد. إذا وُضِع في الصف الأول ١٤ مقعدًا، وفي الصف الثاني ١٦ مقعدًا، وفي الصف الثالث ١٨ مقعدًا ...، وخُصِّصت المقاعد في الصفوف الثلاثة الأولى لأعضاء مجلس الآباء والمعلمين، والصفوف الأخرى للطلبة، وكانت المقاعد جميعها مشغولة، فما عدد الطلبة في المسرح؟

٦) تتدحرج كرة على منحدر طوله ١٠٠ متر، فتقطع في الثانية الأولى مسافة ٤سم، وفي الثانية الثانية ١٢سم، وفي الثانية الثالثة ٢٠سم، وهكذا. احسب الزمن الذي تستغرقه الكرة في قطع المنحدر.

الفصل الثالث المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

النتاجات

- تتعرف المتتالية الهندسية، وتميزها من غيرها.
- تجد الحد العام لمتتالية هندسية معطاة.
- تجد عدد حدود متتالية هندسية منتهية.
- تجد مجموع متسلسلة هندسية منتهية.
- تستخدم مجموع متسلسلة هندسية منتهية في حل مسائل حسابية تتضمن الربح المركب والقيمة الحالية.
- تجد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية (إن أمكن).
- تستخدم مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية في حل مسائل عملية ورياضية.

أولاً المتتالية الهندسية Geometric Sequence

تنمو نبتة ٢ سم في الأسبوع الأول، ويزيد معدل نموها كل أسبوع عن الأسبوع السابق ٥ ٪. كم سنتيمترًا تنمو النبتة في نهاية الأسبوع العاشر؟

اتفق أسعد مع ابنه سامي على الالتزام بتنظيف حديقة المنزل أسبوعيًا مدة أربعة أسابيع متتالية؛ علـى أن يعطيه مكافأة قدرهـا دينار واحد في نهاية الأسبوع الأول، وديناران في نهاية الأسبوع الثـاني، وأربعة دنانير في نهاية الأسبوع الثالث، وثمانية دنانير في نهاية الأسبوع الرابع. إذا كانت متتالية المكافآت التي سيحصل عليها سامي هي: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨، فهل هذه المتتالية حسابية؟ لماذا؟

لاحِـظ أن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشـرة في هذه المتتالية هي مقدار ثابت، وأنها تساوي ٢، حيث:

$$\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = \frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

يعرف هذا النوع من المتتاليات باسم المتتالية الهندسية.

المتتالية الهندسية

متتاليـة تكون فيهـا النسبة بين كل حـد إلى الحد السابق لـه مباشرة نسبة ثابتـة تسمى أساس المتتالية، ويرمز إليها بالرمز ر، ويرمز إلى الحد الأول فيها بالرمز أ. فالمتتالية الهندسية هي:

أ، أر، أر^{٢}، أر^{٣} ....

المثال ١

أيّ المتتاليات الآتية هندسية، مُبيِّنًا السبب:

١) ٥ ، ‒٥ ، ٥ ، ‒٥ ، ...

٢) ٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ...

٣) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...

الحل

١) ٥ ، ‒٥ ، ٥ ، ‒٥ ، ...

$\frac{-٥}{٥} = \frac{٥}{-٥} = -١$

∴ هذه المتتالية هندسية، وأساسها ر = ‒١

٢) ٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ٢ ، ...

$\frac{١٨}{٥٤} = \frac{٦}{١٨} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

∴ هذه المتتالية هندسية، وأساسها ر = $\frac{١}{٣}$

٣) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...

$\frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\frac{٦}{٤} = ١,٥$

بما أن $\frac{٤}{٢} \neq \frac{٦}{٤}$ (أي إن النسبة بين أيّ حدين متتاليين ليست قيمة ثابتة)، فإن المتتالية: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ... ليست متتالية هندسية.

التدريب (١)

أيّ المتتاليات الآتية هندسية، مُبيِّنًا السبب:

١) ٥٠٠٠ ، ٥٠٠ ، ٥٠ ، ٥ ، ...

٢) ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...

٣) ١٣٢ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ٢٨

٤) ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠

ادرس المتتالية الآتية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ ، ....:

$ح_١ = ٢ \qquad = ٢ \times (٣)^{٠}$

$ح_٢ = ٢ \times ٣ \qquad = ٢ \times (٣)^{١}$

$ح_٣ = ٢ \times ٩ \qquad = ٢ \times (٣)^{٢}$

$ح_٤ = ٢ \times ٢٧ \qquad = ٢ \times (٣)^{٣}$

$ح_٥ = ٢ \times ٨١ \qquad = ٢ \times (٣)^{٤}$

لاحِظ أن كل حد نتج من ضرب الحد السابق له في العدد ٣ وهو أساس المتتالية. ولهذا فإن:

$ح_{١٥} = ٢ \times (٣)^{١٤}$ ، $ح_{٥٠} = ٢ \times (٣)^{٤٩}$ ، $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

قاعدة الحد العام $ح_ن$ في المتتالية الهندسية التي أساسها ر وحدها الأول أ هي:

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$

المثال ٢

جد الحد الثامن لكل متتالية هندسية مما يأتي:

١) ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ...

٢) ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ...

الحل

١) بما أن المتتالية هندسية، فإن أ = ٥، ر = ٢

$\therefore ح_ن = أ ر^{ن-١}$ (قاعدة الحد العام للمتتالية الهندسية)

$ح_٨ = ٥ \times (٢)^{٧} = ٥ \times ١٢٨ = ٦٤٠$ (تعويض قيم: أ، ر ، ن)

٢) $ر = \frac{٣}{٢} \div ٣ = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$ $(ر = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}})$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$، $أ = ٣$

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$ (صيغة الحد العام)

$ح_٨ = ٣ \times (\frac{١}{٢})^٧$ (تعويض قيم: أ، ر، ن)

$= ٣ \times \frac{١}{١٢٨} = \frac{٣}{١٢٨}$ (حساب)

التدريب (٢)

جد الحد الخامس لكل متتالية هندسية مما يأتي:

١) ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...

٢) ٢٠٠ ، ١٠٠ ، ٥٠ ، ٢٥

المثال ٣

جد عدد حدود المتتالية الهندسية: ٢٥ ، ٥ ، ١ ، ... ، $\frac{١}{٦٢٥}$

الحل

المتتالية هندسية، حدها الأول أ = ٢٥، وأساسها $ر = \frac{٥}{٢٥} = \frac{١}{٥}$

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$ (قاعدة الحد العام للمتتالية الهندسية)

$\frac{١}{٦٢٥} = ٢٥ \times (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ (التعويض في صيغة الحد العام)

$\frac{١}{٦٢٥ \times ٢٥} = (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ (حساب)

$(\frac{١}{٥})^٦ = (\frac{١}{٥})^{ن-١}$ (حساب وتبسيط)

$ن - ١ = ٦ \longrightarrow ن = ٧$ (حل المعادلة الأسية)

∴ عدد حدود هذه المتتالية هو ٧

التدريب (٣)

جد عدد حدود كل متتالية هندسية مما يأتي:

١) ١ ، ٣ ، ٩ ، ... ، ٢٤٣

٢) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... ، $\frac{١}{٢٥٦}$

المثال ٤

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ دينار في حساب توفير أساسه الربح المركب بفائدة مقدارها ٣ ٪ سنويًا، بحيث تضاف في نهاية كل سنة. جد جملة المبلغ في نهاية السنة العاشرة.

الحل

$ح_١ = ٥٠٠٠ + ٥٠٠٠ \times ٠{,}٠٣$ (جملة المبلغ المودع في نهاية السنة الأولى)

$= ٥٠٠٠ (١ + ٠{,}٠٣)$

$= ٥٠٠٠ \times ١{,}٠٣ = ٥١٥٠$

$ح_٢ = ٥١٥٠ + ٥١٥٠ \times ٠{,}٠٣$ (جملة المبلغ المودع في نهاية السنة الثانية)

$= ٥١٥٠ (١ + ٠{,}٠٣) = ٥١٥٠ (١{,}٠٣)$

$ح_٣ = ٥١٥٠ \times ١{,}٠٣ + ٥١٥٠ \times ١{,}٠٣ \times ٠{,}٠٣$ (جملة المبلغ المودع في نهاية السنة الثالثة)

$= ٥١٥٠ \times (١{,}٠٣)(١+٠{,}٠٣) = ٥١٥٠ \times (١{,}٠٣)^٢$

لاحِظ أن $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ تمثل متتالية هندسية حدها الأول أ = ٥١٥٠، وأساسها ر = ١,٠٣

$\therefore ح_{١٠} = ٥١٥٠ \times (١{,}٠٣)^٩$ (جملة المبلغ المودع في نهاية السنة العاشرة)

التدريب (٤)

أودع رجل مبلغ ١٠٠٠٠ دينار في حساب توفير بفائدة مركبة مقدارها ٤ ٪ سنويًا، تضاف في نهاية كل سنة. جد جملة المبلغ في نهاية السنة السادسة.

الأسئلة ؟

١) أيّ المتتاليات الآتية هندسية، مُبيِّنًا السبب:

أ) ٠,٠٠٣ ، ٠,٠٣ ، ٠,٣ ، ٣ ، ...
ب) ١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ...

جـ) ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ...
د) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...

٢) اكتب الحد العاشر والحد الخمسين لكل متتالية مما يأتي:

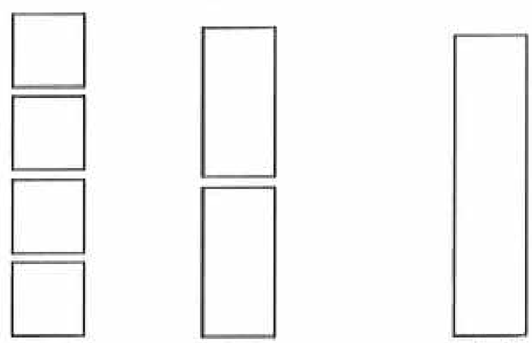
أ) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...

ب) $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، ...

٣) بناءً على الشكل التالي الذي يمثل متتالية لعدد المستطيلات المستخدمة في كل مرحلة:

أ) اكتب المتتالية.
ب) جد قاعدة حدها العام.

جـ) جد عدد المستطيلات في المرحلتين: الرابعة، والخامسة.



(١) (٢) (٣) (٤) (٥)

٤) جد الحد التاسع للمتتالية الهندسية التي حدها الأول ١٢٨ ، وأساسها ٢

٥) اكتب ٣ حدود إضافية لكل متتالية هندسية:

أ) حدها الأول أ = ٣، وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$

ب) حدها الأول أ = ٢، وأساسها ر = ١

٦) في تصفيات دوري كرة السلة كان عدد الفرق المتنافسة في الجولة الأولى ١٢٨ فريقًا، و ٦٤ فريقًا في الجولة الثانية، و ٣٢ فريقًا في الجولة الثالثة، وهكذا:

أ) ما عدد الفرق التي تتنافس في الجولة السادسة؟

ب) ما مجال الاقتران الدال على متتالية تصفيات دوري كرة السلة؟

٧) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

ثانيًا مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية Sum of Finite Geometric Series

إذا علمت أن كمية الماء التي تضخ من بئر 1م^3 في نهاية الساعة الأولى، و2م^3 في نهاية الساعة الثانية، و4م^3 في نهاية الساعة الثالثة، وهكذا، فجد كمية الماء التي ستضخ من البئر بعد مرور 8 ساعات إذا استمرت عملية الضخ بالنمط نفسه.

المتتالية الهندسية المنتهية التي حدها الأول أ، وأساسها ر تكتب بصورة:

أ ، أر ، أر^{2} ، أر^{3} ، ... ، أر$^{ن-1}$

أمّا المتسلسلة الهندسية المرتبطة بها فهي:

أ + أر + أر^{2} + أر^{3} + ... + أر$^{ن-1}$

ولكن، كيف يمكن إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية من دون جمع حدودها جميعًا؟

ليكن جـ$_{ن}$ مجموع أول (ن) حد من متسلسلة هندسية:

جـ$_{ن}$ = أ + أر + أر^{2} + أر^{3} + ... + أر$^{ن-1}$ ...(1) (مجموع (ن) حد)

ر جـ$_{ن}$ = أر + أر^{2} + أر^{3} + ... + أر$^{ن-1}$ + أر^{ن} ...(2) (ضرب المعادلة 1 في الأساس ر)

ر جـ$_{ن}$ − جـ$_{ن}$ = أر^{ن} − أ (طرح المعادلة 1 من المعادلة 2)

جـ$_{ن}$ (ر − 1) = أ (ر^{ن} − 1) (إخراج كلٍّ من جـ$_{ن}$، وَ أ بوصفه عاملًا مشتركًا)

جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1}$ (القسمة على ر − 1)

مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية التي حدها الأول أ، وأساسها ر هو:

$$جـ_{ن} = \begin{cases} \frac{أ(ر^{ن}-1)}{ر-1} ، & ر \neq 1 \\ أن ، & ر = 1 \end{cases} .$$

المثال ١

جد مجموع المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول ١٢٨، وأساسها $\frac{١}{٢}$، وعدد حدودها ٧.

الحل

أ = ١٢٨، ر = $\frac{١}{٢}$، ن = ٧

$ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ (قاعدة مجموع المتتالية الهندسية)

$ج_ن = \frac{١٢٨((\frac{١}{٢})^٧ - ١)}{\frac{١}{٢} - ١}$ (تعويض قيم: أ، ر، ن)

$= -٢ (١ - ١٢٨) = ٢٥٤$ (حساب وتبسيط)

التدريب (١)

جد مجموع كل متسلسلة هندسية:

١) حدها الأول ٨١، وأساسها $\frac{١}{٣}$، وعدد حدودها ٤

٢) حدها الأول ٤، وأساسها ١، وعدد حدودها ٥٠

المثال ٢

جد مجموع الحدود الأربعة الأولى للمتسلسلة: ٦٢٥ + ١٢٥ + ٢٥ + ٥ + ١ + ...

الحل

المتسلسلة هندسية، وحدها الأول أ = ٦٢٥، وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$

$\therefore ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ (قاعدة مجموع المتسلسلة المنتهية)

$ج_٤ = \frac{٦٢٥((\frac{١}{٥})^٤ - ١)}{\frac{١}{٥} - ١}$ (التعويض في قاعدة المجموع)

$= -\frac{٥}{٤} \times ٦٢٥ \times (\frac{١}{٦٢٥} - ١) = ٧٨٠$ (حساب وتبسيط)

التدريب (٢)

جد مجموع الحدود السبعة الأولى لكل متسلسلة هندسية مما يأتي:

١) $٢ - ٤ + ٨ - ١٦ + ٣٢ + \cdots$

٢) $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$

المثال ٣

جد ناتج $\sum_{ن=١}^{٦} ٤(٢)^{ن-١}$

الحل

$$\sum_{ن=١}^{٦} ٤(٢)^{ن-١} = ٤(٢)^{٠} + ٤(٢)^{١} + ٤(٢)^{٢} + \cdots + ٤(٢)^{٥}$$

∴ هي متسلسلة هندسية، حدها الأول أ = ٤، وأساسها ر = ٢، وعدد حدودها ن = ٦:

$$جـ_{٦} = \frac{٤((٢)^{٦} - ١)}{٢ - ١} = ٤ \times ٦٣ = ٢٥٢$$

التدريب (٣)

جد ناتج $\sum_{ن=١}^{٥} ٨١ \times (٣)^{ن-١}$

المثال ٤

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠٠ دينار في مصرف مدة سنتين على أساس الربح المركب. فإذا كانت نسبة الفائدة السنوية ٤ ٪، تضاف كل ٣ أشهر، فجد إجمالي المبلغ في نهاية السنتين.

الحل

$جـ = م\,(١ + \frac{ر}{ن})^{ن \times ت}$، حيث:

جـ : جملة المبلغ.

م : المبلغ المودع.

ر : النسبة المئوية للفائدة.

ت : عدد مرات إضافة الأرباح في السنة الواحدة.

ن : عدد السنوات.

$$جـ = ١٠٠٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٤}{٢}\right)^{٢ \times ٤}$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times (١,٠٢)^{٨} \approx ١١٢٦١٦$$ دينارًا.

التدريب (٤)

١) أودع رجل مبلغًا من المال في مصرف مدة عامين بفائدة مركبة مقدارها ٨ ٪، تضاف في نهاية كل سنة، فأصبح المبلغ ٥٠٠٠٠ دينار. ما المبلغ الذي أودعه الرجل؟

٢) أودع سعيد مبلغ ٤٠٠٠ دينار في مصرف بفائدة مركبة مقدارها ١١ ٪ سنويًا، تضاف كل ٦ أشهر. احسب جملة المبلغ بعد مرور ٥ سنوات.

فكِّر

حسب أسامة مجموع المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{٦} ٤(٢)^{ن-١}$ التي وردت في المثال رقم (٣) السابق، مُستخدِمًا الصيغة الآتية:

$$حـ_{ن} = \frac{ر \times أ_{ن} - أ}{ر - ١}$$ ، ر $\neq$ ١، حيث:

ر : أساس المتسلسلة الهندسية.

أ : حدها الأول.

ن : عدد الحدود.

$أ_{ن}$: حدها الأخير.

وعند التعويض في هذه الصيغة، وجد أن:

$$حـ_{ن} = \frac{٢ \times ١٢٨ - ٤}{٢ - ١} = ٢٥٢$$ ،

وهو الناتج نفسه للمسألة الواردة في المثال رقم (٣). كيف تفسر ذلك؟

الأسئلة

١) جد مجموع ما يأتي:

أ) الحدود الخمسة الأولى في المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول ١٢٨، وأساسها ٤

ب) الحدود الستة الأولى في المتسلسلة الهندسية: ١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ...

جـ) الحدود السبعة الأولى في المتسلسلة الهندسية: ٠,١ + ٠,٤ + ١,٦ + ...

٢) جد ناتج ما يأتي:

أ) $\sum_{ن=١}^{٩} ٢^{ن-١}$ ب) $\sum_{ن=١}^{٦} ٥(٣)^{ن-١}$

٣) متسلسلة هندسية حدها الرابع $\frac{٣}{٣٢}$، وحدها الخامس $-\frac{٣}{٦٤}$، فما مجموع أول خمسة حدود منها؟

٤) جد الحد الأول في المتتالية الهندسية التي مجموع الحدود الثمانية الأولى منها ٣٩٦٣٠، وأساسها ٤.

٥) خزان يحتوي على ٢٧م^{٣} من الماء. إذا أُفرِغ منه كل يوم $\frac{١}{٣}$ كمية الماء الموجودة فيه، فما كمية الماء التي بقيت في الخزان نهاية اليوم الخامس؟

٦) إذا كان الحد الأول لمتسلسلة هندسية ١، وأساسها −٣، فما عدد حدود المتسلسلة إذا علمت أن مجموعها −١٨٢ حدًّا؟

ثالثًا مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية Sum of Infinite Geometric Series

سقطت كرة مطاطية عموديًا من ارتفاع ٣٠ مترًا نحو سطح أرض أفقية، وكانت ترتد إلى ما نسبته ٦٠٪ من الارتفاع الذي سقطت منه كل مرة. إذا فرضنا أن الكرة اصطدمت بالأرض عددًا لا نهائيًا من المرات، فجد مجموع المسافات التي قطعتها الكرة قبل أن تسكن.

مجموع أول (ن) حد من المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول أ، وأساسها ر هو:

$$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}،\ ر \neq ١$$

ولكن، هل يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية؟

ادرس المتسلسلتين الآتيتين:

١) $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \dots$

٢) $\frac{١}{٤٨} + \frac{١}{٢٤} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٦} + \dots$

لاحظ أن: $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \dots$ هي متسلسلة هندسية غير منتهية، حدها الأول أ = ١، وأساسها ر = $\frac{١}{٢}$، وأن ر محصورة بين العددين: −١، و ١. فكلما زادت قيمة (ن) تناقصت قيمة ($ر^ن$) بحيث تصبح قريبة من العدد صفر، وهذا يعني أن مجموع حدود هذه المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ($جـ_\infty$) يقترب من القيمة $\frac{أ}{١ - ر}$

أي إن: $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \dots = \frac{١}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

أمّا المتسلسلة: $\frac{١}{٤٨} + \frac{١}{٢٤} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٦} + \dots$ فهي متسلسلة هندسية غير منتهية، حدها الأول أ = $\frac{١}{٤٨}$، وأساسها ر = ٢

لاحظ أن (ر) ليست محصورة بين العددين: −١، و ١، وأنه كلما زادت قيمة (ن) زادت قيمة ($ر^ن$)، وأن مجموع هذه المتسلسلة الهندسية غير المنتهية لا يؤول إلى قيمة معينة، وأنه يكون (∞).

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول أ، وأساسها ر، بحيث إن: $-١ < ر < ١$، هو

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

أمّا إذا كانت $|ر| \geq ١$ فإنه يتعذر إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

المثال ١

جد مجموع كل متسلسلة هندسية غير منتهية (إن أمكن) في ما يأتي:

١) $٢٥ - ٥ + ١ - \frac{١}{٥} + \ldots$

٢) $٠,٠٢ + ٠,٢ + ٢ + ٢٠ + \ldots$

٣) $\sum_{ن=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ن+١}$

الحل

١) $ر = -\frac{٥}{٢٥} = -\frac{١}{٥}$، $|-\frac{١}{٥}| < ١$، ويمكن إيجاد مجموعها.

$$جـ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٥}{١ - (\frac{-١}{٥})} = (٢٥)(\frac{٥}{٦}) = \frac{١٢٥}{٦}$$

٢) $ر = \frac{٠,٢}{٠,٠٢} = ١٠ \geq ١$؛ لذا لا يمكن إيجاد مجموع هذه المتسلسلة.

٣) $\sum_{ن=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ن+١} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \ldots$

$ر = \frac{١}{٨} \div \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$، $|\frac{١}{٢}| < ١$

$\therefore$ يمكن إيجاد مجموع هذه المتسلسلة.

$$جـ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{١}{٤}}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$$

التدريب (١)

جد مجموع كل متسلسلة هندسية غير منتهية مما يأتي:

١) $١٠ + ٢ + ٠,٤ + ٠,٠٨ + \dots$

٢) $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣(\frac{١}{٢})^{ن}$

تعلمت أن الكسر العشري الدوري $٠,\overline{٣} = ٠,٣٣٣٣٣\dots$، وأنه يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$٠,\overline{٣} = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + \dots$$

إذن، هو متسلسلة هندسية غير منتهية، حدها الأول ٠,٣ ، وأساسها ٠,١ ، ومجموعها:

$$جـ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٣}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٣}{٠,٩} = \frac{١}{٣}$$

المثال ٢

اكتب الكسر العشري الدوري $٠,\overline{٣٥}$ بصورة كسر عادي في أبسط صورة.

الحل

$$٠,\overline{٣٥} = ٠,٣٥٣٥٣٥٣٥\dots$$

$$= \frac{٣٥}{١٠٠} + \frac{٣٥}{١٠٠٠٠} + \frac{٣٥}{١٠٠٠٠٠٠} + \dots$$

$$= \frac{٣٥}{١٠٠}(١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + \dots)$$

أ = ١، ر = ٠,٠١

$$جـ = \frac{٣٥}{١٠٠}(\frac{أ}{١ - ر})$$

$$جـ = \frac{٣٥}{١٠٠}(\frac{١}{١ - ٠,٠١}) = \frac{٣٥}{٩٩}$$

التدريب (٢)

اكتب الكسر العشري الدوري $٠,\overline{٥٤٧}$ بصورة كسر عادي في أبسط صورة.

الأسئلة ؟

١) أيّ المتسلسلات الآتية يمكن إيجاد مجموعها:

أ) ٢٠٠ + ١٠٠ + ٥٠ + ٢٥ + ...

ب) ١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ...

جـ) ٠,٢ + ٠,٦ + ١,٨ + ٥,٤ + ...

٢) جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية لكلٍّ مما يأتي (إن أمكن):

أ) ٢٤ − ١٢ + ٦ − ٣ + $\frac{٣}{٢}$ + ...

ب) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن}$

جـ) ٠,٠٥ + ٠,٥ + ٥ + ٥٠ + ...

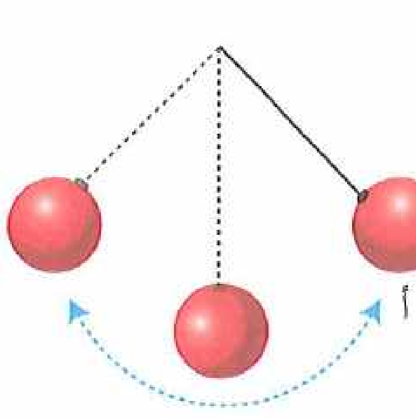
د) $\sum_{ن=١}^{\infty} (٢)^{ن+١}$

٣) اكتب الكسور العشرية الدورية الآتية بصورة كسور عادية في أبسط صورة:

أ) $٠,\overline{٤}$ ب) $٠,\overline{٤٠٥}$ جـ) $٠,\overline{٢٥}$

٤) متسلسلة هندسية غير منتهية، أساسها $\frac{١}{٢}$، ومجموعها ٣٠٠، فما حدها الأول؟

٥) كرة معلقة بخيط تتحرك بحرية انطلاقًا من الموقع أ، وتتأرجح في مستوى واحد. إذا فرضنا أن الكرة تحركت عددًا لا نهائيًا من المرات ذهابًا وإيابًا، وكانت أطوال الأقواس التي تقطعها الكرة: ١٨، ٩، ٤,٥، ٢,٢٥، ...، فجد مجموع أطوال الأقواس التي قطعتها الكرة.



٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

١) جد الحد العام (الحد النوني) للمتتاليات الآتية:

أ) ٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، ...

ب) ٢٧ ، ٢٢ ، ١٧ ، ١٢ ، ٧ ، ...

جـ) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...

د) ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ...

٢) جد الحدود الخمسة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

أ) متتالية حسابية حدها الأول ١٠ ، وأساسها −٥

ب) متتالية هندسية حدها الأول ٢٥ ، وأساسها $\frac{١}{٥}$

جـ) متتالية حدها الأول ١٢ ، وحدها العام $ح_{ن} = ٣ح_{ن-١}$ ، $ن \geq ٢$

٣) جد مجموع كل متسلسلة من المتسلسلات الآتية:

أ) ١+٣+٥+٧+٩+...+٩٩

ب) $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٩} + ...$

جـ) $\sum_{ن=١}^{٨} (٢)^{ن-١}$

د) $\sum_{ن=١}^{\infty} (\frac{١}{٢})^{ن}$

٤) اكتب خمسة حدود من المتتالية الحسابية: ٢ ، ٤ ، ... ، ثم اكتب خمسة حدود أخرى من المتتالية الهندسية: ٢ ، ٤ ، ...

٥) جد الحدود المفقودة في المتتالية الحسابية: ٥٧ ، ــــ ، ــــ ، ــــ ، ٣٧

٦) جد الحدود المفقودة في المتتالية الهندسية: ١٢٨ ، ــــ ، ــــ ، ــــ ، ٨

٧) اكتب الكسر العشري الدوري $0,\overline{41}$ بصورة كسر عادي في أبسط صورة.

٨) بدأ موظفان العمل في إحدى الشركات، وكان أحدهما يتقاضى راتبًا سنويًا ثابتًا مقداره ٥٠٠٠ دينار، ويتقاضى الآخر راتبًا مقداره ٤٠٠٠ دينار في السنة الأولى، ويزداد بمقدار ١٠٠ دينار كل سنة تالية:

أ) بعد كم سنة يتساوى راتبا الموظفين؟

ب) بعد كم سنة يكون مجموع ما تقاضاه الموظف الأول مساويًا لمجموع ما تقاضاه الموظف الثاني؟

٩) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ دينار في مصرف مدة خمس سنوات على أساس الربح المركب، بفائدة سنوية مقدارها ٣ ٪؛ على أن تضاف إلى المبلغ سنويًا. جد إجمالي المبلغ في نهاية المدة.

١٠) عدد سكان إحدى المدن ٢٥٠٠٠٠ نسمة، ومعدل النمو السكاني فيها ٢ ٪. كم يصبح عدد سكانها بعد مُضي ثلاث سنوات؟

١١) اشترى رجل سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠ دينار. فإذا كانت قيمة السيارة تنقص بمقدار ١٢ ٪ عن قيمتها في السنة السابقة لها، فجد قيمة السيارة بعد مرور خمس سنوات.

١٢) يتضاعف عدد البكتيريا في الظروف المثالية مرتين كل عشر دقائق. فإذا كان عدد البكتيريا في كوب حليب ١٤، فكم يصبح عددها بعد مُضي ساعة؟

١٣) صهريج يحتوي على ١٢م^{٣} من الماء. إذا تسرب منه الماء بمعدل $\frac{٣}{٤}$ م^{٣} يوميًا، فبعد كم يوم تبقى نصف كمية الماء في الصهريج؟

١٤) اشتركت نور في نادٍ للياقة البدنية، ودفعت مبلغ ٥٠ دينارًا لذلك، ثم أصبح النادي يُقدِّم لها خصمًا شهريًا مقداره ديناران في نهاية كل شهرٍ مقارنة بالشهر السابق له. إذا كان مجموع ما دفعته نور للنادي خلال أشهر التدريب ٤٩٠ دينارًا، فكم شهرًا تدربت في النادي؟

١٥) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) الحد الخامس في المتتالية التي حدها العام $ح_ن = ٣(-٢)^ن$ هو:

أ) ٣٢ ب) -٣٢

جـ) ٩٦ د) -٩٦

(٢) رتبة الحد ١٥ في المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٣٠، وأساسها -٣ هو:

أ) الخامس عشر ب) الثلاثون

جـ) الخامس د) السادس

(٣) إحدى المتسلسلات الآتية حسابية:

أ) ١+٢+٤+٨+١٦ ب) ١+٣+٥+٧+٩

جـ) ٣٣+٢٩+٢٥+٢١ د) ٨٠+٤٠+٢٠+١٠

(٤) في المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣، تكون صيغة الحد العام فيها:

أ) $ح_ن = ٣(٥)^ن$ ب) $ح_ن = ٣(٥)^{ن-١}$

جـ) $ح_ن = ٥(٣)^ن$ د) $ح_ن = ٥(٣)^{ن-١}$

(٥) مجموع المتسلسلة: $٧ + \frac{٧}{٢} + \frac{٧}{٤} + \frac{٧}{٨} + \dots$ هو:

أ) $\frac{٢٨}{١٤}$ ب) $\frac{١٠٥}{٤}$

جـ) ١٤ د) ٧

*(٦) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية: $(١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \dots)$ يساوي:

أ) $\frac{٥}{٨}$ ب) $\frac{٢}{٣}$

جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ∞

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

تم بحمد الله تعالى