



الرياضيات

الجزء الثاني

٨

الصف الثامن



إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

الصف الثامن



الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

هاتف : ٨ - ٥ / ٤١١٧٣٠٤ ، فاكس : ٤١٣٧٥٦٩ ، ص.ب : ١٩٣٠ الرمز البريدي : ١١١١٨

أو بواسطة البريد الإلكتروني : E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها،
بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٦/٥٨)، تاريخ ٢٠١٦/٣/٦ م، بدءاً من العام الدراسي
٢٠١٦م/٢٠١٧م.

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمّان - الأردن / ص.ب: ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(٢٠١٦/٣/١٢٠٠)

ISBN: 978 - 9957 - 84 - 686 - 2

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيساً) أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة أ.د. ربي محمد مقدادي
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

نوار نور الدين الفتيحة د. عمر سليمان العلي
نفين أحمد جوهر رؤى سعود اخلاوي

التحرير العلمي: د. لانا كمال عرفة، نفين أحمد جوهر

التصميم: عمر أحمد أبو عليان الرسم: فايزة فايز حداد
التحرير اللغوي: ميساء عمر الساريسي المصور: أديب عطوان
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب الإنجاز: علي محمد العرييدات

دقق الطباعة وراجعها: نفين أحمد جوهر

٢٠١٦م/١٤٣٧هـ

٢٠١٧-٢٠١٨م

الطبعة الأولى

أعيدت طباعته

قائمة المحتويات

الصفحة

الموضوع

٦

الوحدة الخامسة: المعادلات الخطية بمتغيرين

٨

الدرس الأول : المعادلة الخطية بمتغيرين

١٥

الدرس الثاني : التمثيل البياني لمعادلة خطية بمتغيرين

١٩

الدرس الثالث : حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانياً

٢٦

الدرس الرابع : حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين بالتعويض

٣٢

الدرس الخامس : حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين بالحذف

٣٨

مراجعة

٤٠

اختبار ذاتي

٤٢

الوحدة السادسة: الإنشاءات الهندسية

٤٤

الدرس الأول : إنشاء عمود على مستقيم

٤٩

الدرس الثاني : تنصيف قطعة مستقيمة

٥٢

الدرس الثالث : تنصيف زاوية

٥٥

الدرس الرابع : رسم دائرة داخل مثلث

٥٨

مراجعة

٥٩

اختبار ذاتي

٦٠

الوحدة السابعة: المثلثات

٦٢

الدرس الأول : خصائص المثلث (١)

٦٨

الدرس الثاني : خصائص المثلث (٢)

٧٥

الدرس الثالث : الزاوية الخارجة للمثلث

٨٠

الدرس الرابع : مبرهنة (فيثاغورس)

٨٨

مراجعة

٨٩

اختبار ذاتي

٩٠

الوحدة الثامنة: المجسمات

٩٢

الدرس الأول : الشبكات

٩٨

الدرس الثاني : حجم المنشور الثلاثي ومساحة سطحه

١٠٣

الدرس الثالث : حجم الاسطوانة ومساحة سطحها

١٠٨

الدرس الرابع : حجم المخروط ومساحة سطحه

١١٣

الدرس الخامس : حجم الهرم ومساحة سطحه

١١٧

الدرس السادس : حجم الكرة ومساحة سطحها

١٢٢

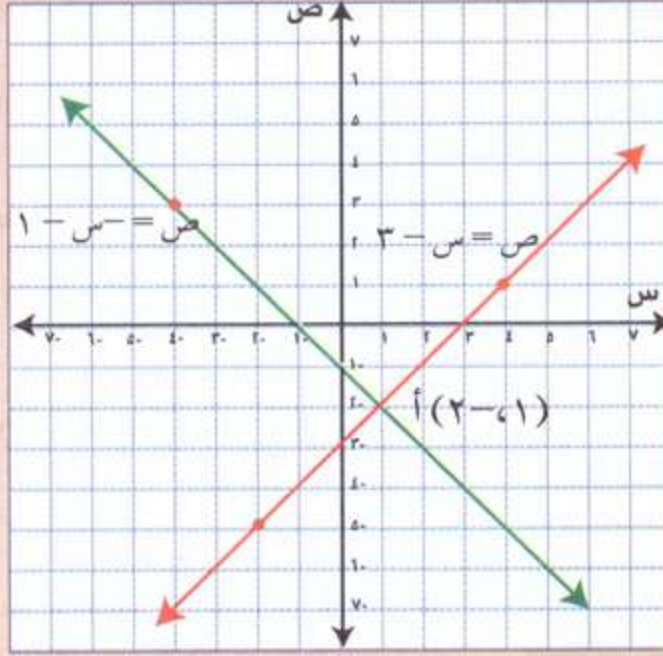
الدرس السابع : معامل التغير

١٢٧

مراجعة

١٢٩

اختبار ذاتي



يتوقع من الطالب في نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- ▶ تمييز أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين وتكوينها.
- ▶ حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطرائق مختلفة؛ (بيانيًا، أو بالتعويض، أو بالحذف).
- ▶ توظيف حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين في حل مشكلات حياتية.

النتائج

- تتعرف المعادلة الخطية بمتغيرين.
- تكون معادلة خطية بمتغيرين.



تملك سعاد محلًا تجاريًا، إذا كان مجموع أرباحها في أول عامين ٨٩٧٦ دينارًا، فاكتب تعبيرًا جبريًا يوضح مجموع أرباح سعاد في العامين، إذا كان مقدار ربحها في العام الأول س، وفي العام الثاني ص.

يُسمى التعبير الجبري الذي توصلت إليه في المسألة السابقة **معادلة خطية بمتغيرين**.

الصورة العامة للمعادلة الخطية بمتغيرين س، ص هي:
 $أس + ب ص + ج = ٠$ حيث أ، ب، ج $\in \mathbb{R}$ ، أ $\neq ٠$ صفرًا، ب $\neq ٠$ صفرًا
 أ معامل س، ب معامل ص، ج الحد المطلق أو الثابت.

مثال (١)

اكتب كلاً من المعادلات الخطية بمتغيرين في ما يأتي على صورتها العامة:

$$(١) س - ٤ ص = ٩$$

$$(٢) ٣ - ل = ٢ ع - ٦ ل + ٢١$$

$$(٣) ٨ م + ١٦ ن = ٠$$

الوحدة الخامسة



المعادلات الخطية بمتغيرين

المعادلات موضوع رياضي له تطبيقات واسعة في شتى مجالات الحياة؛ فلا يكاد يخلو مجال منها.

وقد صنّف العالم لَانْ ستيوارت Lan Stewart سبع عشرة معادلة على أنّها المعادلات التي غيّرت العالم، من بينها مبرهنة فيثاغورس التي ستعرف إليها في الوحدة السابعة.

للمعادلات أنواع عدة، منها: الخطية والتربيعية والتكعيبية، وقد تحتوي على متغير أو أكثر. وستعرف في هذه الوحدة المعادلات الخطية بمتغيرين.

الحل

$$(1) \text{ س } - 4 \text{ ص } - 9 = 0$$

$$(2) 2 \text{ ع } - 3 \text{ ل } + 21 = 0$$

$$(3) 8 \text{ م } + 11 \text{ ن } + 0 = 0$$

ب طرح ٩ من طرفي المعادلة (-٩)

بإضافة ٣ ل إلى طرفي المعادلة وتجميع الحدود المتشابهة

الحد الثابت ج = صفرًا

تدريب ١

اكتب كلاً من المعادلات الخطية بمتغيرين في ما يأتي على صورتها العامة:

$$(2) \text{ ح } = \text{ ط }$$

$$(1) 8 = 3 \text{ ص } - 2 \text{ س }$$

$$(4) 10 = \frac{4 \text{ م } + 3 \text{ ن }}{2 -}$$

$$(3) 5 \text{ ك } = 7,1 + \text{ ل }$$

فكر وناقش

طلبت المعلمة من الطالبات كتابة المعادلة $2 - (\text{هـ} - \text{و} - 7) = 14$ على الصورة العامة، فأجابت كل من سلمى وريم ورزان ولمى الإجابات الآتية على الترتيب:

$$2 - \text{هـ} - 2 = \text{و}$$

$$2 - \text{هـ} + 2 = \text{و}$$

$$- \text{هـ} + \text{و} =$$

$$\text{هـ} - \text{و} =$$

أيهن أصابت؟ برز إجابتك.

مثال (٢)

أي المعادلات الآتية خطية بمتغيرين، مع ذكر السبب:

$$(2) 5 + \text{ع} = 1 + 3 \text{ ع}$$

$$(1) 13 \text{ س } - 25 = \text{ص}^2$$

$$(4) 8 + \text{و} = 36 \text{ هـ} - 8$$

$$(3) 21 = 10 \text{ م } + 11 \text{ ن }$$

الحل

المعادلة في الفرع (٣) معادلة خطية بمتغيرين؛ لأنه يمكن كتابتها على الصورة العامة
أس + ب ص + ج = ٠، أما بقية المعادلات فهي ليست معادلات خطية بمتغيرين؛
لأنه لا يمكن كتابة أي منها على الصورة العامة للمعادلة الخطية بمتغيرين؛ فالمعادلة في
الفرع (١) أكبر قوة فيها ٢، والمعادلة في الفرع (٢) بمتغير واحد، والمعادلة في الفرع
(٤) ليست خطية؛ لوجود حاصل ضرب متغيرين.

تدريب ٢

أي المعادلات الآتية خطية بمتغيرين مع ذكر السبب:

- (١) $٧ص + س = ٥٣$
(٢) $٥ - ع = ١١ - ل$
(٣) $٤٤ - ك = ل$
(٤) $٢,٩١س = ٢,٩١ص$
(٥) $٤ج + ٢٨د = ١٧$
(٦) $ع = (ل - ١)٠$

فكر وناقش

- لماذا يشترط في الصورة العامة للمعادلة الخطية بمتغيرين ألا يكون معامل س فيها صفرًا، كذلك ألا يكون معامل ص فيها صفرًا؟
- بالعودة إلى المسألة في مقدمة الدرس؛ أجب عن كل مما يأتي:
أ) هل يمثل المقدار الجبري الذي حصلت عليه معادلة خطية بمتغيرين؟
ب) اقترح زوجًا مرتبًا يمثل ربح سعاد في كل من العامين. مبررًا إجابتك.
ج) ما عدد الأزواج المرتبة التي تمثل حلًا للمعادلة؟ قارن إجابتك مع زملائك.

يُسمى الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية الذي يحقق المعادلة الخطية بمتغيرين حلاً للمعادلة، ومجموعة حل المعادلة الخطية بمتغيرين هي مجموعة غير منتهية من الأزواج المرتبة.

مثال (٣)

أي الزوجين $(-1, 2)$ ، $(5, -1)$ حل للمعادلة $س - ٤ ص = ٩$ ؟

الحل

$$س - ٤ ص = ٩$$

$$٩ \stackrel{?}{=} (-1) - ٤(2)$$

$$٩ \neq ٧$$

إذن $(-1, 2)$ ليس حلاً للمعادلة $س - ٤ ص = ٩$

$$س - ٤ ص = ٩$$

$$٩ \stackrel{?}{=} ٥ - ٤(-1)$$

$$٩ = ٩$$

إذن $(5, -1)$ حل للمعادلة.

اقترح حلولاً أخرى للمعادلة $س - ٤ ص = ٩$ مبرراً إجابتك.

تدريب

(١) أي الأزواج الآتية حل للمعادلة $٢س - ص = ٠$ ، مبرراً إجابتك:

$$(-1, 2)، (2, 4)، (11, -22).$$

(٢) تتكون إحدى المؤسسات من ٥٨ موظفة وموظفاً. اكتب المعادلة التي توضح عدد

الموظفات والموظفين في المؤسسة، ثم قدّم حلين للمعادلة، مبرراً إجابتك.

مثال (٤)

اكتب المعادلة: $6س - 2ص = 8$ بحيث يكون ص أحد الطرفين.

الحل

$$6س - 2ص = 8$$

$$-2ص = 8 - 6س$$

$$ص = -4 + 3س$$

طرح 6س من طرفي المعادلة

قسمة طرفي المعادلة -2

تدريب ٤

اكتب المعادلات الآتية بحيث يكون ص أحد طرفي المعادلة:

$$(1) 15س - 7ص = 0$$

$$(2) 0 = \frac{1}{5}ص + \frac{2}{5}س$$

$$(3) 3ص = 10 - 2س + 2ص$$

تمثل المعادلة الخطية بمتغيرين أس + ب ص + ج = ٠ قانوناً جبرياً تعتمد قيم

أحد المتغيرين فيه على الآخر، وعند وضع ص في المعادلة بدلالة س نسمي ص **موضوعاً**

للقانون، ونسمي عملية كتابة أحد المتغيرين بدلالة الآخر **تغيير موضوع القانون**.

تدريب ٥

(١) أعد حل تدريب (٤) بجعل المتغير س موضوعاً للقانون.

(٢) كوّن معادلة خطية بمتغيرين، وأعد صياغتها بجعل س موضوعاً للقانون، ثم بجعل

ص موضوعاً للقانون.



ناقش العبارة الآتية مدعماً إجابتك بأمثلة، إن لزم الأمر:
عند تغيير موضوع القانون في معادلة من S إلى V مثلاً أو العكس، فإن مجموعة حل هذه المعادلة تتغير.

(١) أي المعادلات الآتية خطية بمتغيرين في ما يأتي، مبرراً إجابتك:

أ ($18 + \sqrt{ص} = 9س$) ب ($ع(2 - ع) = 4ل - ع^2$)

ج ($5\sqrt{ط} = ي - 5$) د ($3ن + 17م = -م$)

هـ ($28 = س$) و ($\frac{3}{11}ك = \frac{3}{11}ل$)

(٢) أعد صياغة المعادلة $4ل + 9 = ل + ع$ ؛ بجعل ل موضوعاً للقانون، ثم بجعل ع موضوعاً للقانون .

(٣) بين إذا كان الزوج المرتب إزاء كل معادلة في ما يأتي حلاً لها:

أ ($2س - ص = 8$) ، ($1، -6$)

ب ($3س + 2ص = -12$) ، ($0، 4$)

(٤) عددان طبيعيان، خمسة أمثال الأول مطروحاً من الثاني يساوي ١٠، اكتب معادلة خطية بمتغيرين توضح العلاقة بين هذين العددين، ثم اكتب حلين لها مبرراً إجابتك.

(٥) اكتشف الخطأ:

قال عادل إن: المعادلة $س^2 + ص^2 = 4$ ، هي معادلة خطية بمتغيرين، لأننا إذا أخذنا الجذر التربيعي لكل حد من حدودها، فإن الناتج $س + ص = 2$ ، ما الخطأ الذي وقع به عادل؟

النتائج

- تمثّل المعادلة الخطية بمتغيرين بيانيًا.

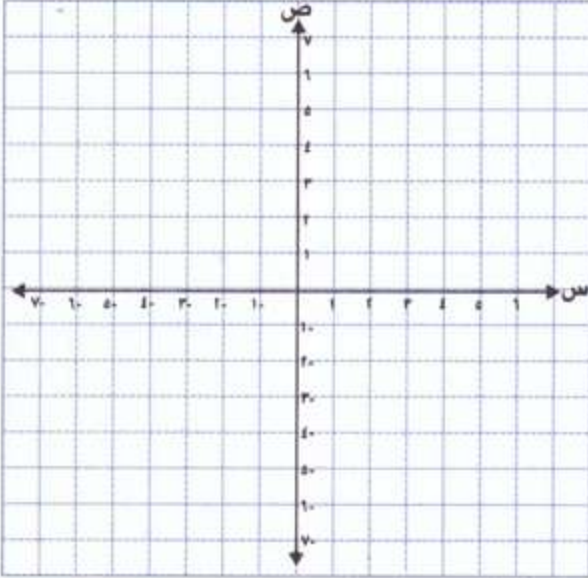
نشاط



(١) تحدث مع زميلك عن خطوات تمثيل المعادلة:

$$ص = س + ٤ \text{ بيانيًا.}$$

(٢) طبق الخطوات التي توصلت لها مع زميلك لتمثيل المعادلة.



مثال (١)

أجب عن كل مما يأتي:

- (١) مثل المعادلة $ص = ٣س - ١$ بيانيًا.
- (٢) حدّد مجموعة حل المعادلة.
- (٣) هل تنتمي النقاط $(١, ٢)$ ، $(-١١, ٣٤)$ إلى مجموعة الحل؟

الحل

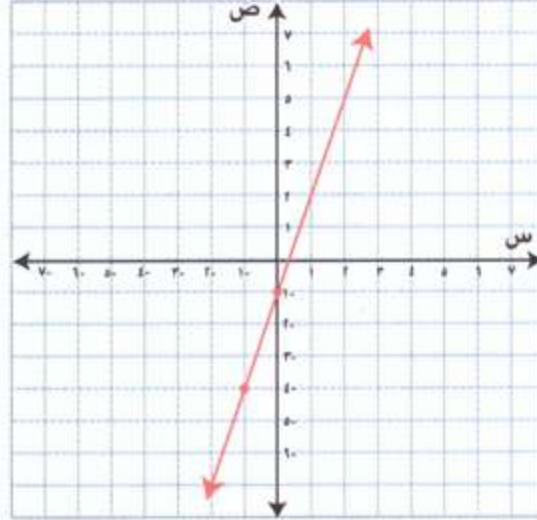
(١) لتمثيل المعادلة بيانيًا، اتبع الخطوات الآتية:

أ) اجعل $ص$ موضوع القانون في المعادلة: $ص = ٣س - ١$

ب) اختر قيمتين للمتغير $س$ ، ثم احسب قيمتي $ص$ المناظرتين لها، واكتب الزوجين المرتبين الناتجين.

س	ص = $3س - 1$	(س، ص)
1-	ص = $3(1-) - 1 = 4-$	(1-، 4-)
0	ص = $3(0) - 1 = 1-$	(0، 1-)

(ج) عَيِّن الأزواج المرتبة في المستوى البياني، ثمَّ صلِّ بينها بمستقيم.



(٢) مجموعة حلَّ المعادلة $3س - ص = 1$ هي مجموعة جميع النقاط الواقعة على المستقيم الممثل أعلاه، وهي مجموعة غير منتهية.

(٣) نعوض النقطة (٢، ١) في معادلة المستقيم: $3س - ص = 1$

تعويض قيمة س = ١، وقيمة ص = ٢

$$1 \stackrel{?}{=} 2 - 1 \times 3$$

$$1 = 2 - 3$$

$$1 = 1$$

إذن النقطة (٢، ١) تقع على المستقيم الذي معادلته $3س - ص = 1$

نعوض النقطة (١١-، ٣٤) في معادلة المستقيم

$$ص = 3س - 1$$

تعويض قيمة س = ١١-، وقيمة ص = ٣٤

$$34 \stackrel{?}{=} 3 - (11-) = 1 - 33$$

(١١-، ٣٤) لا تحقق المعادلة

$$34 \neq 34$$

إذن النقطة (١١-، ٣٤) لا تقع على المستقيم الذي معادلته $3س - ص = 1$ ،

وبالتالي لا تنتمي إلى مجموعة الحل.

مجموعة حل المعادلة الخطية بمتغيرين:

أس + ب ص + ج = صفرًا حيث أ، ب، ج $\in$ ح، أ $\neq$ ٠، ب $\neq$ ٠؛ هي مجموعة غير منتهية من الأزواج المرتبة على الصورة (س، ص)، وتمثل بيانًا بمستقيم كل نقطة عليه تحقق المعادلة الخطية.

١ تدريب

مثل مجموعة حل المعادلة $٣ + ٦س + ٣ص = ٠$ بيانًا، ثم حدّد أي النقاط الآتية تنتمي إلى مجموعة حلّها؟ مبررًا إجابتك:
 $(٠, ٠)$ ، $(١, -\frac{١}{٢})$ ، $(١٠, -٢١)$.

٢ تدريب

يبيع أحمد بناطيل وقمصان، إذا كان يربح في البنطال الواحد ثلاثة دنانير، وفي القميص الواحد دينارين، ويخطط ليكون مجموع أرباحه اليومية ٣٠ دينارًا. اكتب المعادلة التي تبين العلاقة بين عدد البناتيل وعدد القمصان التي عليه بيعها يوميًا ليحقق هذا الربح، ومثلها بيانًا.

بناءً على بيان المعادلة في المسألة السابقة، هل هناك حلول مستثناة. برّر إجابتك.

(١) مثل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً:

أ ($\frac{1}{3}ص = س$) ب ($\frac{1}{3}ص = س + ٣$) ج ($\frac{1}{3}ص = س - ٣$)

(٢) أي الأزواج المرتبة (٠، ٩)، (٣، ٠)، (٧، -٢)، (٩، -٣)، (٥، $-\frac{٥}{٣}$)،

($\sqrt{٥}$ ، $٣ - \frac{٥}{٣}$) ينتمي إلى مجموعة حل المعادلة $\frac{1}{3}ص = س - ٣$ ؟

(٣) مثل المعادلة $٣ص - ١٢ = ٠$ بيانياً، ثم حدد نقاط تقاطع المستقيم الناتج مع كل من محور السينات ومحور الصادات.

(٤) كوّن معادلة خطية بمتغيرين في كل مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

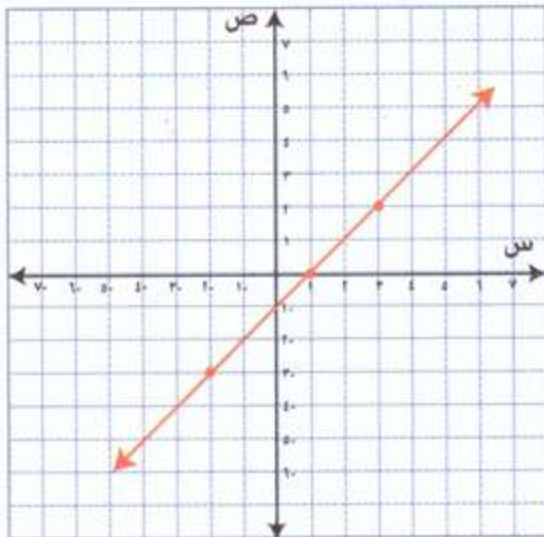
أ (درجة حرارة الجو بالفهرنهايت ف تساوي تسع أخماس درجة الحرارة بالسلسيوس مضافاً إليها ٣٢.

ب) عددان طبيعيان مجموعهما ١٧.

ج) محيط مثلث متطابق الضلعين يساوي ٢٠ سم.

د (محيط مستطيل يساوي ٥٠ سم.

هـ) اكتب معادلة المستقيم الممثل جانباً.



النتائج

• تحلّ نظامًا مكوّنًا من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانيًا.

اتفقت ليلي ورؤى على وضع خطةٍ لممارسة القراءة بوصفها عادةً يوميةً؛ حيثُ قرأت ليلي ٦ صفحاتٍ من إحدى القصص، وقررت أن تزيد صفحةً في الأسبوع الأول، ثمّ تزيد صفحةً كذلك في كلّ أسبوعٍ، بينما قرأت رؤى صفحتين من قصةٍ أخرى، وقررت أن تزيد صفحتين في الأسبوع الأول، ثمّ تزيد صفحتين كذلك في كلّ أسبوعٍ. في أيّ أسبوعٍ ستقرآن العدد نفسه من الصفحات؟

لحلّ المسألة السابقة، نتبع الخطوات الآتية:

(١) نفرض عدد الصفحات التي تمّ قراءتها ص، وعدد الأسابيع س.

(٢) نكتب التعبير الجبري الذي يعبر عن عدد الصفحات التي قرأتها ليلي، وهو

ص = س + ٦، والتعبير الجبري الذي يعبر عن عدد الصفحات التي قرأتها رؤى،

وهو ص = ٢س + ٢.

لاحظ أنه تكوّن لدينا المعادلتان الخطيتان:

$$ص = س + ٦$$

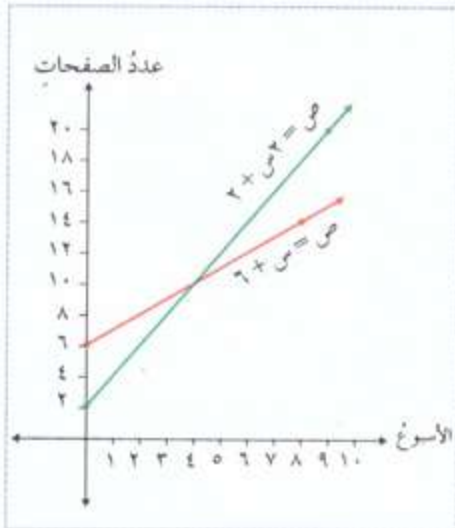
$$ص = ٢س + ٢$$

تُسمّى هاتان المعادلتان **نظامًا من معادلتين خطيتين**.

ولحلّ هذا النظام بيانيًا؛ نمثل كلّ معادلةٍ على الرسم

المجاور فينتج مستقيمان متقاطعان في النقطة (٤، ١٠).

إذن نجد أنه في الأسبوع الرابع ستقرأ كلّ منهما العدد نفسه من الصفحات.





في مسألة بدايةِ الدرس:

- لماذا اكتفينا بالربع الأول من المستوى البياني لتمثيل المعادلتين؟
- لو استمرت الخطّة أكثر من شهرين، هل يمكن أن يمرّ أسبوع آخرُ تقرأ فيه العدد نفسه من الصفحات؟

تعريف

يتكوّن نظامُ المعادلات الخطيّة بمتغيرين من معادلتين خطيتين على الصورة:

$$أس + ب ص = ج، \text{ حيث } أ، ب، ج \in \mathbb{R}، أ \neq 0، ب \neq 0$$

$$دس + هـ ص = و، \text{ حيث } د، هـ، و \in \mathbb{R}، د \neq 0، هـ \neq 0؛$$

وحلُّ نظامٍ من معادلتين خطيتين بيانيًا هو نقطة تقاطع المستقيمين الناتجين عن تمثيل كلٍّ منهما بيانيًا $\{(س، ص)\}$.

مثال (١)

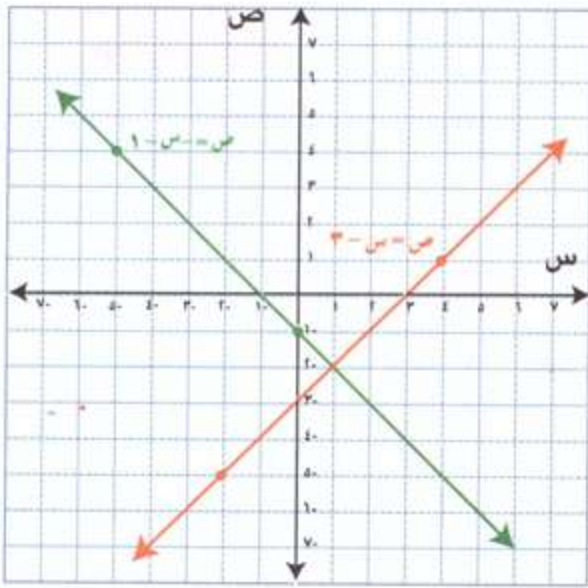
جدّ مجموعة حلّ النظام الآتي بيانيًا:

$$ص - س = 3$$

$$ص + س = 1$$

الحلّ

مثّل كلّاً من المعادلتين على المستوى البياني نفسه بلونٍ مختلفٍ.



ص - س + 3 = 0		
س	ص = 3 - س	(س، ص)
2-	ص = 3 - (2-) = 5-	(5-، 2-)
4	ص = 3 - (4) = 1	(1، 4)

ص + س + 1 = 0		
س	ص = -1 - س	(س، ص)
5-	ص = 1 - (5-) = 6-	(6-، 5-)
0	ص = 1 - (0) = 1-	(1-، 0)

لاحظ: المستقيمان الممثلان للمعادلتين تقاطعا في النقطة $(1, 2-)$ ؛ لذا، فإن مجموعة حل هذا النظام هي: $\{(1, 2-)\}$.

فكر وناقش



- في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين، لماذا تعد مجموعة حله حلاً لكلتا المعادلتين؟
- كيف يمكنك التحقق من أن الزوج المرتب الناتج من تقاطع المستقيمين الممثلين لمجموعة حل معادلتين في نظام ما هو حل لهذا النظام؟

تدريب 1

(1) بين إذا كانت $\{(2, 2-)\}$ هي مجموعة حل النظام الآتي:

$$3س + ص = 4$$

$$س - 3ص = 4-$$

(2) جد مجموعة حل النظام الآتي بياناً، ثم تحقق من صحة حلك.

$$ص + س = 0$$

$$ص = -\frac{1}{3}س + 1$$

مثال (٢)

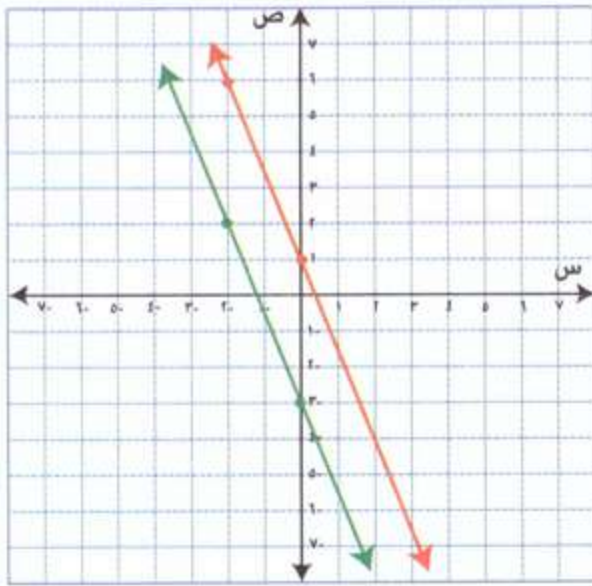
جد مجموعة حل النظام الآتي بيانيًا:

$$١ = ٢,٥س + ص$$

$$٣- = ٢,٥س + ص$$

الحل

مثل المعادلتين بيانيًا على الرسم نفسه ، ثم جد نقطة تقاطع المستقيمين الناتجين.
اختر قيمًا للمتغير س؛ بحيث يسهل عليك حساب الأزواج المرتبة.



١ = ٢,٥س + ص		
س	ص = ١ - ٢,٥س	(س، ص)
٢-	ص = ١ + (٢-) ٢,٥- = ٦	(٦، ٢-)
٠	ص = ١ + (٠) ٢,٥- = ١	(١، ٠)

٣- = ٢,٥س + ص		
س	ص = ٣- - ٢,٥س	(س، ص)
٢-	ص = ٣- - (٢-) ٢,٥- = ٢	(٢، ٢-)
٠	ص = ٣- - (٠) ٢,٥- = ٣-	(٣-، ٠)

المستقيمان الناتجان متوازيان؛ إذن، لا يوجد حل لهذا النظام من المعادلات، أي أن مجموعة الحل هي $\emptyset$ أو $\{\}$.

تدريب ٢

جد مجموعة حل كل من النظامين الآتين بيانيًا:

$$١) ٥ = ٢س + ص$$

$$٧ = ٢س + ص$$

$$(2) \text{ ص } 3 = \text{ س } 6 + ,$$

$$\text{س } 6 - \text{ص } 2 = 12 + 0$$

إذا انطبق المستقيمان الناتجان عن تمثيل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين، فإن مجموعة حل النظام هي مجموعة لانهائية من النقاط، وهي مجموعة جميع النقاط الواقعة على أحد المستقيمين.

هل يمكن التنبؤ بعدد حلول نظام معادلتين خطيتين بمتغيرين من دون حله؟
للإجابة عن هذا السؤال؛ نفذ النشاط الآتي:

نشاط



أكمل الجدول الآتي:

عدد الحلول الناتجة	العلاقة بين قيمتي أ، وقيمتي ب في المعادلتين	قيم أ، ب	المعادلتان ص = أ س + ب
حل واحد	قيمتا أ مختلفتان قيمتا ب مختلفتان	أ = 1، ب = 5 أ = -1، ب = 4	ص = س - 5 ص = -س + 4
			ص = 3 + 2 س ص = -1 + 2 س + 3
			ص = 3 - 2 س ص = 3 س + 8
			ص = س - 5 ص = س - 7
			ص = 3 س + 6 ص = 6 س + 12 2

ماذا تلاحظ؟

لا بُدَّ أنكَ لاحظتَ أنَّه في نظامِ المعادلاتِ الخطيَّةِ بمتغيرينِ على الصورةِ:

$$ص = أ س + ب$$

$$ص = م س + جـ$$

(١) يكونُ للنظامِ حلٌّ وحيدٌ إذا كانتُ $أ \neq م$.

(٢) لا يوجدُ حلٌّ للنظامِ إذا كانتُ $أ = م$.

(٣) يوجدُ عددٌ لا نهائِيٌّ من الحلولِ إذا كانتُ $أ = م$ و $ب = جـ$.

(١) تحقق إذا كانت النقطة المعطاة لكل نظام مما يأتي حلاً له:

أ (ص = ٢ - س - ١)

النقطة (٥, ٠) ٢س = -ص + ٣

ب (س = ٣ + ص ٢)

النقطة (١-، ١-) ٦ص - ٢س = -٤

ج (ص = ٢/٣ س)

النقطة (٦, ٩) ص = ١/٣ س + ٦

(٢) حل نظام المعادلات الآتي بياناً:

٥, ٠ س = ص

٢ص + ٦س = ١٤

(٣) ما قيمة الثابت ب التي تجعل النقطة (٦, ٢) حلاً للنظام:

٢ص = ٢س + ٢

٢, ٥ س + ب = ص

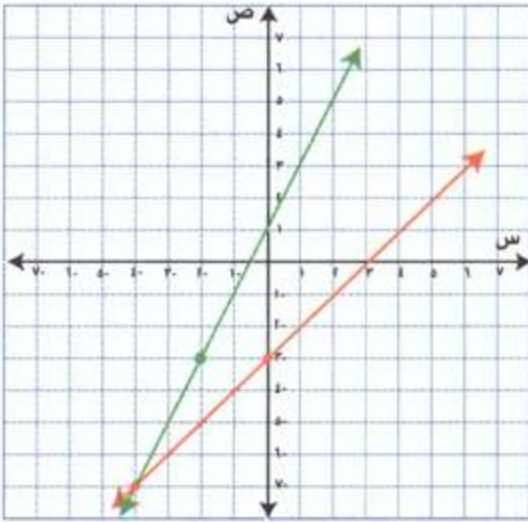
(٤) أي أنظمة المعادلات الآتية يمثلها الرسم المجاور؟

أ (ص = ٢س - ١ ، ص = -س + ٣)

ب (ص = ٢س - ١ ، ص = ٢س - ٣)

ج (ص = ٢س + ١ ، ص = -٢س - ١)

د (ص = ٢س + ١ ، ص = س - ٣)



(٥) اكتب مثلاً على نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين في كل من الحالات الآتية:

أ (يكون المستقيمان الناتجان عن تمثيلها متوازيين .

ب (يكون المستقيمان الناتجان عن تمثيلها متطابقين .

ج (يكون المستقيمان الناتجان عن تمثيلها متقاطعين .

النتائج

- تحلّ نظامًا مكوّنًا من معادلتين خطيتين بمتغيرين بالتعويض.

نشاط



بائع متجول يبيع قصصًا للأطفال وعلب أقلام تلوين، باع من الصنفين في أسبوع واحد ٥٠ قطعة، إذا كان سعر القصة ٥٠ قرشًا، وسعر علبة الألوان ٣٠ قرشًا، وكانت قيمة مجموع مبيعاته خلال هذا الأسبوع من الصنفين ٢١٠٠ قرش. كم قطعة باع من كل صنف؟

(١) كوّن نظامًا مكوّنًا من معادلتين خطيتين بمتغيرين يعبر عن مبيعات البائع بدلالة س، ص.

(٢) وضّح إلام ترمز كل من س، ص في النظام.

(٣) كم حلًا لهذا النظام؟ برّر إجابتك.

(٤) اختر إحدى المعادلتين، وضّع ص موضوعًا للقانون، ثمّ عوض عن قيمة ص في المعادلة الثانية؟

(٥) ما نوع المعادلة التي حصلت عليها؟ حلّها بإيجاد قيمة س؟

(٦) عوض قيمة س الناتجة معك في إحدى المعادلتين، ثمّ أكمل بإيجاد قيمة ص.

(٧) اكتب الزوج المرتب (س، ص) الذي حصلت عليه، ماذا يمثل بالنسبة للنظام؟ مبررًا إجابتك.

(٨) اقترح اسمًا لطريقة الحل السابقة.

لحلّ نظام مكوّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة التعويض؛ نتبع الخطوات الآتية:

- (١) نجعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون في إحدى المعادلتين، ثمّ نعوضه في المعادلة الثانية.
- (٢) نحلّ المعادلة الناتجة عن التعويض.
- (٣) نجد قيمة المتغير الآخر بتعويض القيمة العددية للمتغير الناتجة في الخطوة (٢)، في إحدى المعادلتين.
- (٤) نكتب مجموعة حلّ النظام.

مثال (١)

استخدم طريقة التعويض في حلّ النظام الآتي، ثمّ تحقق من صحّة الحلّ:

$$٤ص - ٥س = ١٤$$

$$١١ = ٤ص + س$$

الحلّ

$$١ \dots\dots\dots ٤ص - ٥س = ١٤$$

$$٢ \dots\dots\dots ١١ = ٤ص + س$$

اجعل المتغير س موضوعاً للقانون في المعادلة ٢

برّر اختيار معادلة (٢) لجعل س موضوعاً للقانون

$$١١ = ٤ص + س$$

$$٣ \dots\dots\dots س = ١١ - ٤ص$$

تعويض قيمة س من المعادلة ٣ في المعادلة ١

$$٤ص - ٥(١١ - ٤ص) = ١٤$$

حلّ المعادلة الناتجة عن التعويض

$$٤ص - ٥٥ + ٢٠ص = ١٤$$

$$٤ص - ٥٥ + ٢٠ص = ١٤$$

$$٢٤ص = ٩٦ \rightarrow ص = ٤$$

تعويض قيمة ص = ٤ في المعادلة ٢

$$١١ = ٤(٤) + س$$

$$س + ١٦ = ١١ \leftarrow س = ٥ -$$

∴ مجموعة حل النظام هي $\{(٤, ٥-)\}$

للتحقق من صحة الحل؛ عوض الزوج المرتب في جميع معادلات النظام:

$$٤ ص - ٥ س = ١$$

$$٤١ \stackrel{؟}{=} (٥-)٥ - (٤)٤$$

$$✓ \quad ٤١ = ٢٥ + ١٦$$

∴ الحل صحيح.

$$س + ٤ ص = ١١$$

$$١١ \stackrel{؟}{=} (٤)٤ + ٥-$$

$$✓ \quad ١١ = ١١$$

فكر وناقش



هل توجد طريقة أخرى للتحقق من صحة الحل؟

تدريب ١

استخدم طريقة التعويض في حل النظام: $س + ٣ ص = ١٢$

$$ص = س - ٤$$

مثال (٢)

استخدم طريقة التعويض في حل النظام الآتي:

$$س = ٢ ص - ٤$$

$$-س + ٢ ص = ١٦$$

الحل

$$١ \dots \dots \dots س = ٢ ص - ٤$$

$$٢ \dots \dots \dots -س + ٢ ص = ١٦$$

لاحظ أن المتغير s موضوع للقانون في المعادلة ١، لهذا عوضه في ٢.

تعويض قيمة s من المعادلة ١ في المعادلة ٢

$$-s + 2v = 16$$

$$-(2v - 4) + 2v = 16$$

$$-(2v - 4) + 2v = 16$$

$$-2v + 4 + 2v = 16$$

حل المعادلة الخطية الناتجة عن التعويض

ومنه $4 = 16$ عبارة خاطئة لكل قيم s ، v

∴ لا يوجد تقاطع بين المستقيمين الممثلين للمعادلتين، إذن مجموعة الحل هي: $\emptyset$

مثال (٣)

استخدم طريقة التعويض في حل النظام الآتي، إن أمكن:

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{3}s = 6$$

$$36 = 2s - 3v$$

الحل

$$1 \dots \dots \dots \frac{1}{4}v + \frac{1}{3}s = 6$$

$$2 \dots \dots \dots 36 = 2s - 3v$$

المعادلة ٢

$$36 = 2s - 3v$$

جعل المتغير v موضوعاً للقانون في المعادلة ٢

$$3 \dots \dots \dots v = 12 - \frac{2}{3}s$$

$$1 \dots \dots \dots \frac{1}{4}v + \frac{1}{3}s = 6$$

تعويض قيمة v من المعادلة ٣ في المعادلة ١

$$\frac{1}{4}(12 - \frac{2}{3}s) + \frac{1}{3}s = 6$$

حل المعادلة الخطية بمتغير واحد

$$\frac{1}{4}(12 - \frac{2}{3}s) + \frac{1}{3}s = 6$$

$$6 = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s - 6$$

$6 = 6$ ومنه العبارة صحيحة لكل قيم s ، v .

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهذا النظام، ومجموعة الحل هي مجموعة جميع النقاط الواقعة على أحد مستقيمين. لماذا؟

تدريب ٢

استخدم طريقة التعويض في حل الأنظمة الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(1) \quad 6 - s + 3 = v - 2$$

$$v = 2s - 4$$

$$(2) \quad 4v = 8 - 2s$$

$$5s + 10 = 20$$

تدريب ٣

(١) عددان مجموعهما ١١، ثلاثة أمثال أحدهما يزيد على مثلي العدد الآخر بمقدار ٥، ما العددان؟

(٢) اشترى مازن قلمي حبر وثلاثة دفاتر، دفع ١٣٠ قرشاً ثمناً لمشترياته، إذا علمت أن ثمن الدفتر الواحد يزيد على ثمن القلم بمقدار ١٠ قروش. كوّن نظام معادلات تعبّر فيه عن مشتريات مازن، ثم حلّها. ماذا يمثل الحل الذي حصلت عليه؟

فكر وناقش



ما قيمة المتغير l التي تحقق النظام الآتي:

$$l + e + s = 7$$

$$e + s = 5$$

(١) ع ، ل زاويتان متتامتان، كوّن معادلتين لإيجاد قياس كل منهما في الحالات الآتية:
أ (إذا كانت إحداهما تساوي ثلاثة أمثال الأخرى.

ب) إذا كانت إحداهما تقل عن أربعة أمثال الأخرى بمقدار (١٠°) .

(٢) عددان صحيحان مختلفان، ٥ أمثال العدد الأصغر مطروحاً من مثلي العدد الأكبر يساوي ١٦، والعدد الأكبر مضافاً إليه ٣ أمثال العدد الأصغر يساوي ٦٣. ما العددان؟

(٣) مع خالد ٤٥ ورقة نقدية، بعضها من فئة الخمسة دنانير والباقي من فئة العشرة دنانير، فإذا كان المبلغ كله يساوي ٣٠٠ دينار. فكم عدد الأوراق من كل فئة؟

(٤) مثلث متطابق الضلعين فيه قياس إحدى زاويتي القاعدة يقل ١٠° عن مثلي قياس زاوية الرأس، جد قياس زوايا المثلث.

النتائج

- تحلّ نظامًا مكوّنًا من معادلتين خطيتين بمتغيرين بالحذف.



مع عثمان ٢٢ قطعة نقدية من فئتي ربع الدينار ونصف الدينار، إذا كان عدد قطع نصف الدينار يزيد على عدد قطع ربع الدينار ١٢ قطعة. فجدّ عدد القطع التي يملكها من كلّ فئة.

لتكن s عدد القطع من فئة نصف الدينار و v عدد القطع من فئة ربع الدينار، فإنّ نظام المعادلتين $s + v = 22$ ، $s - v = 12$ يوضّح العلاقات بين عدد القطع النقدية التي مع عثمان.

ويمكن تمثيل أيّ معادلة من معادلات النظام السابق في ميزان ذي كفتين كالآتي:



ثمّ جمع المعادلتين في ميزان واحد كالآتي: (سيبقى الطرفان متساويين، برّر ذلك)



ومنه



ثم تعويض قيمة س في إحدى المعادلتين ؛ ولتكن

$$س + ص = ٢٢$$

$$١٧ + ص = ٢٢ ، ومنه ص =$$

عندها سنجد مجموعة حل النظام، وهي:

تحقق من صحة الحل.

نُسمي الطريقة التي اتبعناها لحل النظام السابق **طريقة الحذف**. ما سبب هذه التسمية؟

لحل نظام المعادلات الخطية بمتغيرين بطريقة الحذف، نتبع الخطوات الآتية:

(١) نرتب الحدود المتشابهة في المعادلتين أسفل بعضهما.

(٢) نحدد أي المتغيرين يسهل حذفه، ثم نجعل معامليه في المعادلتين متساويين في

المقدار ومختلفين في الإشارة، وذلك بضرب طرفي إحدى المعادلتين أو كليهما

في عدد، أو بالقسمة على عدد.

(٣) نجمع المعادلتين للتخلص من المتغير المراد حذفه.

(٤) نعوض قيمة المتغير الناتجة في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة المتغير الآخر.

مثال (١)

حل النظام الآتي بطريقة الحذف، ثم تحقق من صحة الحل.

$$٣س + ص = ٢ -$$

$$٢ص - ٣س = ١٤$$

الحل

أعد ترتيب المعادلتين بوضع الحدود المتشابهة أسفل بعضها.

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots 2- = \text{ص} + \text{س}^3 \quad \text{لاحظ المتغير الأسهل حذفه هو س}$$

$$\textcircled{2} \dots\dots\dots 14 = \text{ص} + \text{س}^3 - \quad \text{إعادة ترتيب الحدود في المعادلتين}$$

$$\text{ص}^3 = 12$$

$$\text{ص} = 4$$

ناتج جمع المعادلتين، ثم قسمة الطرفين على 3

حل المعادلة الخطية بمتغير.

وباستكمال الحل بتعويض $\text{ص} = 4$ في إحدى المعادلتين؛ نجد أن مجموعة حل النظام هي: $\{(4, 2-)\}$. كيف يمكنك التحقق من صحة الحل؟

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف في حل النظام الآتي، ثم تحقق من صحة الحل:

$$6\text{س} + 5\text{ص} = 16$$

$$2\text{س} + 5\text{ص} = 8-$$

الحل

لاحظ أن الحدود المتشابهة مرتبة أسفل بعضها، وأن المتغير الأسهل حذفه هو ص.

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots 6\text{س} + 5\text{ص} = 16$$

الضرب بـ 1- لحذف المتغير ص

$$\textcircled{2} \dots\dots\dots 1- \times 8- = (2\text{س} + 5\text{ص}) \times 1-$$

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots 6\text{س} + 5\text{ص} = 16$$

$$\textcircled{3} \dots\dots\dots 8 = \text{ص} - 2\text{س}$$

$$8\text{س} + 0 = 24$$

وباستكمال الحل بإيجاد قيمة كل من س، و ص، مجموعة الحل هي: $\{(3, \frac{2-}{5})\}$.
تحقق من صحة الحل.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف في حل النظام الآتي، ثم تحقق من صحة الحل:

$$١,٨ \text{ س} + ٠,٦ \text{ ص} = ٠,٦$$

$$\text{ص} = ٣,٢ - ٢,٢ \text{ س}$$

الحل

$$١,٨ \text{ س} + ٠,٦ \text{ ص} = ٠,٦ \quad (١)$$

$$\text{ص} = ٣,٢ - ٢,٢ \text{ س} \quad (٢)$$

$$\frac{٠,٦}{٠,٦-} = \frac{١,٨ \text{ س} + ٠,٦ \text{ ص}}{٠,٦-}$$

القسمه على $٠,٦-$ في المعادلة (١) لحذف ص

$$٢,٢ = ٣,٢ \text{ س} + \text{ص}$$

إعادة ترتيب الحدود في المعادلة (٢)

ترتيب المعادلتين بوضع الحدود

المتشابهة أسفل بعضها

$$٣,٢ \text{ س} - \text{ص} = ١-$$

$$٢,٢ = ٣,٢ \text{ س} + \text{ص}$$

$$١,٢ = ٠ + \text{ص}$$

$$\text{ص} = ١,٢$$

نستكمل الحل بتعويض قيمة $\text{ص} = ١,٢$ في إحدى المعادلتين؛ لنجد قيمة س

تعويض قيمة $\text{ص} = ١,٢$ في المعادلة (٢)

$$\text{ص} = ٣,٢ - ٢,٢ \text{ س}$$

$$١,٢ = ٣,٢ - ٢,٢ \text{ س}$$

∴ مجموعة الحل هي: $\{(١,٢, ١,٢)\}$.

تحقق من صحة الحل.

(١) استخدم طريقة الحذف في حل الأنظمة الآتية، ثم تحقق من صحة الحل:

$$أ) \begin{cases} س + ص = ٥ \end{cases}$$

$$س = ص + ١$$

$$ب) \begin{cases} س + ٣ص = ١٢ \end{cases}$$

$$ص = س - ٤$$

$$ج) \begin{cases} ٢ص = س - ٤ \end{cases}$$

$$٥س + ١٠ص = ٢٠$$

$$د) \begin{cases} ٣ص - ٦س = ٢ \end{cases}$$

$$ص - ٢س = ٤$$

(٢) س، ص زاويتان متكاملتان، يزيد قياس س بمقدار ١٠٤° على قياس زاوية ص، ما قياس الزاويتين؟

(١) استخدم طريقة الحذف لحل أنظمة المعادلات الخطية الآتية، ثم تحقق من صحة الحل:

$$(ب) \quad ١١ = ٧ص + ٥س$$

$$(أ) \quad ٤ = ص + س$$

$$١٩ = ٣ص + ٥س$$

$$ص = ٦ + س$$

$$(د) \quad ١٢ = ٦ص + ٢س$$

$$(ج) \quad ١٢ = ٣ص + ٢س$$

$$٧س = -٢٣ + ٣ص$$

$$١٣ = ص - ٥س$$

(٢) جد قيم كل من أ، ب التي تجعل النقطة (٦، ٢) حلًا للنظام الآتي:

$$ص = ٢ + أس$$

$$ص = ٣ + أس + ب$$

(٣) مع فاطمة وأخيها خالد عدد من قطع الحلوى، إذا أعطت فاطمة خالدًا خمس قطع حلوى يتساوى عدد القطع مع كليهما، وإذا أعطى خالد فاطمة خمس قطع، يصبح عدد القطع مع فاطمة مثلي عددها عند خالد، فما عدد قطع الحلوى التي مع كليهما؟

مراجعة

(١) أي المعادلات الآتية خطية بمتغيرين في ما يأتي، مع ذكر السبب:

أ ($\frac{1}{s} - v = 4$ حيث $s \neq 0$) ب ($e + 5l = l - 1$)

ج ($3m - n = 2$) د ($8h + 4w = 14z$)

هـ ($5, 2k - 4, 3l = 0$) و ($9s^2 + s = 3v^2 - v$)

ز ($\frac{11a - c}{3} = 63$) ح ($a^2 - e - 2al + a = 0$ حيث a عدد ثابت)

(٢) أعد صياغة المعادلة: $4(2 - 3v) = 24s$ ، بحيث يكون v موضوعاً للقانون، ثم s موضوعاً له.

(٣) تحقق إذا كانت النقطة المعطاة إزاء كل معادلة حلًا لها.

أ ($v = 2s + 5$) ($-1, 3$)

ب ($v - 3 = s - 1$) ($0, 5$)

ج ($4s - 7v = 19$) ($-4, 35$)

د ($6s + 5v = 21$) ($6, -3$)

(٤) تحقق إذا كانت النقطة المعطاة لكل نظام مما يأتي تمثل حلًا له:

أ ($2s - v = 5$)

النقطة ($3, 1$) $-2s + v = 1$

ب ($s + v = 5$)

النقطة ($1, 4$) $s - v = 3$

ج ($s - 2v = 4$)

النقطة ($2, -1$) $3s + v = 5$

$$د) ٢س + ٥ص = ٨$$

النقطة (١، ٢-)

$$٣س - ٢ص = ٥$$

٥) حل أنظمة المعادلات الخطية الآتية، مستخدماً الطريقة الموضحة بجانب كل منها، وتحقق من صحة الحل:

$$أ) ٣س - ٤ص = ٣$$

$$٣س + ٢ص = ٣ \quad (\text{بيانياً})$$

$$ب) ٣ص + ٦س = ١٦$$

$$س = ٤ص + ٢ \quad (\text{بالتعويض})$$

$$ج) ٢س + ٦ص = ٤$$

$$٤س + ٥ص = ١٥ \quad (\text{بالحذف})$$

٦) يُراد تصميم وسيلة تعليمية من قطعة كرتون مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠ سم، والفرق بين بُعديها ٢٠ سم، ما بُعدا قطعة الكرتون؟

اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من ٤ فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها ٤ بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) أي الأزواج المرتبة الآتية ليس حلاً للمعادلة $٥س - ٤ص = ٧$ ؟

أ (١٣، ٩) (ب) (٥، ٩)

ج (٧، ٧) د (١١، ١٢)

(٢) المجموعة: $\{(٥، ٠)، (٦، ١-)\}$ هي مجموعة جزئية من مجموعة حل المعادلة:

أ $٣ = س - ص$ (ب) $٥ - ص = س$

ج $٧ = ص$ د $ص = -س$

(٣) الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام:

$ص = ٣ - س - ٢$

$س + ٢ = ص - ٤$ هو:

أ (٠، ٢) (ب) (٢، ٠)

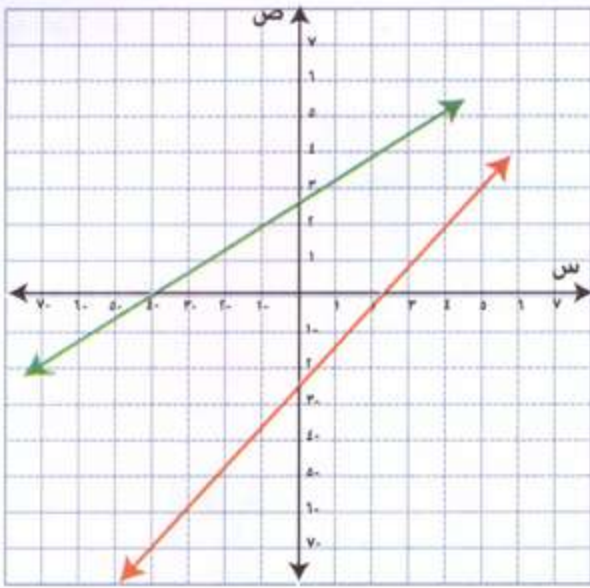
ج (٢، ٠) د (٠، ٢)

(٤) قيمة كل من و، هـ التي تجعل مجموعة حل النظام

$ص = ٢س + و$ ، $ص = ٢س + هـ$ ، غير منتهية:

أ (٠ = و، ٣ = هـ) (ب) (٣ = و، ٣ = هـ)

ج (٣ = و، ٣ = هـ) د (٠ = و، ٣ = هـ)



٢) تقولُ مها إنَّه لا يوجدُ حلٌّ لنظامِ المعادلتينِ الخطيتينِ الممثلِ بالرسمِ المجاورِ، بينما تقولُ أملُ إنَّه يوجدُ حلٌّ للنظامِ، أيُّهما أصابت؟ برِّري إجابتك.

٣) اكتبِ مثالاً على نظامٍ من المعادلاتِ الخطيةِ في كلِّ من الحالات الآتية:

أ) أن تكونَ مجموعةُ حلِّ النظامِ $\emptyset$

ب) أن تكونَ مجموعةُ الحلِّ هي: $\{(0, -4)\}$

٤) إذا كانتَ تعرفُ المكالماتِ في شركتي اتصالاتٍ كما هو موضحٌ في الجدولِ الآتي، فأجبْ عن الأسئلة التي تليه:

الشركة أ	٧ قروشٍ للدقيقة الأولى، ثمَّ تزيدُ قرشاً واحداً لكلِّ دقيقةٍ تليها.
الشركة ب	قرشان للدقيقة الأولى، ثمَّ تزيدُ قرشين لكلِّ دقيقةٍ تليها.

أ) كوّن معادلةً تعبّرُ عن تعرفِ كلِّ شركة.

ب) مثل تعرفتي الشركتين بيانياً على الرسم نفسه.

(إرشاد: تحتاج إلى التمثيل في الربع الأول فقط من المستوى البياني، برِّري ذلك)

ج) بعد كم دقيقة من المكالمات تتساوى التعتان؟

د) يريدُ صاحبُ محلِّ شراءٍ خطٍّ من إحدى الشركتين، بأيّ التعتين تنصحه؟ برِّري إجابتك.

الوحدة السادسة

٦

الإنشاءات الهندسية

تحتاج الهندسة بفروعها كافة، ومنها المدنية والميكانيكية إلى عمل تصاميم لمُنشآت أو معدات أو آلات، كما أنه لا غنى لمصممي الملابس عن المبادئ الأساسية في الرياضيات؛ لرسم تصاميمهم قبل إخراجها وإنتاجها. كذلك الأمر بالنسبة إلى النجارين والحدادين والنحاتين، والكثير من المهن التي تحتاج إلى إعداد تصاميم لمنتجاتها على الورق قبل إنشائها وإنتاجها. وستعلم في هذه الوحدة بعض المبادئ الأساسية في الرياضيات التي تعتمد عليها هذه التصاميم.

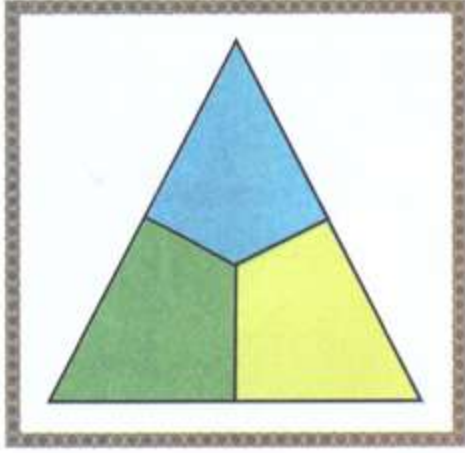


يتوقع من الطالب في نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- ▶ إنشاء عمود على مستقيم من نقطة معلومة عليه.
- ▶ إسقاط عمود على مستقيم من نقطة معلومة خارجة عنه.
- ▶ تنصيف قطعة مستقيمة باستخدام المسطرة والفرجار.
- ▶ تنصيف زاوية باستخدام المسطرة والفرجار.
- ▶ اكتشاف أن منصّفات الزوايا الثلاث للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث، وتمسّ أضلاعه الثلاثة.
- ▶ رسم دائرة داخل مثلث وتمسّ أضلاعه.

النتائج

- تنشئ عموداً على مستقيم من نقطة معلومة عليه.
- تنزل عموداً على مستقيم من نقطة معلومة خارجة.



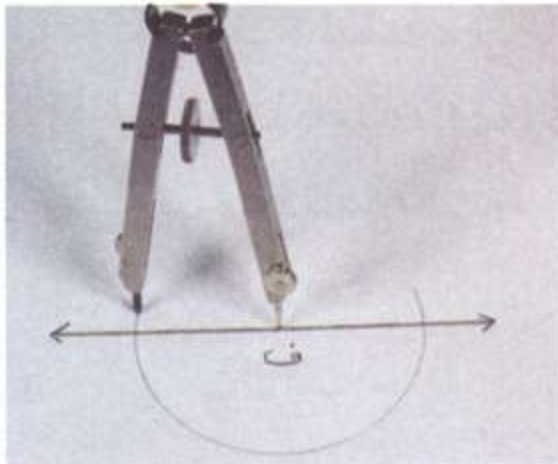
اللوحة المجاورة على بساطتها تحتاج إلى مهارة إنشاء عمود من منتصف كل ضلع من أضلاع المثلث، وهذه المهارة يحتاج إليها الكثير من المصممين على اختلاف تخصصاتهم لإنشاء تصاميمهم.

كيف تنشئ عموداً من نقطة على مستقيم باستخدام الفرجار؟

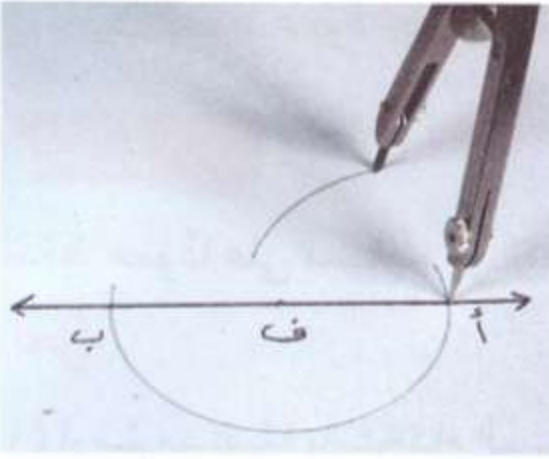
مثال (١)

أنشئ عموداً على مستقيم من نقطة معلومة عليه، باستخدام الفرجار.

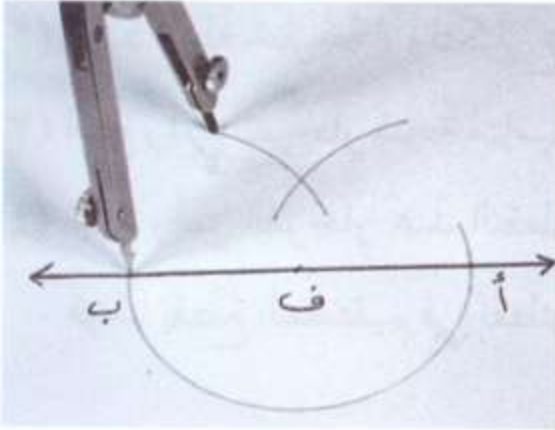
الحل



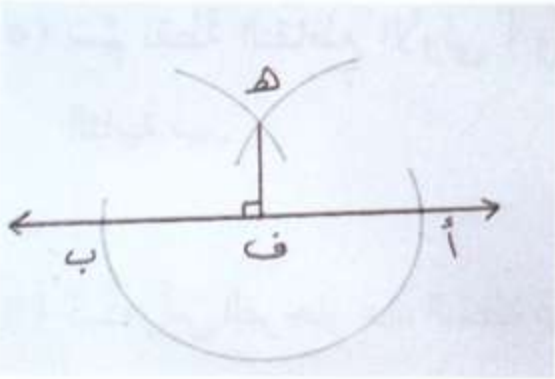
- (١) ارسم مستقيماً باستخدام المسطرة.
- (٢) حدّد نقطة عليه، ولتكن ف.
- (٣) افتح الفرجار فتحة مناسبة.
- (٤) ثبت رأس الفرجار عند النقطة ف، ثم ارسم قوساً يقطع المستقيم في نقطتين مثل أ، ب.



٥) افتح الفرجار فتحة أكبر من طول $\overline{AF}$ ، ثم
ثبّت رأس الفرجار عند النقطة F وارسم قوساً
كما في الشكل المجاور.



٦) مُستخدمًا فتحة الفرجار نفسها، ثبّت
الفرجار عند النقطة B ثم ارسم قوساً يقطع
الأول في النقطة H .



٧) صل بين النقطة F والنقطة H الناتجة.

٨) استخدم المنقلة أو المثلث القائم للتحقق
من قياس الزوايا الناتج.

تدريب ١

١) أنشئ عموداً على مستقيم من نقطة معلومة عليه باستخدام الفرجار إلى أعلى، ثم
أنشئ عموداً إلى أسفل. تحقق من قياس الزوايا الناتج. (ماذا تلاحظ بالنسبة إلى
العمودين؟)

٢) أنشئ عموداً على مستقيم من نقطة معلومة عليه، باستخدام أداة هندسية أخرى، ثم
ناقش الخطوات التي اتبعتها مع زملائك.

كيف تُسقطُ عمودًا على مستقيم من نقطة معلومة خارجة عنه ، باستخدام الفرجار؟

مثال (٢)

أسقطُ عمودًا على مستقيم من نقطة معلومة خارجة عنه ، باستخدام الفرجار.

الحلُّ

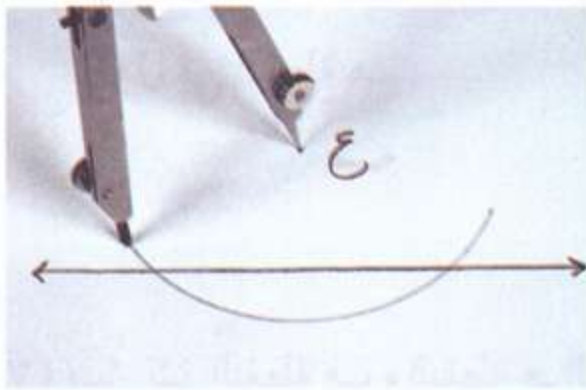
(١) ارسم مستقيمًا باستخدام المسطرة.

(٢) حدّد نقطة خارجة ، ولتكن ع .

(٣) افتح رأس الفرجار فتحة مناسبة.

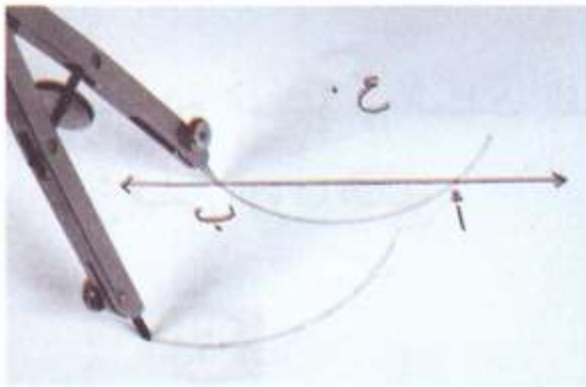
(٤) ضع رأس الفرجار عند النقطة ع ثم ارسم

قوسًا يقطع المستقيم في نقطتين.



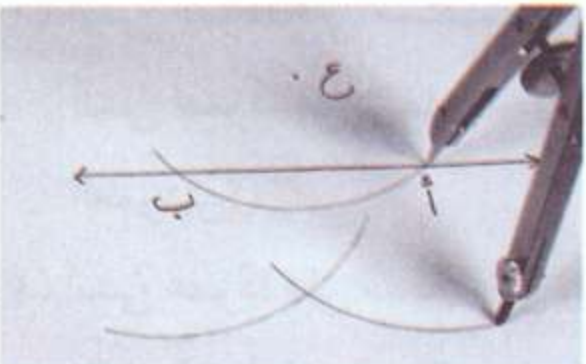
(٥) سمّ نقطة التقاطع الأولى أ ونقطة التقاطع

الثانية ب.



(٦) ثبت رأس الفرجار عند النقطة ب، وباستخدام

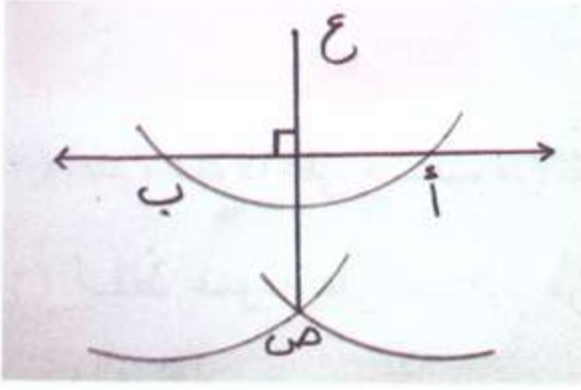
فتحة الفرجار نفسها ارسم قوسًا أسفل الخط.



(٧) ثبت رأس الفرجار عند النقطة أ، وبفتحة

الفرجار نفسها ارسم قوسًا آخر يقطع الأول

في النقطة ص.



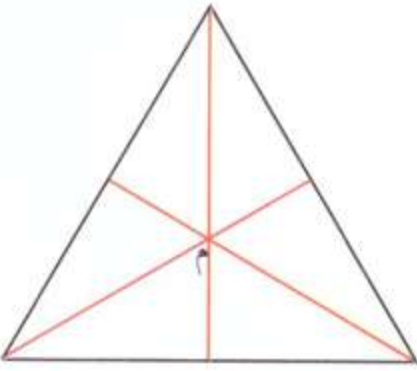
٨) صل بين النقطة ع والنقطة ص فيكون ع ص عمودًا على المستقيم.

تدريب ٢

أسقط عمودًا على مستقيم من نقطة معلومة خارجة عنه، باستخدام الفرجار، ثم تحقق من الزوايا الناتجة.

نشاط

ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، طول ضلعه ٦ سم باستخدام الفرجار والمسطرة، ثم نفذ الخطوات الآتية:



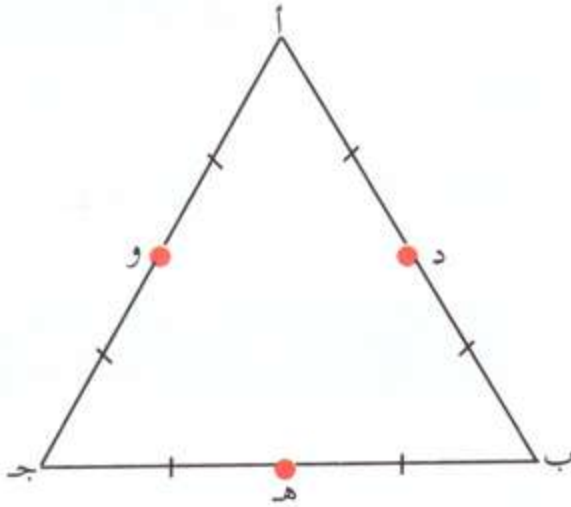
١) حدّد نقطة المنتصف لكل ضلع باستخدام المسطرة.

٢) أنشئ أعمدة من منتصفات الأضلاع، ثم مدّها كلّ منها حتى تتلاقى في نقطة داخل المثلث، ولتكن م.

٣) افتح الفرجار فتحة تساوي المسافة بين أحد منتصفات أضلاع المثلث والنقطة م، ثم ارسم دائرة مركزها النقطة م، ماذا تلاحظ؟

٤) افتح الفرجار فتحة تساوي المسافة بين أحد رؤوس المثلث والنقطة م، ثم ارسم دائرة مركزها النقطة م، ماذا تلاحظ؟

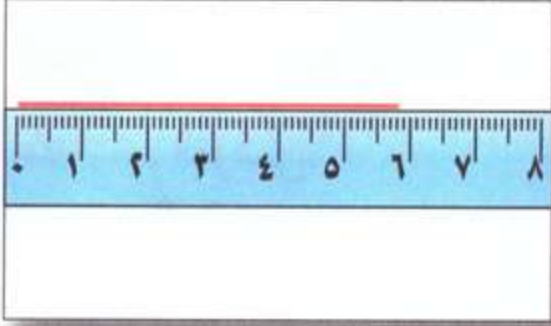
- (١) أنشئ عمودًا على مستقيم من نقطة معلومة عليه، باستخدام المسطرة والفرجار.
- (٢) أسقط عمودًا على مستقيم من نقطة معلومة خارجة عنه، باستخدام المسطرة والفرجار.



- (٣) أ ب ج مثلث متطابق الأضلاع د، هـ، و منتصفات أضلاعه (انظر الشكل المجاور)، باستخدام المسطرة والفرجار، ارسم ما يأتي:
 أ (دائرة داخل المثلث وتمس أضلاعه.
 ب) دائرة خارج المثلث وتمس رؤوسه.

النتائج

- تنصّف قطعة مستقيمة باستخدام المسطرة والفرجار.



تريدُ جهاذُ تنصيفِ القطعةِ المستقيمةِ
المجاورة، وعندما استخدمتِ
المسطرةَ وجدتُ طولَها يقعُ بينَ
٥,٨ سم و ٥,٩ سم، كيف تُنصّفُ جهاذُ
القطعةَ بدقةٍ عاليةٍ؟

كيف تنصّف قطعة مستقيمة، باستخدام الفرجار؟

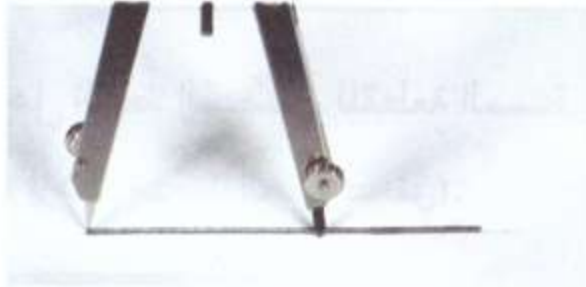
مثال (١)

ارسم قطعة مستقيمة، ثم نصّفها باستخدام الفرجار والمسطرة.

الحل

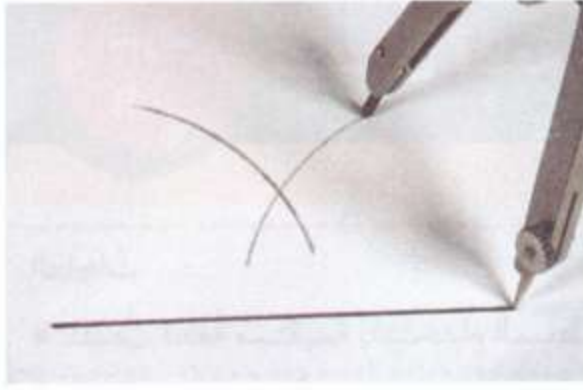
(١) ارسم قطعة مستقيمة باستخدام المسطرة.

(٢) افتح الفرجار فتحةً تزيد على طول نصف القطعة المستقيمة.

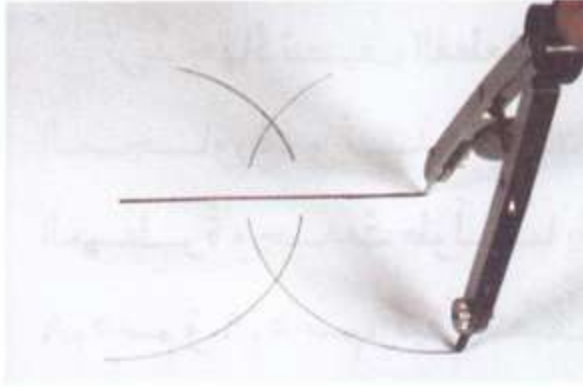


(٣) ثبت رأس الفرجار عند أحد طرفي القطعة المستقيمة، وارسم قوساً أعلى القطعة.

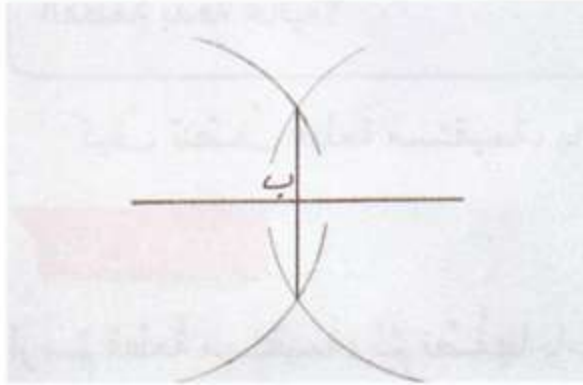




(٤) ثَبِّتْ رَأْسَ الْفَرْجَارِ عِنْدَ الطَّرْفِ الثَّانِي لِلْقِطْعَةِ الْمُسْتَقِيمَةِ، وَبِفَتْحَةِ الْفَرْجَارِ نَفْسِهَا ارْسُمْ قَوْسًا يَقَطُّ الْقَوْسَ الْأَوَّلَ.



(٥) كَرِّرِ الْخُطُواتِ السَّابِقَةَ لِرَسْمِ قَوْسَيْنِ مُتَقَاطِعَيْنِ أَسْفَلَ الْقِطْعَةِ، مُسْتَخْدِمًا فَتْحَةَ الْفَرْجَارِ نَفْسِهَا عِنْدَ رَسْمِ الْقَوْسَيْنِ.



(٦) بِاسْتِخْدَامِ الْمِسْطَرَةِ، ارْسُمْ خُطًّا يَصِلُ بَيْنَ النِّقْطَتَيْنِ النَّاتِجَتَيْنِ عَنْ تَقَاطُعِ الْأَقْوَاسِ ثُمَّ سَمِّ نَقْطَةَ التَّقَاطُعِ ب، وَهَكَذَا تَكُونُ قَدْ نَصَّفْتَ الْقِطْعَةَ الْمُسْتَقِيمَةَ عِنْدَ النِّقْطَةِ ب.

ابحث



هل الخطُّ المُنْصَفُ لِلْقِطْعَةِ الْمُسْتَقِيمَةِ فِي الْمِثَالِ (١) عَمُودِيٌّ عَلَى الْقِطْعَةِ؟
(إرشاد: استعمل المنقلة للتحقق).

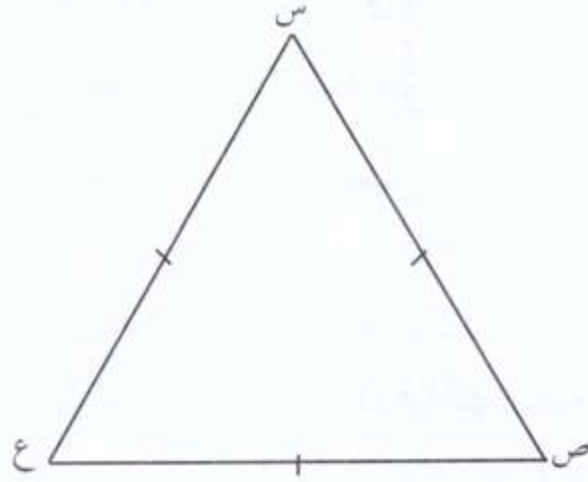
١

تدريب

ارْسُمْ قِطْعَةً مُسْتَقِيمَةً، ثُمَّ نَصِّفْهَا بِاسْتِخْدَامِ الْفَرْجَارِ وَالْمِسْطَرَةِ.

(١) ارسم قطعة مستقيمة، ثم قسّمها إلى أربع قطع متساوية الطول باستخدام الفرجار والمسطرة.

(٢) ارسم دائرة داخل المثلث س ص ع بحيث تمش أضلاعه.



(٣) ارسم مثلثًا باستخدام المسطرة، ثم نفذ الخطوات الآتية:

أ (نصّف أضلاع المثلث، باستخدام الفرجار والمسطرة.

ب) مدّ القطع المُنصفَة لأضلاع المثلث حتى تلتقي في نقطة داخل المثلث.

ج) لوّن المساحات الناتجة لتخرج بلوحة فنية.

(٤) اقترح خطوات أخرى لتنصيف قطعة مستقيمة باستخدام الفرجار والمسطرة.

النتائج

- تنصّف زاوية باستخدام المسطرة والفرجار.



رسم خالد نجمة خماسية، وقرّر تنصيف زوايا رؤوسها الخمسة للخروج بتصميم فني كما هو موضح جانباً، كيف ينصّف خالد الزوايا الخمس للنجمة؟

لتنصيف زاوية نلجأ إلى المنقلة، أما إن كان قياسها يصعب تنصيفه بدقة عالية باستخدام المنقلة، كأن يكون قياسها مثلاً $36,5^\circ$ ، نلجأ إلى استخدام المسطرة والفرجار.

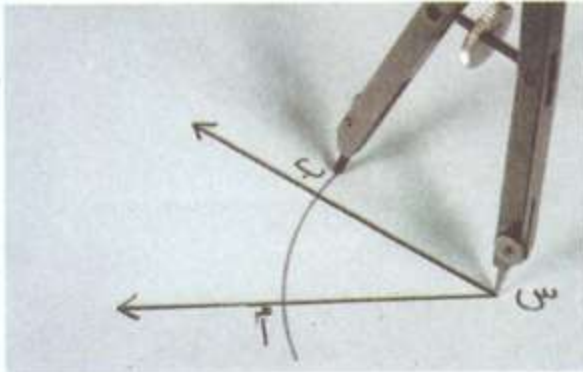
كيف تنصّف زاوية باستخدام الفرجار والمسطرة؟

مثال (١)

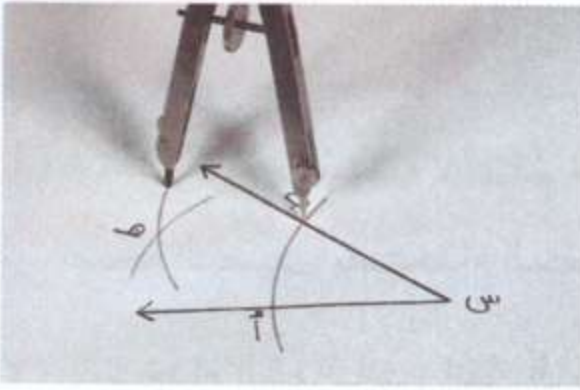
ارسم زاوية، ثم نصّفها باستخدام المسطرة والفرجار.

الحل

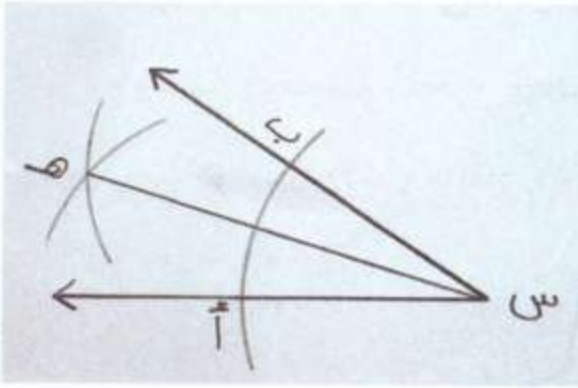
(١) ارسم زاوية باستخدام المسطرة، وسَمِّ رأسها النقطة س .



(٢) افتح الفرجار فتحة مناسبة، ثم ثبّت رأس الفرجار عند رأس الزاوية س، وارسم قوساً يقطع ضلعي الزاوية في النقطتين أ، و ب.



(٣) افتح الفرجار فتحة مناسبة، ثم ثبت رأس الفرجار عند النقطة أ، و ارسم قوسًا داخل الزاوية، وباستخدام فتحة الفرجار نفسها، ثبت رأس الفرجار عند النقطة ب و ارسم قوسًا يقطع الأول في نقطة ولتكن هـ.



(٤) ارسم خطًا يصل النقطة هـ برأس الزاوية س. هكذا تكون قد نصفت الزاوية.

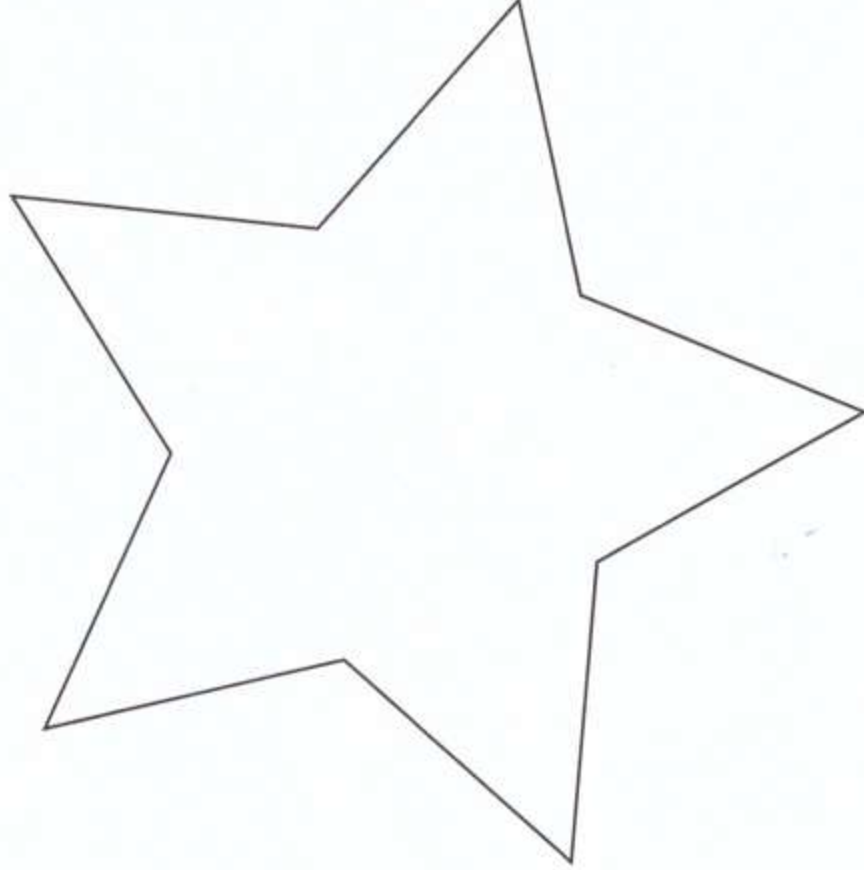
كيف تتحقق من صحة تنصيف الزاوية؟

تدريب ١

ارسم زاوية باستخدام المنقلة قياسها 80° ، ثم نصّفها باستخدام المسطرة والفرجار، وتحقق من صحة تنصيف الزاوية.

(١) ارسم زاوية قياسها 70° ، ثم نصّفها باستخدام المسطرة والفرجار، وتحقق من صحة التنصيف باستخدام المنقلة.

(٢) باستخدام الشفافيات، انقل الرسم الآتي على ورقة، ثم نصّف زوايا رؤوسه ولوّن المساحات الناتجة حتى تحصل على تصميم فنيّ.



رسم دائرة داخل مثلث

الدرس
الرابع

النتائج

- تستكشف أن منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة هي مركز الدائرة المرسومة داخله وتمس أضلاعه.
- ترسم دائرة داخل مثلث تمس أضلاعه.

نشاط



- (١) ارسم مثلثًا.
- (٢) نصّف زواياه.
- (٣) مُدّ منصفات الزوايا حتى تلتقي في نقطة، ولتكن م.
- (٤) أسقط عمودًا من النقطة م على أي ضلع فيها باستخدام المثلث القائم، ثم سمّ نقطة تقاطع العمود مع الضلع جـ.
- (٥) افتح الفرجار فتحة مساوية للمسافة بين النقطتين م ، جـ ثم ارسم دائرة مركزها م. ماذا تلاحظ؟

قاعدة

تلتقي منصفات الزوايا في أي مثلث في نقطة هي مركز الدائرة المرسومة داخله وتمس أضلاعه.

مثال (١)

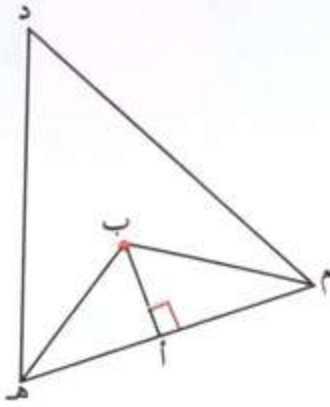
ارسم دائرة داخل المثلث د م هـ.

الحل

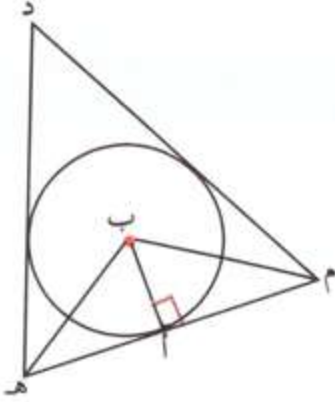
نتبع الخطوات الآتية:

- (١) نصّف الزاوية (م) ثم نصّف الزاوية (هـ) ليلتقي المنصفان في النقطة ب.

٢) أنزل عمودًا من النقطة (ب) إلى الضلع م ه يلاقيه في أ



٣) افتح الفرجار فتحة بطول ب أ وارسم دائرة.

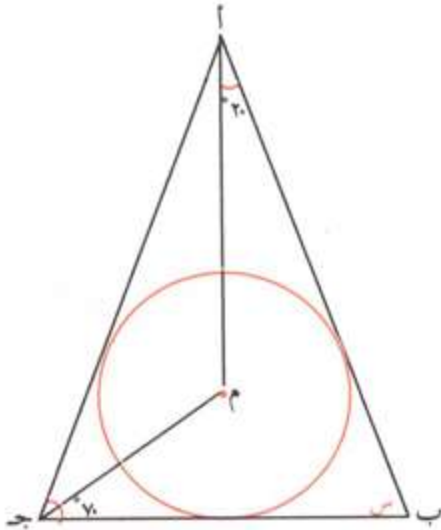


تدريب ١

ارسم دائرة تمس أضلاع مثلث قائم الزاوية.

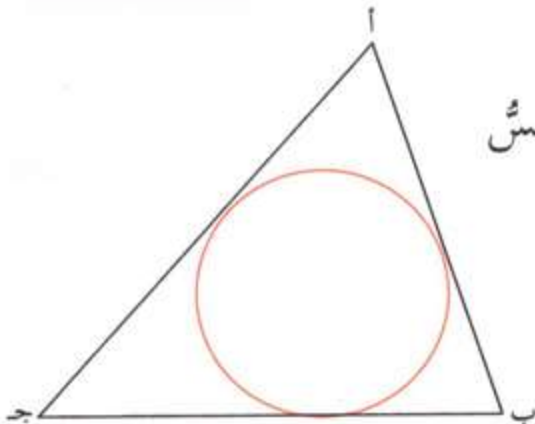
تدريب ٢

جد قيمة س في الشكل، مبررًا إجابتك،
علمًا بأن م مركز الدائرة.

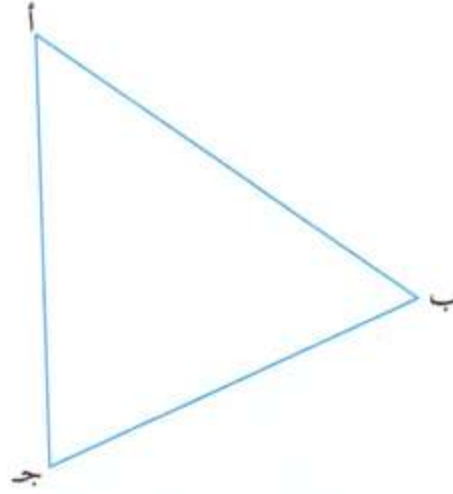


تدريب ٣

كيف تحدد مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس
أضلاعه؟



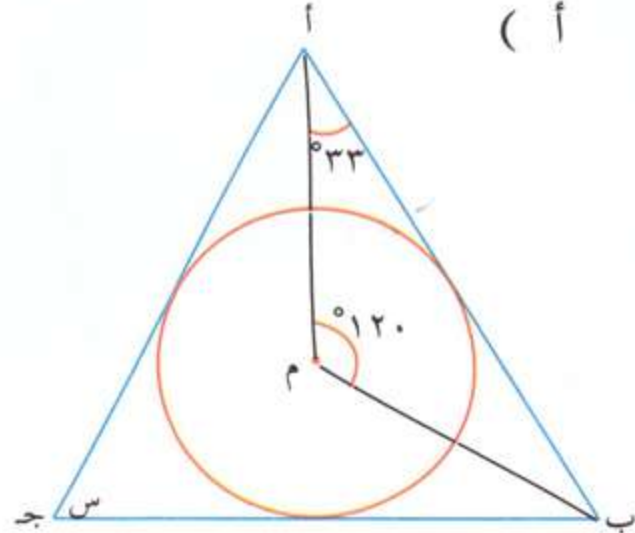
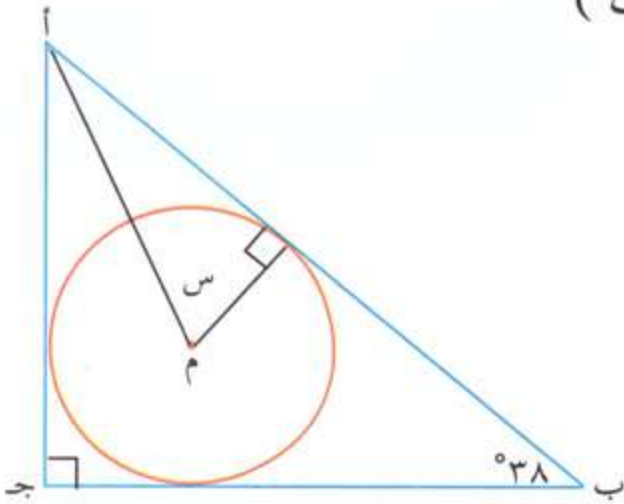
(١) ارسم دائرة داخل المثلث أ ب ج وتمس أضلاعهُ.



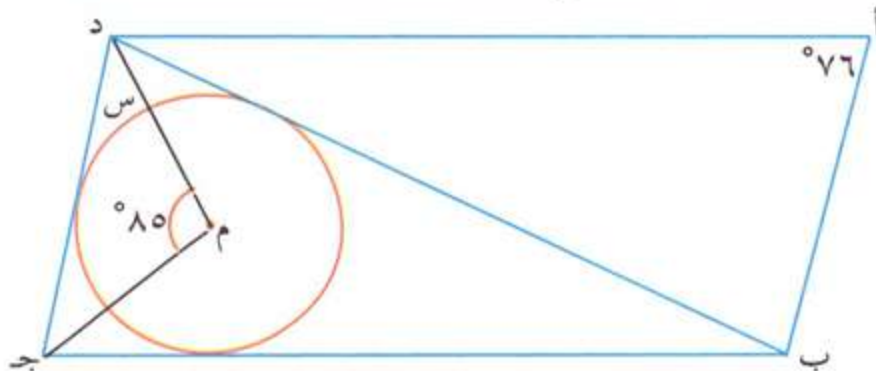
(٢) جد قيمة س في كلٍّ من الآتي، علمًا بأنَّ م مركزُ الدائرة المرسومة داخل المثلث:

(ب)

(أ)



(٣) الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع، م مركزُ الدائرة، ما قيمة س؟



مراجعة

(١) ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع على ورق مربعات، ثم أسقط عمودًا من رأسه على قاعدته.

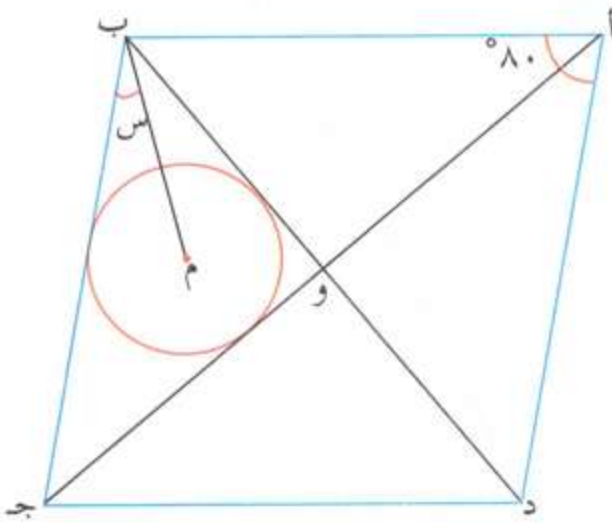
(٢) ارسم قطعة مستقيمة، ثم نصفها باستخدام المسطرة والفرجار.

(٣) ارسم معينًا على ورق مربعات، ثم نفذ الخطوات الآتية :

أ (نصف زوايا المعين باستخدام المسطرة والفرجار .

ب) مدّ منصفات الزوايا حتى تتلاقى في نقطة.

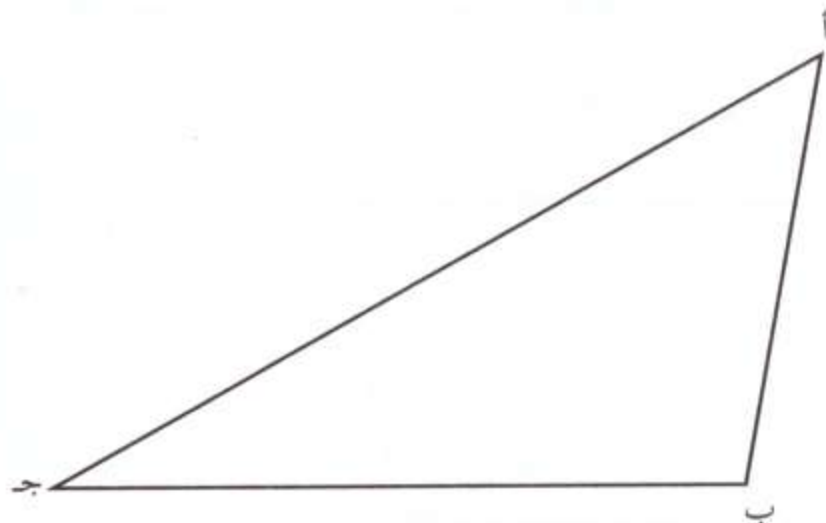
ج) لَوّن المساحات الناتجة لتحصل على لوحة فنية.



(٤) في الشكل المجاور أ ب ج د معينًا،

م مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث

ب و ج وتمس أضلاعه، جد قيمة س.



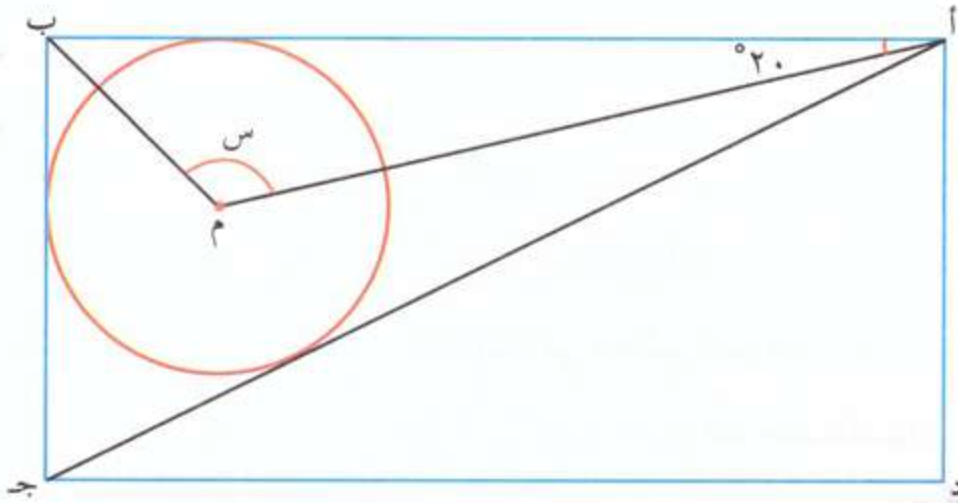
(٥) ارسم دائرة داخل المثلث

في الشكل المجاور بحيث

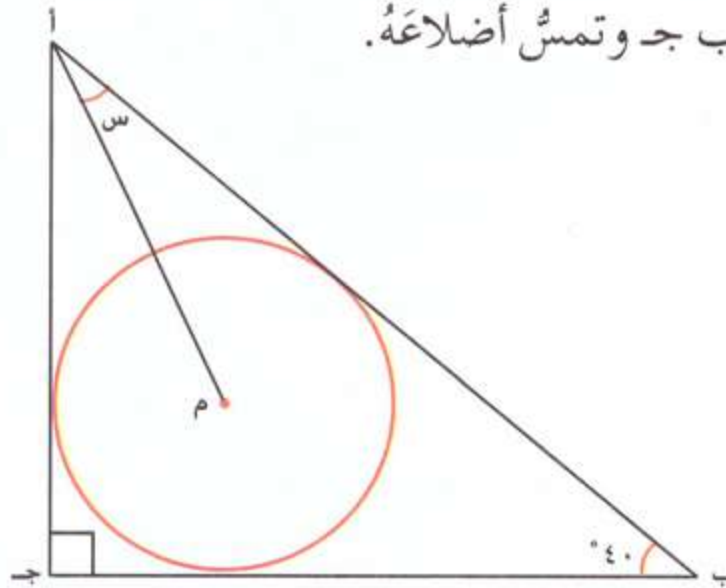
تمس أضلاعه.

اختبار ذاتي

- (١) ارسم قطعة مستقيمة، حدّد نقطة عليها وسّمها ب ، ثم أنشئ عموداً من ب على القطعة المستقيمة، باستخدام المسطرة والفرجار.
- (٢) ارسم مثلثاً مختلف الأضلاع، ثم نصّف إحدى زواياه.
- (٣) معتمداً الشكل الآتي والذي يمثل المستطيل أ ب ج د، إذا كانت م مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث أ ب ج فجد قيمة س.



- (٤) جد قيمة س في الشكل الآتي، مبرراً إجابتك، علماً بأن م مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث أ ب ج وتمس أضلاعه.



الوحدة السابعة

٧

المثلثات

يُعدُّ علم الهندسة من الفروع المهمة في الرياضيات، الذي أسهم في تطور العديد من العلوم الأخرى كالعمارة والفيزياء والفلك... إلخ، وتُعدُّ المثلثات من الأشكال الهندسية المهمة في معظم العلوم؛ لذلك سندرس في هذه الوحدة المثلثات بأنواعها المختلفة، ونتعرف خصائصها، وسيتم التركيز على المثلث القائم الزاوية ومبرهنة فيثاغورس.

اعتقد البعض أن أول من استخدم مبرهنة فيثاغورس هو العالم فيثاغورس نفسه، لكن الوثائق التاريخية تشير إلى استخدام مثلثات قائمة بأضلاع أطوالها أعداد صحيحة في العصور الحجرية، وتأكد استخدامها عند البابليين، وعند المصريين القدماء؛ حيث كانوا يستخدمون حبالاً ذات ثلاث عشرة عقدة أثناء عمليات البناء وتقسيم الأراضي الزراعية؛ بغية الاستفادة من المسافات الاثنتي عشرة الموجودة بين العقد في إنشاء مثلث قائم أطوال أضلاعه مثل (٣، ٤، ٥) ويحقق مبرهنة فيثاغورس وسُمي المثلث الذهبي، ولكن هذه المبرهنة لم تُعمَّم على باقي المثلثات القائمة إلى أن عمَّمها العالم فيثاغورس.



- يتوقع من الطالب في نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:
- ▶ استقصاء بعض العلاقات والخصائص المتعلقة بأضلاع المثلث وزواياه.
 - ▶ استقصاء خصائص المثلث متطابق الضلعين.
 - ▶ تعرّف الزاوية الخارجة للمثلث.
 - ▶ استقصاء مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية ، والتطبيق عليها.
 - ▶ استقصاء بعض النتائج الخاصة بالمثلث القائم الزاوية.
 - ▶ توظيف الخصائص والعلاقات المتعلقة بالمثلث في حلّ مسائل حياتية.

النتائج

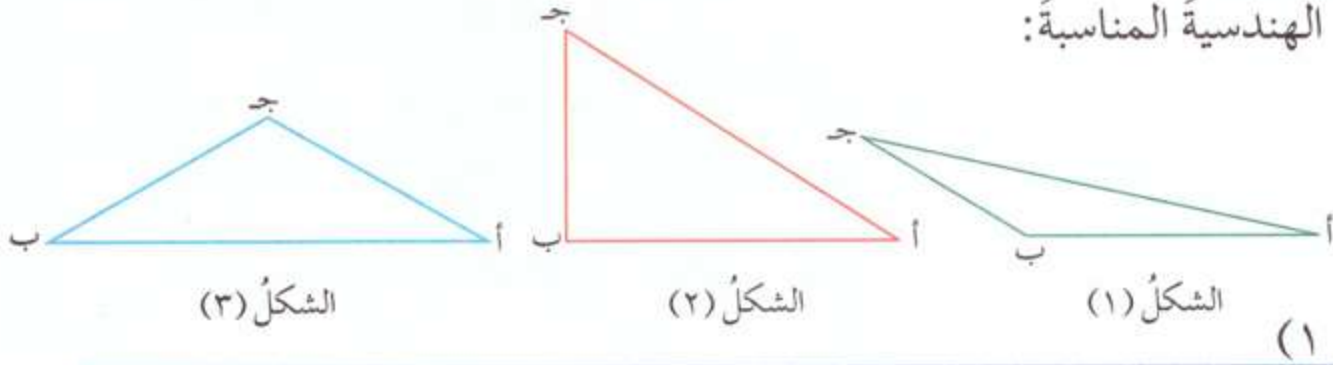
- تستقضي علاقة أطوال أضلاع المثلث مع بعضها.
- تستقضي علاقة أطوال أضلاع المثلث بقياسات زواياه.
- تستقضي خصائص المثلث متطابق الضلعين.



استنبت مهندس زراعي زهرة السوسن في حوض قاعدته على شكل مثلث متطابق الضلعين، حيث يكون قياس زاوية الرأس فيه ثلاثة أمثال قياس زاوية من زوايا القاعدة. احسب قياس زوايا الحوض.

نشاط (١)

معتمداً على الأشكال الآتية أكمل الجدول الذي يليها مستخدماً الأدوات الهندسية المناسبة:



الشكل	طول $\overline{AB}$	طول $\overline{BJ}$	طول $\overline{AJ}$
١			
٢			
٣			

(٢) جد مجموع طولَي أيّ ضلعين في المثلث ، وقارنهُ بطولِ الضلعِ الثالثِ .
ماذا تلاحظ؟

النتيجة (١)

مجموع طولَي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طولِ الضلعِ الثالثِ .

مثال (١)

هل يُمكنُ رسمُ مثلثٍ أطوالُ أضلاعه ٧ سم ، ٨ سم ، ٣ سم؟ مبرراً إجابتك .

الحلُّ

$$7 < 3 + 8 , 8 < 3 + 7 , 3 < 8 + 7$$

لاحظ أن مجموع طولَي أيّ ضلعين < طولِ الضلعِ الثالثِ .

إذن يُمكنُ رسمُ مثلثٍ أطوالُ أضلاعه ٧ سم ، ٨ سم ، ٣ سم .

التحقق من صحّة الحل: ارسم المثلث .

تدريب ١

أيّ الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ مبرراً إجابتك .

(١) ٤ سم ، ٦ سم ، ٦ سم .

(٢) ٨ سم ، ٣ سم ، ٥ سم .

(٣) ٥ سم ، ٢ سم ، ٥ سم ، ٦ سم ، ١٠ سم .

فكر وناقش



هل يُمكنُ رسمُ مثلثٍ أطوالُ أضلاعه ٨ سم ، ٨ سم ، ٦ سم؟ برّر إجابتك .

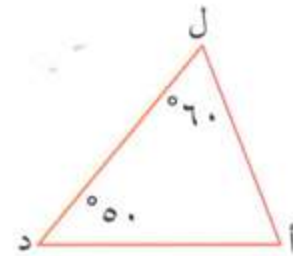
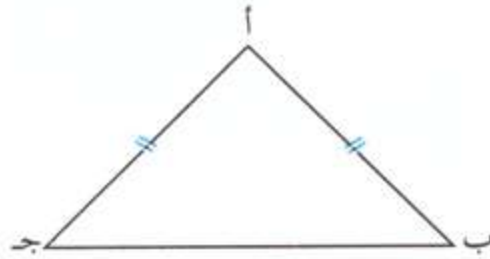
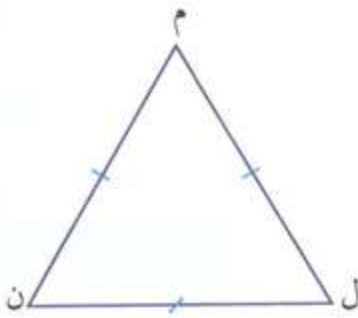
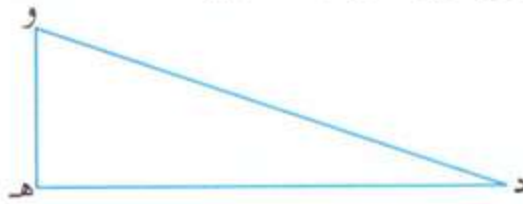


- ناقش العبارات الآتية، مبرراً إجابتك:
- مجموع طولي الضلعين الأصغر في المثلث مختلف الأضلاع < طول الضلع الأكبر.
 - كل ثلاث قطع متساوية في الطول تصلح لتشكيل مثلث.

نشاط (٢)



اعتماداً على الأشكال الآتية، أكمل الفراغ في كل مما يأتي:



- (١) أكبر ضلع في Δ س ص ع، وأكبر زاوية هي
- (٢) أصغر ضلع في Δ س ص ع هو، وأصغر زاوية هي
- (٣) كرر الخطوات (١)، (٢)، لباقي المثلثات.
ماذا تلاحظ؟

النتيجة (٢)

الضلع الأكبر في أي مثلث يقابل الزاوية الكبرى، كذلك الضلع الأصغر يقابل الزاوية الصغرى.

حالات خاصة:

- إذا تطابقت أضلاع مثلث، فإن الزوايا تكون متطابقة.
- إذا تطابق ضلعاً مثلث، فإن زاويتي القاعدة تكونان متطابقتين.

تدريب ٢

Δ أ هـ س أطوال أضلاعه أ هـ = ١١ سم، أ س = ١٥ سم، هـ س = ٨ سم، سمّ الزاوية الكبرى، والزاوية الصغرى.

نشاط (٣)



(١) ارسم على ورقة Δ أ ب ج فيه أ ب = ب ج، ثم قصّه.

(٢) اطو المثلث على نفسه من الرأس ب، حيث ينطبق الرأس أ على الرأس ج.

(٣) ماذا تلاحظ على كل من أ، ب، ج؟ ماذا نسمي كلا من الزاويتين؟

(٤) ارسم خطّ الطي وسمّه ب د.

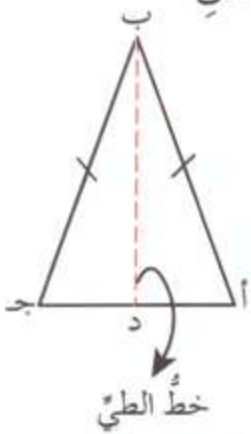
(٥) ماذا تلاحظ على كل من أ ب د، ب ج د؟

(٦) ما قياس أ د ب؟

(٧) باستخدام البيكار (الفرجار مدبب الرأسين) قارن طول

أ د مع طول د ج، ماذا تلاحظ؟

(٨) قارن النتائج التي توصلت إليها مع زملائك، ماذا تلاحظ؟



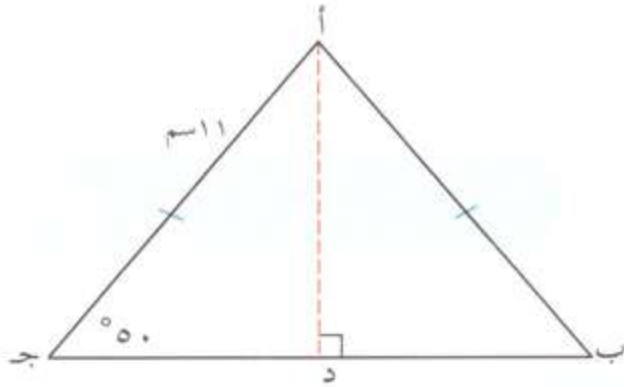
النتيجة (٣)

خصائص المثلث المتطابق الضلعين:

- (١) زاويتا القاعدة متطابقتان.
- (٢) القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث إلى منتصف قاعدته، تكون عمودية على القاعدة، وتنصف زاوية الرأس.
- (٣) العمود النازل من رأس المثلث متطابق الضلعين على قاعدته، ينصفها وينصف زاوية الرأس.

ما الفرق بين خاصية ٢، وخاصية ٣؟

مثال (٢)



في الشكل المجاور $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، إذا كان AD عموداً على BC ، جد كلاً مما يأتي مبرراً إجابتك:

طول AB ، AC ، AD .

الحل

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C = 50^\circ$$

$$\text{لايجاد } \angle A, \text{ نجد } \angle A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ لماذا؟}$$

$$\text{إذن } \angle A = \angle D = 40^\circ$$

العمود AD نصف زاوية الرأس.

تدريب ٣



جد AC ، AB ، AD في الشكل المجاور. مبرراً إجابتك، وبطريقتين مختلفتين.

(١) أي الأطوال في كل مما يأتي تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ مبرراً إجابتك.

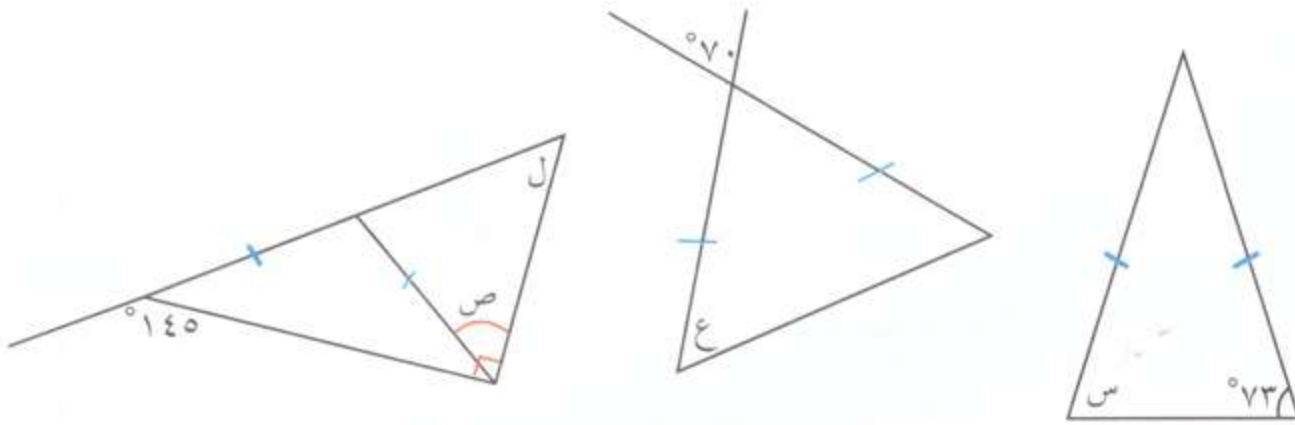
أ (٢١ سم، ١٣ سم، ٢٦ سم.

ب (٦ سم، ١٠ سم، ٨ سم.

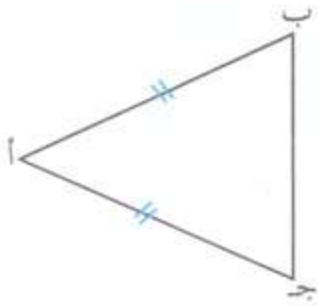
ج (٥، ١٨ سم، ٣، ٥ سم، ٢، ١٣ سم.

د (٦ سم، ٦ سم، ٦ سم.

(٢) جد قيم الزوايا المجهولة في كل شكل من الأشكال الآتية، مبرراً إجابتك.



(٣) حل المسألة الواردة بداية الدرس.



(٤) الشكل المجاور يبين Δ أ ب ج فيه $\overline{أ ب} = \overline{أ ج}$ ، ارسم

خطاً يقسمه إلى مثلثين متطابقين، مستخدماً المسطرة

والفرجار.

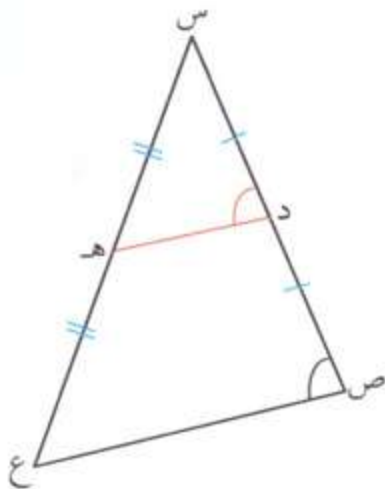
(٥) اعتماداً على خصائص المثلث المتطابق الضلعين، بين أن قياس كل زاوية في المثلث

المتطابق الأضلاع تساوي 60° .

النتائج

• تستقصي بعض خصائص المثلثات.

نشاط (١)

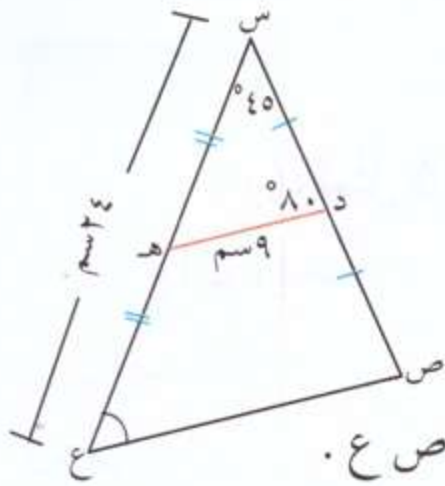


- (١) ارسم مثلثاً وسمّه س ص ع.
- (٢) نصّف الضلعين س ص و س ع، وسمّ النقاط المنصّفة د، هـ على التوالي.
- (٣) صلّ القطعة المستقيمة دهـ.
- (٤) جدّد قاس دهـ، قاس ص ع، ماذا تلاحظ؟
(تذكّر: الزاويتان قاس دهـ، و قاس ص ع في وضع تناظر).
- (٥) جدّد قاس هـ د، قاس س ع ص، ماذا تلاحظ؟
- (٦) هلّ دهـ // ص ع؟ برّر إجابتك.
- (٧) قارن بين طول دهـ، وطول ص ع، ماذا تلاحظ؟
- (٨) قارن ما توصلت إليه بما توصل إليه زملاؤك.

النتيجة (٤)

القطعة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله.

مثال (١)



في الشكل المجاور، جد كلاً مما يأتي مع التبرير:
ق، ع، طول هـ ع، طول ص ع.

الحل

لاحظ أن د هـ القطعة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في Δ س ص ع.

(١) لإيجاد ق، ع:

$$\text{ق، س هـ د} = 180^\circ - (45^\circ + 80^\circ) = 55^\circ$$

د هـ // ص ع، إذن ق، ع تناظر هـ د

$$\text{ق، ع} = \text{ق، س هـ د} = 55^\circ$$

فكر بطريقة أخرى لإيجاد قياس ق، ع. مع التبرير.

$$(2) \text{ طول هـ ع} = \frac{\text{س ع}}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ سم.}$$

المعطيات س هـ = هـ ع

$$(3) \text{ طول ص ع} = 2 \times \text{د هـ} = 9 \times 2 = 18 \text{ سم. النتيجة (٤)، د هـ} = \frac{1}{2} \text{ ص ع}$$

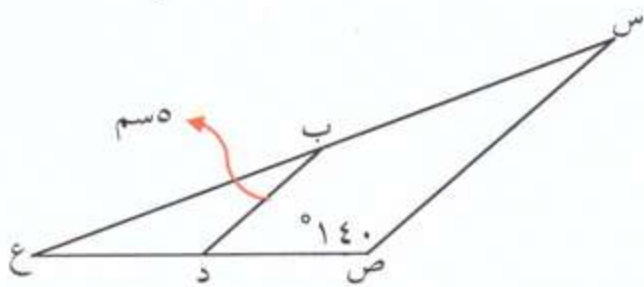
فكر وناقش



في مثال (١) هل يمكن أن يكون طول الضلع س د = ١٣ سم؟ برّر إجابتك.

تدريب ١

في الشكل المجاور؛ إذا علمت أن ب د قطعة مستقيمة واصله بين منتصفَي الضلعين

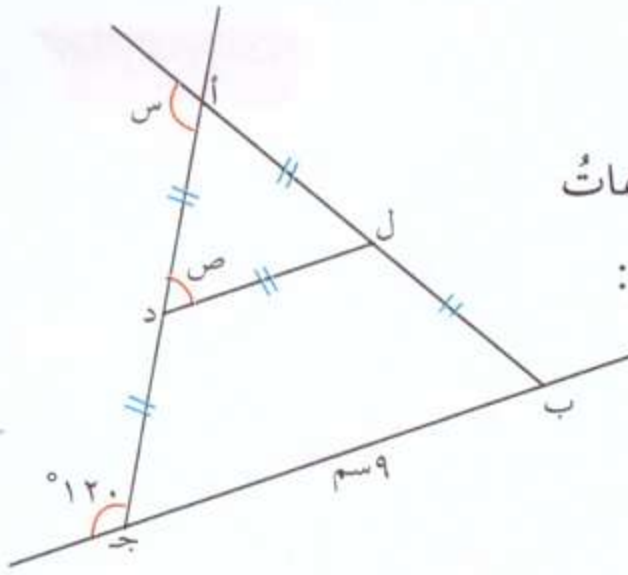


ع ص، و ع س، وأن طولها ٥ سم،

وأن ق، ص = ١٤٠°.

فجد طول س ص، ق، ب د ع مع التبرير.

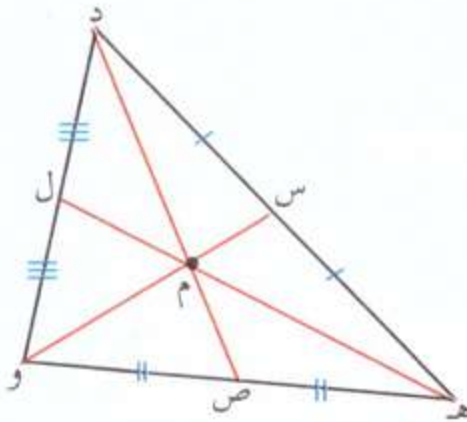
تدريب ٢



الشكل المجاور، يُمثّل Δ أ ب ج فيه ل، د منتصفات الأضلاع أ ب، أ ج على التوالي جدّ كلّاً مما يأتي:
طول أ ب، طول د ج،
ق لا ص، ق لا س . مع التبرير.

القطعة المتوسطة في المثلث هي قطعة تصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل له.

نشاط (٢)



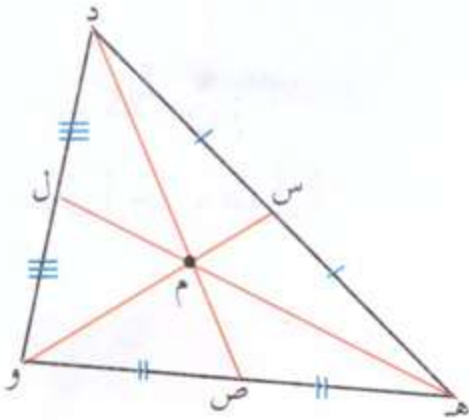
- (١) ارسم Δ د ه و.
- (٢) نصّف الأضلاع الثلاثة، وسمّ النقاط المنصفة س، ص، ل كما في الشكل المجاور.
- (٣) صلّ القطع المتوسطة وس، هل، دص، ستلاقي القطع المتوسطة الثلاث في النقطة م.
- (٤) باستخدام البيكار، قارن بين طول س م وطول و م، وسجّل النسبة الآتية
و م : م س =
- (٥) كرّر الخطوة (٤) للقطع د ص، هل .
- (٦) سجّل ملاحظاتك، بكتابة كلّ من النسب الآتية:
و م : م س =
ه م : م ل =
د م : م ص =

(٧) قارن ما توصلت إليه بما توصل إليه زملاؤك .
ماذا تلاحظ؟

النتيجة (٥)

القطع المتوسط في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة ، تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

مثال (٢)



في الشكل المجاور؛ إذا كان طول س م = ٥ سم ، وطول د م = ١٢ سم ، فجد طول كل من : و م ، د ص .

الحل

من الشكل نجد أن م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في $\Delta د هـ و$.

(١) لإيجاد طول و م ، نستخدم نتيجة (٥)

$$و م : م س = ٢ : ١$$

$$\frac{و م}{م س} = \frac{٢}{١}$$

$$\frac{و م}{١} = \frac{٢}{٥} \quad \leftarrow \quad و م = ١٠ \text{ سم}$$

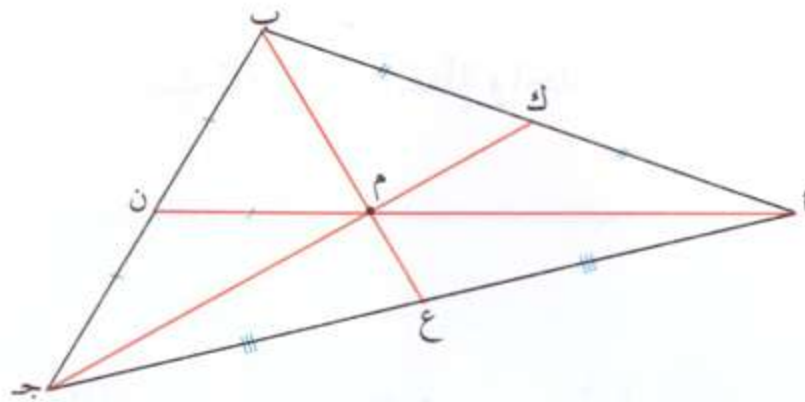
(٢) لإيجاد طول د ص :

$$د ص = د م + م ص$$

لكن د م = ١٢ سم ، ومنه م ص = ٦ سم . لماذا؟

$$\text{إذن د ص} = ١٢ + ٦ = ١٨ \text{ سم}$$

في الشكل الآتي، إذا علمت أن $أع = ٨$ سم، $أم = ٢$ سم، وأن قياس $\angle م = ٢٨^\circ$.



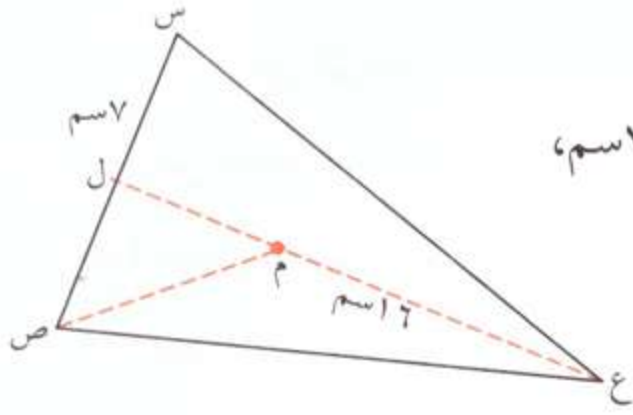
فجد كلاً من :

طول أ ج ، طول أن ، طول ب ج ، $\angle ج ن أ$.

فكر وناقش

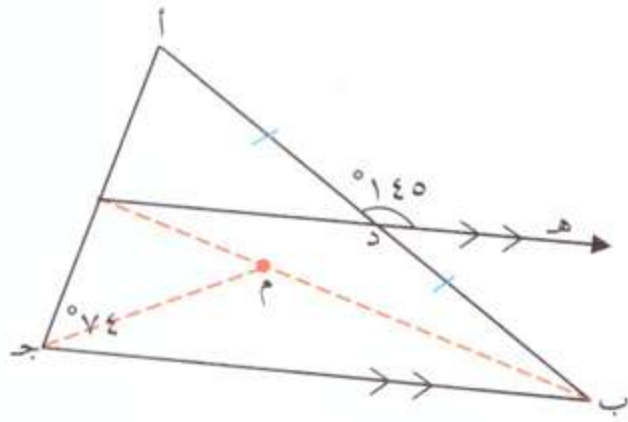


- في تدريب (٣) ، ادّعت آلاء :
(بما أن $\Delta ن ج م$ متطابق الضلعين ، فإن $\Delta ك م ب$ متطابق الضلعين أيضاً).
ناقش ادّعاء آلاء وقدم تبريراً .
- القطعة المتوسطة الواصلة بين رأس المثلث متطابق الضلعين وقاعدته ، تكون عمودية على القاعدة .



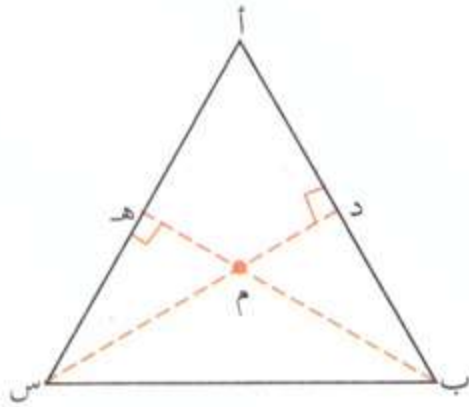
(١) في الشكل المجاور، إذا كانت م نقطة تلاقي القطع المتوسطة، ع م = ١٦ سم، س ل = ٧ سم، فجد طول كل مما يأتي:
س ص، ع ل، مبرراً إجابتك.

(٢) معتمداً على الشكل الآتي، إذا كانت م نقطة تلاقي القطع المتوسطة، وكان



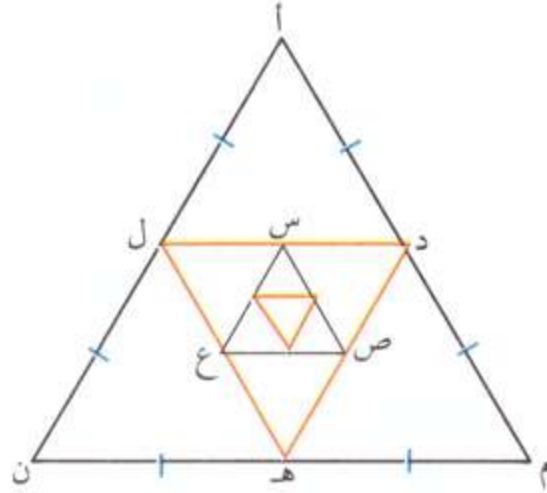
ق أ ج ب = ٧٤°، ق أ د ه = ١٤٥°.
فجد قياس كل من: أ ب ج، أ. مبرراً
إجابتك.

(٣) إذا كانت م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في Δ أ ب س، وكانت س د $\perp$ أ ب،
ب ه $\perp$ أ س.

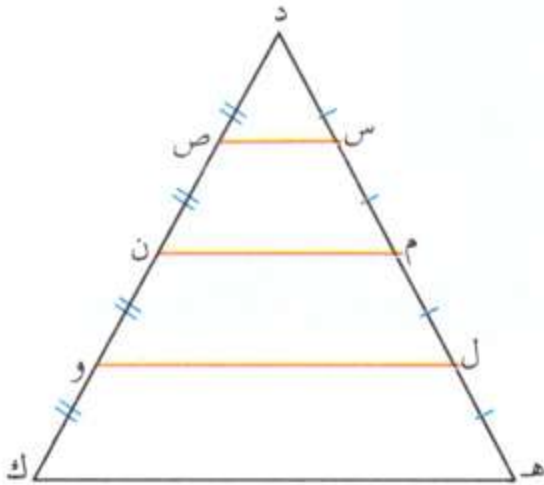


فبين أن Δ أ ب س متطابق الأضلاع.

(٤) معتمدًا الشكل الآتي، الذي يمثل Δ أ م ن متطابق الأضلاع ، وُصِلَت منتصفات أضلاعه فتكوّن Δ د ه ل، كذلك وُصِلَت منتصفات أضلاع Δ د ه ل؛ فتكوّن Δ س ص ع ، ثم استمرّت العملية على النمط نفسه:
 أ (هل جميع المثلثات الناتجة متطابقة الأضلاع؟
 ب) معتمدًا الشكل الآتي، إذا علمت أنّ طول ضلع Δ أ م ن وحدة واحدة ، فجدّ محيط كلٍّ من: Δ أ م ن ، Δ د ه ل ، Δ س ص ع.



(٥) في الشكل المجاور Δ د ه ك قسّم ضلعا د ه ، د ك إلى أربعة أجزاء متطابقة، ما العلاقة بين أطوال س ص ، ه ك ؟



(٦) اكتب مسألة تستخدم في حلّها إحدى النتائج التي توصلنا إليها في الدرس، ثمّ حلّها.

النتائج

- تتعرفُ الزاوية الخارجة للمثلث.

اعتمادًا على الشكل المجاور،
أجب عما يأتي:

(١) ما المقصودُ بالزاوية الخارجة
للمثلث؟

(٢) ما العلاقةُ بينَ قياسِ الزاوية الخارجة للمثلث و قياسِ $\angle$ ج ب؟

(٣) ارسم زاويةً خارجةً أخرى للمثلث ومجاورةً لـ $\angle$ أ ج ب.

(٤) ما علاقةُ الزاوية الناتجة من (٣) بالزاوية الخارجة الموضحة في الرسم.

(٥) ما عددُ الزوايا الخارجة والمختلفة القياس للمثلث الواحد؟

إذا مُدَّ أحدُ أضلاعِ المثلث على استقامته، فإنَّ الزاوية المحصورة بين امتدادِ هذا
الضلع والضلع المجاور تُسمى **الزاوية الخارجة**.

نشاط



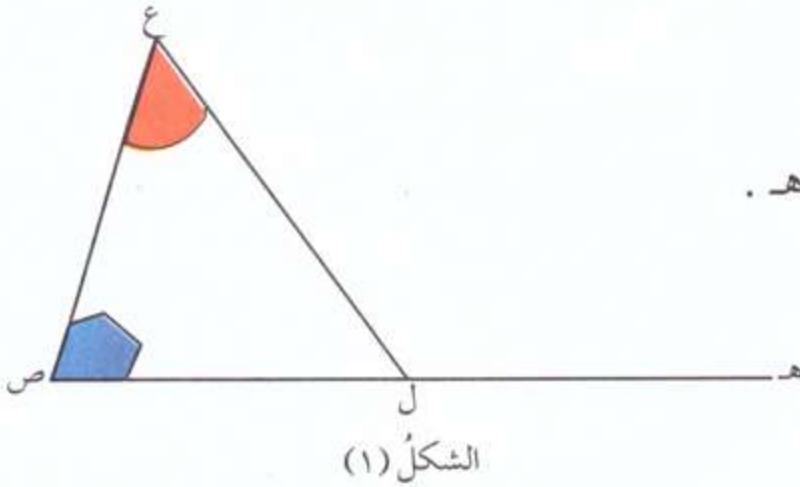
(١) ارسم $\triangle$ ص ع ل.

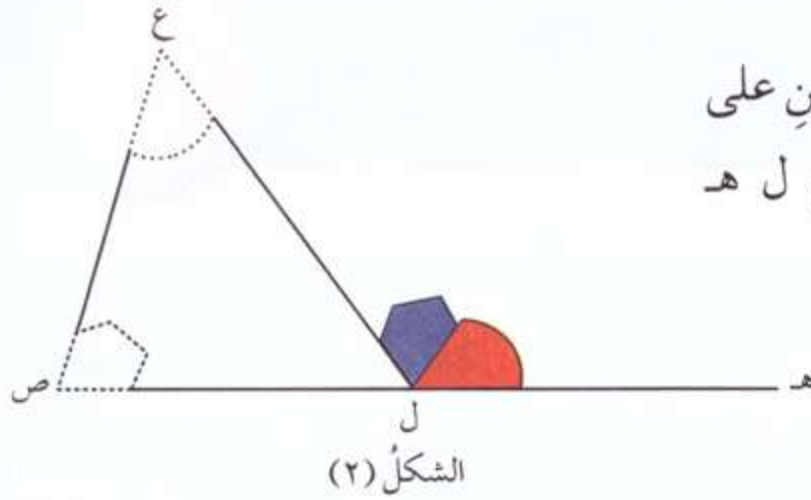
(٢) عيّن الزاوية الخارجة لـ $\angle$ هـ.

(٣) لوّن الزاويتين لـ ص، لـ ع

كما في الشكل (١)،

ثم قصّ كلّاً منهما.





(٤) اجعل رأس كل من الزاويتين على رأس الزاوية الخارجة ع ل هـ كما في الشكل (٢).

ماذا تلاحظ؟

النتيجة (٦)

قياس الزاوية الخارجة للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعديتين.

لبرهنة النتيجة السابقة؛ نحدد المعطيات والمطلوب إثباته ثم نبدأ بخطوات البرهان.

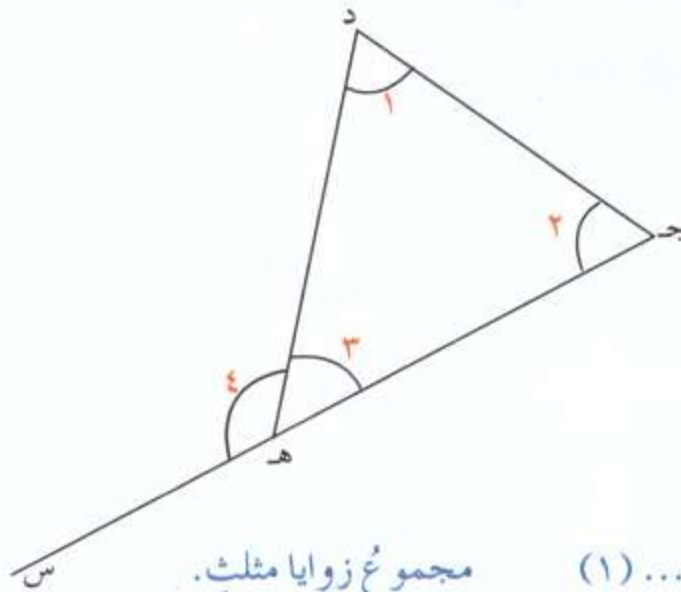
المعطيات

نرسم مثلثاً ليكن د ج هـ، ونحدد له زاوية خارجة، كما في الشكل المجاور.

المطلوب

إثبات أن $\angle ق٤ = \angle ق١ + \angle ق٢$

البرهان



$$\angle ق٣ + \angle ق٢ + \angle ق١ = 180^\circ \dots\dots\dots (١)$$

$$\angle ق٣ + \angle ق٤ = 180^\circ \dots\dots\dots (٢)$$

بطرح معادلة (٢) من معادلة (١) ينتج أن:

$$\angle ق٢ + \angle ق١ - \angle ق٤ = 0 \text{ صفراً}$$

لماذا؟

أي أن

$$\angle ق٢ + \angle ق١ = \angle ق٤ \text{ وهو المطلوب.}$$

Δ أ ب ج فيه $\angle ق = ٧٥^\circ$ ، $\angle ا ب د$ خارجة للمثلث وقياسها يساوي ١٣٧° . جد قياسات زوايا المثلث ؟ برّر خطوات حلّك ، ثمّ تحقق من صحة الحلّ .
(حلّ التدريب بطريقتين مختلفتين) .

مثال (١)

جد $\angle د ل ع$ في الشكل المجاور .
برّر إجابتك ، ثمّ تحقق من صحة الحلّ .

الحلّ

بما أن $\angle ه ب ع$ خارجة للمثلث ؛ فإنّ

$$\angle ق ه ب ع = \angle ق ب ل ع + \angle ق ا ب ع ل .$$

$$\text{أي أن: } ٤٠^\circ = س + س$$

$$س = ٢٠^\circ$$

$$\angle ق د ل ع = ١٨٠^\circ - ٢٠^\circ = ١٦٠^\circ$$

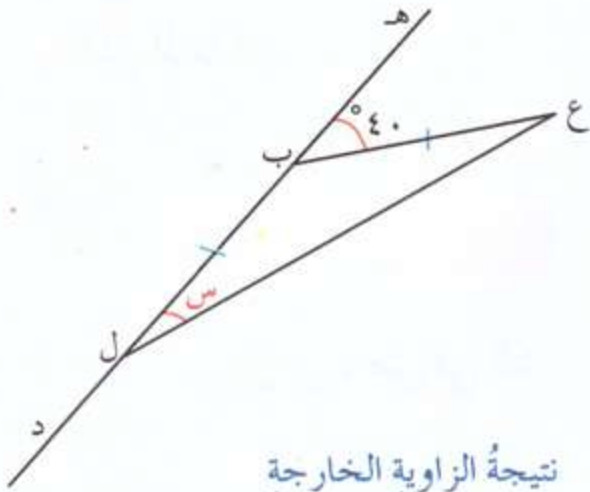
التحقق من صحة الحلّ:

$$\angle ق ا ب ل = ١٤٠^\circ$$

$$\angle ق ا ع = ٢٠^\circ$$

$$\angle ق د ل ع = \angle ق ا ب ل + \angle ق ا ع = ١٤٠^\circ + ٢٠^\circ = ١٦٠^\circ$$

$$١٦٠^\circ = ١٤٠^\circ + ٢٠^\circ =$$



نتيجة الزاوية الخارجة

Δ ب ع ل متطابق الضلعين

لماذا؟

لماذا؟

مثلث متطابق الضلعين.

فكر وناقش



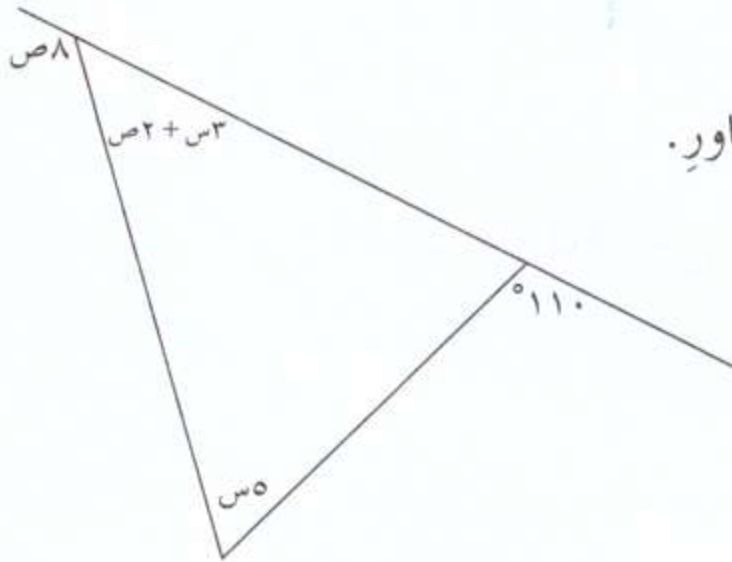
ادّعت مريم ما يأتي:

- إذا كانت لمثلث زاوية خارجية منفرجة ، فإن المثلث حادّ الزوايا.
 - إذا كانت لمثلث زاويتان خارجتان منفرجتان ، فإن المثلث حادّ الزوايا.
 - الزاوية الخارجة للمثلث أكبر من أي زاوية داخلية ما عدا المجاورة لها.
- ناقش ادّعاءات مريم مقدّمًا تبريرًا .

فكر وناقش



جد قيمة كل من s ، v في الشكل المجاور.

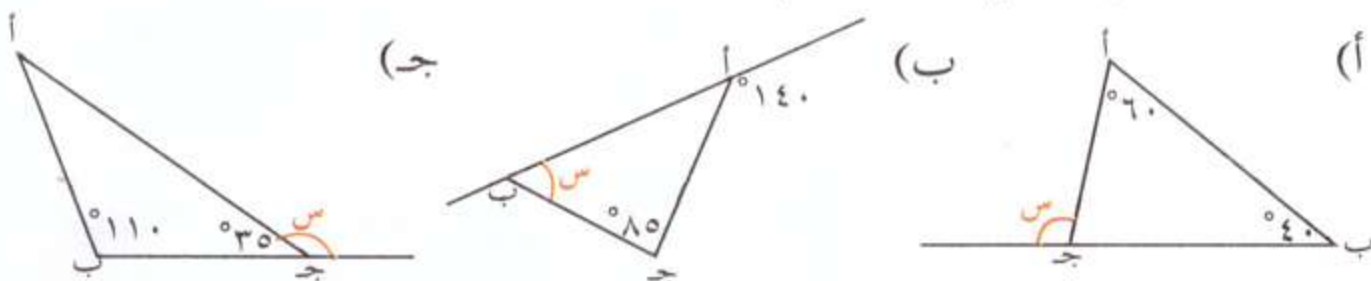


فكر وناقش

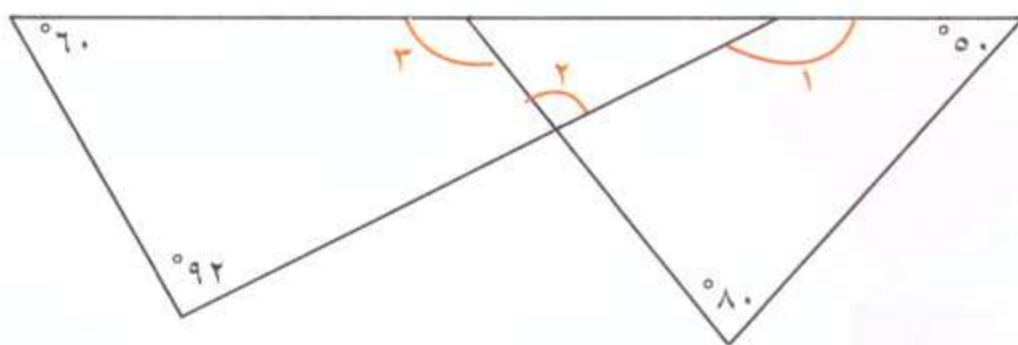


- ما مجموع قياسات جميع الزوايا الخارجة للمثلث؟
- ما مجموع قياسات جميع الزوايا الخارجة للشكل الرباعي؟

(١) جد قيمة الزاوية س في كل مما يأتي :

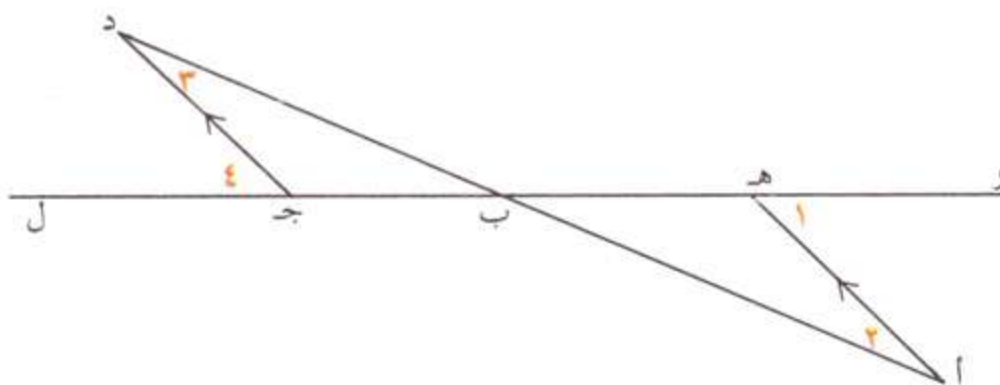


(٢) جد قياس الزوايا ١، ٢، ٣ في الشكل الآتي :



(٣) إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمثلث 117° ، وقياس الزاويتين الداخليتين البعديتين له $2س + 7$ ، $61 - س$. فجد قيمة س.

(٤) إذا كانت $\overline{أه} \parallel \overline{جد}$ في الشكل الآتي، بيّن أن $\angle ق١ = \angle ق٤$.

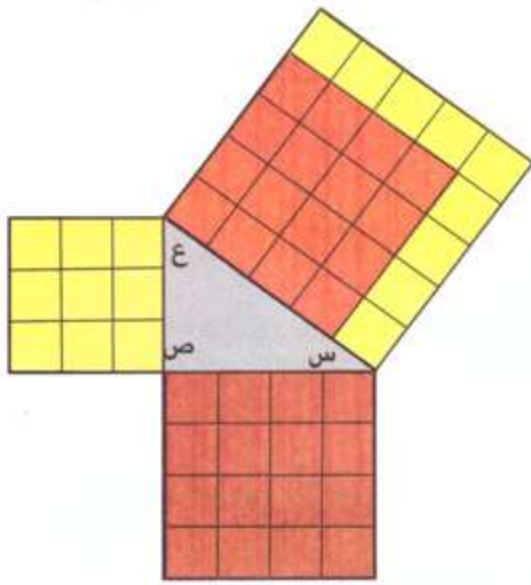


التجارب

- تستقصي مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم.

نشاط (١)

معتمداً على الشكل المجاور، أجب عن كل مما يأتي:



(١) ما نوع المثلث الممثل في الشكل؟
(٢) ما مساحة المربع المنشأ على ضلع القائمة الأولى؟

(٣) ما مساحة المربع المنشأ على ضلع القائمة الثانية؟

(٤) ما مساحة المربع المنشأ على الوتر؟
ماذا تلاحظ؟

مبرهنة فيثاغورس:

في المثلث القائم الزاوية؛

- مساحة المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين.

وهذا يعني أن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

• أي أن (طول الوتر)² = (طول الضلع الأول)² + (طول الضلع الثاني)²

مثال (١)

Δ هـ ع ل قائم الزاوية في ع فيه هـ ع = ٩ سم ، ع ل = ١٢ سم ، احسب طول هـ ل.

الحل

بما أن Δ هـ ع ل قائم الزاوية نطبق مبرهنة فيثاغورس.

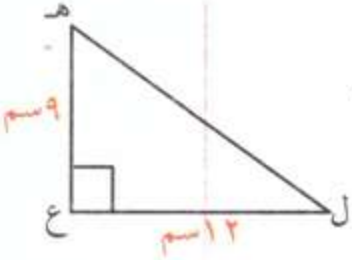
$$(\text{طول الوتر})^2 = (\text{طول الضلع الأول})^2 + (\text{طول الضلع الثاني})^2$$

$$(\text{هـ ل})^2 = (\text{هـ ع})^2 + (\text{ع ل})^2$$

$$(\text{هـ ل})^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

$$|\text{هـ ل}| = \sqrt{225} = 15$$

$$\therefore \text{هـ ل} = 15 \text{ سم.}$$



تدريب ١

(١) Δ س ل ع قائم الزاوية في ل فيه س ل = ١ سم ، ع ل = ١ سم. احسب طول س ع.

(٢) Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ١٠ سم ، ب ج = ٨ سم احسب طول أ ب.

فكر وناقش



إذا كان الشكل المنشأ على كل ضلع من أضلاع المثلث القائم نصف دائرة، فهل مساحة نصف الدائرة المنشأة على الوتر تساوي مجموع مساحتي نصفي الدائرتين المنشأتين على الضلعين الآخرين؟ برّر إجابتك.



- Δ أ ب ج فيه ب أ = ٣ سم ، أ ج = ٤ سم ، ب ج = ٥ سم :
- (١) قارن بين مربع الضلع الأكبر ومجموع مربعي الضلعين الأصغر.
- (٢) ارسم المثلث.
- (٣) سمّ الزاوية المقابلة للضلع الأكبر ، ثم قم بقياسها ، ما نوع المثلث الناتج؟
- (٤) كرّر الخطوات السابقة لكل من المثلثين؛
- أ (Δ د ه و فيه د ه = ٣ سم ، ه و = ٥ سم ، د و = ٦ سم .
- ب (Δ س ع ك فيه س ع = ٨ سم ، ع ك = ١٠ سم ، س ك = ٦ سم .
- ماذا تلاحظ؟

نتيجة

إذا كانت مساحة المربع المنشأ على ضلع مثلث يساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعي المثلث الآخرين ، فإن المثلث قائم الزاوية .

مثال (٢)

يبيّن إذا كان المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٥ دسم ، ٢٠ دسم ، ٢٥ دسم قائم الزاوية.

الحل

نجد مربعات أطوال الأضلاع:

$$٦٢٥ = ٢(٢٥) ، ٤٠٠ = ٢(٢٠) ، ٢٢٥ = ٢(١٥)$$

بما أن $٦٢٥ = ٤٠٠ + ٢٢٥$ ، إذن المثلث قائم الزاوية.

بيّن أيّ الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية:

(٢) ٣٠ سم، ٤٠ سم، ٥٠ سم.

(١) ٤ سم، ٨ سم، ١١ سم.

(٤) ٣ سم، ٣ سم، ٣ سم.

(٣) ١٠ سم، ٩ سم، ١٣ سم.

فكر وناقش

- ما العلاقة بين مساحات المربعات المنشأة على أضلاع المثلث حادّ الزوايا؟
- ما العلاقة بين مساحات المربعات المنشأة على أضلاع المثلث منفرج الزاوية؟
- هل تستطيع أن تتنبأ بنوع المثلث من حيث الزوايا دون رسمه، وباستخدام مبرهنة فيثاغورس؟ برّر إجابتك.

نشاط (٣)

(المثلث الثلاثيني الستيني).

- (١) ارسم Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب، فيه $\angle ق = ٣٠^\circ$ ، $\angle ج = ٦٠^\circ$.
- (٢) باستخدام البيكارِ قارن طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° مع طول الوتر أ ج، ماذا تلاحظ؟
- (٣) قارن ما توصلت إليه بما توصل إليه زملاؤك. ماذا تلاحظ؟

نتيجة

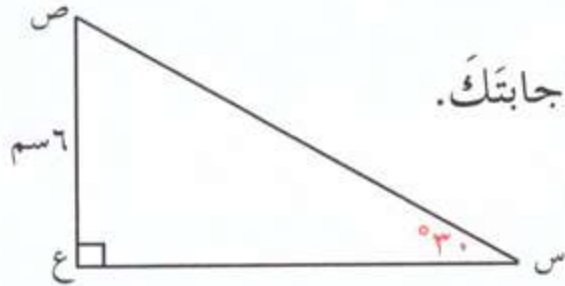
طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث الثلاثيني الستيني يساوي نصف طول الوتر.



ما علاقة طول الضلع المجاور للزاوية 30° بطول الوتر؟

٣

تدريب



في الشكل المجاور جد طول الضلع س ع ، مبرراً إجابتك.

نشاط (٤)



- (١) ارسم Δ د ه و قائم الزاوية في هـ.
- (٢) نصف الوتر كما تعلمت سابقاً، وسم نقطة المنتصف جـ.
- (٣) صل رأس القائمة مع النقطة جـ ، ثم قارن طول هـ جـ بطول الوتر د و . ماذا تلاحظ؟
- (٤) قارن ما توصلت إليه بما توصل إليه زملاؤك، ماذا تلاحظ؟

نتيجة

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية، يساوي طول نصف الوتر.

مثال (٣)

Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب ، النقطة ص منتصف الوتر أ جـ ، إذا كانت ب ص = ٧ سم ، فما طول الوتر؟

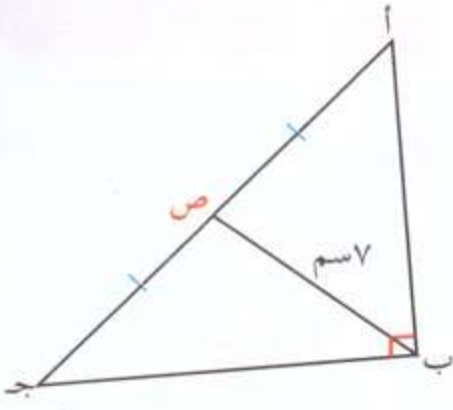
الحل

نرسم رسمًا توضيحيًا

(نتيجة)

$$أج = ٢ \times ب ص$$

$$\therefore أج = ١٤ سم.$$



تدريب ٤

Δ ص ع ل قائم الزاوية في ع ، النقطة د منتصف ص ل ، ق $\angle$ ص د ع = ١١٠° ، احسب ق $\angle$ ص .

فكر وناقش



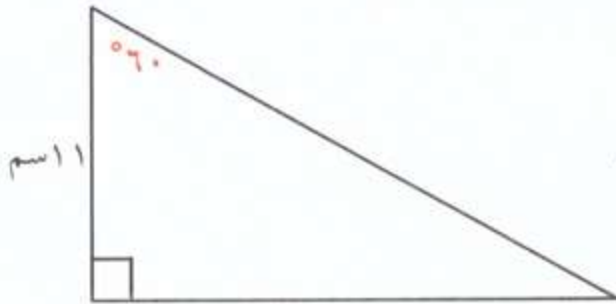
تسمى الأضلاع ٣ ، ٤ ، ٥ ثلاثية فيثاغورس ، لأنها تحقق مبرهنة فيثاغورس .
أوجد مجموعتين على الأقل من ثلاثيات فيثاغورس .

(١) أي مما يأتي تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية :

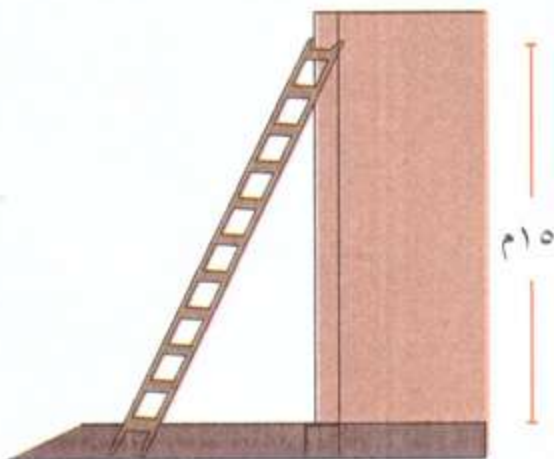
- أ (٣ سم ، ٥ سم ، ٩ سم .
 ب (٥ سم ، ١٢ سم ، ١٣ سم .
 ج (٢٠ سم ، ٢٤ سم ، ٢٥ سم .
 د (١٢ دسم ، ٢١ دسم ، ١٥ دسم .
 هـ (٥ دسم ، ١٠ دسم ، $\sqrt{75}$ دسم .
 و (٢٠ سم ، ١٢ سم ، ١٦ سم .

(٢) جد طول الضلع الثالث في كل مما يأتي :

- أ (Δ س د ب قائم في د فيه س د = ١٥ سم ، د ب = ٨ سم .
 ب (Δ م ل ن قائم في ل فيه م ل = ١ سم ، م ن = $\sqrt{3}$ سم .
 ج (مثلث قائم الزاوية طول أحد أضلاعه ٧,٥ سم ، وطول وتره ٢,٥ سم .
 (٣) Δ د هـ و متطابق الضلعين طول ضلعه ٢٥ سم ، وطول قاعدته ٤٠ سم ، جد ارتفاعه .
 (٤) مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين ، طول وتره يساوي $10\sqrt{3}$ سم ، جد طول كل من الضلعين الآخرين .



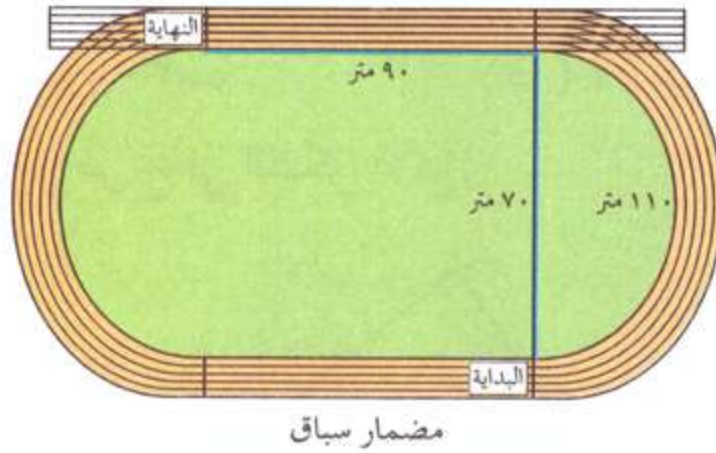
(٥) احسب محيط المثلث في الشكل المجاور .



(٦) يحتاج أحد رجال الإنقاذ إلى تثبيت سلم على نافذة ترتفع عن الأرض ١٥ م، إذا علمت أن من شروط السلامة أن تكون المسافة بين قاعدة السلم والمبنى بمقدار ربع طول السلم تقريباً، فجد المسافة التقريبية لبعد قاعدة السلم عن البناية.

٧ (س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، النقطة ب منتصف س ع ، ج منتصف ص ع . أثبت أن $\overline{AB} \perp \overline{CE}$.

٨ (تأمل الشكل الذي يمثل مضمار سباق ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه :



أ (احسب المسافة التي يقطعها اللاعب من خط البداية إلى خط النهاية .
 ب (حدد على الشكل إزاحة اللاعب ، ثم احسب مقدارها .

٩ (دورية شرطة تطارد عصابة مهربين وقفت في منطقة على شكل المستطيل س ص ع ل (س ص = ٦ كم ، ص ع = ٣ كم) ، جد مقدار كل من المسافة والإزاحة التي تفصل بين الدورية والعصابة في الحالات التالية ، مع تحديد اتجاه الإزاحة :



أ (إذا تحركت الدورية من س إلى ص باتجاه عكس عقارب الساعة .
 ب (إذا تحركت الدورية من س إلى ل ثم إلى ع

١٠ (عيّن العدد الحقيقي $\sqrt{2}$ على خط الأعداد باستخدام مبرهنة فيثاغورس .

١١ (تحدث عن حالات استخدام مبرهنة فيثاغورس .

مراجعة

(١) أي مما يأتي يمثل أضلاع مثلث؟ وحدد نوع ذلك المثلث من حيث الزوايا :

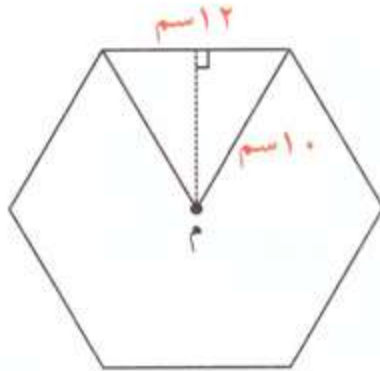
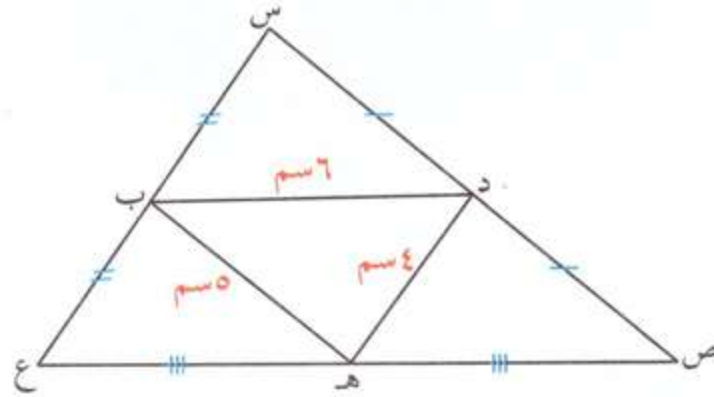
(ب) ٨ سم ، ١١ سم ، ٣ سم .

(أ) ٤ سم ، ٧ سم ، ٥ سم .

(د) ١٢ سم ، ١٠ سم ، ٩ سم .

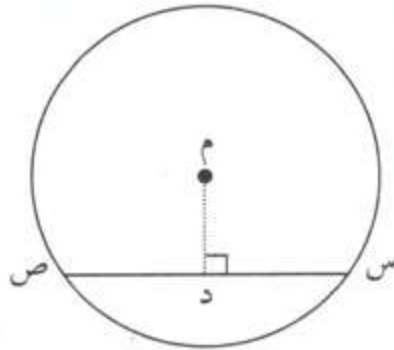
(ج) ١٨ سم ، ٢٤ سم ، ٣٠ سم .

(٢) احسب محيط Δ س ص ع في الشكل الآتي :



(٣) يُبين الشكل المجاور سداسيًا منتظمًا مركزه النقطة م،

جد مساحته بالسنتيمترات المربعة.



(٤) في الشكل المجاور ، يبين أن م د ينصف س ص.

(٥) أ ب ج د شكل رباعي فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع الأربعة على التوالي ، يبين أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع.

اختبار ذاتي

(١) اقرأ العبارات الآتية، ثم أجب بنعم أو لا مع ذكر السبب:

أ (لأي ثلاثة أعداد، إذا كان مجموع العددين الأصغر $<$ العدد الأكبر ، فإن هذه الأعداد يمكن أن تكون أطوال أضلاع في مثلث.

ب) في Δ س ص ل ؛ إذا كانت $\angle$ س منفرجة ، فإن الضلع ص ل هو أطول أضلاع المثلث.

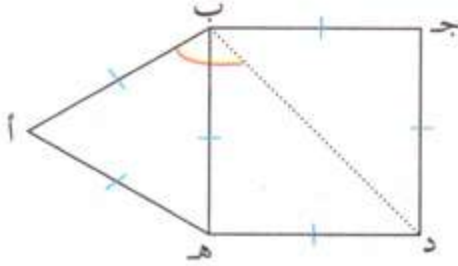
ج) إذا كانت $\angle$ هـ د ك خارجة للمثلث هـ د ن ، فإنها منفرجة.

د (إذا كانت إحدى القطع المتوسطة في مثلث عمودية على الضلع الساقطة عليه، فإن المثلث متطابق الأضلاع .

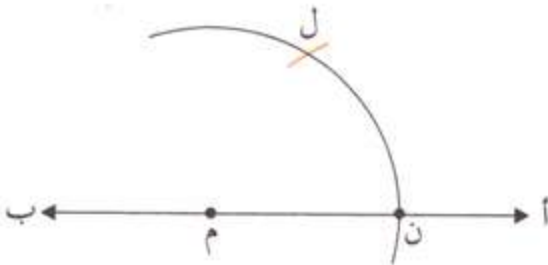
هـ (في Δ أ ب ج إذا وجدت قطعتان متوسطتان عموديتان على ضلعيه، فإن المثلث متطابق الأضلاع.

و (الزوايا الخارجة للمثلث حادّ الزوايا، جميعاً منفرجة.

ز (في المثلث القائم الزاوية ، مساحة المثلث المنتظم المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المثلثين المنتظمين المنشأين على الضلعين الآخرين.



(٢) في الشكل المجاور جد $\angle$ أ ب د



(٣*) رُسم قوس دائرة مركزها م فقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ في النقطة ن، ثم رُسم قوس آخر من النقطة ن بنفس فتحة الفرجار فقطع القوس الأول في ل . جد $\angle$ م ل ن.

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

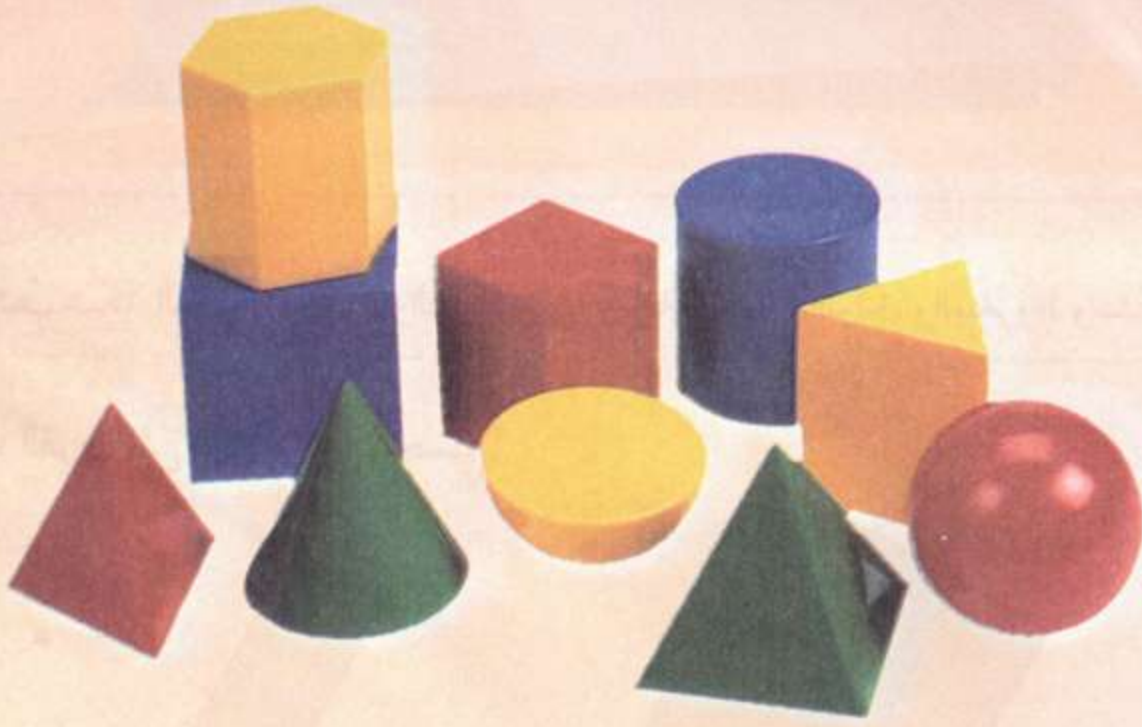
الوحدة الثامنة



المجسمات

نستخدم في حياتنا اليومية مجسمات مثل العلب والصناديق، وللتعامل مع هذه الأشياء بشكل سليم وصحيح من حيث التصميم والسعة والتخزين والتوزيع والعرض؛ فلا بد من دراسة خصائصها، بالإضافة إلى أن هنالك العديد من الأشياء منها ما هو مسطح (ثنائي الأبعاد) وما هو مجسم (ثلاثي الأبعاد). ومن أجل بناء الفهم الصحيح لبنية الأشكال والمجسمات، يحتاج الطلبة إلى خبرات تعليمية تتعلق بالأشكال ثنائية الأبعاد، والمجسمات ثلاثية الأبعاد، ليتوصلوا إلى أن الأسطح المستوية (ثنائية الأبعاد)، تكون عند طيها مجسمات (ثلاثية الأبعاد).

إن فهم المجسمات (المنشور، الهرم، الأسطوانة، والمخروط، والكرة)، والصيغ المتعلقة بحجومها ومساحات سطحها يساعد في حل العديد من المشكلات.



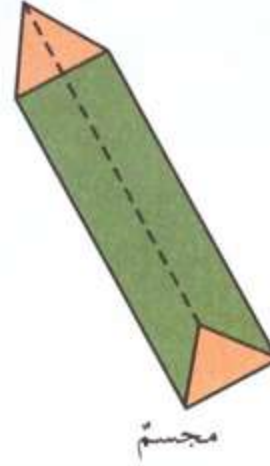
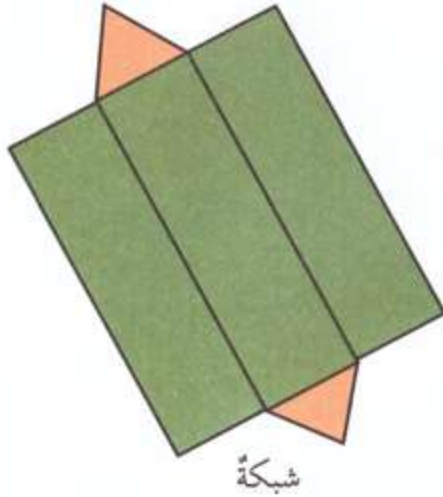
يتوقع من الطالب في نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- ▶ اكتشاف شبكة المنشور الثلاثي، والهرم الثلاثي، والرباعي، والأسطوانة، والمخروط، وإنشائها.
- ▶ استقصاء صيغة لحجم المنشور الثلاثي، ومساحة سطحه.
- ▶ تعرف صيغة لحجم الأسطوانة، ومساحة سطحها.
- ▶ استقصاء صيغة لحجم المخروط، ومساحة سطحه.
- ▶ استقصاء صيغة لحجم الهرم الثلاثي، والرباعي، ومساحة سطحه.
- ▶ استقصاء صيغة لحجم الكرة، ومساحة سطحها.
- ▶ استقصاء تأثير التغير في أبعاد المجسم على مساحة سطحه، وحجمه.
- ▶ حل مسائل حياتية على المساحات والحجوم.

النتائج

- تكتشف شبكة المنشور الثلاثي، والهرم الثلاثي والرباعي، والأسطوانة، والمخروط وتنشئها.

ما الفرق بين الشبكة والمجسم؟



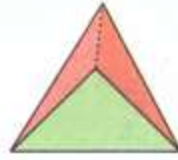
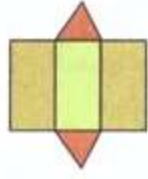
أكمل الفراغ في الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X)، للإجابة عن السؤال أعلاه:

ثلاثي الأبعاد	ثنائي الأبعاد	
		الشبكة
		المجسم

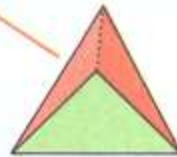
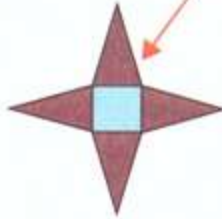
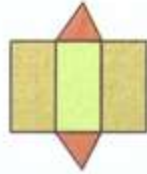
الشبكة: مسطح مستوي (ثنائي الأبعاد)، يمكن أن يُطوى لعمل مجسم (ثلاثي الأبعاد)، وتتكون الشبكة من القاعدة، والأسطح (الأوجه)، والرووس.

مثال (١)

صل كل مجسم بشبكته في ما يأتي:



الحل



تدريب

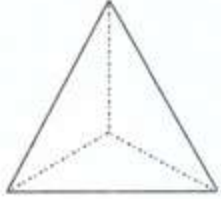
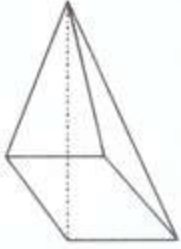
أنا مجسم شبكتي تتكون من مستطيل، وأربعة مثلثات متطابقة الضلعين، عند طيها تلتقي رؤوسها في نقطة واحدة، فمن أنا؟ وماذا تسمى نقطة الالتقاء؟



- (١) ارسم شبكة المجسم الوارد في تدريب (١).
- (٢) اطر الشبكة لتشكّل المجسم.
- (٣) قارن منتجك بمنتج زملائك.

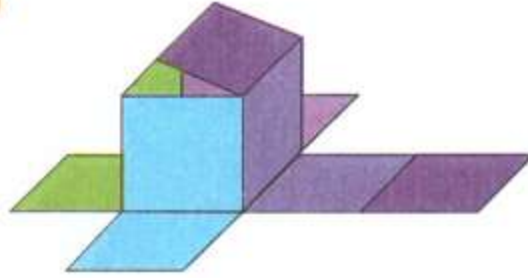
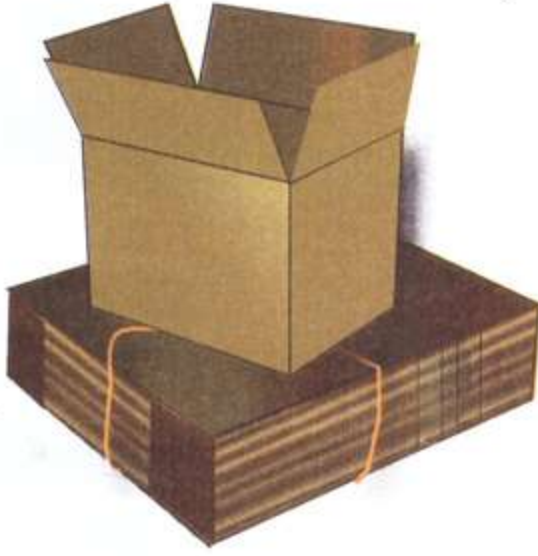
مثال (٢)

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

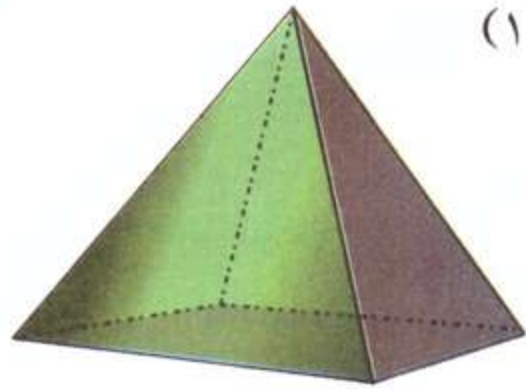
المجسم	اسم المجسم	شكل القاعدة	عدد القواعد	شكل الأوجه الجانبية
				مستطيلات
	هرم ثلاثي			
			قاعدة واحدة	



عبّر بلغتك الخاصة عما تراه في الصور أدناه.

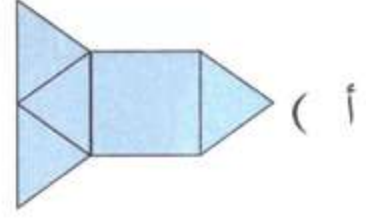


ارسم شبكة لكل مجسم من المجسمات الآتية:

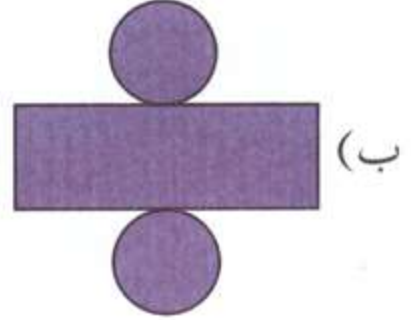


(١) اكتب اسم المجسم الذي تكوّنهُ كلُّ شبكةٍ مما يأتي:

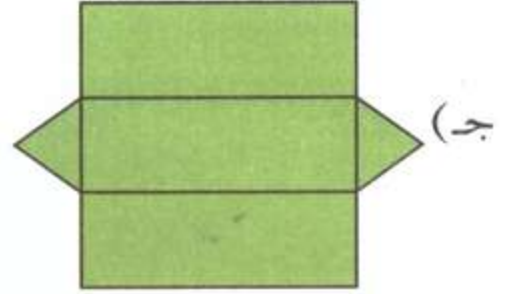
اسم المجسم هو:



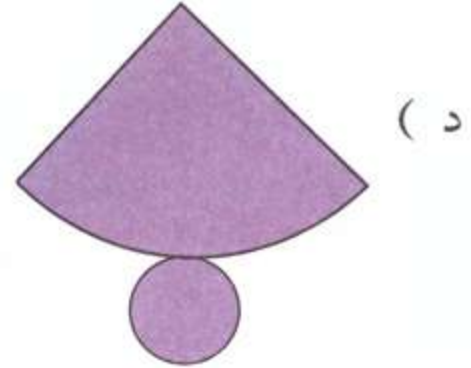
اسم المجسم هو:



اسم المجسم هو:



اسم المجسم هو:



(٢) ارسم شبكة لكل مجسم مما يأتي ، ثم قارن منتجك بمنتجات زملائك:

(ج) هرم رباعي

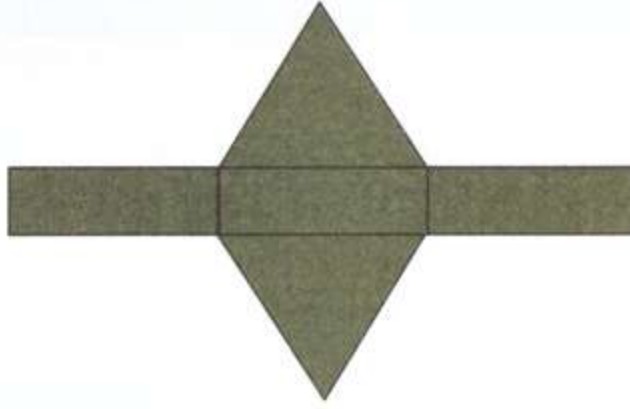
(ب) هرم ثلاثي

(أ) منشور ثلاثي

(هـ) مخروط

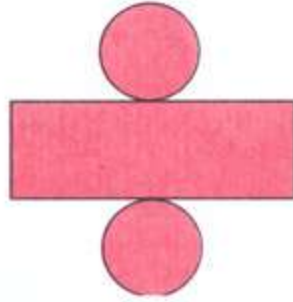
(د) أسطوانة

٣) كلف معلم الرياضيات الطالب سعيداً برسم شبكة هرم ثلاثي، فرسم الطالب الشبكة الآتية:



هل تتفق مع ما رسمه سعيد؟ مبرراً إجابتك.

٤) طلبت معلمة الرياضيات رسم شبكة لمجسم الأسطوانة، فرسمت راما الشبكة (أ)، ورسمت ريم الشبكة (ب):



(ب)



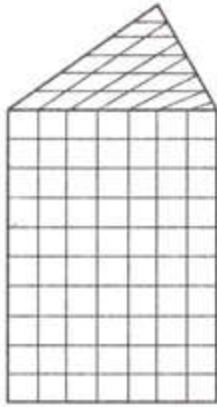
(أ)

هل تتفق مع ما رسمته كل من راما، وريم؟ مبرراً إجابتك.

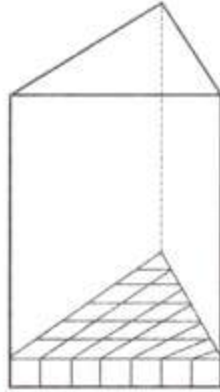
النتائج

- تستقصي صيغة لحجم المنشور الثلاثي القائم، ومساحة سطحه.
- تحل مسائل حياتية على المساحات والحجوم.

نشاط



شكل (٢)



شكل (١)

(١) ما عدد الوحدات المكعبة -تقريبًا- التي تغطي قاعدة المنشور في شكل (١)؟ ماذا يمثل عدد الوحدات بالنسبة إلى قاعدة المنشور؟

(٢) إذا ملئ المنشور بالوحدات المكعبة كما هو موضح في الشكل (٢)، ما عدد الطبقات التي تملأ المنشور؟ ماذا يمثل عدد الطبقات بالنسبة إلى المنشور؟

(٣) ما حجم المنشور؟

تعلمت سابقاً أن:

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع
ومتوازي المستطيلات ما هو إلا منشور رباعي، والفرق بين المنشور الرباعي والمنشور الثلاثي يكمن في شكل القاعدة فقط، وعليه فإن:
حجم المنشور الثلاثي = مساحة القاعدة × الارتفاع.

تذكر

$$\text{مساحة المنطقة المثلثة} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مثال (١)

جد حجم المنشور الثلاثي المجاور.

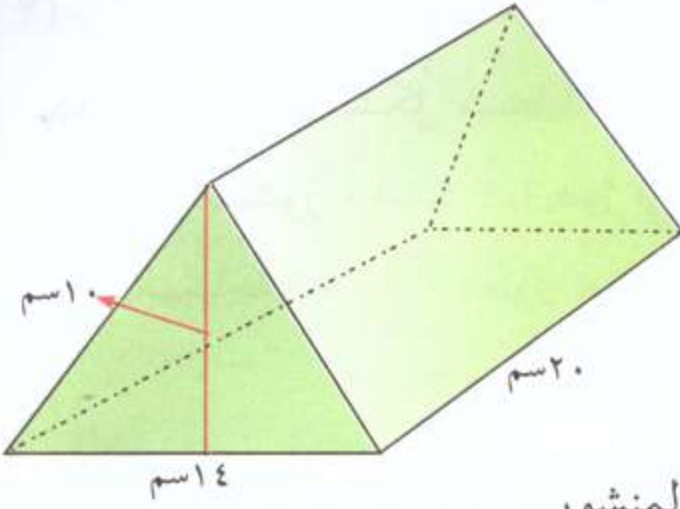
الحل

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times 14 \times 10 =$$

$$= 70 \times 10 = 700 \text{ سم}^2$$

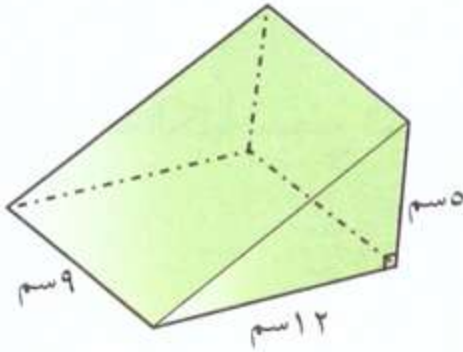
حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ ارتفاع المنشور

$$= 700 \times 20 = 14000 \text{ سم}^3$$



تدريب ١

جد حجم المنشور الثلاثي المجاور.



مثال (٢)

للمنشور الثلاثي المجاور:

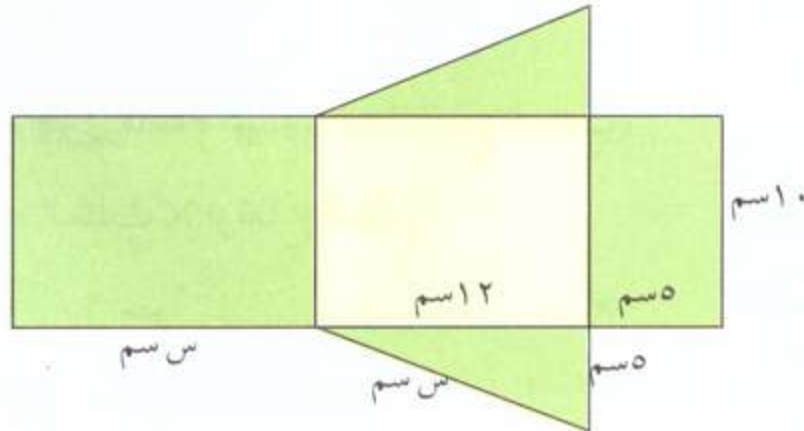
(١) ارسم شبكة للمنشور.

(٢) احسب المساحة الكلية لسطح المنشور،

ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

(١)



لماذا؟

$$(2) \text{ س}^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \text{ ، ومنه س} = 13.$$

الأوجه الجانبية تشكل مستطيلاً طوله يساوي $(5 + 12 + 13)$ ، وعرضه يساوي ارتفاع المنشور 10 سم، كما يظهر في الشبكة.

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \text{الطول} \times \text{العرض} \quad \text{المساحة الجانبية} = \text{مساحة المستطيل}$$

$$= \text{محيط قاعدة المنشور} \times \text{ارتفاع المنشور}$$

$$= 10 \times (13 + 12 + 5) =$$

$$= 10 \times 30 = 300 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث} \quad \text{القاعدة مثلثة الشكل}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية لسطح المنشور} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$= 300 + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 300 + 2 \times 30 =$$

$$= 360 + 60 = 360 \text{ سم}^2$$

التحقق من صحة الحل:

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{مساحة الوجه الأول} + \text{مساحة الوجه الثاني} + \text{مساحة الوجه الثالث}$$

$$= (10 \times 13) + (10 \times 12) + (10 \times 5) =$$

$$= 130 + 120 + 50 = 300 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

$$\text{مساحة القاعدتين} = 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث} \right)$$

$$= \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث}$$

$$= 12 \times 5 = 60 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية لسطح المنشور} = 360 + 60 = 360 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

نستنتج مما سبق أن:

المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة $\times$ ارتفاع المنشور
المساحة الكلية لسطح المنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

تدريب ٢

منشور ثلاثي مساحة سطحه الكلية ٤٨ سم^٢، ومساحته الجانبية ٣٦ سم^٢. جد مساحة قاعدته.

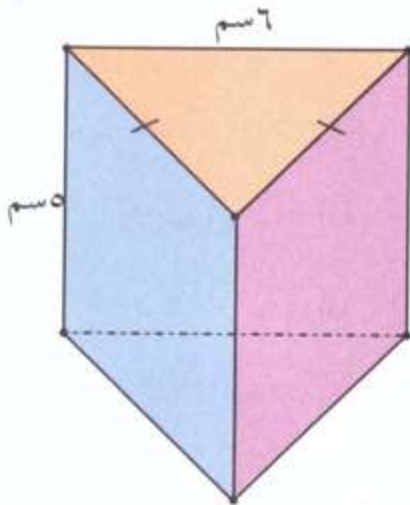
(١) منشور ثلاثي أطوال قاعدته على التوالي هي: ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم، وارتفاعه ١١ سم. جد كلاً مما يأتي:

(أ) حجمه.

(ب) مساحة سطحه الكلية.

(٢) منشور ثلاثي حجمه ٢٨ م^٣، ومساحة قاعدته ٧ م^٢. جد ارتفاعه.

(٣) منشور ثلاثي مساحته الجانبية $\frac{1}{3}$ ٣١ سم^٢، وارتفاعه $\frac{1}{3}$ ٤ سم. جد محيط قاعدته.

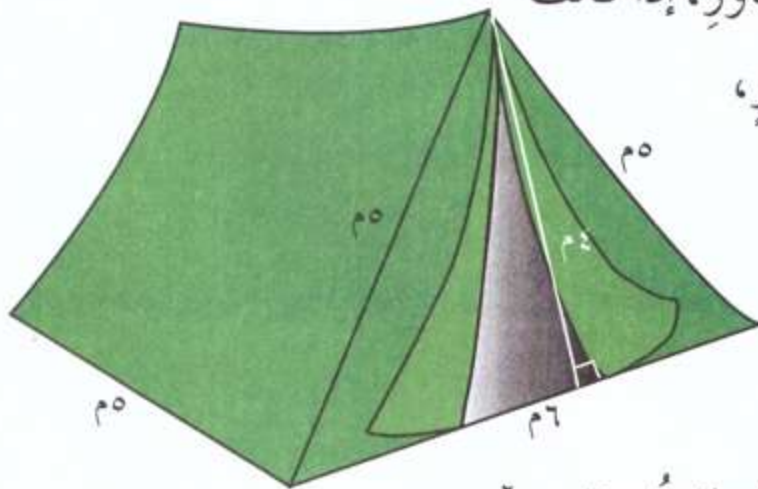


(٤) يمثل الشكل المجاور منشورًا ثلاثيًا مساحته

الجانبية ٨٠ سم^٢، وارتفاعه ٥ سم، وقاعدته على

شكل مثلث متطابق الضلعين، طول قاعدته ٦ سم.

جد مساحة سطحه الكلية.



(٥) ينتج مصنع خيمًا كما في الشكل المجاور، إذا كانت

تكلفة المتر المربع الواحد ١,٥ دينار،

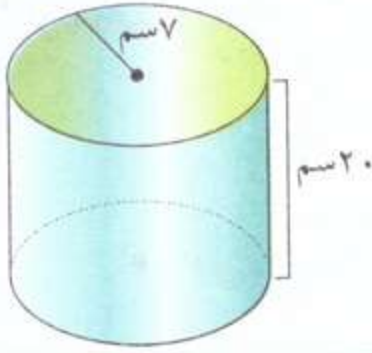
جد تكلفة ٩ خيم من النوع نفسه.

(٦) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الجانبية ٦٠ سم^٢.

(٧) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الكلية ٦٠ سم^٢.

النتائج

• تتعرف صيغة لحجم الأسطوانة، ومساحة سطحها.



جد حجم عبوة دهان أسطوانية الشكل، مستخدماً الأبعاد الموضحة في الشكل المجاور.

تعلمت في الدرس السابق أن: حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع، ولإيجاد حجم عبوة الدهان المطروحة في مقدمة الدرس، نستخدم القانون:

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

القاعدة على شكل دائرة

حجم الأسطوانة = $\pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$

$$20 \times (7)^2 \times \frac{22}{7} \approx$$

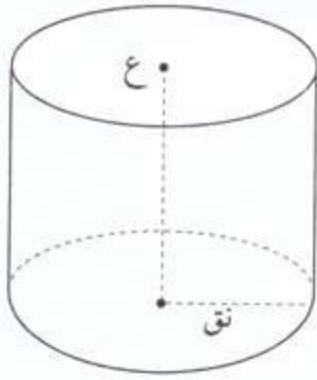
$$20 \times 7 \times 22 \approx$$

∴ حجم عبوة الدهان ≈ 3080 سم³.

١ تدريب

عبوة حليب للأطفال على شكل أسطوانة، حجمها ١٨٠٠ سم³، وارتفاعها ٢٠ سم. جد مساحة قاعدتها.

مثال (١)

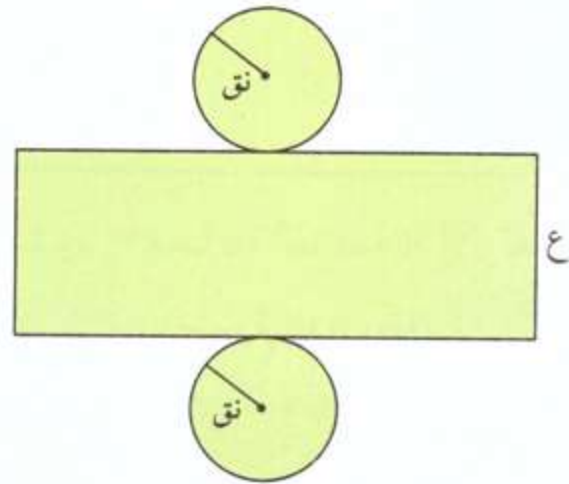


معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل أسطوانة، أجب عما يأتي:
(١) ارسم شبكة تقريبية لها.

(٢) جد مساحة سطحها الكلية إذا كان نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ١٦ سم، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

(١)



(٢) مساحة السطح الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

لماذا؟ $= (\text{الطول} \times \text{العرض}) + ٢ \times \text{مساحة القاعدة}$

لماذا؟ $= (\text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}) + ٢ \times \pi \times \text{نق}^2$

$$= ٢ \pi \times \text{نق}^2 + \text{ع} \times \pi \times ٢ \times \text{نق}$$

$$\approx (٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢ + (١٦ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢))$$

$$\approx ١٠١٢ \text{ سم}^2$$

التحقق من صحة الحل:

لماذا؟

$$\text{مساحة السطح الكلية} = ٢ \pi \times (\text{نق} + \text{ع})$$

$$\approx (٧ + ١٦) ٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢$$

$$23 \times 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \approx$$

$$\approx 23 \times 44 = 1012 \text{ سم}^2.$$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \pi r^2 h$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= 2\pi r h$$

المساحة الكلية لسطحها = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة

$$= 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (h + r)$$

تدريب ٢

أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها ٢٨ سم، وارتفاعها ٣ سم:

(١) ارسم شبكة تقريبية لهذه الأسطوانة.

(٢) جد مساحة سطحها الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

مثال (٢)

أسطوانة دائرية قائمة مساحة سطحها الكلية ٤٨ سم^٢، ومساحتها الجانبية ٣٦ سم^٢، جد مساحة قاعدتها.

الحل

لماذا؟

$$\text{مساحة القاعدة} = (\text{مساحة السطح الكلية} - \text{المساحة الجانبية}) \div 2$$

$$2 \div (36 - 48) =$$

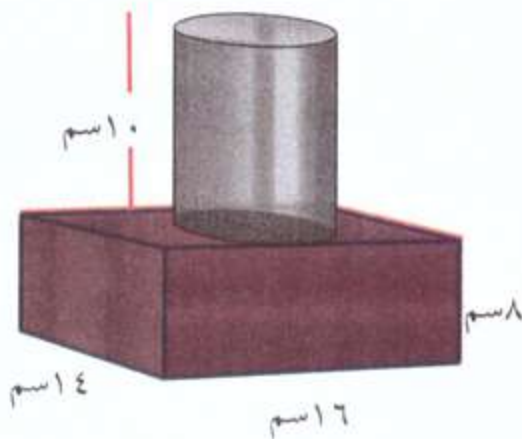
$$12 \div 2 = 6 \text{ سم}^2.$$

تدريب ٣

أسطوانة دائرية مساحة سطحها الكلية ٧٢ سم^٢، ومساحة قاعدتها ١٦ سم^٢. جد مساحتها الجانبية.

مثال (٣)

جد حجم المجسم المركب في الشكل المجاور علماً أن طول قطر الأسطوانة يساوي عرض متوازي المستطيلات.



الحل

حجم متوازي المستطيلات (وهو منشور رباعي)

$$8 \times 14 \times 16 =$$

$$1792 \text{ سم}^3 =$$

قطر الأسطوانة = ١٤ سم.

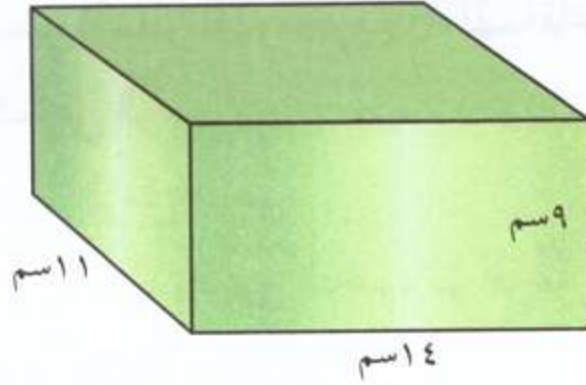
$$\text{حجم الأسطوانة} = \pi \text{ نق}^2 \times \frac{22}{7} \approx 10 \times (7) \times \frac{22}{7} =$$

$$\approx 1540 \text{ سم}^3.$$

حجم المجسم المركب = حجم متوازي المستطيلات + حجم الأسطوانة

$$\approx 1792 + 1540 \approx 3332 \text{ سم}^3.$$

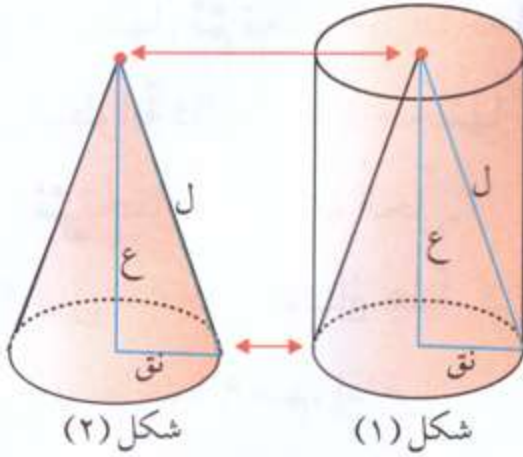
- (١) أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢٠ سم، وارتفاعها ٤ سم. جد حجمها، ومساحة سطحها الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.
- (٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٢٨, ٦ سم^٣، ارتفاعها ٢٠ سم، جد طول نصف قطر قاعدتها. ثم تحقق من صحة الحل، معتبراً $(\pi = 3, 14)$.
- (٣) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٥٢ سم^٣، وطول قطر قاعدتها ٨ سم، جد ارتفاعها. ثم تحقق من صحة الحل.
- (٤) يبين الشكل أدناه علبة كرتونية، طول قاعدتها ١٤ سم، وعرضها ١١ سم، وارتفاعها ٩ سم. إذا قررت الشركة المصنعة استعمال تصميم جديد للعلبة بالحجم نفسه والارتفاع نفسه، ولكن بشكل أسطواني، فجد طول قطر قاعدة الأسطوانة الذي يمكن استعماله.



- (٥) ادعى عمر أن حجم أسطوانة نصف قطرها ٥ سم، وارتفاعها ١٢ سم يساوي حجم أسطوانة أخرى نصف قطرها ١٠ سم، وارتفاعها ٦ سم. ناقش ادعاء عمر، مبرراً إجابتك.

النتائج

• تستقضي صيغة لحجم المخروط القائم، ومساحة سطحه.



ماذا يمثل شكل (١)؟

ماذا يمثل شكل (٢)؟

ما العلاقة بينهما؟

هل يمكنك صنع مجسمين لهما المواصفات

نفسها؟

نشاط (١)

(١) أحضر مجسمين (أسطوانة، ومخروطًا)، لهما قاعدتان متساويتان، وارتفاعان

متساويان كما في الرسم أعلاه، بحيث يكونان مفرغين من الداخل.

(٢) أحضر كمية من الرمل الناعم.

(٣) املا المخروط تمامًا بالرمل الناعم، ثم أفرغه في الأسطوانة. كرر العملية حتى تمتلئ الأسطوانة تمامًا.

(٤) كم عدد المرات التي لزمّت لملء الأسطوانة تمامًا؟

(٥) ماذا تستنتج؟

تعلمت سابقًا أن: حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h$

ولاحظ أنك احتجت إلى ملء المخروط القائم ٣ مرات تمامًا، لكي تملأ الأسطوانة

تمامًا، وهذا يعني أن:

حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

نستنتج أن: حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

حيث: نق: نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

ع: ارتفاع المخروط القائم.

π : النسبة التقريبية وتُقَرَّبُ بـ $\frac{22}{7}$ أو ٣,١٤.

مثال (١)

جد حجم المخروط القائم الموضح جانبًا.

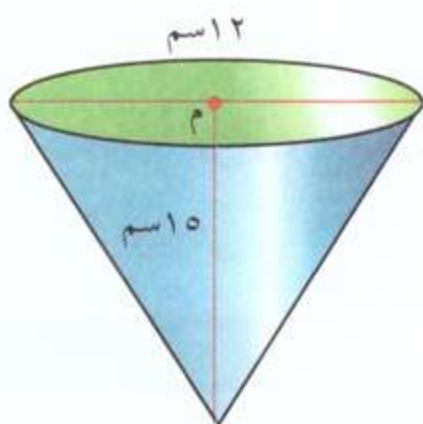
الحل

حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 10$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 10$$

$$= 12 \times 10 \times \pi \times 180 = 180 \pi \text{ سم}^3$$



تدريب ١

مخروط دائري قائم مساحته قاعدته ٣١٤ سم^٢، وارتفاعه ٩ سم. جد:

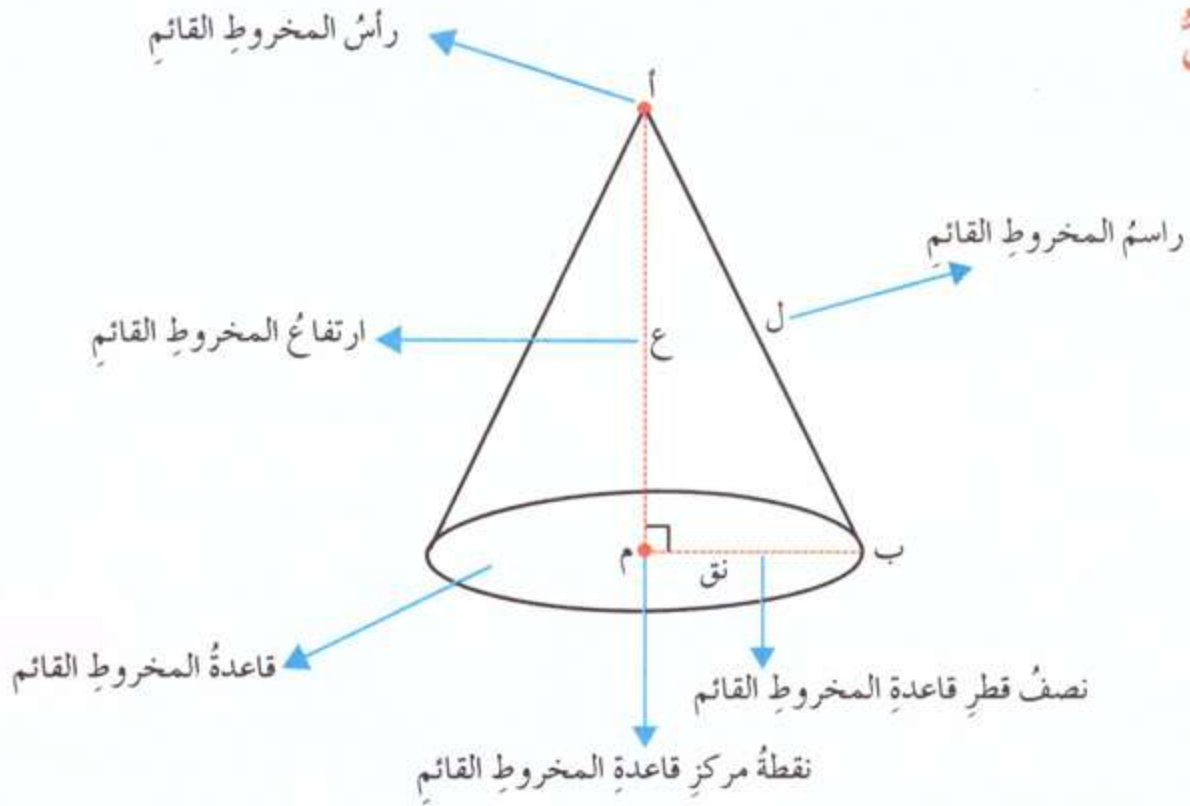
(١) حجم المخروط القائم.

(٢) نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

مثال (٢)

ارسم مجسم مخروط قائم، وعيّن عليه نصف قطر القاعدة نق، وارتفاعه ع، وراسمه ل،

ثم حدّد من الرسم العلاقة بين ل، ع، نق؟



العلاقة بين $ل$ ، $ع$ ، $نق$ ، هي $ل^2 = ع^2 + نق^2$ (مبرهنة فيثاغورس)؛ لأن المثلث $أ م ب$ قائم الزاوية في $م$.

تدريب ٢

مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، وطول قطري قاعدته ١٠ سم. جد حجم المخروط القائم وطول راسمه.

نشاط (٢)

- (١) أحضر مجسم مخروط قائم مصنوع من الكرتون.
- (٢) قص المخروط القائم على طول أحد الرواسم. ماذا نسمي الشكل الناتج؟
- (٣) ما العلاقة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم، ومساحة القطاع الدائري الناتج من قص المخروط القائم على طول أحد الرواسم (شبكة المخروط القائم).

المساحة الجانبية للمخروط القائم تُستنتج من مساحة القطاع الدائري.

المساحة الجانبية للمخروط القائم πl نق، حيث:

ل: طول راسم المخروط القائم.

نق: نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

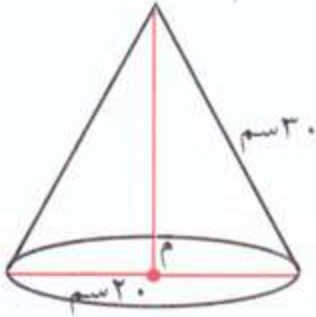
المساحة الكلية لسطح المخروط القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

$$\pi l \text{ نق} + \pi \text{ نق}^2 =$$

$$\pi \text{ نق} (l + \text{نق}) =$$

مثال (٣)

مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٢٠ سم، وطول راسمه ٣٠ سم، جد مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.



الحل

المساحة الكلية لسطح المخروط القائم $\pi \text{ نق} (l + \text{نق})$

$$= \pi (10 + 30) 10 =$$

$$= \pi 400 = 40 \times 10 \times \pi \text{ سم}^2.$$

التحقق من صحة الحل:

المساحة الجانبية للمخروط القائم $\pi l \text{ نق} = \pi 30 \times 10 \approx 300 \pi \text{ سم}^2.$

مساحة القاعدة $\pi \text{ نق}^2 = \pi 10 \times 10 \approx 100 \pi \text{ سم}^2.$

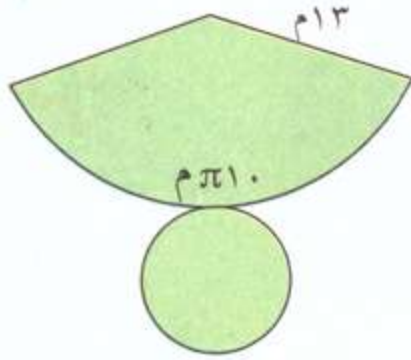
المساحة الكلية لسطح المخروط القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

$$= \pi 300 + \pi 100 = 400 \pi \text{ سم}^2. \quad \checkmark$$

تدريب ٢

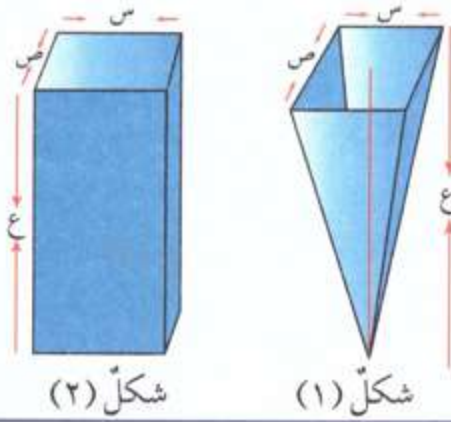
مخروط دائري قائم طول نصف قطره قاعدته ٥ سم، وارتفاعه ١٢ سم، جد مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

- (١) جد حجم مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٢٠ م، وارتفاعه ٢٥ م.
- (٢) مخروط دائري قائم، حجمه 360π سم^٣، وارتفاعه ٩ سم. جد طول نصف قطره قاعدته.
- (٣) مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم، جد كلاً مما يأتي:
- أ (حجم المخروط.
- ب) مساحته الجانبية.
- ج) مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.
- (٤) الشكل المجاور يمثل شبكة مخروط دائري قائم طول راسمه ١٣ مترًا، ومحيط قاعدته 10π متر، جد كلاً مما يأتي:
- أ (حجم المخروط.
- ب) مساحته الجانبية.
- ج) مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.
- (٥) أسطوانة، ومخروط لهما الحجم نفسه والارتفاع نفسه، إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ٤ سم، وارتفاعها ١٨ سم. فجد طول نصف قطر قاعدة المخروط؟
- (٦) قبة على شكل مخروط، حجمها 180π سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول الراسم، ثم تحقق من صحة الحل.
- (٧) هل يبقى حجم المخروط ثابتًا، إذا أضفنا واحدًا إلى نصف القطر، وطرحنا واحدًا من الارتفاع؟ مبررًا إجابتك.
- (٨) أثبت أن: المساحة الجانبية للمخروط $= \pi l$ نق، حيث l طول راسم المخروط، نق نصف قطر قاعدته.



النتائج

• تستقضي صيغة لحجم الهرم الثلاثي القائم، والرباعي القائم، ومساحة سطح كل منهما.



ماذا يمثل شكل (١)؟

ماذا يمثل شكل (٢)؟

ما العلاقة بينهما؟ هل يمكنك صنع مجسمين لهما المواصفات نفسها؟

نشاط (١)

- (١) أحضر مجسمين (هرمًا رباعيًا، منشورًا رباعيًا)، مشتركين في أبعاد القاعدة والارتفاع، كما في الرسم أعلاه، بحيث يكونان مفرغين من الداخل.
- (٢) أحضر كمية من الرمل الناعم.
- (٣) املا الهرم تمامًا بالرمل الناعم، ثم أفرغه في المنشور. كرر العملية حتى يمتلئ المنشور تمامًا.
- (٤) كم عدد المرات التي لزمّت لملء المنشور تمامًا؟
- (٥) ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك لاحظت حاجتك إلى ملء الهرم ٣ مرات تمامًا، لكي تملأ المنشور تمامًا، وهذا يعني أن: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

$$\text{حجم الهرم القائم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مثال (١)

جد حجم الهرم القائم الموضح جانباً.

الحل

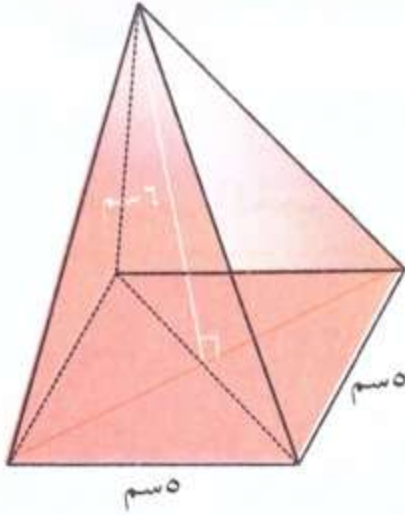
حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 6$$

$$= \frac{1}{3} \times 25 \times 6$$

$$= 25 \times 2$$

$$= 50 \text{ سم}^3$$



تدريب ١

هرم قائم ثلاثي ارتفاعه ١٥ م، وقاعدته على شكل مثلث طول قاعدته ١٠ سم. جد حجمه.

نشاط (٢)



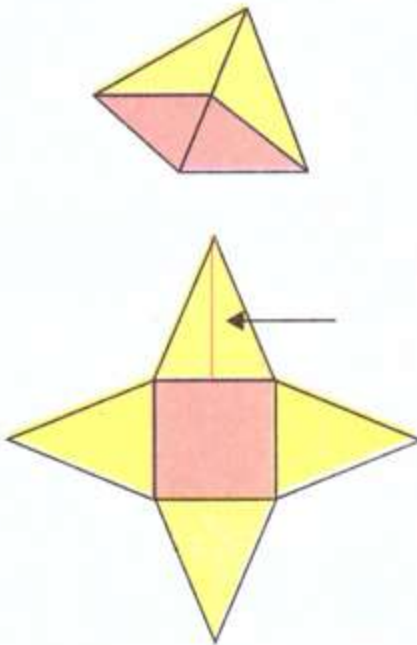
(١) أحضر مجسم هرم قائم مصنوع من الكرتون.

(٢) قص الهرم لتحصل على شبكته.

(٣) ما العلاقة بين ارتفاع كل وجه جانبي والارتفاع الجانبي للهرم القائم؟

(٤) ما العلاقة بين المساحة الجانبية للهرم، ومجموع مساحات الأوجه الأربعة التي تشكل مثلثات متطابقة الضلعين، ولها الارتفاع نفسه؟

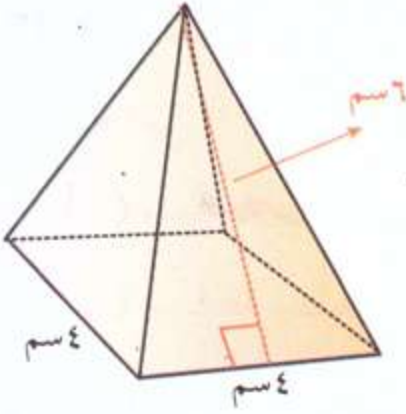
ماذا تلاحظ؟



المساحة الجانبية لسطح الهرم القائم = مجموع مساحات الأوجه.

$$= \frac{1}{4} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم القائم}$$

المساحة الكلية لسطح الهرم القائم = المساحة الجانبية للهرم + مساحة القاعدة



مثال (٢)

جد المساحة الجانبية والكلية لسطح الهرم القائم الموضح جانباً.

الحل

المساحة الجانبية لسطح الهرم القائم

$$= \frac{1}{4} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم القائم}$$

$$= \frac{1}{4} \times (4 + 4 + 4 + 4) \times 6$$

$$= 48 \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية لسطح الهرم القائم = المساحة الجانبية للهرم القائم + مساحة القاعدة

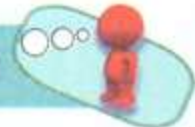
$$= 48 + 4 \times 4$$

$$= 64 \text{ سم}^2$$

تدريب ٢

هرم ثلاثي قائم طول ضلع قاعدته 6 سم، وارتفاعه الجانبي 8 سم. جد مساحة سطحه الجانبية، ثم تحقق من صحة الحل.

تحدث

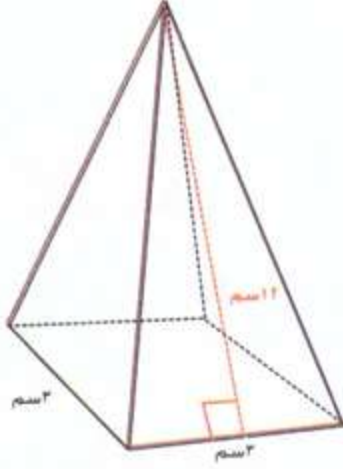


ما أوجه الشبه والاختلاف بين الهرم الثلاثي القائم والهرم الرباعي القائم؟

(١) جد حجم هرم قائم ارتفاعه ١٧ مترًا، وقاعدته مربع الشكل طول ضلعها ٢٢ مترًا.

(٢) جد ارتفاع شمعة على شكل هرم قائم، حجمها ٨٤٧ سم^٣، ومساحة قاعدتها

١٢١ سم^٢.



(٣) هرم قائم ثلاثي طول ضلع قاعدته ٣ سم، وارتفاعه

الجانب ١٢ سم، كما هو موضح جانبًا، جد:

أ) مساحة سطحه الجانبية.

ب) مساحة سطحه الكلية.



(٤) الهرم الأكبر "خوفو" من أهرامات الجيزة في

مصر، يبلغ ارتفاعه ١٤٦,٥ مترًا، وقاعدته

مربعة الشكل طول ضلعها ٢٣٠ مترًا. جد

حجمه.



(٥) الشكل الموضح جانبًا يمثل هرمًا رباعيًا

قاعدته مستطيلة الشكل طولها ١٥ م، وعرضها

١٠ م، ومساحتها الجانبية ٢٢٥ م^٢. جد ارتفاعه

الجانب.

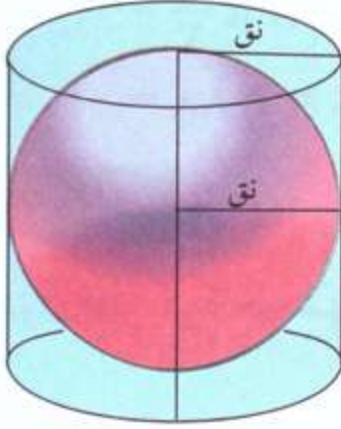
(٦) ارسم شبكة لهرم ثلاثي بحيث تكون مساحته

الجانبية (٦٠) سم^٢.

(٧) ارسم شبكة لهرم رباعي بحيث تكون مساحته الكلية (٦٠) سم^٢.

النتائج

• تستقضي صيغة لحجم الكرة ، ومساحة سطحها.



- (١) ماذا يمثل الشكل المجاور؟
- (٢) ما العلاقة بين نصف قطر الكرة ونصف قطر الأسطوانة؟
- (٣) ما العلاقة بين نصف قطر الكرة وارتفاع الأسطوانة؟
- (٤) ما حجم الكرة؟

أثبت أرخميدس أن حجم الكرة يساوي $\frac{2}{3}$ حجم الأسطوانة المحيطة بها كما في الشكل أعلاه، وعليه فإن:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{2}{3} \times \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

وبما أن:

- (١) نصف قطر الأسطوانة = نصف قطر الكرة
 - (٢) ارتفاع الأسطوانة = $2 \times \text{نصف قطر الكرة}$
- إذن: حجم الكرة = $\frac{2}{3} \times \pi \times \text{نق}^2 \times 2 \times \text{نق}$
- $$= \frac{4}{3} \times \pi \times \text{نق}^3$$

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \times \pi \times \text{نق}^3$ حيث نق نصف قطر الكرة

مثال (١)

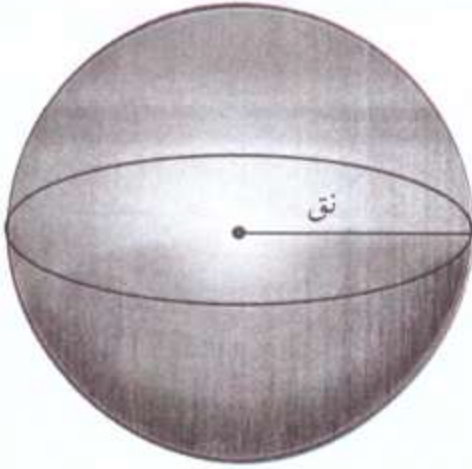
كرة طول نصف قطرها ٦ سم . جد حجمها .

الحل

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3$$

$$= 288 \pi \text{ سم}^3$$



تدريب ١

جد طول قطر كرة حجمها $\frac{500}{3} \pi$ سم^٣.

نشاط

(١) أحضر برتقالة على شكل كرة قدر الإمكان، وقسمها إلى نصفين.



(١) ب



(١) أ



(٢)

(٢) ارسم أربع دوائر مستخدماً البرتقالة نفسها.



(٣)

(٣) قشّر البرتقالة تمامًا إلى قطع صغيرة واستخدم قشّر البرتقالة لتغطية الدوائر الأربع.



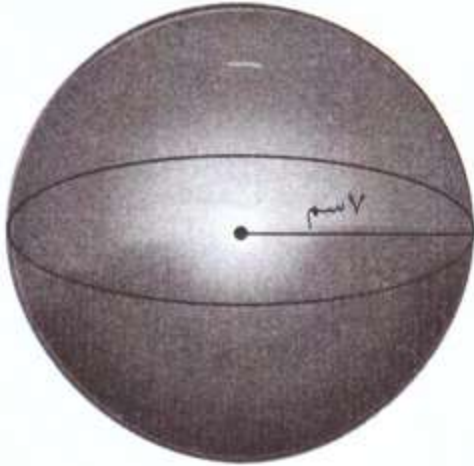
(٤)

٥) من الشكل (٤) ماذا تستنتج؟

تعلمت سابقاً أنّ مساحة الدائرة $= \pi \text{ نق}^2$ ، وأنّ قشر البرتقالة غطّى الدوائر الأربع تماماً، وهذا يعني أنّ: مساحة سطح الكرة $= 4 \times \text{مساحة الدائرة}$
 $= 4 \pi \text{ نق}^2$.

مساحة سطح الكرة $= 4 \pi \text{ نق}^2$ ، حيث نق نصف قطر الكرة.

مثال (٢)



جدّ مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ٧ سم.

الحلّ

مساحة سطح الكرة $= 4 \pi \text{ نق}^2$

$$\approx 4 \times \frac{22}{7} \times 7^2$$

$$\approx 616 \text{ سم}^2$$

تدريب ٢

جدّ مساحة سطح كرة، طول نصف قطرها ٢٠ سم.

مثال (٣)

جد طول نصف قطر كرة مساحة سطحها 784π سم^٢.

الحل

مساحة سطح الكرة = 4π نق^٢

$$784\pi = 4\pi \times \text{نق}^2$$

$$784 = 4 \times \text{نق}^2$$

$$\text{نق}^2 = 196$$

$$\text{نق} = \sqrt{196} \pm$$

$$\text{نق} = \sqrt{196}$$

$$\therefore \text{نق} = 14 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{نصف قطر الكرة} = 14 \text{ سم.}$$

التعويض في القانون

قسمة طرفي المعادلة على π

حل المعادلة

إهمال القيمة السالبة. لماذا؟

تدريب ٣

خزان كروي الشكل مساحة سطحه 1256π م^٢ جد :

(١) طول نصف قطر الخزان.

(٢) حجم الخزان.

(استخدم $\pi \approx 3.14$)



- (١) كرة طول نصف قطرها ٢١ سم . جد حجمها ، ومساحة سطحها .
- (٢) جد طول نصف قطر كرة حجمها 36π سم^٣ .
- (٣) جد مساحة سطح كرة حجمها $\frac{256}{3}$ سم^٣ .
- (٤) جد حجم الكرة التي مساحة سطحها 100π سم^٢ .
- (٥) مكعب من الرصاص حجمه 3880.8 سم^٣ ، صُهر لإعادة صنعه على صورة كرة ،
جد:

أ (طول نصف قطر الكرة الناتجة بعد إعادة التصنيع .

ب) مساحة سطح الكرة الناتجة بعد إعادة التصنيع .



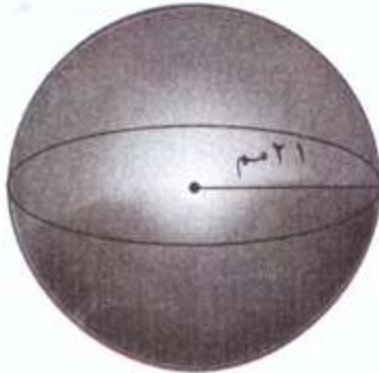
- (٦) الشكل المجاور يمثل بالونا كرويًا يُستخدم
لدراسة الطقس ، ويبلغ حجمه 36π سم^٣ ، جد
مساحة سطحه .

النتائج

- يستقصي تأثير التغير في أبعاد المجسم على حجمه ومساحة سطحه.



شكل (١)



شكل (٢)

كرة نصف قطرها ٧ مم تتمدد بفعل الحرارة بشكل منتظم محافظة على شكلها؛ بحيث أصبح نصف قطرها ٢١ مم، انظر الشكل المجاور، ثم أجب عما يأتي:

(١) ما معامل التغير؟

(٢) ما حجم الكرة قبل عملية التمدد؟

(٣) ما حجم الكرة بعد عملية التمدد؟

بما أن نصف قطر الكرة تغير من ٧ مم إلى ٢١ مم فإن معامل التغير هو ٣

∴ حجم الكرة قبل التمدد (التغير) $\approx \frac{4}{3} \times \pi \times 7^3$

$$\approx \frac{1372}{3} \pi \text{ مم}^3$$

حجم الكرة بعد عملية التمدد (التغير) $\approx \frac{4}{3} \times \pi \times 21^3$

$$\approx \frac{37044}{3} \pi \text{ مم}^3$$

لاحظ أن: حجم الكرة بعد التغير = $(3)^3 \times$ حجم الكرة قبل التغير.

كرة ثلجية نصف قطرها ٢٠ سم، أخذت بالذوبان بشكل منتظم محافظةً على شكلها وفي لحظة ما أصبح نصف قطرها ١٠ سم، جد كلاً مما يأتي:

(١) معامل التغير.

(٢) حجم الكرة بعد ذوبانها في اللحظة حيث نصف قطرها ١٠ سم.

مثال (١)

كرة من المعدن نصف قطرها ٣ سم، أخذت تتمدد بفعل الحرارة، وفي لحظة معينة أصبح نصف قطرها ٦ سم، جد ما يأتي:

(١) معامل التغير.

(٢) مساحة سطحها لحظة أصبح نصف قطرها ٦ سم.

الحل

معامل التغير هو ٢

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$

∴ مساحة سطح الكرة قبل التغير = $4\pi (3)^2$

= 36π سم^٢

مساحة سطح الكرة بعد التغير = $4\pi (6)^2$

= 144π سم^٢

لاحظ أن: مساحة سطح الكرة بعد التغير = $(2)^2 \times$ مساحة سطح الكرة قبل التغير.

بالون كروي الشكل مساحة سطحه 125π سم² أخذ يتسرب منه الهواء بشكل منتظم بحيث يبقى محافظاً على شكله الكروي، وفي لحظة ما أصبح نصف قطره $\frac{2}{3}$ نصف قطره السابق، جد مساحة سطحه عند تلك اللحظة.

تحدث

تحدث لزميلك عن أثر معامل التغير في كل من: حجم الكرة، ومساحة سطحها بعد التغير. مبرراً إجابتك من خلال تقديم أمثلة.

مثال (٢)

بركة سباحة أسطوانية الشكل نصف قطرها ٧ م وارتفاعها ٤ م، تم عمل توسعة لها بحيث أصبح نصف قطرها ١٤ م وارتفاعها ٨ م، أكمل الجدول الآتي:

بركة السباحة	نصف القطر	الارتفاع	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
قبل التوسعة	٧	٤	٤٤		١٧٦		٦١٦
بعد التوسعة	١٤	٨		٦١٦		١٩٣٦	

ماذا تلاحظ؟

الحل

بركة السباحة	نصف القطر	الارتفاع	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
قبل التوسعة	٧	٤	٤٤	١٥٤	١٧٦	٤٨٤	٦١٦
بعد التوسعة	١٤	٨	٨٨	٦١٦	٧٠٤	١٩٣٦	٤٩٢٨

نلاحظ أنَّ معامل التغيُّر هو ٢

$$(١) ٨٨ \times \frac{1}{٢} = ٤٤ \text{ أو } ٤٤ \times ٢ = ٨٨$$

$$(٢) ١٥٤ \times ٢(٢) = ٦١٦$$

$$(٣) ١٧٦ \times ٢(٢) = ٧٠٤$$

$$(٤) ٤٨٤ \times ٢(٢) = ١٩٣٦$$

$$(٥) ٦١٦ \times ٢(٢) = ٤٩٢٨$$

تدريب ٣

قالبٌ من الثلج أسطوانيّ الشكل، حجمه ٣٦ π سم^٣، أخذ بالذوبانٍ بشكلٍ منتظمٍ، وفي لحظةٍ ما كان معامل التغيُّر ٢، ٠، جذ حجم القالب في تلك اللحظة.

(١) مصنع للحلويات يعمل كعك العيد على شكل كرات، حجم كل منها 3π سم^٣ قرر صاحب المعمل تصغير الكعكة إلى الثلثين، وذلك من أجل إعادة تسعيرها. ما حجم الكعكة بعد عملية التصغير؟

(٢) أسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن حجمها 6π سم^٣، أخذت تتمدد بفعل الحرارة بشكل منتظم وفي لحظة ما ازدادت أبعادها بمقدار الضعفين. فجد حجم الأسطوانة في تلك اللحظة.

(٣) منشور ثلاثي مصنوع من الثلج حجمه 768 سم^٣، وأبعاده: 12 سم، 16 سم، 20 سم، ومساحته الجانبية 384 سم^٢. أخذ بالذوبان بشكل منتظم محافظاً على شكله، وفي لحظة ما أصبحت أبعاده 3 سم، 4 سم، 5 سم، جد كلاً مما يأتي:
أ) معامل التغير.

ب) حجم المنشور في تلك اللحظة.

ج) مساحته الجانبية في تلك اللحظة.

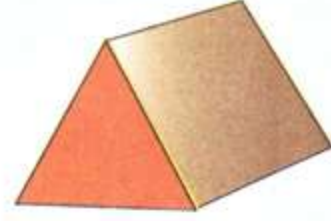
(١) ارسم شبكة تقريبية لكل مجسم من المجسمات الآتية:



(ج)



(ب)



(أ)

(٢) منشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية، أطوال أضلاعه: ٥ سم، ١٢ سم، ١٣ سم، وارتفاعه ١٠ سم، جد:

أ (حجمه)

ب (مساحة سطحه الكلية)

ج (حجمه ومساحة سطحه الكلية إذا ضربت أبعاده في ٤)

(٣) منشور قاعدته على شكل شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيتين ١٢ سم، ٨ سم وارتفاعها ٦ سم، وارتفاع المنشور ٩ سم. جد حجمه.

(٤) هرم قائم رباعي حجمه ٧٢ م^٣، وارتفاعه ٨ م جد مساحة قاعدته.

(٥) هرم قائم ارتفاعه ١٧ م، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢ م، جد:

أ (حجمه)

ب (إذا تضاعفت أبعاده، فما حجمه بعد التغير؟)

(٦) أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٤ سم، وارتفاعها ١٢ سم، جد:

أ (حجمها)

ب (مساحة سطحها الكلية)

ج (إذا تضاعفت أبعادها فجد حجمها)

(٧) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية $٧٠٤ \text{ سم}^٢$ ، وطول نصف قطرها ٧ سم جد ارتفاعها.

(٨) مخروط مساحة قاعدته $٣١٤ \text{ سم}^٢$ ، وارتفاعه ٢٤ سم ، جد:
أ (حجمه .

ب (مساحته الجانبية .

ج (مساحة سطحه الكلية .

٩ (مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ سم ، وطول راسمه ٥ سم ، جد:
أ (حجم المخروط .

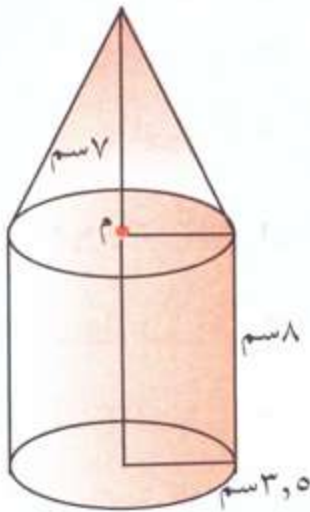
ب (مساحته الجانبية .

ج (إذا ضربت أبعاده في ٣ ، فجد حجمه ومساحته الجانبية .

١٠ (يمثل الجسم جانباً كرة طول قطرها ٦ م ، جد:
أ (حجمها .

ب (مساحة سطحها الكلية .

١١ (أسطوانة دائرية قائمة ، طول نصف قطرها ٦ سم ، وحجمها $٣٢٤ \pi \text{ سم}^٣$ ،
جد ارتفاعها .



١٢ (جد حجم الجسم المركب المرسوم جانباً .

اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من ٦ فقرات، من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها ٤ بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) منشور رباعي مساحته الجانبية ٨٤π سم^٢، وارتفاعه ٦ سم؛ لذا فإن طول محيط قاعدته يساوي:

أ (٨ سم ب (٤ سم ج (٨π سم د (٦π سم

(٢) أسطوانة طول نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ١٠ سم، ما مساحة سطحها الكلية بالسنتيمتر المربع؟

أ (٧٤٨ ب (٣٠٨ ج (١٥٤٠ د (٤٤٠

(٣) مخروط دائري قائم مساحته قاعدته ٦١٦ سم^٢؛ ما محيط قاعدته بالسنتيمتر؟

أ (١٤ ب (٤٤ ج (٨٨ د (١٩٦

(٤) هرم حجمه ١٧٥ سم^٣، وارتفاعه ٢٥ سم، ما مساحة قاعدته؟

أ (٧ سم^٢ ب (٢١ سم^٢ ج (٢٨ سم^٢ د (١٤ سم^٢

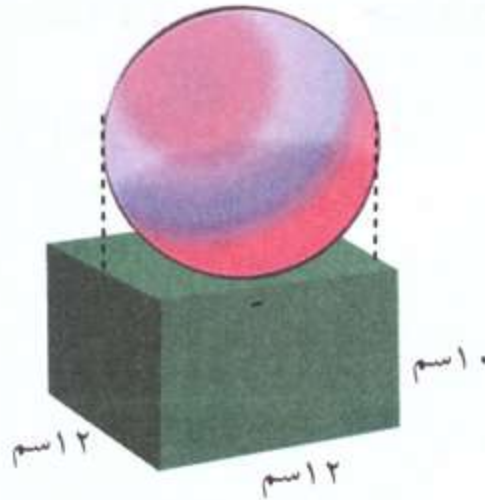
(٥) كرة طول نصف قطرها ٦ سم؛ ما حجمها بالسنتيمتر المكعب:

أ (١٤٤π ب (٣٦π ج (٢١٦π د (٢٨٨π

(٦) كرة مساحة سطحها ٣٦π سم^٢، تناقص نصف قطرها إلى النصف، ما مساحة سطحها؟

أ (٣٦π سم^٢ ب (٩π سم^٢ ج (٤π سم^٢ د (١٨π سم^٢

- (٢) منشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه: (٦) سم ، (٨) سم ، (١٠) سم ، وارتفاعه (١١) سم. جد مساحته الجانبية.
- (٣) أسطوانة دائرية قائمة مساحة قاعدتها ١٥٤ سم^٢، وارتفاعها ٢٠ سم. جد كلاً مما يأتي:
- أ (محيط قاعدتها.
- ب) مساحة سطحها الكلية.
- (٤) قبة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ π سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول نصف قطرها .
- (٥) في حصة التربية المهنية ، عمل أحد الطلبة كوباً أسطوانتي الشكل من الفخار بحيث كان حجمه ٤٨ π سم^٣، ونصف قطر قاعدته ٢ سم، ما ارتفاعه؟
- (٦) جد حجم المجسم المركب المرسوم أدناه.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



الفغد