الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام زايد
YEAR OF ZAYED

الرياضيات
2018 - 2019

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 10 مجلد 1

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Integrated Math Vol.1
FM, Integrated Math II © 2012
1. Quadratic Functions and Equations, from Integrated Math II Chapter 2 © 2012
2. Quadratic Functions and Relations, from Integrated Math II Chapter 3 © 2012
3. Exponential and Logarithmic Functions and Relation, from Integrated Math II Chapter 4 © 2012
4. Reasoning and Proof, from Integrated Math II Chapter 5 © 2012
5. Congruent Triangles, from Integrated Math I Chapter 12 © 2012

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-687157-2 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-687157-2 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-687158-9 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-687158-0 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-687162-6 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-687162-9 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-687163-3 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-687163-7 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

Chapter Sourced From: (FM, Integrated Math II © 2012)
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الدوال والمعادلات التربيعية

الوحدة 2 الدوال والمعادلات الأسيّة

الوحدة 3 الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

الوحدة 4 علاقات المثلثات

الوحدة 5 الأشكال الرباعية

الوحدة 6 الدوائر

الوحدة 7 التناسب والتشابه

الوحدة 8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

الوحدة 10 الاحتمال والقياس

كتيب الطالب

Chapter Sourced From: (FM, Integrated Math II © 2012) McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المؤلفون

يضمن المؤلفون الرئيسون أن برامج الرياضيات الصادرة من شركة McGraw-Hill Education مخططة بشكل رأسي حقيقي. ويتم ذلك بوضعهم الهدف النهائي، وهو نجاح كل طالب في هذه المادة، في كل خطوات التأليف منذ البدء. كما تجدر الإشارة ان تصميم هذا البرنامج يستخدم طريقة التخطيط العكسي مما يجعل كل برامجنا للرياضيات واضحة ومحددة من حيث نطاقها وتسلسلها

المؤلفون الرئيسون

دكتور جون إيه كارتر
المدير
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية اليدوية لتصوير المفاهيم، تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

جلبرت ج. كوفاس، حاصل على درجة الدكتوراه
أستاذ في تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

مجالات الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات التمثيل الرياضية

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه وشهادة المجلس الوطني
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

مجالات الخبرة: فهم الإحصاء والاحتمالات وتطبيقهما، تعليم معلمي الرياضيات

كارول مالوي، حاصلة على درجة الدكتوراه
أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

مجالات الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي، رعاية نجاح الطلاب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

روث كاسي
مستشار رياضيات
مساعدة معلم إقليمية
جامعة كنتاكي
ليكسينغتون، كنتاكي

مجالات الخبرة: تقنية التمثيل البياني والرياضيات

جيري كومينز
مستشار رياضيات
الرئيس السابق للمجلس الوطني لمشرفي الرياضيات
ويسترن سبرينغ، إلينوي

مجالات الخبرة: تقنية التمثيل البياني والرياضيات

د. بيرتشي هوليداي، حاصلة على درجة الدكتوراه
مستشار قومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة بيانات الحياة اليومية وفهمها، أثر التمثيلات البيانية على فهم الرياضيات

بياتريس مور لوتشين
مستشار رياضيات
هيوستن، تكساس

مجالات الخبرة: المعرفة بالرياضيات، التعاون مع متعلمي اللغة الإنجليزية

مؤلف مشارك

دينا زايك المحتويات
مستشار تعليمي
مؤسسة Dinah-Might Activities, Inc.
سان أنطونيو، تكساس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الوحدة 1 الدوال والمعادلات التربيعية

الاستعداد للوحدة 1 — 03

1-1 **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا** — 05

التوسع: مختبر الجبر معدل تغير الدالة التربيعية — 16

1-2 **حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني** — 17

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات التربيعية — 23

1-3 **حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع** — 24

التوسع: مختبر الجبر أوجد القيمة العظمى أو الصغرى — 30

■ **اختبار الوحدة الأول** — 32

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل بيانات من الحياة اليومية — 33

1-4 **حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل** — 34

1-5 **الأعداد المركبة** — 42

التوسع: مختبر الجبر المستوى المركب — 49

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات التربيعية — 51

■ **اختبار الوحدة الثاني** — 52

1-6 **القانون العام والمميّز** — 53

1-7 **تحويلات الدوال التربيعية** — 62

1-8 **المتباينات التربيعية** — 73

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المزيد من المتباينات التربيعية — 80

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل الحركة — 81

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** — 82

■ **تدريب على الاختبار** — 88

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** — 90

■ **تدريب على الاختبار المعياري ، الوحدة 1** — 92

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الوحدة 2 الدوال والمعادلات الأسيّة

الاستعداد للوحدة 2 95

2-1 الدوال الأسيّة 98

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 106

2-2 تحديد الدوال بإستخدام الفروق المتتالية 108

التوسع: مختبر الجبر ملاءمة المنحنيات 114

2-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل) 116

التوسع: مختبر الجبر تحويل التعابير الأسيّة 121

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة 122

التوسع: مختبر الجبر متوسط معدل التغير في الدوال الأسيّة 128

2-5 الصيغ التكرارية 129

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 135

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 137

التوسع: مختبر الجبر تحويل التعابير الأسيّة 144

تقويم

- **دليل الدراسة والمراجعة** 145
- **تدريب على الاختبار** 149
- **التحضير للاختبارات المعيارية** 150
- **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 2** 152

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 3 الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

الاستعداد للوحدة 3 155

3-1 **دوال الجذر التربيعي** 157

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي 163

3-2 **المعادلات الجذرية** 164

■ **اختبار منتصف الوحدة** 169

3-3 **التغير العكسي** 170

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعة الدوال النسبية 177

3-4 **الدوال النسبية** 178

3-5 **المعادلات النسبية** 184

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات النسبية 191

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 193

■ **تدريب على الاختبار** 196

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 198

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 الى 3** 200

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

4 علاقات المثلثات

الاستعداد للوحدة 4 203

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء المنصفات 205

4-1 **منصفات المثلثات** 206

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء المتوسطات والارتفاعات 216

4-2 **متوسطات المثلثات وارتفاعاتها** 217

4-3 **المتباينات في مثلث واحد** 226

■ **اختبار منتصف الوحدة** 234

الاستكشاف: مختبر الهندسة منطق المصفوفة 235

4-4 **البرهان غير المباشر** 237

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث 245

4-5 **متباينة المثلث** 246

4-6 **المتباينات في مثلثين** 253

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 263

■ **تدريب على الاختبار** 267

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 268

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–4** 270

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 5 الأشكال الرباعية

الاستعداد للوحدة 5 xxx

5-1 **زوايا المضلعات** xxx

التوسع: مختبر أوراق البيانات زوايا المضلعات xxx

5-2 **متوازي الأضلاع** xxx

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متوازي الأضلاع xxx

5-3 **اختبارات متوازي الأضلاع** xxx

■ **اختبار منتصف الوحدة** xxx

5-4 **المستطيل** xxx

5-5 **المعين والمربع** xxx

5-6 **شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية** xxx

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** xxx

■ **تدريب على الاختبار** xxx

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** xxx

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–5** xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 الدوائر

الاستعداد للوحدة 6 .....

6-1 الدوائر والمحيط xxx

6-2 قياس الزوايا والأقواس xxx

6-3 الأقواس والأوتار xxx

6-4 الزوايا المحيطية xxx

■ اختبار منتصف الوحدة xxx

6-5 المماسات xxx

التوسّع: مختبر الهندسة: الدوائر المحيطة والمحاطة xxx

6-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا xxx

6-7 القطع الخاصة في الدائرة xxx

6-8 معادلة الدائرة xxx

التوسّع: مختبر الهندسة القطوع المكافئة xxx

6-9 مساحة الدائرة والقطاع الدائري xxx

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة xxx

■ تدريب على الاختبار xxx

■ التحضير للاختبارات المعيارية xxx

■ تدريب على الاختبار المعياري تراكمي، الوحدات من 1 إلى 6 xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الوحدة 7 التناسب والتشابه

الاستعداد للوحدة 7 xxx

7-1 النسب والتناسب xxx

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متتالية فيبوناتشي والنسب xxx

7-2 المضلّعات المتشابهة xxx

7-3 المثلثات المتشابهة xxx

التوسع: مختبر الهندسة براهين المستقيمات المتعامدة والمتوازية xxx

7-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة xxx

اختبار منتصف الوحدة xxx

7-5 أجزاء المثلثات المتشابهة xxx

التوسع: مختبر الهندسة الأنماط الهندسية المتكررة xxx

7-6 تحويلات التشابه xxx

7-7 مقياس الرسم والنماذج المقياسية xxx

تقويم

دليل الدراسة والمراجعة xxx

تدريب على الاختبار xxx

التحضير للاختبارات المعيارية xxx

تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1-7 xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

8 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

الاستعداد للوحدة 8 xxx

8-1 **الوسط الهندسي** xxx

الاستكشاف: مختبر الهندسة الإثباتات بدون كلمات xxx

8-2 **نظرية فيثاغورس وعكسها** xxx

التوسع: مختبر الهندسة الإحداثيات في الفضاء xxx

8-3 **المثلثات القائمة الخاصة** xxx

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حساب المثلثات xxx

8-4 **حساب المثلثات** xxx

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني القاطع وقاطع التمام وظل التمام

اختبار منتصف الوحدة xxx

8-5 **زوايا الارتفاع والانخفاض** xxx

تقويم

دليل الدراسة والمراجعة xxx

تدريب على الاختبار xxx

التحضير للاختبارات المعيارية xxx

تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1-8 xxx

McGraw-Hill Education © محتوطة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محتوطة لصالح مؤسسة

الوحدة 9 التوسع في مساحة السطح والحجم

الاستعداد للوحدة 9 xxx

الاستكشاف: مختبر الهندسة المجسمات المشكّلة بالإزاحة xxx

9-1 **تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد** xxx

التوسع: مختبر الهندسة خرائط التضاريس xxx

9-2 **مساحة السطح للمنشور والاسطوانة** xxx

9-3 **مساحة السطح للهرم والمخروط** xxx

9-4 **حجم المنشور والاسطوانة** xxx

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تغيير الأبعاد xxx

■ **اختبار منتصف الوحدة** xxx

9-5 **حجم الأشكال الهرمية والمخروطية** xxx

9-6 **مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها** xxx

التوسع: مختبر الهندسة المحل الهندسي والأشكال الكروية xxx

9-7 **الهندسة الفراغية** xxx

التوسع: مختبر الهندسة الإحداثيات الملاحية xxx

9-8 **المجسمات المتطابقة والمتشابهة** xxx

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** xxx

■ **تدريب على الاختبار** xxx

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** xxx

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 إلى 9** xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10 الاحتمال والقياس

الاستعداد للوحدة 10 xxx

10-1 **تمثيل الفضاءات العينية** xxx

10-2 **استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات** xxx

10-3 **الاحتمالات الهندسية** xxx

■ **اختبار منتصف الوحدة** xxx

10-4 **المحاكاة** xxx

10-5 **احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة** xxx

التوسع: مختبر الهندسة جداول التكرار ذات المدخلين xxx

10-6 **احتمالات الأحداث المنفصلة** xxx

التوسع: مختبر الهندسة نظرية التمثيل البياني xxx

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** xxx

■ **تدريب على الاختبار** xxx

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** xxx

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 إلى 11** xxx

كتيب الطالب

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مرجع

مسرد المصطلحات G-1

الدوال والمتطابقات والصيغ والرموز المثلثية TF-1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة

الوحدة 1

الدوال والمعادلات التربيعية

السابق

- لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - حل معادلات تربيعية بالتمثيل البياني
  - تحليل الدوال باستخدام الفروق المتتالية والنسب.

لماذا؟ ▲

- **التمويل** يمكن تمثيل قيمة السهم في إحدى الشركات بالدالة $f(x) = x^2 - 12x + 75$. وبتمثيل هذه الدالة التربيعية بيانيًا، يمكننا التكهن بصورة مدروسة بأداء السهم في المستقبل القريب.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education للطبع والتأليف
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد أجب على التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

استخدم جدولًا بالقيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

1. $y = x + 3$
2. $y = 2x + 2$
3. $y = -2x - 3$
4. $y = 0.5x - 1$
5. $4x - 3y = 12$
6. $3y = 6 + 9x$
7. **المدّخرات** بحوزة أحمد AED 100 لشراء جهاز للألعاب. وهو يخطط لادّخار AED 10 كل أسبوع. مثّل بيانيًا معادلةً لبيان المبلغ الكلي T خلال w أسبوعًا.

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله.

8. $a^2 + 12a + 36$
9. $x^2 + 5x + 25$
10. $x^2 - 12x + 32$
11. $x^2 + 20x + 100$
12. $4x^2 + 28x + 49$
13. $k^2 - 16k + 64$
14. $a^2 - 22a + 121$
15. $5t^2 - 12t + 25$

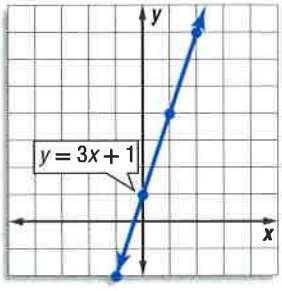
أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$ و $b = -1$ و $c = 0$ و $d = 2.5$.

16. $|a - 3|$
17. $|2a + 1|$
18. $|4 - b|$
19. $\left|\frac{1}{2}b - 2\right|$
20. $|12 - 4c|$
21. $|2c - 3| + 1$
22. $|4d - 6|$
23. $|3d - 2| - 8$

تمرين سريع

مثال 1

استخدم جدولاً بالقيم لتمثيل $y = 3x + 1$ بيانيًا.



x	$y = 3x + 1$	y
-1	$3(-1) + 1$	-2
0	$3(0) + 1$	1
1	$3(1) + 1$	4
2	$3(2) + 1$	7

مثال 2

حدد ما إذا كان $x^2 - 10x + 25$ ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله.

1. هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم
2. هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم
3. هل يساوي الحدّ الأوسط $-2(1x)(5)$؟ نعم

$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

مثال 3

أوجد قيمة $|2x + 1| - 7$ if x، إذا كان $x = -1$.

$|2x + 1| - 7 = |2(-1) + 1| - 7$ $x = -1$

$= |-2 + 1| - 7$ اضرب.

$= |-1| - 7$ اجمع.

$= 1 - 7$ $|-1| = 1$

$= -6$ اطرح.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

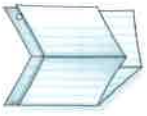
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك هذه الوحدة. لكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.
قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة السابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال والمعادلات التربيعية شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة عن الدوال التربيعية. وابدأ بورقة من الدفتر.

1 **اطوِ** الورقة بالاتجاه الطولي بحيث تحاذي حافة الورقة مع خط الهامش.

2 **اطوِ** الورقة طيّتين بالاتجاه العرضي بحيث تصبح لديك أربعة مقاطع.



3 **افرد** الورقة وقصّها على طول الطيات على اللسان الأمامي فقط.

4 **اكتب اسم** كل مقطع كما هو موضح.

المفردات الجديدة

quadratic function	دالة تربيعية
parabola	قطع مكافئ
axis of symmetry	محور التماثل
vertex	رأس
minimum	القيمة الصغرى
maximum	القيمة العظمى
double root	جذر مكرر
transformation	التحويل
completing the square	إكمال المربع
Quadratic Formula	صيغة تربيعية
discriminant	المميز
step function	دالة درجية
greatest integer function	دالة أكبر عدد صحيح
absolute value function	دالة القيمة المطلقة

مراجعة المفردات

المجال هو كافة القيم المحتملة للمتغير المستقل x

المعامل الرئيس هو معامل الحدّ الأول في كثيرة حدود مكتوبة بالصيغة القياسية.

المدى هو كافة القيم المحتملة للمتغير التابع y

في الدالة الممثلة في الجدول، المجال هو $\{0, 2, 4, 6\}$، والمدى هو $\{3, 5, 7, 9\}$.

x	y
0	3
2	5
4	7
6	9

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 1-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمتَ بتمثيل الدوال الخطية والأسية بيانيًا.	1 تحليل خواصّ التمثيلات البيانية للدوال التربيعية. 2 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.	• تعدّ نافورة أورلاندو بفلوريدا في الولايات المتحدة الأمريكية نموذج عرضٍ فريدٍ ومتناسقٍ بين الماء والأضواء والموسيقى. تطلق الرشاشات الماء بشكلٍ يمكن تمثيله نموذجيًا بمعادلاتٍ تربيعية. ويمكنك تمثيل هذه المعادلات بيانيًا لتوضيح مسار الماء.

المفردات الجديدة

- دالة تربيعية quadratic function
- صيغة قياسية standard form
- قطع مكافئ parabola
- محور التماثل axis of symmetry
- رأس vertex
- القيمة الصغرى minimum
- القيمة العظمى maximum

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

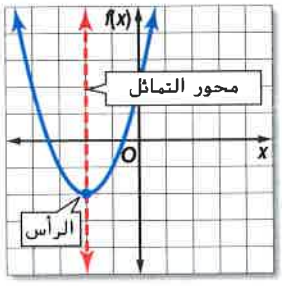
1 خواص الدوال التربيعية

الدوال التربيعية دوال غير خطية يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$. وتدعى هذه الصيغة **بالصيغة القياسية** لدالة تربيعية

يطلق على شكل منحنى الدالة التربيعية اسم **القطع المكافئ** والقطوع المكافئة متماثلة بالنسبة إلى مستقيمٍ مركزيٍ يدعى **محور التماثل**. يقطع محور التماثل القطع المكافئ في نقطةٍ واحدة، يُطلق عليها **الرأس**.

المفهوم الأساسي الدوال التربيعية

الدالة الأصلية:	$f(x) = x^2$
الصيغة القياسية	$f(x) = ax^2 + bx + c$
نوع التمثيل البياني:	قطع مكافئ
محور التماثل:	$x = -\frac{b}{2a}$
التقاطع مع المحور الرأسي y:	c

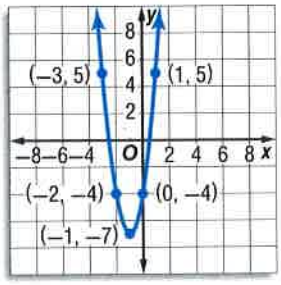


عندما يكون $a > 0$، فإن التمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$ مفتوح إلى الأعلى. والنقطة الأكثر انخفاضًا على التمثيل البياني هي **القيمة الصغرى**. وعندما يكون $a < 0$، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل. النقطة الأعلى هي **القيمة العظمى**. وتقابل القيمةُ العظمى أو الصغرى رأس القطع المكافئ.

مثال 1 تمثيل قطع مكافئ بيانيًا

استخدم جدول قيمٍ لتمثيل $y = 3x^2 + 6x - 4$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

x	y
1	5
0	−4
−1	−7
−2	−4
−3	5



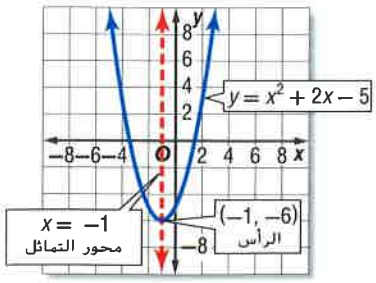
مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا، واربطها لتشكيل تمثيلٍ بياني منتظم. يمتدّ القطع المكافئ إلى ما لا نهاية. والمجال هو عبارة عن الأعداد الحقيقية كلها. والمدى هو $\{y \mid y \geq -7\}$، لأن -7 هي القيمة الصغرى.

تمرين موجّه

1. استخدم جدول قيمٍ لتمثيل $y = x^2 + 3$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تذكّر أن الأشكال التي تتمتع بالتماثل هي تلك الأشكال التي يتطابق نصفاها تمامًا.



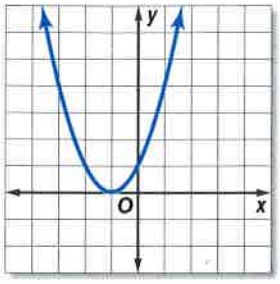
القطع المكافئ متماثل بالنسبة إلى محور التماثل. وكل نقطة تقع على القطع المكافئ على يسار محور التماثل لها نقطة مقابل على النصف الآخر. والدالة متزايدة على أحد جانبي محور التماثل ومتناقصة على الآخر.

عند تحديد الخواص من تمثيل بياني، فالأسهل غالبًا تحديد موقع الرأس أولاً. وهو يقابل النقطة العظمى أو الصغرى للتمثيل البياني.

مثال 2 تحديد الخواص من التمثيلات البيانية

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

a.

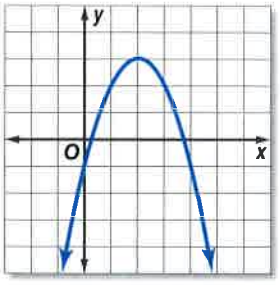


الخطوة 1 أوجد الرأس.
نظرًا لأن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى، فالرأس يقع عند النقطة الصغرى للقطع المكافئ. وهو يقع عند النقطة $(-1, 0)$.

الخطوة 2 أوجد محور التماثل. محور التماثل هو المستقيم المار بالرأس والذي يقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين. وهو يقع عند $x = -1$.

الخطوة 3 أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y. وتقع كذلك عند $(0, 1)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي 1.

b.



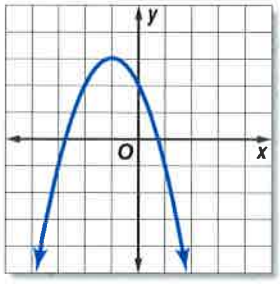
الخطوة 1 أوجد الرأس.
القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل، إذًا يقع الرأس عند النقطة العظمى $(2, 3)$.

الخطوة 2 أوجد محور التماثل. يقع محور التماثل على المستقيم $x = 2$.

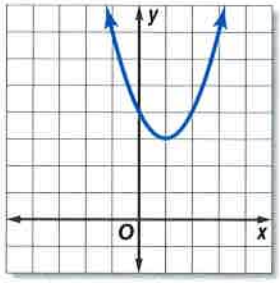
الخطوة 3 أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y. وتقع كذلك عند $(0, -1)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي -1.

تمرين موجّه

2A.



2B.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 تحديد الخواص من الدوال

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل دالة.

a. $y = 2x^2 + 4x - 3$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = -\frac{4}{2 \cdot 2}$ $b = 4$ و $a = 2$

$x = -1$ بسّط

معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

لإيجاد الرأس، استخدم القيمة التي توصلت إليها لمحور التماثل على أنها الإحداثي الأفقي x للرأس. وأوجد الإحداثي الرأسي y باستخدام المعادلة الأصلية.

$y = 2x^2 + 4x - 3$ المعادلة الأصلية

$= 2(-1)^2 + 4(-1) - 3$ $x = -1$

$= -5$ بسّط

نقطة رأس القطع هي $(-1, -5)$.

يحدث التقاطع مع المحور الرأسي y دائمًا عند $(0, c)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي -3.

b. $y = -x^2 + 6x + 4$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = -\frac{6}{2(-1)}$ $b = 6$ و $a = -1$

$x = 3$ بسّط

معادلة محور التماثل هي $x = 3$.

$y = -x^2 + 6x + 4$ المعادلة الأصلية

$= -(3)^2 + 6(3) + 4$ $x = 3$

$= 13$ بسّط

نقطة رأس القطع هي $(3, 13)$.

التقاطع مع المحور الرأسي y عند 4.

تمرين موجّه

3A. $y = -3x^2 + 6x - 5$ **3B.** $y = 2x^2 + 2x + 2$

نصيحة دراسية

خواص الدوال عند تحديد خواص دالة، فإن من الأسهل في أغلب الأحيان تحديد محور التماثل أولاً.

نصيحة دراسية

التقاطع مع المحور الرأسي y الإحداثي الرأسي y لنقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هو أيضًا الحدّ الثابت (c) للدالة التربيعية بالصيغة القياسية.

ستتعلم في ما يلي كيفية تحديد ما إن كان الرأس نقطةً عظمى أو صغرى.

المفهوم الأساسي القيم العظمى والصغرى

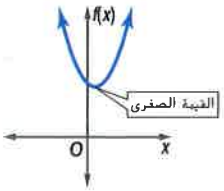
الشرح

التمثيل البياني لـ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$:

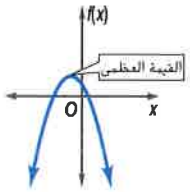
- مفتوح إلى الأعلى وله قيمة صغرى إذا كان $a > 0$.
- مفتوح إلى الأسفل وله قيمة عظمى إذا كان $a < 0$.
- مدى دالة تربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها، أو جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من القيمة العظمى أو المساوية لها.

أمثلة

a موجب.



a سالب.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 القيمتان العظمى والصغرى

ادرس الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى .

في الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$. نجد أن $a = -2$ و $b = -4$ و $c = 6$.

نظرًا أن a سالب، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل، إذًا للدالة قيمة عظمى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الرأسي y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(-2)} = -1$.

$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ الدالة الأصلية

$f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6$ $x = -1$

$f(-1) = 8$ بسّط

القيمة العظمى هي 8.

c. اذكر مجال الدالة ومداها.

المجال هو الأعداد الحقيقية كلها. أما المدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو المساوية لها، أو $\{y \mid y \leq 8\}$.

تمرين موجّه

ادرس الدالة $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

4A. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

4B. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

4C. اذكر مجال الدالة ومداها.

انتبه!
القيم العظمى والصغرى لا تنسَ إيجاد كلا إحداثيي الرأس (x, y). القيمة الصغرى أو العظمى هي الإحداثي الرأسي y.

مراجعة المفردات
المجال والمدى المجال هو مجموعة كافة القيم الممكنة لمتغير مستقل x. والمدى هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع y.

2 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

لقد تعلمت كيفية إيجاد العديد من الخواص الهامة للدوال التربيعية.

المفهوم الأساسي تمثيل الدوال التربيعية

الخطوة 1 أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة 2 أوجد الرأس وحدّد ما إذا كان قيمةً عظمى أو صغرى.

الخطوة 3 أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y.

الخطوة 4 استخدم التماثل لإيجاد نقاطٍ إضافيةٍ على التمثيل البياني، عند الضرورة.

الخطوة 5 صِل النقاط بمنحنى متصل.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

مثّل $f(x) = x^2 + 4x + 3$ بيانيًا.

الخطوة 1 أوجد معادلة محور التماثل.

$x = \frac{-b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = \frac{-4}{2 \cdot 1}$ or -2 $b = 4$ و $a = 1$

الخطوة 2 أوجد الرأس وحدّد ما إذا كان قيمةً عظمى أو صغرى.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$ المعادلة الأصلية

$= (-2)^2 + 4(-2) + 3$ $x = -2$

$= -1$ بسّط

يقع الرأس عند $(-2, -1)$. ونظرًا أن a موجب، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأعلى، والرأس قيمةٌ صغرى.

الخطوة 3 أوجد التقاطع مع المحور الرأسي y.

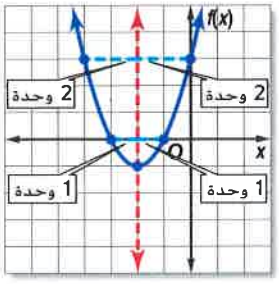
$f(x) = x^2 + 4x + 3$ المعادلة الأصلية

$= (0)^2 + 4(0) + 3$ $x = 0$

$= 3$

التقاطع مع المحور الرأسي y هي 3.

الخطوة 4 يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متساويين. ولذلك إذا كانت هناك نقطة على طرف، فإن هناك نقطة مقابلة على الطرف الآخر وتبعد المسافة نفسها عن محور التماثل ولها القيمة y نفسها.



الخطوة 5 صِل النقاط بمنحنى منتظم.

تمرين موجّه **مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا.**

5A. $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

5B. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

نصيحة دراسية

التماثل والنقاط عند تحديد مواضع نقطتين تقعان على جهتين متعاكستين من محور التماثل، فإن النقطتين ليستا متسابتي البعد عن محور التماثل فحسب، بل هما متساويتا البعد عن الرأس أيضًا.

ثمة فروقٌ عامةٌ بين الدوال الخطية والتربيعية.

	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
المعادلة	$y = mx + b$	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
الدرجة	1	2
التمثيل البياني	مستقيم	قطع مكافئ
تزايد/تناقص	$m > 0$: y متزايدة في المجال بأكمله. $m < 0$: y متناقصة في المجال بأكمله.	$a > 0$: y متناقصة إلى يسار محور التماثل ومتزايدة إلى يمينه. $a < 0$: y متزايدة إلى يسار محور التماثل ومتناقصة إلى يمينه.
السلوك الطرفي	$m > 0$: عندما تتزايد x، تتزايد y ؛ وعندما تتناقص x، تتناقص y $m < 0$: عندما تتزايد x، تتناقص y ؛ وعندما تتناقص x، تتزايد y	$a > 0$: عندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الايسر وعندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الايمن. $a < 0$: عندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الايسر وعندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الايمن

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لقد استخدمت ما تعرفه عن الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتناظر أو التماثل لإعداد تمثيلات بيانية.

ويمكنك تحليل هذه التمثيلات البيانية لحل مسائل من الحياة اليومية.

الربط بالحياة اليومية

حوالي 1 طالب من كل 17 طالب من طلاب الصف الثاني عشر يلعبون كرة القدم. سيذهبون للعب في مدرسة NCAA الرابطة الوطنية للاعبين الرياضيين بين الكليات.

المصدر: الرابطة الوطنية للاعبين الرياضيين بين الكليات

مثال من الحياة اليومية 6 استخدام التمثيل البياني لدالة تربيعية

الانتماء إلى المدرسة **يقذف مجلس طلاب مدرسة ثانوية قمصانًا بين جموع الطلاب كلما سجّل الفريق المضيف هدفًا. يمكن تمثيل ارتفاع القميص بالدالة $h(x) = -16x^2 + 48x + 6$، حيث تمثل $h(x)$ ارتفاع القميص بالأمتار بعد x ثانية.**

a. مثّل الدالة بيانيًا.

$x = -\frac{b}{2a}$ معادلة محور التماثل

$x = -\frac{48}{2(-16)}$ or $\frac{3}{2}$ $b = 48$ و $a = -16$

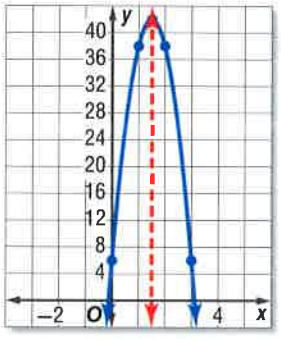
معادلة محور التماثل هي $x = \frac{3}{2}$. إذًا الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{3}{2}$.

$y = -16x^2 + 48x + 6$ المعادلة الأصلية

$= -16\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$ $x = \frac{3}{2}$

$= -16\left(\frac{9}{4}\right) + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$= -36 + 72 + 6$ or 42 بسّط



يقع الرأس عند $\left(\frac{3}{2}, 42\right)$.

لنوجد نقطةً أخرى. اختر قيمةً لـ x تساوي 0 وعوّض. تقع نقطتنا الجديدة عند $(0, 6)$. والنقطة المناظرة لها على الطرف الآخر من محور التماثل هي $(3, 6)$.

كرّر ذلك واختر قيمةً لـ x تساوي 1 لتحصل على $(1, 38)$ وتكون النقطة المناظرة لها هي $(2, 38)$. اربط النقطتين لتحصل على منحنى منتظم.

b. ما الارتفاع الذي يقذف منه القميص؟

يُقذف القميص حين يساوي الزمن 0. أو عند التقاطع مع المحور الرأسي y.

إذًا، قُذف القميص من ارتفاع 6 أقدام فوق سطح الأرض.

c. ما أقصى ارتفاعٍ يبلغه القميص؟ ومتى وصل إلى الارتفاع الأقصى؟

يقابل الارتفاع الأقصى للقميص الرأس.

إذًا يبلغ القميص ارتفاعًا أقصى مقداره 42 مترًا. ويكون الزمن حينها $\frac{3}{2}$ أو 1.5 ثانية بعد القذف.

تمرين موجّه

6. التتبّع يشارك عدنان في منافسة رمي الرمح. ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالمعادلة $y = -16x^2 + 64x + 6$. حيث تمثّل y ارتفاع الرمح بالأمتار بعد مرور x ثانية.

A. مثّل بيانيًا مسار الرمح.

B. ما الارتفاع الذي رُمي منه الرمح؟

C. ما هو أقصى ارتفاع للرمح؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

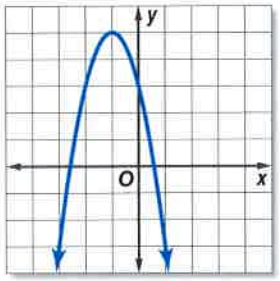
التحقق من فهمك

مثال 1 استخدم جدول قيمٍ لتمثيل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

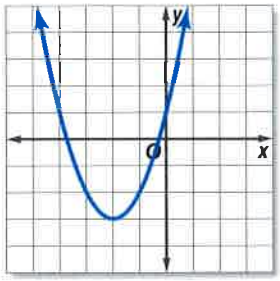
1. $y = 2x^2 + 4x - 6$
2. $y = x^2 + 2x - 1$
3. $y = x^2 - 6x - 3$
4. $y = 3x^2 - 6x - 5$

مثال 2 أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

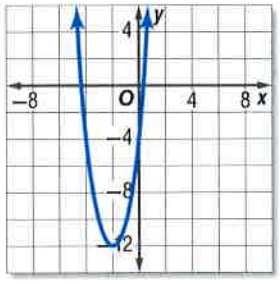
5.



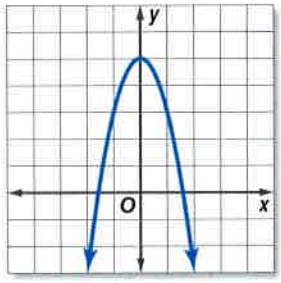
6.



7.



8.



مثال 3 أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y للتمثيل البياني لكل دالة.

9. $y = -3x^2 + 6x - 1$
10. $y = -x^2 + 2x + 1$
11. $y = x^2 - 4x + 5$
12. $y = 4x^2 - 8x + 9$

مثال 4 احسب كل دالة مما يلي.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

13. $y = -x^2 + 4x - 3$
14. $y = -x^2 - 2x + 2$
15. $y = -3x^2 + 6x + 3$
16. $y = -2x^2 + 8x - 6$

مثال 5 مثّل كل دالة بيانيًا.

17. $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$
18. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$
19. $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$
20. $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

مثال 6

21. **الاستنتاج** يقذف بهلوانيّ كرةً في الهواء. ويمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالعلاقة $y = -16x^2 + 16x + 5$، حيث تمثل y ارتفاع الكرة عند x ثانية.

a. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

b. ما الارتفاع الذي تُرمى منه الكرة؟

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

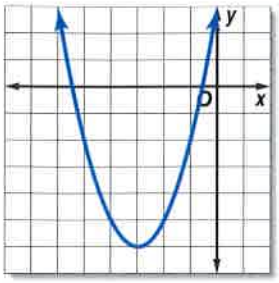
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

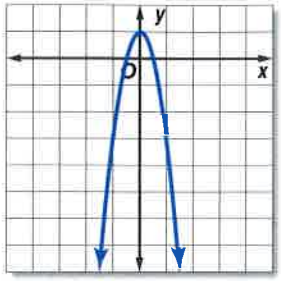
التمرين وحل المسائل

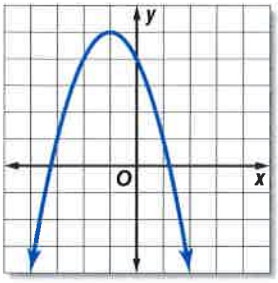
مثال 1 استخدم جدول قيمٍ لتمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

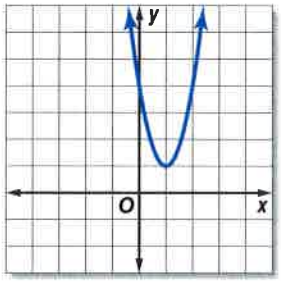
22. $y = x^2 + 4x + 6$
23. $y = 2x^2 + 4x + 7$
24. $y = 2x^2 - 8x - 5$
25. $y = 3x^2 + 12x + 5$
26. $y = 3x^2 - 6x - 2$
27. $y = x^2 - 2x - 1$

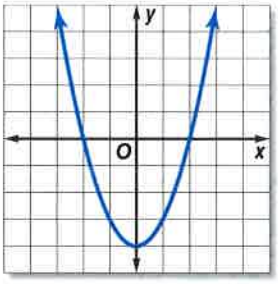
مثال 2 أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

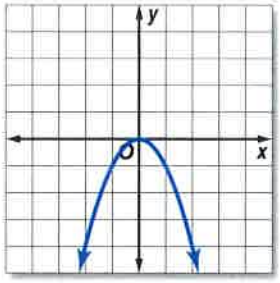
28.


29.


30.


31.


32.


33.


مثال 3 أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل دالة.

34. $y = x^2 + 8x + 10$
35. $y = 2x^2 + 12x + 10$
36. $y = -3x^2 - 6x + 7$
37. $y = -x^2 - 6x - 5$
38. $y = 5x^2 + 20x + 10$
39. $y = 7x^2 - 28x + 14$
40. $y = 2x^2 - 12x + 6$
41. $y = -3x^2 + 6x - 18$
42. $y = -x^2 + 10x - 13$

مثال 4 ادرس كل دالة مما يلي.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

43. $y = -2x^2 - 8x + 1$
44. $y = x^2 + 4x - 5$
45. $y = 3x^2 + 18x - 21$
46. $y = -2x^2 - 16x + 18$
47. $y = -x^2 - 14x - 16$
48. $y = 4x^2 + 40x + 44$
49. $y = -x^2 - 6x - 5$
50. $y = 2x^2 + 4x + 6$
51. $y = -3x^2 - 12x - 9$

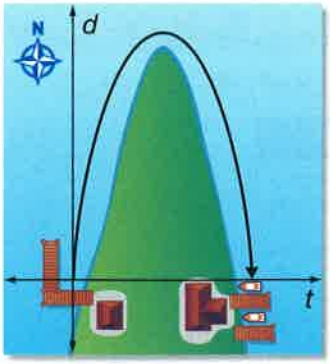
مثال 5 مثّل كل دالة بيانيًا.

52. $y = -3x^2 + 6x - 4$
53. $y = -2x^2 - 4x - 3$
54. $y = -2x^2 - 8x + 2$
55. $y = x^2 + 6x - 6$
56. $y = x^2 - 2x + 2$
57. $y = 3x^2 - 12x + 5$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

مثال 6

58. رياضة الزوارق أرست هداية زورقها في نقطة على الساحل الغربي خور دبي. ثم شرعت بالإبحار إلى مرسى دبي. يمكن تمثيل المسافة التي تقطعها هداية بالنسبة إلى الزمن بالمعادلة $d = -16t^2 + 66t$، حيث تمثل d عدد الأمتار التي تقطعها خلال t دقيقة.



a. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

b. ما العدد الأقصى الذي قطعته من الأمتار؟

c. كم استغرقت حتى وصلت إلى ميناء الجزيرة؟

حاسبة التمثيل البياني مثل كل دالة بيانيًا. واستخدم خاصية TRACE لإيجاد الرأس على التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزءٍ من الألف عند الضرورة.

59. $y = 4x^2 + 10x + 6$

60. $y = 8x^2 - 8x + 8$

61. $y = -5x^2 - 3x - 8$

62. $y = -7x^2 + 12x - 10$

63. الجولف يستطيع لاعب الجولف الهاوي أن يضرب الكرة بسرعةٍ ابتدائية نحو الأعلى مقدارها 31.3 مترًا في الثانية. ويمكن تمثيل الارتفاع بالعلاقة $h = -4.9t^2 + 31.3t$، حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد مرور t ثانية.

a. مثّل هذه الدالة بيانيًا. ما الذي تمثله أجزاء التمثيل البياني التي تكون فيها $h > 0$ في سياق هذه الحالة؟ وما الذي يمثله السلوك الطرفي للتمثيل البياني؟

b. ما الارتفاع الذي تُضرب منه الكرة؟

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

d. كم استغرقت الكرة لتصطدم بالأرض؟

e. اذكر المدى و المجال المعقولين لهذا الموقف.

64. جمع التبرعات تبيع الفرقة الموسيقية أزهارًا لشراء ملابس جديدة. وفي العام الماضي، كانت الفرقة تبيع الزهرة الواحدة بـ 5 AED، حيث باعت حينئذٍ 150 زهرة. وتنوي رفع السعر هذا العام، ولكنها تتوقع أن تنخفض المبيعات بمقدار 10 AED مقابل كل زيادة مقدارها 1 AED. ويتم التنبؤ بربح المبيعات R الناتج عن بيع الأزهار بالدرهم الإماراتي بالدالة $R = (5 + p)(150 - 10p)$، حيث p عدد زيادات السعر البالغة إحداها 1 AED.

a. اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

b. أوجد القيمة العظمى للدالة.

c. ما السعر الذي ينبغي أن تباع به الأزهار للحصول على أكبر إيراداتٍ للبيع؟ اشرح استنتاجك.

القدم تُركل كرةٌ من مستوى سطح الأرض بسرعةٍ ابتدائية نحو الأعلى مقدارها 90 مترًا في الثانية. تعطي المعادلة $h = -16t^2 + 90t$ ارتفاع الكرة h بعد t ثانية.

a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

b. متى تبلغ الكرة ارتفاع 126 مترًا؟

c. متى يكون ارتفاع الكرة صفرًا؟ وماذا تمثل هذه النقاط في سياق هذه الحالة؟

66. البنية بفرض أن $f(x) = x^2 - 9$.

a. ما مجال الدالة $f(x)$؟

b. ما مدى الدالة $f(x)$؟

c. ما قيم x التي تجعل الدالة $f(x)$ سالبة؟

d. عندما يكون x عددًا حقيقيًا، فما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ومداها؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

67 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف حل المعادلات التربيعية باستخدام الجداول.

a. جبريًا حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة. وانسخ العمودين الأولين من الجدول أدناه وأكملهما.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار	قيم y
$x^2 - x = 12$			
$x^2 + 8x = 9$			
$x^2 = 14x - 24$			
$x^2 + 16x = -28$			

b. بيانيًا مثّل كل دالة مرتبطة بيانيًا باستخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني.

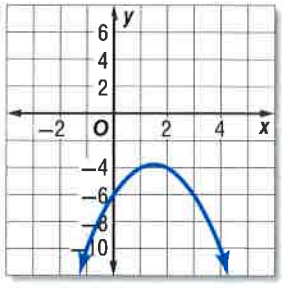
c. تحليليًا يساوي عدد الأصفار الحقيقية أقل من أو يساوي درجة الدالة المرتبطة. استخدم سمة الجدول على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة. ودوّن الأصفار في الجدول أعلاه. ودوّن أيضًا قيم الدالة التي تزيد بدرجة واحدةٍ عن كل صفر والتي تقل عنه بدرجة واحدة. اطلع على الجدول.

d. لفظيًا ادرس قيمتي الدالة المقابلتين لقيم x قبل الصفر وبعده مباشرةً. ما الذي يحدث لقيمة إشارة الدالة قبل الصفر وبعده؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

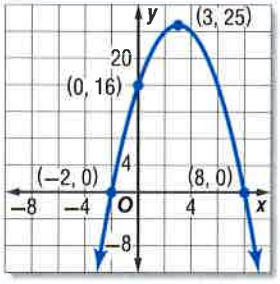
68. مسألة غير محددة الإجابة اكتب معادلةً تربيعيةً يكون لتمثيلها البياني محور التماثل $x = -\frac{3}{8}$. لخّص خطواتك

69. تحليل الخطأ تعتقد سندية أن القطعين المكافئين اللذين يمثلهما التمثيل البياني لهما محور التماثل نفسه. ولكن خديجة تخالفها. اعتمادا على الرسم المجاور من منهما على صواب؟ اشرح تفكيرك.



قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، ويمر بالنقطة (0, −6) وله رأس عند النقطة (2, −4)

70. تحدٍّ باستخدام محور التماثل، والتقاطع مع المحور الرأسي y، ونقطة تقاطع واحدة مع المحور الأفقي x، اكتب معادلةً للتمثيل البياني الموضح.



71. البنية للتمثيل البياني للدالة التربيعية الرأس (2, 0). وإحدى النقاط على التمثيل البياني هي (5, 9). أوجد نقطةً أخرى على التمثيل البياني. واشرح كيف أوجدتها.

72. مسألة غير محددة الإجابة صِف حالةً من الحياة اليومية تنطوي على معادلةٍ تربيعية. واشرح ماذا يمثل الرأس.

73. الاستنتاج أعطِ مثالاً معاكسًا يمثّل حالةً محددةً توضح أن العبارة التالية خاطئة. *رأس القطع المكافئ هو النقطة الصغرى على الدوام في تمثيله البياني.*

74. الكتابة في الرياضيات استخدم الجداول والتمثيلات البيانية لمقارنة أوجه التشابه والاختلاف بين الدالة $f(x) = ab^x + c$ عند $b > 0$ و $a \neq 0$ و $b \neq 1$ وبين الدالة التربيعية $g(x) = ax^2 + c$ وبين الدالة الخطية $h(x) = ax + c$. وأدرج في مقارنتك نقاط التقاطع وأجزاء التمثيل البياني التي تتزايد عندها الدوال وتتناقص وتكون موجبة أو سالبة إضافةً إلى القيم النسبية العظمى والصغرى وأوجه التماثل والسلوك النهائي. ما الدالة التي تتجاوز في النهاية الأخرى؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

75. أي مما يلي معادلة مستقيم يمر بالنقطة $(2, -5)$ ويتعامد على $2x + 4y = 8$؟

A $y = 2x + 10$
C $y = 2x - 9$
B $y = -\frac{1}{2}x - 4$
D $y = -2x - 1$

76. الهندسة تبلغ مساحة الدائرة 36π وحدة مربعة. إذا ضاعفنا نصف قطر الدائرة، فكم تكون مساحة الدائرة الجديدة؟

F 1296π وحدة مربعة
H 72π وحدة مربعة
G 144π وحدة مربعة
J 9π وحدة مربعة

77. ما مدى الدالة $f(x) = -4x^2 - \frac{1}{2}$؟

A {جميع الأعداد الصحيحة التي تساوي أو تزيد عن $\frac{1}{2}$}
B {جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة}
C {جميع الأعداد الحقيقية}
D {جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي $-\frac{1}{2}$}

78. إجابة قصيرة يوصل خميس الجرائد مقابل مبلغ إضافي من المال. وهو يبدأ بتوصيل الجرائد عند الساعة 3:15 P.M. وينتهي عند الساعة 5:05 P.M. فكم يستغرق خميس لينهي جولة التوصيل؟

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله. (الدرس 9-1)

79. $4x^2 + 4x + 1$
80. $4x^2 - 20x + 25$
81. $9x^2 + 8x + 16$

حلّل كل كثيرة حدود إن أمكن إلى عواملها الأولية. فإن كان لا يُمكن تحليل كثيرة الحدود، فاكتب *أولية*. (الدرس 8-1)

82. $n^2 - 16$
83. $x^2 + 25$
84. $9 - 4a^2$

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي. (الدرس 3-1)

85. $(b - 7)(b + 3)$
86. $(c - 6)(c - 5)$
87. $(2x - 1)(x + 9)$

88. الولادات المتعددة يمكن تمثيل عدد ولادات التوائم الأربعة Q في دولة ما خلال السنوات الأخيرة بالدالة $Q = -0.5t^3 + 11.7t^2 - 21.5t + 218.6$، حيث t تمثل عدد الأعوام منذ 2002. ما العدد المتوقع من ولادات التوائم الأربعة في هذه الدولة لعام 2017؟ (الدرس 1-1)

89. الغابات يمكن تقدير عدد الأمتار من الألواح B الناتجة عن الجذع باستخدام القانون $B = \frac{L}{16}(D^2 - 8D + 16)$، حيث D قطر الجذع بالسنتيمترات و L طول الجذع بالأمتار. فبالنسبة للجذوع التي يبلغ طولها 16 مترًا، ما القطر الذي يعطي تقريبًا 256 مترًا من الألواح؟ (الدرس 9-1)

مراجعة المهارات

أوجد نقطة تقاطع التمثيل البياني لكل معادلة مع المحور الأفقي x.

90. $x + 2y = 10$
91. $2x - 3y = 12$
92. $3x - y = -18$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الجبر

1-1 معدل تغير الدالة التربيعية

يُطلق صاروخ اختباري من الأرض نحو الأعلى بسرعة 144 متراً في الثانية. تمثل المعادلة $y = -16x^2 + 144x$ ارتفاع الصاروخ y بالأمتار بعد x ثانية. نستطيع باستخدام هذه الدالة دراسة معدل تغير الدالة التربيعية.

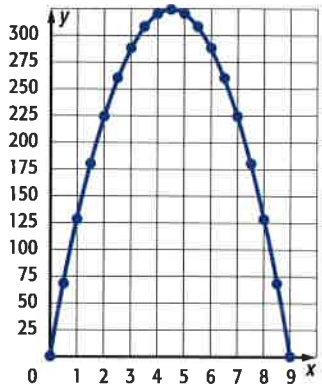
النشاط

الخطوة 1 انسخ الجدول الوارد أدناه.

x	0	0.5	1.0	1.5	...	9.0
y	0					
معدل التغير	-					

الخطوة 2 أوجد قيمة y المقابلة لكل قيمة x من 0 إلى 9.

الخطوة 3 مثّل الأزواج المرتبة (x, y) بيانيًا على ورقٍ شبكي. صِل بين النقاط بمنحنى منتظم. ولاحظ أن الدالة *تتزايد* عند $0 < x < 4.5$ و*تتناقص* عند $4.5 < x < 9$.



الخطوة 4 تذكّر أن *معدّل التغير* هو التغيّر في y مقسومًا على التغير في x. أوجد معدل التغير لكل فترةٍ مدتها نصف ثانية في x و y.

تمارين

استخدم الدالة التربيعية $y = x^2$.

1. أنشئ جدولاً للدالة شبيهًا بالجدول الوارد في هذا النشاط باستخدام $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. وأوجد قيم y المقابلة لقيم x.
2. مثّل الأزواج المرتبة على ورقٍ شبكي. وصِل النقاط بمنحنى بيانيٍ منتظم. صِف متى تتزايد الدالة ومتى تتناقص.
3. أوجد معدل تغير كل عمودٍ بدءًا من $x = -3$. وقارن معدلات التغير حين تتزايد الدالة وحين تتناقص.
4. **تحدٍّ** إذا أُسقط جسمٌ من ارتفاع 100 متر في الهواء، وكانت مقاومة الهواء مهملة، فسيسقط الجسم بسرعةٍ يمكن تمثيلها بالدالة $f(x) = -16x^2 + 100$، حيث $f(x)$ تمثل ارتفاع الجسم بالأمتار بعد x ثانية. أعِدَّ جدولاً شبيهًا بجدول التمرين 1، واختر قيمًا ملائمةً لـ x. املأ قيم $f(x)$ وأوجد معدلات التغير. وقارن معدلات التغير. وصِف أي أنماطٍ تلاحظها.

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

1-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

السابق:
- لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الحالي:
1. حلّ المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني.
2. تقدير حلول المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني.

لماذا؟
- لحلبة دورتون أرينا في كارولينا الشمالية بالولايات المتحدة شكل قطعين مكافئين متقاطعين. ويمكن تمثيل شكلي القطعين المكافئين بالمعادلة $y = -x^2 + 127x$، حيث x عرض القطع المكافئ و y طوله بالقدم. ويمكن استخدام نقاط تقاطع التمثيل البياني لهذه الدالة مع المحور الأفقي x لإيجاد المسافة بين نقاط التقاء القطع المكافئ مع الأرض.

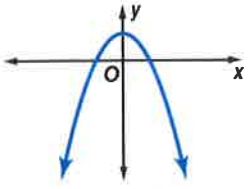
المفردات الجديدة
جذر مكرر (double root)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. مراعاة الدقة.

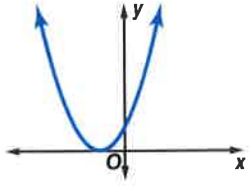
1 الحل بالتمثيل البياني

يمكن كتابة المعادلات التربيعية بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. ولكتابة دالةٍ تربيعيةٍ في صورة معادلة، عوّض عن y أو $f(x)$ بـ 0. تذكّر أنه يمكن تحديد حلول معادلة أو جذورها بإيجاد نقاط تقاطع التمثيل البياني المرتبط بها مع المحور الأفقي x.

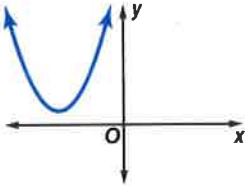
المفهوم الأساسي حلول المعادلات التربيعية



حلان حقيقيان مختلفان



حل حقيقي وحيد



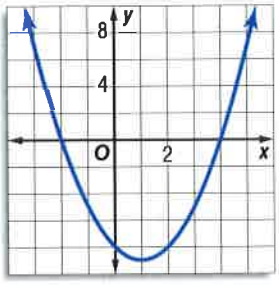
لا حلول حقيقية

مثال 1 جذران

حُلّ $x^2 - 2x - 8 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 2x - 8$ بيانيًا.

يبدو أن نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x تقع عند النقطتين -2 و 4، ولذلك فالحلّان هما -2 و 4.



التحقق تحقق من الحل في المعادلة الأصلية. المعادلة الأصلية

$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(4)^2 - 2(4) - 8 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓

بسّط.
$x = -2$ أو $x = 4$

$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(-2)^2 - 2(-2) - 8 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓

تمرين موجّه **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

1A. $-x^2 - 3x + 18 = 0$

1B. $x^2 - 4x + 3 = 0$

McGraw-Hill Education ... حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

كان الحلان في المثال 1 عددين مختلفين. ويكون الجذران في بعض الأحيان عددًا واحدًا يدعى **الجذر المكرر**.

مثال 2 الجذر المكرر

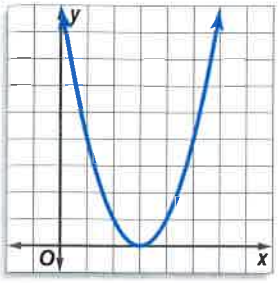
حُلّ $x^2 - 6x = -9$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

$x^2 - 6x = -9$ المعادلة الأصلية

$x^2 - 6x + 9 = 0$ أضف 9 إلى كل طرف

الخطوة 2 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا $f(x) = x^2 - 6x + 9$.



الخطوة 3 عيّن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x. ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور الأفقي x. ولذلك، ثمة حل وحيد فقط، وهو 3.

التحقق حلّ باستخدام التحليل إلى العوامل.

$x^2 - 6x + 9 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 3)(x - 3) = 0$ حلل إلى العوامل.

$x - 3 = 0$ or $x - 3 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 3$ $x = 3$ أضف 3 إلى كل طرف.

الحل الوحيد هو 3.

انتبه!

الدقة قد تبدو حلول المعادلة التي عُثر عليها من التمثيل البياني دقيقة. فتحقق منها في المعادلة الأصلية للتحقق.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

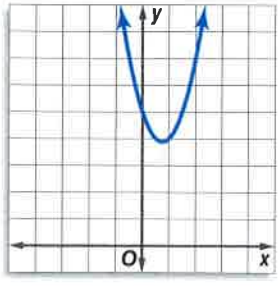
2A. $x^2 + 25 = 10x$ **2B.** $x^2 = -8x - 16$

في بعض الأحيان لا تكون الجذور أعدادًا حقيقية. ويمكن أن يكون للمعادلات التربيعية حلّان حقيقيان أو حلّ واحدٌ أو ألا يكون لها حلولٌ حقيقية. وقد قادتنا المعادلات التربيعية ذات الحلول التي ليست أعدادًا حقيقيةً إلى توسيع نظام الأعداد ليتيح حلولاً لهذه المعادلات. وتدعى تلك الأعداد *بالأعداد المركبة*.

وستدرس الأعداد المركبة في الجبر 2.

مثال 3 لا جذور حقيقية

حُلّ $2x^2 - 3x + 5 = 0$ بالتمثيل البياني.



الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

الخطوة 2 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

الخطوة 3 حدد نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x. ليس للتمثيل البياني نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. ولذلك فليس لهذه المعادلة حلولٌ من الأعداد الحقيقية. مجموعة الحلول هي Ø.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

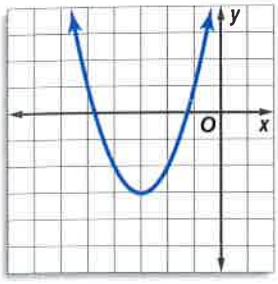
3A. $-x^2 - 3x = 5$ **3B.** $-2x^2 - 8 = 6x$

2 تقدير الحلول

لقد كانت الجذور التي توصلنا إليها إلى الآن أعدادًا صحيحة. ولكن جذور المعادلات التربيعية لا تكون في العادة أعدادًا صحيحة. وفي هذه الحالات، استخدم التقدير لتقريب جذور المعادلة.

مثال 4 تقريب الجذور بواسطة جدول

حُلّ $x^2 + 6x + 6 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.



مثّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 6x + 6$ بيانيًا.

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x تقع بين -5 و -4 وبين -2 و -1.

أعدَّ جدولاً باستخدام زيادةٍ مقدارها 0.1 لقيم x الواقعة بين -5 و -4 وبين -2 و -1.

ابحث عن تغيرٍ في إشارات قيم الدالة. وقيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

x	−4.9	−4.8	−4.7	−4.6	−4.5	−4.4	−4.3	−4.2	−4.1
y	0.61	0.24	−0.11	−0.44	−0.75	−1.04	−1.31	−1.56	−1.79

x	−1.9	−1.8	−1.7	−1.6	−1.5	−1.4	−1.3	−1.2	−1.1
y	−1.79	−1.56	−1.31	−1.04	−0.75	−0.44	−0.11	0.24	0.61

في كل جدول، قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة هي -0.11. ولذلك فالجذران هما -4.7 و -1.3 على وجه التقريب.

تمرين موجّه

4. حُلّ $2x^2 + 6x - 3 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

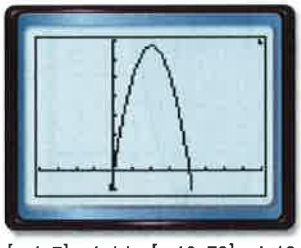
نصيحة دراسية

مواضع الأصفار بما أن الدوال التربيعية متصلة، فيجب أن يكون هناك صفر بين قيمتي اللتان تحملان قيمتا y المناظرتان المتقابلتين لهما إشارتان معاكستان.

يعدّ تقريب نقاط تقاطع التمثيلات البيانية مع المحور الأفقي x مفيدًا في تطبيقات الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية تقريب الجذور بواسطة آلة حاسبة

كرة القدم يركل حارس مرمى الكرة بسرعةٍ متجهةٍ نحو الأعلى مقدارها 19.8 متراً في الثانية، وتلتقي قدمه بالكرة على ارتفاع 30.5 سنتيمتراً فوق سطح الأرض. تمثل الدالة التربيعية $h = -16t^2 + 65t + 1$ ارتفاع الكرة h بالأمتار بعد t ثانية. كم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



[−4, 7] scl: 1 by [−10, 70] scl: 10

عليك إيجاد جذور المعادلة $0 = -16t^2 + 65t + 1$. استعمل حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة المرتبطة بيانيًا $f(x) = -16t^2 + 65t + 1$.

تقع نقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور الأفقي x عند القيمة 4 تقريبًا. ولذلك تبقى الكرة في الهواء مدة 4 ثوانٍ تقريبًا.

تمرين موجّه

5. إذا ركل الحارس الكرة بسرعة متجهة إلى الأعلى مقدارها 16.7 متراً في الثانية ولامست قدمه الكرة على ارتفاع 60.96 سنتيمتراً فوق سطح الأرض، فكم تبقى الكرة في الهواء؟

الربط بالحياة اليومية

بدأت لعبة كرة القدم عام 1863 في بريطانيا بعد تأسيس جمعيةٍ لها. وهي تمارس في جميع قارات العالم.

المصدر: Sports Know How

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

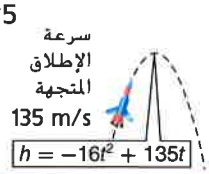
الأمثلة 1-3 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$
2. $2x^2 - 8x = 0$
3. $x^2 + 4x = -4$
4. $x^2 + 12 = -8x$

الأمثلة 4 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.**

5. $-x^2 - 5x + 1 = 0$
6. $-9 = x^2$
7. $x^2 = 25$
8. $x^2 - 8x = -9$

الأمثلة 5 9. **معرض العلوم** بنى زايد صاروخًا تجريبيًا. ويمكن تمثيل طيران الصاروخ بالمعادلة الموضحة، حيث h ارتفاع الصاروخ بالمتر بعد t ثانية. فكم مكث الصاروخ في الهواء تقريبًا؟



التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

10. $x^2 + 7x + 14 = 0$
11. $x^2 + 2x - 24 = 0$
12. $x^2 - 16x + 64 = 0$
13. $x^2 - 5x + 12 = 0$
14. $x^2 + 14x = -49$
15. $x^2 = 2x - 1$
16. $x^2 - 10x = -16$
17. $-2x^2 - 8x = 13$
18. $2x^2 - 16x = -30$
19. $2x^2 = -24x - 72$
20. $-3x^2 + 2x = 15$
21. $x^2 = -2x + 80$

الأمثلة 4 **حُلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.**

22. $x^2 + 2x - 9 = 0$
23. $x^2 - 4x = 20$
24. $x^2 + 3x = 18$
25. $2x^2 - 9x = -8$
26. $3x^2 = -2x + 7$
27. $5x = 25 - x^2$

الأمثلة 5 28. **الكرة اللينة** تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 47t + 3$ ارتفاع كرةٍ لينة h بالأمتار، وذلك بعد أن ضربتها أماني بـ t ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء؟

29. **ألعاب الملاهي** تنطلق الإفعوانية بالراكبين إلى الأعلى بمسارٍ مستقيم ثم يهبط بهم بمسارٍ مستقيم. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 122t$ ارتفاع الراكبين h بالأمتار من موقع انطلاقهم بعد t ثانية. فكم سيمضي وقت حتى يعود الركاب إلى الأرض؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد مرات تقاطع التمثيل البياني لكل دالة مع المحور الأفقي x. وحدّد كل صفر.

30. $y = x^2 - 8x + 16$
31. $y = x^2 + 4x + 4$
32. $y = x^2 + 2x - 24$
33. $y = x^2 + 12x + 32$

34. **نظرية الأعداد** استخدم معادلةً تربيعيةً لإيجاد عددين مجموعهما 9 وحاصل ضربهما 20.

35. **نظرية الأعداد** استخدم معادلةً تربيعيةً لإيجاد عددين مجموعهما 1 وحاصل ضربهما 12-.

36. **التمثيل** يمكن تمثيل ارتفاع كرة الجولف في الهواء بالمعادلة $h = -16t^2 + 76t$، حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t ثانية.

a. كم مكثت الكرة في الهواء؟
b. ما أقصى ارتفاع للكرة؟
c. متى ستصل الكرة لأقصى ارتفاع؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التزلج تشارك عائشة في منافسة التزحلق الهوائي الحر. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 30t + 10$ ارتفاع عائشة h بالأمتار بعد مضي t ثانيةً من مغادرة المنحدر.

a. كم مكثت عائشة في الهواء؟

b. متى ستصل عائشة ارتفاع 15 متراً؟

c. للحصول على نقاط إضافية في المسابقة، على المتسابق أن يصل ارتفاع 20 مترًا. فهل ستحصل عائشة نقاط اضافية؟

38. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة كيفية تفسير الإضافي للعلاقة بين الدوال التربيعية والتمثيلات البيانية.

a. بيانيًا مثّل بيانيًا $y = x^2$.

b. تحليليًا اكتب اسم الرأس ونقطتين أخريين على التمثيل البياني.

c. بيانيًا مثّل $y = x^2 + 2$ $y = x^2 + 4$ و $y = x^2 + 6$ على المستوى الإحداثي نفسه كما في التمثيل البياني السابق.

d. تحليليًا اكتب احداثيات الرأس ونقطتين من كلٍ من هذه التمثيلات البيانية التي لها الإحداثيات الأفقية x الخاصة بالتمثيل البياني الأول نفسها.

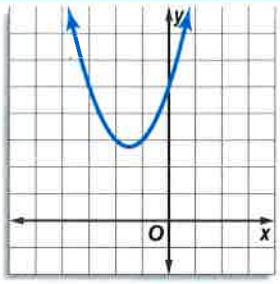
e. تحليليًا ما النتيجة التي يمكنك استخلاصها من هذا؟

حاسبة التمثيل البياني **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

39. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

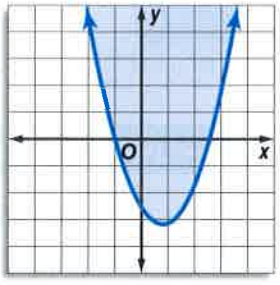
40. $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



41. النقد يوجد إسماعيل وأسامة عدد الأصفار الحقيقية للدالة المماثلة بيانيًا على اليسار. ويقول إسماعيل إن الدالة ليست لها أصفار بسبب عدم وجود نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. ويقول أسامة إن للدالة صفرًا حقيقيًا واحدًا لأن للتمثيل البياني نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح تفكيرك.

42. مسألة غير محددة الإجابة صِف حالةً من الحياة اليومية ينتقل فيها جسمٌ مقذوفٌ في الهواء. واكتب معادلةً تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة إلى الزمن، وحدد المدة التي ينتقل خلالها الجسم في الهواء.



43. الاستنتاج التمثيل البياني الموضح يخصّ *متباينة تربيعية* . حلل التمثيل البياني وحدد ما إذا كانت قيمة y الخاصة بحل المتباينة أكبر *أحيانًا*، *أو دائمًا*، أو *ليست أكبر مطلقًا* من 2. اشرح.

44. تحدٍّ اكتب معادلةً تربيعيةً لها الجذور الموصوفة.

a. جذر مضاعف وحيد

b. جذر نسبي واحد (غير صحيح) وجذر صحيح واحد

c. جذران صحيحان مميزان يشكّلان نظيرين جمعيين.

45. تحدٍّ أوجد جذر $x^2 = 2.25$ دون استخدام آلة حاسبة. واشرح إستراتيجيتك.

46. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تقريب كسور معادلة تربيعية عندما لا تكون الجذور أعدادًا صحيحة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

47. أحرز خلف 50 من أصل 80 نقطة في أحد الاختبارات. فما النسبة المئوية التي أحرزها خلف في الاختبار؟

A 62.5%
B 16%
C 6.25%
D 1.6%

48. يحتاج بدر أن يرخي برغيًا. ويتطلب ذلك مفتاحًا مقاسه أصغر من $\frac{7}{8}$ سنتيمتر وأكبر من $\frac{3}{4}$ سنتيمتر. فأي من القياسات التالية على بدر أن يستخدم؟

F $\frac{3}{8}$ inch
G $\frac{5}{8}$ inch
H $\frac{13}{16}$ inch
J $\frac{15}{16}$ inch

49. إجابة موسعة يغادر زورقان رصيف الميناء. وينتقل أحدهما مسافة 4 كيلومترات شرقًا ثم 5 كيلومترات شمالاً. بينما ينتقل الآخر مسافة 12 كيلومترًا جنوبًا و 9 كيلومترات غربًا. صمم رسمًا تخطيطيًا يمثل المسارات التي يقطعها الزورقان.وما المسافة التي تفصل بينهما بالكيلومترات؟

50. يمثل القانون $s = \frac{1}{2}at^2$ المسافة s بالأمتار التي يقطعها جسمٌ ساقطٌ سقوطًا حرًا على كوكبٍ ما أو على القمر خلال زمنٍ معطى t بالثواني. حُل القانون لإيجاد a وهو التسارع الناتج عن الجاذبية.

A $a = \frac{1}{2}t^2 - s$
B $a = 2s - t^2$
C $a = s - \frac{1}{2}t^2$
D $a = \frac{2s}{t^2}$

مراجعة شاملة

اكتب معادلة محور التماثل، وأوجد إحداثيات رأس التمثيل البياني لكل دالة. وحدّد إن كان الرأس نقطةً عظمى أو صغرى. ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 1-1)

51. $y = 3x^2$
52. $y = -4x^2 - 5$
53. $y = -x^2 + 4x - 7$
54. $y = x^2 - 6x - 8$
55. $y = 3x^2 + 2x + 1$
56. $y = -4x^2 - 8x + 5$

حُلّ كلّ معادلة مما يلي، وتحقق الحلول. (الدرس 1-9)

57. $2x^2 = 32$
16
58. $(x - 4)^2 = 25$
59. $4x^2 - 4x + 1 =$
60. $2x^2 + 16x = -32$
61. $(x + 3)^2 = 5$
62. $4x^2 - 12x = -9$

أوجد كل مجموع أو فرق. (الدرس 1-1)

63. $(3n^2 - 3) + (4 + 4n^2)$
64. $(2d^2 - 7d - 3) - (4d^2 + 7)$
65. $(2b^3 - 4b^2 + 4) - (3b^4 + 5b^2 - 9)$
66. $(8 - 4h^2 + 6h^4) + (5h^2 - 3 + 2h^3)$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا.

67. $y = x^2 + 5$
68. $y = x^2 - 8$
69. $y = 2x^2 - 7$
70. $y = -x^2 + 2$
71. $y = -0.5x^2 - 3$
72. $y = (-x)^2 + 1$

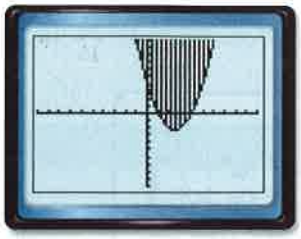
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
المتباينات التربيعية

تذكّر أن التمثيل البياني لمتباينةٍ خطيةٍ يتألف من الحدّ ومن نصف المستوى المظلل. وتقع مجموعة حلول المتباينة في المنطقة المظللة من التمثيل البياني. ويشبه التمثيل البياني للمتباينات التربيعية التمثيل البياني للمتباينات الخطية.

النشاط 1 ظلّل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y \geq x^2 - 5x + 4$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

أولاً، امسح جميع الدوال من قائمة Y = .

لتمثيل $y \geq x^2 - 5x + 4$ بيانيًا، أدخل المعادلة في القائمة Y = .
ثم استخدم السهم الأيسر لاختيار =. واضغط على ENTER إلى حين اختيار التظليل فوق السّطر.

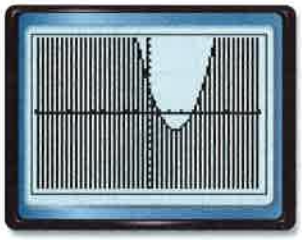
خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ◀ ▶ X,T,θ,n x^2 − 5 X,T,θ,n + 4 ZOOM 6

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها *y أكبر أو تساوي* $x^2 - 5x + 4$ *فوق الخط أو عليه* وهي عبارة عن حلول.

وسيُستخدم إجراء مشابه للتمثيل البياني لمتباينات تقع المنطقة المظللة بالنسبة لها خارج القطع المكافئ.

النشاط 2 ظلّل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y - 4 \leq x^2 - 5x$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

امسح التمثيل البياني المعروض أوّلاً.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= CLEAR

ثم أعد كتابة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ في صورة $y \leq x^2 - 5x + 4$ ، ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ X,T,θ,n x^2 − X,T,θ,n − 4 GRAPH 5

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها *y أصغر أو تساوي* $x^2 - 5x + 4$
تحت الخط أو عليه وهي عبارة عن حلول.

تمارين

1. قارن وقابل التمثيلين البيانيين الموضحين أعلاه.
2. مثّل $y - 2x + 6 \geq 5x^2$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.
   واذكر أسماء ثلاثة حلولٍ للمتباينة.
3. مثّل $y - 6x \leq -x^2 - 3$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.
   واذكر أسماء ثلاثة حلولٍ للمتباينة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-3 حَلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

السابق

- لقد حللت معادلات تربيعية باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

الحالي

1 إكمال المربع لكتابة ثلاثيات حدود مربع كامل.

2 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع.

لماذا؟

- في المسابقات، يَقذِف المتزلجون أنفسهم من نصف أنبوب إلى الهواء لتنفيذ الحِيَل. يمكن استخدام المعادلة $h = -16t^2 + 20t + 12$ لتمثيل ارتفاعهم بالأمتار بعد t من الثواني.

لإيجاد مدى طول المتزلج في الهواء إذا كان على ارتفاع 25 مترًا من نصف الأنبوب، يمكنك إيجاد حَل $25 = -16t^2 + 20t + 12$ باستخدام طريقة تُسمَّى إكمال المربع.

المفردات الجديدة

إكمال المربع
completing the square

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 إكمال المربع لقد حللتَ سابقًا المعادلات باستخدام الجذر التربيعي لكل طرف. لم تصلح هذه الطريقة إلا لأن التعبير الموجود على الطرف الأيسر كان مربعًا كاملاً. في ثلاثيات حدود المربع الكامل التي يكون فيها المعامل الرئيسي 1، توجد علاقة بين **معامل الحد x** و**الحد الثابت**.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)(x) + 5^2$$
$$= x^2 + 10x + 25$$

لاحظ أن $25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$. للحصول على الحد الثابت، اقسم معامل الحد x على 2 وربّع الناتج. يمكن تحويل أي تعبير تربيعي في الصيغة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل باستخدام طريقة تُسمَّى **إكمال المربع**.

المفهوم الأساسي إكمال المربع

الشرح

لإكمال المربع لأي تعبيرٍ تربيعي للصيغة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 أوجد نصف b، المعامل x.

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1.

الخطوة 3 اجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

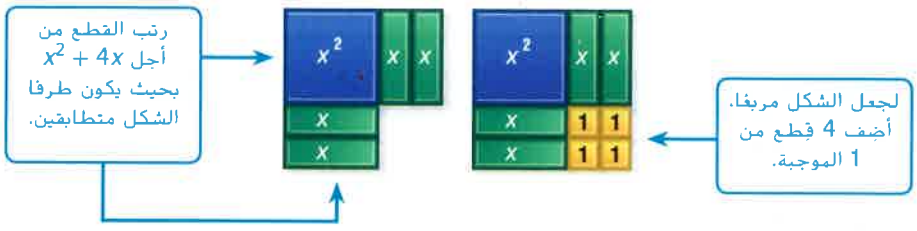
الرموز

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

مثال 1 اكمال المربع

أوجد قيمة c التي تجعل $x^2 + 4x + c$ ثلاثي حدود مربع كامل.

الطريقة 1 استخدام القطع الجبرية.



McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

نصيحة دراسية
الخوارزميات عبارة عن سلسلة من الخطوات لتنفيذ إجراء أو حَلّ مسألة.

الطريقة 2 استخدام خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة 1 أوجد $\frac{1}{2}$ من 4. $\frac{4}{2}=2$

الخطوة 2 ربّع الناتج في الخطوة 1. $2^2=4$

الخطوة 3 أضِف ناتج الخطوة 2 إلى x^2+4x. x^2+4x+4

وبالتالي، $c=4$. لاحظ أن $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

تمرين موجّه

1. أوجد قيمة c التي تجعل r^2-8r+c ثلاثي حدود مربع كامل.

2 حَلّ المعادلات بإكمال المربع

يمكنك إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية. أولاً، يجب عليك جعل الحدين x^2 و bx بطرف واحد.

مثال 2 حَلّ معادلة بإكمال المربع

حُلّ المعادلة: $x^2-6x+12=19$ بإكمال المربع.

$x^2-6x+12=19$	المعادلة الأصلية
$x^2-6x=7$	اطرح 12 من كل طرف.
$x^2-6x+9=7+9$	نظرًا لأن $\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$، فأضف 9 لكل طرف.
$(x-3)^2=16$	حلل إلى العوامل x^2-6x+9.
$x-3=\pm4$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x=3\pm4$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x=3+4$ or $x=3-4$	افصل الحلول.
$=7$ $\quad$ $=-1$	الحلّان هما 7 و -1.

تمرين موجّه

2. حِل $x^2-12x+3=8$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية لا يكون المعامل الرئيسي فيها 1، قسِّم كل حد على المعامل. وبعد ذلك افصل الحدين x^2 و x وأكمل المربع.

مثال 3 معادلة مع $a \neq 1$

حُلّ المعادلة: $-2x^2+8x-18=0$ بإكمال المربع.

$-2x^2+8x-18=0$	المعادلة الأصلية
$\frac{-2x^2+8x-18}{-2}=\frac{0}{-2}$	اقسم كل طرف على -2.
$x^2-4x+9=0$	بسّط.
$x^2-4x=-9$	اطرح 9 من كل طرف.
$x^2-4x+4=-9+4$	نظرًا لأن $\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$، فأضف 4 إلى كل طرف.
$(x-2)^2=-5$	حلل إلى العوامل x^2-4x+4.

لا توجد أعداد حقيقية لها مربع سالب. إذن، هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية.

انتبه!
المعامل الرئيسي تذكر أن المعامل الرئيسي يجب أن يكون 1 قبل أن تكمل المربع.

تمرين موجّه

3. حُلّ المعادلة: $3x^2-9x-3=21$ بإكمال المربع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

مثال من الحياة اليومية 4 استخدام التمثيل البياني لدالة تربيعية

التمصان الرياضية يشتري طلاب السنة الأخيرة في مدرسة ثانوية قمصانًا رياضية لارتدائها من أجل ألعاب كرة القدم. يمكن تمثيل تكلفة القمصان بالمعادلة $C = 0.1x^2 + 2.4x + 25$، حيث C هو المبلغ الذي يكلفه شراء عدد x من القمصان. فكم عدد القمصان التي بإمكانهم شراؤها مقابل 430 AED؟

يمتلك طلاب السنة الأخيرة 430 AED، لذا اجعل المعادلة تساوي 430 وأكمل المربع.

$0.1x^2 + 2.4x + 25 = 430$	المعادلة الأصلية
$\frac{0.1x^2 + 2.4x + 25}{0.1} = \frac{430}{0.1}$	اقسم كل طرف على 0.1.
$x^2 + 24x + 250 = 4300$	بسّط.
$x^2 + 24x + 250 - 250 = 4300 - 250$	اطرح 250 من كل طرف.
$x^2 + 24x = 4050$	بسّط.
$x^2 + 24x + 144 = 4050 + 144$	نظرًا لأن $\left(\frac{24}{2}\right)^2 = 144$، فأضف 144 إلى كل طرف.
$x^2 + 24x + 144 = 4194$	بسّط.
$(x + 12)^2 = 4194$	حلل إلى العوامل $x^2 + 24x + 144$.
$x + 12 = \pm\sqrt{4194}$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x = -12 \pm \sqrt{4194}$	اطرح 12 من كل طرف.

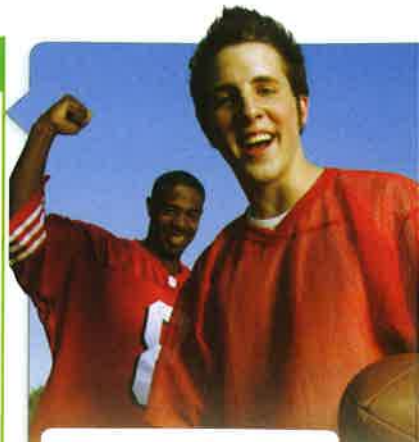
استخدم حاسبة لتقريب كل قيمة x.

$x = -12 - \sqrt{4194}$ أو $x = -12 + \sqrt{4194}$	افصل الحلول.
≈ -76.8 أو ≈ 52.8	أوجد قيمة.

بما أنه لا يمكنك شراء عدد سالب من القمصان الرياضية، فإن الحل السالب غير منطقي. يمكن لطلاب السنة الأخيرة تحمل شراء 52 قميصًا رياضيًا.

تمرين موجّه

4. إذا كان طلاب السنة الأخيرة قادرين على زيادة المبلغ إلى 620 AED، فكم عدد القمصان التي باستطاعتهم شراؤها؟



الربط بالحياة اليومية

تقع منافسة أقدم المدارس الثانوية العامة بين مدرسة ويلزلي الثانوية ومدرسة مرتفعات نيدهام الثانوية في ماساتشوستس. وقد وقعت أول مباراة كرة قدم بينهما في عام 1882 في نيدهام.

المصدر: صحيفة USA Football

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعًا كاملاً.**

1. $x^2 - 18x + c$
2. $x^2 + 22x + c$
3. $x^2 + 9x + c$
4. $x^2 - 7x + c$

المثالان 2-3 **حُلّ كل معادلة بإكمال المربع. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5. $x^2 + 4x = 6$
6. $x^2 - 8x = -9$
7. $4x^2 + 9x - 1 = 0$
8. $-2x^2 + 10x + 22 = 4$

مثال 4

9. تمثيل النماذج يبني طارق شرفةً خشبية خلف منزل عائلته. ولديه ما يكفي من الخشب لتصبح مساحة الشرفة 144 مترًا مربعًا. ويجب أن يكون طول الشرفة أكبر من عرضها بـ10 أمتار. فما الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الشرفة؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعًا كاملاً.**

10. $x^2 + 26x + c$
11. $x^2 - 24x + c$
12. $x^2 - 19x + c$
13. $x^2 + 17x + c$
14. $x^2 + 5x + c$
15. $x^2 - 13x + c$
16. $x^2 - 22x + c$
17. $x^2 - 15x + c$
18. $x^2 + 24x + c$

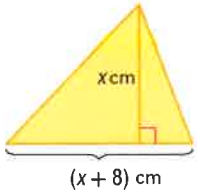
المثالان 3-2 **حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

19. $x^2 + 6x - 16 = 0$
20. $x^2 - 2x - 14 = 0$
21. $x^2 - 8x - 1 = 8$
22. $x^2 + 3x + 21 = 22$
23. $x^2 - 11x + 3 = 5$
24. $5x^2 - 10x = 23$
25. $2x^2 - 2x + 7 = 5$
26. $3x^2 + 12x + 81 = 15$
27. $4x^2 + 6x = 12$
28. $4x^2 + 5 = 10x$
29. $-2x^2 + 10x = -14$
30. $-3x^2 - 12 = 14x$

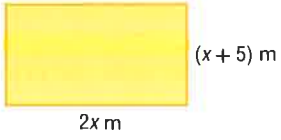
مثال 4 31. **المعرفة المالية** يمكن تمثيل السعر p بالدرهم الإماراتي لسهمٍ معين عن طريق المعادلة التربيعية $p = 3.5t - 0.05t^2$، حيث t تمثل عدد الأيام بعد شراء السهم. إذن، متى تكون قيمة السهم AED 60؟

الهندسة أوجد قيمة x لكل شكل. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

32. $A = 45\ \text{cm}^2$



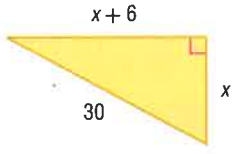
33. $A = 110\ \text{m}^2$



34. **نظرية الأعداد** ناتج ضرب عددين صحيحين زوجيين متتاليين هو 224. أوجد الأعداد الصحيحة.

35. **الدقة** ناتج ضرب عددين صحيحيين فرديين سالبين متتاليين هو 483. أوجد الأعداد الصحيحة.

36. **الهندسة** أوجد مساحة المثلث أدناه.



حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

37. $0.2x^2 - 0.2x - 0.4 = 0$
38. $0.5x^2 = 2x - 0.3$
39. $2x^2 - \frac{11}{5}x = -\frac{3}{10}$
40. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{6}$
41. $\frac{1}{4}x^2 + 2x = \frac{3}{8}$
42. $\frac{2}{5}x^2 + 2x = \frac{1}{5}$

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

43. **علم الفلك** يُعطَى ارتفاع جسمٍ ما عند t من الثواني بعد سقوطه بالعلاقة $h = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$، حيث h_0 هو الارتفاع الابتدائي و g هو التسارع بسبب الجاذبية. يكون التسارع بسبب الجاذبية قرب سطح المريخ $3.73\ m/s^2$، بينما يكون على الأرض $9.8\ m/s^2$. افترض أن جسمًا يسقط من ارتفاع ابتدائي يبلغ 120 مترًا فوق سطح كل كوكب.

a. على سطح أي كوكب سيصل الجسم أولاً؟

b. كم المدة التي سيستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض على كل كوكب؟ قرّب كل إجابة لأقرب جزء من عشرة.

c. هل تبدو الأزمنة التي يستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض منطقيةً؟ اشرح استنتاجك.

44. أوجد جميع قيم c التي تجعل $x^2 + cx + 100$ ثلاثي حدود مربع كامل.

45. أوجد جميع قيم c التي تجعل $x^2 + cx + 225$ ثلاثي حدود مربع كامل.

46. **الرسم** قبل أن تبدأ شيماء برسم صورة، تمُد قماشها على إطارٍ خشبي. يبلغ طول الإطار 60 سنتيمترًا وعرضه 4 سنتيمترات. ولديها ما يكفي من القماش لتغطية 480 سنتيمترًا مربعًا. وتقرر شيماء زيادة أبعاد الإطار. فإذا كانت الزيادة في الطول 10 أضعاف الزيادة في العرض، فما هي الأبعاد التي يكون عليها الإطار؟ 6 سنتيمترات في 80 سنتيمترًا.

47. **التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف خاصية المعادلات التربيعية.**

a. جدوليًّا انسخ الجدول الموضح وأكمل العمود الثاني.

b. جبريًّا اجعل كل ثلاثي حدود يساوي الصفر، وحُلّ المعادلة بإكمال المربع. أكمل العمود الأخير للجدول بعدد الجذور لكل معادلة.

c. لفظيًّا قارن عدد الجذور لكل معادلة بالناتج في العمود $b^2 - 4ac$. هل هناك علاقة بين هذه القيم؟ إذا كان كذلك، صف هذه العلاقة.

d. تحليليًّا توقع عدد الحلول التي ستكون للمعادلة $2x^2 - 9x + 15 = 0$. تحقق من توقع عن طريق حل المعادلة.

ثلاثي حدود	$b^2 - 4ac$	عدد الجذور
$x^2 - 8x + 16$	0	1
$2x^2 - 11x + 3$		
$3x^2 + 6x + 9$		
$x^2 - 2x + 7$		
$x^2 + 10x + 25$		
$x^2 + 3x + 12$		

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **المثابرة** بمعرفة $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$، اشتق المعادلة لمحور التماثل بإكمال المربع وإعادة كتابة المعادلة بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.

49. **الاستنتاج** حدد عدد الحلول الموجودة في $x^2 + bx = c$ إذا كان $c < -\left(\frac{b}{2}\right)^2$. اشرح.

50. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟** حدّد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}$ | $n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$ | $n^2 + n + \frac{1}{4}$ | $n^2 - n + \frac{1}{4}$

51. **مسألة غير محددة بإجابة** اكتب معادلة تربيعية يكون الحل الوحيد لها 4.

52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين الاستراتيجيات التالية لحل $x^2 - 5x - 7 = 0$: إكمال المربع والتمثيل البياني والتحليل إلى العوامل.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

53. يبلغ طول المستطيل 3 أضعاف عرضه. وتبلغ مساحة المستطيل 75 سنتيمترًا مربعًا. أوجد طول المستطيل بالسنتيمترات.

A 25 B 15 C 10 D 5

54. الاحتمال في أحد المهرجانات، يسحب الفائزون في إحدى الألعاب قطعة نقود كجائزة. وتوجد قطعة نقود واحدة لكل جائزة. وتتضمن الجوائز 9 تذاكر أفلام، و 8 ألعاب محشوة، و 5 قبعات، و 10 حبال قفز، و 4 قلائد لامعة. فما احتمال أن يفوز أول شخص يسحب قطعة نقدية بتذكرة أفلام؟

F $\frac{1}{36}$ G $\frac{1}{9}$ H $\frac{9}{61}$ J $\frac{1}{4}$

55. إجابة شبكية يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن عن طريق $P = 22{,}000 + 125t$. حيث P تمثل عدد السكان و t تمثل عدد السنوات من عام 2000. فكم عدد السنوات بعد عام 2000 سيكون عدد السكان 26000؟

56. يعمل عبد الكريم بتوصيل البيتزا لدى مطعم بيتزا كينج. ويتقاضى AED 6 في الساعة بالإضافة إلى AED 2.50 لكل بيتزا يوصلها. وكسب عبد الكريم AED 280 الأسبوع الماضي. فإذا عمل ما مجموعه 30 ساعةً، فكم عدد قطع البيتزا التي قام بتوصيلها؟

A 250 قطعة بيتزا
B 184 قطعة بيتزا
C 40 قطعة بيتزا
D 34 قطعة بيتزا

مراجعة شاملة

صِف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبطٌ بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 3–1)

57. $g(x) = -12 + x^2$

58. $h(x) = (x + 2)^2$

59. $g(x) = 2x^2 + 5$

60. $h(x) = \frac{2}{3}(x - 6)^2$

61. $g(x) = 6 + \frac{4}{3}x^2$

62. $h(x) = -1 - \frac{3}{2}x^2$

63. ألعاب الملاهي تنقل لعبة شعبية في مدينة الملاهي الركاب إلى قمة برج تبلغ 250 مترًا ثم تنزلهم. ومعادلة ارتفاع الراكب هي $h = -16t^2 + 250$. حيث h هو الارتفاع t هو الزمن بالثواني. وتوقف اللعبة نزول الراكب على ارتفاع 40 مترًا من الأرض. أكتب معادلة تمثل نزول الراكب. كم الوقت المستغرق للهبوط من 25 مترًا إلى 40 مترًا؟ (الدرس 2–1)

صِف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبطٌ بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 3–1)

64. $g(x) = x^2 - 8$

65. $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

66. $h(x) = -x^2 + 5$

67. $g(x) = (x + 10)^2$

68. $g(x) = -2x^2$

69. $h(x) = -x^2 - \frac{4}{3}$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة $\sqrt{b^2 - 4ac}$ لكل مجموعة من القيم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

70. $a = 2, b = -5, c = 2$

71. $a = 1, b = 12, c = 11$

72. $a = -9, b = 10, c = -1$

73. $a = 1, b = 7, c = -3$

74. $a = 2, b = -4, c = -6$

75. $a = 3, b = 1, c = 2$

McGraw-Hill Education is a division of McGraw-Hill Education. جميع الحقوق محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-3 مختبر الجبر
أوجد القيمة العظمى أو الصغرى

في الدرس 1-3، تعرفنا على صيغة رأس المعادلة لدالة تربيعية. وسوف تتعلم كيفية كتابة المعادلات بصيغة الرأس واستخدامها لتحديد السمات الرئيسية للتمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

النشاط 1 إيجاد الحد الأدنى

اكتب $y = x^2 + 4x - 10$ بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصفار. ثُمَّ مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس.

$y = x^2 + 4x - 10$ الدالة الأصلية

$y + 10 = x^2 + 4x$ أضف 10 إلى كل طرف

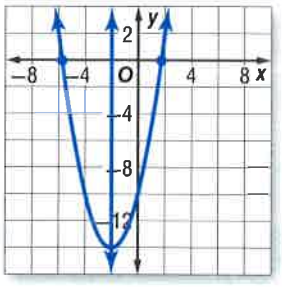
$y + 10 + 4 = x^2 + 4x + 4$ نظرًا لأن $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$، فأضف 4 إلى كل طرف

$y + 14 = (x + 2)^2$ حلل إلى العوامل $x^2 + 4x + 4$

$y = (x + 2)^2 - 14$ اطرح 14 من كل طرف لكتابة بصيغة الرأس

الخطوة 2 حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. يقع الرأس عند (h, k) أو $(-2, -14)$. ونظرًا لأنه لا توجد إشارة سالبة قبل الحد x^2، فإن القطع المكافئ يَفتَح لأعلى ويبلغ الحد الأدنى عند $(-2, -14)$.
معادلة محور التماثل هي $x = -2$.

الخطوة 3 أوجد حل x لإيجاد الأصفار.



$(x + 2)^2 - 14 = 0$ صيغة الرأس. $y = 0$

$(x + 2)^2 = 14$ أضف 14 إلى كل طرف.

$x + 2 = \pm\sqrt{14}$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$x \approx -5.74$ or 1.74 اطرح 2 من كل طرف.

القيم الصفرية هي -5.74 و 1.74 تقريبًا.

الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتمثيل الدالة بيانيًا.

قد يكون هناك معامل سلبي قبل الحد التربيعي. عندما يكون الأمر هكذا، فإن القطع المكافئ سوف يَفتَح لأسفل ويبلغ الحد الأقصى.

النشاط 2 إيجاد الحد الأقصى

اكتب $y = -x^2 + 6x - 5$ بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصفار. ثُمَّ مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$y = -x^2 + 6x - 5$ الدالة الأصلية

$y + 5 = -x^2 + 6x$ أضف 5 لكل طرف.

$y + 5 = -(x^2 - 6x)$ حلل إلى العوامل -1.

$y + 5 - 9 = -(x^2 - 6x + 9)$ فأضف -9 إلى ف طرف، نظرًا لأن $\left(\frac{6}{2}\right)^2 =$

$y - 4 = -(x - 3)^2$ حلل إلى العوامل $x^2 - 6x + 9$.

$y = -(x - 3)^2 + 4$ أضف 4 إلى كل طرف للكتابة بصيغة الرأس.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 2 حدد محور التماثل والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. تقع الرأس عند (h, k) أو (3, 4). وحيث إنه لا يوجد إشارة سالبة قبل الحد x^2 فإن القطع المكافئ مفتوح لأسفل ويبلغ الحد الأقصى عند (3, 4). ومعادلة محور التماثل هي $x = 3$.

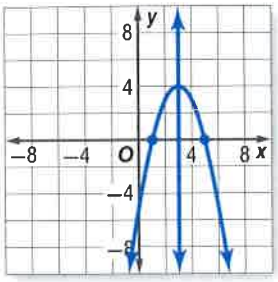
الخطوة 3 أوجد حل x لإيجاد الأصفار.

$0 = -(x - 3)^2 + 4$ صيغة الرأس. $y = 0$

$(x - 3)^2 = 4$ أضف $(x - 3)^2$ إلى كل طرف.

$x - 3 = \pm 2$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$x = 5$ or 1 أضف 3 لكل طرف.



الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتمثيل الدالة بيانيًا.

تحليل النتائج

1. لماذا تحتاج إلى إكمال المربع لكتابة معادلة دالة تربيعية بصيغة الرأس؟

اكتب كل معادلة بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصفار. ثمّ مثل الدالة بيانيًا.

2. $y = x^2 + 6x$

3. $y = x^2 - 8x + 6$

4. $y = x^2 + 2x - 12$

5. $y = x^2 + 6x + 8$

6. $y = x^2 - 4x + 3$

7. $y = x^2 - 2.4x - 2.2$

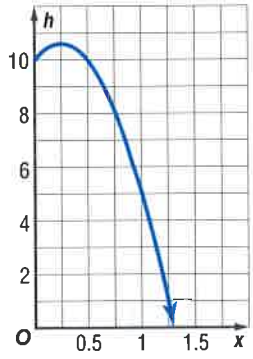
8. $y = -4x^2 + 16x - 11$

9. $y = 3x^2 - 12x + 5$

10. $y = -x^2 + 6x - 5$

النشاط 3 استخدام القيم القصوى في الحياة اليومية

الغوص **تقفز ليلى من منصة الغوص إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل الغوص في حوض السباحة. الدالة $h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$، حيث h هو ارتفاع الغواص بالأمتار فوق حوض السباحة بعد عدد t من الثواني تقريبيًا لغوص ليلى. مَثِّل الدالة بيانيًا، ثُمَّ أوجد الحد الأقصى للارتفاع الذي تصل إليه ومعادلة محور التماثل.**



الخطوة 1 مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 2 أكمِل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$

$h = -9.8(t - 0.25)^2 + 10.6125$

الخطوة 3 تقع الرأس عند (0.25, 10.6125)، لذا فإن أقصى ارتفاع هو 10.6125 متر.

معادلة محور التماثل هي $x = 0.25$.

تمرين

11. لعبة الكرة اللينة تُلقي مها كرةً في الهواء. وفقًا للدالة $h = -16t^2 + 40t + 5$، حيث h هو الارتفاع بالأمتار و t يمثل الزمن بالثواني تقريبيًا لرمية مها. مثّل الدالة بيانيًا، ثُمَّ أوجد أقصى ارتفاع للكرة ومعادلة محور التماثل. متى تصطدم الكرة بالأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار الوحدة الأول

الدروس من 1-1 إلى 1-3

استخدم جدول قيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. (الدرس 1-1)

1. $y = x^2 + 3x + 1$
2. $y = 2x^2 - 4x + 3$
3. $y = -x^2 - 3x - 3$
4. $y = -3x^2 - x + 1$

ادرس الدالة $y = x^2 - 5x + 4$. (الدرس 1-1)

5. اكتب معادلة محور التماثل.
6. أوجد إحداثيات الرأس. هل تمثل نقطة عُظمى أم صُغرى؟
7. مثّل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

8. **كرة القدم** تُركَل كرةٌ من مستوى سطح الأرض بسرعةٍ ابتدائية نحو الأعلى بمقدار 90 مترًا في الثانية. وتُعطِي المعادلة $h = -16t^2 + 90t$ ارتفاع الكرة h بعد عدد t من الثواني. (الدرس 1-1)
   a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟
   b. كم عدد الثواني التي ستستغرقها الكرة للوصول إلى أقصى ارتفاع لها؟
   c. متى يكون ارتفاع الكرة صفرًا؟ وماذا تمثل هذه النقاط في هذه الحالة؟

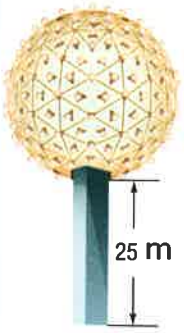
حُلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدِّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (الدرس 1-2)

9. $x^2 + 5x + 6 = 0$
10. $x^2 + 8 = -6x$
11. $-x^2 + 3x - 1 = 0$
12. $x^2 = 12$

13. **كرة القاعدة** يضرب جمال كرة القاعدة. وتُمثِّل المعادلة $h = -16t^2 + 120t$ ارتفاع الكرة h بالأمتار بعد t من الثواني. فكم تَبقى الكرة في الهواء؟ (الدرس 1-2)

14. **البناء** يُصلِح كريم السقف من سقيفة. وفجأةً أسقط صندوق المسامير من ارتفاع 14 مترًا. يمكن تمثيل هذا بالمعادلة $h = -16t^2 + 14$. حيث h هو الارتفاع بالأمتار و t هو الزمن بالثواني. صِف كيفية ارتباط التمثيل البياني بـ $h = t^2$. (الدرس 1-2)

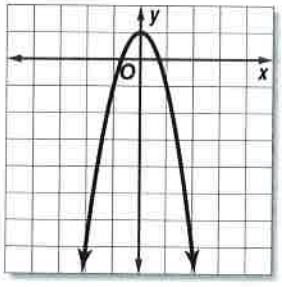
15. **الحفلات** يقيم والدا عبير حفلة تخرج من أجلها. في الساعة 10:00، سوف تنزلق كرة أسفل العمود بمقدار 25 مترًا وستضيء. والدالة التي تمثل السقوط هي $h = -t^2 + 5t + 25$. حيث h هو ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t من الثواني. فكم عدد الثواني التي ستستغرقها الكرة للوصول إلى قاع العمود؟ (الدرس 1-2)



صِف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبطٌ بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 1-2)

16. $g(x) = x^2 + 3$
17. $h(x) = 2x^2$
18. $g(x) = x^2 - 6$
19. $h(x) = \frac{1}{5}x^2$
20. $g(x) = -x^2 + 1$
21. $h(x) = -\frac{5}{8}x^2$

22. **الاختيار من متعدد** أيٌّ مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟ (الدرس 1-2)



A $y = -2x^2$

B $y = 2x^2 + 1$

C $y = x^2 - 1$

D $y = -2x^2 + 1$

حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 1-3)

23. $x^2 + 4x + 2 = 0$
24. $x^2 - 2x - 10 = 0$
25. $2x^2 + 4x - 5 = 7$

1-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل بيانات من الحياة اليومية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لتمثيل نقاط البيانات التي يمثل معها المنحنى الأفضل ملاءمة دالةً تربيعية.

الماء هناك زجاجة مملوءة بالماء. يسمح للمياه بالتسرب من خلال ثقب صنع بالقرب من قاع الزجاجة. ويوضح الجدول مستوى المياه y مقيسًا بالسنتيمترات من قاع الزجاجة بعد x ثوانٍ.

الزمن (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
مستوى المياه (cm)	42.6	40.7	38.9	37.2	35.8	34.3	33.3	32.3	31.5	30.8	30.4	30.1

أوجد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية.
حدد أي المعادلتين أفضل ملاءمة للبيانات.

النشاط

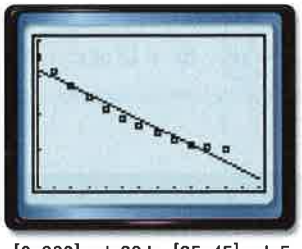
الخطوة 1 **أوجد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية.**

- أدخل الأزمنة في **L1** ومستويات المياه في **L2**. ثم أوجد معادلة انحدار خطية.

خطوات العملية على الحاسبة: *ارجع إلى الدرس 1-5.*

- استخدم **STAT PLOT** من أجل التمثيل البياني لمخطط انتشار..انسخ المعادلة إلى القائمة **Y=** ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة المخططات الإحصائية والتمثيل البياني لمعادلة انحدار في الدرس 1-5.*

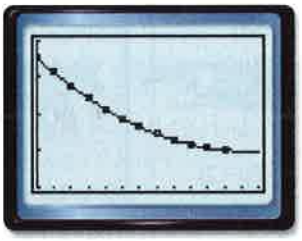


[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

الخطوة 2 **أوجد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار تربيعية.**

- أوجد معادلة الانحدار التربيعي. ثم انسخ المعادلة إلى القائمة **Y=** ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER Y= VARS 5 ▶ ▶ ENTER GRAPH



[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

لاحظ أن التمثيل البياني لمعادلة الانحدار الخطي يظهر مارًا بنقطتي بيانات فقط. ومع ذلك، يتناسب التمثيل البياني لمعادلة الانحدار التربيعي مع البيانات بشكل جيد جدًا.

التمارين

راجع الجدول.

ارتفاع قدم اللاعب عن الأرض

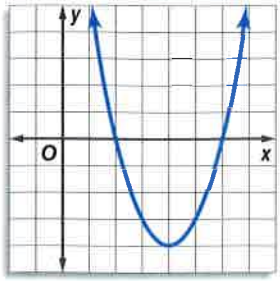
الزمن (s)	الطول cm.
0.1	3.04
0.2	5.76
0.3	8.16
0.4	10.24
0.5	12
0.6	13.44
0.7	14.56

1. أوجد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية للبيانات. حدد أي المعادلتين أفضل ملاءمة للبيانات.
2. قدّر ارتفاع قدم اللاعب بعد ثانية و 1.5 ثانية. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من معقولية تقديراتك.
3. قارن وبيّن الفرق بين التقديرات التي حصلت عليها في التمرين 2.
4. كيف يمكن لاختيار معادلة انحدار لا تتناسب مع البيانات بشكل جيد أن يؤثر على التنبؤات المقدمة باستخدام المعادلة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

السابق	الحالي	لماذا؟
• أوجدت العوامل المشتركة الكبرى لمجموعات الأعداد.	1 كتابة معادلات تربيعية بالصيغة القياسية لها. 2 حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل.	• الصيغة **المحللة إلى العوامل** من المعادلة التربيعية هي $a(x-p)(x-q)=0$. وفي المعادلة، تمثل q وp تقاطعات مع المحور x- على التمثيل البياني للمعادلة. تقاطعات المحور x للتمثيل البياني الموجود على اليمين هي 2 و 6. وفي هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحويل معادلة تربيعية في الصيغة المحللة إلى العوامل إلى الصيغة القياسية والعكس.



التمثيل البياني
2 و 6 هي
تقاطعات المحور x.

الصيغة القياسية: $0 = x^2 - 8x + 12$
الصيغة المحللة إلى العوامل: $0 = (x-6)(x-2)$
العوامل

المفردات الجديدة
صيغة محللة إلى العوامل factored form
طريقة فويل FOIL method

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الصيغة القياسية

يمكنك استخدام طريقة فويل لكتابة المعادلة التربيعية المكتوبة بالصيغة المحللة إلى العوامل بالصيغة القياسية. تستخدم **طريقة فويل** خاصية التوزيع لضرب ذوات الحدين.

المفهوم الأساسي طريقة فويل لضرب ذوات الحدين

الشرح لضرب اثنتين من ذواتي حدين، أوجد مجموع نواتج ضرب *F* "الحدود الأولى"، و *O* "الحدود الطرفية"، و *I* "الحدود الوسطى"، و *L* "الحدود الأخيرة".

أمثلة

ناتج ضرب الحدود الأخيرة	ناتج ضرب الحدود الوسطى	ناتج ضرب الحدود الطرفية	ناتج ضرب الحدود الأولى	
↓	↓	↓	↓	
$(-6)(-2)$	$+(-6)(x)$	$+(x)(-2)$	$+(x)(x)$	$=$

F O
I L

$= x^2 - 2x - 6x + 12$ or $x^2 - 8x + 12$

مثال 1 تحويل الجمل إلى معادلات.

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $-\frac{1}{3}$ و 6 كجذرين لها.

$(x-p)(x-q)=0$	اكتب النمط.
$\left[x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right](x-6)=0$	عوّض p بـ $-\frac{1}{3}$ و q بـ 6.
$\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-6)=0$	بسّط.
$x^2-\frac{17}{3}x-2=0$	اضرب.
$3x^2-17x-6=0$	اضرب كل طرف في 3 بحيث تكون b و c أعدادًا صحيحة.

تمرين موجّه

1. اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $\frac{3}{4}$ و -5 كجذرين لها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلات باستخدام التحليل إلى العوامل

حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل هو تطبيق على خاصية ناتج الضرب الصفري.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصفري

الشرح بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b، إذا كان $ab = 0$ فإن إما $a = 0$، أو $b = 0$، أو كلّ من a و b يساوي 0.

مثال إذا كان $(x + 3)(x - 5) = 0$، فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$.

مثال 2 تحليل العامل المشترك الأكبر

حُلّ المعادلة $16x^2 + 8x = 0$.

$16x^2 + 8x = 0$	المعادلة الأصلية.
$8x(2x) + 8x^2(1) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر.
$8x(2x + 1) = 0$	خاصية التوزيع
$8x = 0$ أو $2x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 0$ $\quad 2x = -1$	حل كلتا المعادلتين.
$x = -\frac{1}{2}$	

تمرين موجّه **حُلّ كل معادلة.**

2A. $20x^2 + 15x = 0$ **2B.** $4y^2 + 16y = 0$ **2C.** $6a^5 + 18a^4 = 0$

مراجعة المفردات

المربع الكامل هو عدد يكون جذره التربيعي موجبًا وعددًا صحيحًا

ثلاثيات الحدود وذوات الحدين التي تكون مربعات كاملة نوع خاص من قواعد التحليل إلى العوامل. ولاستخدام هذه القواعد، يجب أن تكون الحدود الأولى والأخيرة مربعات كاملة ويجب أن تكون الحدود الوسطى ضعف ناتج ضرب الجذور التربيعية للحدود الأولى والأخيرة.

مثال 3 المربعات الكاملة وفروق المربعات

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 16x + 64 = 0$

$x^2 = (x)^2; 64 = (8)^2$	الحدان الأول والأخير مربعان كاملان.
$16x = 2(x)(8)$	الحد الأوسط يساوي $2ab$.
$x^2 + 16x + 64$	معادلة ثلاثية حدود مربع كامل.
$x^2 + 16x + 64 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 8)^2 = 0$	حلل إلى العوامل باستخدام النمط.
$x + 8 = 0$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x = -8$	الحل.

b. $x^2 = 64$

$x^2 = 64$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 64 = 0$	اطرح 46 من كل طرف.
$x^2 - (8)^2 = 0$	اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
$(x + 8)(x - 8) = 0$	حلل فرق المربعات إلى العوامل.
$x + 8 = 0$ or $x - 8 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -8$ $\quad x = 8$	الحل.

نصيحة دراسية

الجذور التربيعية بالنظر، لاحظ أن الجذرين التربيعيين للعدد 64 هما 8− و 8. أيضًا، في المعادلة $x^2 = 4$، سيكون الحل 2− و 2.

تمرين موجّه

3A. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **3B.** $81x^2 - 9x = 0$ **3C.** $6a^2 - 3a = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يتم استخدام نمط خاص عند تحليل ثلاثية الحدود التي بصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل. أولاً، اضرب قيمتي a و c. ثم اوجد قيمتي m و p، بحيث يساوي ناتج ضربهما ac ويساوي مجموعهما b.

انظر في $ac = 6(-5) = -30$: $6x^2 + 13x - 5$.

عوامل العدد −30	المجموع	عوامل العدد −30	المجموع
1, −30	−29	−1, 30	29
2, −15	−13	−2, 15	13
3, −10	−7	−3, 10	7
5, −6	−1	−5, 6	1

يمكن الآن كتابة الحد الأوسط، $13x$، بالصيغة $-2x + 15x$.

يمكن الآن تحليل كثيرة الحدود هذه إلى العوامل من خلال التجميع.

$6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + mx + px - 5$ اكتب النمط.

$= 6x^2 - 2x + 15x - 5$ $m = -2$ و $p = 15$

$= (6x^2 - 2x) + (15x - 5)$ جمّع الحدود.

$= 2x(3x - 1) + 5(3x - 1)$ اخراج العامل المشترك الأكبر

$= (2x + 5)(3x - 1)$ خاصية التوزيع

نصيحة دراسية

البنية إذا كانت قيمتا m و p موجودتين، فعندئذٍ يمكن تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل دائمًا.

مثال 4 تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 9x + 20 = 0$

$ac = 20$ $a = 1, c = 20$

عوامل العدد 20	المجموع	عوامل العدد 20	المجموع
1, 20	21	−1, −20	−21
2, 10	12	−2, −10	−12
4, 5	9	−4, −5	−9

$x^2 + 9x + 20 = 0$ التعبير الأصلي

$x^2 + mx + px + 20 = 0$ اكتب النمط.

$x^2 + 4x + 5x + 20 = 0$ $m = 4$ و $p = 5$

$(x^2 + 4x) + (5x + 20) = 0$ جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.

$x(x + 4) + 5(x + 4) = 0$ اخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع.

$(x + 5)(x + 4) = 0$ خاصية التوزيع

$x + 5 = 0$ أو $x + 4 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = -5$ $x = -4$ حل كل معادلة.

نصيحة دراسية

ثلاثيات الحدود لا يهم إذا تم تبديل قيم m و p عند التجميع.

b. $6y^2 - 23y + 20 = 0$

$ac = 120$ $a = 6, c = 20$

$m = -8, p = -15$ $-8(-15) = 120; -8 + (-15) = -23$

$6y^2 - 23y + 20 = 0$ المعادلة الأصلية

$6y^2 + my + py + 20 = 0$ اكتب النمط.

$6y^2 - 8y - 15y + 20 = 0$ $m = -8$ و $p = -15$

$(6y^2 - 8y) + (-15y + 20) = 0$ جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.

$2y(3y - 4) - 5(3y - 4) = 0$ اخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع.

$(2y - 5)(3y - 4) = 0$ خاصية التوزيع

$2y - 5 = 0$ أو $3y - 4 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$2y = 5$ $3y = 4$

$y = \frac{5}{2}$ $y = \frac{4}{3}$ حل كلتا المعادلتين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

4A. $x^2 - 11x + 30 = 0$

4B. $x^2 - 4x - 21 = 0$

4C. $15x^2 - 8x + 1 = 0$

4D. $-12x^2 + 8x + 15 = 0$

مثال من الحياة اليومية 5 حلّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل

ألعاب القوى **يمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالقدم باستخدام المعادلة $h(t) = -16t^2 + 79t + 5$، حيث تعبر t عن الزمن بالثواني بعد رمي الرمح. كم يظل الرمح محلقاً في الهواء؟**

لتحديد المدة التي يستغرقها الرمح وهو في الهواء، نحتاج إلى معرفة متى يساوي الارتفاع 0.
يمكننا إجراء ذلك عن طريق حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$.

$-16t^2 + 79t + 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$m = 80; p = -1$	$-16(5) = -80,\ 80 \times (-1) = -80,\ 80 + (-1) = 79$
$-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$	اكتب النمط.
$(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$	جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.
$16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر من كل تجميع.
$(16t + 1)(-t + 5) = 0$	خاصية التوزيع
$16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$16t = -1$ $\quad -t = -5$	بحل كلتا المعادلتين.
$t = -\frac{1}{16}$ $\quad t = 5$	الحل.

تحقق لدينا حلان.

- الحل الأول سالب، وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، فيمكن استبعاد هذا الحل.
- الحل الثاني 5 ثوانٍ يبدو معقولاً للزمن الذي يستغرقه الرمح في الهواء.
- يمكن التأكد من الإجابة عن طريق التعويض في المعادلة الأصلية.

$$-16t^2 + 79t + 5 = 0$$
$$-16(5)^2 + 79(5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

ظل الرمح في الهواء لمدة 5 ثوانٍ.

تمرين موجّه

5. القفز بالحبال سجل جمال لشقيقه القفز بالحبل من ارتفاع 300 متر. في الوقت الذي رفع الحبل شقيقه مرة أخرى لأعلى، كان على ارتفاع 44 مترًا فوق سطح الأرض. إذا بدأ جمال التسجيل بمجرد سقوط شقيقه، كم من الوقت انقضى عندما ارتد الحبل مرة أخرى؟ استخدم المعادلة $f(t) = -16t^2 + c$، حيث c هي الارتفاع بالمتر.

الربط بالحياة اليومية

كسرت الكوبية أوسليديس ميينديز الرقم القياسي العالمي المسجل لرمي الرمح في عام 2002 بمسافة بلغت 71.52 مترًا.

المصدر: جريدة *New York Times*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.**

1. $-8, 5$
2. $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$
3. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$

الأمثلة 2-4 **حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

4. $35x^2 - 15x$
5. $18x^2 - 3x + 24x - 4$
6. $x^2 - 12x + 32$
7. $x^2 - 4x - 21$
8. $2x^2 + 7x - 30$
9. $16x^2 - 16x + 3$

مثال 5 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

10. $x^2 - 36 = 0$
11. $12x^2 - 18x = 0$
12. $12x^2 - 2x - 2 = 0$
13. $x^2 - 9x = 0$
14. $x^2 - 3x - 28 = 0$
15. $2x^2 - 24x = -72$

16. **الاستنتاج المنطقي** تريد حورية مضاعفة مساحة حديقتها عن طريق زيادة الطول والعرض بنفس المقدار. كم ستكون أبعاد حديقتها حينئذٍ؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.**

17. 7
18. $-5, \frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{5}, 6$

الأمثلة 2-4 **حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

20. $40a^2 - 32a$
21. $51c^3 - 34c$
22. $32xy + 40bx - 12ay - 15ab$
23. $3x^2 - 12$
24. $15y^2 - 240$
25. $48cg + 36cf - 4dg - 3df$
26. $x^2 + 13x + 40$
27. $x^2 - 9x - 22$
28. $3x^2 + 12x - 36$
29. $15x^2 + 7x - 2$
30. $4x^2 + 29x + 30$
31. $18x^2 + 15x - 12$
32. $8x^2z^2 - 4xz^2 - 12z^2$
33. $9x^2 - 25$
34. $18x^2y^2 - 24xy^2 + 36y^2$

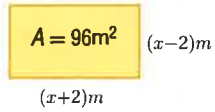
مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

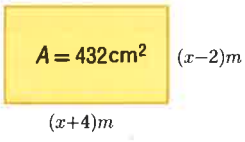
35. $15x^2 - 84x - 36 = 0$
36. $12x^2 + 13x - 14 = 0$
37. $12x^2 - 108x = 0$
38. $x^2 + 4x - 45 = 0$
39. $x^2 - 5x - 24 = 0$
40. $x^2 = 121$
41. $x^2 + 13 = 17$
42. $-3x^2 - 10x + 8 = 0$
43. $-8x^2 + 46x - 30 = 0$

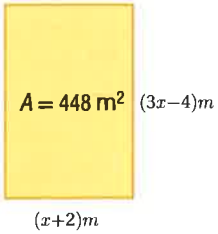
44. **الهندسة** يزيد طول وتر مثلث قائم الزاوية بمقدار 1 سنتيمتر عن طول أحد الأضلاع ويزيد 4 سنتيمترات عن ثلاثة أضعاف طول الضلع الآخر. أوجد أبعاد المثلث.

45. **نظرية الأعداد** أوجد عددين صحيحين زوجيين متتاليين ناتج ضربهما 624.

الهندسة أوجد قيمة x وأبعاد كل مستطيل.

46. 

47. 

48. 

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

49. $12x^2 - 4x = 5$

50. $5x^2 = 15x$

51. $16x^2 + 36 = -48x$

52. $75x^2 - 60x = -12$

53. $4x^2 - 144 = 0$

54. $-7x + 6 = 20x^2$

55. السينما تخطط إحدى الشركات لبناء مجمع سينمائي ضخم. أخبر المحلل المالي مديرها بأن دالة الربح لدار السينما الخاصة بهم كانت $P(x) = -x^2 + 48x - 512$. حيث إن x هي عدد شاشات العرض، و $P(x)$ هي الربح المكتسب بآلاف الدراهم. حدد مدى إنتاج شاشات العرض الذي يضمن أن الشركة لن تخسر المال.

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.

56. $-\frac{4}{7}, \frac{3}{8}$

57. 3.4, 0.6

58. $\frac{2}{11}, \frac{5}{9}$

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

59. $10x^2 + 25x = 15$

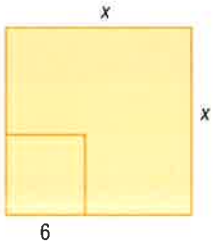
60. $27x^2 + 5 = 48x$

61. $x^2 + 0.25x = 1.25$

62. $48x^2 - 15 = -22x$

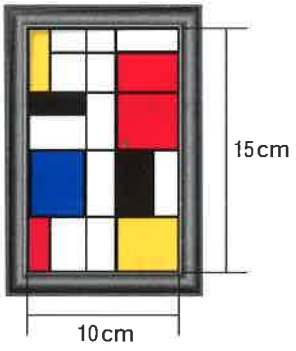
63. $3x^2 + 2x = 3.75$

64. $-32x^2 + 56x = 12$



65. التصميم تم قطع مربع من الشكل الموجود على اليمين. اكتب تعبيرًا عن مساحة الشكل المتبقي، ثم حلل التعبير إلى العوامل.

66. المثابرة بعد تحليل السوق، قامت إحدى الشركات التي تبيع المواقع الإلكترونية بتحديد ربحية منتجاتها من خلال تمثيلها بالمعادلة $P(x) = -16x^2 + 368x - 2035$. حيث إن x هي سعر كل موقع إلكتروني و $P(x)$ هي ربح الشركة. حدد مدى سعر المواقع الإلكترونية الذي معه تكون الشركة رابحة.



67. اللوحات تريد أسماء إضافة اطار إلى لوحتها، بحيث يكون موزعًا بالتساوي، ويكون له نفس مساحة اللوحة نفسها. ما هي أبعاد اللوحة مع إدراج الحد؟

68. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تدرس $a(x - p)(x - q) = 0$.

a. بيانيًا التمثيل البياني للدالة ذات الصلة مع $a = 1$، $p = 2$، و $q = -3$.

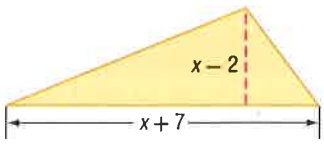
b. تحليليًا ما هي حلول المعادلة؟

c. بيانيًا التمثيل البياني للدوال ذات الصلة مع $a = 4$، -3، و $\frac{1}{2}$ على نفس التمثيل البياني.

d. لفظيًا ما أوجه التشابه والاختلاف بين التمثيلات البيانية؟

e. لفظيًا ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها حول العلاقة بين الصيغة المحللة إلى العوامل للمعادلة التربيعية وحلولها؟

69. الهندسة تبلغ مساحة المثلث 26 سنتيمترًا مربعًا. أوجد طول القاعدة.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © تحفوظة لصالح مؤسسة

70. كرة القدم عندما تُركل كرة قدم في الهواء، يمكن تمثيل الارتفاع بالأمتار فوق سطح الأرض من خلال المعادلة $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t$ والمسافة التي تقطعها من خلال المعادلة $d(t) = 16t$، حيث تعبر t عن الزمن بالثواني.

a. كم استغرقت الكرة في الهواء؟

b. ما المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟ *(إرشاد: تجاهل مقاومة الهواء.)*

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

71. $18a - 24ay + 48b - 64by$

72. $3x^2 + 2xy + 10y + 15x$

73. $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$

74. $12a^2 - 18ab + 30ab^3$

75. $32ax + 12bx - 48ay - 18by$

76. $30ac + 80bd + 40ad + 60bc$

77. $5ax^2 - 2by^2 - 5ay^2 + 2bx^2$

78. $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. تحليل الخطأ تحل كل من حورية وخديجة المعادلة $-12x^2 + 5x + 2 = 0$. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

حورية

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) - (3x + 2) = 0$

$(4x - 1)(3x + 2) = 0$

$x = \frac{1}{4}$ أو $-\frac{2}{3}$

خديجة

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) + (-3x + 2) = 0$

$(4x + 1)(-3x + 2) = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

80. تحدٍّ حل المعادلة $3x^6 - 39x^4 + 108x^2 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

81. تحدٍّ فيما يلي أدناه توضيح لقاعدة التحليل إلى العوامل فرق المكعبات. استخدم هذه القاعدة للتحليل إلى العوامل $40x^5 - 135x^2y^3$.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

82. مسألة غير محددة الإجابة اختر عددين صحيحين ثم اكتب معادلةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذرين. كيف ستتغير المعادلة إذا تم تغيير إشارة الجذرين؟

83. تحدٍّ في معادلة تربيعية لها الصيغة $(x - p)(x - q) = 0$، اثبت أن محور تماثل الدالة التربيعية ذات الصلة يقع في المنتصف بين نقطتي التقاطع مع المحور x وهما p و q.

84. اكتب سؤالاً يستخدم أحد الزملاء إستراتيجية خمن وتحقق لتحليل عوامل ثلاثيات الحدود $x^2 + bx + c$. اكتب سؤالاً لمساعدته على التفكير في طريقة لاستخدام هذه الإستراتيجية مع $ax^2 + bx + c$.

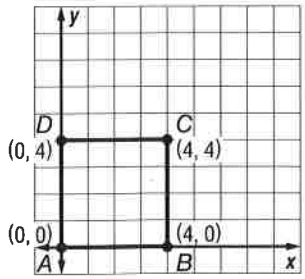
85. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

في معادلة تربيعية بالصيغة القياسية، يكون كل من a و b و c أعدادًا صحيحة.
إذا كانت b عددًا فرديًا، فلا يمكن أن تكون المعادلة التربيعية ثلاثية حدود مربع كامل.

86. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف تحلل عوامل ثلاثية حدود بالصيغة القياسية مع $a > 1$.

تدريب على الاختبار المعياري

87. إجابة قصيرة إذا تم تحويل $ABCD$ عن طريق $(x, y) \rightarrow (3x, 4y)$. فحدد مساحة $A'B'C'D'$.



88. في $y = 2|6 - 3x| + 4$، أي مجموعة تصف x عندما تكون $y < 6$؟

A $\left\{x \middle| \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}$

B $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3} \text{ or } x > \frac{7}{3}\right\}$

C $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3}\right\}$

D $\left\{x \middle| x > \frac{7}{3}\right\}$

89. الاحتمال يمكن أن تحتوي كلمة مرور مكونة من 5 أحرف على أعداد من 0 إلى 9 و 26 حرفًا من الحروف الأبجدية. ولا يمكن تكرار أي من الأحرف. ما احتمال أن تبدأ كلمة المرور بحرف ساكن؟

F $\frac{21}{26}$

G $\frac{21}{35}$

H $\frac{21}{36}$

J $\frac{5}{36}$

90. SAT/ACT إذا كان $c = \frac{8a^3}{b}$، ماذا يحدث لقيمة c عندما تتم مضاعفة كل من a و b؟

A. c لا تتغير.

B. c يتم تنصيف.

C. c تتم مضاعفة.

D. يتم ضرب c في 4.

E. يتم ضرب c في 8.

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 7-1)

91. $f(x) = |3x + 2|$

92. $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ if } x > -1 \\ x + 3 \text{ if } x \leq -1 \end{cases}$

93. $f(x) = [\![x + 1]\!]$

94. $f(x) = \left|\frac{1}{4}x - 1\right|$

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسية . (الدرس 6-1)

95. $\{(-2, 5), (-1, 3), (0, 1), (1, -1), (2, -3)\}$

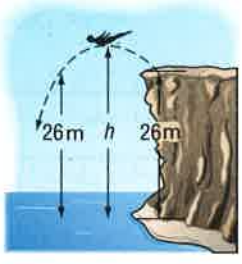
96. $\{(0, 0), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 0)\}$

97. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\right\}$

98. $\{(-3, 1), (-2, -5), (-1, -7), (0, -5), (1, 1)\}$

99. المعرفة المالية حدّد مبلغ الاستثمار إذا تم استثمار 250 درهمًا بنسبة مرابحة قدرها 7.3% تُركب بمعدل ربع سنوي لمدة 40 سنة. (الدرس 3-1)

100. الغوص لتجنب الاصطدام بأي صخور، تقفز غواصة بالقرب من منحدرات صخرية لأعلى وللخارج. وتوضح المعادلة $h = -16t^2 + 4t + 26$ ارتفاعها h بالمتر بعد t ثوانٍ من القفز. أوجد الزمن التي تعود فيه إلى ارتفاع 26 مترًا. (الدرس 2-1)



مراجعة المهارات

بسّط.

101. $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$

102. $\sqrt{8} \times \sqrt{32}$

103. $2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

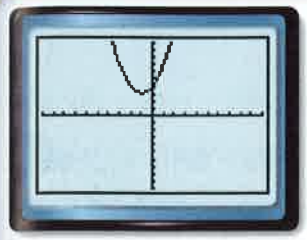
الدرس 1-5

الأعداد المركبة

السابق:
- قمت بتبسيط الجذور التربيعية.

الحالي:
1 إجراء العمليات باستخدام أعداد تخيلية بحتة.
2 إجراء العمليات باستخدام أعداد مركبة.

لماذا؟
- انظر إلى الرسم البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ الموجود على اليمين. لاحظ كيف أن هذا الرسم البياني لا توجد به تقاطعات على المحور x وبالتالي ليس به أي جذور. هل يعني هذا أنه ليس هناك حلول للمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$؟



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

استخدم ميزة **Solver** (أداة الحل) الموجودة في قائمة MATH (الرياضيات) بحاسبة التمثيل البياني. أدخل المعادلة وحدد $x = 2$ باعتبارها تخمينك للحل.

اضغط على ENTER ALPHA وسوف تحاول الآلة الحاسبة حل المعادلة. وتشير الحاسبة من خلال رسالة الخطأ إلى عدم وجود حل. لذلك لا توجد حلول حقيقية. ومع ذلك، توجد حلول تخيلية.

المفردات الجديدة

الوحدة التخيلية
imaginary unit
عدد تخيلي بحت
pure imaginary number
عدد مركب
complex number
مترافقات مركبة
complex conjugates

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 الأعداد التخيلية البحتة

لقد عملت في دراستك للرياضيات حتى الآن بأعداد حقيقية. وقد قادت المعادلات مثل المعادلة الواردة أعلاه علماء الرياضيات إلى تحديد أعداد تخيلية. ويتم تعريف **الوحدة التخيلية** بالعلاقة $i^2 = -1$. ويمثل العدد i الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 أي أن $i = \sqrt{-1}$.

تسمى الأعداد التي بالصيغة $6i$، و $-2i$، و $i\sqrt{3}$ **الأعداد التخيلية البحتة**. والأعداد التخيلية البحتة هي جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. لأي عدد حقيقي موجب b، و $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط.

a. $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b. $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6} \\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{-18}$

1B. $\sqrt{-125}$

خاصية التبديل وخاصية التجميع للضرب صحيحتان مع الأعداد التخيلية البحتة. موضح أدناه القوى الأسيّة القليلة الأولى لـ i أدناه.

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

بسّط.

a. $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ اضرب.

$= -15(-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بسّط.

b. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$ $i = \sqrt{-1}$

$= i^2\sqrt{90}$ اضرب.

$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$ بسّط.

$= -3\sqrt{10}$ اضرب.

تمرين موجّه

2A. $3i \cdot 4i$ **2B.** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C.** i^{31}

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستخدام **خاصية الجذر التربيعي**. ومثل الفرق بين المربعات، يمكن تحليل مجموع مربعين إلى العوامل في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 3 المعادلة باستخدام الحلول التخيلية البحتة

حُلّ $x^2 + 64 = 0$.

الطريقة 1 خاصية الجذر التربيعي

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 = -64$

$x = \pm\sqrt{-64}$

$x = \pm 8i$

الطريقة 2 التحليل إلى العوامل

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 + 8^2 = 0$

$x^2 - (-8^2) = 0$

$(x + 8i)(x - 8i) = 0$

$(x + 8i) = 0$ or $(x - 8i) = 0$

$x = -8i$ $x = 8i$

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

3A. $4x^2 + 100 = 0$ **3B.** $x^2 + 4 = 0$

مهنة من الحياة اليومية

المهندس الكهربائي

يصمم المهندسون الكهربائيون المعدات الكهربائية مثل مشغلات الموسيقى الرقمية والمحركات الكهربائية وأنظمة الإضاءة والرادار والملاحة ويطورون هذه المعدات ويختبرونها ويشرفون على صنعها. ويلزم الحصول على درجة البكالوريوس في الهندسة لجميع الوظائف الهندسية للخريجين الجدد تقريبًا.

2 العمليات باستخدام الأعداد المركبة

انظر إلى $3i + 2$ حيث إن 2 هو عدد حقيقي و 3i عدد تخيلي بحت، فالحدود ليست متشابهة ولا يمكن جمعها. ويعرف هذا النوع من التعابير باسم **العدد المركب**.

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

الشرح العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$، حيث a و b عددان حقيقيان وتكون i وحدة تخيلية. وتسمى a الجزء الحقيقي، وتسمى b الجزء التخيلي.

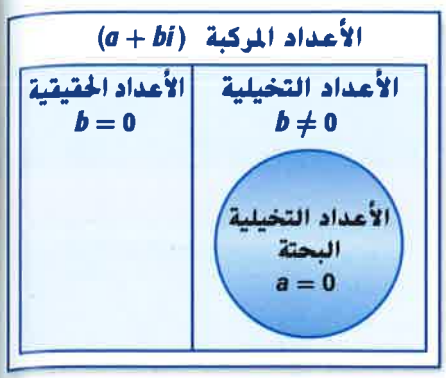
أمثلة $1 - 3i = 1 + (-3)i$ $5 + 2i$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يظهر مخطط فن مجموعة الأعداد المركبة.

- إذا كان $b = 0$، فإن العدد المركب عددًا حقيقيًا.
- إذا كان $b \neq 0$، فإن العدد المركب تخيليًا.
- إذا كان $a = 0$، فإن العدد المركب عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان فقط إذا تساوت الأجزاء الحقيقية لهما وتساوت الأجزاء التخيلية لهما. أي أن، إذا كان $a + bi = c + di$ و $a = c$ $b = d$.



نصيحة دراسية

الأعداد المركبة في حين أن الأعداد الحقيقية مركبة أيضًا، يشير مصطلح *العدد المركب* عادةً إلى عدد غير حقيقي.

مثال 4 معادلة الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x و y التي تجعل $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

اجعل الأجزاء الحقيقية مساوية لبعضها البعض والأجزاء التخيلية مساوية لبعضها البعض.

$3x - 5 = 7$	أجزاء حقيقية	$y - 3 = 6$	أجزاء حقيقية
$3x = 12$	أضف 5 إلى كل طرف.	$y = 9$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 3.		

تمرين موجّه

4. أوجد قيمتي x و y التي تجعل $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

تكون خواص التبديل والتجميع والتوزيع للضرب والجمع صحيحة مع الأعداد المركبة. فعند جمع أو طرح أعداد مركبة، اجمع بين الحدود المتماثلة. أي اجمع بين الأجزاء الحقيقية، واجمع بين الأجزاء التخيلية.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

بسّط.

a. $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$	خاصية التبديل وخاصية التجميع
$= 7 - 3i$	بسّط.

b. $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$	خاصية التبديل وخاصية التجميع
$= 1 - 2i$	بسّط.

تمرين موجّه

5A. $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B.** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

نصيحة دراسية

قراءة في الرياضيات يستخدم المهندسون الكهربائيون j كوحدة تخيلية لتجنب الالتباس مع i الخاصة بالتيار.

تستخدم الأعداد المركبة مع الكهرباء. وفي هذه المسائل، تمثل j عادةً وحدة تخيلية. في الدائرة ذات التيار المتردد، يمكن تمثيل الجهد والتيار ومقاومة أو ممانعة التيار، بأعداد مركبة. ولمضاعفة هذه الأعداد، استخدم طريقة فويل.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال من الحياة اليومية 6 ضرب الأعداد المركبة

الكهرباء في دائرة التيار المتردد، يكون الجهد V، والتيار C، والمقاومة I مرتبطين بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $2 + 4j$ أمبير والمقاومة $9 - 3j$ أوم.

$V = C \cdot I$	صيغة الكهرباء
$= (2 + 4j) \cdot (9 - 3j)$	$I = 9 - 3j$ و $C = 2 + 4j$
$= 2(9) + 2(-3j) + 4j(9) + 4j(-3j)$	طريقة فويل
$= 18 - 6j + 36j - 12j^2$	اضرب.
$= 18 + 30j - 12(-1)$	$j^2 = -1$
$= 30 + 30j$	اجمع.

يكون الجهد $30 + 30i$ فولت.

تمرين موجّه

6. أوجد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $4j - 2$ أمبير والمقاومة $2j - 3$ أوم.

الربط بالحياة اليومية

يعتبر فرع مصابيح الأعياد المتسلسلة مثالاً على دائرة التوالي. ويؤثر عدد المصابيح في الدائرة على قوة التيار مما يؤثر بالتالي على سطوع المصابيح.

المصدر: مجلة *Popular Science*

يُطلق على عددين مركبين في الصيغة $a + bi$ و$a - bi$ اسم **عددان مركبان مترافقان**. ودائمًا ما يكون ناتج ضرب المرافقات المركبة عدداً حقيقيًا. ويمكنك استخدام هذه الحقيقة لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

بسّط.

a. $\dfrac{2i}{3 + 6i}$

$\dfrac{2i}{3 + 6i} = \dfrac{2i}{3 + 6i} \cdot \dfrac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$6i + 3$ و $6i - 3$ مرافقان مركبان.
$= \dfrac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	اضرب.
$= \dfrac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \dfrac{6i + 12}{45}$	بسّط.
$= \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{15}i$	الصيغة $a + bi$

b. $\dfrac{4 + i}{5i}$

$\dfrac{4 + i}{5i} = \dfrac{4 + i}{5i} \cdot \dfrac{i}{i}$	اضرب في $\frac{i}{i}$.
$= \dfrac{4i + i^2}{5i^2}$	اضرب.
$= \dfrac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5}i$	الصيغة $a + bi$

تمرين موجّه

7A. $\dfrac{-2i}{3 + 5i}$

7B. $\dfrac{2 + i}{1 - i}$

نصيحة دراسية

التكنولوجيا يمكن إجراء العمليات على الأعداد المركبة باستخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus. استخدم الدالة 2nd [i] لإدخال التعبير. ثم اضغط على ENTER MATH ENTER لعرض الإجابة.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **بسّط.**

1. $\sqrt{-81}$
2. $\sqrt{-32}$
3. $(4i)(-3i)$
4. $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$
5. i^{40}
6. i^{63}

مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

7. $4x^2 + 32 = 0$
8. $x^2 + 1 = 0$

مثال 4 **أوجد قيمتي a و b التي تجعل كل معادلة صحيحة.**

9. $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$
10. $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

الأمثلة 5 و 7 **بسّط.**

11. $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$
12. $(7 + 4i) - (1 + 2i)$
13. $(6 - 8i)(9 + 2i)$
14. $(3 + 2i)(-2 + 4i)$
15. $\frac{3 - i}{4 + 2i}$
16. $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

مثال 6

17. **الكهرباء** يبلغ التيار في جزء من دائرة متوالية $3i + 5$- أمبير. ويبلغ التيار في جزء آخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي التيار في الدائرة.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **البنية** **بسّط.**

18. $\sqrt{-121}$
19. $\sqrt{-169}$
20. $\sqrt{-100}$
21. $\sqrt{-81}$
22. $(-3i)(-7i)(2i)$
23. $4i(-6i)^2$
24. i^{11}
25. i^{25}
26. $(10 - 7i) + (6 + 9i)$
27. $(-3 + i) + (-4 - i)$
28. $(12 + 5i) - (9 - 2i)$
29. $(11 - 8i) - (2 - 8i)$
30. $(1 + 2i)(1 - 2i)$
31. $(3 + 5i)(5 - 3i)$
32. $(4 - i)(6 - 6i)$
33. $\frac{2i}{1 + i}$
34. $\frac{5}{2 + 4i}$
35. $\frac{5 + i}{3i}$

مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

36. $4x^2 + 4 = 0$
37. $3x^2 + 48 = 0$
38. $2x^2 + 50 = 0$
39. $2x^2 + 10 = 0$
40. $6x^2 + 108 = 0$
41. $8x^2 + 128 = 0$

مثال 4 **أوجد قيم x و y التي تجعل كل معادلة صحيحة.**

42. $9 + 12i = 3x + 4yi$
43. $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$
44. $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$
45. $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$
46. $a + 3b + (3a - b)i = b + bi$
47. $(2a - 4b)i + a + 5b = 15 + 58i$

McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة لصالح مؤسسة

الأمثلة 5 و 7 **بسّط.**

48. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$
49. $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$
50. i^{41}
51. $(4 - 6i) + (4 + 6i)$
52. $(8 - 5i) - (7 + i)$
53. $(-6 - i)(3 - 3i)$
54. $\frac{(5 + i)^2}{3 - i}$
55. $\frac{6 - i}{2 - 3i}$
56. $(-4 + 6i)(2 - i)(3 + 7i)$
57. $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$
58. $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$
59. $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

مثال 6

60. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في جزء من دائرة متوالية $8i + 7$ أوم، وتبلغ المقاومة في جزء آخر من الدائرة $4i + 13$- أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

الكهرباء **استخدم الصيغة $V = C \cdot I$.**

61. يبلغ التيار في دائرة $6j + 3$ أمبير، وتبلغ المقاومة $5 - j$ أوم. كم يبلغ الجهد؟ $27j + 21$ فولت

62. يبلغ الجهد في دائرة $12i - 20$- فولت، وتبلغ المقاومة $4i + 6$- أوم. كم يبلغ التيار؟

63. أوجد مجموع $(4 + 5i)x^2 - ix + 7$ و $(2 + 6i)x - 8i - 3x^2$.

64. بسّط $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$.

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف المعادلات التربيعية التي فيها جذور مركبة.

أ. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $3i$ و $-3i$ كجذور لها.

ب. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء a عن طريق التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

ج. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $i + 2$ و $i - 2$ كجذور لها.

د. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء c عن طريق التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

هـ. **تحليليًا** كيف تعرف متى ستحتوي المعادلة التربيعية على حلول مركبة فقط؟ انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **النقد** تقوم أماني وميسون بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$. أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

أماني	ميسون
$24i^3 = -24$	$24i^3 = -24i$

67. **تحدٍّ** بسّط $(1 + 2i)^3$.

68. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا أو أحيانًا* أو *ليست صحيحة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

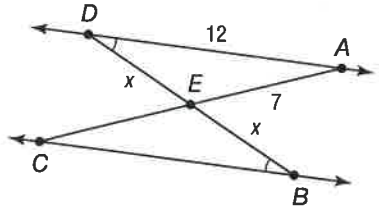
يحتوي كل عدد مركب على جزء حقيقي وجزء تخيلي.

69. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عددين مركبين ناتج ضربهما 20.

70. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية.

تدريب على الاختبار المعياري

71. إجابة موسعة انظر الشكل للإجابة على ما يلي.



أ. حدد مثلثين متطابقين من خلال ذِكر الرؤوس بالترتيب الصحيح.

ب. اشرح سبب تطابق المثلثين.

ج. ما طول $\overline{EC}$؟ اشرح إجراءاتك.

72. $= (3 + 6)^2$

A $2 \times 3 + 2 \times 6$
B 9^2
C $3^2 + 6^2$
D $3^2 \times 6^2$

73. SAT/ACT يتقاضى أحد المتاجر AED 49 للبنطلون. يزيد هذا السعر بنسبة 40% عن المبلغ الذي يتكلفه المتجر لشراء البنطلون. بعد التخفيضات، يسمح لأي موظف بشراء أي بنطلونات متبقية بخصم 30% من تكلفة المتجر. كم ستبلغ تكلفة شراء البنطلونات على الموظف بعد التخفيضات؟

F AED 10.50
G AED 12.50
H AED 13.72
J AED 24.50
K AED 35.00

74. ما قيمتي x و y عندما يكون $(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$؟

A $x = 6, y = 7$
B $x = 4, y = i$
C $x = 6, y = i$
D $x = 4, y = 7$

مراجعة شاملة

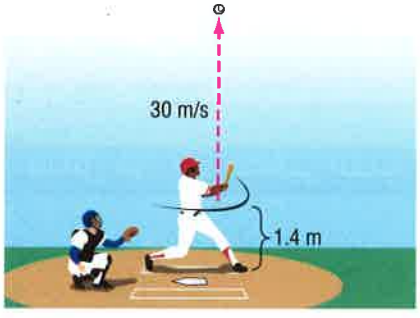
حُلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 2-1)

75. $2x^2 + 7x = 15$

76. $4x^2 - 12 = 22x$

77. $6x^2 = 5x + 4$

78. البيسبول ضرب لاعب بيسبول الكرة لأعلى بسرعة ابتدائية بلغت 30 مترًا في الثانية، وعلى ارتفاع 1.4 متر فوق سطح الأرض. يمثل ارتفاع الكرة $h(t)$ بالمتر والزمن t بالثواني بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.4$. ما مقدار الوقت لدى اللاعب المنافس للوصول أسفل الكرة إذا التقطها على ارتفاع 1.7 متر فوق سطح الأرض؟ هل تبدو إجابتك منطقية؟ اشرح. (الدرس 2-1)



79. الكهرباء تساوي المقاومة في أحد أجزاء دائرةٍ موصولةٍ على التوالي $3 + 4j$ من وحدة الأوم، وتساوي المقاومة في جزءٍ آخر من الدائرة $2 - 6j$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكليّة في الدائرة. (الدرس 3-1)

بسّط. (الدرس 3-1)

80. $(8 + 5i)^2$

81. $4(3 - i) + 6(2 - 5i)$

82. $\frac{5 - 2i}{6 + 9i}$

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 2-1)

83. $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

84. $-\frac{2}{5}, 6$

85. $-\frac{1}{4}, -\frac{6}{7}$

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود تربيعي كامل أم لا. اكتب نعم أو لا.

86. $x^2 + 16x + 64$

87. $x^2 - 12x + 36$

88. $x^2 + 8x - 16$

89. $x^2 - 14x - 49$

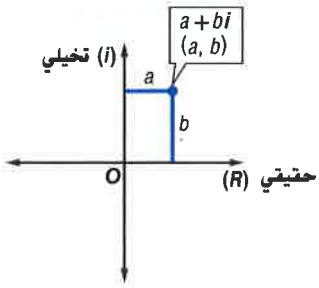
90. $x^2 + x + 0.25$

91. $x^2 + 5x + 6.25$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

1-5 المستوى المركب

يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ بيانيًا في **المستوى المركب** من خلال تمثيله باستخدام النقطة (a, b). وبصورة مشابهة للمستوى الإحداثي، يتكوّن المستوى المركب من محورين اثنين. تمثّل المركّبة الحقيقية على **المحور الحقيقي**، وهو الأفقي. وتمثّل المركّبة التخيلية على **المحور التخيلي**، وهو الرأسي. ويمكن الإشارة إلى المستوى المركّب أيضًا باسم **بمستوى أرجاند (ar GON)**.



مثال 1 التمثيل البياني في المستوى المركب

مثل بيانيًا $z = 3 + 4i$ في المستوى المركب.

الخطوة 1 مثّل z بالنقطة (a, b).

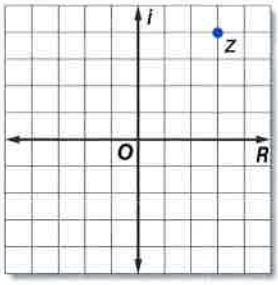
المركّبة الحقيقية a لـ z هي العدد 3.

المركّبة التخيّلية bi لـ z هي $4i$.

يمكن تمثيل z بالنقطة (a, b) أو $(3, 4)$.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا z في المستوى المركب.

أنشئ المستوى المركب وعيّن النقطة $(3, 4)$.



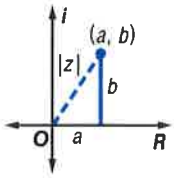
تذكّر أنه في الأعداد الحقيقية، تمثّل القيمة المطلقة مسافة العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبصورةٍ مماثلة، فإن **القيمة المطلقة لعددٍ مركب** هي مسافته عن نقطة الأصل في المستوى المركب. وعند تمثيل $a + bi$ بيانيًا في المستوى المركب، فإن القيمة المطلقة لـ $a + bi$ هي المسافة من (a, b) إلى نقطة الأصل. ويمكن إيجادها من خلال قانون المسافة.

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة للعدد المركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 القيمة المطلقة لعدد مركب

أوجد القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$.

الخطوة 1 حدّد قيمتي a و b.

المركبة الحقيقية a لـ z هي -5. والمركبة التخيلية bi لـ z هي $12i$.

وهكذا $a = -5$ و $b = 12$.

الخطوة 2 أوجد القيمة المطلقة لـ z.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ القيمة المطلقة لعدد مركب

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$ $b = 12$ و $a = -5$

$= \sqrt{169}$ or 13 بسّط.

القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$ هي 13.

يمكن بجمع الأعداد المركبة وطرحها بيانيًا.

مثال 3 التبسيط بالتمثيل البياني

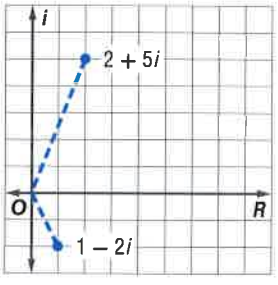
بسّط $(5i - 2) - (2i - 1)$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 اكتب $(5i - 2) - (2i - 1)$ بالصورة $(5i - 2) + (2 - 1i)$.

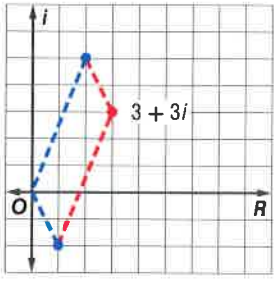
الخطوة 2 مثّل $2i - 1$ و $5i + 2$ بيانيًا على المستوى المركب نفسه. صِل كل نقطة بنقطة الأصل باستخدام قطعةٍ مستقيمةٍ متقطّعة.

الخطوة 3 أكمل متوازي الأضلاع الذي يضم القطعتين المستقيمتين بمثابة اثنين من أضلاعه. عيّن نقطةً يلتقي فيها الضلعان الإضافيان.

حلّ $(5i - 2) - (2i - 1)$ هو $3 + 3i$.



الخطوة 2



الخطوة 3

التمارين

مثّل كلّ عددٍ في المستوى المركب.

1. $z = 3 + i$
2. $z = -4 - 2i$
3. $z = 2 - 2i$

أوجد القيمة المطلقة لكل عدد مركب.

4. $z = -4 - 3i$
5. $z = 7 - 2i$
6. $z = -6 - i$

بسّط بالتمثيل البياني.

7. $(6 + 5i) + (-2 - 3i)$
8. $(8 - 2i) - (4 + 7i)$
9. $(5 + 6i) + (-4 + 3i)$

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

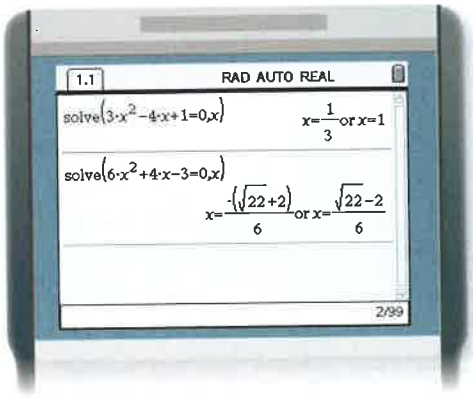
1-5B مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات التربيعية

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية المزودة بتقنية CAS لحل المعادلات التربيعية.

النشاط إيجاد الجذور

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** (حاسبة) جديدة.

الخطوة 2 اختر الأداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra**.

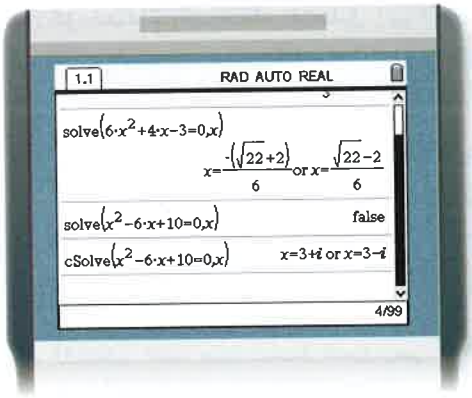
الخطوة 3 اكتب $3x^2 - 4x + 1 = 0$ متبوعةً بفاصلة، x، ثمّ اضغط **Enter** *(إدخال)*.
الحلّان هما $x = \frac{1}{3}$ أو $x = 1$.

b. $6x^2 + 4x - 3 = 0$

الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $6x^2 - 4x - 3 = 0$ متبوعةً بفاصلة، x، ثم *أدخل*.
الحلّان هما $x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$.

c. $x^2 - 6x + 10 = 0$.



الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $x^2 - 6x + 10 = 0$ متبوعةً بفاصلة، و x، ثم **enter** اضغط **Enter** (إدخال).
تُرجع الآلة الحاسبة القيمة *false* (خطأ)، وبعني ذلك أنه لا توجد حلول حقيقية.

الخطوة 3 في القائمة، اختر **Algebra** (الجبر)، ثمّ **Complex** (مركب)، ثمّ **Solve** (الحل). أعِد إدخال المعادلة.
الحلّان هما $x = 3 \pm i$.

تدريب

حُلّ كل من المعادلات التالية.

1. $x^2 - 2x - 24 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $0 = -3x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 - 2x + 5 = 0$
5. $0 = 4x^2 - 8$
6. $0 = 2x^2 - 4x + 1$
7. $x^2 + 3x + 8 = 5$
8. $25 + 4x^2 = -20x$
9. $x^2 - x = -6$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

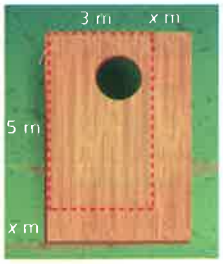
اختبار الوحدة الثاني
الدروس من 4-1 إلى 5-1

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 4-1)

1. 7, 2
2. 0, 3
3. −5, 8
4. −7, −8
5. −6, −3
6. 3, −4
7. $1, \frac{1}{2}$
8. **نظرية الأعداد** أوجد عددين صحيحين موجبين متتاليين ناتج ضربهما 624. (الدرس 4-1)
9. **الهندسة** يزيد طول مستطيلٍ بمقدار مترين عن عرضه. أوجد أبعاد المستطيل إذا علمت أن مساحته تساوي 63 مترًا مربعًا . (الدرس 4-1)

حُلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 3-1)

10. $x^2 - x - 12 = 0$
11. $3x^2 + 7x + 2 = 0$
12. $x^2 - 2x - 15 = 0$
13. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
14. اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية لها الجذران 6− و $\frac{1}{4}$. (الدرس 4-1)
15. **الألعاب** أنشأ عبيد منصةً للعبة رمي أكياس الفاصوليا. وكان بعدا المنصة الأصلية في المخططات 3 أمتارٍ في 5 أمتار. ولكنّه جعل منصّته أكبر بإضافة x متر إلى كل ضلع. مساحة المنصّة الجديدة تساوي 35 مترًا مربعًا. (الدرس 4-1)

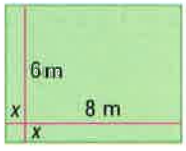


a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثل مساحة هذه المنصّة.

b. أوجد بعدي المنصّة التي صنعها جلال.

16. **المثلثات** أوجد أبعاد مثلثٍ إذا علمت أن قياس قاعدته يساوي $\frac{2}{3}$ من قياس ارتفاعه وتساوي مساحته 12 سنتيمترًا مربعًا. (الدرس 4-1)

17. **البناء** يركّب علي بلاطةً إسمنتيةً في فنائه الخلفي. وكان ينوي أن يكون للبلاطة الأصلية البعدان 8 أمتار في 6 أمتار. ولكنّه ارتأى أن يجعل بلاطته أكبر بإضافة x قدمًا إلى كل ضلع. تساوي مساحة البلاطة الجديدة 120 مترًا مربعًا. (الدرس 4-1)



a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثّل مساحة البلاطة الجديدة.

b. أوجد أبعاد البلاطة.

بسّط. (الدرس 5-1)

18. $\sqrt{-81}$
19. $\sqrt{-25x^4y^5}$
20. $(15 - 3i) - (4 - 12i)$
21. i^{37}
22. $(5 - 3i)(5 + 3i)$
23. $\frac{3 - i}{2 + 5i}$
24. تساوي المقاومة في أحد أجزاء دارةٍ موصولةٍ على التوالي $4j + 3$ من وحدة الأوم وتساوي المقاومة في جزءٍ آخر من الدارة $7j - 6$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكليّة في الدارة. (الدرس 5-1)

بسّط. (الدرس 5-1)

25. $(3 - 4i) - (9 - 5i)$
26. $\frac{4i}{4 - i}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

6-1 القانون العام والمميّز

السابق
- حللتَ معادلاتٍ بإكمال المربع.

الحالي
1. حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.
2. استخدام المميّز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها.

لماذا؟
- مسابقة منجنيق اليقطين فعاليةٌ يبني فيها المشترك منجنيقًا ويطلق يقطينةً على هدف.

يمكن تمثيل مسار اليقطينة بالدالة التربيعية $h = -4.9t^2 + 117t + 42$. وفيها h ارتفاع اليقطينة وt عدد الثواني.

لكي تتنبأ متى ستضرب اليقطينة الهدف، يمكنك حلّ المعادلة $0 = -4.9t^2 + 117t + 42$. كان سيتعذر حلّ هذه المعادلة باستخدام التحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني أو إكمال المربّع.

المفردات الجديدة
- **القانون العام** Quadratic Formula
- **المميّز** discriminant

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 القانون العام
لقد أوجدت حلول بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني وبالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي. وهناك أيضًا صيغةٌ يمكن استخدامها في حل أي معادلةٍ تربيعية. ويمكن اشتقاق هذه الصيغة من خلال حلّ الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية.

الحالة الخاصة		الحالة العامة
$2x^2 + 8x + 1 = 0$	المعادلة التربيعية القياسية	$ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$	اقسم كل طرف على a.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$	اطرح $\frac{c}{a}$ من كل طرف.	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	أكمل المربع.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
$(x+2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	حلل الطرف الأيسر إلى العوامل.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
$(x+2)^2 = \frac{7}{2}$	بسّط الطرف الأيمن.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$	خاصيّة الجذر التربيعي	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$	اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف.	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$	بسّط.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ على أنها **القانون العام**.

18.
20.
22.
25.
26.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

القانون العام رغم أن التحليل إلى العوامل قد يكون طريقة أسهل لحلّ بعض المعادلات، إلا أنه يمكن استخدام القانون العام لحلّ أي معادلة تربيعية.

المفهوم الأساسي القانون العام

الشرح تُعطى حلول المعادلات التربيعية ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$، من خلال القانون التالي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1 جذران نسبيان

حُلّ $x^2 - 10x = 11$ باستخدام القانون العام.

أولاً، اكتب المعادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ وحدّد a و b و c.

$$\begin{array}{rcl} & & ax^2 + bx + c = 0 \\ & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 - 10x = 11 & \rightarrow & 1x^2 - 10x - 11 = 0 \end{array}$$

بعد ذلك عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -10 وعن c بـ -11.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$$ اضرب.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{10 \pm 12}{2}$$ $\sqrt{144} = 12$

$$x = \frac{10 + 12}{2} \text{ or } x = \frac{10 - 12}{2}$$ اكتب في صورة معادلتين.

$$= 11 \qquad = -1$$ بسّط.

الحلّان هما -1 و 11.

التحقق عوّض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

1A. $x^2 + 6x = 16$

1B. $2x^2 + 25x + 33 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 الجذر النسبي الوحيد

حُلّ $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستخدام القانون العام.

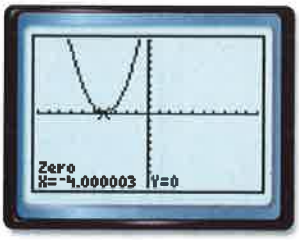
حدّد a و b و c. ثمّ عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 عن b بـ 8 عن c بـ 16.

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{-8}{2} \text{ or } -4$$ $\sqrt{0} = 0$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الحل يساوي -4.

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة ذات الصلة أنه لا يوجد حلّ عند $x = -4$.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

2A. $x^2 - 16x + 64 = 0$

2B. $x^2 + 34x + 289 = 0$

الربط بتاريخ الرياضيات

براهماغوبتا (598-668)

قدّم عالم الرياضيات الهندي براهماغوبتا الصيغة العامة الأولى لحل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx = c$، والتي تعرف الآن بالقانون العام.

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بالضبط من خلال كتابتها بالصيغة الجذرية.

مثال 3 الجذور غير النسبية

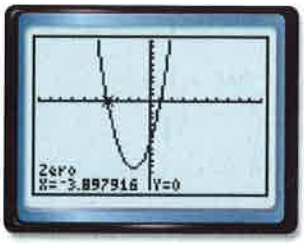
حُلّ $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ عوّض عن a بـ 2 وعن b بـ 6 وعن c بـ -7.

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بسّط.

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} \text{ أو } \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23}$ أو $2\sqrt{23}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الحلّان التقريبيان هما -3.9 و 0.9.

التحقق تحقق من هاتين النتيجتين باستخدام التمثيل البياني للدالة التربيعية ذات الصلة، $y = 2x^2 + 6x - 7$. باستخدام الدالة الصفرية **ZERO** في حاسبة التمثيل البياني، يكون صفرا الدالة ذات الصلة هما -3.9 و 0.9.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

3A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3B. $x^2 - 8x + 9 = 0$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

نصيحة دراسية
الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلولك بالصيغة a + bi. والتي تسمّى أحيانًا *الصيغة القياسية* للعدد المركب.

عند استخدام القانون العام، إذا كانت قيمة المجذور سالبة، فسيكون الحل مركبًا. وتبدو الحلول المركبة دائمًا في صورة أزواج مترافقة.

مثال 4 الجذور المركّبة

حُلّ $x^2 - 6x = -10$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

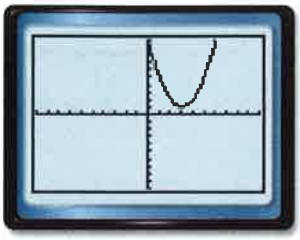
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -6 وعن c بـ 10.

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)}$ or $2i$

$$= 3 \pm i$$ بسّط.

الحلّان هما العددان المركبان $3 + i$ و $3 - i$.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة المرتبطة أن الحلّين مركّبان، ولكنه لا يساعدك في إيجادهما. وللتحقق من الحلّين المركّبين، عوّض بهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	القانون العام
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

4A. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

4B. $x^2 - 4x = -13$

2 الجذور والمميّز

انتبه في الأمثلة السابقة إلى العلاقات القائمة بين قيمة التعبير الواقع تحت الجذر وبين جذور المعادلة التربيعية. ويطلق على التعبير $b^2 - 4ac$ اسم **المميّز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← المميّز

يمكن استخدام المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها. ويلخّص الجدول في الصفحة التالية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن استخدام المميّز أيضًا للتحقق من عدد الحلول ونوعها بعد حلّ المعادلة.

عندما تكون قيمة المميز في القانون العام صفرًا، فيكون للمعادلة التربيعية بالضبط جذرٌ نسبيٌ وحيد.

مراجعة المفردات
المجذور هو القيمة الواقعة تحت رمز الجذر

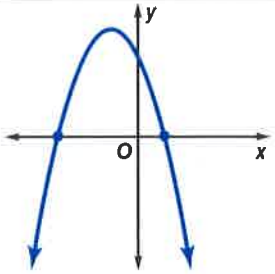
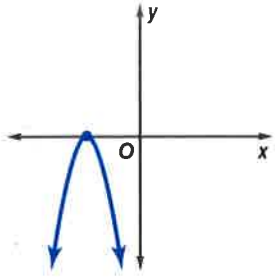
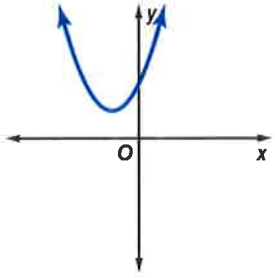
McGraw-Hill Education محفوظة لمالكها مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

نصيحة دراسية

الجذور تذكّر أن حلول أي معادلة تسمى *بالجذور* أو *الأصفار* وهي القيم التي يقطع عندها التمثيل البياني المحور الأفقي x.

المفهوم الأساسي المميّز

تأمل الدالة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a و b و c أعداد نسبية و $a \neq 0$.

قيمة المميّز	نوع الجذور وعددها	مثال عن تمثيل بياني لدالة مرتبطة
$b^2 - 4ac > 0$؛ $b^2 - 4ac$ مربّع كامل.	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$؛ $b^2 - 4ac$ ليس مربعًا كاملاً.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي نسبي واحد مكرر	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميّز لكل معادلة تربيعية. ثم صِف عدد الجذور ونوعها.

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب ، هناك جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي الصفر ، اذا هناك جذر نسبي واحد مكرر.

تمرين موجّه

5A. $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5B. $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

لقد درست مجموعةً من طرق حل المعادلات التربيعية. ويلخص الجدول أدناه هذه الطرق.

نصيحة دراسية

المفكّرة الدراسية قد ترغب في نسخ قائمة الطرق هذه على مفكّرة الرياضيات أو المطوية خاصتك للاحتفاظ بها بمثابة مرجعٍ أثناء دراستك.

ملخص المفهوم حلّ المعادلات التربيعية

الطريقة	يمكن استخدامها	متى تُستخدم
التمثيل البياني	أحيانًا	تُستخدم فقط إذا لم يكن الحلّ الدقيق مطلوبًا. وهي تستخدم على النحو الأفضل للتحقق من صحّة الحلول التي أوجدت جبريًا.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	تُستخدم إذا كان الحدّ الجبري الثابت صفرًا أو إذا كان من السهل تحديد العوامل. **مثال** $x^2 - 7x = 0$
خاصيّة الجذر التربيعي	أحيانًا	تُستخدم في المعادلات التي يساوي فيها المربع الكامل ثابتًا. **مثال** $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مفيدة في المعادلات ذات الصيغة $x^2 + bx + c = 0$، حيث b عدد زوجي. **مثال** $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	مفيدة عندما تخفق الطرق الأخرى أو تكون مملةً جدًا. **مثال** $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

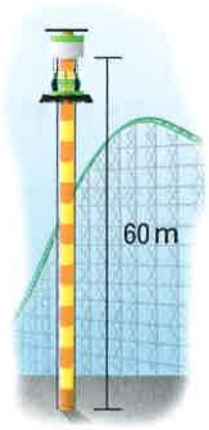
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-4 **حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.**

1. $x^2 + 12x - 9 = 0$
2. $x^2 + 8x + 5 = 0$
3. $4x^2 - 5x - 2 = 0$
4. $9x^2 + 6x - 4 = 0$
5. $10x^2 - 3 = 13x$
6. $22x = 12x^2 + 6$
7. $-3x^2 + 4x = -8$
8. $x^2 + 3 = -6x + 8$

المثالان 3 و 4

9. **تمثيل النماذج** تصعد إحدى ألعاب مدينة الملاهي بالراكبين إلى قمة برجٍ ثم تهبط بهم بسرعةٍ تصل إلى 80 مترًا في الثانية. للدالّة التي تمثّل هذه اللعبة الصيغة $h = -16t^2 - 64t + 60$، وحيث h الارتفاع بالأمتار و t الزمن بالثواني. كم ثانية يستغرق هبوط المركبة من ارتفاع 60 مترًا إلى ارتفاع 0 مترًا؟



مثال 5 **أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية.**

a. أوجد قيمة المميّز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

10. $3x^2 + 8x + 2 = 0$
11. $2x^2 - 6x + 9 = 0$
12. $-16x^2 + 8x - 1 = 0$
13. $5x^2 + 2x + 4 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأمثلة 1-4

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

14. $x^2 + 45x = -200$

15. $4x^2 - 6 = -12x$

16. $3x^2 - 4x - 8 = -6$

17. $4x^2 - 9 = -7x - 4$

18. $5x^2 - 9 = 11x$

19. $12x^2 + 9x - 2 = -17$

20. الغطس يقفز المتنافسون في مسابقةٍ للغطس من منصةٍ ارتفاعها 10 أمتار إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل أن يغطسوا في بركة السباحة أسفلهم. ويمكن تقدير ارتفاع الغاطس h بالأمتار فوق المسبح بعد t ثانيةً وفقا للمعادلة المعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a. حدّد المجال والمدى اللذين بهما تكون هذه الدالة منطقية.

b. متى يصطدم الغطاس بالماء؟

مثال 5

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميّز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

21. $2x^2 + 3x - 3 = 0$

22. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

23. $6x^2 + 5x - 1 = 0$

24. $6x^2 - x - 5 = 0$

25. $3x^2 - 3x + 8 = 0$

26. $2x^2 + 4x + 7 = 0$

27. $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

28. $x^2 - 6x = -9$

29. $-3x^2 - 7x + 2 = 6$

30. $-8x^2 + 5 = -4x$

31. $x^2 + 2x - 4 = -9$

32. $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

33. ألعاب الفيديو عندما كان طارق في المنزل، أحضر له صديقه خالد شريطًا للعبةٍ إلكترونية. وقف طارق عند نافذة غرفة النوم ووقف خالد تحت النافذة مباشرةً. فإذا رمى خالد شريط اللعبة إلى طارق بسرعةٍ ابتدائية تساوي 35 مترًا في الثانية، تعطى معادلة ارتفاع الشريط h بالقدم بعد t ثانيةً بالصيغة $h = -16t^2 + 35t + 5$.

a. إذا كان ارتفاع النافذة 25 مترًا فوق الأرض، فهل ستكون لدى طارق 0 أو 1 أو 2 من فرص التقاط شريط اللعبة؟

b. إذا لم يتمكن طارق من التقاط شريط اللعبة، فمتى سيصطدم بالأرض؟ ا

34. الاستنتاج المنطقي يصمّم مهندسون مدنيّون مقطعًا من طريقٍ سينخفض دون مستوى سطح البحر. ويمكن تمثيل منحنى الطريق بالمعادلة $y = 0.00005x^2 - 0.06x$، حيث x المسافةُ الأفقية بالأمتار بين النقطتين اللتين يكون عندهما الطريق عند مستوى سطح البحر و y تمثل الارتفاع. يريد المهندسون وضع لافتات للتوقف في المواضع التي يتساوى فيها ارتفاع الطريق مع مستوى سطح البحر. فما المسافة الأفقية التي سيضعون عندها لافتات التوقف؟

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميّز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

35. $5x^2 + 8x = 0$

36. $8x^2 = -2x + 1$

37. $4x - 3 = -12x^2$

38. $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

39. $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

40. $-4x^2 + 12 = -6x - 8$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العام	عدد الوفيات من بين كل 100000
2000	91.8
2002	89.7
2004	85.5
2010	60.3
2015	؟
2017	؟

التدخين لقد أدى تراجع التدخين في الولايات المتحدة الأمريكية إلى انخفاض في معدل الوفيات الناتجة عن سرطان الرئة. ويمكن تقدير عدد الوفيّات من بين كل 100000شخص y من وفقا للعلاقة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x يمثل عدد الأعوام بعد عام 2000.

a. احسب عدد الوفيّات من بين كل 100000 شخص لعامي 2015 و 2017.

b. استخدم القانون العام للحلّ لإيجاد x عند $y = 50$..

c. وفقا للدالة التربيعية، متى سيساوي معدل الوفيات صفرًا من بين كل 100000؟ وهل تعتقد أن هذا التنبؤ منطقي؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

42. نظرية الأعداد نحصل على المجموع S للأعداد الصحيحة المتتالية n ,... 3، 2، 1 من الصيغة $S = \frac{1}{2}n(n+1)$. كم عدد الأعداد الصحيحة المتتالية، بدءًا من 1، للوصول الى المجموع 666؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. التفكير النقدي يحدّد عبد الله وعبد العزيز عدد حلول المعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عبد الله

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

بما أن المميّز سالب، فليست هناك حلول حقيقية.

عبد العزيز

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

بما أن المميّز موجب، فهناك حلّان حقيقيان.

44. تحدٍّ أوجد حلول المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستخدام القانون العام.

45. الاستنتاج حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم أنها ليست صحيحةً على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. في معادلةٍ تربيعيةٍ من الصيغة القياسية، إذا كان لـ a و c إشارتان مختلفتان، فستكون الحلول حقيقية.

b. إذا كان مميّز معادلةٍ تربيعيةٍ أكبر من 1، فإن الجذرين يكونان عددين حقيقيين غير نسبيين.

46. مسألة غير محددة الإجابة ارسم التمثيل البياني المقابل واذكر عدد الجذور ونوعها لكلّ مما يلي.

a. $b^2 - 4ac = 0$

b. دالة تربيعية فيها $f(x)$ لا تساوي الصفر على الإطلاق.

c. دالة تربيعية فيها $f(a) = 0$ و $a \neq b$؛ $f(b) = 0$.

d. المميّز أقل من الصفر.

e. a و b كلاهما حل ويمكن تمثيلهما بكسرين.

47. تحدٍّ أوجد قيمة (قيم) m في المعادلة التربيعية $x^2 + x + m + 1 = 0$ بحيث يكون لها حل وحيد.

48. الكتابة في الرياضيات صِف ثلاث طرق مختلفة لحلّ $x^2 - 2x - 15 = 0$. وما الطريقة التي تفضلها، ولماذا؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

49. حدّدت شركةٌ أن ربحها الشهري P يُستنتج من العلاقة $P = -8x^2 + 165x - 100$، وفيها x سعر بيع كل وحدة من وحدات المنتج. فأي مما يلي هو التقدير الأفضل للسعر الأقصى للوحدة والذي يمكن أن تبيع به الشركةُ دون أن تخسر المال؟

A AED 10 **B** AED 20 **C** AED 30 **D** AED 40

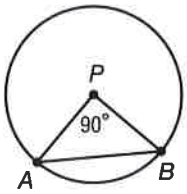
50. SAT/ACT ما مجموعة الأعداد من بين ما يلي والتي يكون فيها الوسط أكبر من الوسيط؟

F {4, 5, 6, 7, 8} **J** {3, 5, 6, 7, 8}

G {4, 6, 6, 6, 8} **K** {2, 6, 6, 6, 6}

H {4, 5, 6, 7, 9}

51. إجابة قصيرة في الشكل أدناه، P هي مركز الدائرة التي نصف قطرها 15 سنتيمترًا. فما مساحة المثلث $\triangle APB$؟



52. 75% من 88 تساوي 60% من أي عدد؟

A 100 **B** 101 **C** 108 **D** 110

مراجعة شاملة

بسّط. (الدرس 5-1)

53. i^{26} **54.** $\sqrt{-16}$ **55.** $4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25}$

56. السلامة على الطرق السريعة يستطيع المهندسون استخدام الصيغة $d = 0.05v^2 + 1.1v$ لتقدير مسافة التوقف الصغرى d بالأمتار لسيارةٍ تسير بسرعة v كيلومترًا في الساعة. فإذا كان بإمكان سيارةِ التوقف بعد 20 مترًا، فما أعلى سرعة قد تكون تسير عندها عندما ضغط السائق على المكابح أول مرة؟ (الدرس 6-1)

57. الجسور تُقارب الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية شكل قطعٍ مكافئ. ويمكن تمثيل القطع المكافئ بالدالة التربيعية $y = 0.00012x^2 + 6$، حيث تمثّل x المسافة من محور التماثل وتمثل y ارتفاع الكابلات. المعادلة التربيعية المرتبطة هي $0.00012x^2 + 6 = 0$. (الدرس 6-1)

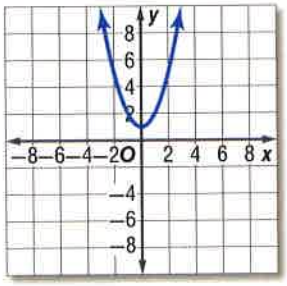
a. احسب قيمة المميّز.

b. بِمَ يخبرك المميّز عن الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية؟

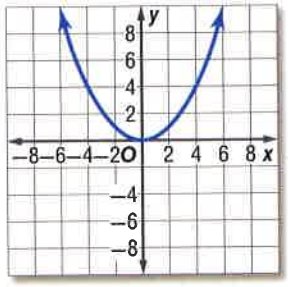
مراجعة المهارات

اكتب معادلةً لكل تمثيلٍ بياني.

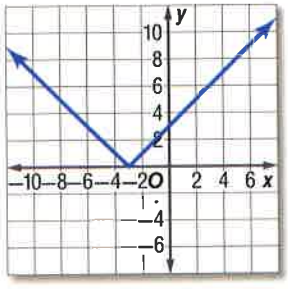
58.



59.

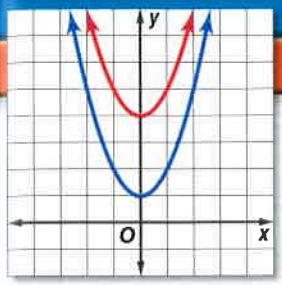


60.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

1-7 تحويلات الدوال التربيعية



السابق
- مثلت دوالاً تربيعيةً بيانيًا باستخدام الرأس ومحور التماثل.

الحالي
1 تطبيق الإزاحات على الدوال التربيعية.
2 تطبيق تغيير الأبعاد على الدوال التربيعية
3 كتابة دالة تربيعية بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.
4 تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية ذات الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.

لماذا؟
- التمثيلان البيانيان الموضحان على الجهة اليمنى لهما المقاس والشكل نفسهما، ولكن لاحظ أن رأس القطع المكافئ الأحمر أعلى على المحور الرأسي y من رأس القطع المكافئ الأزرق. وإزاحة القطع المكافئ إلى الأعلى والأسفل مثالٌ عن عملية تحويل.

المفردات الجديدة
التحويل transformation
الإزاحة translation
تغيير الأبعاد/التمدد dilation
الانعكاس reflection
صيغة الرأس vertex form

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الإزاحات
تغيّر **الإزاحة** مواقع الأشكال. فأحد أنواع التحويل، ويدعى **الإزاحة**، يحرّك الشكل إلى الأعلى أو الأسفل أو اليسار أو اليمين. عند إضافة ثابتٍ k أو طرحه من دالةٍ أصلية، يكون التمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) \pm k$ هو التمثيلَ البياني للدالة الأصلية مزاحًا إلى الأعلى أو الأسفل.

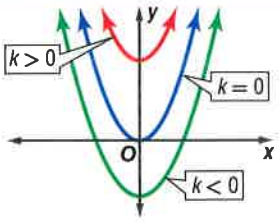
الدالة الأصلية في مجموعة الدوال التربيعية هي $f(x) = x^2$. ولجميع الدال التربيعية الأخرى تمثيلات بيانيةٌ هي تحويلاتٌ للتمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$.

المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية

التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + k$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ مزاحًا رأسيًا.

إذا كان $k > 0$، فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2$ يزاح $|k|$ وحدة **إلى الأعلى**.

إذا كان $k < 0$، فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2$ يزاح $|k|$ وحدة **إلى الأسفل**.



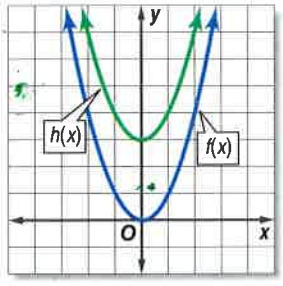
مثال 1 وصف الإزاحة وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $h(x) = x^2 + 3$

$k = 3$ و $3 > 0$

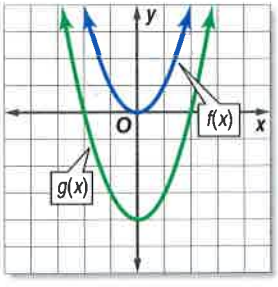
$h(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأعلى لمسافة 3 وحدات.



b. $g(x) = x^2 - 4$

$k = -4$ و $-4 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأسفل لمسافة 4 وحدات.



تمرين موجّه

1A. $f(x) = x^2 - 7$ **1B.** $g(x) = 5 + x^2$ **1C.** $h(x) = -5 + x^2$ **1D.** $f(x) = x^2 + 1$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

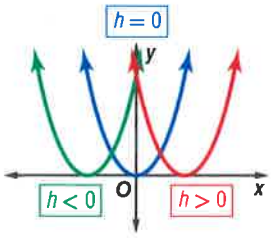
يمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي أفقيًا بطرح حدّ واحدٍ لـ h من x.

المفهوم الأساسي الإزاحة الأفقية

التمثيل البياني للدالة $g(x)=(x-h)^2$ هي التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2$ مزاحًا بالاتجاه الأفقي.

إذا كان $h>0$، التمثيل البياني لـ $f(x)=x^2$ يُزاح لمسافة h وحدة **يمينًا**.

إذا كان $h<0$، التمثيل البياني لـ $f(x)=x^2$ يُزاح لمسافة $|h|$ وحدة **يسارًا**.



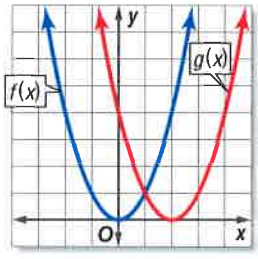
مثال 2 الإزاحة الأفقية

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x)=x^2$.

a. $g(x)=(x-2)^2$

$k=0, h=2$ و $2>0$

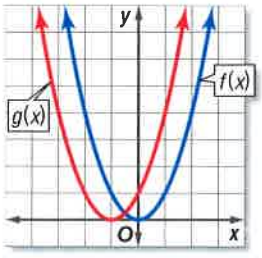
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)=x^2$ إلى اليمين لمسافة وحدتين.



b. $g(x)=(x+1)^2$

$k=0, h=-1$ و $-1<0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)=x$ إلى اليسار لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

2A. $g(x)=(x-3)^2$

2B. $g(x)=(x+2)^2$

ويمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي بالاتجاهين الأفقي والعمودي.

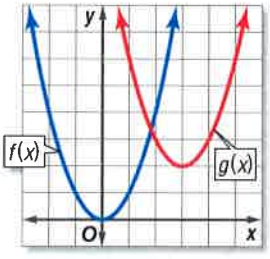
مثال 3 الإزاحة الأفقية والعمودية

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x)=x^2$.

a. $g(x)=(x-3)^2+2$

$k=2, h=2$ و $3>0$

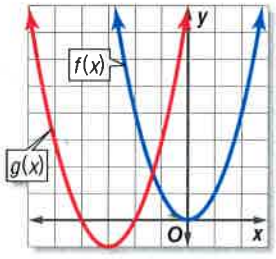
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)=x^3$ إلى اليمين لمسافة 3 وحدات وإلى الأعلى لمسافة وحدتين.



b. $g(x)=(x+3)^2-1$

$k=-1, h=-3$ و $-3<0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)=x$ إلى اليسار لمسافة 3 وحدات وإلى الأسفل لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

3A. $g(x)=(x+2)^2+3$

3B. $g(x)=(x-4)^2-4$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 تغيير الأبعاد والإزاحة

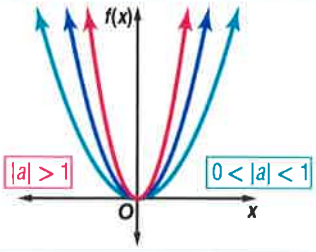
ثمة نوع آخر من التحويلات، ويدعى تغيير الأبعاد. **وتغيير الأبعاد** يجعل التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني الأصلي أو أعرض منه. وعند ضرب الدالة الأصلية $f(x) = x^2$ بثابت a، فإن التمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) = ax^2$ إما أن يتمدد أو ينضغط رأسيًا.

المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد

التمثيل البياني لـ $g(x) = ax^2$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ ممدّدًا أو مضغوطًا رأسيًا.

إذا كان $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يتمدد رأسيًا.

إذا كان $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ ينضغط رأسيًا.



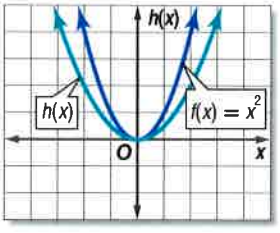
مثال 4 وصف تغيير الأبعاد وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$a = \frac{1}{2}$ و $0 < \frac{1}{2} < 1$

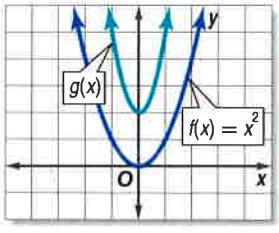
$h(x)$ هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ المضغوط رأسيًا.



b. $g(x) = 3x^2 + 2$

$a = 3$ و $3 > 1$, $k = 2$ و $2 > 0$

$g(x)$ هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x$ الممدّد رأسيًا والمزاح إلى الأعلى لمسافة وحدتين.



تمرين موجّه

4A. $j(x) = 2x^2$

4B. $h(x) = 5x^2 - 2$

4C. $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$

نصيحة دراسية

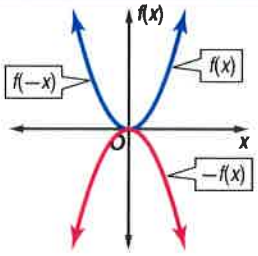
الاستنتاج المنطقي عند تمديد التمثيل البياني لدالة تربيعية رأسيًا، يصبح شكل التمثيل البياني الجديد أضيق من التمثيل البياني للدالة الأصلية. وعند ضغطه رأسيًا، يصبح التمثيل البياني الجديد أعرض من التمثيل البياني للدالة الأصلية.

يقلب **الانعكاس** الشكل بالنسبة إلى مستقيم.

المفهوم الأساسي الانعكاس

التمثيل البياني لـ $-f(x)$ هو انعكاس التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x.

التمثيل البياني لـ $f(-x)$ هو انعكاس التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الرأسي y.



نصيحة دراسية

الانعكاس يؤدي انعكاس الدالة $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الرأسي y إلى إعطاء الدالة نفسها، وذلك لأن $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

انتبه!
التحويل
التمثيل
$-ax^2$
للتمثيل
$= x^2$
بالنسبة
إذا كان
انضغاط
القيمة ا

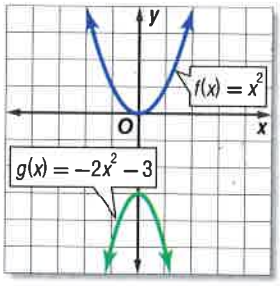
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 وصف التحويلات وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

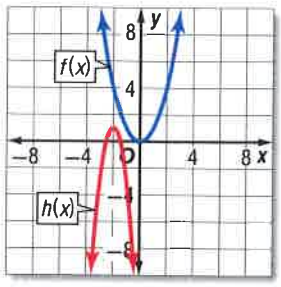
a. $g(x) = -2x^2 - 3$

- $a = -2$ و $-2 < 0$ و $|-2| > 1$. إذًا هناك انعكاس بالنسبة للمحور x والتمثيل البياني ممدّد رأسيًا.
- $k = -3$ و $-3 < 0$، إذًا هناك إزاحة إلى الأسفل لمسافة 3 وحدات.



b. $h(x) = -4(x + 2)^2 + 1$

- $a = -4$ و $-4 < 0$ و $|-4| > 1$. إذًا هناك انعكاس بالنسبة للمحور x والتمثيل البياني ممدّد رأسيًا.
- $h = -2$ و $-2 < 0$، إذًا هناك إزاحة لمسافة وحدتين إلى اليسار.
- $k = 1$ و $1 > 0$. إذًا هناك إزاحة إلى الأعلى لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

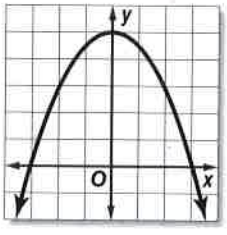
5A. $h(x) = 2(-x)^2 - 9$ **5B.** $g(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ **5C.** $j(x) = -2(x - 1)^2 - 2$

انتبه!
التحويلات يمكن أن يؤدي التمثيل البياني للدالة $f(x) = -ax^2$ إلى تحويلين للتمثيل البياني الخاص بـ $f(x) = x^2$ وهما: انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x إذا كان $a > 0$ إضافة إلى انضغاط أو تمدّد اعتمادًا على القيمة المطلقة لـ a.

يمكنك استخدام ما تعرفه عن خواصّ التمثيلات البيانية للمعادلات التربيعية لمطابقة المعادلات مع التمثيلات البيانية.

مثال 6 على الاختبار المعياري تحديد معادلة تمثيل بياني

أي مما يلي معادلة للدالة الموضّحة في التمثيل البياني؟



A $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ **C** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

B $y = -2x^2 - 5$ **D** $y = 2x^2 + 5$

قراءة فقرة الاختبار

لديك تمثيل بياني. وعليك إيجاد معادلته.

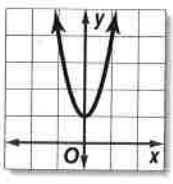
حَل فقرة الاختبار

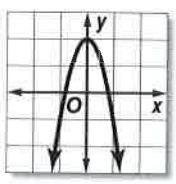
التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل، ولذلك فقد عُكس التمثيل البياني لـ $y = x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x. ويتعين أن يكون معامل القوة الأعلى سالبًا، ولذلك علينا حذف الخيارين A و D.

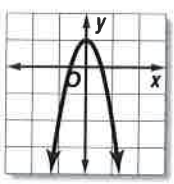
القطع المكافئ مزاحّ إلى الأعلى لمسافة 5 وحدات، ولذلك فإن $k = 5$. انظر إلى المعادلات. في الخيارين C و D فقط يكون $k = 5$. الإجابة هي C.

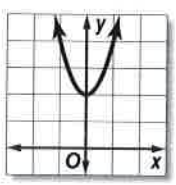
تمرين موجّه

6. أي مما يلي هو التمثيل البياني لـ $y = -3x^2 + 1$؟

F 

G 

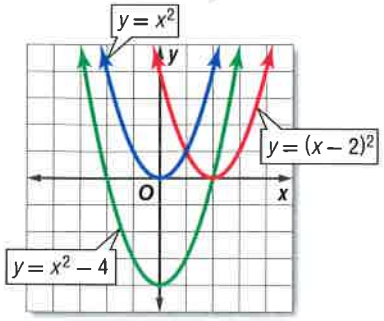
H 

J 

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تذكر أن مجموعة التمثيلات البيانية هي جملة من التمثيلات البيانية التي تعرض خاصيةً واحدةً أو عدة خواص متشابهة. والتمثيل البياني الأصلي هو التمثيل البياني الأبسط في العائلة. أيًا كانت عائلة الدوال التربيعية، فإن $y = x^2$ هو التمثيل البياني الأصلي.

يمكن رسم التمثيلات البيانية الأخرى لمجموعة الدوال التربيعية، مثل $y = (x - 2)^2$ و $y = x^2 - 4$، من خلال تحويل التمثيل البياني لـ $y = x^2$.



3 كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

تُكتب كل دالةٍ أعلاه **بصيغة الرأس**، $y = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) رأس القطع المكافئ و $x = h$ محور التماثل و a تحدد شكل القطع المكافئ واتجاه انفتاحه.

حين تكون الدالة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$، فيمكنك إكمال المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس. فإذا لم يكن معامل الحدّ التربيعي يساوي 1، إذًا فعليك تحليل عامل الحدّين التربيعي والخطي *قبل* إكمال المربع. وبعد إكمال المربع وكتابة الدالة بصيغة الرأس، فإن قيمة k تشير إلى قيمةٍ صغرى إذا كان $a < 0$ أو تشير إلى قيمة عظمى إذا كان $a > 0$.

مثال 7 اكتب الدوال بصيغة الرأس

اكتب كل دالة بصيغة الرأس.

a. $y = x^2 + 6x - 5$

$y = x^2 + 6x - 5$	الدالة الأصلية
$y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$	أكمل المربع.
$y = (x + 3)^2 - 14$	بسّط.

b. $y = -2x^2 + 8x - 3$

$y = -2x^2 + 8x - 3$	الدالة الأصلية
$y = -2(x^2 - 4x) - 3$	جمّع $ax^2 + bx$ وحلّل إلى العوامل، ثم اقسم على a.
$y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$	أكمل المربع.
$y = -2(x - 2)^2 + 5$	بسّط.

تمرين موجّه

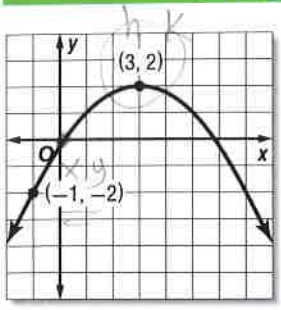
1A. $y = x^2 + 4x + 6$

1B. $y = 2x^2 - 12x + 17$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

بمعرفة الرأس ونقطةٌ إضافيةٌ على التمثيل البياني للقطع المكافئ، يمكنك كتابة معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس.

مثال 8 على الاختبار المعياري كتابة معادلة إذا كان التمثيل البياني معلومًا



ما معادلة الدالة الموضّحة في التمثيل البياني؟

A $y = -4(x - 3)^2 + 2$

B $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$

C $y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 - 2$

D $y = 4(x + 3)^2 - 2$

قراءة فقرة الاختبار

لديك تمثيل بياني لقطع مكافئ عُيّن رأسه ونقطةٌ في تمثيله البياني. وعليك إيجاد معادلة له.

حَل فقرة الاختبار

يقع رأس القطع المكافئ عند النقطة $(3, 2)$، إذًا $h = 3$ و $k = 2$. وبما أن $(-1, -2)$ نقطة على التمثيل البياني، فلنفترض أن $x = -1$ و $y = -2$. عوّض بهاتين القيمتين في صيغة الرأس للمعادلة وحُلّ لإيجاد a.

$y = a(x - h)^2 + k$	صيغة الرأس
$-2 = a(-1 - 3)^2 + 2$	عوّض بالعدد -2 عن y، وبالعدد -1 عن x وبالعدد 3 عن h وبالعدد 2 عن k.
$-2 = a(16) + 2$	بسّط.
$-4 = 16a$	اطرح 2 من كل طرف.
$-\frac{1}{4} = a$	اقسم كل طرف على 16.

معادلة القاطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$.

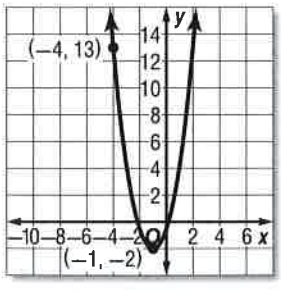
الإجابة هي B.

نصيحة عند حل الاختبار

معنى a لا تحدد إشارة a في صيغة الرأس عرض القطع المكافئ. وتحدد الإشارة إن كان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. ويُحدَّد عرضُ القطع المكافئ بالقيمة المطلقة لـ a.

تمرين موجّه

2. أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



F $y = \frac{9}{25}(x - 1)^2 + 2$

G $y = \frac{3}{5}(x + 1)^2 - 2$

H $y = \frac{5}{3}(x + 1)^2 - 2$

J $y = \frac{25}{9}(x - 1)^2 + 2$

4 تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية

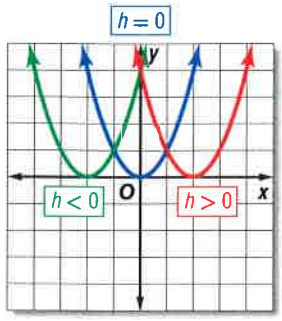
لقد تعلمت سابقاً كيف تؤثر التحويلات المختلفة على التمثيلات البيانية للدوال الرئيسة. ويلخّص ما يلي هذه التحويلات للدوال التربيعية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

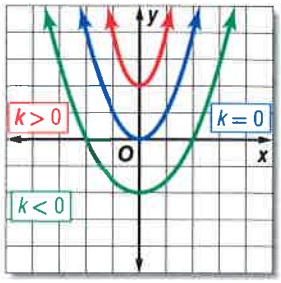
ملخص المفهوم تحويلات الدوال التربيعية

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

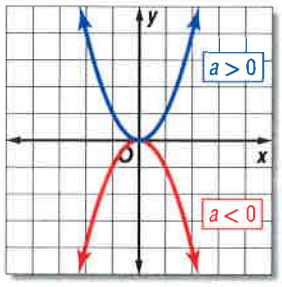
h، الإزاحة الأفقية
h وحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة
|h| وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة



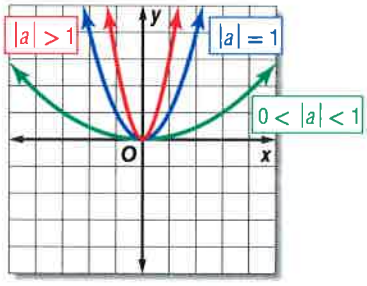
k، الإزاحة الرأسية
k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة
|k| وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة



a، انعكاس
إذا كانت $a > 0$، فإن التمثيل البياني يفتح إلى الأعلى.
إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني يفتح إلى الأسفل.



a، تغيير الأبعاد
إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتمدّد رأسيًا. إذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني ينضغط رأسيًا.



نصيحة دراسية
القيمة المطلقة
$|a| < 1$ و $a > 0$ تعني أن a عدد نسبي بين 0 و 1، مثل $\frac{3}{4}$.
أو عدد نسبي بين −1 و 0، مثل −0.3.

مثال 9 تمثيل المعادلات بصيغة الرأس

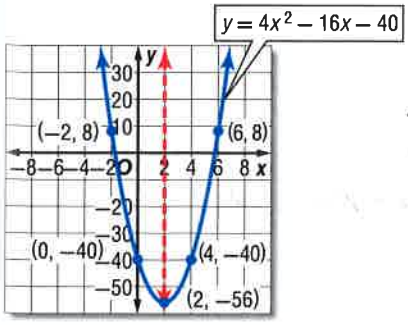
مثّل بيانيًا $y = 4x^2 - 16x - 40$.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بصيغة الرأس.

$y = 4x^2 - 16x - 40$	المعادلة الأصلية
$y = 4(x^2 - 4x) - 40$	خاصية التوزيع
$y = 4(x - 4x + 4) - 40 - 4(4)$	أكمل المربع.
$y = 4(x - 2)^2 - 56$	بسّط.

الخطوة 2 يقع الرأس عند (2, −56). محور التماثل هو $x = 2$. ونظرًا لأن $a = 4$، فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الخطوة 3 عيّن نقاطًا إضافية لمساعدتك في إتمام التمثيل البياني.



تمرين موجّه

3A. $y = (x - 3)^2 - 2$

3B. $y = 0.25(x + 1)^2$

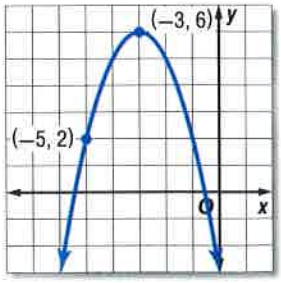
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 7 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

1. $y = x^2 + 6x + 2$
2. $y = -2x^2 + 8x - 5$
3. $y = 4x^2 + 24x + 24$

مثال 8 4. **الاختيار من متعدد** ما الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



A $y = -(x + 3)^2 + 6$
B $y = -(x - 3)^2 - 6$
C $y = -2(x + 3)^2 + 6$
D $y = -2(x - 3)^2 - 6$

مثال 9 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

5. $y = (x - 3)^2 - 4$
6. $y = -2x^2 + 5$
7. $y = \frac{1}{2}(x + 6)^2 - 8$

التمرين وحل المسائل

مثال 7 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

8. $y = x^2 + 9x + 8$
9. $y = x^2 - 6x + 3$
10. $y = -2x^2 + 5x$
11. $y = x^2 + 2x + 7$
12. $y = -3x^2 + 12x - 10$
13. $y = x^2 + 8x + 16$
14. $y = 2x^2 - 4x - 3$
15. $y = 3x^2 + 10x$
16. $y = x^2 - 4x + 9$
17. $y = -4x^2 - 24x - 15$
18. $y = x^2 - 12x + 36$
19. $y = -x^2 - 4x - 1$

مثال 8 20. **الألعاب النارية** خلال عرض الألعاب النارية، يُمثّل ارتفاع صاروخ h بالأمتار بعد t ثانية من خلال الدالة $h = -4.9(t - 4)^2 + 80$. مثّل الدالة بيانيًا.

21. **المعرفة المالية** يؤجّر متجر لتأجير الدراجات في المتوسط 120 دراجةً في الأسبوع ويحتسب مبلغ AED 25 مقابل التأجير ليومٍ واحد. يقدّر المدير أن تخفيض درهمٍ واحدٍ في سعر الإيجار سيؤدي إلى تأجير 15 دراجةً إضافية. ويمكن تمثيل أقصى إيراد يتوقعه المدير من خلال $y = -15x^2 + 255x + 3000$، حيث y هو الإيراد الأسبوعي و x هو عدد الدراجات المؤجرة. اكتب هذه الدالة بصيغة الرأس. ثم مثّلها بيانيًا.

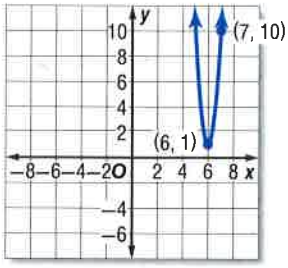
مثال 9 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

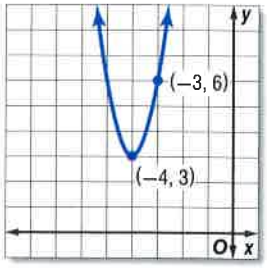
22. $y = (x - 5)^2 + 3$
23. $y = 9x^2 - 8$
24. $y = -2(x - 5)^2$
25. $y = \frac{1}{10}(x + 6)^2 + 6$
26. $y = -3(x - 5)^2 - 2$
27. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
28. $y = 2x^2 + 10$
29. $y = -(x + 3)^2$
30. $y = \frac{1}{6}(x - 3)^2 - 10$
31. $y = (x - 9)^2 - 7$
32. $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$
33. $y = -4(x - 10)^2 - 10$

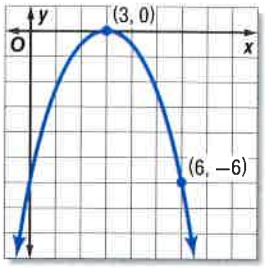
34. **تمثيل النماذج** شركة تصنيع ألواح شراعية لركوب الأمواج تستخدم عمليةً مؤتمتةً لصناعة الصواري الخاصة بالألواح. والدالّة $f(x) = \frac{1}{250}x^2 + \frac{3}{5}x$ مبرمجةٌ في الحاسب لصنع هذا النوع من الصواري.
   a. اكتب الدالة التربيعية بصيغة الرأس. ثم مثّل الدالة بيانيًا.
   b. صِف كيف يمكن للمصنع تعديل الدالة لصنع صوارٍ بمنحنى أكبر أو أقل.

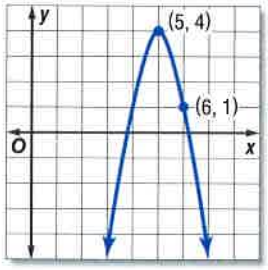
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education. حقوق الطبع والتأليف

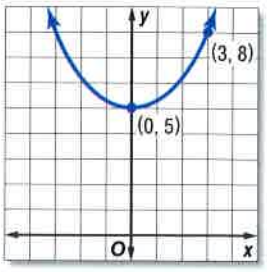
اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ.

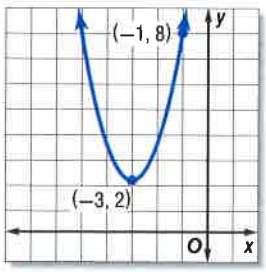
35.


36.


37.


38.


39.


40.


اكتب كل دالة بصيغة الرأس. ثم حدّد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتح.

41. $3x^2 - 4x = 2 + y$

42. $-2x^2 + 7x = y - 12$

43. $-x^2 - 4.7x = y - 2.8$

44. $x^2 + 1.4x - 1.2 = y$

45. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{9} = y$

46. $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = y$

47. **السيارات** يمكن استخدام القانون $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ لتحديد الموضع $S(t)$ للجسم بعد مضي t ثانية وعند معدّل تسارع a وسرعة ابتدائية v_0. يمكن لسيارة نبيلة أن تتسارع بمقدار 0.002 كيلومتر في الثانية المربعة.

a. عبّر عن $S(t)$ بصيغة الرأس إذا تسارعت نبيلة من 35 كيلومترًا في الساعة لتدخل في طريقٍ سريع.

b. كم ستستغرق نبيلة لتصل إلى متوسط السرعة لحركة المرور في الطريق السريع البالغ 68 كيلومترًا في الساعة؟ (*إرشاد:* استخدم *التسارع* • *الزمن* = *السرعة*.)

c. إذا كان طول منحدر الدخول $\frac{1}{8}$ كيلومترًا، فهل سيتسنّى لنبيلة الوقت الكافي ليصل إلى متوسط السرعة لحركة السير على الطريق السريع؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة قطع مكافئ تمت إزاحته وتم ضغطه وانعكاسه بالنسبة إلى المحور الأفقي x.

49. **تحدٍّ** اشرح كيف يمكنك إيجاد معادلة قطعٍ مكافئٍ باستخدام إحداثيات النقاط الثلاث على التمثيل البياني. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

50. **تحدٍّ** اكتب الصيغة القياسية لمعادلة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$ بصيغة الرأس. حدد الرأس ومحور التماثل.

51. **الاستنتاج** صِف التمثيل البياني لـ $f(x) = a(x - h)^2 + k$ عند $a = 0$. هل التمثيل البياني مماثل للتمثيل البياني لـ $g(x) = ax^2 + bx + c$ عند $a = 0$؟ اشرح.

52. **الفرضيات** اشرح كيف يمكن استخدام التمثيل البياني لـ $y = x^2$ لتمثيل أي دالةٍ تربيعيةٍ بيانيًا. وليشتمل وصفك على التأثيرات الناتجة عن تغيير a و h و k في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$. وقارن بين التمثيل البياني لـ $y = x^2$ وبين التمثيل البياني لـ $y = a(x - h)^2 + k$ باستخدام أي قيمٍ تختارها لـ a و h و k.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

تدريب على الاختبار المعياري

53. تحتاج شجيرات مزهرة إلى مزيجٍ من 70% تربة و 30% فيرميكوليت. فكم العدد التقريبي لدلاء الفيرميكوليت التي ينبغي إضافتها إلى 20 دلوًا من التربة؟

A 6.0 **C** 14.0

B 8.0 **D** 24.0

54. SAT/ACT مجموع العددين الصحيحين x و y يساوي القيمة 495. ورقم الآحاد للعدد x هو 0. فإذا قسمنا x على 10، فإن النتيجة تساوي y. فما قيمة x؟

F 40 **J** 250

G 45 **K** 450

H 245

55. ما مجموعة حلول المتباينة $|4x - 1| < 9$ ؟

A $\{x \mid 2.5 < x$ أو $x < -2\}$

B $\{x \mid x < 2.5\}$

C $\{x \mid x > -2\}$

D $\{x \mid -2 < x < 2.5\}$

56. إجابة قصيرة افترض أن لديك متجرًا تشتري فيه دزينة مفاتيح الربط بمبلغ AED 30 وتبيع كل مفتاح مقابل AED 3.50. فما النسبة المئوية للسعر المضاف إلى مفاتيح الربط؟

مراجعة شاملة

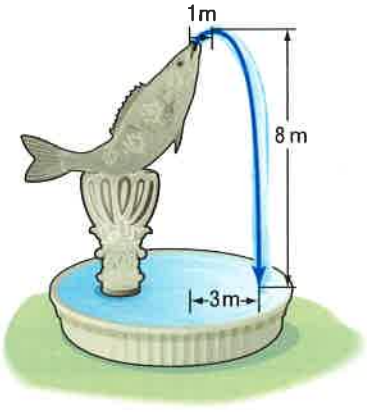
حُلّ كل معادلة باستخدام طريقة حل من اختيارك. أوجد الحلول الدقيقة (الدرس 4-1)

57. $4x^2 + 15x = 21$ **58.** $-3x^2 + 19 = 5x$ **59.** $6x - 5x^2 + 9 = 3$

بسّط. (الدرس 3-1)

60. $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **61.** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **62.** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **63.** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$

64. نوافير الماء يمكن تمثيل ارتفاع تيار ماء متدفق من نافورة باستخدام دالة تربيعية. افترض أن الماء المتدفق من فوهة النافورة يبلغ ارتفاعًا أقصاه 8 أمتار ويبعد مسافة متر واحد من فوهة النافورة. (الدرس 5-1)



a. إذا كان الماء يهبط على بعد 3 أمتار من فوهة النافورة، أوجد دالةً تربيعيةً تمثّل ارتفاع الماء $h(d)$ عند أي مسافة معطاة d متر من فوهة النافورة. ثم قارن التمثيل البياني للدالة مع الدالة الأصلية.

b. افترض أن أحد العاملين يرفع ضغط الماء بحيث يبلغ تيار الماء ارتفاعًا أقصى مقداره 12.5 مترًا على مسافة 15 سنتيمترًا من فوهة النافورة. وفي هذه الحالة يهبط الماء على بعد 3.75 أمتار من فوهة النافورة. اكتب دالةً تربيعيةً جديدةً لـ $h(d)$. وكيف تؤثر التغيّرات في h و k على شكل التمثيل البياني؟

مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كانت القيمة المعطاة تحقق المتباينة.

65. $3x^2 - 5 > 6;\ x = 2$ **66.** $-2x^2 + x - 1 < 4;\ x = -2$ **67.** $4x^2 + x - 3 \leq 36;\ x = 3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-7 مختبر الجبر
الدوال التربيعية ومعدل التغير

لقد تعلمت أن للدالة الخطية معدل تغير ثابت. وفي هذا المختبر، ستستكشف معدل تغير الدوال التربيعية.

النشاط تحديد معدّل التغيير

تأمل $f(x) = 0.1875x^2 - 3x + 12$.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً كالجدول أدناه. واستخدم قيمًا تتراوح بين 0 و 16 لـ x.

x	0	1	2	3	...	16
y	12	9.1875	6.75			
فروق المرتبة الأولى						
فروق المرتبة الثانية						

الخطوة 2 أوجد كل قيمة لـ y. على سبيل المثال، عند $x = 1$، فإن $y = 0.1875(1)^2 - 3(1) + 12$ أو 9.1875.

الخطوة 3 مثّل الأزواج المرتبة (x, y) بيانيًا. ثم اربط النقاط بمنحنى أملس. لاحظ أن الدالة *تتناقص* عند $0 < x < 8$ وأنها *تتزايد* عند $8 < x < 16$.

الخطوة 4 يمكن إيجاد معدل التغير من نقطة إلى النقطة التالية باستخدام صيغة الميل. الميل من النقطة (0, 12) إلى النقطة (1, 9.1875) يساوي: $\frac{9.1875 - 12}{1 - 0}$ أو -2.8125.

هذا هو الفرق من المرتبة الأولى عند $x = 1$. أكمل الجدول لجميع فروق المرتبة الأولى. وصِف أي أنماطٍ في الفروق.

الخطوة 5 يمكن إيجاد الفروق من المرتبة الثانية عبر طرح فروق المرتبة الأولى المتتالية. على سبيل المثال، يتم إيجاد الفرق من المرتبة الثانية عند $x = 2$ عبر طرح الفرق من المرتبة الأولى عند $x = 1$ من الفرق من المرتبة الأولى عند $x = 2$. صِف أي أنماطٍ في الفروق.

التمارين

لكل دالة من الدوال التالية، أنشئ جدول قيم بقيم x المعطاة . ومثل كل دالة بيانيًا. ثمّ حدّد فروق المرتبة الأولى والمرتبة الثانية.

1. $y = -x^2 + 2x - 1$ عند $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

2. $y = 0.5x^2 + 2x - 2$ عند $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

3. $y = -3x^2 - 18x - 26$ عند $x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$

4. **التخمين** أعد النشاط مع دالة تكعيبية. في أي فرق ترتيب ستتوقع تتوقع أن تساوي $g(x) = x^4$ ثابتًا عنده؟ $h(x) = x^n$؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

8-1 المتباينات التربيعية

السابق
- لقد قمت بحل المتباينات الخطية.

الحالي
1. التمثيل البياني للمتباينات التربيعية بمتغيرين اثنين.
2. حل المتباينات التربيعية بمتغير واحد.

لماذا؟
- يمكن تمثيل بالون ماء أُطلق من مقلاع باستخدام عدة معادلات ومتباينات تربيعية مختلفة.

بفرض أنه يمكن التعبير عن ارتفاع بالون الماء $h(t)$ بالمتر فوق سطح الأرض بعد مرور t ثانية من إطلاقه بالمعادلة التربيعية $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$. يمكنك حل المتباينة التربيعية لتحديد المسافة التي سيرتفع إليها البالون فوق سطح الأرض.

المفردات الجديدة

المتباينة التربيعية
quadratic inequality

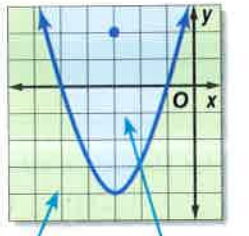
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 التمثيل البياني للمتباينات التربيعية

يمكنك تمثيل **المتباينات التربيعية** بمتغيرين بيانيًا مستخدمًا الأسلوب نفسه المتبع في التمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيرين.

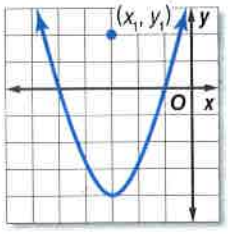
الخطوة 3 ظلّل وفقًا لما سبق.



(x_1, y_1) هي حل.

(x_1, y_1) ليست حلاً.

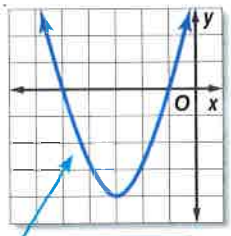
الخطوة 2 اختبر نقطةً لا تقع على القطع المكافئ.



$y_1 \stackrel{?}{\geq} a(x_1)^2 + b(x_1) + c$

هل (x_1, y_1) حل؟

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.



هل ينبغي أن يكون القطع المكافئ متصلاً أم منقوطًا؟

مثال 1 تمثيل المتباينة التربيعية بيانيًا

مثّل بيانيًا $y > x^2 + 2x + 1$.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا $y = x^2 + 2x + 1$. ينبغي أن يكون القطع المكافئ منقوطًا.

الخطوة 2 اختبر نقطةً لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ.

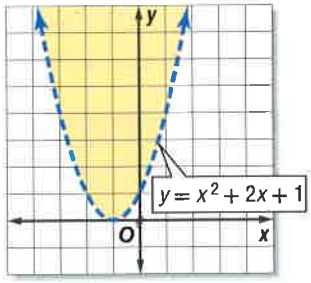
$y > x^2 + 2x + 1$

$-1 \stackrel{?}{>} 0^2 + 2(0) + 1$

$-1 \not> 1$

إذًا، $(0, -1)$ ليست حلاً للمتباينة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي لا تحتوي على نقطة $(0, -1)$.



تمرين موجّه

مثّل كل متباينة بيانيًا.

1A. $y \leq x^2 + 2x + 4$

1B. $y < -2x^2 + 3x + 5$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

2 حل المتباينات التربيعية

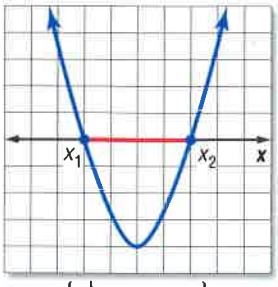
يمكن حل المتباينات التربيعية بمتغير واحد باستخدام التمثيلات البيانية للدوال التربيعية المتصلة.

$ax^2 + bx + c < 0$

مثّل بيانيًا $y = ax^2 + bx + c$ وحدد قيم x التي يقع التمثيل البياني عندها *أسفل* المحور x.

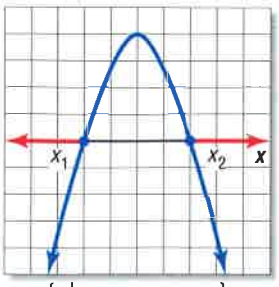
بالنسبة لـ $\leq$، أضف نقاط تقاطع x في الحل.

$a > 0$



$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

$a < 0$



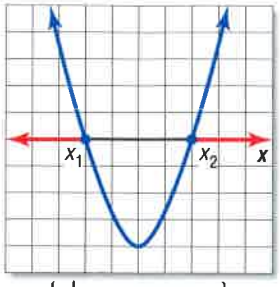
$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$

$ax^2 + bx + c > 0$

مثّل بيانيًا $y = ax^2 + bx + c$ وحدد قيم x التي يقع التمثيل البياني عندها *فوق* المحور x.

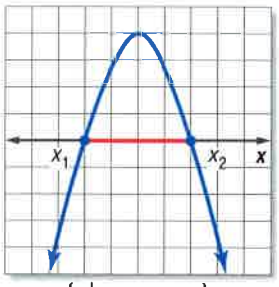
بالنسبة لـ $\geq$، أضف نقاط تقاطع x في الحل.

$a > 0$



$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$

$a < 0$



$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية بالتمثيل البياني

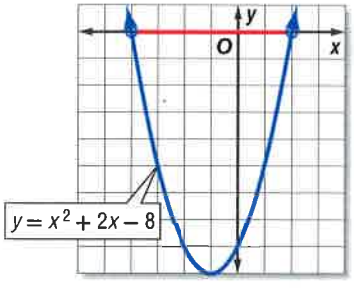
ليس من الضروري رسم التمثيل البياني للدالة التربيعية المرتبطة بدقة، فقد تم إيجاد أصفار الدالة جبريًا.

مثال 2 إيجاد حل $ax^2 + bx + c < 0$ بالتمثيل البياني

حُلّ $x^2 + 2x - 8 < 0$ بالتمثيل البياني.

يتكون الحل من قيم x التي يقع التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها *أسفل* المحور x. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

$x^2 + 2x - 8 = 0$	معادلة متصلة
$(x - 2)(x + 4) = 0$	حلل الى العوامل.
$x - 2 = 0$ أو $x + 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 2$ $\quad x = -4$	أوجد حل كل معادلة.



ارسم التمثيل البياني للقطع المكافئ الذي يقطع المحور x عند -4 و 2. وينبغي أن يفتح التمثيل البياني حيث $a > 0$.

يقع التمثيل البياني أسفل المحور x بين $x = -4$ و $x = 2$. ومن ثم، فإن مجموعة الحل هي $\{x \mid -4 < x < 2\}$ أو $(-4, 2)$.

تحقق اختبر قيمة واحدة من x أقل من -4، إحداهما بين -4 و 2، والثانية أكبر من 2 في المتباينة الأصلية.

اختبار $x = 5$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$5^2 + 2(5) - 8 \overset{?}{<} 0$

$27 < 0$ ✗

اختبار $x = 0$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$0^2 + 2(0) - 8 \overset{?}{<} 0$

$-8 < 0$ ✓

اختبار $x = -6$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$(-6)^2 + 2(-6) - 8 \overset{?}{<} 0$

$16 < 0$ ✗

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

2A. $0 > x^2 + 5x - 6$

2B. $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والنشر

مثال 3 إيجاد حل $ax^2 + bx + c \geq 0$ بالتمثيل البياني

حُلّ $2x^2 + 4x - 5 \geq 0$ بالتمثيل البياني.

يتكون الحل من قيم x التي يقع التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها على المحور x أو فوقه. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

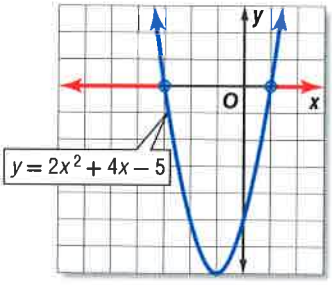
$2x^2 + 4x - 5 = 0$ المعادلة المتصلة

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدام القانون العام

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$ عوّض عن a بـ 4، وعن b بـ 2، وعن c بـ -5.

$x = \frac{-4 + \sqrt{56}}{4}$ أو $x = \frac{-4 - \sqrt{56}}{4}$ بسّط واكتب في صورة معادلتين.

≈ 0.87 ≈ -2.87 بسّط.



ارسم تمثيلاً بيانيًا للقطع المكافئ الذي يقطع المحور x عند -2.87 و 0.87. التمثيل البياني مفتوح للأعلى حيث $a > 0$. ويقع التمثيل البياني على المحور x وفوقه عند $x \leq -2.87$ و $x \geq 0.87$ تقريبًا. ومن ثم، يكون الحل تقريبًا $\{x \leq -2.87 \text{ أو } x \geq 0.87\}$ أو $(-\infty, -2.87] \cup [0.87, \infty)$.

تمرين موجّه

حل كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

3A. $x^2 - 6x + 2 > 0$

3B. $-4x^2 + 5x + 7 \geq 0$

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية بالاستعانة بالتمثيل البياني للمتباينات التربيعية.

مثال 4 من الحياة اليومية حل متباينة تربيعية

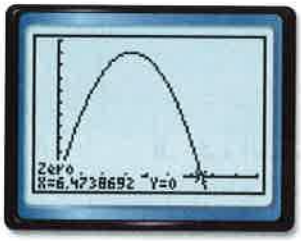
بالونات المياه **راجع بداية الدرس، ما الوقت الذي سيكون بالون المياه حينه على ارتفاع 3 أمتار أو أقل من سطح الأرض بعد إطلاقه؟**

تصف الدالة $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$ ارتفاع بالون الماء. ومن ثم، ينبغي أن توجد قيم t التي تكون عندها $h(t) \leq 3$.

$h(t) \leq 3$ المتباينة الأصلية

$-4.9t^2 + 32t + 1.2 \leq 3$ $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$

$-4.9t^2 + 32t - 1.8 \leq 0$ اطرح 3 من كل طرف.



[−1, 9] scl: 1 by [−5, 55] scl: 5

مثّل بيانيًا الدالة المرتبطة $y = -4.9x^2 + 32x - 1.8$ مستعينًا بحاسبة التمثيل البياني. أصفار الدالة هي 0.06 و 6.47 تقريبًا، ويقع التمثيل البياني أسفل المحور x حيث $x < 0.06$ و $x > 6.47$.

إذًا، يوجد بالون المياه في إطار 3 أمتار فوق سطح الأرض، أثناء الثانية 0.06 الأولى بعد إطلاق هذا البالون، ومرة أخرى عند الثانية 6.47 حتى يهبط البالون إلى الأرض.

الربط بالحياة اليومية

يستغرق الأمر بضع ملي ثواني حتى ينفجر بالون الماء. يمكن أن تصور كاميرا عالية السرعة تأثير السائل قبل أن تجذب الجاذبية الأرضية البالون لأسفل.

المصدر: ناسا

تمرين موجّه

4. الصواريخ يمكن تمثيل ارتفاع $h(t)$ نموذج صاروخ بالمتر بعد مرور t ثانية من إطلاقه باستخدام الدالة $h(t) = -16t^2 + 82t + 0.25$. ما الفترة الزمنية التي سيكون ارتفاع الصاروخ عندها 100 متر على الأقل فوق سطح الأرض؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية جبريًا

تكون مجموعة حل المتباينة التربيعية جميعها من أعداد حقيقية عندما تحقق نقاط الاختبار الثلاث المتباينة. وتكون المجموعة خالية عندما لا تحقق أي من نقاط الاختبار المتباينة.

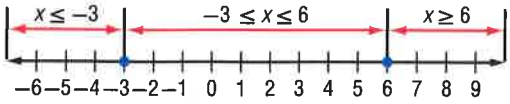
مثال 5 حل المتباينة التربيعية جبريًا

حُلّ المتباينة $x^2 - 3x \leq 18$.

الخطوة 1 أوجد حل المعادلة التربيعية المتصلة $x^2 - 3x = 18$.

$x^2 - 3x = 18$		المعادلة التربيعية المتصلة
$x^2 - 3x - 18 = 0$		اطرح 18 من كل طرف.
$(x - 3)(x - 6) = 0$		حلل الى العوامل.
$x + 3 = 0$	أو $x - 6 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -3$	$x = 6$	أوجد حل كل معادلة.

الخطوة 2 ارسم النقطتين -3 و 6 على خط الأعداد. استخدم هاتين النقطتين، فهذه القيم هي حلول المتباينة الأصلية. ولاحظ أن خط الأعداد مُقسم إلى ثلاثة أجزاء.



الخطوة 3 اختبر قيمة كل فترة لترى هل تحقق المتباينة الأصلية أم لا.

$x \geq 6$	$-3 \leq x \leq 6$	$x \leq -3$
اختبار $x = 8$.	اختبار $x = 0$.	اختبار $x = -5$.
$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$	$x^2 - 3x \leq 18$
$(8)^2 - 3(8) \stackrel{?}{\leq} 18$	$(0)^2 - 3(0) \stackrel{?}{\leq} 18$	$(-5)^2 - 3(-5) \stackrel{?}{\leq} 18$
$40 \not\leq 18$	$0 \leq 18$	$40 \not\leq 18$

مجموعة الحل هي $\{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$ أو $[-3, 6]$.

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة جبريًا.

5A. $x^2 + 5x < -6$

5B. $x^2 + 11x + 30 \geq 0$

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

1. $y \leq x^2 - 8x + 2$
2. $y > x^2 + 6x - 2$
3. $y \geq -x^2 + 4x + 1$

المثالان 2-3 **الاستنتاج المنطقي حل كل متباينة تربيعية مستعينًا بالتمثيل البياني.**

4. $0 < x^2 - 5x + 4$
5. $x^2 + 8x + 15 < 0$
6. $-2x^2 - 2x + 12 \geq 0$
7. $0 \geq 2x^2 - 4x + 1$

مثال 4 8. **كرة القدم** ركل لاعب الوسط الكرة نحو المرمى أثناء المباراة، يمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالمتر فوق سطح الأرض $h(t)$ عند الزمن t بالمعادلة $h(t) = -0.1t^2 + 2.4t + 2$. إذا كان ارتفاع المرمى 8 أمتار، فما الوقت الذي ستتمكن الركلة عنده من دخول المرمى؟

مثال 5 **حُلّ كل متباينة جبريًا.**

9. $x^2 + 6x - 16 < 0$
10. $x^2 - 14x > -49$
11. $x^2 + 12x \geq 28$
12. $x^2 - 4x \leq 21$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

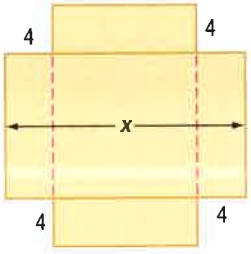
13. $y \geq x^2 + 5x + 6$
14. $x^2 - 2x - 8 < y$
15. $y \leq -x^2 - 7x + 8$
16. $-x^2 + 12x - 36 > y$
17. $y > 2x^2 - 2x - 3$
18. $y \geq -4x^2 + 12x - 7$

المثالان 2-3 **حُلّ كل متباينة مستعينًا بالتمثيل البياني.**

19. $x^2 - 9x + 9 < 0$
20. $x^2 - 2x - 24 \leq 0$
21. $x^2 + 8x + 16 \geq 0$
22. $x^2 + 6x + 3 > 0$
23. $0 > -x^2 + 7x + 12$
24. $-x^2 + 2x - 15 < 0$
25. $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$
26. $-3x^2 - 3x + 9 > 0$
27. $0 > -2x^2 + 4x + 4$
28. $3x^2 + 12x + 36 \leq 0$
29. $0 \leq -4x^2 + 8x + 5$
30. $-2x^2 + 3x + 3 \leq 0$

مثال 4 **تصميمات معمارية** يأخذ مدخل غرفة مقوس شكل قطع مكافئ يمكن تمثيله بالمعادلة $f(x) = -x^2 + 6x + 1$. ما المسافة من جانبي القوس التي يكون الارتفاع عندها 7 أمتار على الأقل؟

32. **التصنيع** يُصنع الصندوق بقص مربعات مساحتها 4 سنتيمترات من كل جانب من قطعة مربعة من الورق المقوى، ثم تُطوى الجوانب. إذا كانت $V(x) = 4x^2 - 64x + 256$ تمثل حجم الصندوق، فما أبعاد قطعة الورق المقوى الأصلية إذا كان حجم الصندوق لا يتجاوز 750 سنتيمترًا مكعبًا؟



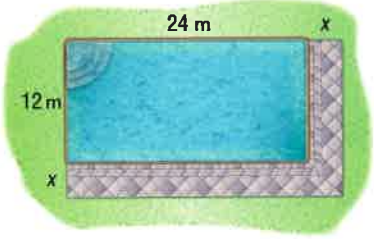
مثال 5 **حُلّ كل معادلة جبريًا.**

33. $x^2 - 9x < -20$
34. $x^2 + 7x \geq -10$
35. $2 > x^2 - x$
36. $-3 \leq -x^2 - 4x$
37. $-x^2 + 2x \leq -10$
38. $-6 > x^2 + 4x$
39. $2x^2 + 4 \geq 9$
40. $3x^2 + x \geq -3$
41. $-4x^2 + 2x < 3$
42. $-11 \geq -2x^2 - 5x$
43. $-12 < -5x^2 - 10x$
44. $-3x^2 - 10x > -1$

45. **المثابرة** تريد عائلة أن تضع زخارف بطول جانبي حمام السباحة لديها. وسيكون عرض الزخارف واحدًا على الجانبين، ولن تتجاوز المساحة الإجمالية لحمام السباحة والزخارف 750 مترًا مربعًا.

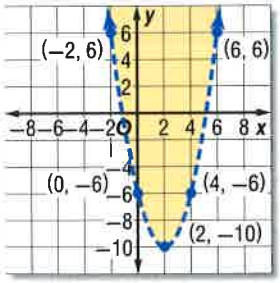
a. مثّل المتباينة التربيعية بيانيًا.

b. حدد قياسات العرض المحتملة للزخارف.

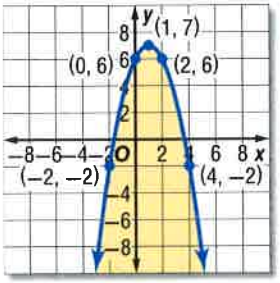


اكتب متباينةً تربيعية لكل تمثيل بياني.

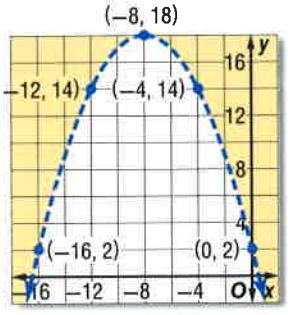
46.



47.



48.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُلّ كل متباينة تربيعية مستخدمًا التمثيل البياني أو جدولاً أو جبريًا.

49. $-2x^2 + 12x < -15$

50. $5x^2 + x + 3 \geq 0$

51. $11 \leq 4x^2 + 7x$

52. $x^2 - 4x \leq -7$

53. $-3x^2 + 10x < 5$

54. $-1 \geq -x^2 - 5x$

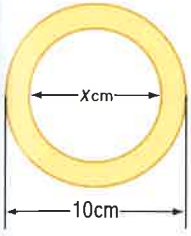
55. **الأعمال** تستخدم إحدى شركات تصنيع الإلكترونيات الدالة $P(x) = x(-27.5x + 3520) + 20{,}000$ في عمل نموذج لأرباحها الشهرية عند بيع x ألف مُشغل صوتي رقمي.

a. مثّل بيانيًا المتباينة التربيعية لأرباح شهرية قيمتها AED 100,000 على الأقل.

b. كم جهاز مُشغل صوتي رقمي يجب أن تبيع الشركة المُصنعة لتحقيق أرباح قيمتها AED 100,000 على الأقل شهريًا؟

c. على فرض أن الشركة المصنعة لديها مصاريف شهرية إضافية قيمتها AED 25000، فسّر كيف يؤثر ذلك على التمثيل البياني لدالة الأرباح. ثم حدد كم جهاز مُشغل صوتي رقمي ينبغي أن تبيعه الشركة المُصنعة لتحقيق أرباح قيمتها AED 100000 على الأقل.

56. **المرافق** يقوم أحد المقاولين بتركيب أنابيب الصرف لمرفأ السيارات الخاص بأحد مراكز التسوق. وينبغي أن يكون القطر الخارجي للأنبوب 10 سنتيمترات. ويجب أن تكون مساحة المقطع العرضي 35 سنتيمترًا مربعًا على الأقل وألا تزيد عن 42 سنتيمترًا مربعًا.



a. مثّل المتباينات التربيعية بيانيًا.

b. ما سمك أنبوب الصرف التي يمكن أن يستخدمها المقاول؟

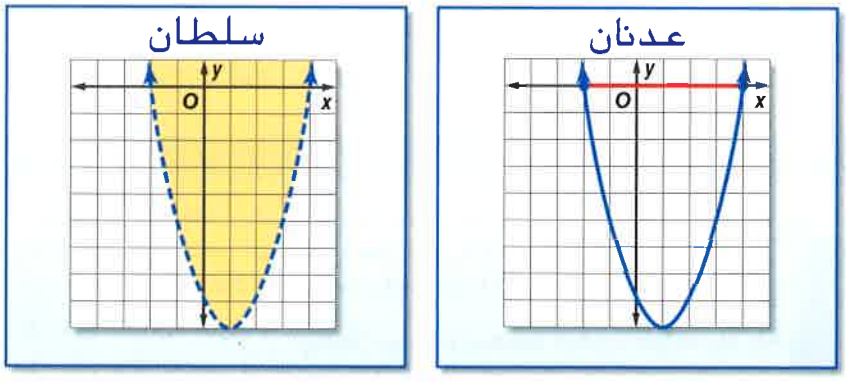
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينة تربيعية لكل حالة.

a. مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية.

b. مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

58. **نقد** استخدم سلطان وعدنان تمثيلاً بيانيًا لحل المتباينة التربيعية $x^2 - 2x - 8 > 0$. أيهما على صواب؟ اشرح.



59. **الاستنتاج** هل حدود مجموعة حل $x^2 + 4x - 12 \leq 0$ ضعف قيمة حدود $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$؟ فسّر.

60. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير صحيحة على الإطلاق. برّر استنتاجك.

تقاطع $y \leq -ax^2 + c$ و $y \geq ax^2 - c$ *هي المجموعة الخالية.*

61. **تحدٍّ** مثّل بيانيًا تقاطع التمثيلين البيانيين $y \leq -x^2 + 4$ و $y \geq x^2 - 4$.

62. **الكتابة في الرياضيات** ما أوجه تشابه الأساليب المستخدمة في حل المتباينات التربيعية والمعادلات التربيعية؟ وما أوجه اختلافها؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

تدريب على الاختبار المعياري

63. إجابة شبكية ينبغي أن تزرع أرض مساحتها 24.34 مترًا في 12.12 مترًا. يمكن أن يغطي كل حقيبة بذور 20.9 مترًا مربعًا من الأرض. كم حقيبة بذور ستحتاج؟

64. SAT/ACT ناتج ضرب عددين صحيحين ما بين 107 و 116. أيّ مما يلي لا يمكن أن يكون أحد الأعداد الصحيحة؟

A 5
B 10
C 12
D 15
E 23

65. الاحتمال يجب ترتيب خمسة طلاب بجانب بعضهم البعض بحيث يكون الطالب الأطول في المنتصف والطالبان الأقصران على الطرفين. إذا لم يكن هناك طالبان متساويين في الطول، فكم ترتيبًا مختلفًا يمكن ترتيبه؟

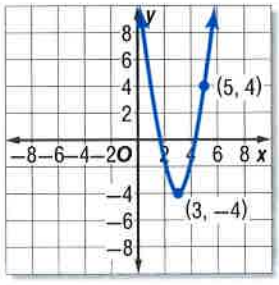
F 2
G 4
H 5
J 6

66. إجابة قصيرة بسّط $\frac{5+i}{6-3i}$.

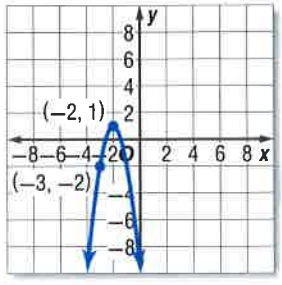
مراجعة شاملة

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 8-1)

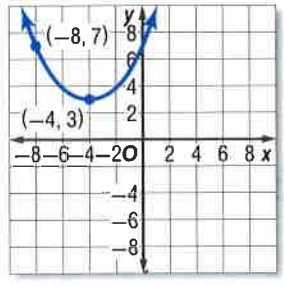
67.



68.



69.



أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية.

a. **أوجد قيمة المميز.**

b. **صِف عدد الجذور ونوعها.** (الدرس 7-1)

70. $4x^2 + 7x - 3 = 0$

71. $-3x^2 + 2x - 4 = 9$

72. $6x^2 + x - 4 = 12$

73. عدد كيلومترات استهلاك الوقود يُمكننا إيجاد عدد كيلومترات استهلاك الوقود y بالكيلومتر لكل لتر في سيارة ما باستخدام المعادلة $y = 10 + 0.9x - 0.01x^2$، حيث x هي سرعة السيارة بين 10 كيلومترات و 75 كيلومترًا في الساعة. أوجد مدى السرعات التي تعطي عدد كيلومترات استهلاك الوقود لـ 25 كيلومترًا في اللتر على الأقل. (الدرس 6-1)

اكتب كل معادلة في صيغة الرأس، إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة. حدد الرأس، ومحور التماثل واتجاه الفتحة. ثم مثّل الدالة بيانيًا (الدرس 8-1)

74. $y = -6(x + 2)^2 + 3$

75. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 8x$

76. $y = (x - 2)^2 - 2$

77. $y = 2x^2 + 8x + 10$

مراجعة المهارات

استخدم خاصية التوزيع لإيجاد كل ناتج ضرب.

78. $-6(x - 4)$

79. $8(w + 3x)$

80. $-4(-2y + 3z)$

81. $-1(c - d)$

82. $0.5(5x + 6y)$

83. $-3(-6y - 4z)$

McGraw-Hill Education

1-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
المزيد من المتباينات التربيعية

أكمل ما يلي لمزيد من التمرين على تمثيل المتباينات بيانيًا.

النشاط 1 تظليل الجزء الخارجي من القطع المكافئ

مثّل $y \geq -4x^2 + 12x - 7$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

أولاً، امسح جميع الدوال من قائمة Y=.

لتمثيل $y \geq -4x^2 + 12x - 7$ بيانيًا، أدخل المعادلة في قائمة Y=.

ثم استخدم السهم الأيسر لتحديد =. اضغط على ENTER حتى يتم تحديد التظليل فوق المستقيم.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ (−) 4 X,T,θ,n x^2 + 12 X,T,θ,n (−) 7 Zoom 6

تقع جميع الأزواج المرتّبة التي تكون عندها y أكبر من *أو تساوي* $-4x^2 + 12x - 7$ فوق *المستقيم أو عليه* وهي حلول للمتباينة.

النشاط 2 تظليل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y \leq -x^2 - 7x + 8$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

امسح التمثيل البياني المعروض أولاً.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= CLEAR

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ (−) X,T,θ,n x^2 (−) 7 X,T,θ,n + 8 GRAPH

تقع جميع الأزواج المرتّبة التي تكون عندها y أقل من *أو تساوي* $-x^2 - 7x + 8$ أسفل *المستقيم أو* عليه وهي حلول للمتباينة.

تمارين

1. قارن وقابل التمثيلين البيانيين الموضحين أعلاه.
2. في كل متباينة مذكورة في الأنشطة أعلاه، اكتب متباينة جديدة ومثّلها بيانيًا بحيث يكون لها أجزاءً معكوسة من القطع المكافئ المُظلل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل الحركة

إعداد التجربة

- ضع لوحة على كومة من الكتب لعمل منحدر.
- صِل جهاز جمع البيانات بحاسبة التمثيل البياني، وضعهما أعلى المنحدر ليتمكن الجهاز من قراءة حركة السيارة على المنحدر.
- أمسك السيارة على ارتفاع 15.24 cm تقريبًا من أسفل المنحدر، واضبط الجهاز على صفر.

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

النشاط

الخطوة 1 يضغط أحد أعضاء المجموعة على الزر لبدء تجميع البيانات.

الخطوة 2 يضع عضو آخر السيارة عند نهاية المنحدر. بعد أن تبدأ عملية جمع البيانات، ادفع السيارة دفعًا بسيطًا وسريعًا حتى تسير أعلى المنحدر نحو جهاز رصد الحركة.

الخطوة 3 أوقف جمع البيانات عندما تعود السيارة إلى نهاية المنحدر. واحفظ البيانات باسم "التجربة 1".

الخطوة 4 أزل دفترًا من الكومة، ثم كرر التجربة واحفظ البيانات باسم "التجربة 2". وفي التجربة 3، قم بعمل منحدر أكثر انحدارًا وكرر التجربة.

تحليل النتائج

1. ما نوع الدالة التي يُمكن استخدامها في تمثيل البيانات؟ برر إجابتك.

2. استخدم قائمة **CALC** (حساب) في إيجاد رأس التمثيل البياني. سجّل الإحداثيات في جدول مثل ذلك المرسوم يسارًا.

التجربة	الرأس (h, k)	النقطة (x, y)	المعادلة
1			
2			
3			

3. استخدم ميزة **TRACE** (تتبع) في الحاسبة في إيجاد إحداثيات نقطة أخرى على التمثيل البياني. ثم استخدم إحداثيات الرأس والنقطة في إيجاد معادلة التمثيل البياني.

4. أوجد معادلة التمثيل البياني للتجربة 2 و 3.

5. ما أوجه المقارنة بين معادلات التجارب 1 و 2 و 3؟ أي تمثيل بياني هو الأعرض، وأيها هو الأضيق؟ فسّر معنى ذلك في سياق الموقف. كيف يتم تمثيل ذلك في المعادلات؟

6. ما الذي تمثله نقاط التقاطع x والرأس في كل تمثيل بياني؟

7. لم كانت قيم h و k مختلفة في كل تجربة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الدرس 1-1)

- يمكن وصف الدالة التربيعية بمعادلة صيغتها $y = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$.
- محور التماثل للتمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$، هو $x = -\frac{b}{2a}$.

حل المعادلات التربيعية بيانيًا (الدروس 1-2)

- جذور المعادلة التربيعية هي أصفار الدالة التربيعية المرتبطة. ويمكنك إيجاد أصفار الدالة التربيعية من خلال إيجاد نقاط التقاطع مع المحور x في التمثيل البياني.

حل المعادلات التربيعية (الدروس 1-3)

- **الخطوة 1** - أكمل المربع: أوجد أحد نصفي b، ومعامل x. **الخطوة 2-** قم بتربيع نتيجة الخطوة 1. **الخطوة 3** - أضف نتيجة الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.
- القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حل المعادلات التربيعية (الدروس 1-2، و 1-4، و 1-6)

- يمكن حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، وتكون الحلول نقاط التقاطع مع المحور x أو أصفار الدالة التربيعية ذات الصلة.
- يمكن حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع. ولإكمال المربع لـ $x^2 + bx$، أوجد $\frac{1}{2}$ لـ b، وربّع هذا الناتج، ثم اجمع الناتج إلى $x^2 + bx$.
- يمكن حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام، $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

الأعداد المركبة (الدرس 1-5)

- i هي الوحدة التخيلية؛ $i^2 = -1$ و $i = \sqrt{-1}$.

تحويلات الدوال التربيعية (الدرس 1-7)

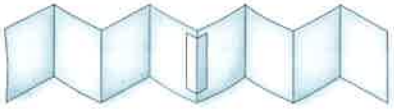
- $f(x) = x^2 + c$ يزيح التمثيل البياني لأعلى أو لأسفل.
- $f(x) = ax^2$ يضغط التمثيل البياني أو يوسّعه رأسيًا.
- التمثيل البياني لـ $y = (x - h)^2 + k$ هو التمثيل البياني لـ $y = x^2$ لكنه مُزاح بمقدار $|h|$ وحدات يسارًا إذا كانت h سالبة أو بمقدار h وحدات يمينًا إذا كانت h موجبة وبمقدار k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة أو بمقدار $|k|$ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة.
- تأمل المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$، حيث $a \neq 0$. فإن التمثيل البياني يفتح لأعلى؛ وإذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني يفتح لأسفل. إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يكون أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$. إذا كانت $|a| < 1$، فإن التمثيل البياني يكون أوسع من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

المتباينات التربيعية (الدرس 1-8)

- مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا، واختر نقطةً *ليست* على القطع المكافئ، وحدد هل هذا حل أم لا، وظلل المنطقة المناسبة للحل.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفردات الأساسية

دالة القيمة المطلقة **absolute value function**

محور التماثل **axis of symmetry**

إكمال المربع **completing the square**

تغيير الأبعاد/التمدد **dilation**

المميّز **discriminant**

جذر مضاعف **double root**

دالة العدد الصحيح الأكبر **greatest integer function**

القيمة العظمى **maximum**

القيمة الصغرى **minimum**

قطع مكافئ **parabola**

مرافقات مركبة **complex conjugates**

عدد مركب **complex number**

المميّز **discriminant**

صيغة محللة إلى العوامل **factored form**

طريقة فويل **FOIL method**

الوحدة التخيلية **imaginary unit**

عدد تخيلي بحت **pure imaginary number**

المتباينة التربيعية **quadratic inequality**

خاصيّة الجذر التربيعي **Square Root Property**

صيغة الرأس **vertex form**

دالة متعددة التعريف **piecewise-defined function**

دالة خطية متقطعة **piecewise-linear function**

صيغة تربيعية **Quadratic Formula**

دالة تربيعية **quadratic function**

الانعكاس **reflection**

صيغة قياسية **standard form**

دالة درجية **step function**

التحويل **transformation**

الإزاحة **translation**

رأس **vertex**

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صوابًا* أم *خطأً*. وإذا كانت *خطأً*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. يتقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ في نقطة واحدة تُسمى الرأس.

2. تُستخدم طريقة تُسمى طريقة فويل في جعل التعبير التربيعي تربيعًا كاملاً حتى يتم حل المعادلة المرتبطة.

3. العدد $6i$ يُسمى عددًا تخيليًا بحتًا.

4. العددان $3i + 2$ و $3i - 2$ يُسميان مركبين مترافقين.

5. يمكن إيجاد محور التماثل للدالة التربيعية باستخدام المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$.

6. الرأس هو النقطة العظمى أو الصغرى في قطع مكافئ.

7. التمثيل البياني لدالة تربيعية عبارة عن خط مستقيم.

8. يكون للتمثيل البياني للدالة التربيعية قيمة عظمى إذا كان معامل الحد x^2 موجبًا.

9. المعادلة التربيعية التي لها تمثيل بياني به نقطتا تقاطع مع المحور x يكون لها جذر حقيقي واحد.

10. التعبير $b^2 - 4ac$ يسمّى المميز.

11. الدالة التي تعرّف تعريفات مختلفة بالنسبة للأجزاء المختلفة لمجالها تسمّى دالة متعددة التعريف.

12. مدى دالة العدد الصحيح الأكبر هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

13. حلول المعادلة التربيعية تُسمّى جذورًا.

14. التمثيل البياني للدالة الأصلية يُزاح للأسفل ليشكّل التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2 + 5$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

1-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

تأمل كل معادلة.

a. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

11. $y = x^2 - 4x + 4$

12. $y = -x^2 + 3x$

13. $y = x^2 - 2x - 3$

14. $y = -x^2 + 2$.

15. الصاروخ تم إطلاق صاروخ لعبة بسرعة متجهة لأعلى معدلها 32 مترًا في الثانية. وتعطي المعادلة $h = -16t^2 + 32t$ ارتفاع الكرة بعد t ثوان من إطلاقه.

a. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. حدّد مجالًا ومدى معقولين لهذا الموقف.

مثال 1

تأمل $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

a. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

إذا كان $f(x) = x^2 + 6x + 5$، فإن $a = 1$، و $b = 6$، و $c = 5$.

لأن a موجب، فإن التمثيل البياني ينفتح للأعلى، وإذًا يكون للدالة قيمة صغرى.

b. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة الصغرى هي الإحداثي الرأسي y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{-b}{2a}$ أو $\frac{-6}{2(1)}$ أو -3.

الدالة الأصلية $f(x) = x^2 + 6x + 5$

$x = -3$ $f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 5$

بسّط. $f(-3) = -4$

القيمة الصغرى هي -4.

c. حدّد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية. والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها، أو $\{y | y \geq -4\}$.

1-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. وإذا كان لا يُمكن إيجاد جذور صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

16. $x^2 - 3x - 4 = 0$

17. $-x^2 + 6x - 9 = 0$

18. $x^2 - x - 12 = 0$

19. $x^2 + 4x - 3 = 0$

20. $x^2 - 10x = -21$

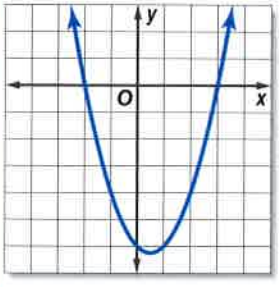
21. $6x^2 - 13x = 15$

22. نظرية الأعداد أوجد عددين مجموعهما 2 وناتج ضربهما -15.

مثال 2

حُلّ $x^2 - x - 6 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثّل بيانيًا الدالة ذات الصلة $f(x) = x^2 - x - 6$.



يبدو أن نقاط التقاطع مع المحور x في التمثيل البياني تقع عند -2 و 3، إذًا فالحلان هما -2 و 3.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-3 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

23. $x^2 + 6x + 9 = 16$

24. $-a^2 - 10a + 25 = 25$

25. $y^2 - 8y + 16 = 36$

26. $y^2 - 6y + 2 = 0$

27. $n^2 - 7n = 5$

28. $-3x^2 + 4 = 0$

37. نظرية الأعداد أوجد عددين مجموعهما -2 وناتج ضربهما -48.

مثال 3

حُلّ $x^2 - 16x + 32 = 0$ بإكمال المربع، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

اعزل الحدين x^2 و x، ثم أكمل المربع وأوجد الحل.

$x^2 - 16x + 32 = 0$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 16x = -32$	اعزل الحدين x^2 و x.
$x^2 - 16x + 64 = -32 + 64$	أكمل المربع.
$(x - 8)^2 = 32$	حلّل إلى العوامل.
$x - 8 = \pm\sqrt{32}$	احسب الجذر التربيعي.
$x = 8 \pm \sqrt{32}$	اجمع 8 إلى كل طرف.
$x = 8 \pm 4\sqrt{2}$	بسّط.

الحلان هما 2.3 و 13.7 تقريبًا.

1-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية مستخدمًا الجذور المعطاة.

29. $5, 6$

30. $-4, 2$

31. $\frac{1}{6}, 5$

32. $-3, -7$

33. $-\frac{2}{3}, 1$

34. $-\frac{1}{4}, -1$

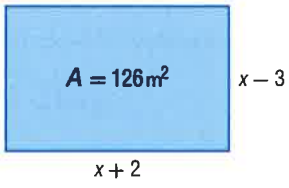
حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

35. $2x^2 - 2x - 24 = 0$

36. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

37. $3x^2 - 16x + 5 = 0$

14. أوجد قيمة x وأبعاد المستطيل أدناه.



مثال 4

اكتب معادلةً تربيعية بالصيغة القياسية مستخدمًا $-\frac{1}{2}$ و 4 كجذري المعادلة.

$(x - p)(x - q) = 0$	اكتب النمط.
$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x - 4) = 0$	عوّض عن p بـ $-\frac{1}{2}$ وعن q بـ 4.
$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) = 0$	بسّط.
$x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$	اضرب.
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	اضرب كل طرف في 2 بحيث يكون b و c عددين صحيحين.

مثال 5

حُلّ $2x^2 - 3x - 5 = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

$2x^2 - 3x - 5 = 0$	معادلة أصلية
$(2x - 5)(x + 1) = 0$	حلل ثلاثي الحدود إلى العوامل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{5}{2}$ $\quad x = -1$	

مجموعة الحل هي $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$ أو $\left\{x \mid x = -1, \frac{5}{2}\right\}$.

McGraw-Hill Education © محمولة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

1-5 الأعداد المركبة

بسّط.

38. $\sqrt{-8}$
39. $(6 + 2i) - (4 - 3i)$
40. $(2 - i) + (13 + 4i)$
41. $(6 + 5i)(3 - 2i)$

19. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في طرف دائرة توالٍ $2j + 3$ أوم، وتبلغ المقاومة في طرف آخر من الدائرة $3j - 4$ أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

42. $2x^2 + 50 = 0$
43. $4x^2 + 16 = 0$
44. $3x^2 + 15 = 0$
45. $8x^2 + 16 = 0$
46. $4x^2 + 1 = 0$

مثال 6

بسّط $(12 + 3i) - (-5 + 2i)$.

$(12 + 3i) - (-5 + 2i)$

$= [12 - (-5)] + (3 - 2)i$ قم بتجميع الأجزاء الحقيقية والتخيلية.

$= 17 + i$ بسّط.

مثال 7

حُلّ $3x^2 + 12 = 0$.

$3x^2 + 12 = 0$ المعادلة الأصلية

$3x^2 = -12$ اطرح 12 من كل طرف.

$x^2 = -4$ اقسم كل طرف على 3.

$x = \pm\sqrt{-4}$ خاصية الجذر التربيعي

$x = \pm 2i$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1}$

1-6 القانون العام والمميز

أكمل الأجزاء a-c لكل معادلة تربيعية.

a. أوجد قيمة المميز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. أوجد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

47. $x^2 - 10x + 25 = 0$
48. $x^2 + 4x - 32 = 0$
49. $2x^2 + 3x - 18 = 0$
50. $2x^2 + 19x - 33 = 0$
51. $x^2 - 2x + 9 = 0$
52. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
53. $2x^2 + 5x + 9 = 0$

54. **العلوم الفيزيائية** قذفت لميس كرةً بسرعة ابتدائية قيمتها 40 مترًا في الثانية. وكانت معادلة ارتفاع الكرة هي $h = -16t^2 + 40t + 5$، حيث يمثل h الارتفاع بالمتر ويمثل t الزمن بالثانية. متى ستسقط الكرة على الأرض؟

مثال 8

حُلّ $x^2 - 4x - 45 = 0$ باستخدام القانون العام.

في $x^2 - 4x - 45 = 0$، $a = 1$ و $b = -4$ و $c = -45$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$

$= \dfrac{4 \pm 14}{2}$

اكتب في صيغة معادلتين.

$x = \dfrac{4 + 14}{2}$ أو $x = \dfrac{4 - 14}{2}$

$= 9$ $= -5$

مجموعة الحل هي $\{-5, 9\}$ أو $\{x \mid x = -5, 9\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1-7 تحويلات الدوال التربيعية

اكتب كل معادلة تربيعية بصيغة الرؤوس، إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة. ثم حدد الرؤوس ومحور التماثل واتجاه المنحنى. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

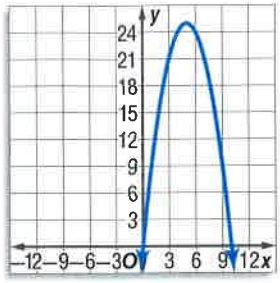
55. $y = -3(x - 1)^2 + 5$

56. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$

57. $y = 2x^2 + 12x - 8$

58. $y = 3x^2 + 36x + 25$

59. يبين التمثيل البياني الموجود يسارًا ناتج ضرب عددين مجموعهما 10. أوجد دالةً تمثل ناتج الضرب هذا واستخدمها في تحديد العددين اللذين ينتجان أكبر ناتج ضرب.



مثال 9

اكتب الدالة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرؤوس، ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتحة.

$y = 3x^2 + 24x + 15$	المعادلة الأصلية
$y = 3(x^2 + 8x) + 15$	قسم إلى مجموعات وحلل إلى العوامل.
$y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$	أكمل التربيع.
$y = 3(x + 4)^2 - 33$	أعد كتابة $x^2 + 8x + 16$ في صيغة تربيع كامل.

إذًا، $a = 3$، و $h = -4$، و $k = -33$. يوجد الرأس عند $(-4, -33)$ ومحور التماثل هو $x = -4$. حيث a موجبة والتمثيل البياني مفتوح لأعلى.

1-8 المتباينات التربيعية

مثّل كل متباينة تربيعية بيانيًا.

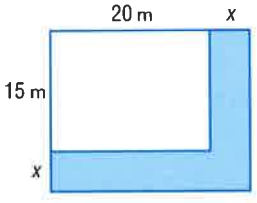
60. $y \geq x^2 + 5x + 4$

61. $y > x^2 - 6x + 8$

62. $y < -x^2 + 5x - 6$

63. $y \leq x^2 + 10x - 4$

64. يريد عمر أن يضع رصيفًا خشبيًا بطول الحديقة. وسيكون عرض الرصيف الخشبي واحدًا على الجانبين، ولا يمكن أن يزيد إجمالي مساحة الحديقة والرصيف الخشبي عن 500 متر مربع. ما عرض الرصيف الخشبي؟



حُلّ كل متباينة جبريًا أو مستعينًا بالتمثيل البياني.

65. $x^2 + 8x + 12 > 0$

66. $6x + x^2 \geq -9$

67. $2x^2 + 3x - 20 > 0$

68. $4x^2 - 3 < -5x$

69. $3x^2 + 4 > 8x$

مثال 10

مثّل بيانيًا $y > x^2 + 3x + 2$.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا، $y > x^2 + 3x + 2$. ونظرًا لأن رمز المتباينة $>$ مستخدم، فسيكون القطع المكافئ مرسومًا بخطوط متقطعة.

الخطوة 2 اختبر نقطةً لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ مثل $(0, 0)$.

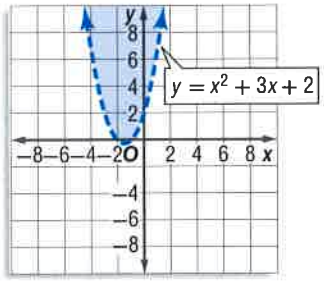
$$y > x^2 + 3x + 2$$

$$(0) \stackrel{?}{>} (0)^2 + 3(0) + 2$$

$$0 \not> 2$$

إذًا، $(0, 0)$ ليست حلاً للمتباينة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي لا تشتمل على النقطة $(0, 0)$.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار

استخدم جدول قيم لتمثيل الدوال التالية بيانيًا، وحدّد المجال والمدى.

1. $y = x^2 + 2x + 5$
2. $y = 2x^2 - 3x + 1$

تأمل $y = x^2 - 7x + 6$.

3. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.
4. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.
5. ما المجال والمدى؟

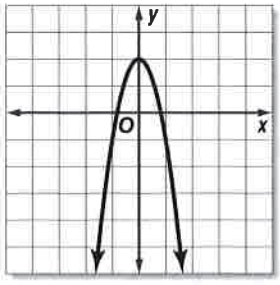
حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. وإن كان من غير الممكن إيجاد جذور صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

6. $x^2 + 7x + 10 = 0$
7. $x^2 - 5 = -3x$

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

8. $g(x) = x^2 - 5$
9. $g(x) = -3x^2$
10. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$

11. الاختيار من متعدد أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



A $y = -3x^2$

B $y = 3x^2 + 1$

C $y = x^2 + 2$

D $y = -3x^2 + 2$

حل كل معادلة بإكمال المربع.

12. $x^2 + 2x + 5 = 0$
13. $x^2 - x - 6 = 0$
14. $2x^2 - 36 = -6x$

حُلّ كل معادلة مما يلي باستخدام القانون العام، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

15. $x^2 - x - 30 = 0$
16. $x^2 - 10x = -15$
17. $2x^2 + x - 15 = 0$

18. البيسبول يضرب إسماعيل كرة البيسبول في الهواء، وتمثّل المعادلة $h = -16t^2 + 60t + 3$ ارتفاع h الكرة بالأمتار بعد t من الثواني. فما مدة بقاء الكرة في الهواء؟

19. مثّل بيانيًا $\{(2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, -4)\}$. حدّد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثّل *دالة خطية*، أم *دالة تربيعية*، أم *دالة أسية*.

20. ابحث عن نمط في الجدول لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

21. نادي السيارات يوضّح الجدول عدد أعضاء نادي السيارات على مدار أربعة أعوام متتالية بعد افتتاحه.

الوقت (الأعوام)	0	1	2	3	4
الأعضاء	10	20	40	80	160

a. حدّد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات.

b. اكتب دالة تمثّل البيانات.

c. توقّع عدد أعضاء نادي السيارات بعد 6 أعوام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار

22. الاختيار من متعدد أيّ من المعادلات المذكورة أدناه لها جذور عند -6 و $\frac{1}{5}$؟

A $0 = 5x^2 - 29x - 6$

B $0 = 5x^2 + 31x + 6$

C $0 = 5x^2 + 29x - 6$

D $0 = 5x^2 - 31x + 6$

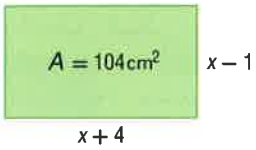
23. الفيزياء قُذفت كرة في الهواء في اتجاه رأسي بسرعة 112 مترًا في الثانية، وكانت الكرة قد أطلقت من مسافة 6 أمتار فوق سطح الأرض. ويُمثل الارتفاع فوق سطح الأرض t ثانية بعد الإطلاق باستخدام $h(t) = -16t^2 + 112t + 6$.

a. متى ستصل الكرة لـــ الكرة 130 مترًا؟

b. هل يمكن أن تصل الكرة 250 مترًا؟ فسّر.

c. بعد كم ثانية من إطلاق الكرة سترتطم الكرة بالأرض؟

24. تبلغ مساحة المستطيل الموجود أدناه 104 سنتيمترات مربعة. أوجد قيمة x وأبعاد المستطيل.



25. الاختيار من متعدد ما قيمة c التي تجعل ثلاثي الحدود $x^2 - 12x + c$ ثلاثي حدود تربيعيًا كاملاً؟

F 6

G 12

H 36

J 144

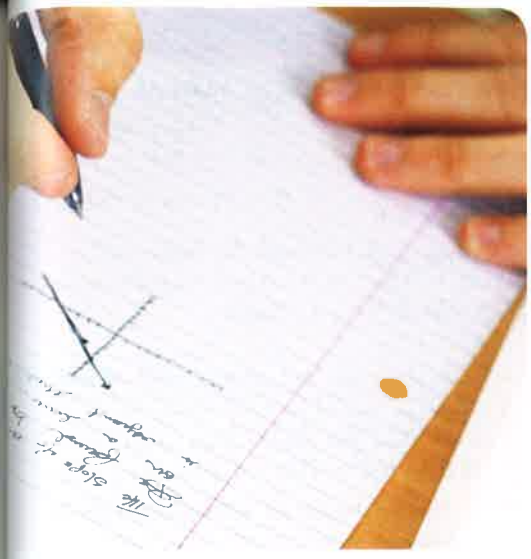
حُلّ كل متباينة جبريًا أو مستعينًا بالتمثيل البياني.

26. $x^2 + 6x > -5$

27. $4x^2 - 19x \leq -12$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحضير للاختبارات المعيارية



استخدام تمثيل بياني

سيساعدك استخدام التمثيل البياني على حل العديد من أنواع المسائل المختلفة في الاختبارات القياسية. ويمكن أن تساعدك التمثيلات البيانية على حل المعادلة وتقييم الدوال وتفسير الحلول في المسائل من الحياة اليومية.

إستراتيجيات استخدام التمثيل البياني

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- كيف يمكن أن يساعدني التمثيل البياني على حل المسألة؟

الخطوة 2

ارسم التمثيل البياني الخاص بك.

- ارسم التمثيل البياني على قصاصة من الورق إذا كان ذلك مناسبًا.
- ويمكنك أيضًا استخدام حاسبة التمثيل البياني في إنشاء التمثيل البياني، إذا كان استخدامها مسموحًا به.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم التمثيل البياني ليساعدك على تمثيل المسألة وحلها.
- تحقق لتتأكد من أن الإجابة منطقية.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

صنع طلاب السيد رشيد في صف الفيزياء نموذجًا لصاروخ. تم إطلاق الصاروخ في حقل كبير بسرعة ابتدائية لأعلى قيمتها 128 مترًا في الثانية. الدالة $h(t) = -16t^2 + 128t$ تمثل ارتفاع الصاروخ فوق سطح الأرض (بالمتر) t ثانية بعد إطلاقه. كم سيستغرق الصاروخ ليصل إلى أقصى ارتفاع له؟

A 4 ثوانٍ

B 5 ثوانٍ

C 6 ثوانٍ

D 8 ثوانٍ

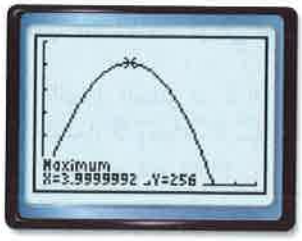
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يسمح لك تمثيل الدالة التربيعية بيانيًا بتحديد قمة ارتفاع الصاروخ ووقت حدوثها. ويمكن أن تساعدك حاسبة التمثيل البياني على تمثيل الدالة بيانيًا وتحليلها سريعًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= (−) 16 X,T,θ,n x^2 + 128 X,T,θ,n GRAPH

بعد تمثيل المعادلة بيانيًا، استخدم **maximum (الحد الأقصى)** في قائمة **CALC**.

اضغط على 4 **[CALC]** 2nd. ثم استخدم ◀ في وضع المؤشر يسار أقصى نقطة واضغط على ENTER. واستخدم ▶ في وضع المؤشر يمين أقصى نقطة واضغط على ENTER ENTER.



[0, 10] scl: 1 by [0, 300] scl: 50

يبين التمثيل البياني أن الصاروخ يستغرق 4 ثوانٍ ليصل إلى أقصى ارتفاع له وهو 256 مترًا. الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. ما جذرا المعادلة $y = 2x^2 + 10x - 48$؟

A $-5, 4$

B $-6, 1$

C $-8, 3$

D $2, 3$

2. كم مرة يقطع التمثيل البياني لـ $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ مع المحور x؟

F 0 H 2

G 1 J 3

3. أي عبارة تقدم أفضل وصف للتمثيلين البيانيين للمعادلتين؟

$$16x - 2y = 24$$
$$12x = 3y - 36$$

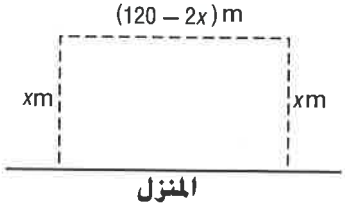
A المستقيمان متوازيان.

B المستقيمان متماثلان.

C يتقاطع المستقيمان عند نقطة واحدة فقط.

D يتقاطع المستقيمان عند أكثر من نقطة، ولكنهما ليسا متماثلين.

4. تستخدم فوزية 120 مترًا من السياج لبناء بيت مستطيل. وسيكون بيتها أحد أضلاع المستطيل.



تمثل الدالة $f(x) = x(120 - 2x)$ مساحة البيت. ما أكبر مساحة يمكن لفوزية أن تُحددها بالسياج؟

F $1650\ m^2$ H $1980\ m^2$

G $1800\ m^2$ J $2140\ m^2$

5. في أي معادلة يوجد إحداثي x للرأس على 4؟

A $f(x) = x^2 - 8x + 15$ C $f(x) = x^2 + 6x + 8$

B $f(x) = -x^2 - 4x + 12$ D $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

6. ما قيمة x التي تصل عندها $f(x) = x^2 + 5x + 6$ إلى أقصى قيمة لها؟

F -5 H $-\frac{5}{2}$

G -3 J -2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 2$ مُزاح لأسفل بمقدار 5 وحدات لرسم التمثيل البياني للدالة $h(x)$. أيّ مما يلي يمكن أن يكون $h(x)$؟

F $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 7$

G $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x - 3$

H $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 9x + 2$

J $h(x) = \frac{2}{5}x^2 + x + 2$

2. يُمكن استخدام الدالة $P(t) = -0.068t^2 + 7.85t + 56$ في تقدير تعداد سكان مدينة بالآلاف في الفترة ما بين عامي 1960 و 2000. مدى t الدالة هو عدد السنوات منذ عام 1960. وفقًا للنموذج، في أي سنة بلغ تعداد المدينة 200,000 نسمة؟

F 1974 H 1981

G 1977 J 1983

3. ماذا يحدث للتمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 4$ عند تغييرها إلى $y = x^2 - 3$؟

F يتغير ميل التمثيل البياني.

G يتسع التمثيل البياني.

H يحتفظ التمثيل البياني بالشكل نفسه، وتتحرك رأس التمثيل البياني لأسفل.

J يحتفظ التمثيل البياني بالشكل نفسه، وتُزاح رأس التمثيل البياني يسارًا.

4. أي معادلة سينشأ عنها أضيق قطع مكافئ عند تمثيله بيانيًا؟

A $y = 3x^2$ C $y = -6x^2$

B $y = \frac{3}{4}x^2$ D $y = -\frac{3}{4}x^2$

5. أيّ مما يلي *لا* يصف التمثيل البياني بدقة $y = -2x^2 + 4$؟

A القطع المكافئ متناظر حول المحور y.

B يفتح القطع المكافئ لأسفل.

C نقطة الأصل في القطع المكافئ هي رأسه.

D يقطع القطع المكافئ المحور x في موضعين مختلفين.

6. أيّ مما يلي *ليس* عاملاً في $x^4 - 6x^2 - 27$؟

A $x^2 + 3$ C $x + 3$

B $x - 3$ D $x^2 - 3$

7. مثّل بيانيًا $f(x) \geq |x - 2|$ على شبكة إحداثية.

8. **إجابة شبكية** كم مرة يقطع التمثيل البياني لـ $y = x^2 - 4x + 10$ المحور x؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة مختصرة/إجابة شبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. إجابة شبكية بسّط $-2i \times 5i$.

10. صِف إزاحة التمثيل البياني لـ $y = (x + 5)^2 - 1$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$.

الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

11. بالنسبة للمتباينة التربيعية المُعطاة $y = ax^2 + bx + c$. صِف ما يخبرك به المميز $b^2 - 4ac$ عن جذور المعادلة. انظر الهامش.

12. يعمل والد خليفة على تصنيع صندوق أدوات على شكل منشور مستطيل. ويريد أن يجعل سطح مساحته 62 مترًا مربعًا. وسيكون ارتفاع الصندوق أقصر من عرضه بمتر واحد، وسيكون الطول أطول من الارتفاع بثلاثة أمتار.

a. ارسم نموذجًا لتمثيل المسألة.

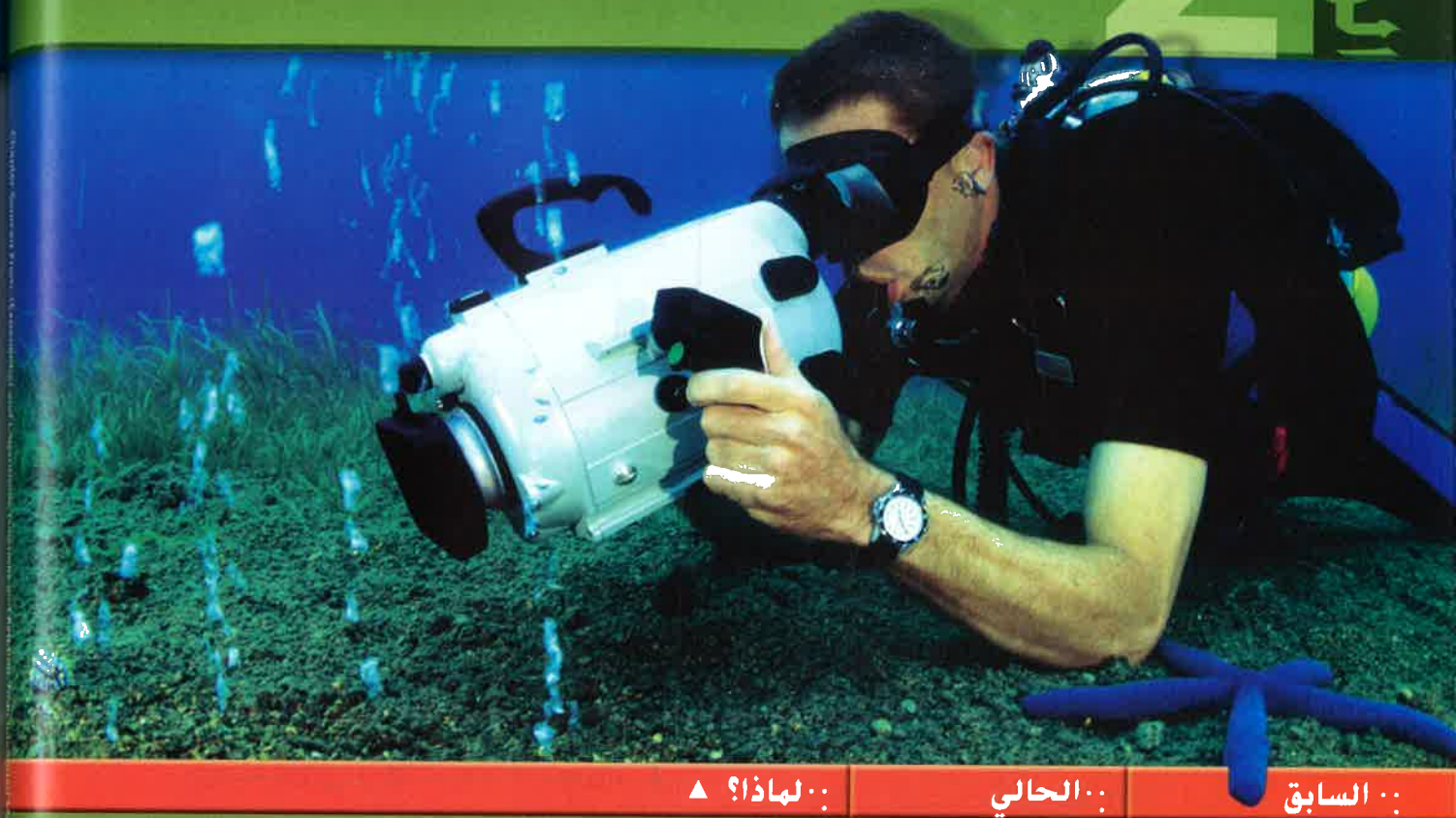
b. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل مساحة سطح صندوق الأدوات.

c. ما أبعاد صندوق الأدوات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 2

الدوال والمعادلات الأسيّة



السابق

- قمتَ بتمثيل الدوال وتحويلات الدوال بيانيًا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.
  - حلّ المعادلات والمتباينات الأسيّة.
  - حل المسائل التي تتضمن نموًا وتضاؤلًا أسيًا.

لماذا؟ ▲

- **العلوم** الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواءٌ أكنت تدرس الكيمياء أو علم الحياء أو علم المتحجرات أو علم الحيوان أو علم الإنسان. فإنك ستحتاج إلى مهارات رياضية قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالفيروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونموّ الجراثيم والانشطار الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد حل اختبار التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تمرين سريع

بسّط. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفرًا.

1. $a^4a^3a^5$
2. $(2xy^3z^2)^3$
3. $\dfrac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$
4. $\left(\dfrac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5. **الكثافة** كثافة جسم ما تساوي الكتلة مقسومة على الحجم. لدينا جسمٌ كتلته 7.5×10^3 غراماً وحجمه 1.5×10^3 سنتيمترًا مكعبًا. ما هي كثافة الجسم؟

أوجد معكوس كلّ من الدّوال التالية. ثمّ مثل الدّالة ومعكوسها بيانيًا.

6. $f(x) = 2x + 5$
7. $f(x) = x - 3$
8. $f(x) = -4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10. $f(x) = \frac{x-1}{2}$
11. $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إذا كان كل زوجٍ من الدوال التالية عبارة عن دالتين عكسيتين.

12. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$
13. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$

14. **الطعام** يبلغ سعر قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجبن في مطعم بيتزا AED 12 إضافةً إلى AED 2 لكلّ طبقة إضافية. فإذا كانت $f(x) = 2x + 12$ تمثّل تكلفة البيتزا المتوسطة التي تضم عدد x من الطبقات، فأوجد $f^{-1}(x)$ واشرح معناها.

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط $\dfrac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ وافترض أنّه لا يوجد متغير يساوي صفرًا.

$\dfrac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$

بسّط البسط باستخدام القوى الأسيّة لقاعدة القوة وبسّط المقام باستخدام قاعدة ناتج ضرب القوى.

$= \dfrac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8}$

بسّط باستخدام قاعدة ناتج قسمة القوى الأسيّة.

$= \dfrac{1}{bc^4}$ or $b^{-1}c^{-4}$

مثال 2

أوجد معكوس $f(x) = 3x - 1$.

الخطوة 1 عوّض عن $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية:
$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

الخطوة 2 بدّل بين x و y: $x = 3y - 1$.

الخطوة 3 حُلّ لإيجاد قيمة y.

$x = 3y - 1$ بالعكس

$x + 1 = 3y$ أضف 1 إلى كل طرف.

$\dfrac{x+1}{3} = y$ اقسم كل طرف على 3.

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ بسّط.

الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

البدء في هذه الوحدة

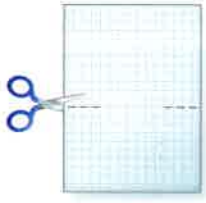
ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات الأسيّة والجذرية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالدّوال الأسيّة. وابدأ بورقتي تمثيل بياني.

1 **اطوِ** الورقتين إلى نصفين بالعرض.

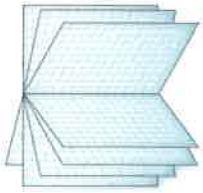
الورقة الأولى



2 **على** الورقة الأولى، قصّ لمسافة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.

الورقة الثانية

3 **على** الورقة الثانية، قصّ منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قصّ.



4 **أدخل** الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاذِ بين الطيّتين، ثمّ سمّ الصفحات بأرقام الدروس.

المفردات الجديدة

الدالة الأسيّة	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
خط تقارب	asymptote
عامل النمو	growth factor
التضاؤل الأسي	exponential decay
عامل التضاؤل	decay factor
المعادلة الأسيّة	exponential equation
المرابحة المركبة	compound interest
المتباينة الأسيّة	exponential inequality
مرافق	conjugate
معادلات جذرية	radical equations

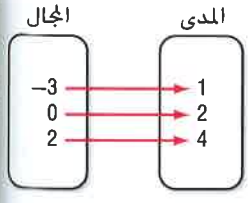
مراجعة المفردات

المجال مجموعة جميع إحداثيات x الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يُقرن فيها كل عنصر من عناصر المجال مع عنصر واحد فقط من عناصر المدى

المدى مجموعة جميع إحداثيات y الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقةٍ ما

$\{(-3,1), (0, 2), (2, 4)\}$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

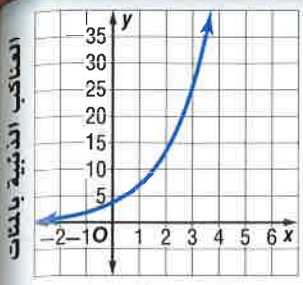
2-1 الدوال الأسيّة

السابق:
- أوجدت قيمة التعابير العددية التي تتضمن أسسًا.

الحالي:
1 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.
2 تحديد البيانات التي تعرض سلوكًا أسيًّا.

لماذا؟
- قد تبدو العناكب الذئبية مخيفة بأجسامها وسيقانها الكبيرة المشعرة، لكنها غير ضارة للبشر. يوضح التمثيل البياني مجموعة عناكب ذئبية تتزايد مع الوقت. لاحظ أن التمثيل البياني ليس خطيًا.

التمثيل البياني يمثل الدالة $y = 3(2)^x$. هذا مثال لدالة *أسيّة*.



السنوات منذ 2010

المفردات الجديدة
الدالة الأسيّة
exponential function
دالة النمو الأسيّ
exponential growth function
دالة التضاؤل(الاضمحلال) الأسيّ
exponential decay function

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا

تُعتبر **الدالة الأسيّة** دالة مكتوبة على الصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس ثابت والأس متغير. الدوال الأسيّة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدالة الأسيّة

الشرح الدالة الأسيّة دالة يمكن كتابتها بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

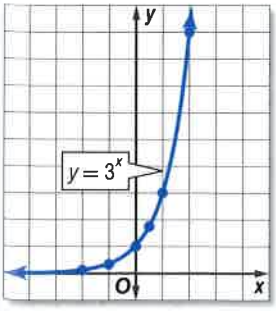
أمثلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

مثال 1 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0, b > 1$

مثّل بيانيًا $y = 3^x$. أوجد طول المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسيّ y عند 1.
إذًا المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المحور الأفقي x ولا توجد تقاطع مع المحور الأفقي x. التمثيل البياني متزايد على المجال كله.



x	3^x	y
−2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
−1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	≈1.73
1	3^1	3
2	3^2	9

تمرين موجّه

1. مثّل بيانيًا $y = 7^x$. أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0, b > 1$، تُسمى **دوال النمو الأسيّ** وكلها لها نفس شكل التمثيل البياني كما في المثال 1. الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0$ و $0 < b < 1$ تُسمى **دوال الاضمحلال الأسيّ** ولها أيضًا الشكل العام نفسه.

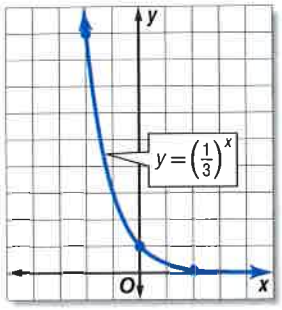
نصيحة دراسية

$a < 0$ إذا كانت قيمة a أقل من 0، فسينعكس التمثيل البياني بالمحور الأفقي x.

مثال 2 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0$ و $0 < b < 1$

مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$



المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. لاحظ أنه مع زيادة x، تتناقص قيم y بسرعة أقل.

تمرين موجّه

2. مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

يمكن تلخيص الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة كالتالي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

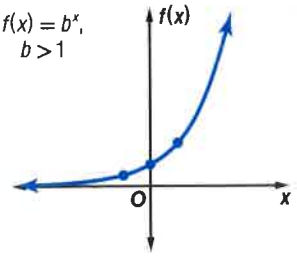
دوال النمو الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ b > 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية؛ جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y. لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع زيادة x، تزيد $f(x)$؛ مع انخفاض x، تقترب $f(x)$ من 0



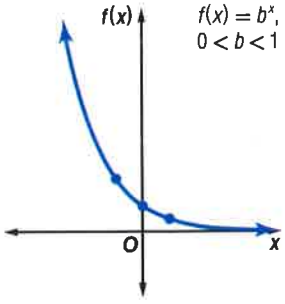
دوال الاضمحلال الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ 0 < b < 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية؛ جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y. لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع زيادة x، تقترب $f(x)$ من 0؛ مع تناقص x، تزيد $f(x)$

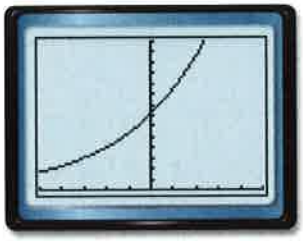


تحدث الدوال الأسيّة في الكثير من مواقف الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال الأسيّة في حل المسائل

الصودا تمثل الدالة $C = 179(1.029)^t$ مقدار الصودا المستهلك في العالم، حيث C هي المقدار المستهلك بالمليار لتر t هي عدد السنوات منذ عام 2000.

a. مثّل الدالة بيانيًا. ما قيم C ذات المعنى في سياق المسألة؟



[−50, 50] scl: 10 by [0, 350] scl: 25

بما أن t تمثل الزمن، $t > 0$. عندما تكون $t = 0$، يبلغ الاستهلاك 179 مليار لتر. ولهذا، ففي سياق هذه المسألة، $C > 179$ ذات معنى.

الربط بالحياة اليومية

الولايات المتحدة هي أكبر مستهلك للصودا في العالم. في أحد الأعوام مؤخرًا، كان استهلاك الولايات المتحدة يمثل ثلث إجمالي استهلاك العالم من الصودا.

المصدر: معهد وورلد واتش

b. كم كان مقدار استهلاك الصودا في عام 2005؟

$C = 179(1.029)^t$ المعادلة الأصلية

$= 179(1.029)^5$ $t = 5$

≈ 206.5 استخدم حاسبة.

كان استهلاك العالم من الصودا في عام 2005 يبلغ 206.5 مليار لتر تقريبًا.

تمرين موجّه

3. علم الأحياء يتضاعف عدد نوع معين من البكتيريا كل 20 دقيقة. بدءًا بـ 10 خلايا في مزرعة. يمكن تمثيل العدد بالدالة $B = 10(2)^t$، حيث B هي عدد خلايا البكتيريا t هي الزمن بزيادات مقدارها 20 دقيقة. كم سيبلغ العدد بعد ساعتين؟

2 تحديد السلوك الأسيّ

تذكر من الدرس 3-2 أن الدوال الخطية لها معدل تغير ثابت. ليس للدوال الأسيّة معدلات تغير ثابتة، لكن لها نسب ثابتة.

مثال 4 تحديد السلوك الأسيّ

حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. ولماذا؟

x	0	5	10	15	20	25
y	64	32	16	8	4	2

الطريقة 1 البحث عن نمط.

تقع قيم المجال على مسافات منتظمة تبلغ 5. ابحث عن عامل مشترك بين قيم المدى.

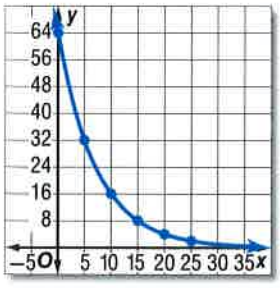
64 32 16 8 4 2

$\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

تختلف قيم المدى حسب العامل المشترك $\frac{1}{2}$.

بما أن قيم المجال تقع على مسافات منتظمة وتختلف قيم المدى حسب عامل مشترك موجب، فربما تكون البيانات أسيّة. قد تتضمن معادلتها $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

الطريقة 2 مثّل البيانات بيانيًا.



ارسم النقاط وصِلها بواسطة منحنى منتظم.
يوضح التمثيل البياني قيمة سريعة التناقص y مع زيادة x.
هذه سمة في السلوك الأسيّ يتراوح فيها الأساس بين 0 و 1.

تمرين موجّه

4. حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.

x	0	3	6	9	12	15
y	12	16	20	24	28	32

نصيحة في حل المسائل

وضع قائمة مرتبة

يفيد وضع قائمة مرتبة لقيم x وقيم y المقابلة لها في تمثيل الدالة بيانيًا. يمكن أن يساعدك هذا أيضًا في تحديد الأنماط في البيانات.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يمثل التمثيل البياني لـــ $f(x) = b^x$ تمثيلاً بيانيًا أصليًا للدوال الأسيّة. ويمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدَمة لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستَها على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال الأسيّة

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

h : الإزاحة الأفقية	k : الإزاحة الرأسية
تكون وحدات h جهة اليمين إذا كانت h موجبة تكون وحدات $\lvert h \rvert$ جهة اليسار إذا كانت h سالبة	تكون وحدات k لأعلى إذا كانت k موجبة تكون وحدات $\lvert k \rvert$ لأسفل إذا كانت k سالبة

a : الاتجاه والشكل

إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور الأفقي x. إذا كان $\lvert a \rvert > 1$، فسيمتد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $0 < \lvert a \rvert < 1$، فسيكون التمثيل البياني مضغوطًا رأسيًا.

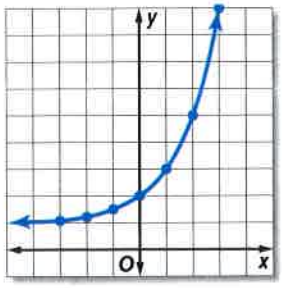
مثال 5 التمثيل البياني للتحويلات

مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

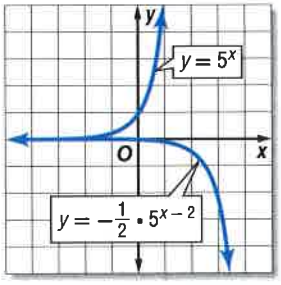
تمثل المعادلة إزاحة التمثيل البياني لـــ $y = 2^x$ وحدة لأعلى.

x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}، المدى = $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـــ $y = 5^x$.

مثّل $y = 5^x$ بيانيًا وحوّل التمثيل البياني.

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني في المحور الأفقي x وينضغط رأسيًا.
- $h = 2$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا تتم إزاحة التمثيل البياني رأسيًا.

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه

5A. $y = 2^{x+3} - 5$

5B. $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الدقة تذكر أن السلوك الطرفي هو سلوك التمثيل البياني حيث تقترب x من اللا نهاية الموجبة أو اللا نهاية السالبة. في المثال 5a، عندما تقترب x من اللا نهاية، تقترب y من اللا نهاية. وفي المثال 5b، عندما تقترب x من اللانهاية، تقترب y من اللا نهاية السالبة.

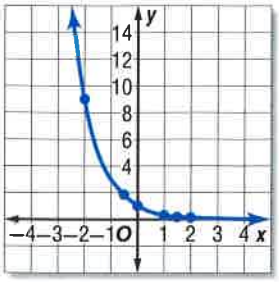
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

مثال 6 تمثيل دوال التضاؤل الأسي بيانيًا

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$



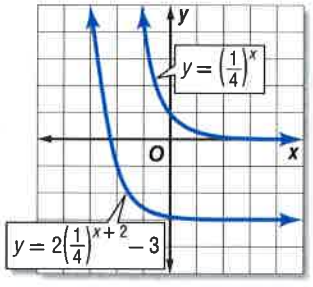
المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

تمثل المعادلة تحويلاً للتمثيل البياني لـ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل مَعلمة.

- $a = 2$: التمثيل البياني ممتد رأسيًا.
- $h = -2$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: تتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.



المجال هو كل الأعداد الحقيقية، والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجّه

6A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

6B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

كما هو الحال بالنسبة للنمو الأسي، يمكنك أيضًا تمثيل التضاؤل الأسي بتناقص ثابت للنسبة المئوية على مدار فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

يُطلق على أساس التعبير الأسي، $1 - r$، اسم **عامل التضاؤل**.

نصيحة دراسية

التضاؤل الأسي تأكد من عدم الخلط بين تغيير الأبعادالتمدد الذي تكون فيه $|a| > 1$ والتضاؤل الأسي، والذي تكون فيه $0 < b < 1$.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 2^x$
2. $y = -5^x$
3. $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$
5. $f(x) = 6^x + 3$
6. $f(x) = 2 - 2^x$

مثال 3 7. **علم الأحياء** تمثل الدالة $f(t) = 100(1.05)^t$ نمو أعداد ذبابة الفاكهة، حيث $f(t)$ هي الذباب t هي الزمن بالأيام.

a. ما قيم المجال والمدى المعقولة في سياق هذا الموقف؟ اشرح.

b. بعد أسبوعين، كم يبلغ تقريبًا عدد الذباب في هذا التجمع؟

مثال 4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

8.

x	1	2	3	4	5	6
y	−4	−2	0	2	4	6

9.

x	2	4	6	8	10	12
y	1	4	16	64	256	1024

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.**

10. $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
11. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
12. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
13. $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 2x\,8^x$
15. $y = 2x\left(\frac{1}{6}\right)^x$
16. $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$
17. $y = -3x\,9^x$
18. $y = -4x\,10^x$
19. $y = 3x\,11^x$
20. $y = 4^x + 3$
21. $y = \frac{1}{2}(2^x - 8)$
22. $y = 5(3^x) + 1$
23. $y = -2(3^x) + 5$

مثال 3 24. **استخدام النماذج** يزيد عدد البكتيريا في مزرعة وفقًا للنموذج $p = 300(2.7)^{0.02t}$.
حيث t هي عدد الساعات t = 0 تقابل الساعة 9:00 صباحًا.

a. استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا الساعة 11 صباحًا.

b. مثّل الدالة بيانيًا واذكر اسم نقطة التقاطع p. صف ما تمثله نقطة التقاطع p وصف مجال ومدى منطقيين لهذا الموقف.

مثال 4 **حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.**

25.

x	−4	0	4	8	12
y	2	−4	8	−16	32

26.

x	−6	−3	0	3
y	5	10	15	20

27.

x	−8	−6	−4	−2
y	0.25	0.5	1	2

28.

x	20	30	40	50	60
y	1	0.4	0.16	0.064	0.0256

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التصوير الفوتوغرافي تعمل منال على تكبير صورة لعمل ملصق للمدرسة. ستقوم بتكبير الصورة بنسبة 150% بشكل متكرر. تمثل الدالة $P = 1.5^x$ الحجم الجديد للصورة التي يجري تكبيرها، حيث x هي عدد التكبيرات. كم ضعفًا يبلغ حجم الصورة بعد 4 تكبيرات؟

30. المعرفة المالية أودع محمد AED 500 في حساب ادخار وبعد 8 سنوات، وصلت قيمة استثماره إلى AED 807.07. تمثل المعادلة $A = d(1.005)^{12t}$ قيمة استثمار محمد A بعد t سنوات بإيداع مبدئي يبلغ d.

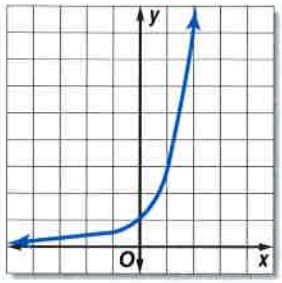
a. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 1000؟

b. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 250؟

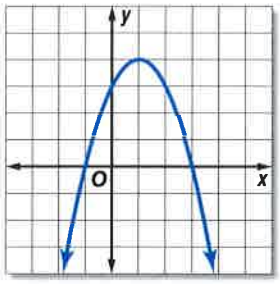
c. أوجد تفسير $d(1.005)^{12t}$ لتشرح كيفية تأثير مبلغ الإيداع الأصلي على قيمة استثمار محمد.

حدد كل دالة باعتبارها *خطية*، أو *أسيّة*، أو *ليست أيًا منهما*.

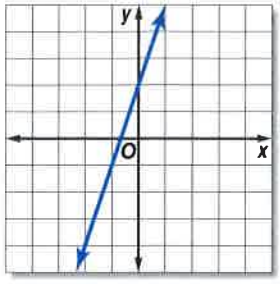
31.



32.



33.



34. $y = 4^x$

35. $y = 2x(x - 1)$

36. $5x + y = 8$

37. التخرج ارتفع عدد الخريجين في مدرسة عليا بعامل 1.055 كل عام منذ عام 2001 في عام 2001، تخرج 110 طلاب. تمثل الدالة $N = 110(1.055)^t$ عدد الطلاب N المتوقع أن يتخرجوا بعد t أعوام من 2001. كم عدد الطلاب الذين سيتخرجون في عام 2012؟

صف التمثيل البياني لكل معادلة كتحويل للتمثيل البياني $y = 2^x$.

38. $y = 2^x + 6$

39. $y = 3(2)^x$

40. $y = -\frac{1}{4}(2)^x$

41. $y = -3 + 2^x$

42. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

43. $y = -5(2)^x$

44. الغزلان يتضاعف عدد الغزلان في حديقة عامة كل عام. في عام 2000، كان هناك 25 غزالاً في الحديقة. تمثل الدالة $N = 25(2)^t$ عدد الغزلان N في الحديقة بعد t سنوات من عام 2000. ماذا سيكون عدد الغزلان في عام 2015؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. المثابرة اكتب دالة أسيّة يمر تمثيلها البياني بالنقطتين (0, 3) و (1, 6)

46. التبرير حدد ما إذا كان الرسم البياني $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0$ و $b \neq 1$، يتقاطع أحيانًا، أو دائمًا، أو لا يتقاطع أبدًا مع نقطة التقاطع الأفقية x. اشرح استنتاجك.

47. مسألة غير محددة الإجابة أوجد دالة أسيّة تمثل موقفًا من الحياة اليومية ومثّل الدالة بيانيًا. حلل التمثيل البياني واشرح سبب تمثيل الموقف بدالة أسيّة وليس دالة خطية.

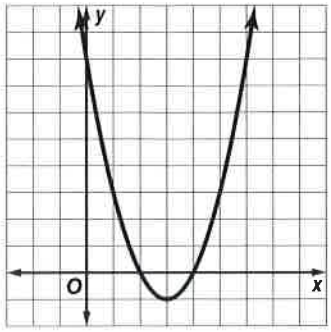
48. التبرير استخدم الجداول والتمثيلات البيانية للمقارنة والمقابلة بين الدالة الأسيّة $f(x) = ab^x + c$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$، والدالة الخطية $g(x) = ax + c$. اذكر نقاط التقاطع، والفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة أو موجبة أو سالبة، والقيم العظمى والصغرى النسبية، والتناظر، والسلوك الطرفي.

49. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تعرض سلوكًا أسيًا.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

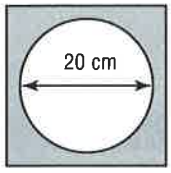
50. إجابة قصيرة ما تقاطع مع المحور الأفقي x في الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



51. استثمر مازن AED 300 في حساب ادخار. تمثل المعادلة $A = 300(1.005)^{12t}$ المبلغ في حساب مازن A بعد t سنوات. ما المبلغ الذي سيكون في حساب مازن بعد 7 أعوام؟

A AED 25,326
B AED 456.11
C AED 385.01
D AED 301.52

52. الهندسة وضعت نورا قطعة ورق دائرية على صورة مربعة كما يظهر بالأدنى. إذا تمددت الصورة 4 سنتيمترات خارج الدائرة من كل جانب، فما محيط الصورة المربعة؟



F 64 cm
G 80 cm
H 94 cm
J 112 cm

53. تقع النقطتان اللتان إحداثياتهما $(-3, 0)$ و $(7, 2)$ على المستقيم l. يحتوي المستقيم p على $(-1, 3)$ وهو متعامد على المستقيم l. ما الإحداثي الأفقي x للنقطة التي يتقاطع عندها l مع p؟

A $\frac{1}{2}$
B $-\frac{2}{5}$
C $-\frac{1}{2}$
D -3

مراجعة شاملة

أوجد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي بالصيغة القياسية.

54. $(1.9 \times 10^{2})(4.7 \times 10^{6})$
55. $(4.5 \times 10^{-3})(5.6 \times 10^{4})$
56. $(3.8 \times 10^{-4})(6.4 \times 10^{-8})$

بسّط.

57. $\sqrt[3]{343}$
58. $\sqrt[6]{729}$
59. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$
60. $729^{\frac{5}{6}}$
61. $216^{\frac{5}{3}}$
62. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$

63. سباق الهدم عندما تصطدم سيارة بجسم، يُقاس التلف بأثر الاصطدام. بالنسبة لسيارة معينة، يتحدد أثر الاصطدام I بواسطة $I = 2v^2$. حيث تمثل v السرعة بالكيلومتر في الدقيقة. ما أثر الاصطدام إذا كانت سرعة السيارة تبلغ 4 كيلومترات في الدقيقة؟

استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام تباينات.

64. $x + y = -3$
$x - y = 1$
65. $3a + b = 5$
$2a + b = 10$
66. $3x - 5y = 16$
$-3x + 2y = -10$

مراجعة المهارات

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية حسابية.

67. 1, 3, 5, 7, ...
68. −6, −4, −2, 0, ...
69. 6.5, 9, 11.5, 14, ...
70. 10, 3, −4, −11, ...
71. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \ldots$
72. $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

2-1 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

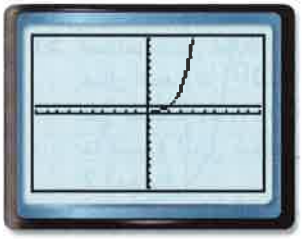
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُلّ $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

أدخِل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.

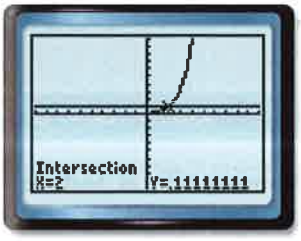


[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect** (**تقاطع**) من قائمة **CALC** (**احسب**) لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.

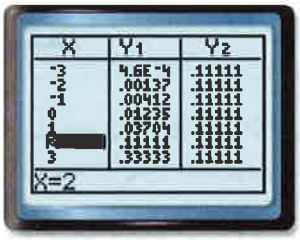


[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام خاصية **TABLE** (**الجدول**) لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.



X	Y1	Y2
-3	4.6E-4	.11111
-2	.00137	.11111
-1	.00412	.11111
0	.01235	.11111
1	.03704	.11111
2	.11111	.11111
3	.33333	.11111

X=2

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ عوّض بالعدد 2 عن x.

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بسّط.

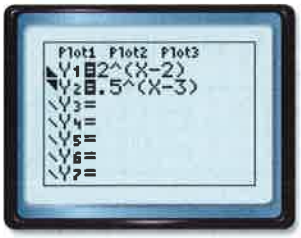
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

(يُتبع في الصفحة التالية)

النشاط 2 وصف

حُلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

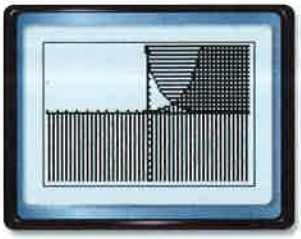
المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن علامة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل"، .

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

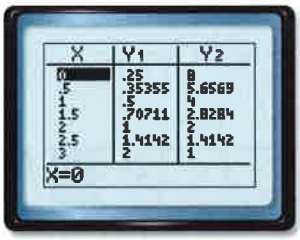


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$، فإن **Y1 > Y2**. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

السابق:
- مثّلتَ الدوال الخطية والتربيعية والأسية بيانيًا.

الحالي:
1. تحديد الدوال الخطية والتربيعية والأسية من البيانات المعطاة.
2. كتابة المعادلات التي تمثل البيانات.

لماذا؟
- يبيع فريق الجولف في كل سنة الحلوى لجمع المال للجمعيات الخيرية. ومن خلال معرفة نوع الدالة الذي يمثل مبيعات الحلوى، يمكنهم تحديد أفضل سعرٍ للحلوى.

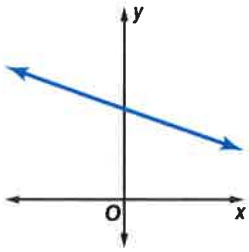
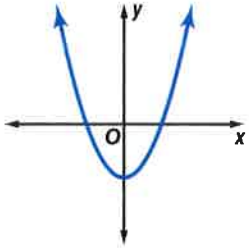
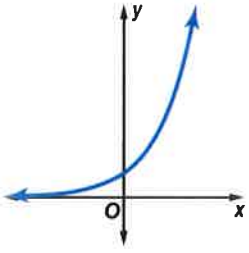
انتبه!
قيم x ف
الفروق ال
تأكد من
بالمقدار

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد الدوال

يمكنك استخدام الدوال الخطية والدوال التربيعية والدوال الأسيّة لتمثيل البيانات. فيما يلي قائمة بالصيغ العامة للمعادلات وتمثيل بياني لكل نوع من الدوال.

ملخص المفهوم الدوال الخطية وغير الخطية

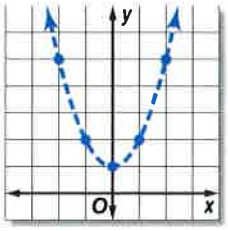
الدالة الخطية	الدالة التربيعية	الدالة الأسيّة
$y = mx + b$	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ab^x$، حيث $b > 0$
		

مثال 1 اختيار نموذجًا باستخدام تمثيل النماذج

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أُسيّة.

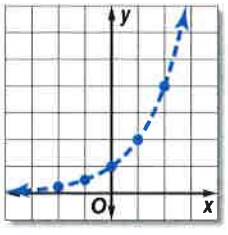
a. $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالةً تربيعية.



b. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4)\right\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالةً أسية.



تمرين موجّه

1A. $(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)$

1B. $(-1, 0.25), (0, 1), (1, 4), (2, 16)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

طريقة أخرى لتحديد يصِف أي نموذج يصف البيانات أفضل هو استخدام الأنماط. تُسمَّى فروق قيم y المتتالية *الفروق الأولى*. تُسمَّى فروق الفروق الأولى المتتالية *الفروق الثانية*.

- إذا كانت جميع فروق قيم y المتتابعة متساوية، فإن الدالة تمثل دالةً خطية.
- إذا كانت الفروق الثانية متساوية جميعًا، ولكن الفروق الأولى غير متساوية، فإن البيانات تمثل دالةً تربيعية.
- إذا كانت نسبة قيم y المتتالية متساويةً جميعًا، و $r \neq 1$، فإن البيانات تمثل دالةً أسيّة.

انتبه!
قبل أن تتحقق من قيم x الفروق المتتالية أو النِسب، تأكد من أن قيم x متزايدة بالمقدار نفسه.

مثال 2 اختيار نموذجًا باستخدام الفروق أو النسب

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

a.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−3	2	7	12

الفروق الأولى: $-8 \quad -3 \quad 2 \quad 7 \quad 12$
$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5$

بما أن الفوارق الأولى متساوية جميعها، فإن جدول القيم يمثل دالةً خطية.

b.

x	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5

الفروق الأولى: $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$
$-4 \quad -2 \quad -1 \quad -0.5$

الفروق الأولى ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً خطية. أوجد الفروق الثانية وقارن.

الفروق الأولى: $-4 \quad -2 \quad -1 \quad -0.5$
الفروق الثانية: $2 \quad 1 \quad 0.5$

الفروق الثانية ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً تربيعية. أوجد نِسب قيم y ثم قارن.

النِسب: $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$
$\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{0.5}{1}=\frac{1}{2}$

نِسب قيم y المتتابعة متساوية. وبالتالي، يمكن تمثيل جدول القيم عن طريق دالةٍ أسية.

تمرين موجّه

2A.

x	−3	−2	−1	0	1
y	−3	−7	−9	−9	−7

2B.

x	−2	−1	0	1	2
y	−18	−13	−8	−3	2

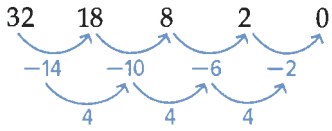
2 كتابة المعادلات

عندما تجد النموذج الأفضل في وصف البيانات، فيمكنك كتابة معادلة للدالة. بالنسبة للدالة التربيعية في هذا الدرس، سيكون للمعادلة هذه الصيغة $y = ax^2$.

مثال 3 كتابة معادلة

حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً للدالة التي تمثل البيانات.

الخطوة 1 حدد أي نموذج يلائم البيانات.



الفروق الأولى:

الفروق الثانية:

بما أن الفروق الثانية متساوية، فإن الدالة الخطية تمثل البيانات.

الخطوة 2 اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

المعادلة لها الصيغة التالية $y = ax^2$. أوجد قيمة a عن طريق اختيار زوج واحد من الأزواج المرتبة. لنستخدم $(-1, 2)$.

$y = ax^2$ معادلة للدالة التربيعية

$2 = a(-1)^2$ $x = -1$ و $y = 2$

$2 = a$

المعادلة التي تمثل البيانات هي $y = 2x^2$

انتبه!
إيجاد a في المثال 3. لا يمكن استخدام النقطة $(0, 0)$ لإيجاد قيمة a. سيقع عليك تقسيم كل طرف على 0. ما يعطيك قيمةً غير محددة لـ a.

تمرين موجّه

3A.

x	−2	−1	0	1	2
y	11	7	3	−1	−5

3B.

x	−3	−2	−1	0	1
y	0.375	0.75	1.5	3	6

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة معادلة لموقفٍ من الحياة اليومية

نادي الكتاب يوضح الجدول عدد أعضاء نادي الكتاب لأربع سنوات متتالية. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات. ثُمَّ اكتب دالةً تمثل البيانات.

الوقت (السنوات)	0	1	2	3	4
الأعضاء	5	10	20	40	80

الاستيعاب يجب علينا إيجاد نموذجٍ للبيانات، وبعد ذلك نكتب دالةً.

الخطة إيجاد نموذجٍ باستخدام الفروق المتتالية أو النِسب. وبعد ذلك استخدام الصيغة العامة للمعادلة لكتابة دالة.

الحل النِسبة الثابتة هي 2. هذه قيمة القاعدة. تُمثِّل الدالة الأسية بالصيغة $y = ab^x$ البيانات.

$y = ab^x$ معادلة للدالة الأسية

$5 = a(2)^0$ $b = 2$ و $b = 2$

$5 = a$

الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 5 \cdot 2^x$

تحقق استخدمتَ $(0, 5)$ لكتابة الدالة. تحقق أن كل زوجٍ مرتبٍ آخر يحقق المعادلة.

تمرين موجّه

4. إعلانات يوضح الجدول تكلفة وضع إعلان في صحيفة. حدد النموذج الذي يصف البيانات بأفضل صورة واكتب دالة تُمثِّل البيانات.

عدد الخطوط	5	6	7	8
التكلفة الإجمالية (AED)	14.50	16.60	18.70	20.80

الربط بالحياة اليومية

أظهر استطلاع أجرته الجمعية الوطنية للتعليم أن 87% من جميع المراهقين المشاركين في الاستطلاع وجدوا أن القراءة باعثة على الاسترخاء، ورأى 85% أن القراءة مفيدة، ووجد 79% أن القراءة مثيرة.

المصدر: صحيفة *American Demographics*

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

1. $(-2, 8), (-1, 5), (0, 2), (1, -1)$

2. $(-3, 7), (-2, 3), (-1, 1), (0, 1), (1, 3)$

3. $(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, 0.5)$

4. $(0, 2), (1, 2.5), (2, 3), (3, 3.5)$

مثال 2 **ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.**

5.

x	0	1	2	3	4
y	5	8	17	32	53

6.

x	−3	−2	−1	0
y	−6.75	−7.5	−8.25	−9

7.

x	−1	0	1	2	3
y	3	6	12	24	48

8.

x	3	4	5	6	7
y	−1.5	0	2.5	6	10.5

مثال 3 **حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً للدالة التي تمثل البيانات.**

9.

x	−1	0	1	2	3
y	1	3	9	27	81

10.

x	−5	−4	−3	−2	−1
y	125	80	45	20	5

11.

x	−3	−2	−1	0	1
y	1	1.5	2	2.5	3

12.

x	−1	0	1	2
y	−1.25	−1	−0.75	−0.5

مثال 4

13. النباتات يوضح الجدول ارتفاع أحد النباتات لأربعة أسابيع متتالية. حدد أي نوع من الدوال يُمثّل الارتفاع بأفضل صورة. ثُمَّ اكتب دالة تمثل البيانات.

الأسبوع	0	1	2	3	4
الطول (cm)	3	3.5	4	4.5	5

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

14. $(-1, 1), (0, -2), (1, -3), (2, -2), (3, 1)$

15. $(1, 2.75), (2, 2.5), (3, 2.25), (4, 2)$

16. $(-3, 0.25), (-2, 0.5), (-1, 1), (0, 2)$

17. $(-3, -11), (-2, -5), (-1, -3), (0, -5)$

18. $(-2, 6), (-1, 1), (0, -4), (1, -9)$

19. $(-1, 8), (0, 2), (1, 0.5), (2, 0.125)$

المثالان 3-2 **ابحث عن النمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.**

20.

x	−3	−2	−1	0
y	−8.8	−8.6	−8.4	−8.2

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	10	2.5	0	2.5	10

22.

x	−1	0	1	2	3
y	0.75	3	12	48	192

23.

x	−2	−1	0	1	2
y	0.008	0.04	0.2	1	5

24.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.2	16.8	37.8	67.2

25.

x	−3	−2	−1	0	1
y	14.75	9.75	4.75	−0.25	−5.25

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

26. المواقع الإلكترونية تتبعت إحدى الشركات عدد زوار موقعها الإلكتروني على مدى 4 أيام. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل عدد زوار الموقع فيما يتعلق بالوقت. ثُمَّ اكتب دالةً تمثل البيانات.

اليوم	0	1	2	3	4
الزوار (بالآلاف)	0	0.9	3.6	8.1	14.4

المكالمات تعتمد تكلفة المكالمة الدولية على طول المكالمة. ويوضح الجدول التكلفة حتى 6 دقائق.

طول المكالمة (بالدقيقة)	1	2	3	4	5	6
التكلفة (AED)	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60	0.72

a. مثّل البيانات بيانيًا وحدد أي نوع من الدوال يمثل البيانات بأفضل صورة.

b. اكتب معادلة للدالة التي تُمثّل البيانات.

c. استخدم معادلتك لتحديد تكلفة مكالمة تستغرق 10 دقائق.

28. انخفاض القيمة تنخفض قيمة سيارةٍ ما بمرور الوقت. ويوضح الجدول قيمة السيارة خلال مدة من الزمن.

العام	0	1	2	3	4
القيمة (AED)	18,500	15,910	13,682.60	11,767.04	10,119.65

a. حدد أي نوع من الدوال هو الأفضل في تمثيل البيانات.

b. اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.

c. استخدم معادلتك لتحديد الثمن الذي تستحقه السيارة بعد 7 سنوات.

29. البكتيريا يقدر العلماء أن مزرعة بكتريا يبلغ تعدادها الأولي 12 سوف تتضاعف كل ساعة.

a. أنشئ جدولًا يوضح تعداد البكتريا في الأربع ساعات الأولى.

b. أي نوع من النماذج يمثل البيانات بأفضل صورة؟

c. اكتب دالة تُمثّل البيانات.

d. كم سيصبح عدد البكتريا بعد 8 ساعات؟

30. الطباعة تتقاضى شركة طباعة الرسوم الموضحة لطباعة المنشورات الدعائية. اكتب دالةً تمثّل إجمالي تكلفة المنشورات الدعائية، وحدد كم ستكون تكلفة 30 منشورًا دعائيًا.

الطباعة السريعة

رسوم الإعداد	25 درهمًا
المنشور الدعائي	15 فلسًا

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهاراتالتفكير العليا

31. تحدٍ اكتب دالةً بها فروق ثانية ثابتة، وفروق أولى غير ثابتة، وتقاطع مع المحور الرأسي y عند $y = -5$، وتحتوي على النقطة (2, 3).

32. الفرضيات ما نوع الدالة التي سيكون لها فروق ثالثة ثابتة ولكن ليس فروق ثانية ثابتة؟ اشرح.

33. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالةً خطية يكون لها فرق أول ثابت بمقدار 4.

34. البرهان اكتب فقرة برهان لتوضيح أن الدوال الخطية تنمو بفروق متساوية خلال فترات متساوية، وأن الدوال الأسية تنمو بعوامل متساوية خلال فترات متساوية. (*إرشاد:* افترض أن $y = ax$ تمثل دالةً خطية وافترض أن $y = a^x$ تمثل دالةً أسية.)

35. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تحديد ما إذا كان يمكن تمثيل مجموعةٍ من البيانات عن طريقة دالةٍ *خطية* أو دالةٍ *تربيعية* أو دالةٍ *أسية* ؟

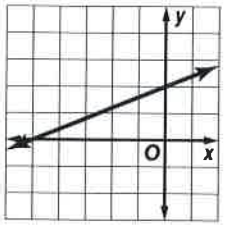
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. الإجابة القصيرة اكتب معادلة تمثل البيانات في الجدول.

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48

37. ما معادلة المستقيم أدناه؟



A $y = \frac{2}{5}x + 2$

B $y = \frac{2}{5}x - 2$

C $y = \frac{5}{2}x + 2$

D $y = \frac{5}{2}x - 2$

38. تقع النقطة $(r, -4)$ على مستقيم بالمعادلة $2x + 3y = -8$. أوجِد قيمة r.

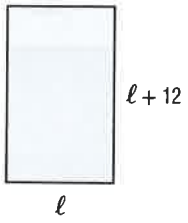
F -10

G 0

H 2

J 8

39. الهندسة تبلغ مساحة المستطيل 220 مترًا مربعًا. أوجد طول ℓ.



A 8 أمتار

B 10 أمتار

C 22 مترًا

D 34 مترًا

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر

40. $x^2 = 25$

41. $x^2 + 6x + 9 = 16$

42. $x^2 - 14x + 49 = 15$

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج يصف البيانات بأفضل طريقة.

43.

x	0	1	2	3	4
y	4	5	6	7	8

44.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

45.

x	-3	-2	-1	0	1
y	14	9	6	5	6

46.

x	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11

47. العلوم الفيزيائية تُطلَق قذيفة لأعلى من مستوى الأرض. ونحصل على ارتفاعها h بالأمتار بعد t ثوانٍ عن طريق $h = 96t - 16t^2$. أوجد قيمة (قيم) t عندما h تساوي 96 مترًا.

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $y = -1$ و $x = -3$ و $z = 4$.

48. $-|4|$

49. $|2y + 1|$

50. $|4 - z|$

51. $\left|\frac{1}{2}x + 2\right|$

52. $|12 - 4z|$

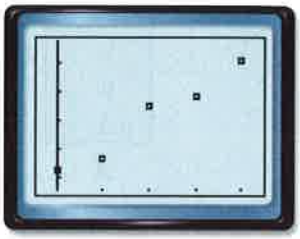
53. $|2y - 3| - 6$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
ملاءمة المنحنيات

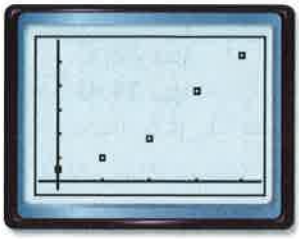
إذا كانت هناك زيادة أو نقص ثابت في قيم البيانات، فإن هناك توجهًا خطيًا. إذا كانت القيم متزايدة أو متناقصة بصورةٍ سريعةٍ أكثر، فقد يكون هناك اتجاه تربيعي أو أسي.

الاتجاه الخطي



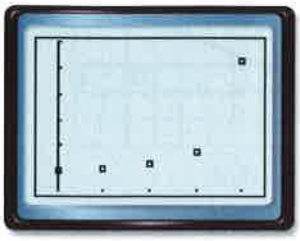
[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه التربيعي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه الأسي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد معادلة الانحدار المناسبة.

النشاط

مخطط الخطوط الجوية يوضح الجدول المتوسط الشهري لعدد رحلات الطيران في كل عام من خلال مخطط الخطوط الجوية الذي أنشئ في عام 2000.

العام	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
رحلات الطيران	17	20	24	28	33	38	44	50

الخطوة 1 رسم مخطط انتشار.

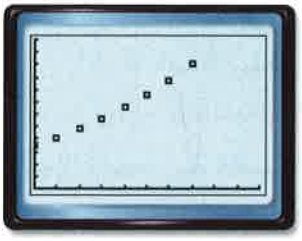
- أدخِل عدد السنوات منذ سنة 2000 في **L1** وعدد رحلات الطيران في **L2**.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة إدخال قائمة في الصفحة 255.*

- استخدم **STAT PLOT** لتمثيل مخطط الانتشار بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة المخططات الإحصائية في صفحة 256.*

استخدم ZOOM 9 للتمثيل البياني.



[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

من مخطط الانتشار يمكننا رؤية أن البيانات قد يكون لها إما اتجاه تربيعي أو اتجاه أسي.

الخطوة 2 أوجد معادلة الانحدار.

سوف نتحقق من كلا الاتجاهين من خلال فحص معادلتي انحدارهما.

- اختر **DiagnosticOn** من زر **CATALOG**.
- حدد **QuadReg** في قائمة **STAT**.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER ENTER

المعادلة بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$.

المعادلة تقريبًا هي $y = 0.25x^2 + 3x + 17$.

R^2 هو **معامل التحديد**. كلما كان R^2 أقرب إلى 1، كان التمثيل أفضل. من أجل الحصول على المعادلة الأسية اختر **ExpReg** في قائمة **STAT**. من أجل اختيار التمثيل التربيعي أو الأسي، اجعل كلاً منهما ملائمًا واستخدم التمثيل الذي يكون مع قيمة R^2 أقرب إلى 1.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الخطوة 3 مثّل معادلة الانحدار التربيعية بيانيًا.

- انسخ المعادلة إلى قائمة Y= ومثّل بيانيًا.

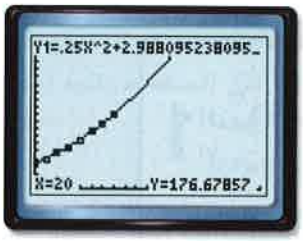
خطوات العملية على الحاسبة: Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 ZOOM 9

[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

الخطوة 4 توقع استخدام المعادلة.

إذا استمر هذا الاتجاه، فيمكننا التمثيل البياني الخاص بمعادلتنا لتوقع العدد الشهري للرحلات الجوية التي ستقوم بها شركة الطيران في سنة محددة. كي نتحقق من سنة 2020. أولاً، اضبط النافذة.

خطوات عملية على الحاسبة: 2nd CALC 1 في $x =$، أدخِل 20 ENTER.



[0, 25] scl: 1 by [0, 200] scl: 5

سيكون هناك حوالي 177 رحلة جوية شهريًا إذا استمر هذا الاتجاه.

التمارين

أنشئ مخططًا لكل مجموعة من نقاط البيانات. حدد ما إذا كان ينبغي استخدام معادلة انحدار *خطية*، أو *تربيعية* أو *أسية*. اذكر معامل التحديد.

1.

x	y
1	30
2	40
3	50
4	55
5	50
6	40

2.

x	y
0.0	12.1
0.1	9.6
0.2	6.3
0.3	5.5
0.4	4.8
0.5	1.9

3.

x	y
0	1.1
2	3.3
4	2.9
6	5.6
8	11.9
10	19.8

4.

x	y
1	1.67
5	2.59
9	4.37
13	6.12
17	5.48
21	3.12

5. الخُبز أعَدت أماني كعكة وتنتظرها لتبرد حتى تزينها. يوضح الجدول درجة حرارة الكعكة كل 5 دقائق بعد أن أخرجتها أماني من الفرن.

الزمن (بالدقيقة)	درجة الحرارة (F°)
0	350
5	244
10	178
15	137
20	112
25	96
30	89

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. أي معادلة انحدار لها قيمة R^2 أقرب إلى 1؟ هل هذه هي أفضل معادلة تلائم سياق المسألة؟ اشرح استنتاجك.

c. أوجد معادلة الانحدار المناسبة، واذكر عامل التحديد. ما المجال والمدى؟

d. سوف تزين أماني الكعكة عندما تصل درجة حرارة الغرفة (70°F).ستخدم معادلة الانحدار لتوقع متى يمكنها تزيين كعكتها.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 2-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

السابق
- لقد حلّلت الدوال الأسيّة.

الحالي
1. إيجاد حل المسائل التي تتضمن نموًا أسيًّا.
2. إيجاد حل المسائل التي تتضمن اضمحلالاً (تضاؤلاً) أسيًّا.

لماذا؟
- ازداد عدد المدونات الإلكترونية أو المدونات بمعدل شهري يبلغ 13.7% تقريبًا على مدار 21 شهرًا. يمكن تمثيل متوسط عدد المدونات في الشهر بـ $y = 1.1(1 + 0.137)^t$ أو $y = 1.1(1.137)^t$، حيث تمثل y إجمالي عدد المدونات بالملايين، و t هي عدد الأشهر منذ نوفمبر 2003.

المفردات الجديدة
- **المرابحة المركبة** compound interest

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

1 النمو الأسيّ

النمو الأسيّ تكون معادلة عدد المدونات بالصيغة $y = a(1 + r)^t$. هذه هي المعادلة العامة للنمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة النمو الأسيّ

$y = a(1 + r)^t$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- y هي المبلغ النهائي.
- r هي معدل التغير الذي يتم التعبير عنه ككسر عشري، $r > 0$.

مثال 1 من الحياة اليومية النمو الأسيّ

المسابقة تبدأ جوائز مسابقة إحدى المحطات الإذاعية ببطاقة هدايا بقيمة AED 100. في أحد الأيام، يتم الإعلان عن اسم. أمام الشخص 15 دقيقة ليتصل وإلا تتأجل الجائزة لليوم التالي وتزيد بنسبة 2.5%.

a. اكتب معادلة لتمثيل مبلغ بطاقة الهدايا بالدرهم بعد t من الأيام بدون فائزين.

$y = a(1 + r)^t$	معادلة النمو الأسيّ
$y = 100(1 + 0.025)^t$	$a = 100$ = 2.5% أو 0.025
$y = 100(1.025)^t$	بسّط.

في المعادلة $y = 100(1.025)^t$، تمثل y مبلغ بطاقة الهدايا، و t هي عدد الأيام منذ بدء المسابقة.

b. كم ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا إذا لم يفز أحد بعد 10 أيام؟

$y = 100(1.025)^t$	معادلة مبلغ بطاقة الهدايا
$= 100(1.025)^{10}$	$t = 10$
≈ 128.01	استخدم حاسبة.

خلال 10 أيام، ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا AED 128.01.

تمرين موجّه

1. **التعليم** ارتفعت تكاليف التعليم الجامعي بنسبة 5% كل عام منذ عام 2000. إذا كانت تكلفة التعليم في عام 2000 قد بلغت AED 10,850، فاكتب معادلة لمبلغ تكلفة التعليم بعد t سنوات من عام 2000. توقع تكلفة التعليم في هذه الكلية في عام 2015.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المرابحة المركبة هي المرابحة المتحصلة أو المدفوعة على كل من الاستثمار الأولي والمرابحة المتحصلة سابقًا. إنها أحد تطبيقات النمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة للمرابحة المركبة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- A هي المبلغ الحالي.
- r هي معدل المرابحة السنوية ويتم التعبير عنه ككسر عشري. $r > 0$.
- P هي المبلغ الأساسي أو الأولي.
- n هي عدد مرات تركيب المرابحة في كل عام هي الزمن بالسنوات.

مثال 2 من الحياة اليومية المرابحة المركبة

المالية استثمر والدا هدى AED 14,000 بنسبة 6% في السنة مركبة شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 10 أعوام؟

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ معادلة المرابحة المركبة

$= 14{,}000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(10)}$ $P = 14{,}000$ $r = 6\%$ أو 0.06 $n = 12$ $t = 10$

$= 14{,}000(1.005)^{120}$ بسّط.

$\approx 25{,}471.55$ استخدم حاسبة.

سيكون هناك حوالي AED 25,471.55 في 10 سنوات.

تمرين موجّه

2. المالية حدّد مبلغ أحد الاستثمارات إذا تم استثمار AED 300 بمعدل مرابحة مركبة شهريًا يساوي 3.5% شهريًا لمدّة 22 عامًا.

مهنة من الحياة اليومية

المستشار المالي يقدم المستشارون الماليون المساعدة للناس في تخطيط مستقبلهم المالي. يتمتع المستشار المالي الجيد بمهارات حسابية ومهارات حل المسائل والتواصل. يفضل بشدة بالحصول على درجة البكالوريوس لكنها ليست مفروضة.

2 الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

في الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، يتناقص المبلغ الأصلي بنسبة مئوية واحدة خلال مدةٍ زمنيةٍ محدّدة. يمكن استخدام أحد أشكال معادلة النمو كمعادلة عامة للاضمحلال الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$$y = a(1 - r)^t$$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- y هي المبلغ النهائي.
- r هي معدل الاضمحلال (التضاؤل) ويتم التعبير عنه ككسر عشري. $0 < r < 1$.

نصيحة دراسية

النمو والاضمحلال (التضاؤل) بما أن r تُجمع مع 1، ستكون القيمة داخل القوسين أكبر من 1 في دوال النمو الأسيّ. في دوال الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، ستقل هذه القيمة عن 1 بما أن r مطروحة من 1.

مثال 3 من الحياة اليومية الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

السباحة عوامة طفل لحمام سباحة منفوخة تمامًا تفقد 6.6% من الهواء بداخلها كل يوم. كانت العوامة تحتوي في الأصل على 74000 سنتيمتر مكعب من الهواء.

a. اكتب معادلة تمثل فقدان الهواء.

$y = a(1 - r)^t$ معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$= 74000(1 - 0.066)^t$ $a = 74000$ $6.6\% = 0.066$ أو

$= 74000(0.934)^t$ بسّط.

$y = 74000(0.934)^t$، حيث y هي الهواء في العوامة بالبوصة المكعبة بعد t أيام.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

ضع تقديرًا لكمية الهواء في العوامة بعد 7 أيام.

$y = 74000(0.934)^t$ معادلة فقدان الهواء

$= 74000(0.934)^7$ $t = 7$

≈ 45880 استخدم حاسبة.

سيبلغ مقدار الهواء في العوامة بعد 7 أيام 45880 سنتيمترًا مكعبًا تقريبًا.

تمرين موجّه

3. **تعداد السكان** ظل تعداد سكان مقاطعة كامبل في ولاية كنتاكي يتناقص بمعدل متوسط يبلغ 0.3% تقريبًا في السنة. في عام 2000، بلغ سكانها 88,647. اكتب معادلة تمثل تعداد السكان منذ عام 2000. إذا استمر الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2010.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **المرتب** حصلت السيدة هداية على وظيفة كمعلمة براتب أولي يبلغ AED 125000. وفقًا لعقدها، سوف تحصل على زيادة تبلغ 1.5% من مرتبها كل عام. كم سيبلغ مرتب السيدة هداية بعد 7 سنوات؟

مثال 2

2. **المال** استثمر يوسف AED 400 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 5.5% مركبة شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار يوسف خلال 8 سنوات؟

مثال 3

3. **الالتحاق** في عام 2000، انضم 2200 طالب لمدرسة بولاريس الثانوية. كان الالتحاق ينخفض بنسبة 2% سنويًا.
   a. اكتب معادلة للالتحاق بمدرسة بولاريس الثانوية بعد t سنوات من عام 2000.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم عدد الطلاب الذين سيلتحقون في عام 2015؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1

4. **العضويات** باعت صالة الألعاب الرياضية 550 عضوية في عام 2001. ومنذ ذلك الوقت، ارتفع عدد العضويات التي تم بيعها بنسبة 3% سنويًا.
   a. اكتب معادلة لعدد العضويات التي تم بيعها في صالة الألعاب الرياضية بعد t من السنوات من عام 2001.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع عدد العضويات التي ستبيعها الصالة في عام 2020.

5. **الحواسيب** ارتفع عدد الأشخاص الذين يمتلكون حواسيب بنسبة 23.2% سنويًا منذ عام 1990. إذا كان نصف مليون شخص يمتلكون حاسوبًا في 1990، فتوقع عدد الأشخاص الذين سيمتلكون حاسوبًا في عام 2015.

6. **العملات** اشترى ماجد عملة معدنية نادرة من تاجر مقابل AED 300. ارتفعت قيمة العملة بنسبة 5% كل عام. حدد قيمة العملة المعدنية بعد 5 سنوات.

مثال 2

7. **الاستثمارات** استثمر محمود AED 6600 بنسبة مرابحة تبلغ 4.5% مركبة شهريًا. حدد قيمة استثماره بعد 4 سنوات.

8. **المرابحة المركبة** استثمرت نسرين AED 1200 بمعدل مرابحة يبلغ 5.75% مركبة كل ثلاثة أشهر. حدد قيمة استثمارها بعد 7 سنوات. حوالي AED 1789.54

9. **الدقة** تدخر نجلاء المال لرحلة إلى جزر البهاما تتكلف AED 1087.76. وضعت AED 550 في حساب ادخار يدفع مرابحة مركبة تبلغ 7.25% كل ثلاثة أشهر. هل سيكون لديها مال كافٍ في الحساب بعد 4 سنوات؟ اشرح.

مثال 3

10. **الاستثمارات** كان استثمار علي بمبلغ AED 4500 يخسر قيمته بمعدل 2.5% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثماره خلال 5 سنوات؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محتويات لصالح مؤسسة

11. **تعداد السكان** في السنوات من 2010 إلى 2015، من المتوقع أن ينخفض تعداد سكان واشنطن العاصمة بمعدل 0.9% سنويًا تقريبًا. في عام 2010، كان تعداد السكان 530,000 تقريبًا. ما تعداد السكان المتوقع في واشنطن العاصمة في عام 2015؟

12. **السيارات** اشترى فارس سيارة مقابل AED 18,995. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 18% سنويًا. بعد 6 سنوات، عرض فالح أن يشتري السيارة مقابل AED 4500. هل ينبغي أن يبيع فارس السيارة؟ اشرح.

13. **الإسكان** ارتفع سعر المنزل المتوسط في الولايات المتحدة بنسبة 1.4% في المتوسط في كل عام بين 2005 و2007. افترض أن هذا المعدل سيستمر.

المصدر: مجلة الشؤون العقارية

a. اكتب معادلة لسعر المنزل المتوسط بعد t من السنوات عام 2007.

b. تنبأ بسعر المنزل المتوسط في عام 2018.

14. **العناصر** عمر النصف للعنصر النشط إشعاعيًا هو الزمن الذي يستغرقه لكي يتحلل نصف كمية العنصر. عمر النصف للبلوتونيوم 241 هو 14.4 عامًا. يمكن تمثيل عدد الجرامات A المتبقية من البلوتونيوم 241 بعد t من السنوات بـ $A = p(0.5)^{\frac{t}{14.4}}$، حيث p هي الكمية الأصلية من العنصر.

a. كم يبقى من عينة وزنها 0.2 جرام بعد 72 سنة؟

b. كم يبقى من عينة وزنها 5.4 جرامات بعد 1095 يومًا؟

15. **دمج الدوال** يسع حمام سباحة 77,600 لترًا من الماء بحد أقصى. يتبخر الماء بمعدل 0.5% في الساعة. يحتوي حمام السباحة حاليًا على 71,900 لترًا من الماء.

a. اكتب دالة أسيّة w(t) للتعبير عن مقدار الماء المتبقي في حمام السباحة بعد الزمن t حيث t هي عدد الساعات بعد أن وصل حمام السباحة إلى 71,900 لتر.

b. في نفس هذا الزمن، يتم تشغيل خرطوم لإعادة ملء حمام السباحة بمعدل 1,100 لتر في الساعة. اكتب دالة p(t)، حيث t هي زمن تشغيل الخرطوم بالساعات، للتعبير عن مقدار الماء الذي يجري ضخه في حمام السباحة.

c. أوجد قيمة C(t) = p(t) + w(t). ماذا تمثل هذه الدالة الجديدة؟

d. استخدم التمثيل البياني لـ C(t) لتحديد المدة المطلوبة لتشغيل الخرطوم لملء حمام السباحة حتى سعته القصوى.

مسائل مهارات التفكير العليا

16. **التبرير** حدد معدل النمو (كنسبة مئوية) لعدد سكان يزيد أربعة أضعاف كل عام. اشرح.

17. **الدقة** استثمر منصور AED 1200 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 8% مركبة شهريًا. استخدم حاسبة لتحديد المدة التقريبية التي سيحتاجها استثمار منصور للوصول إلى AED 2500

18. **التبرير** يتضاعف مقدار الماء في حاوية كل دقيقة. بعد 8 دقائق امتلأت الحاوية. بعد كم دقيقة امتلأت الحاوية إلى نصفها؟ اشرح.

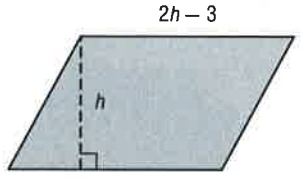
19. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي ينبغي أن تراعيه عند استخدام النماذج الأسيّة لاتخاذ القرارات؟

20. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قانون النمو الأسيّ وقانون الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

21. الهندسة تبلغ مساحة متوازي الأضلاع 35 سنتيمترًا مربعًا. أوجد الارتفاع **h** لمتوازي الأضلاع.



A 3.5 سنتيمترات
B 4 سنتيمترات
C 5 سنتيمترات
D 7 سنتيمترات

22. أيهما أكبر من $64^{\frac{1}{3}}$؟

F $2^{2\frac{1}{6}}$
G $64^{\frac{1}{6}}$
H $64^{\frac{1}{2}}$
J 64^{-3}

23. اشترى عيسى سيارة مقابل AED 22,900. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 16% سنويًا. أي من المعادلات التالية يمثل قيمة سيارة عيسى بعد 5 سنوات؟

A $A = 22{,}900(1.16)^5$
B $A = 22{,}900(0.16)^5$
C $A = 16(22{,}900)^5$
D $A = 22{,}900(0.84)^5$

24. إجابة شبكة تبلغ مساحة أحد الأسطح 4 أمتار في 6 أمتار. إذا كان عامل الطلاء يفرض AED 9.75 على المتر المربع شاملاً الضريبة، فكم ستبلغ تكلفة طلاء السطح بالدرهم؟

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ *y* واذكر المجال والمدى.

25. $y = 3^x$
26. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
27. $y = 6^x$

أوجد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة المعيارية.

28. $(4.2 \times 10^3)(3.1 \times 10^{10})$
29. $(6.02 \times 10^{23})(5 \times 10^{14-})$
30. $(7 \times 10^5)^2$
31. $(1.1 \times 10^{2(2-}$
32. $(9.1 \times 10^{7-}10 \times 4.2)^{(2-)}$
33. $(3.14 \times 10^2)(6.1 \times 10^{3-})$

34. التخطيط لحدث لا تفرض إحدى القاعات رسم إيجار طالما يتم إنفاق AED 4000 على الأقل على الطعام. في حفلة التخرج تفرض القاعة AED 28.95 على الشخص للطعام.
كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يحضروا حفلة التخرج لتجنب دفع رسم إيجار القاعة؟

حدد ما إذا كان التمثيلان البيانيان لكل زوجين من المعادلات *متوازيين* أو *متعامدين* أو *ليسا أيًا منهما*.

35. $y = -2x + 11$
$y + 2x = 23$

36. $3y = 2x + 14$
$-3x - 2y = 2$

37. $y = -5x$
$y = 5x - 18$

38. الأعمار يوضح الجدول الأعمار المكافئة للخيول والبشر. اكتب معادلة تربط العمر البشري بعمر الخيل وتجد عمر الخيل المكافئ لإنسان يبلغ عمره 16 عامًا.

عمر الخيل (x)	0	1	2	3	4	5
عمر الإنسان (y)	0	3	6	9	12	15

أوجد السعر الإجمالي لكل عنصر.

39. المظلة AED 14.00؛ الضريبة: 5.5%

40. الصندل AED 29.99؛ الضريبة: 5.75%

41. حقيبة الظهر AED 35.00؛ الضريبة: 7%

مراجعة المهارات

مثّل كل مجموعة من الأزواج المرتبة بيانيًا.

42. (3, 0), (0, 1), (−4, −6)
43. (0, −2), (−1, −6), (3, 4)
44. (2, 2), (−2, −3), (−3, −6)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2-3 مختبر الجبر
تحويل التعابير الأسيّة

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسيّة إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط كتابة التعابير الأسيّة المكافئة

تحاول نبيلة أن تختار بين خطتي حساب ادخار. تقدم الخطة A نسبة مرابحة شهرية مركبة تبلغ 0.25%، بينما تقدم الخطة B مرابحة مركبة سنويًا تبلغ 2.5%. أي الخطتين أفضل؟ اشرح.

للمقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن بين النسبتين بالتكرار المركب نفسه. من طرق عمل هذا المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين في الخطتين، وتُسميان أيضًا نسبة *المرابحة* الشهرية الفعلية. بينما تستطيع استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، يمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من السنوات من الخطة B. للتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار نبيلة هو 1 AED.

$$y = a(1 + r)^t$$ معادلة النمو الأسيّ

$$A(t) = 1(1 + 0.025)^t$$ $y = A(t)$, $a = 1$, $r = 2.5\%$ أو 0.025

$$= 1.025^t$$ بسّط.

اكتب الآن دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة أسيّة تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة بقوة أسيّة تبلغ $1t$.

$$A(t) = 1.025^{1t}$$ الدالة الأصلية

$$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \times 12\right)t}$$ $1 = \frac{1}{12} \times 12$

$$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t}$$ رفع القوى

$$\approx 1.0021^{12t}$$ $(1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$ أو حوالي 1.0021

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن النسبة الشهرية الفعلية في الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا الخطة A هي الخطة الأفضل.

النموذج والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. كيف تقارن هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الأسلوب الوارد في النشاط بالأعلى؟
2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ لتمثل المبلغ المكتسب بعد t من السنوات.
3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في أن الخطة A هي الخطة الأفضل.
4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة كل ثلاثة أشهر تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لشرح أيهما الخطة الأفضل.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة

السابق
- ربطت المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.

الحالي
1 تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها.
2 ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسيّة.

لماذا؟
- ترسل رسالة إلكترونية تسلسلية إلى صديق ليعيد إرسالها إلى خمسة أشخاص آخرين. يعيد كل من هؤلاء الأشخاص الخمسة الرسالة الإلكترونية إلى خمسة أشخاص آخرين. يشكّل عدد الرسائل الإلكترونية الجديدة متتالية هندسية.

المفردات الجديدة
متتالية هندسية
geometric sequence
نسبة مشتركة
common ratio

ممارسات في الرياضيات
حاول إيجاد البنية واستخدامها.

1 التعرف على المتتاليات الهندسية

ينشئ الشخص الأول 5 رسائل إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من هؤلاء الأشخاص رسالة إلكترونية إلى 5 أشخاص آخرين، يتم إنشاء 25 رسالة إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من الـ 25 شخصًا 5 رسائل إلكترونية، يتم إنشاء 125 رسالة إلكترونية. تسلسل الرسائل الإلكترونية الناشئة، 125 ,25 ,5 ,1، ... يُعد مثالاً على **متتالية هندسية**.

في المتتالية الهندسية، الحد الأول ليس صفرًا وكل حد بعد الأول يتحدد بضرب الحد السابق في قيمة ثابتة غير الصفر r تُسمى **النسبة المشتركة**. يمكن إيجاد النسبة المشتركة عبر قسمة أي حدٍ على الحدّ السابق له.

مثال 1 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.

a. 256, 128, 64, 32, ...

أوجد نسب الحدود المتتابعة.

256 ← 128 ← 64 ← 32

$\frac{128}{256} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

بما أن النسب ثابتة، فالمتتالية هندسية. النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$.

b. 4, 9, 12, 18, ...

أوجد نسب الحدود المتتابعة.

4 ← 9 ← 12 ← 18

$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ $\quad \frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}$ $\quad \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$

النسب ليست ثابتة، إذًا فالمتتالية ليست هندسية.

أوجد الفروق في الحدود المتتابعة.

4 ← 9 ← 12 ← 18

$9 - 4 = 5$ $\quad 12 - 9 = 3$ $\quad 18 - 12 = 6$

لا يوجد فرق مشترك، إذًا فالمتتالية ليست حسابية. ولهذا، فالمتتالية ليست هندسية أو حسابية.

تمرين موجّه

1A. 1, 3, 9, 27, ...

1B. −20, −15, −10, −5, ...

1C. 2, 8, 14, 22, ...

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

بمجرد معرفة النسبة المشتركة، يمكن توليد المزيد من الحدود في متتالية. يمكن إعادة كتابة القانون بالصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$، حيث n عدد الحدود و r هي النسبة المشتركة.

مثال 2 إيجاد حدود المتتاليات الهندسية

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

a. 1, −4, 16, −64, ...

الخطوة 1 أوجد النسبة المشتركة.

1 ← −4 ← 16 ← −64

$\frac{-4}{1} = -4$ $\quad \frac{16}{-4} = -4$ $\quad \frac{-64}{16} = -4$

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

−64 ← 256 ← −1024 ← 4096

×(−4) ×(−4) ×(−4)

الحدود الثلاثة التالية هي 256 و −1024 و 4096.

b. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ ...

الخطوة 1 أوجد النسبة المشتركة.

9 ← 3 ← 1 ← $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

قيمة r هي $\frac{1}{3}$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$\frac{1}{3}$ ← $\frac{1}{9}$ ← $\frac{1}{27}$ ← $\frac{1}{81}$

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{27}$ و $\frac{1}{81}$.

تمرين موجّه

2A. −3, 15, −75, 375, ...

2B. 24, 36, 54, 81, ...

نصيحة دراسية

البناء إذا كانت حدود متتالية هندسية تتبدل من حدود موجبة إلى سالبة أو بالعكس، فالنسبة المشتركة سالبة.

الربط بتاريخ الرياضيات

توماس روبرت مالتوس (1766-1834) درس مالتوس أعداد السكان وكانت له آراء متشائمة في مستقبل سكان العالم. ذكر في أبحاثه أن: "السكان يتزايدون بنسبة هندسية، بينما تتزايد سبل المعيشة بنسبة حسابية."

2 المتتاليات والدول الهندسية

سيكون من المرهق التوصل إلى الحد n في متتالية هندسية إذا استخدمنا الطريقة المذكورة أعلاه. يوضح الجدول أدناه قاعدة لإيجاد الحد رقم n في متتالية هندسية.

الموضع، n	n	...	4	3	2	1
الحد، n^a	$a_1 r^{n-1}$	...	$a_1 r^3$	$a_1 r^2$	$a_1 r$	a_1

لاحظ أن النسبة المشتركة بين الحدود هي r. يوضح الجدول أنه للوصول إلى الحد n، فإنك تضرب الحد الأول في النسبة المشتركة r مرفوعة إلى القوة الأسية $n-1$. يمكن تعريف المتتالية الهندسية بدالة أسية تمثل فيها n المتغير المستقل، و a_n هي المتغير التابع و r هي الأساس. المجال هو أعداد الحدود.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي الحد n لمتتالية هندسية

يتحدد a_n الحد النوني n لمتتالية هندسية حيث الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r بالقانون التالي، حيث n و a_1 هي أي عدد صحيح موجب و $r \neq 0$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال 3 إيجاد الحد n لمتتالية هندسية

a. اكتب معادلة للحد n للمتتالية ... 48, −24, 12, −6.

الحد الأول في المتتالية هو −6. إذًا $a_1 = -6$. أوجد الآن النسبة المشتركة.

−6 ، 12 ، −24 ، 48

النسبة المشتركة هي −2

$\frac{12}{-6} = -2$ ، $\frac{-24}{12} = -2$ ، $\frac{48}{-24} = -2$

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_n = -6(-2)^{n-1}$	$a_1 = -6$ و $r = 2$

b. أوجد الحد التاسع في هذه المتتالية.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_9 = -6(-2)^{9-1}$	للحد رقم $n = 9$، n.
$= -6(-2)^8$	بسّط.
$= -6(256)$	$(-2)^8 = 256$
$= -1536$	

تمرين موجّه

3. اكتب معادلة للحد n في المتتالية الهندسية ... 96, 48, 24, 12, . ثم أوجد الحد العاشر في المتتالية.

انتبه!

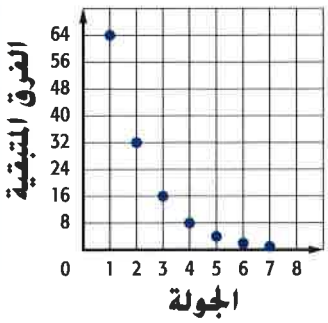
النسبة المشتركة السالبة

إذا كانت النسبة المشتركة سالبة، كما في المثال 3، فتأكد من إدراج النسبة المشتركة بين قوسين. $-2^8 \neq (-2)^8$

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل متتالية هندسية بيانيًا

كرة السلة تبدأ بطولة الاتحاد الوطني للرياضة الجامعية لكرة السلة للنساء بـ 64 فريقًا. في كل جولة، يتبقى نصف الفرق في المنافسة إلى أن يتبقى فريق واحد فقط. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل عدد الفرق المتبقية في كل جولة.

بالمقارنة بالجولات السابقة، يبقى نصف الفرق. إذًا $r = \frac{1}{2}$.
ولهذا، المتتالية الهندسية التي تمثل هذا الموقف هي 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. إذًا في الجولة الثانية، يتنافس 32 فريقًا، وفي الجولة الثالثة يتنافس 16 فريقًا وهكذا. استخدم هذه المعلومات لرسم تمثيل بياني.



تمرين موجّه

4. التنس سقطت كرة تنس من ارتفاع 12 مترًا. ترتد الكرة في كل مرة حتى 80% من الارتفاع الذي سقطت منه. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

الربط بالحياة اليومية

جرت أول مسابقة لاتحاد الرياضات الجامعية الوطني لكرة السلة للنساء في عام 1982. فازت جامعة تينيسي بأكثر الألقاب الوطنية بتحقيقها 8 ألقاب حتى عام 2010.

المصدر: NCAA الرياضية

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة ©

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

1. 200, 40, 8, ...
2. 2, 4, 16, ...
3. −6, −3, 0, 3, ...
4. 1, −1, 1, −1, ...

مثال 2 **أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

5. 10, 20, 40, 80, ...
6. 100, 50, 25, ...
7. $4, -1, \frac{1}{4}, \ldots$
8. −7, 21, −63, ...

مثال 3 **اكتب صيغة للحد النوني n في كل متتالية هندسية وأوجد الحد المشار إليه.**

9. الحد الخامس في ... −6, −24, −96,

10. الحد السابع في ... −1, 5, −25,

11. الحد العاشر في ... 72, 48, 32,

12. الحد التاسع في ... 112, 84, 63,

مثال 4 13. **التجربة** في تجربة في حصة لمادة الفيزياء، أسقطت لميس كرة من ارتفاع 16 مترًا. يصل كل ارتداد إلى 70% من ارتفاع الارتداد السابق. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

14. 4, 1, 2, ...
15. 10, 20, 30, 40, ...
16. 4, 20, 100, ...
17. 212, 106, 53, ...
18. −10, −8, −6, −4, ...
19. 5, −10, 20, 40, ...

مثال 2 **أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

20. 2, −10, 50, ...
21. 36, 12, 4, ...
22. 4, 12, 36, ...
23. 400, 100, 25, ...
24. −6, −42, −294, ...
25. 1024, −128, 16, ...

مثال 3 26. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 1، والنسبة المشتركة هي 9. ما الحد الثامن في المتتالية؟

27. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 2، والنسبة المشتركة هي 4. ما الحد الرابع عشر في المتتالية؟

28. ما الحد الخامس عشر في المتتالية الهندسية ... −81, 27, −9,؟

29. ما الحد العاشر في المتتالية الهندسية ... 96, −24, 6,؟

مثال 4 30. **البندول** تظهر حركة الأرجحة الأولى لبندول. في كل حركة أرجحة تالية، يبلغ طول القوس 60% من طول حركة الأرجحة السابقة. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل طول القوس بعد كل حركة أرجحة.

31. أوجد الحد الثامن في متتالية هندسية بحيث تكون $a_3 = 81$ و $r = 3$.

32. **التبرير** في موقع خرائط عبر الإنترنت، يلاحظ السيد عدنان أنه عندما ينقر فوق نقطة على الخريطة، تقوم الخريطة بتكبير تلك النقطة. يزيد التكبير بنسبة 20% في كل مرة.

a. اكتب قانونًا للحد رقم n في المتتالية الهندسية يمثل التكبير في كل مستوى تكبير. (*إرشاد*: النسبة المشتركة ليست 0.2 فقط.)

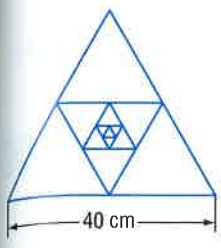
b. ما الحد الرابع في هذه المتتالية؟ ما الذي يمثله؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

33 **المصروف** عرض والدا ليلى عليها خيارين لتحصل على مصروفها على مدار 9 أسابيع خلال الصيف. يمكنها أن تحصل على AED 30 كل أسبوع أو AED 1 في الأسبوع الأول و AED 2 في الأسبوع الثاني و AED 4 في الأسبوع الثالث وهكذا.

a. هل يمثل الخيار الثاني متتالية هندسية؟ اشرح.

b. ما الخيار الذي ينبغي أن تختاره ليلى؟ اشرح.



34. مثلث سيربنسكي فكّر في المثلثات المتساوية الأضلاع المرسومة على اليسار. يبلغ محيط كل مثلث نصف محيط المثلث الأكبر التالي. فما محيط أصغر مثلث؟

35. إذا كان الحد الثاني في المتتالية الهندسية هو 3 والحد الثالث هو 1، فأوجد الحدين الأول والرابع في المتتالية.

36. إذا كان الحد الثالث في المتتالية الهندسية هو 12− والحد الرابع هو 24. فأوجد الحدين الأول والخامس في المتتالية.

37. الزلازل يُستخدم مقياس ريختر لقياس قوة الزلزال. يوضح الجدول الزيادة في مقدار القيم على مقياس ريختر.

رقم ريختر (x)	الزيادة في المقدار (y)	معدل التغير (الميل)
1	1	–
2	10	9
3	100	
4	1000	
5	10,000	

a. انسخ الجدول وأكمله. تذكر أن معدل التغير هو التغير في y مقسومًا على التغير في x.

b. ارسم الأزواج المرتبة (الزيادة في المقدار، رقم ريختر).

c. صِف التمثيل البياني الذي صنعته من بيانات مقياس ريختر. هل معدل التغير بين أي نقطتين واحد؟

d. اكتب معادلة أسيّة تمثل مقياس ريختر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. التحدي اكتب متتالية هندسية وحسابية. اشرح إجابتك.

39. التفكير النقدي يعمل إبراهيم وأحمد على التوصل إلى الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... ,20− ,10 ,5− . فهل أيّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

إبراهيم

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5 \times (-2)^{9-1}$

$= -5 \times -256$

$= 1280$

أحمد

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5\ (-2)^{9-1}$

$= -5(512)$

$= -2560$

40. التبرير اكتب متتالية أعداد تشكل نمطًا لكنها ليست حسابية ولا هندسية. اشرح النمط.

41. الكتابة في الرياضيات ما وجه الشبه بين التمثيلات البيانية للمتتاليات الهندسية والدوال الأسيّة؟ هل هي مختلفة؟

42. الكتابة في الرياضيات اذكر بإيجاز كيفية التوصل إلى حد معين في متتالية هندسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

43. أوجد الحد الحادي عشر في المتتالية الهندسية 3, −6, 12, −24, ...

A 6144
B 3072
C 33
D −6144

44. ما إجمالي مبلغ الاستثمار الظاهر في الجدول أدناه إذا كانت المرابحة مركبة شهريًا؟

الأولي	AED 500
طول مدة الاستثمار	4 سنوات
نسبة المرابحة السنوية	5.25%

F AED 613.56
G AED 616.00
H AED 616.56
J AED 718.75

45. إجابة قصيرة تملك أسماء مبلغ AED 6.50 بعملات من فئات 25 فلسًا و 10 فلسات. إذا كانت لديها 35 عملة إجمالاً، فكم عدد العملات التي لديها من كل فئة؟

46. ما مجال ومدى الدالة $y = 4(3^x) - 2$؟

A D = {كل الأعداد الحقيقية}, R = $\{y|y > -2\}$
B D = {كل الأعداد الحقيقية}, R = $\{y|y > 0\}$
C D = {كل الأعداد الصحيحة}, R = $\{y|y > -2\}$
D D = {كل الأعداد الصحيحة}, R = $\{y|y > 0\}$

مراجعة شاملة

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

47. 2, 6, 18, 54, ...

48. −5, −10, −20, −40, ...

49. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

50. −3, 1.5, −0.75, 0.375, ...

51. 1, 0.6, 0.36, 0.216, ...

52. 4, 6, 9, 13.5, ...

مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

53. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$

54. $y = 2(4)^x$

55. $y = \frac{1}{2}(3^x)$

56. التخطيط المساحي تنمو شجرة صنوبر أزرق بمقدار 15 سنتيمترًا كل سنة في المتوسط. التخطيط المساحي ينمو نبات الشوكران بمقدار 10 سنتيمترات كل سنة في المتوسط. إذا كان طول الصنوبر الأزرق يبلغ 120 سنتيمترًا وطول الشوكران 180 سنتيمترًا، فاكتب نظام معادلات لتمثيل نموهما. أوجد الحل وفسره في سياق الموقف.

الشيك	المبلغ
750	AED 1300
751	AED 947

57. المال يفرض سيتي بنك حدًا أدنى للرصيد يبلغ AED 1500 للحفاظ على مجانية خدمات إصدار الشيكات. إذا كان السيد إسماعيل سيكتب شيكات بالمبالغ المدرجة في الجدول، فما المبلغ الذي ينبغي أن يبدأ به لكي يحصل على إصدار الشيكات مجانًا؟

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم باستخدام الميل المعطى والمقطع من المحور الرأسيّ y المعطاة.

58. الميل: 4، المقطع من المحور الرأسيّ y : 2

59. الميل: −3، المقطع من المحور الرأسيّ y: $-\frac{2}{3}$

60. الميل: $-\frac{1}{4}$ ، المقطع من المحور الرأسيّ y : −5

61. الميل: $-\frac{1}{2}$ ، المقطع من المحور الرأسيّ y: −9

62. الميل: $-\frac{2}{5}$، المقطع من المحور الرأسيّ y : $\frac{3}{4}$

63. الميل: −6، المقطع من المحور الرأسيّ y: −7

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب *هذه أبسط صورة*.

64. $3u + 10u$

65. $5a - 2 + 6a$

66. $6m^2 - 8m$

67. $4w^2 + w + 15w^2$

68. $13(5 + 4a)$

69. $(4t - 6)16$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر الجبر

2-4 متوسط معدل التغير في الدوال الأسيّة

أنت تعلم أن معدل التغير في الدالة الخطية ثابت بالنسبة لأي نقطتين على التمثيل البياني. معدل تغير دالة أسية ليس ثابتًا.

النشاط تقييم خطط الاستثمار

يملك علي 2000 AED لاستثمارها في إحدى خطتين. تقدم الخطة 1 زيادة على مبلغه الأولي تبلغ 75 AED كل عام، بينما تعرض الخطة 2 دفع مرابحة مركبة شهريًا تبلغ 3.6%. تتحدد قيمة الدرهم لكل استثمار بعد t أعوام بـ $A_1 = 2000 + 75t$ و $A_2 = 2000(1.003)^{12t}$، على الترتيب. استخدم قيم الدالة ومتوسط معدل التغير والتمثيلات البيانية للمعادلات لتفسير الخطط والمقارنة بينها.

الخطوة 1 انسخ الجدول أدناه واستكمله بإيجاد القيم المجهولة لكل من A_1 و A_2.

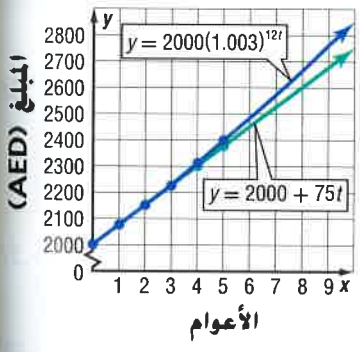
t	0	1	2	3	4	5
A_1						
A_2						

الخطوة 2 أوجد متوسط معدل التغير لكل خطة من $t = 0$ إلى 1، و $t = 3$ إلى 4، و $t = 0$ إلى 5.

الخطة 1: $\frac{2075 - 2000}{1 - 0}$ أو 75 $\frac{2300 - 2225}{4 - 3}$ أو 75 $\frac{2375 - 2000}{5 - 0}$ أو 75

الخطة 2: $\frac{2073.2 - 2000}{1 - 0}$ أو 73.2 $\frac{2309.27 - 2227.74}{4 - 3}$ أو حوالي 82 $\frac{2393.79 - 2000}{5 - 0}$ أو حوالي 79

الخطوة 3 مثّل بيانيًا الأزواج المرتبة لكل دالة. قم بالتوصيل بين كل مجموعة نقاط بمنحنى منتظم.



الخطوة 4 استخدم التمثيل البياني ومعدلات التغير للمقارنة بين الخطط. كلا التمثيلين البيانيين له معدل تغير يبلغ في العام الأول حوالي 75 AED في السنة. من العام 3 إلى 4، تواصل الخطة 1 الزيادة بمعدل 75 AED في السنة، لكن الخطة 2 تنمو بمعدل يزيد على 81 AED في السنة. متوسط معدل التغيير على مدار أول خمسة أعوام في الخطة 1 يبلغ 75 AED في العام وللخطة 2 يزيد على 78 AED في العام. يشير هذا إلى أنه مع زيادة عدد الأعوام، ينمو الاستثمار في الخطة 2 بمعدل أسرع بشكل متزايد. يدعم هذا الفجوة المتزايدة بين تمثيليهما البيانيين.

تمارين

تنخفض قيمة أحد أجهزة الشركة مع الوقت بسبب الإستهلاك. تمثل الدالة $y = 16{,}000(0.985)^{2t}$ القيمة بعد t أعوام.

1. ما متوسط معدل التغيير على مدى أول خمس أعوام؟
2. ما متوسط معدل التغيير في القيمة من العام 5 إلى العام 10؟
3. ما الاستنتاج الخاص بالقيمة الذي يمكن أن نتوصل إليه بناء على متوسطات معدلات التغيير هذه؟
4. **الانتظام** انسخ الجدول واستكمله لـ $y = x^4$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

قارن متوسط معدل التغيير لـ $x = -3$ إلى 0 ولـ $x = 0$ إلى 3 وفسّر ذلك.

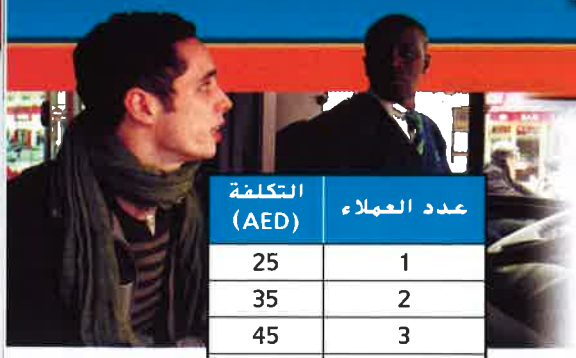
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والنشر محفوظة لصالح مؤسسة

2-5 الصيغ التكرارية

السابق:
- لقد كتبت صيغًا مباشرة للتعبير عن المتتاليات الحسابية والهندسية.

الحالي:
1. استخدام صيغًا تكرارية لإدراج الحدود في متتالية.
2. كتابة صيغة تكرارية للمتتاليات الحسابية والهندسية.

لماذا؟
- يتم نقل العملاء بحافلات مكوكية من منازلهم إلى المتاجر الاستهلاكية الكبرى للتسوق. تعتمد التكلفة الإجمالية للخدمة على العدد الإجمالي للعملاء. تظهر تكاليف أول ستة عملاء.



عدد العملاء	التكلفة (AED)
1	25
2	35
3	45
4	55
5	65
6	75

المفردات الجديدة
صيغة تكرارية
recursive formula

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 استخدام الصيغ التكرارية (الضمنية)

تسمح لك الصيغة الصريحة بإيجاد أي حد a_n في متتالية باستخدام صيغة مكتوبة بدلالة n. على سبيل المثال، يمكن استخدام $a_n = 2n$ لإيجاد الحد رقم خمسة في المتتالية $a_5 = 2(5)$ ...، 2, 4, 6, 8, أو 10.

تسمح لك **الصيغة التكرارية أو الضمنية** بإيجاد الحدّ رقم n في متتالية من خلال إجراء عملياتٍ على واحدٍ أو أكثر من الحدود السابقة. بما أن كل حد في المتتالية أعلاه أكبر بمقدار 2 عن الحد السابق له، يمكننا جمع 2 على الحد الرابع لإيجاد أن الحد الخامس يساوي 2 + 8 أو 10. ثم يمكننا كتابة صيغة تكرارية لـ a_n.

$$\begin{aligned} a_1 &= & &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 \text{ أو } 2 + 2 & &= 4 \\ a_3 &= a_2 + 4 \text{ أو } 2 + 2 & &= 6 \\ a_4 &= a_3 + 6 \text{ أو } 2 + 2 & &= 8 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

الصيغة التكرارية للمتتالية أعلاه هي $a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 2$، لـ $n \geq 2$ حيث n عدد صحيح. الحد المشار إليه بـ a_{n-1} يمثل الحد السابق مباشرة لـ a_n. لاحظ أن الحد الأول a_1 معطى وكذلك مجال n.

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية

أوجد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 7$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \geq 2$.

استخدم $a_1 = 7$ والصيغة التكرارية لإيجاد الحدود الأربعة التالية.

$a_2 = 3a_{2-1} - 12$ — $n = 2$
$= 3a_1 - 12$ — بسّط. $a_1 = 7$
$= 3(7) - 12 = 9$

$a_3 = 3a_{3-1} - 12$ — $n = 3$
$= 3a_2 - 12$ — بسّط. $a_2 = 9$
$= 3(9) - 12 = 15$

$a_4 = 3a_{4-1} - 12$ — $n = 4$
$= 3a_3 - 12$ — بسّط. $a_3 = 15$
$= 3(15) - 12 = 33$

$a_5 = 3a_{5-1} - 12$ — $n = 5$
$= 3a_4 - 12$ — بسّط. $a_4 = 33$
$= 3(33) - 12 = 87$

أول خمسة حدود هي 7 و9 و 15 و 33 و 87.

تمرين موجّه

1. أوجد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = -2$ و $a_n = (-3)\,a_{n-1} + 4$، إذا كانت $n \geq 2$.

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

2 كتابة الصيغ التكرارية لكتابة صيغة تكرارية لمتتالية حسابية أو هندسية، استكمل الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي كتابة الصيغ التكرارية

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية بإيجاد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

الخطوة 2 اكتب صيغة تكرارية.

المتتاليات الحسابية $a_n = a_{n-1} + d$، حيث d هي الفرق المشترك

المتتاليات الهندسية $a_n = r \times a_{n-1}$، حيث r هي النسبة المشتركة

الخطوة 3 اذكر الحد الأول والمجال في n.

نصيحة دراسية

تعريف n للحد n في متتالية، يجب أن تكون قيمة n عددًا صحيحًا موجبًا. على الرغم من أنه يجب ذكر مجال n، سنفترض بدءًا من هذه النقطة أن n عدد صحيح.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

a. 17, 13, 9, 5, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$13 - 17 = -4$ $\quad 9 - 13 = -4$ $\quad 5 - 9 = -4$

هناك فرق مشترك يبلغ -4. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + (-4)$ $d = -4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 17، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 17,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$.

نصيحة دراسية

المجال يتحدد مجال n بالحدود المذكورة. بما أن الحد الأول مذكور بالفعل، فمن المنطقي أن يكون الحد الأول الذي ستسري عليه الصيغة هو الحد الثاني للمتتالية أو عندما تكون $n = 2$.

b. 6, 24, 96, 384, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$24 - 6 = 18$ $\quad 96 - 24 = 72$ $\quad 384 - 96 = 288$

لا يوجد فرق مشترك. ابحث عن نسبة مشتركة بقسمة كل حد على الحد السابق له.

$\frac{24}{6} = 4$ $\quad \frac{96}{24} = 4$ $\quad \frac{384}{96} = 4$

هناك نسبة مشتركة تبلغ 4. المتتالية هندسية.

الخطوة 2 استخدم صيغة المتتالية الهندسية.

$a_n = r \times a_{n-1}$ الصيغة التكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = 4a_{n-1}$ $r = 4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 6، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 6,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$.

تمرين موجّه

2A. 4, 10, 25, 62.5, ...

2B. 9, 36, 63, 90, ...

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

يمكن تمثيل المتتالية بكل من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

مهنة من الحياة اليومية

النقل من المتوقع أن ينمو عدد الوظائف في مجال النقل بما يقرب من 1.1 مليون وظيفة بين عامي 2004 و 2014. تحدد مجالات معينة متطلبات تعليمية، وتشمل دبلومًا من مدرسة عليا وشكلاً من أشكال التدريب المتخصص.

المصدر: وزارة العمل في الولايات المتحدة

مثال 3 كتابة صيغتين تكرارية وصريحة

التكلفة **ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن N هي عدد العملاء.**

a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

الخطوتان 1 و 2 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$35 - 25 = 10$ $\quad 45 - 35 = 10$ $\quad 55 - 45 = 10$

هناك فرق مشترك يبلغ 10. المتتالية حسابية.

الخطوة 3 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + 10$ $d = 10$

الخطوة 4 الحد الأول a_1 هو 25. و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 25,\ a_n = a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

الخطوة 1 الفرق المشترك هو 10.

الخطوة 2 استخدم صيغة الحد رقم n لمتتالية حسابية.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد رقم n

$= 25 + (n-1)10$ $a_1 = 25$ و $d = 10$

$= 25 + 10n - 10$ خاصية التوزيع

$= 10n + 15$ بسّط.

الصيغة الصريحة للمتتالية هي $a_n = 10n + 15$.

تمرين موجّه

3. **المدخرات** يحقق المال الذي يملكه بدر في حسابه الادخاري ربحًا كل عام. لا يقوم بأي سحوبات أو إيداعات إضافية. يبلغ رصيد الحساب في بداية كل عام AED 10,000 و AED 10,300 و AED 10,609 و AED 10,927.27 وهكذا. اكتب صيغة تكرارية وصيغة صريحة للمتتالية.

إذا كانت عدة حدود متتالية مطلوبة، فتكون الصيغة التكرارية مفيدة بينما إذا كان الحد رقم n في متتالية هو فقط المطلوب، فتكون الصيغة الصريحة مفيدة. ولهذا من المفيد أحيانًا التحول بين الصيغتين.

مثال 4 التنقل بين الصيغتين التكرارية والصريحة

a. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 6n + 3$.

$a_n = 6n + 3$ صيغة صريحة لمتتالية حسابية حيث $a_1 = 6(1) + 3$ و $d = 6$ أو 9. ولهذا فالصيغة التكرارية لـ a_n هي $a_1 = 9,\ a_n = a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = 120,\ a_n = 0.8a_{n-1},\ n \geq 2$.

$a_n = 0.8a_{n-1}$ صيغة تكرارية لمتتالية هندسية حيث $a_1 = 120$ و $r = 0.8$. ولهذا، فالصيغة الصريحة لـ a_n هي $a_n = 120(0.8)^{n-1}$.

نصيحة دراسية

المتتالية الهندسية تذكّر أن صيغة الحد n لمتتالية هندسية هي $a_n = a_1 r^{n-1}$.

تمرين موجّه

4A. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 4(3)^{n-1}$.

3a. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = -16,\ a_n = a_{n-1} - 7,\ n \geq 2$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.**

1. $a_1 = 16,\ a_n = a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

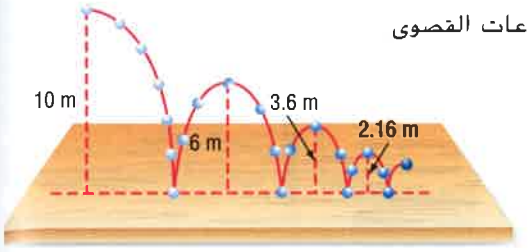
2. $a_1 = -5,\ a_n = 4a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$

مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

3. 1, 6, 11, 16, ...

4. 4, 12, 36, 108, ...

مثال 3 5. **الكرة** سقطت كرة من ارتفاع 10 أمتار. موضح بالصورة الارتفاعات القصوى التي تصل إليها الكرة في أول ثلاثة ارتدادات.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

6. $a_1 = 4,\ a_n = a_{n-1} + 16,\ n \geq 2$

7. $a_n = 5n + 8$

8. $a_n = 15(2)^{n-1}$

9. $a_1 = 22,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.**

10. $a_1 = 23,\ a_n = a_{n-1} + 7,\ n \geq 2$

11. $a_1 = 48,\ a_n = -0.5a_{n-1} + 8,\ n \geq 2$

12. $a_1 = 8,\ a_n = 2.5a_{n-1},\ n \geq 2$

13. $a_1 = 12,\ a_n = 3a_{n-1} - 21,\ n \geq 2$

14. $a_1 = 13,\ a_n = -2a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

15. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2},\ n \geq 2$

مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

16. 12, −1, −14, −27, ...

17. 27, 41, 55, 69, ...

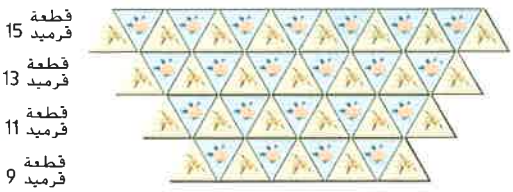
18. 2, 11, 20, 29, ...

19. 100, 80, 64, 51.2, ...

20. 40, −60, 90, −135, ...

21. 81, 27, 9, 3, ...

مثال 3 22. **وضع النماذج** يبني مهندس تصميم معماري فناء من القرميد. يشمل جزء من الفناء نمطًا مكونًا من مثلثات. موضح بالصورة أول أربعة صفوف من النمط.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

23. $a_n = 3(4)^{n-1}$

24. $a_1 = -2,\ a_n = a_{n-1} - 12,\ n \geq 2$

25. $a_1 = 38,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1},\ n \geq 2$

26. $a_n = -7n + 52$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

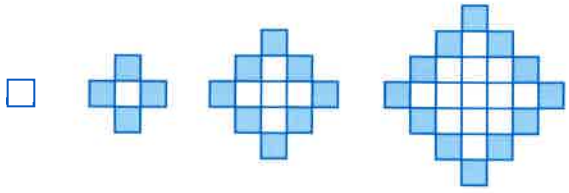
27. **الرسائل النصية** تلقت أماني رسالة نصية متسلسلة أعادت إرسالها إلى خمس من صديقاتها. أعادت كل واحدة من صديقاتها إرسال الرسالة النصية إلى خمس صديقات أخريات، وهكذا.

a. أوجد أول خمسة حدود في هذا التسلسل تمثل عدد الأشخاص الذين يتلقون الرسالة النصية في الجولة n.

b. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

c. إذا كانت أماني تمثل a_1، فأوجد a_8.

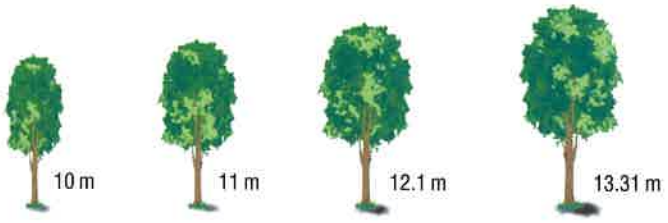
28. **الهندسة** فكّر في النمط أدناه. يزداد عدد المربعات الزرقاء وفقًا لنمط معين.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات الزرقاء في كل شكل.

b. إذا كان المربع الأول يمثل a_1، فأوجد عدد المربعات الزرقاء في a_8.

29. **الأشجار** يتباطأ نمو نوع معين من الأشجار مع تقدم الشجرة في العمر. تظهر ارتفاعات الشجرة على مدار الأربع سنوات الماضية.



a. اكتب صيغة تكرارية لارتفاع الشجرة.

b. إذا استمر النمط، فما الطول الذي ستصل إليه الشجرة بعد عامين آخرين؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

30. **التمثيلات المتعددة** متتالية فيبوناتشي ليست حسابية أو هندسية ويمكن تعريفها بأنها صيغة تكرارية. الحدود الأولى هي ... 1, 1, 2, 3, 5, 8,

a. منطقيًا حدد العلاقة بين حدود المتتالية. ما الحدود الخمسة التالية في المتتالية؟

b. جبريًا اكتب صيغة للحد رقم n إذا كانت $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ و $n \geq 3$.

c. جبريًا أوجد الحد رقم 15.

d. تحليليًا اشرح السبب في أن متتالية فيبوناتشي ليست متتالية حسابية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **تحليل الخطأ** يعمل بلال وجاسم على حل مسألة رياضية تتضمن المتتالية ... 2, −2, 2, −2, 2, . يعتقد بلال أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة تكرارية. ويرى جاسم أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة صريحة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

32. **التحدي** أوجد a_1 للمتتالية حيث $a_4 = 1104$ و $a_n = 4a_{n-1} + 16$.

33. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. علل استنتاجك.

توجد صيغة تكرارية واحدة فقط لكل متتالية.

34. **التحدي** أوجد صيغة تكرارية لـ ... 4, 9, 19, 39, 79,

35. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق بين الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. أوجد صيغةً تكراريةً للمتتالية ... 12, 24, 36, 48, .

A $a_1 = 12,\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2.$

B $a_1 = 12,\ a_n = 4a_{n-1} - 24,\ n \geq 2.$

C $a_1 = 12,\ a_n = a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

D $a_1 = 12,\ a_n = 12a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

37. الهندسة تبلغ مساحة أحد المستطيلات $36m^4n^6$ متر مربع. يبلغ طول المستطيل $6m^3n^3$ متر. فما عرض المستطيل؟

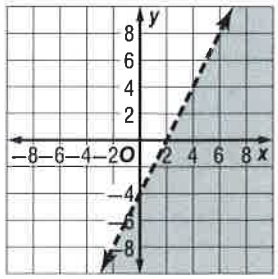
F $216m^7n^9\ m$

G $6mn^3\ m$

H $42m^7n^3\ m$

J $30mn^3\ m$

38. أوجد متباينة في التمثيل البياني المعروض.



A $y > 2x - 4$

B $y \geq 2x - 4$

C $y < 2x - 4$

D $y \leq 2x - 4$

39. اكتب معادلة للمستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, -20)$ و $(4, 58)$.

F $y = 13x + 6$

G $y = 19x - 18$

H $y = 19x + 18$

J $y = 13x - 6$

مراجعة شاملة

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

40. 675, 225, 75, ...

41. 16, −24, 36, ...

42. 6, 18, 54, ...

43. 512, −256, 128, ...

44. 125, 25, 5, ...

45. 12, 60, 300, ...

46. الاستثمار استثمر أحمد AED 2000 بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 5.75% شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون مع أحمد بعد 5 سنوات؟

47. الجولات السياحية تسافر أسرة راشد وأسرة صالح معًا في رحلة لزيارة مصنع حلويات. موضح الجدول أدناه عدد الأشخاص في كل أسرة والتكلفة الإجمالية . أوجد أسعار دخول الشخص البالغ والأطفال.

الأسرة	عدد البالغين	عدد الأطفال	التكلفة الإجمالية
راشد	2	3	AED 58
صالح	2	1	AED 38

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

48. $y + 6 = -3(x + 2)$

49. $y - 12 = 4(x - 7)$

50. $y + 9 = 5(x - 3)$

51. $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 15)$

52. $y + 10 = \frac{2}{5}(x - 6)$

53. $y - 4 = -\frac{2}{7}(x + 1)$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب *هذه أبسط صورة*.

54. $8x + 3y^2 + 7x - 2y$

55. $4(x - 16) + 6x$

56. $4n - 3m + 9m - n$

57. $6r^2 + 7r$

58. $-2(4g - 5h) - 6g$

59. $9x^2 - 7x + 16y^2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

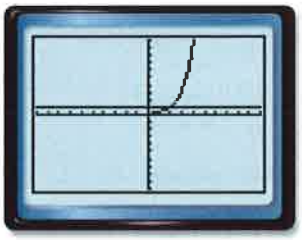
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُلّ $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

أدخِل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.

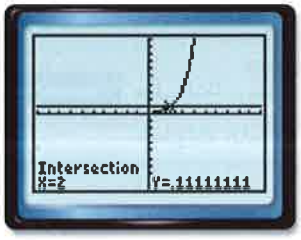


[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect** (**تقاطع**) من قائمة **CALC** (**احسب**) لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.



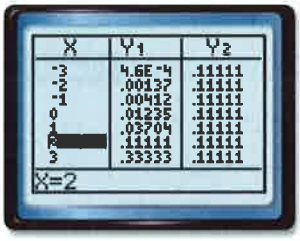
[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام خاصية **TABLE** (**الجدول**) لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.



تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ عوّض بالعدد 2 عن x.

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بسّط.

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

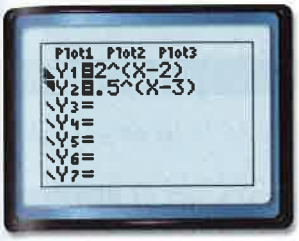
(يُتبع في الصفحة التالية)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حل المعادلات والمتباينات الأسية تابع

النشاط 2 وصف

حُلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.



الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

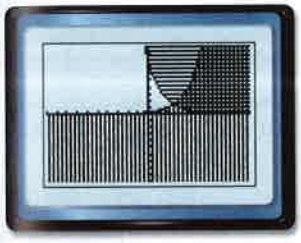
المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن علامة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل".

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على علامة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

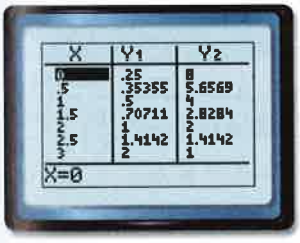


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**. يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$، فإن Y1 > Y2. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمتَ بتمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.	1 • حل المعادلات الأسيّة. 2 حل المتباينات الأسيّة.	• تتجه العضوية بمواقع شبكات التواصل الاجتماعي إلى الزيادة بمعدلٍ أسي. ويمكن تمثيل نمو هذه العضوية على أحد المواقع من خلال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$. حيث x هو عدد الأعوام منذ 2004 وy هو عدد الأعضاء بالملايين. يمكنك استخدام $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد كم سيكون عدد الأعضاء في عام ما محدد، أو لتحديد العام الذي بلغت فيه العضوية مستوًى معينًا.

المفردات الجديدة

المعادلة الأسيّة
exponential equation

المرابحة المركبة
compound interest

المتباينة الأسيّة
exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 إيجاد حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، تأتي المتغيرات على شكل أسس.

المفهوم الأساسي خاصية التساوي في الدوال الأسيّة

الشرح	افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. إذًا، $b^x = b^y$ فقط عندما يكون $x = y$.
مثال	إذا كانت $3^x = 3^5$، إذًا $x = 5$. إذا كانت $x = 5$، إذًا $3^x = 3^5$.

يمكن استخدام خاصية التساوي لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	أعد كتابة 8 بالصيغة 2^3.
$2^x = 2^9$	قوة أسية لقوة أسية
$x = 9$	خاصية التساوي في الدوال الأسيّة

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	أعد كتابة 9 بالصيغة 3^2.
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	قوة أسية لقوة أسية
$4x - 2 = 6x$	خاصية التساوي في الدوال الأسيّة
$-2 = 2x$	اطرح $4x$ من كل طرف.
$-1 = x$	اقسم كل طرف على 2.

تمرين موجّه

1A. $4^{2n-1} = 64$

1B. $5^{5x} = 125^{x+2}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

يمكنك استخدام المعلومات المتعلقة بالنمو أو التضاؤل لكتابة المعادلة الخاصة بدالة أسية.

مثال 2 من الحياة اليومية كتابة الدالة الأسيّة

العلوم **بدأت هدى تجربة بـــ 7500 خلية بكتيرية. وبعد 4 ساعات، أصبح هناك 23,000 خلية.**

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، كان الوقت 0 ساعة وكان يوجد 7500 خلية بكتيرية. وبالتالي، تكون قيمة التقاطع مع المحور الرأسي y، وقيمة a هي 7500.

عندما يكون $x = 4$، يكون عدد الخلايا البكتيرية 23,000. عوّض عن هذه القيم في دالة أسية لتحديد قيمة b.

$y = ab^x$	دالة أسية
$23{,}000 = 7500 \cdot b^4$	عوّض عن x بـــ 4، وعن y بـــ 23,000، وعن a بـــ 7500.
$3.067 \approx b^4$	اقسم كل طرف على 7500.
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	احسب الجذر الرابع لكل طرف.
$1.323 \approx b$	استخدام الحاسبة.

المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. كم عدد الخلايا البكتيرية التي يمكن توقعها في العينة بعد 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	تمثيل المعادلة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	عوّض عن x بـــ 12.
$\approx 215{,}665$	استخدام آلة حاسبة.

سيكون هناك تقريبًا 215,665 خلية بكتيرية بعد 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير قامت جهة تصنيع بتوزيع 3.2 ملايين علبة ألومنيوم في عام 2005.

A. وفي 2010، وزّعت هذه الجهة 420,000 علبة مُصنَّعة من العلب المُعاد تدويرها، والتي قامت بتوزيعها من قبل. وبافتراض أن معدل إعادة التدوير يستمر، اكتب معادلة لتمثيل توزيع العلب المُصنَّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره كل عام.

B. كم عدد العُلب المُصنَّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره الذي يمكن توقعه في عام 2050؟

تُستخدم الدوال الأسيّة في الحالات التي تنطوي على مرابحة مركبة. **المرابحة المركبة** هي فائدة يتم دفعها على أساس رأس المال الأصلي للاستثمار بالإضافة إلى أي فوائد مكتسبة سابقًا.

المفهوم الأساسي المرابحة المركبة

يمكنك حساب المرابحة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد t من الأعوام، ويمثل P المبلغ الأصلي المستثمَر، ويمثل r نسبة المرابحة السنوية، ويمثل n عدد الفترات المركبة كل عام.

مسائل من الحياة اليومية

في عام 2008، ساهم معدل إعادة تدوير المعادن في الولايات المتحدة البالغ 35% في الوقاية من انبعاث ما يقارب 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء – الكمية المنبعثة سنويًا من 4.5 ملايين سيارة تقريبًا.

المصدر: وكالة الحماية البيئية

انتبه!
النسب
تحويل
إلى صي
2.4%

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © والتأليف الطبع حقوق

مثال 3 المرابحة المركبة

يدفع حساب استثماري مرابحة سنوية مركبة بنسبة 4.2% شهريًا. فإذا تم استثمار مبلغ AED 2500 في هذا الحساب، فكم سيصبح الرصيد بعد 15 عامًا؟

افهم أوجد المبلغ الإجمالي في الحساب بعد 15 عامًا.

خطط استخدم قانون المرابحة المركبة.

$P = 2500$، و $r = 0.042$، و $n = 12$، و $t = 15$.

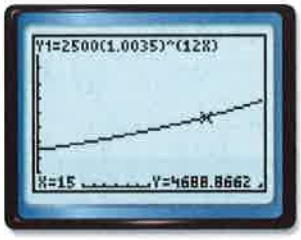
أوجد الحل

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ قانون المرابحة المركبة

$$= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$$ $P = 2500, r = 0.042, n = 12, t = 15$

$$\approx 4688.87$$ استخدم حاسبة.

تحقق مثّل المعادلة المقابلة بيانيًا $y = 2500(1.0035)^{12t}$. استخدم قيمة CALC: لإيجاد y عندما تكون $x = 15$.



[0, 20] scl: 1 by [0, 10,000] scl: 1000

قيمة y البالغة 4688.8662 قريبة جدا من 4688.87. لذلك فالإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

3. أوجد رصيد الحساب بعد 20 عامًا إذا تم وضع AED 100 في حساب يدفع مرابحة مركبة قدرها 1.2% مرتين في الشهر.

انتبه!
النسب المئوية تذكر أن تحويل جميع النسب المئوية إلى صيغة كسور عشرية. 2.4% تصبح 0.042.

2 حل المتباينات الأسيّة

المتباينة الأسيّة هي متباينة تتضمن مقادير أسية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال الأسيّة

الشرح افترض أن $b > 1$. فإن $b^x > b^y$ فقط عندما تكون $x > y$، و $b^x < b^y$ فقط عندما تكون $x < y$.

مثال إذا كانت $2^x > 2^6$، فإن $x > 6$. فإن كانت $x > 6$، إذا $2^x > 2^6$.

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على $\geq$ و $\leq$.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة

حُلّ $16^{2x-3} < 8$.

$16^{2x-3} < 8$ المتباينة الأصلية

$(2^4)^{2x-3} < 2^3$ أعد كتابة 16 بالصيغة 2^4 و 8 بالصيغة 2^3.

$2^{8x-12} < 2^3$ قوة أسية لقوة أسية

$8x - 12 < 3$ خاصية التباين في الدوال الأسيّة

$8x < 15$ اجمع 12 إلى كل طرف.

$x < \frac{15}{8}$ اقسم كل طرف على 8.

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1

حُلّ كل من المعادلات التالية.

1. $3^{5x} = 27^{2x-4}$

2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

3. $2^{6x} = 32^{x-2}$

4. $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

مثال 2

5. العلوم انقسام الخلية هو العملية التي تنقسم فيها الخلية إلى اثنتين. وتُعد *الإشريكية القولونية* واحدة من أسرع أنواع البكتيريا نموًا. ذلك أنه يمكنها أن تتكاثر بنفسها في 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسية لتمثيل عدد الخلايا c بعد عدد t من الدقائق.

b. إذا بدأت بخلية *إشريكية قولونية* واحدة، فكم سيكون عدد الخلايا خلال ساعة واحدة؟

مثال 3

6. تدفع شهادة إيداع مرابحة مركبة كل أسبوعين قدرها 2.25%. فإذا أودعتَ AED 500 في هذه الشهادة، فكم سيكون الرصيد بعد 6 أعوام؟

مثال 4

حُلّ كل من المتباينات التالية.

7. $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$

8. $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

حُلّ كل من المعادلات التالية.

9. $8^{4x+2} = 64$

10. $5^{x-6} = 125$

11. $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

مثال 2

15. تمثيل النماذج في عام 2009، استلمت ريهام مبلغًا قدره AED 10,000 من جدتها. واستثمر والداها هذا المبلغ المالي كله، وبحلول عام 2021، سيكون هذا المبلغ قد نما ليصل إلى AED 16,960.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل المبلغ المالي y. واكتب الدالة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ عام 2009.

b. افترض أن هذا المبلغ المالي استمر في النمو بنفس المعدل. فكم سيكون رصيد هذا الحساب في عام 2031؟

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. (0, 6.4) و (3, 100)

17. (0, 256) و (4, 81)

18. (0, 128) و (5, 371,293)

19. (0, 144) و (4, 21,609)

مثال 3

20. أوجد رصيد الحساب بعد 7 أعوام إذا تم إيداع مبلغ AED 700 في حساب يدفع مرابحة مركبة قدرها 4.3% شهريًا.

21. حدد كم سيكون المبلغ الموجود في حساب تقاعد بعد 20 عامًا إذا تم استثمار AED 5000 بنسبة مرابحة مركبة قدرها 6.05% أسبوعيًا.

22. يقدم حساب توفير مرابحة مركبةً قدرها 0.7% كل شهرين. وإذا تم إيداع مبلغ AED 110 في هذا الحساب، فكم سيكون الرصيد بعد 15 عامًا؟

23. يدفع حساب توفير جامعي مرابحة سنوية مركبة قدرها 13.2% كل نصف عام. فكم سيكون رصيد الحساب بعد 12 عامًا إذا تم إيداع مبلغ AED 21,000 بشكل أولي؟

مثال 4

حُلّ كل من المتباينات التالية.

24. $625 \ge 5^{a+8}$

25. $10^{5b+2} > 1000$

26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \le 81^{d+4}$

28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

30. **العلوم** تبلغ حرارة كوب من الشوكولاته الساخنة 90°C عند الوقت $t = 0$. وهذا الكوب مُحاط بهواء درجة حرارته ثابتة عند 20°C. فإذا تم تقليبه بانتظام، ستصبح حرارته بالدرجة المئوية بعد t من الدقائق $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a. أوجد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 15 دقيقة.

b. أوجد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 30 دقيقة.

c. درجة الحرارة المثالية للشرب هي 60°C. فهل سيكون كوب الشوكولاته الساخنة عند درجة الحرارة هذه أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

31. **الحيوانات** تُظهر الدراسات أن أي حيوان سوف يدافع عن منطقته في حيز يُقدَّر بالأمتار المربعة يكون متناسبًا بشكل طردي مع قوة قدرها 1.31 من وزن الحيوان بالكيلوغرام.

a. إذا دافع قندس وزنه 45 كيلوجرامًا عن مساحة قدرها 170 مترًا مربعًا، فاكتب معادلة تمثل المساحة a التي يتم الدفاع عنها بواسطة قندس وزنه w من الكيلوجرامات.

b. يعتقد العلماء أنه منذ آلاف السنين، كان أسلاف القندس بطول 11 m وبوزن 430 كيلوغرامًا. استخدم معادلتك لتحديد المساحة التي دافعت عنها تلك الحيوانات.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

38. **تمثيل النماذج** في عام 1950، بلغ تعداد سكان العالم 2.556 مليار نسمة. وبحلول عام 1980، ازداد العدد إلى 4.458 مليارات نسمة.

a. اكتب دالة أسية بالصيغة $y = ab^x$ والتي يمكن استخدامها لتمثيل تعداد سكان العالم y بالمليارات للفترة من 1950 وحتى 1980. اكتب المعادلة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ 1950. (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.)

b. افترض أن هذا التعداد استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر التعداد في عام 2000.

c. في عام 2000، بلغ تعداد سكان العالم حوالي 6.08 مليارات نسمة. قارن تقديرك بالتعداد الفعلي للسكان.

d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء a لتقدير تعداد سكان العالم في العام 2020. ما مدى دقة هذا التقدير برأيك؟ اشرح استنتاجك.

39. **الأشجار** يتغير قطر الدائرة لقاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديًا مع $\frac{3}{2}$ قوة ارتفاعها بالأمتار.

a. يبلغ طول شجرة سكوية صغيرة 6 أمتار، ويبلغ قطر قاعدتها 19.1 سنتيمترًا. استخدم هذه المعلومات لكتابة معادلة للقطر d الخاص بقاعدة شجرة السكوية إذا كان ارتفاعها يبلغ h من الأمتار.

b. يبلغ طول شجرة الجنرال شيرمان في حديقة سكويا الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 مترًا. أوجد قطر قاعدة شجرة الشيرمان العامة.

40. **المعرفة المالية** لدى السيدة آمنة خطتان استثماريتان مختلفتان تتعلقان بالتقاعد لتختار واحدة من بينهما.

a. اكتب معادلتين للخيار A والخيار B بناءً على الحد الأدنى للإيداعات.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لإظهار الأرصدة لكل خيار استثماري بعد عدد t من الأعوام.

c. اشرح ما إذا كان الخيار A أو الخيار B هو الخيار الأفضل للاستثمار.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الزيادة السريعة لإحدى الدوال الأسيّة. تم قص ورقة كبيرة إلى نصفين، ووضعت إحدى القطعتين الناتجتين على القطعة الأخرى. بعد ذلك، تم قص القطعتين الموجودتين في هذه الكومة إلى نصفين ووضعت القطع الناتجة فوق بعضها البعض. افترض أنه تم تكرار هذا الإجراء عدة مرات.

a. **عمليًا** نفّذ هذا النشاط وقم بإحصاء عدد الأوراق في الكومة بعد القص أول مرة. كم سيكون عدد قُصاصات الورق في الكومة بعد ثاني عملية قص؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد ثالث مرة؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد رابع مرة؟

b. **جدوليًا سجّل نتائجك في جدول.**

c. **رمزيًا** استخدم النمط الموجود في الجدول لكتابة معادلة لعدد قُصاصات الورق في الكومة بعد عدد x من عمليات القصّ.

d. **تحليليًا** يبلغ سُمك ورقة عادية حوالي 0.003 سنتيمتر. اكتب معادلة للتعبير عن سُمك كومة من هذه الورقة بعد عدد x من عمليات القصّ.

e. **تحليليًا** كم سيكون سُمك كومة الورق بعد 30 قصة؟ .

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المرابحة المركبة، صِف ماذا يحدث عندما تصبح الفترات المُركّبة أكثر تكرارًا، بينما يظل المبلغ الأصلي والوقت الكلي كما هما.

43. **تحليل الخطأ** يحل كل من آمنة وبدرية المعادلة $6^{x-3} > 36^{-x-1}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

آمنة

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

بدرية

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

44. **تحدَّ** حل لإيجاد x: $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التغيير الذي قد يكون أكثر فائدةً لقرض مدته 5 أعوام بمرابحة مركبة نسبتها 8% شهريا: تقليل المدة إلى 4 أعوام أم تقليل نسبة المرابحة إلى 6.5%؟

46. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحةً أحيانًا أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. $2^x > -8^{20x}$ لجميع قيم x.

b. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة نمو أسي.

c. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة تضاؤل أسي.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينةً أسية مع حل $x \leq 2$.

48. **البرهان** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا كانت لديك الكميتين الأولية والنهائية لمادة مشعة ما ومقدار الوقت الذي يمر، فكيف يمكنك تحديد معدل زيادة أو انخفاض الكمية من أجل كتابة معادلة؟

McGraw-Hill Education جميع الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

50. $3 \times 10^{-4} =$

A 0.003
B 0.0003
C 0.00003
D 0.000003

51. أي مما يلي يمكن *ألا* يكون حلاً لـــ $5 - 3x < -3$

F 2.5
G 3
H 3.5
J 4

52. إجابة شبكية تمثل الزوايا الثلاث لمثلث في $3x$ و $x + 10$ و $2x - 40$. أوجد قياس أصغر زاوية في المثلث.

53. SAT/ACT أي مما يلي يكون مساويًا لـــ $(x)(x)(x)(x)$ لجميع رموز x؟

A $x + 4$
B $4x$
C $2x^2$
D $4x^2$
E x^4

مراجعة شاملة

مثِّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 1-2)

54. $y = 2(3)^x$

55. $y = 5(2)^x$

56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل. (الدرس 1-4)

57. $4m^3n^2 + 16m^2n^3 - 8m^3n^4$

58. $12j^4k^4 + 36j^3k^2 - 3j^2k^5$

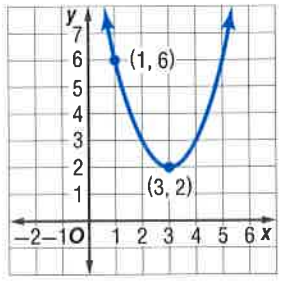
حلِّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

59. $x^2 - 4x + 3xy - 12y$

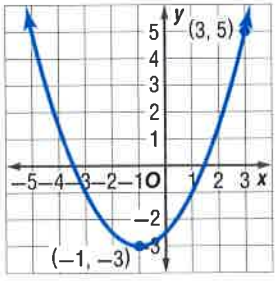
60. $4a - 10ab + 6b - 15b^2$

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 1-7)

61.



62.



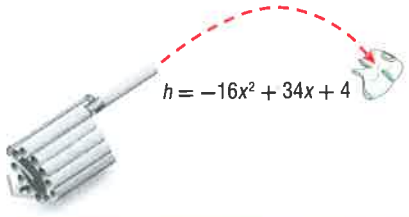
مثِّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى. (الدرس 1-2)

63. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$

64. $f(x) = 4^x + 3$

65. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

66. الجوائز تُستخدم آلة لإلقاء القمصان على الجمهور في مباريات لكرة السلة. (الدرس 1-7)



a. ما الارتفاع الأولي للقميص؟

b. إذا تم الإمساك بالقميص بعد ثانيتين، فماذا سيكون الارتفاع؟

مراجعة المهارات

أوجد $[g \circ h](x)$ **و** $[h \circ g](x)$.

66. $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

67. $h(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x - 3$

68. $h(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -2x + 1$

69. $h(x) = -5x$
$g(x) = 3x - 5$

70. $h(x) = x^3$
$g(x) = x - 2$

71. $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

2-6 مختبر الجبر
تحويل التعابير الأسية

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسية إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط اكتب التعابير الأسية المكافئة

تحاول غاية أن تختار من بين خطتي حساب ادخار. وتقدم الخطة A نسبة مرابحة مركبة شهرية تبلغ 0.25%، بينما تقدم الخطة B نسبة مرابحة مركبة سنوية تبلغ 2.5%. فأي الخطتين الأفضل؟ اشرح.

من أجل المقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن النسبتين بالتكرار المركب نفسه. فالطريقة الأولى للقيام بهذا تتمثل في المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين للخطتين، واللتين تُسميان أيضًا نسبة المرابحة الشهرية *الفعلية*. وعلى الرغم من أنه يمكنك استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، فيمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من السنوات من خلال الخطة B. وللتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار غاية هو 1 AED.

$y = a(1 + r)^t$ معادلة النمو الأسي

$A(t) = 1(1 + 0.025)^t$ $y = A(t)$ أو $a = 1$ أو $r = 2.5\%$ أو 0.025

$= 1.025^t$ بسّط.

الآن، اكتب دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة أسية تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة، بقوة أسية تبلغ $1t$.

$A(t) = 1.025^{1t}$ الدالة الأصلية

$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \cdot 12\right)t}$ $1 = \frac{1}{12} \cdot 12$

$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t}$ قوة أسية لقوة أسية

$\approx 1.0021^{12t}$ $(1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$ أو حوالي 1.0021

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن نسبة المرابحة الشهرية الفعلية حسب الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. حيث تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية البالغة 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا، فإن الخطة A هي الخطة الأفضل.

التمثيل والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. ما وجه مقارنة هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الطريقة الواردة في النشاط أعلاه؟

2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ التي تمثل المبلغ المكتسَب بعد عدد t من السنوات.

3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في كون الخطة A هي الخطة الأفضل.

4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة ربع سنوية تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لتوضيح أيهما الخطة الأفضل.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

دليل الدراسة والمراجعة

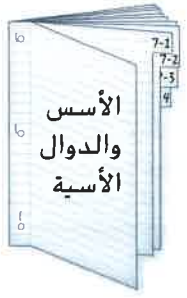
دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسيّة (الدرسان 5-8 و 6-8)

- معادلة النمو الأسيّ هي $y = a(1 + r)^t$، حيث $r > 0$. معادلة الاضمحلال الأسيّ هي $y = a(1 - r)^t$، حيث $0 < r < 1$. y هي المبلغ النهائي، و a المبلغ الأولي، و r هي معدل التغيير و t هي الزمن بالأعوام.

مطويات منظّم الدراسة



تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أحادية الحد monomial	نسبة مشتركة common ratio
الأس السالب negative exponent	المرابحة المركبة compound interest
الجذر النوني n nth root	ثابت constant
رتبة المقدار order of magnitude	الجذر التكعيبي cube root
الأس النسبي rational exponent	الاضمحلال الأسيّ exponential decay
صيغة تكرارية recursive formula	المعادلة الأسيّة exponential equation
الترميز العلمي scientific notation	الدالة الأسيّة exponential function
الأس الصفري zero exponent	النمو الأسيّ exponential growth
	متتالية هندسية geometric sequence

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. $7xy^4$ مثال على _____.
2. _____ من 95,234 هي 10^5.
3. 2 هي _____ لـ 8.
4. يمكن تمديد قواعد العمليات باستخدام الأسس لتنطبق على التعابير التي بها _____ مثل $7^{\frac{2}{3}}$.
5. العدد المكتوب بـ _____ يكون بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح.
6. $f(x) = 3^x$ مثال على _____.
7. $a_1 = 4$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \ge 2$، هي _____ للمتتابعة ... 4, −8, −20, −32,.
8. $2^{3x-1} = 16$ مثال على _____.
9. معادلة _____ هي $y = C(1 - r)^t$.
10. إذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n، فإن a هي _____ في b.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسيّة

مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

42. $y = 2^x$

43. $y = 3^x + 1$

44. $y = 4^x + 2$

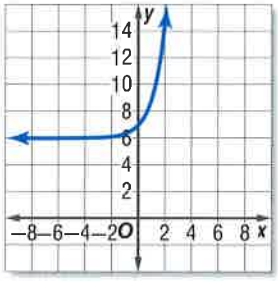
45. $y = 2^x - 3$

46. **علم الأحياء** يزداد عدد البكتيريا في طبق معملي وفقًا للنموذج $p = 550(2.7)^{0.008t}$، حيث t هي عدد الساعات و $t = 0$ تقابل الساعة 1:00 مساءً استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا في الطبق في الساعة 5:00 مساءً

مثال 1

مثّل بيانيًا $y = 3^x + 6$. أوجد نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ واذكر المجال والمدى.

x	$3^x + 6$	y
−3	$3^{-3} + 6$	6.04
−2	$3^{-2} + 6$	6.11
−1	$3^{-1} + 6$	6.33
0	$3^0 + 6$	7
1	$3^1 + 6$	9



نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ y هي $(0, 7)$. المجال هو كل الأعداد الحقيقية والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 6.

2-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

45.

x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

46.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

47.

x	0	1	2	3	4
y	0	-1	-4	-9	-16

مثال 2

حدّد النموذج الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	3	4	5	6	7

الخطوة 1

تمثّل البيانات دالة خطية.

الخطوة 2

الميل يساوي 1 والتقاطع مع المحور y هو 3.
إذًا فالمعادلة هي $y = x + 3$.

McGraw-Hill Education مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

2-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

47. أوجد القيمة النهائية لمبلغ AED 2500 تم استثماره بنسبة مرابحة تبلغ 2% مركبة شهريًا لمدة 10 سنوات.

48. أجهزة الحاسوب يتعرض حاسوب علياء للإهلاك بمعدل 3% في السنة. اشترت الحاسوب مقابل AED 1200.

a. اكتب دالة لتمثيل هذا الموقف.

b. كم ستبلغ قيمة الحاسوب بعد 5 سنوات؟

مثال 3

أوجد القيمة النهائية لمبلغ AED 2000 تم استثماره بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 3% كل ثلاثة أشهر لمدة 8 سنوات.

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ معادلة المرابحة المركبة

$= 2000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{4(8)}$ $P = 2000$، و $r = 0.03$، و $n = 4$، و $t = 8$

$\approx$ AED 2540.22 استخدم حاسبة.

2-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

49. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

50. $3, 9, 28, \ldots$

51. $256, 128, 64, \ldots$

اكتب معادلة للحد n في كل متتالية هندسية.

52. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

53. $3, 9, 27, \ldots$

54. $256, 128, 64, \ldots$

55. الرياضة سقطت كرة سلة من ارتفاع 20 مترًا ثم ظلت ترتد إلى $\frac{1}{2}$ ارتفاعها بعد كل ارتداد. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل هذا الموقف.

مثال 4

أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية الهندسية $2, 6, 18, \ldots$.

الخطوة 1 أوجد النسبة المشتركة. يبلغ كل عدد 3 أضعاف العدد السابق، إذًا $r = 3$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$18 \times 3 = 54, 54 \times 3 = 162, 162 \times 3 = 486$

الحدود الثلاثة التالية هي 54 و 162 و 486.

مثال 5

اكتب معادلة الحد n للمتتالية الهندسية $-3, 12, -48, \ldots$.

النسبة المشتركة هي -4. إذًا $r = -4$.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ قانون الحد n

$a_n = -3(-4)^{n-1}$ $a_1 = -3$ و $r = -4$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

2-5 الصيغ التكرارية

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

56. $a_1 = 11,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$

57. $a_1 = 3,\ a_n = 2a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

58. 2, 7, 12, 17, ...

59. 32, 16, 8, 4, ...

60. 2, 5, 11, 23, ...

مثال 6

اكتب صيغة تكرارية للمتتالية ... 3, 1, −1, −3, .

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$1 - 3 = -2,\ -1 - 1 = -2,\ -3 - (-1) = -2$

هناك فرق مشترك يبلغ -2. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية

$a_n = a_{n-1} + (-2)$ $d = -2$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 3 و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية هي $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} - 2,\ n \geq 2$.

2-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي.

12. $16^x = \frac{1}{64}$ **13.** $3^{4x} = 9^{3x+7}$

14. $64^{3n} = 8^{2n-3}$ **15.** $8^{3-3y} = 256^{4y}$

16. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$ **17.** $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

18. البكتيريا بدأ عدد أحد أنواع البكتيريا بـ 5000 كائن بكتيري. وبعد 8 ساعات، بلغ عدد البكتيريا 28,000 في العينة.

a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

مثال 7

حُـلّ $4^{3x} = 32^{x-1}$ لإيجاد قيمة x.

$4^{3x} = 32^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$ أعد كتابة المعادلة بحيث يكون للطرفين الأساس ذاته.

$2^{6x} = 2^{5x-5}$ قوة أسية لقوة أسية

$6x = 5x - 5$ خاصية التساوي في الأسس

$x = -5$ اطرح $5x$ من كل طرف.

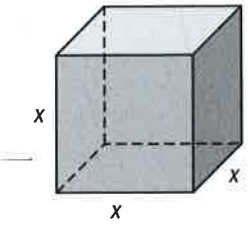
الحل يساوي -5.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $(x^2)(7x^8)$
2. $(5a^7bc^2)(-6a^2bc^5)$
3. **الاختيار من متعدد** عبّر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد.



A x^3
B $6x$
C $6x^3$
D x^6

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0.

4. $\frac{x^6y^8}{x^2}$
5. $\left(\frac{2a^4b^3}{c^6}\right)^0$
6. $\frac{2xy^{-7}}{8x}$

بسّط.

7. $\sqrt[3]{1000}$
8. $\sqrt[5]{3125}$
9. $1728^{\frac{1}{3}}$
10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$
11. $27^{\frac{2}{3}}$
12. $10{,}000^{\frac{3}{4}}$
13. $27^{\frac{5}{3}}$
14. $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

15. $12^x = 1728$
16. $7^{x-1} = 2401$
17. $9^{x-3} = 729$

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

18. 0.00021
19. 58,000

عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.

20. 2.9×10^{-5}
21. 9.1×10^6

أوجد قيمة كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بالترميز العلمي.

22. $(2.5 \times 10^3)(3 \times 10^4)$
23. $\frac{8.8 \times 10^2}{4 \times 10^{-4}}$
24. **علم الفلك** يبلغ متوسط المسافة من كوكب عطارد إلى الشمس 57,910,000 km. عبّر عن هذه المسافة بالترميز العلمي.

مثّل كل دالة بيانيًا. أوجد المقطع من المحور الرأسيّ y، واذكر المجال والمدى.

25. $y = 2(5)^x$
26. $y = -3(11)^x$
27. $y = 3^x + 2$

أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

28. 2, −6, 18, ...
29. 1000, 500, 250, ...
30. 32, 8, 2, ...
31. **الاختيار من متعدد** استثمرت شيماء AED 500 في حساب بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 6.5% شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار شيماء خلال 10 سنوات؟

F AED 600.00
G AED 938.57
H AED 956.09
J AED 957.02

32. **الاستثمارات** كان استثمار سها بمبلغ AED 3000 يخسر من قيمته بمعدل 3% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثمارها خلال 6 سنوات؟

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

33. $a_1 = 18, a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2$
34. $a_1 = -2, a_n = 4a_{n-1} + 5, n \geq 2$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الحاسبات العلمية وحاسبات التمثيل البياني أدوات قوية لحل المسائل.
هناك أوقات يمكن استخدام حاسبة فيها لإجراء الحسابات بشكل أسرع وأسهل، مثل الحسابات التي تتضمن أرقامًا كبيرة للغاية. إلا أن هناك أوقات من اللازم فيها استخدام حاسبة، مثل تقدير الأعداد غير النسبية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها:

- **الأسس** الترميز العلمي، الحسابات ذات الأعداد الكبيرة أو الصغيرة
- **π (Pi)** حل مسائل الدائرة، مثل المحيط والمساحة
- **الجذور التربيعية** المسافة على مستوى إحداثي، نظرية فيثاغورث
- **التمثيلات البيانية** تحليل ثنائيات البيانات في مخطط انتشار، تمثيل الدوال بيانيًا، إيجاد جذور المعادلات

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر أن تعمل بكفاءة قدر الإمكان. قد يتم إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما ينبغي استكمال خطوات أخرى باستخدام حاسبتك.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

تبلغ المسافة من الشمس إلى كوكب المشتري 7.786×10^{11} متر تقريبًا. إذا كانت سرعة الضوء تبلغ 3×10^{8} متر في الثانية تقريبًا، فكم يستغرق الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري؟ قرّب إلى أقرب دقيقة.

A حوالي 43 دقيقة
B حوالي 51 دقيقة
C حوالي 1876 دقيقة
D حوالي 2595 دقيقة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. حصلت على المسافة التقريبية بين الشمس وكوكب المشتري إلى جانب سرعة الضوء. كلا المقدارين مذكوران بترميز علمي. مطلوب منك أن تجد عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري. استخدم مسافة العلاقة = السرعة × الزمن لإيجاد المقدار.

$$d = r \times t$$

$$\frac{d}{r} = t$$

لإيجاد مقدار الزمن، اقسم المسافة على السرعة. لاحظ أن وحدات الزمن ستكون الثواني.

$$\frac{7.786 \times 10^{11}\ \text{m}}{3 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = t \text{ ثانية}$$

استخدم حاسبة علمية للتوصل بسرعة إلى ناتج القسمة. في معظم الحاسبات العلمية، يُستخدم مفتاح EE لإدخال الأرقام بالترميز العلمي.

خطوات العملية على الحاسبة: (7.786 2nd [EE] 11) ÷ (3 2nd [EE] 8) ENTER

النتيجة هي 2595.33333333 ثانية. لتحويل هذا العدد إلى دقائق، استخدم حاسبتك لقسمة النتيجة على 60. يعطي هذا إجابة تبلغ حوالي 43.2555 دقيقة. الإجابة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. منذ إنشاء موقع إلكتروني شهير على الإنترنت قبل 5 سنوات، تم بيع حوالي 2.504×10^{7} عنصر أو تداوله عليه. ما المتوسط اليومي لعدد العناصر التي يتم بيعها أو تداولها على مدار 5 سنوات؟

A حوالي 9640 عنصرًا في اليوم

B حوالي 13,720 عنصرًا في اليوم

C حوالي 1,025,000 عنصر في اليوم

D حوالي 5,008,000 عنصر في اليوم

2. أوجد قيمة $\sqrt{ab}$ إذا كانت $a = 121$ و $b = 23$.

F حوالي 5.26

G حوالي 9.90

H حوالي 12

J حوالي 52.75

3. يبلغ تعداد سكان الولايات المتحدة 3.034×10^{8} نسمة تقريبًا. تبلغ مساحة البلد 3.54 إلى 9.17 كيلومتر مربع تقريبًا. ما متوسط *الكثافة السكانية* (عدد الأشخاص في الميل المربع) في الولايات المتحدة؟

A حوالي 136.3 شخص في الكيلومتر المربع

B حوالي 30.2 شخص في الكيلومتر المربع

C حوالي 94.3 شخص في الكيلومتر المربع

D حوالي 33.1 شخص في الكيلومتر المربع

4. تصنع غاية غطاء لطبلة الفرقة العسكرية. يبلغ قطر الطبلة 20 سنتيمترًا. ضع تقديرًا لمساحة سطح الطبلة الكبيرة.

F 31.41 سنتيمتر مربع

G 62.83 سنتيمتر مربع

H 78.54 سنتيمتر مربع

J 314.16 سنتيمتر مربع

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

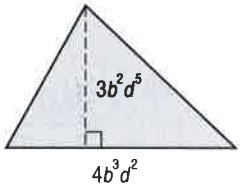
2 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 2

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. عبّر عن مساحة المثلث بالأدنى بدالة أحادية الحد.



A $12b^5d^7$

B $12b^6d^{10}$

C $6b^6d^{10}$

D $6b^5d^7$

2. حوّل التعبير التالي لأبسط صورة.

$$\left(\frac{2w^2z^5}{3y^4}\right)^3$$

F $\frac{2w^5z^8}{3y^7}$

G $\frac{8w^6z^{15}}{27y^{12}}$

H $\frac{8w^5z^8}{27y^7}$

J $\frac{2w^6z^{15}}{3y^{12}}$

3. ما معادلة المستقيم المتعامد على

$y = \frac{3}{5}x - 3$؟

A $y = -\frac{5}{3}x + 2$

B $y = -\frac{3}{5}x + 2$

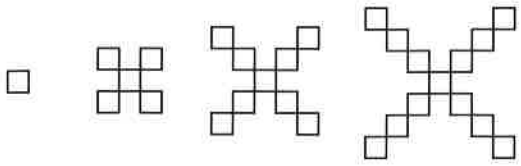
C $y = \frac{5}{3}x - 2$

D $y = \frac{3}{5}x - 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم قوانين الأسس لتحويل التعبير لأبسط صورة. تذكّر أنه لإيجاد القوة الأسية لقوة أسية، اضرب الأسس.

4. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات في كل شكل.



F $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 3, n \geq 1$

G $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

H $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$

J $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} + 4, n \geq 2$

5. أوجد قيمة $(4.2 \times 10^6)(5.7 \times 10^8)$.

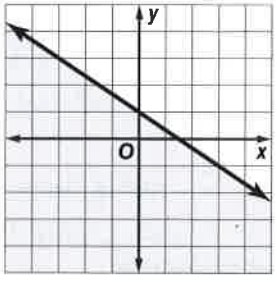
A 2.394×10^{15}

B 23.94×10^{14}

C 9.9×10^{14}

D 2.394×10^{48}

6. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني؟



F $y \leq -\frac{2}{3}x - 1$

G $y \leq -\frac{3}{4}x - 1$

H $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$

J $y \leq -\frac{3}{4}x + 1$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

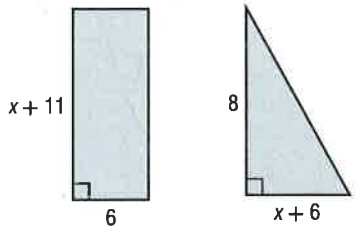
7. أنشأ سعيد موقع ويب لفريق الأولمبياد العلمي. يظهر العدد الإجمالي للزيارات التي تلقاها الموقع.

اليوم	إجمالي الزيارات	اليوم	إجمالي الزيارات
3	5	17	27
6	7	21	33
10	12	26	40
13	17	34	55

a. أوجد معادلة خط الانحدار.

b. توقع عدد الزيارات الإجمالي الذي سيكون الموقع الإلكتروني قد تلقاه بحلول اليوم 46.

8. أوجد قيمة x بحيث تكون الأشكال بمساحة واحدة.



9. ما حل نظام المعادلات التالي؟ اكتب الحل هنا.

$$\begin{cases} y = 6x - 1 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$$

10. إجابة شبكية في مركز ألعاب عائلي، اشترت كل من عائلتي عامر وعبد الله رموز لعبة فيديو ورموز ملعب لضرب الكرة كما يظهر في الجدول.

الأسرة	عامر	عبد الله
عدد رموز لعبة الفيديو	25	30
عدد رموز ملعب ضرب الكرة	8	6
التكلفة الإجمالية	AED 26.50	AED 25.50

ما تكلفة رمز ملعب ضرب الكرة بالدرهم في مركز الألعاب العائلي؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

11. يعرض الجدول أدناه المسافات من الشمس إلى كوكب عطارد والأرض والمريخ وزحل. استخدم البيانات للإجابة عن كل سؤال.

الكوكب	المسافة من الشمس (بالكيلومتر)
عطارد	5.79×10^7
الأرض	1.50×10^8
المريخ	2.28×10^8
زحل	1.43×10^9

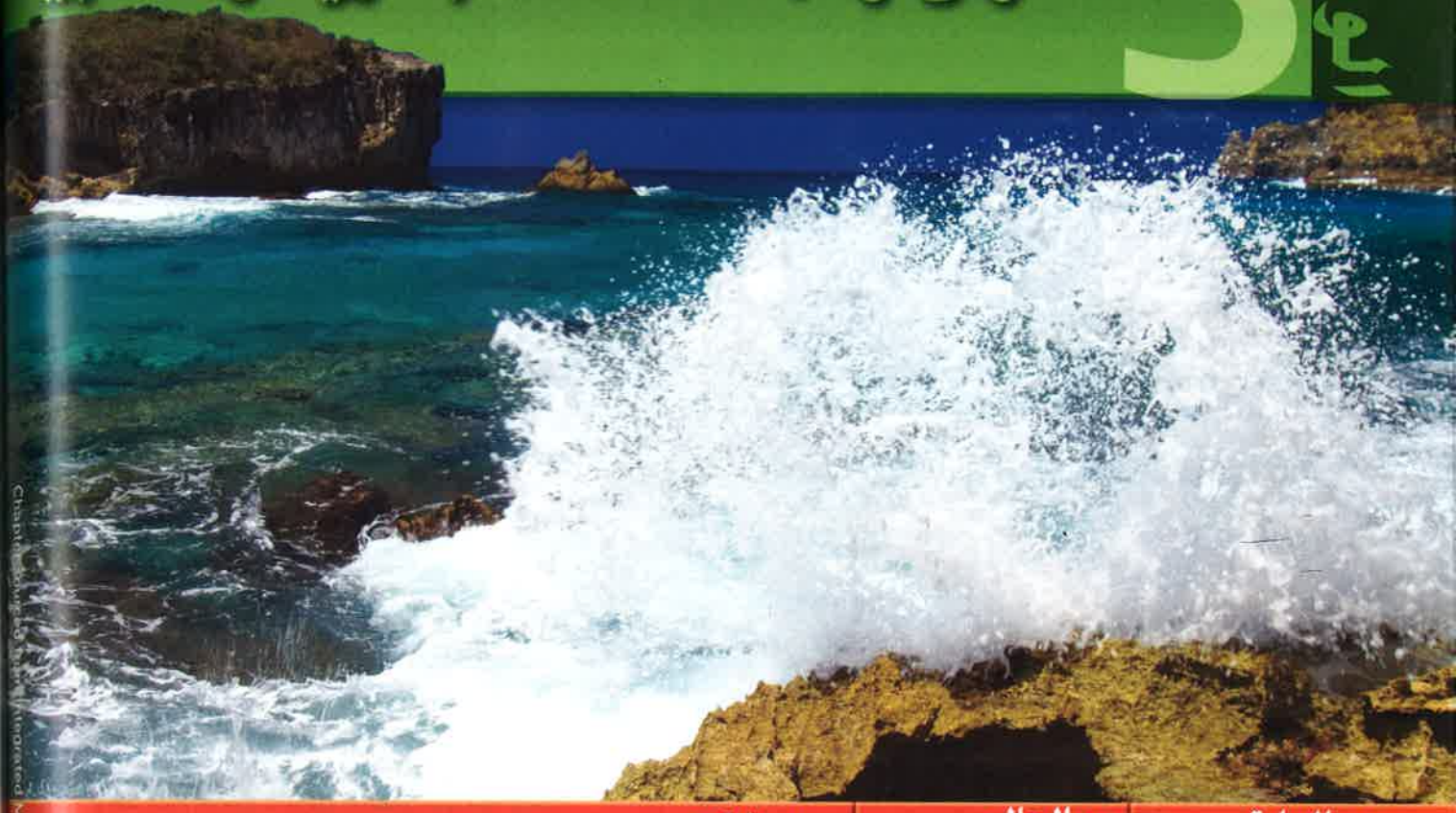
a. من بين الكواكب المدرجة، أيهم الأقرب إلى الشمس؟

b. كم ضعفًا يبلغ بُعد المريخ عن الشمس بالمقارنة بالأرض؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف

الوحدة 3

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية



السابق

- وجدت حل المعادلات التربيعية والأسية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الدوال الجذرية بيانيًا وتحويلها.
  - تبسيط التعابير الجذرية وجمعها وطرحها وضربها.
  - حل المعادلات الجذرية.
  - استخدام نظرية فيثاغورس.

لماذا؟ ▲

- **محيطات** تتولد تسونامي، أو الأمواج الكبرى، من الزلازل الواقعة تحت البحر. ويمكن استخدام المعادلة الجذرية لإيجاد سرعة تسونامي بالأمتار في الثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

أوجد كل جذر تربيعي. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

1. $\sqrt{82}$
2. $\sqrt{26}$
3. $\sqrt{15}$
4. $\sqrt{99}$

5. **صندوق الرمل** يصنع عيسى صندوق مكعبا مساحة قاعدته 100 متر مربع. فكم طول الضلع في الصندوق؟

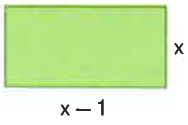
حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $(21x + 15y) - (9x - 4y)$
7. $13x - 5y + 2y$
8. $(10a - 5b) + (6a + 5b)$
9. $6m + 5n + 4 - 3m - 2n + 6$
10. $x + y - 3x - 4y + 2x - 8y$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

11. $2x^2 - 4x = 0$
12. $6x^2 - 5x - 4 = 0$
13. $x^2 - 7x + 10 = 0$
14. $2x^2 + 7x - 5 = -1$

15. **الهندسة** مساحة المستطيل المجاور تساوي 90 مترًا مربعًا. أوجد x.



تدريب سريع

مثال 1

أوجد الجذر التربيعي لـ $\sqrt{50}$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

استخدم الآلة الحاسبة. $\sqrt{50} = 7.071067812....$

إلى أقرب جزء من المائة، $\sqrt{50} = 7.07$.

مثال 2

بسّط $3x + 7y - 4x - 8y$.

$3x + 7y - 4x - 8y$

$= (3x - 4x) + (7y - 8y)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= -x - y$ بسّط.

مثال 3

حُـلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 3)(x - 2) = 0$ حلل إلى العوامل.

$x - 3 = 0$ أو $x - 2 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 3$ $x = 2$ حل كل معادلة.

Chapter sourced from Integrated Math I Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

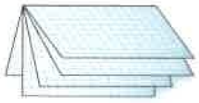
البدء في الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك الوحدة 3.
للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

مطويات منظّم الدراسة

الدوال الجذرية والهندسة اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 3 المتعلقة بالدوال الجذرية والهندسة. ابدأ باستخدام أربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالعرض.



2 **دبّس** بطول الطية.

3 **اقلب** الطية إلى اليمين واكتب عنوان الوحدة في الأمام. في كل صفحة يمنى من المطوية، اكتب عنوان درس من دروس الوحدة.

المفردات الجديدة

- دالة الجذر التربيعي square root function
- مجذور radicand
- دالة جذرية radical function
- تعبير جذري radical expression
- مرافق conjugate
- إنطاق المقام rationalize the denominator
- مغلقة closed
- معادلات جذرية radical equations
- حلول دخيلة extraneous solutions
- تغير عكسي inverse variation
- قاعدة ناتج الضرب product rule
- دالة نسبية rational function
- قيم مستبعدة excluded values
- خط تقارب asympote
- معادلة نسبية rational equation
- مسألة عمل work problem
- مسألة معدل rate problem

مراجعة المفردات

طريقة فويل لضرب زوج من ثنائيات الحدود، أوجد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين، والحدين الطرفيين، والحدين الوسطيين، والحدين الأخيرين

المربع الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

التناسب هو معادلة لها الصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0$ $d \neq 0$ توضح أن النسبتين متكافئتان

$ad = bc$

3-1 دوال الجذر التربيعي

السابق:
- مثّلت الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانيًا وحللتها.

الحالي:
1 تمثيل تمددات الدوال الجذرية وتحليلها.
2 تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية وتحليلها.

لماذا؟
- يستخدم العلماء أصوات الحيتان لتتبع تحركاتها. ويمكن إيجاد المسافة إلى الحوت عن طريق الربط بين الزمن وسرعة الصوت في الماء.

يمكن وصف سرعة الصوت في الماء *بدالة الجذر التربيعي* $c = \sqrt{\frac{E}{d}}$، حيث E تمثل مجموعة معامل المرونة للماء و d تمثل كثافة الماء.

المفردات الجديدة
دالة الجذر التربيعي
square root function
دالة جذرية
radical function
مجذور
radicand

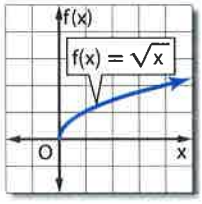
ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 تمدد الدوال الجذرية

تشتمل **دالة الجذر التربيعي** على الجذر التربيعي لمتغير. وتعد دوال الجذر التربيعي نوعًا من أنواع **الدالة الجذرية**. ويُطلق على التعبير تحت اشارة الجذر: **المجذور**. لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. القيم التي تجعل المجذور سالبًا لا يتم تضمينها في المجال.

المفهوم الأساسي دالة الجذر التربيعي

الدالة الأصلية:	$f(x) = \sqrt{x}$
نوع التمثيل البياني:	منحنى
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{y \mid y \geq 0\}$



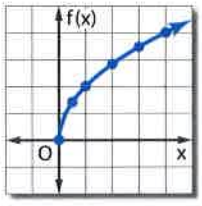
مثال 1 تمدد دالة الجذر التربيعي

مثّل $f(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً.

x	0	0.5	1	2	3	4
f(x)	0	≈1.4	2	≈2.8	≈3.5	4

الخطوة 2 عيّن النقاط. ارسم منحنى منتظمًا.



المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$. لاحظ أن التمثيل البياني يتزايد على المجال بالكامل، والقيمة الصغرى هي 0، ولا يوجد تماثل.

تمرين موجّه

1A. $g(x) = 4\sqrt{x}$

1B. $h(x) = 6\sqrt{x}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

2 الانعكاس والإزاحة للدوال الجذرية

تذكر أنه عندما تكون القيمة a سالبة في الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$، يكون التمثيل البياني للدالة الأصلية منعكسًا للأسفل على المحور x.

المفهوم الأساسي التمثيل البياني لـ $y = a\sqrt{x+h} + k$

الخطوة 1 ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = a\sqrt{x}$. يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1, a)$. إذا كان $a > 0$، فالتمثيل البياني يكون في الربع الأول.
إذا كان $a < 0$، فالتمثيل البياني يكون منعكسًا للأسفل على المحور x ويكون في الربع الرابع.

الخطوة 2 أزح التمثيل البياني k وحدات لأعلى إذا كان $k > 0$ و $|k|$ وحدات لأسفل إذا كان $k < 0$.

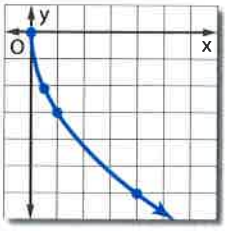
الخطوة 3 أزح التمثيل البياني h وحدات يسارًا إذا كان $h > 0$ و $|h|$ وحدات يمينًا إذا كان $h < 0$.

نصيحة دراسية
التمثيل البياني للدوال الجذرية اختر المربعات الكاملة لقيم x التي سوف تنتج عنها إحداثيات سهلة التعيين.

مثال 2 انعكاس دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولًا للقيم. ثم عيّن النقاط على النظام الإحداثي وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.



x	0	0.5	1	4
y	0	≈−2.1	−3	−6

لاحظ أن التمثيل البياني يكون في الربع الرابع. ويتم الحصول عليه عن طريق تمدد التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ رأسيًا ثم انعكاسه على المحور x. المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \leq 0\}$.

تمرين موجّه

2A. $y = -2\sqrt{x}$

2B. $y = -4\sqrt{x}$

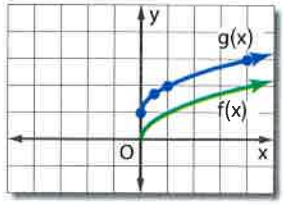
نصيحة دراسية
إزاحة الدوال الجذرية إذا كان $h > 0$، فإن الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x-h}$ تمثل إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يمينًا.
$f(x) = \sqrt{x+h}$ هي إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يسارًا.

مثال 3 إزاحة دالة الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} + 1$

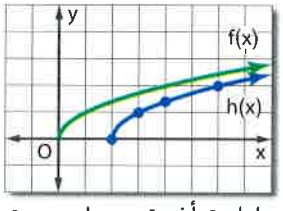
x	0	0.5	1	4	9
y	0	≈1.7	2	3	4



لاحظ أن قيم $g(x)$ أكبر بواحد من قيم $f(x) = \sqrt{x}$.
هذه إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة لأعلى من الدالة الأصلية.
المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.

b. $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2	3	4	6
y	0	1	≈1.4	2



هذه إزاحة أفقية بمقدار وحدتين يمينًا من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين موجّه

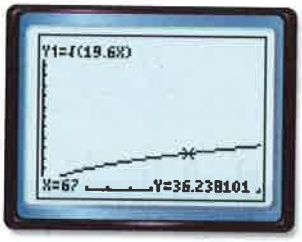
3A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

3B. $h(x) = \sqrt{x} + 3$

يمكن تمثيل ظاهرة فيزيائية مثل الحركة عن طريق الدوال الجذرية. غالبًا ما تكون هذه الدوال تحويلات من دالة الجذر التربيعي الأصلية.

مثال 4 من الحياة اليومية تحليل الدالة الجذرية

الجسور يمتد جسر جولدن جيت لمسافة 67 مترًا تقريبًا فوق سطح الماء. السرعة المتجهة v لجسم ما في سقوط حر من h أمتار تُحددها المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث g هو ثابت مسافة 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة. مثّل الدالة بيانيًا. إذا سقط جسم ما من الجسر، فماذا ستكون سرعته المتجهة عندما يصطدم بالماء؟



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

لإيجاد السرعة المتجهة للجسم، عوّض بـ 67 مترًا عن h.

$v = \sqrt{2gh}$ الدالة الأصلية

$= \sqrt{2(9.8)(67)}$ $g = 9.8$ و $h = 67$

$= \sqrt{1313.2}$ بسّط.

$\approx 36.2 \text{ m/s}$ استخدم الآلة الحاسبة.

السرعة المتجهة للجسم تقدر بحوالي 36.2 مترًا لكل ثانية بعد السقوط من ارتفاع 67 مترًا.

تمرين موجّه

4. استخدم التمثيل البياني أعلاه لتقدير الارتفاع الأولي لجسم ما إذا كان يتحرك بمعدل 20 مترًا لكل ثانية عند اصطدامه بالماء.

الربط بالحياة اليومية

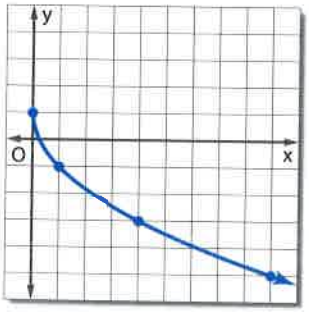
تعبر 39 مليون سيارة تقريبًا جسر جولدن جيت في سان فرانسيسكو كل عام.

المصدر: مركز سان فرانسيسكو للمؤتمرات والزوار

ويمكن الجمع بين تحويلات مثل الانعكاسات والإزاحات والتمددات في معادلة واحدة.

مثال 5 تحويلات دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -2\sqrt{x} + 1$ بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.



x	0	1	4	9
y	1	−1	−3	−5

هذا التمثيل البياني نتيجة تمدد رأسي للتمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ يتبعه انعكاس على المحور x، ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة. المجال هو $\{x | x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y | y \leq 1\}$.

تمرين موجّه

5A. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$

5B. $y = -2\sqrt{x - 1}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 3\sqrt{x}$
2. $y = -5\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$
4. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{x} + 3$
6. $y = \sqrt{x} - 2$
7. $y = \sqrt{x+2}$
8. $y = \sqrt{x-3}$

مثال 4 9. **السقوط الحر** الزمن t، بالثواني، الذي يستغرقه جسم ما للسقوط على مسافة d، بالأمتار، يُعطى بالدالة $t = \frac{5}{11}\sqrt{d}$ (مع افتراض صفرية مقاومة الهواء). مثّل الدالة بيانيًا، واذكر المجال والمدى.

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

10. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 2$
11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x} - 1$
12. $y = -2\sqrt{x+1}$
13. $y = 3\sqrt{x-2}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 5\sqrt{x}$
15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
16. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$
17. $y = 7\sqrt{x}$
18. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$
19. $y = -\sqrt{x}$
20. $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x}$
21. $y = -7\sqrt{x}$
22. $y = \sqrt{x} + 2$
23. $y = \sqrt{x} + 4$
24. $y = \sqrt{x} - 1$
25. $y = \sqrt{x} - 3$
26. $y = \sqrt{x} + 1.5$
27. $y = \sqrt{x} - 2.5$
28. $y = \sqrt{x+4}$
29. $y = \sqrt{x-4}$
30. $y = \sqrt{x+1}$
31. $y = \sqrt{x-0.5}$
32. $y = \sqrt{x+5}$
33. $y = \sqrt{x-1.5}$

مثال 4 34. **الهندسة** محيط المربع يُعطى بالدالة $P = 4\sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. حدد محيط مربع له مساحة $225\ m^2$.

c. متى سيصبح المحيط والمساحة بقيمة واحدة؟

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

35. $y = -2\sqrt{x} + 2$
36. $y = -3\sqrt{x} - 3$
37. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+2}$
38. $y = -\sqrt{x-1}$
39. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x-1} + 2$
40. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$

41. **الطاقة** يكون لجسم ما طاقة حركية عندما يتحرك. السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية لجسم ما كتلته m كيلوجرامات بطاقة E جول، تُعطى بالدالة $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة التي تعبر عن السرعة المتجهة لكرة سلة كتلتها 0.6 كيلوجرام، بيانيًا.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

42. **الهندسة** نصف قطر الدائرة يُعطى بالمعادلة $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$، حيث A هي مساحة الدائرة.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحديد نصف قطر دائرة لها المساحة $27\ cm^2$.

43. سرعة الصوت تُحدد سرعة الصوت في الهواء بدرجة حرارة الهواء. السرعة v بالأمتار لكل ثانية تُعطى بالمعادلة $c = 331.5\sqrt{1 + \frac{t}{273.15}}$ حيث t هي درجة حرارة الهواء بالدرجات المئوية.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

b. ما مدى سرعة انتقال الصوت عندما تكون درجة الحرارة 55°C؟

c. كيف ستتأثر سرعة الصوت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى 65°C؟

44. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والقطوع المكافئة.

a. بيانيًا مثّل $y = x^2$ بيانيًا على نظام إحداثي.

b. جبريًا اكتب دالة متعددة التعريف لوصف التمثيل البياني لـ $y^2 = x$ في كل ربع.

c. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$ بيانيًا.

d. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = x$ بيانيًا. عيّن النقاط (2, 4)، و (4, 2)، و (1, 1).

e. تحليليًا قارن بين التمثيل البياني للقطع المكافئ بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التحدي حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. أعطِ مثالًا أو مثالا مضادًا لدعم إجابتك.

45. الأعداد في مجال الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

46. الأعداد في مدى الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

47. **الكتابة في الرياضيات** لماذا توجد حدود لمجال دوال الجذر التربيعي ومداها؟

48. **الأدوات** اكتب دالة جذرية يكون مجالها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أكبر من أو تساوي 2 ويكون مداها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أقل من أو تساوي 5.

49. **أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟** أوجد المعادلة التي لا تتوافق مع المجموعة. اشرح.

$y = 3\sqrt{x}$	$y = 0.7\sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} + 3$	$y = \frac{\sqrt{x}}{6}$

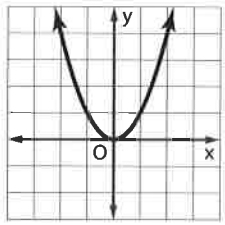
50. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة تكون نتيجة انعكاس وإزاحة وتمدد للتمثيل البياني الأصلي لـ $y = \sqrt{x}$.

51. **التبرير** إذا كان مدى الدالة $y = a\sqrt{x}$ هو $\{y \mid y \le 0\}$، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن قيمة a؟ اشرح استنتاجك.

52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

53. 

أي دالة تمثل بشكل *أفضل* التمثيل البياني؟

A $y = x^2$ C $y = \sqrt{x}$

B $y = 2^x$ D $y = x$

54. العبارة "$x < 10$ و $3x - 2 \geq 7$" تكون صحيحة عندما x يساوي ماذا؟

F 0 H 8

G 2 J 12

55. أي مما يلي هي معادلة مستقيم موازٍ لـ $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-2, -1)$؟

A $y = \frac{1}{2}x$ C $y = -\frac{1}{2}x + 2$

B $y = 2x + 3$ D $y = -\frac{1}{2}x - 2$

56. الإجابة القصيرة إذا كان منسق حدائق يحتاج إلى فرش نشارة خشبية على 6 أحواض زهور مستطيلة وقياسها 8 أمتار في 4 أمتار، و 4 أحواض زهور مستديرة نصف قطر كل منها يبلغ 3 أمتار. وتغطي عبوة النشارة الخشبية الواحدة 25 مترًا مربعًا. فكم عدد عبوات النشارة الخشبية المطلوبة لتغطية الأحواض الزهرية؟

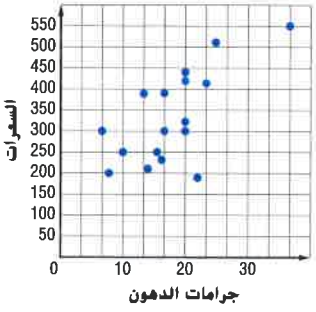
مراجعة شاملة

57. الصحة تتمرن خولة كل يوم بالمشي والجري لمسافة لا تقل عن 3 كيلومترات. وتمشي خولة بمعدل 4 كيلومترات في الساعة، وتجري بمعدل 8 كيلومترات في الساعة. افترض أنه متاح لديها نصف ساعة فقط للتمرن اليوم.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح المدد الزمنية الممكنة التي يمكن أن تقضيها في المشي والجري اليوم.

b. أعطِ ثلاثة حلول ممكنة.

خيارات وجبات الوجبات السريعة



58. التغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم *لا* يعبر عن أي ارتباط. وإذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فاشرح دلالته في هذه الحالة.

مراجعة المهارات

حلل كل أحادي الحد إلى عوامله بالكامل.

59. $28n^3$

60. $-33a^2b$

61. $150rt$

62. $-378nq^2r^2$

63. $225a^3b^2c$

64. $-160x^2y^4$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

3-1 مختبر تقنية التمثيل البياني
التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي

لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. عند تمثيل الدالة الجذرية بيانيًا، حدد متى سيكون المجذور سالبًا واستبعد هذه القيم من المجال.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

النشاط 1 الدالة الأصلية

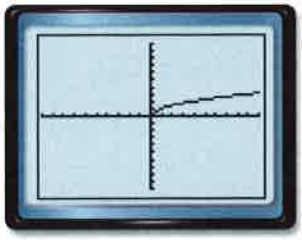
مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: 6 [ZOOM] [)] [X,T,θ,n] [√] [2nd] [Y=]

1A. تفحّص التمثيل البياني. ما مجال الدالة؟

1B. ما مدى الدالة؟


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

النشاط 2 إزاحة الدالة الأصلية

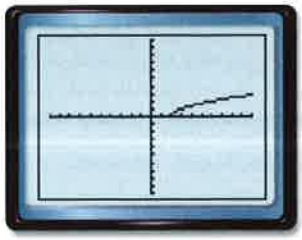
مثّل $y = \sqrt{x - 2}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= ، وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: 6 [ZOOM] [)] 2 [−] [X,T,θ,n] [√] [2nd] [Y=]

2A. ما مجال الدالة ومداها؟

2B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x - 2}$ والتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$؟


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا، وارسم التمثيل البياني على الورقة. واذكر المجال والمدى. واشرح وجه الاختلاف بين التمثيل البياني عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$.

1. $y = \sqrt{x - 1}$
2. $y = \sqrt{x + 3}$
3. $y = \sqrt{x} - 2$
4. $y = \sqrt{-x}$
5. $y = -\sqrt{x}$
6. $y = \sqrt{2x}$
7. $y = \sqrt{2 - x}$
8. $y = \sqrt{x - 3} + 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد y. هل تمثل المعادلة دالة؟ اشرح استنتاجك.

9. $x = y^2$
10. $x^2 + y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 = 2$

أكتب دالة بتمثيل بياني يزيح $y = \sqrt{x}$ في كل اتجاه مما يلي.

12. إزاحة 4 وحدات يسارًا
13. إزاحة 7 وحدات لأعلى
14. إزاحة 6 وحدات لأسفل
15. إزاحة 5 وحدات يمينًا و 3 وحدات لأعلى

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

3-2 المعادلات الجذرية

السابق:
- أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.

الحالي:
1 حل المعادلات الجذرية.
2 حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.

لماذا؟
- طول خط الماء للقارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنعه حافة المياه عندما يكون القارب ممتلئًا. وسرعة جسم القارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها.

يمكنك تقدير سرعة جسم القارب h باستخدام الصيغة $h = 1.34\sqrt{\ell}$، حيث ℓ هو طول خط المياه للقارب الشراعي.

المفردات الجديدة
- **معادلات جذرية** (radical equations)
- **حلول دخيلة** (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

1 معادلات جذرية المعادلات التي تشتمل على متغيرات في صورة مجذور، مثل $h = 1.34\sqrt{\ell}$. تُسمى **معادلات جذرية**. ولإيجاد حلها، يجب أولاً عزل المتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة. ثم يتم تربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح	إذا قمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضًا.
الرموز	إذا كان $a = b$، فإذًا $a^2 = b^2$.
أمثلة	إذا كان $\sqrt{x} = 4$ ، فإذًا $(\sqrt{x})^2 = 4^2$.

مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار **يبحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدا أن سرعة جسم القارب تبلغ 9 كيلومترات في الساعة بعد قياسها. فأوجِد طول خط الماء للقارب الشراعي. قرّب إلى أقرب متر.**

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك القارب وأنها ترتبط بالطول.

التخطيط يقطع القارب 9 كيلومترات في الساعة. صيغة سرعة جسم القارب هي $h = 1.34\sqrt{\ell}$.

الحل

صيغة سرعة جسم القارب	$h = 1.34\sqrt{\ell}$
عوّض بـ 9 عن h.	$9 = 1.34\sqrt{\ell}$
اقسم كل طرف على 1.34.	$\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$
بسّط.	$6.72 \approx \sqrt{\ell}$
قم بتربيع طرفي المعادلة.	$(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$
بسّط.	$45.16 \approx \ell$

طول خط الماء للقارب الشراعي يبلغ حوالي 45 مترًا.

التحقق تحقق عن طريق التعويض بالتقدير في الصيغة الأصلية.

صيغة سرعة جسم القارب	$h = 1.34\sqrt{\ell}$
$\ell = 45$ و $h = 9$	$9 \stackrel{?}{=} 1.34\sqrt{45}$
اضرب.	$9 \approx 8.98899327$ ✓

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين موجّه

1. **القيادة** المعادلة $v = \sqrt{21.4r}$ تمثل السرعة المتجهة القصوى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون حاجز إذا كانت v هي السرعة المتجهة القصوى بالكيلومترات و r هو نصف قطر الانعطاف بالأمتار. إذا صُمم الطريق لسرعة أقصاها 505 كيلومترات في الساعة، فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، اعزل الجذر أولاً. ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

مثال 2 التعبير في صورة مجذور

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{a+5} + 7 = 12$.

$\sqrt{a+5}+7=12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5}=5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2=5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a+5=25$	بسّط.
$a=20$	اطرح 5 من كل طرف.

انتبه!

تربيع كل طرف

تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرف المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

2A. $\sqrt{c-3} - 2 = 4$

2B. $4 + \sqrt{h+1} = 14$

2 الحلول الدخيلة

في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلّ لا يُعتد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

مثال 3 المتغير عند كل طرف

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{k+1} = k-1$. **تحقق من صحة الحل.**

$\sqrt{k+1}=k-1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2=(k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k+1=k^2-2k+1$	بسّط.
$0=k^2-3k$	اطرح k و 1 من كل طرف.
$0=k(k-3)$	حلل إلى العوامل.
$k=0$ or $k-3=0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k=3$	الحل.

التحقق

$\sqrt{k+1}=k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3-1$	$k=3$
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	بسّط
$2=2$ ✓	صواب

$\sqrt{k+1}=k-1$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0-1$	$k=0$
$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	بسّط
$1 \neq -1$ ✗	خطأ

نصيحة دراسية

الحلول الدخيلة

عند التحقق من الحلول بحثًا عن الحلول الدخيلة، فنحن لا نهتم سوى بالجذور الأساسية.

بما أن 0 لا تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

3A. $\sqrt{t+5} = t+3 - 1$

3B. $x - 3 = \sqrt{x-1}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** مساحة سطح كرة سلة هي x سنتيمترات مربعة. فما نصف قطر كرة السلة إذا كانت صيغة مساحة سطح الكرة هي $SA = 4\pi r^2$؟

المثالان 2–3

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

2. $\sqrt{10h} + 1 = 21$
3. $\sqrt{7r + 2} + 3 = 7$
4. $5 + \sqrt{g - 3} = 6$
5. $\sqrt{3x - 5} = x - 5$
6. $\sqrt{2n + 3} = n$
7. $\sqrt{a - 2} + 4 = a$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

8. **التمارين الرياضية** افترض أن الدالة $S = \pi\sqrt{\frac{9.8\ell}{1.6}}$، حيث S تمثل السرعة بالأمتار في الثانية و ℓ هو طول ساق الشخص بالأمتار، يمكنها إيجاد السرعة القصوى التقريبية التي يستطيع الشخص ركضها.
   a. ما سرعة الركض القصوى لشخص طول ساقه 1.1 متر مع التقريب لأقرب جزء من العشرة من المتر؟
   b. ما طول ساق شخص سرعة ركضه 6.7 أمتار في الثانية مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من المتر؟
   c. كلما ازداد طول الساق، تزداد السرعة القصوى أم تقل؟ اشرح.

الأمثلة 2–3

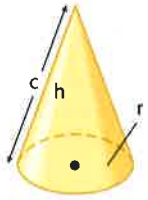
حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

9. $\sqrt{a} + 11 = 21$
10. $\sqrt{t} - 4 = 7$
11. $\sqrt{n - 3} = 6$
12. $\sqrt{c + 10} = 4$
13. $\sqrt{h - 5} = 2\sqrt{3}$
14. $\sqrt{k + 7} = 3\sqrt{2}$
15. $y = \sqrt{12 - y}$
16. $\sqrt{u + 6} = u$
17. $\sqrt{r + 3} = r - 3$
18. $\sqrt{1 - 2t} = 1 + t$
19. $5\sqrt{a - 3} + 4 = 14$
20. $2\sqrt{x - 11} - 8 = 4$

21. **المسافات المقطوعة** المدة الزمنية t، بالثواني، التي يستغرقها بندول بسيط لإكمال تأرجح كامل يُطلق عليها الفترة. وهي تُعطى بالمعادلة $t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$. حيث ℓ هو طول البندول، بالأمتار.
   a. يكمل بندول الأرجوحة العملاقة الفترة في حوالي 8 ثوانٍ. فكم يبلغ طول ذراع البندول تقريبًا؟ قرّب إلى أقرب متر.
   b. هل ازدياد طول البندول يسبب تزايد الفترة أم تناقصها؟ اشرح.

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

22. $\sqrt{6a - 6} = a + 1$
23. $\sqrt{x^2 + 9x + 15} = x + 5$
24. $6\sqrt{\frac{5k}{4}} - 3 = 0$
25. $\sqrt{\frac{5y}{6}} - 10 = 4$
26. $\sqrt{2a^2 - 121} = a$
27. $\sqrt{5x^2 - 9} = 2x$



28. **التبرير** قانون الارتفاع المائل c للمخروط هو $c = \sqrt{h^2 + r^2}$، حيث h هو ارتفاع المخروط و r هو نصف قطر قاعدته.
أوجد ارتفاع المخروط إذا كان الارتفاع المائل يساوي 4 وحدات ونصف القطر يساوي وحدتين. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

29. **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$.

a. **بيانيًا** امسح القائمة $Y=$. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالآتي $Y1 = \sqrt{2x-7}$. وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $Y2 = x-7$.
اضغط على GRAPH.

b. **بيانيًا** ارسم ما هو مبين على الشاشة.

c. **تحليليًا** استخدم ميزة التقاطع مع المحور على قائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع.

d. **تحليليًا** حُـلّ المعادلة الجذرية جبريًا. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟

30. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة، حجمها 162 سنتيمترًا مكعبًا. يمكن إيجاد نصف قطر r الحاوية عن طريق استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث V هو حجم الحاوية و h هو الارتفاع.

a. إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 سنتيمتر، فأوجد ارتفاعها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

b. إذا كان ارتفاع الحاوية 10 سنتيمترات، فأوجد نصف قطرها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

أسماء

$$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$$
$$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$$
$$6-b = b+10$$
$$-2b = 4$$
$$b = -2$$

التحقق

$$\sqrt{6-(-2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-2)+10}$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{8} \checkmark$$

إيمان

$$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$$
$$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$$
$$6-b = b+10$$
$$2b = 4$$
$$b = 2$$

التحقق

$$\sqrt{6-(2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(2)+10}$$
$$\sqrt{4} \neq \sqrt{12} \times$$

لا يوجد حل

32. **التبرير** أي معادلة مما يلي حلها هو $\sqrt{4} = \sqrt{x+2}$؟ اشرح.

A. $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$ B. $4 = x+2$ C. $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$

33. **التبرير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل $\sqrt{x+1} = 5$ وحل $\sqrt{x+1} = 5$.

34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.

35. **التبرير** هل المعادلة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*؟ اشرح.

$$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$$

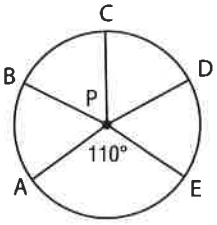
36. **التحدي** حُـلّ المعادلة $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$.

37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقوب عند A، و B و C و D و E على الدائرة P.



إذا حفر حسن الثقوب بحيث تكون $m\angle APE = 110°$، وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس $m\angle CPD$؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون $w = 3$؟

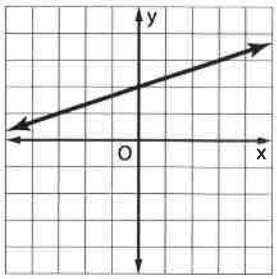
A $\frac{w-3}{w+1}$

B $\frac{w^2-3w}{3w}$

C $\frac{w+1}{w^2-3w}$

D $\frac{3w}{3w^2}$

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3

G $-\frac{1}{3}$

H $\frac{1}{3}$

J 3

41. ما حلول $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$ ؟

A $1, 6$

B $-1, -6$

C 1

D 6

مراجعة شاملة

42. الكهرباء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية يُعطى بالمعادلة $V = \sqrt{PR}$، حيث P هو القدرة بالواط و R هي المقاومة بالأوم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

43. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$

44. $\sqrt{3}\ \sqrt{6}$

45. $7\sqrt{3}\ \ 2\sqrt{6}$

46. $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$

47. $\sqrt{\frac{5c^5}{4d^5}}$

48. $\frac{\sqrt{9x^3y}}{\sqrt{16x^2y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية الحد. أكتب نعم أو لا: اشرح.

49. 12

50. $4x^3$

51. $a - 2b$

52. $4n + 5p$

53. $\frac{x}{y^2}$

54. $\frac{1}{5}$

مراجعة المهارات

بسّط.

55. 9^2

56. 10^6

57. 4^5

58. $(8v)^2$

59. $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$

60. $(10y^2)^3$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار نصف الوحدة
الدروس من 3-1 إلى 3-2

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى. (الدرس 3-1)

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = -4\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
4. $y = \sqrt{x} - 3$
5. $y = \sqrt{x-1}$
6. $y = 2\sqrt{x-2}$

7. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة 121 سنتيمترًا مربعًا؟ (الدرس 3-1)

A 121 سنتيمتر
B 11 سنتيمتر
C 44 سنتيمتر
D 10 سنتيمترات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 3-2)

8. $2\sqrt{25}$
9. $\sqrt{12}\ \sqrt{8}$
10. $\sqrt{72xy^5z^6}$
11. $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. **الأقمار الصناعية** أُطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 كيلومتر. وتُعطى السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصيغة $v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$ هي v السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و G هو ثابت مُعطى، و m_E هي كتلة الأرض، و r هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدرس 3-2)

a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 متر. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟

b. كتلة الأرض هي 5.97×10^{24} كيلوجرام، والثابت G هو $6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\ \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ حيث N يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.

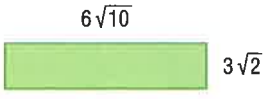
14. **اختيار من متعدد** أي من التعابير التالية يكافئ التعبير $\sqrt{\frac{16}{32}}$ (الدرس 3-2)

F $\frac{1}{2}$
G $\frac{\sqrt{2}}{2}$
H 2
J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 3-3)

15. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
16. $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$
17. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$
18. $\sqrt{27} - \sqrt{48}$
19. $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$
20. $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$
21. $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

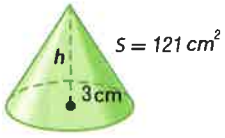
22. **هندسة** أوجد مساحة المستطيل. (الدرس 3-3)



حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل. (الدرس 3-2)

23. $\sqrt{5x} - 1 = 4$
24. $\sqrt{a-2} = 6$
25. $\sqrt{15-x} = 4$
26. $\sqrt{3x^2 - 32} = x$
27. $\sqrt{2x-1} = 2x - 7$
28. $\sqrt{x+1} + 2 = 4$

29. **الهندسة** المساحة الجانبية S للمخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع المخروط. أوجد ارتفاع المخروط. (الدرس 3-2)



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

3-3 التغير العكسي

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمت بحل مسائل مشتملة على التغير الطردي.	1 تحديد التغيرات العكسية واستخدامها. 2 تمثيل التغيرات العكسية بيانيًا.	• الوقت الذي يستغرقه العداء لإنهاء السباق يتناسب عكسيًا مع متوسط وتيرة تقدمه. ويتناقص الوقت الذي يستغرقه العداء كلما ازدادت وتيرة تقدمه. إذًا، تتناسب هاتان *الكميتان* عكسيًا.

المفردات الجديدة

تغير عكسي
inverse variation
قاعدة ناتج الضرب
product rule

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تحديد التغير العكسي واستخدامه

يمكن تمثيل **التغير العكسي** بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

y يتغير عكسيًا مع x إذا وُجد ثابت ما غير صفري k بحيث يكون $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$، حيث $x, y \neq 0$.

في التغير العكسي، يبقى ناتج ضرب القيمتين ثابتًا. تذكر أن العلاقة التي تأتي بالصيغة $y = kx$ عبارة عن تغير طردي. الثابت k يُطلق عليه *ثابت التغير* أو *ثابت التناسب*.

مثال 1 تحديد التغير العكسي والتغير الطردي

حدد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

a.

x	y
1	16
2	8
4	4

في أي تغير عكسي، xy يساوي الثابت k. أوجد xy لكل زوج مرتب في الجدول المبين.

$1 \times 16 = 16$ $2 \times 8 = 16$ $4 \times 4 = 16$

ناتج الضرب ثابت، إذًا الجدول يمثل تغيرًا عكسيًا.

b.

x	y
1	3
2	6
3	9

لاحظ أن xy ليس ثابتًا. إذًا، الجدول لا يمثل تغيرًا عكسي.

$3 = k(1)$ $6 = k(2)$ $9 = k(3)$
$3 = k$ $3 = k$ $3 = k$

جدول القيم يمثل التغير الطردي $y = 3x$.

c. $x = 2y$

يمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة $y = \frac{1}{2}x$ لذا، فإنها تمثل تغيرًا طرديًا.

d. $2xy = 10$

$2xy = 10$	اكتب المعادلة.
$xy = 5$	اقسم كل طرف على 2.

تمثل المعادلة تغيرًا عكسيًا.

تمرين موجّه

1A.

x	1	2	5
y	10	5	2

1B. $-2x = y$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام $xy = k$ لكتابة معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

قراءة في الرياضيات

معادلات التغير بالنسبة لمعادلات التغير الطردي، نقول إن y يتغير *طرديًا* مع x. وبالنسبة لمعادلات التغير العكسي، نقول إن y يتغير *عكسيًا* مع x.

مثال 2 كتابة التغير العكسي

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 18$ عندما يكون $x = 2$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

$xy = k$	معادلة تغير عكسي
$2(18) = k$	$y = 18$ و $x = 2$
$36 = k$	بسّط.

ثابت التغير هو 36. إذًا، المعادلة التي تربط بين x و y هي $xy = 36$ أو $y = \frac{36}{x}$.

تمرين موجّه

2. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = -4$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإذًا $x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$	
$x_1y_1 = x_2y_2$	عوّض بـ x_2y_2 عن k.

المعادلة $x_1y_1 = x_2y_2$ تُسمى **قاعدة ناتج الضرب** للتغيرات العكسية.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي

الشرح إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن، ناتجا ضرب x_1y_1 و x_2y_2 منساويين.

الرموز $x_1y_1 = x_2y_2$ أو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

مثال 3 الحل لإيجاد x أو y

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 12$، فأوجد x عندما يكون $y = 4$.

$x_1y_1 = x_2y_2$	قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي
$12 \times 3 = x_2 \times 4$	$x_1 = 12, y_1 = 3, y_2 = 4$
$36 = x_2 \times 4$	بسّط.
$\frac{36}{4} = x_2$	اقسم كل طرف على 4.
$9 = x_2$	بسّط.

إذًا، عندما يكون $y = 4$، يكون $x = 9$.

تمرين موجّه

3. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 4$ عندما يكون $x = -8$. فأوجد y عندما يكون $x = -4$.

يمكن استخدام قاعدة ناتج الضرب للتغير العكسي لكتابة معادلة بغرض حل مسائل من الحياة اليومية.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التغير العكسي

الفيزياء التسارع a لقرص الهوكي يتناسب عكسيًا مع كتلته m. افترض أن قرص هوكي كتلته 164 جرامًا تم ضربه بحيث يتسارع بمعدل $122\ m/s^2$. أوجد تسارع قرص كتلته 158 جرامًا إذا ضُرب بنفس القدر من القوة.

أنشئ جدولاً لتنظيم المعلومات.

القرص	الكتلة	التسارع
1	164 g	$122\ m/s^2$
2	158 g	a_2

ليكن $m_1 = 164$، $a_1 = 122$، و $m_2 = 164$.

حل لإيجاد a_2.

استخدم قاعدة ناتج الضرب لكتابة معادلة. $m_1a_1 = m_2a_2$

$m_1 = 164$، و $a_1 = 122$، و $m_2 = 158$ $164 \times 122 = 158a_2$

بسّط. $20{,}008 = 158a_2$

قسم كل طرف على 158 وبسّط. $126.6 \approx a_2$

قرص هوكي كتلته 158 جرامًا يكون له تسارع بمعدل $126.6\ m/s^2$.

تمرين موجّه

4. السباق إذا كان عبد العزيز يركض بمتوسط 8 كيلومترات في الساعة، وأنهى السباق في 0.39 ساعة. وأنهى مازن السباق في 0.35 ساعة. فما متوسط وتيرة تقدم مازن؟

الربط بالحياة اليومية

قرص الهوكي القياسي يكون سُمكه 2.5 سنتيمتر وقطره 7.6 سنتيمتر. وتتراوح كتلته بين 156 و 170 جرامًا تقريبًا.

المصدر: *كتاب دوري الهوكي الوطني للقواعد*

2 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

لا يكون التمثيل البياني للتغير العكسي خطًا مستقيمًا مثل التمثيل البياني للتغير الطردي.

مثال 5 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 8$ عندما يكون $x = 3$.

الخطوة 1 اكتب معادلة تغير عكسي.

معادلة تغير عكسي $xy = k$

$x = 3,\ y = 8$ $3(8) = k$

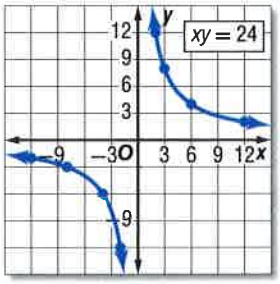
بسّط. $24 = k$

معادلة التغير العكسي هي $xy = 24$ أو $y = \frac{24}{x}$.

الخطوة 2 اختر قيمة لكل من x و y بحيث يكون ناتج ضربهما 24.

الخطوة 3 عيّن كل نقطة وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.

x	y
−12	−2
−8	−3
−4	−6
−2	−12
0	غير معرف
2	12
3	8
6	4
12	2



لاحظ أنه بما أن y غير معرف عندما يكون $x = 0$، فإنه لن توجد نقطة على التمثيل البياني عندما يكون $x = 0$. ويُسمى تمثيلها البياني قطعًا زائدًا.

تمرين موجّه

5. مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 16$ عندما يكون $x = 4$.

نصيحة في حل المسائل

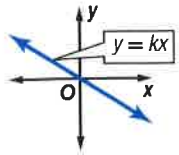
الاستنتاج المنطقي

أحيانًا يلزم تقسيم المسألة إلى أجزاء، وحل كل جزء على حده، ثم دمج حلول الأجزاء لإيجاد حل المسألة.

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

ملخص المفهوم التغير الطردي و التغير العكسي

التغير الطردي

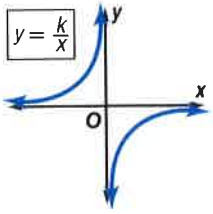


$k > 0$

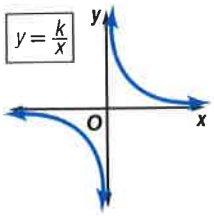
$k < 0$

- $y = kx$
- y يتغير طرديًا مع x.
- النسبة $\frac{y}{x}$ عبارة عن ثابت.

التغير العكسي



$k > 0$



$k < 0$

- $y = \frac{k}{x}$
- y يتغير عكسيًا مع x.
- ناتج ضرب xy عبارة عن ثابت.

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل تغيرًا عكسيًا أم تغيرًا طرديًا. اشرح.

1.

x	1	4	8	12
y	2	8	16	24

2.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

3. $xy = 4$

4. $y = \frac{x}{10}$

المثالان 2 و 5

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

5. $y = 8$ عندما يكون $x = 6$

6. $y = 2$ عندما يكون $x = 5$

7. $y = 3$ عندما يكون $x = -10$

8. $y = -1$ عندما يكون $x = -12$

مثال 3

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

9. إذا كان $y = 8$ عندما يكون $x = 4$، فأوجد x عندما يكون $y = 2$.

10. إذا كان $y = 7$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد y عندما يكون $x = -21$.

11. إذا كان $y = -5$ عندما يكون $x = 9$، فأوجد y عندما يكون $x = 6$.

مثال 4

12. **السباق** الوقت المستغرق لإكمال مسار سباق العربات الصغيرة يتناسب عكسيًا مع متوسط سرعة العربة الصغيرة. فإذا كان أحد المتسابقين متوسط سرعته 22.3 مترًا في الثانية وأكمل المسار في 30 ثانية. وأكمل متسابق آخر المسار في 25 ثانية. فما متوسط سرعة المتسابق الثاني؟

13. **البصريات** عندما لا تكون الرؤية واضحة لدى الشخص، فإن طبيب العيون يمكنه أن يصف له عدسات لتصحيح الحالة. قوة العدسة P، بوحدات تُسمى ديوبتر، تساوي 1 مقسومًا على البعد البؤري f، بالأمتار، للعدسة.

a. مثّل التغير العكسي $P = \frac{1}{f}$ بيانيًا.

b. أوجد قوى عدسات بعدها البؤري $+0.2$ إلى -0.4 متر.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1

حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا* طرديًا. اشرح.

14.

x	y
1	30
2	15
5	6
6	5

15.

x	y
2	−6
3	−9
4	−12
5	−15

16.

x	y
−4	−2
−2	−1
2	1
4	2

17.

x	y
−5	8
−2	20
4	−10
8	−5

18. $5x - y = 0$ **19.** $xy = \frac{1}{4}$ **20.** $x = 14y$ **21.** $\frac{y}{x} = 9$

المثالان 5 و 2

افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين *x* و *y*. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

22. $y = 2$ عندما يكون $x = 20$ **23.** $y = 18$ عندما يكون $x = 4$ **24.** $y = -6$ عندما يكون $x = -3$

25. $y = -4$ عندما يكون $x = -3$ **26.** $y = -4$ عندما يكون $x = 16$ **27.** $y = 12$ عندما يكون $x = -9$

مثال 3

أوجد الحل. افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*.

28. إذا كان $y = 12$ عندما يكون $x = 3$، فأوجد x عندما يكون $y = 6$.

29. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد x عندما يكون $y = 2$.

30. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 14$، فأوجد x عندما يكون $y = -5$.

31. إذا كان $y = 9$ عندما يكون $x = 9$، فأوجد y عندما يكون $x = -27$.

32. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = -2$. فأوجد y عندما يكون $x = 3$.

33. إذا كان $y = -8$ عندما يكون $x = -12$، فأوجد y عندما يكون $x = 10$.

مثال 4

34. علوم الأرض يتغير مستوى الماء في النهر عكسيًا مع درجة حرارة الجو. عندما تكون درجة حرارة الجو 32° مئوية، يكون مستوى الماء 3.35 أمتار. فإذا كانت درجة حرارة الجو 43°، فما مستوى الماء في النهر؟

35. الموسيقى يتغير تردد الوتر المهتز في البيانو عكسيًا مع طول الوتر عند تطبيق ضغط متساوٍ. فإذا كان يوجد وتر طوله 420 ملليمترًا يهتز بتردد 523 دورة في الثانية، فبأي تردد سيهتز وتر طوله 707 ملليمترات؟

حدد إذا ما كانت كل حالة هي مثال *للتغير العكسي* أو *التغير الطردي*. برر استنتاجك.

36. يمكن أن يشتري نادي المسرح 10 قِطع بسعر AED 2 لكل قِطعة أو 5 قِطع بسعر AED 4 لكل قِطعة.

37. اشترت عائلة ربيع عصائر ليمون بسعر AED 1.50 للعصير الواحد.

38. تجني آمال AED 14 نظير مجالسة الأطفال لمدة ساعتين، و AED 21 نظير مجالسة الأطفال لمدة 3 ساعات.

39. قِطع معدنية للعبة فيديو تم تقسيمها بالتساوي على مجموعة من الأصدقاء.

حدد إذا كان كل جدول أو تمثيل بياني يعبر عن تغير عكسي أم تغير طردي. اشرح.

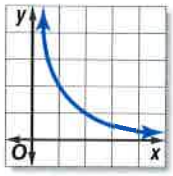
40.

x	y
5	1
8	1.6
11	2.2

41.

x	y
−3	−7
−2	−10.5
4	5.25

42.



43.

44. **العلوم الفيزيائية** عندما يتوازن شخصان على أرجوحة، تكون المسافتان من مركز الأرجوحة متناسبتين عكسيًا مع وزن الشخصين. فإذا كان شخص وزنه 53.5 كيلوجرامًا يجلس على بعد 1.8 متر من مركز الأرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 56.7 كيلوجرامًا أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

45. إذا كان $y = 9.2$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد x عندما يكون $y = 3$.

46. إذا كان $y = 3.8$ عندما يكون $x = 1.5$، فأوجد x عندما يكون $y = 0.3$.

47. إذا كان $y = \frac{1}{5}$ عندما يكون $x = -20$، فأوجد y عندما يكون $x = -\frac{8}{5}$.

48. إذا كان $y = -6.3$ عندما يكون $x = \frac{2}{3}$ ، فأوجد y عندما يكون $x = 8$.

49. **السباحة** اشترى كلّ من بدر وخميس عضوية انتفاع بحمام سباحة. وبالنسبة لكليهما، يتناسب متوسط التكلفة في اليوم عكسيًا مع عدد الأيام التي يذهبان فيها إلى حمام السباحة. فإذا ذهب بدر إلى حمام السباحة 25 يومًا بمتوسط تكلفة AED 5.60 في اليوم. وذهب خميس إلى حمام السباحة 35 يومًا. فما متوسط التكلفة في اليوم بالنسبة لخميس؟

50. **العلوم الفيزيائية** مقدار القوة المطلوبة للقيام بقدر معين من العمل لتحريك جسم ما يتناسب عكسيًا مع المسافة التي يتم تحريك الجسم فيها. افترض أن 90 N من القوة مطلوبة لتحريك جسم ما 10 أمتار. فأوجد القوة المطلوبة لتحريك جسم آخر 15 مترًا إذا كان ينطوي على نفس القدر من العمل.

51. **القيادة** يجب أن تتمرن بثينة على القيادة 40 ساعة مع أحد والديها أو أولياء أمورها قبل السماح لها بإجراء اختبار للحصول على رخصة القيادة الخاصة بها. وهي تنوي التمرن بنفس عدد الساعات من كل أسبوع.

a. ليكن h ممثلاً لعدد الساعات في الأسبوع التي ستتمرن فيها بثينة. أنشئ جدولاً يبين عدد الأسابيع w التي سوف تحتاجها للتمرن بالنسبة للقيم التالية لـ h: 1, 2, 4, 5, 8, 10.

b. اشرح كيف يتغير عدد الأسابيع كلما ازداد عدد الساعات في الأسبوع.

c. اكتب معادلة توضح العلاقة بين h و w ومثلها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. **التفكير النقدي** وجد أحمد وأيمن معادلة يتغير فيها x و y عكسيًا، ويكون $y = 10$ عندما يكون $x = 5$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

أحمد

$k = \frac{y}{x}$

$= \frac{10}{2}$ أو 5

$y = 5x$

أيمن

$k = xy$

$= (5)(10)$ or 50

$y = \frac{50}{x}$ أو

53. **التحدي** افترض أن f يتغير عكسيًا مع g، و g يتغير عكسيًا مع h. ما العلاقة بين f و h؟

54. **التبرير** هل $xy = -k$ تمثل تغيرًا عكسيًا عندما يكون $k \neq 0$؟ اشرح.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر حالة أو ظاهرة من الحياة اليومية يمكن تمثيلها بمعادلة تغير عكسي. استخدم المصطلحات الصحيحة لشرح مثالك وتفسير لماذا تعد هذه الحالة تغيرًا عكسيًا.

56. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التغير الطردي والتغير العكسي. قم بتضمين وصف للعلاقة بين الميل والتمثيلين البيانيين للتغير الطردي والعكسي.

تدريب على الاختبار المعياري

57. باعتبار وجود قوة ثابتة وأن تسارع جسم ما يتغير عكسيًا مع كتلته. افترض أن هذه القوة الثابتة تُطبق على جسم ما كتلته 6 كيلوجرامات ونتج عنها تسارع معدله $10\ m/s^2$. فإذا طُبقت نفس القوة على جسم آخر كتلته 12 كيلوجرامًا. فماذا سيكون معدل التسارع الناتج؟

A $4\ m/s^2$
B $5\ m/s^2$
C $6\ m/s^2$
D $7\ m/s^2$

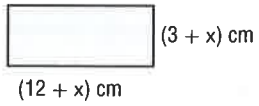
58. إذا حصلت حياة على متوسط 56% في أول سبعة اختبارات لها. فعلام ينبغي أن تحصل في اختبارها الثامن ليكون المتوسط 60% بالنسبة للاختبارات الثمانية؟

F 82%
G 88%
H 98%
J 100%

59. التقط حارب صورة ثعبان طوله متر واحد بجانب جدار من الطوب. عندما قام بتحميض الصور، بلغ طول الثعبان ذي المتر طولاً، سنتيمترين وارتفاع الجدار 4.5 سنتيمترات. فماذا كان الارتفاع الفعلي للجدار الطوبي؟

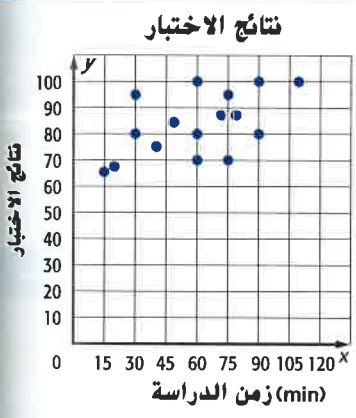
A 2.25 cm
B 22.5 cm
C 225 cm
D 2250 cm

60. الإجابة القصيرة أوجد مساحة المستطيل.



مراجعة شاملة

61. اختبارات حدد إذا ما كان التمثيل البياني على اليسار يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا وُجد ارتباط، فوضح مدلوله.



افترض أن y يتغير طرديًا مع x.

62. إذا كان $y = 2.5$ عندما يكون $x = 0.5$، فأوجد y عندما يكون $x = 20$.

63. إذا كان $y = -6.6$ عندما يكون $x = 9.9$، فأوجد y عندما يكون $x = 6.6$.

64. إذا كان $y = 2.6$ عندما يكون $x = 0.25$، فأوجد y عندما يكون $x = 1.125$.

65. إذا كان $y = 6$ عندما يكون $x = 0.6$، فأوجد x عندما يكون $y = 12$.

66. المعرفة المالية بائع يحصل على AED 32,000 في العام زائد 5% من قيمة المبيعات التي يحققها. فما قيمة المبيعات المطلوبة لكي يحصل على دخل سنوي أكبر من AED 45,000؟

مراجعة المهارات

بسّط. افترض أنّ جميع المقامات لا تساوي الصفر.

67. $\frac{7^8}{7^6}$

68. $\frac{x^8y^{12}}{x^2y^7}$

69. $\frac{5pq^7}{10p^6q^3}$

70. $\left(\frac{2c^3d}{7z^2}\right)^3$

71. $\left(\frac{4a^2b}{2c^3}\right)^2$

72. $y^0(y^5)(y^{-9})$

73. $\frac{(4m^{-3}n^5)^0}{mn}$

74. $\frac{(3x^2y^5)^0}{(21x^5y^2)^0}$

3-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعة الدوال النسبية

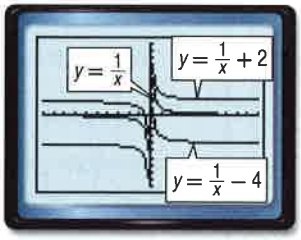
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحليل كيف يؤثر تغيير المعاملين a و b في $y=\frac{a}{x-b}+c$ على التمثيلات البيانية لمجموعة الدوال النسبية.

النشاط تغيير المعاملات

مثّل كل مجموعة من المعادلات بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صف أي أوجه تشابه واختلاف بين التمثيلات البيانية.

a. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2, y=\frac{1}{x}-4$

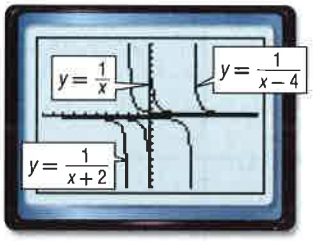
أدخل المعادلات في القائمة $Y=$ ومثّلها بيانيًا في نافذة العرض القياسية.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه. كل تمثيل بياني يقترب من المحور y على كلا الجانبين. ولكن يختلف التمثيلان البيانيان في الموضع الرأسي.

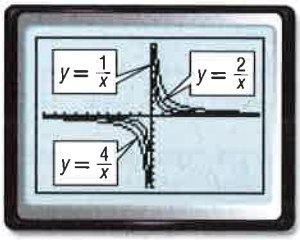
b. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+2}, y=\frac{1}{x-4}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه، وتقترب جميعًا من المحور x من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الموضع الأفقي.

c. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=\frac{4}{x}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الشكل.

النموذج والتحليل

1. كيف يؤثر a و b و c على التمثيل البياني لـ $y=\frac{a}{x-b}+c$ ؟ اذكر أمثلة.

تفحص كل زوج من المعادلات وتوقع أوجه التشابه والاختلاف من حيث التمثيل البياني لكل منهما. استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من توقعاتك. أكتب جملة واحدة أو جملتين تقارن بهما التمثيلين البيانيين.

2. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2$

3. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+5}$

4. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

3-4 الدوال النسبية

السابق	الحالي	لماذا؟
• كتبت معادلات التغير العكسي.	1 تحديد القيم المستبعدة.	• حليمة تقرأ كتابًا من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرؤها كل يوم y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$. حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.
	2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.	

المفردات الجديدة

دالة نسبية rational function

قيمة مستبعدة excluded value

خط تقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد القيم المستبعدة

الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال **للدالة النسبية**. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح

هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة معادلة لها الصيغة $y = \frac{p}{q}$، حيث p و q كثيرات الحدود و $q \neq 0$.

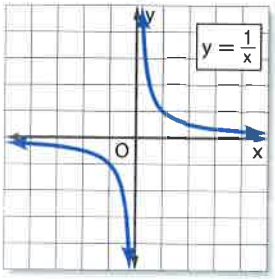
الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{1}{x}$

نوع التمثيل البياني: قطع زائد

المجال: $\{x | x \neq 0\}$

المدى: $\{y | y \neq 0\}$

التمثيل البياني



بما أن القسمة على صفر غير معرّفة، فأي قيمة للمتغير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية، يتم استبعادها من مجال الدالة. وتُسمى هذه القيم **بالقيم المستبعدة** للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = -\frac{2}{x}$

لا يمكن أن يساوي المقام 0. إذًا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x+1}$

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$.

c. $y = \frac{5}{4x-8}$

$4x - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$.

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$

1B. $y = \frac{x}{x-7}$

1C. $y = \frac{4}{3x+9}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

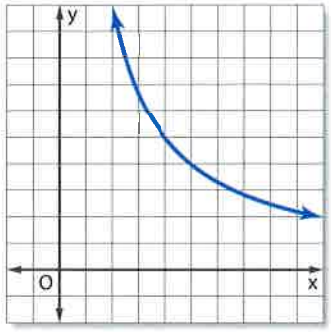
بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا، من مجال الدالة النسبية، قد ينبغي استبعاد قيم إضافية من المجال أيضًا، وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

المناطيد إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمتار المربعة y لكل شخص. مثل هذه الدالة بيانيًا.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفرًا أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.

عدد الأشخاص x	10	5	4	2
أمتار مُربعة لكل شخص y	2	4	5	10



لاحظ أنه كلما ازدادت x، اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت المساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. الهندسة مستطيل تبلغ مساحته 18 سنتيمترًا مربعًا. وتوضح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثّل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز. ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه.

المصدر: مركز غودارد لرحلات الفضاء

2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها

في المثال 2، القيمة المستبعدة هي $x = 0$. لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المستقيم الرأسي $x = 0$، ولكن لا يمسه أبدًا.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يمسه أبدًا. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما خطين *تقاربين*. **خط التقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

نصيحة دراسية

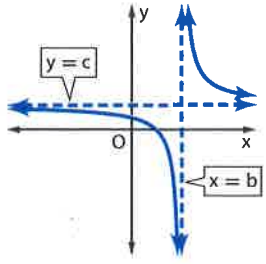
استخدام خطوط التقارب تكون خطوط التقارب مفيدة في تمثيل الدوال النسبية بيانيًا. ومع ذلك، فهي لا تعد جزءًا من التمثيل البياني.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب

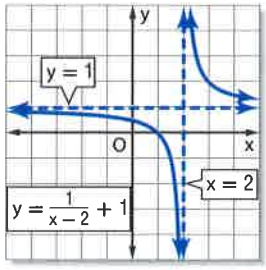
الشرح

الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x - b} + c,\ a \neq 0$، يكون لها خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام يساوي صفرًا، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

استخدام النماذج



مثال



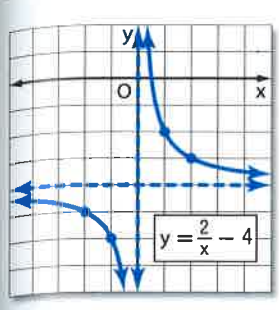
مجال $y = \frac{a}{x - b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. المدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع القلم الرصاص عن الورقة، لذا اختر قيم x على كلا جانبي خط التقارب الرأسي لتمثيل جزأي الدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف
a. b. 1A.

مثال 3 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

a. $y = \frac{2}{x} - 4$



الخطوة 1 حدد خطوط التقارب ومثّلها بيانيًا باستخدام الخطوط المتقطعة.

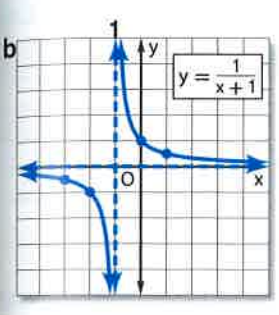
خط تقارب رأسي: $x = 0$

خط تقارب أفقي: $y = -4$

الخطوة 2 أنشئ جدولاً للقيم وعيّن النقاط. ثم صِل بينهما.

x	−2	−1	1	2
y	−5	−6	−2	−3

b



الخطوة 1 لإيجاد خط التقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستبعدة.

اجعل المقام يساوي 0. $x + 1 = 0$

اطرح 1 من كل طرف. $x = -1$

خط تقارب رأسي: $x = -1$

خط تقارب أفقي: $y = 0$

الخطوة 2

x	−3	−2	0	1
y	−0.5	−1	1	0.5

تمرين موجّه

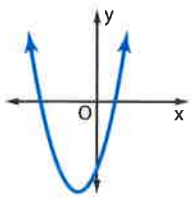
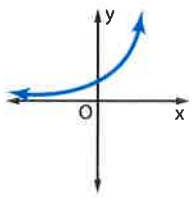
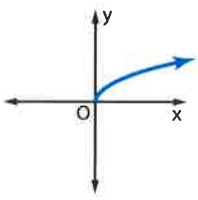
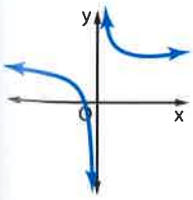
3A. $y = -\frac{6}{x}$ 3B. $y = \frac{1}{x-3}$ 3C. $y = \frac{2}{x+2} + 1$

الربط بتاريخ الرياضيات

إيفلين بويد غرانفيل (1924–) تخصصت غرانفيل في الرياضيات والفيزياء بكلية سميث في عام 1945. حيث تخرجت بامتياز مع مرتبة الشرف. كما حازت على شهادة الماجستير في الرياضيات والفيزياء ودرجة الدكتوراه في الرياضيات من جامعة ييل. وتركز مشروع الدكتوراه الخاص بها حول التحليل الوظيفي.

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

تربيعية	أسيّة	جذرية	نسبية
الدالة الأصلية: $y = x^2$	الدالة الأصلية: تختلف	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$	الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$
الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$	الصيغة العامة: $y = ab^x$	الصيغة العامة: $y = \sqrt{x - b} + c$	الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x - b} + c$
			

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

1. $y = \frac{5}{x}$
2. $y = \frac{1}{x + 3}$
3. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$
4. $y = \frac{x}{2x - 8}$

مثال 2 5. **التخطيط للحفل** تبلغ تكلفة الزينة من أجل حفل عشاء AED 32. وسيُقسم هذا المبلغ بين مجموعة من الأصدقاء. المبلغ الذي سيدفعه كل شخص y ممثل في $y = \frac{32}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = \frac{2}{x}$
7. $y = \frac{3}{x} - 1$
8. $y = \frac{1}{x - 2}$
9. $y = \frac{-4}{x + 2}$
10. $y = \frac{3}{x - 1} + 2$
11. $y = \frac{1}{x + 2} + 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

12. $y = \frac{-1}{x}$
13. $y = \frac{8}{x - 8}$
14. $y = \frac{x}{x + 2}$
15. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$
16. $y = \frac{2x + 5}{x + 5}$
17. $y = \frac{7}{5x - 10}$

مثال 2 18. **الظباء** تستطيع الظباء من ذوات القرون أن تجري 40 كيلومترًا دون توقف. ويتمثل متوسط السرعة في المعادلة $y = \frac{40}{x}$، حيث x هو الزمن المستغرق لجري هذه المسافة.

a. مثّل $y = \frac{40}{x}$ بيانيًا.

b. اذكر خطوط التقارب.

19. **قيادة الدراجات** قائد دراجة يقطع 10 كيلومترات كل صباح. متوسط سرعته y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{10}{x}$، حيث x هو الزمن الذي يستغرقه لقطع مسافة 10 كيلومترات بالدراجة. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

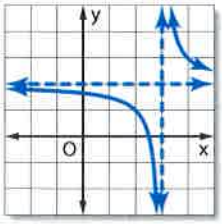
20. $y = \frac{5}{x}$
21. $y = \frac{-3}{x}$
22. $y = \frac{2}{x} + 3$
23. $y = \frac{1}{x} - 2$
24. $y = \frac{1}{x + 3}$
25. $y = \frac{1}{x - 2}$
26. $y = \frac{-2}{x + 1}$
27. $y = \frac{4}{x - 1}$
28. $y = \frac{1}{x - 2} + 1$
29. $y = \frac{3}{x - 1} - 2$
30. $y = \frac{2}{x + 1} - 4$
31. $y = \frac{-1}{x + 4} + 3$

32. **القراءة** راجع التطبيق في بداية الدرس.

a. مثّل الدالة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.

b. اختر نقطة على التمثيل البياني، واذكر مدلولها في سياق الحالة.

33. **البنية** يوضح التمثيل البياني إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$.



a. اذكر خطوط التقارب.

b. أكتب دالة ممكنة للتمثيل البياني.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

34. **الطيور** الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لمسافة 5000 كيلومتر أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة r بواسطة المعادلة $r = \frac{5000}{t}$، حيث t هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 ساعة في الطيران.

35. **رحلة صَفّية** سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيسهم كل شخص أيضًا بمبلغ مالي متساوٍ لتسمية أحد النجوم.

a. أكتب وصفًا لفظيًا لتكلفة الشخص الواحد.

b. أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.

c. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.

d. قدّر عدد الأشخاص المطلوبين ليساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي AED 15.

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد خطوط التقارب.

36. $y = \frac{4x + 3}{2x - 4}$

37. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

38. $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

41. **الهندسة** المعادلة $h = \frac{2(64)}{b_1 + 8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 وحدة مربعة. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين مقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة؛ ويبلغ طول أحدهما b_1 وحدات والآخر 8 وحدات.

a. اذكر مجالاً ومدى منطقيين للدالة.

b. مثّل الدالة بيانيًا في الربع الأول.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b_1 = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. **التحدي** مثّل $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ بيانيًا. واذكر مجال الدالة ومداها.

40. **التبرير** دون عمل التمثيل البياني، اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x + 5} - 2$.

41. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان التقاربيان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

42. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

43. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة** حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$y = \frac{10}{2x}$	$y = \frac{8}{x} + 1$	$y = \frac{6}{x + 1}$	$y = \frac{4}{x}$

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

45. حوّل $\frac{2a^2d}{3bc} \times \frac{9b^2c}{16ad^2}$ لأبسط صورة.

A $\frac{abd}{c}$

B $\frac{ab}{d}$

C $\frac{6a}{4bd}$

D $\frac{3ab}{8d}$

46. الإجابة القصيرة في أحد الأيام، ركضت سها 100 متر في 15 ثانية، و 200 متر في 45 ثانية، و 300 متر فوق حواجز منخفضة في دقيقة ونصف. كم عدد الثواني الإضافية التي استغرقتها لركض 300 متر فوق الحواجز المنخفضة عن ركضها مسافة 200 متر؟

47. بدأ خالد وخلف تجارة طباعة القمصان. وبلغ إجمالي تكاليف بدء العمل AED 450. وتبلغ تكلفة طباعة القميص الواحد AED 5.50. أكتب دالة نسبية $A(x)$ لمتوسط تكلفة إنتاج x قمصان.

F $A(x) = \frac{450 + 5.5x}{x}$

G $A(x) = \frac{450}{x} + 5.5$

H $A(x) = 450x + 5.5$

J $A(x) = 450 + 5.5x$

48. الهندسة أي مما يلي هو عبارة عن شكل رباعي له زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية؟

A متوازي الأضلاع

B المستطيل

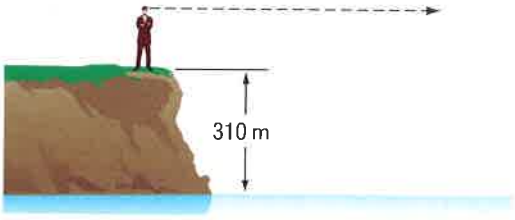
C المربع

D شبه المنحرف

مراجعة شاملة

49. السفر تستطيع أسرة خميس قطع مسافة 352 km إلى الشاطئ بالسيارة في 4 ساعات إذا ساروا بمعدل 88 km في الساعة. وتقول سمية إنه كان يمكن توفير نصف ساعة على الأقل إذا ساروا بمعدل 105 km في الساعة بالسيارة. هل هي على صواب؟ اشرح. (الدرس 4-3)

50. الرؤية الصيغة $d = \sqrt{\frac{3h}{2}}$ تمثل المسافة d بالكيلومتر التي يمكن للشخص رؤيتها من ارتفاع h متراً. تقف شيماء على منحدر يرتفع 310 أمتار فوق مستوى البحر. ما المسافة التي يمكن أن تراها شيماء من المنحدر؟ أكتب تعبيرًا جذريًا مبسطًا وتقريبًا عشريًا. (الدرس 2-3)



مراجعة المهارات

حلّل كل ثلاثية حدود إلى العوامل.

51. $x^2 + 11x + 24$

52. $w^2 + 13w - 48$

53. $p^2 - 2p - 35$

54. $72 + 27a + a^2$

55. $c^2 + 12c + 35$

56. $d^2 - 7d + 10$

57. $g^2 - 19g + 60$

58. $n^2 + 3n - 54$

59. $5x^2 + 27x + 10$

60. $24b^2 - 14b - 3$

61. $12a^2 - 13a - 35$

62. $6x^2 - 14x - 12$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

3-5 المعادلات النسبية

السابق
- وجدت حل التناسبات.

الحالي
1 حل المعادلات النسبية.
2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

لماذا؟
- أنواع الدلافين التي تعيش في المحيطات تستطيع السباحة بمعدل 8 كيلومترات في الساعة أسرع من الدلافين التي تعيش في السواحل. يستطيع الدلفين المحيطي السباحة لمسافة 4.8 كيلومترات في الوقت نفسه الذي يستغرقه الدلفين الساحلي للسباحة لمسافة 3.2 كيلومترات.

الدلافين			
النوع	المسافة	المعدل	الزمن
الساحلي		x kmph	t ساعات
المحيطي		$x + 8$ kmph	t ساعات

بما أن الزمن $= \frac{\text{المسافة}}{\text{المعدل}}$، فإن المعادلة التالية تمثل هذه الحالة.

الزمن الذي يسبح فيه الدلفين الساحلي 3.2 كيلومترات. يساوي الزمن الذي يسبح فيه الدلفين المحيطي 4.8 كيلومترات

$$\frac{3.2}{x} = \frac{4.8}{x+8}$$

المسافة ← 3.2 ، 4.8 → المسافة
المعدل ← x ، $x+8$ → المعدل

1 حل المعادلات النسبية

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. عندما تكون المعادلة النسبية عبارة عن تناسب، يمكنك استخدام الضرب التبادلي لحلها.

المفردات الجديدة
- معادلة نسبية (rational equation)
- حل دخيل (extraneous solution)
- مسألة عمل (work problem)
- مسألة معدل (rate problem)

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
استخدام نماذج الرياضيات.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الضرب التبادلي لحل المعادلات

الدلافين راجع المعلومات المذكورة أعلاه. حل $\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ لإيجاد سرعة الدلفين الساحلي. تحقق من الحل.

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$4.8x = 3.2x + 25.6$ — أوجد ناتج الضرب التبادلي.

$16x = 25.6$ — خاصية التوزيع

$x = 16$ — اطرح $2x$ من كل طرف.

إذًا، يستطيع الدلفين الساحلي السباحة بمعدل 16 كيلومترًا في الساعة.

التحقق

$\frac{4.8}{x+8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$\frac{4.8}{16+8} = \frac{3.2}{16}$ — عوّض عن x بـ 16.

$\frac{4.8}{24} = \frac{3.2}{16}$ — بسّط.

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ✓ — بسّط.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

1A. $\frac{7}{y-3} = \frac{3}{y+1}$

1B. $\frac{13}{10} = \frac{2f + 0.2}{7}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مجلة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مجلة

يمكن استخدام طريقة أخرى لحل أي معادلة نسبية وهي بإيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور في المعادلة. ثم بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور.

مثال 2 استخدام المقام المشترك الأصغر لحل المعادلات النسبية

حُل المعادلة: $\frac{4}{y}+\frac{5y}{y+1}=5$. تحقق من الحل.

الخطوة 1 أوجد المقام المشترك الأصغر.

المقام المشترك الأصغر لـ $\frac{4}{y}$ و $\frac{5y}{y+1}$ هو $y(y+1)$.

الخطوة 2 اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر.

$\frac{4}{y}+\frac{5y}{y+1}=5$ المعادلة الأصلية

$y(y+1)\left(\frac{4}{y}+\frac{5y}{y+1}\right)=y(y+1)(5)$ اضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر، $y(y+1)$.

$\left(\frac{y(y+1)}{1}\cdot\frac{4}{y}\right)+\left(\frac{y(y+1)}{1}\cdot\frac{5y}{y+1}\right)=y(y+1)(5)$ خاصية التوزيع

$(y+1)4+y(5y)=y(y+1)(5)$ بسّط.

$4y+4+5y^2=5y^2+5y$ اضرب.

$4y+4+5y^2-5y^2=5y^2-5y^2+5y$ اطرح $5y^2$ من كل طرف.

$4y+4=5y$ بسّط.

$4y-4y+4=5y-4y$ اطرح $4y$ من كل طرف.

$4=y$ بسّط.

التحقق

$\frac{4}{y}+\frac{5y}{y+1}=5$ المعادلة الأصلية

$\frac{4}{4}+\frac{5(4)}{4+1}\stackrel{?}{=}5$ عوّض عن y بـ 4.

$1+4\stackrel{?}{=}5$ بسّط.

$5=5$ ✓ بسّط.

نصيحة دراسية

الحلول من الضروري التحقق من حلول المعادلات النسبية للتأكد من أنك حققت المعادلة الأصلية.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

2A. $\frac{2b-5}{b-2}-2=\frac{3}{b+2}$

2B. $1+\frac{1}{c+2}=\frac{28}{c^2+2c}$

2C. $\frac{y+2}{y-2}-\frac{2}{y+2}=-\frac{7}{3}$

2D. $\frac{n}{3n+6}-\frac{n}{5n+10}=\frac{2}{5}$

تذكر أن أي قيمة للمتغير تجعل مقام التعبير النسبي صفرًا يجب استبعادها من المجال.

وبنفس الطريقة، عندما ينتج عن حل المعادلة النسبية صفر في المقام، فإنه ينبغي استبعاد هذا الحل. وتُسمى مثل هذه الحلول **بالحلول الدخيلة**.

$\frac{4+x}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$ 5، و 0، و −1 لا يمكن أن تكون حلولاً.

الربط بالمفردات

دخيل

الاستخدام اليومي

غير ذي صلة أو غير مهم

حل دخيل

الاستخدام الرياضي ناتج لا يعتبر حلاً للمعادلة الأصلية

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 الحلول الدخيلة

حُـلّ $\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ واذكر أي حلولٍ دخيلة.

$\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$	المعادلة الأصلية
$(n-5)\left(\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}\right)=(n-5)5$	اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $n-5$.
$\left(\frac{n-5}{1}\times\frac{2n}{n-5}\right)+\left(\frac{n-5}{1}\times\frac{4n-30}{n-5}\right)=(n-5)5$	خاصية التوزيع
$2n+4n-30=5n-25$	بسّط.
$6n-30=5n-25$	اجمع الحدود المتشابهة.
$6n-5n-30=5n-5n-25$	اطرح $5n$ من كل طرف.
$n-30=-25$	بسّط.
$n-30+30=-25+30$	اجمع 30 إلى كل طرف.
$n=5$	بسّط.

بما أن $n=5$ ينتج عنه صفر في مقام المعادلة الأصلية، فهو حل دخيل. إذًا، المعادلة ليس لها حل.

تمرين موجّه

3. حُل المعادلة: $\frac{n^2-3n}{n^2-4}-\frac{10}{n^2-4}=2$. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

نصيحة دراسية

الحلول من الممكن أن تحصل على كلٍ من حل صالح وحل دخيل عند حل معادلة نسبية.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

يمكنك استخدام المعادلات النسبية لحل **مسائل العمل**، أو مسائل تشتمل على معدلات العمل.

مثال 4 من الحياة اليومية مسألة عمل

وظائف في هذه الوظيفة ذات الدوام الجزئي في حديقة الحيوان، يستطيع رشيد تنظيف ساحة الطيور في ساعتين. ويستطيع حسام تنظيف الساحة نفسها في ساعة و 15 دقيقة. كم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

الفهم يستغرق رشيد ساعتين لإكمال العمل ويستغرق حسام $1\frac{1}{4}$ ساعة.

أنت تحتاج إلى إيجاد معدل عمل كل شخص والزمن الإجمالي t المستغرق منهما لإكمال العمل معًا.

التخطيط أوجد الكسر الذي يعبر عن العمل الذي يقوم به كل شخص في ساعة.

معدل رشيد ← $\frac{1 \text{ عمل}}{2 \text{ ساعة}}=\frac{1}{2}$ عمل لكل ساعة

معدل حُسام ← $\frac{1 \text{ عمل}}{1\frac{1}{4} \text{ ساعة}}$ أو $\frac{1 \text{ عمل}}{\frac{5}{4} \text{ ساعة}}=\frac{4}{5}$ عمل لكل ساعة

بما أن المعدل × الزمن = الكسر المعبر عن العمل المنجز، فاضرب كل معدل في الزمن t لتمثيل كمية العمل المنجز لكل شخص.

الحل

عملاً واحدًا — يساوي — الكسر المعبر عن عمل حُسام المنجز — زائد — الكسر المعبر عن عمل رشيد المنجز

$$\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t = 1$$

$10\left(\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t\right) = 10(1)$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، 10.

$10\left(\frac{1}{2}t\right) + 10\left(\frac{4}{5}t\right) = 10$ خاصية التوزيع

$5t + 8t = 10$ بسّط.

$t = \frac{10}{13}$ اجمع الحدود المتشابهة واقسم كل طرف على 13.

إذًا، سيستغرقان $\frac{10}{13}$ ساعة أو حوالي 46 دقيقة لإنجاز العمل إذا عملا معًا.

التحقق في $\frac{10}{13}$ ساعة. سوف ينجز رشيد $\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{5}{13}$ من العمل وسوف ينجز حُسام $\frac{4}{5} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{8}{13}$ من العمل. معًا، سينجزان $\frac{5}{13} + \frac{8}{13}$ أو عملاً واحدًا كاملاً. إذًا، الإجابة صحيحة. ✓

نصيحة دراسية

الاستنتاج عند حل مسائل العمل، تذكر أن المصطلح الذي يمثل جزءًا من العمل المنجز، يجب أن يكون بوحدة زمنية واحدة.

تمرين موجّه

4. كنس ورق الشجر تستطيع علياء كنس ورق الشجر في ساعتين. ويستغرق ذلك من أخيها زياد 3 ساعات. كم من الوقت سيستغرقان في كنس ورق الشجر إذا عملا معًا؟

يمكن استخدام المعادلات النسبية أيضًا لحل **مسائل المعدل**.

مثال 5 من الحياة اليومية مسألة المعدل

الطائرات **أقلعت طائرة وكانت تطير بمتوسط 772 كيلومترًا في الساعة. بعد 15 دقيقة، غادرت طائرة أخرى واتجهت نحو المدينة نفسها بمعدل 900 كيلومتر في الساعة. كم من الوقت ستستغرق الطائرة الثانية لاجتياز الطائرة الأولى؟**

دوّن المعلومات التي تعرفها في جدول.

الطائرة	المسافة	المعدل	الزمن
1	d كيلومترًا	772 كيلومترًا	t ساعات
2	d كيلومترًا	900 كيلومتر	$t - \frac{1}{4}$ ساعة

أقلعت الطائرة 2 بعد 15 دقيقة، أو $\frac{1}{4}$ ساعة بعد الطائرة 1

بما أن كلتا الطائرتين ستكون سافرتا المسافة نفسها عندما تجتاز الطائرة 2 الطائرة 1، فإنه يمكنك كتابة المعادلة التالية.

مسافة الطائرة 1 = مسافة الطائرة 2

$772 \times t = 900 \times \left(t - \frac{1}{4}\right)$ المسافة = المعدل × الزمن

$772t = (900 \times t) - \left(900 \times \frac{1}{4}\right)$ خاصية التوزيع

$772t = 900t - 225$ بسّط.

$-80t = -225$ اطرح $560t$ من كل طرف.

$t = 1.75$ اقسم كل طرف على -80.

إذًا، ستجتاز الطائرة الثانية الطائرة الأولى بعد 1.75 ساعة.

الربط بالحياة اليومية

تبلغ أطول رحلة جوية تجارية دون توقف 21,600 كيلومتر من مطار هونج كونج في الصين إلى مطار لندن – هيثرو في المملكة المتحدة. واستغرقت الرحلة 22 ساعة و42 دقيقة.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

تمرين موجّه

5. غادرت هدى المنزل وسارت بمعدل 3 كيلومترات في الساعة. بعد 10 دقائق، غادرت أمها المنزل وسارت بالدراجة بمعدل 10 كيلومترات في الساعة. فبعد كم دقيقة ستلحق الأم بابنتها؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

1. $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x}$
2. $\frac{t+3}{5} = \frac{2t+3}{9}$
3. $\frac{a+3}{a} - \frac{6}{5a} = \frac{1}{a}$
4. $4 - \frac{p}{p-1} = \frac{2}{p-1}$
5. $\frac{2t}{t+1} + \frac{4}{t-1} = 2$
6. $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$

مثال 4 7. **إزالة الأعشاب الضارة** يستطيع سلطان إزالة الأعشاب الضارة بالحديقة في 45 دقيقة. وتستطيع أخته عبير القيام بذلك في 50 دقيقة. فكم سيستغرقان من الوقت لإزالة الأعشاب الضارة بالحديقة إذا عملا معًا؟

مثال 5 8. **تنسيق الحدائق** يملأ أمير دلوًا سعته 13.2 لترًا لري النباتات من صنبور يتدفق منه الماء بمعدل 6.6 لترات في الدقيقة. إذا كان سيضيف خرطومًا يتدفق منه الماء بمعدل 5.4 لترات في الدقيقة، فكم عدد الدقائق التي سيستغرقها لملء الدلو؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التمرين وحل المسائل

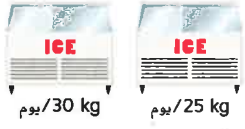
الأمثلة 1-3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

9. $\frac{8}{n} = \frac{3}{n-5}$
10. $\frac{6}{t+2} = \frac{4}{t}$
11. $\frac{3g+2}{12} = \frac{g}{2}$
12. $\frac{5h}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3h}{8}$
13. $\frac{2}{3w} = \frac{2}{15} + \frac{12}{5w}$
14. $\frac{c-4}{c+1} = \frac{c}{c-1}$
15. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = -1$
16. $\frac{y+4}{y-2} + \frac{6}{y-2} = \frac{1}{y+3}$
17. $\frac{a}{a+3} + \frac{a^2}{a+3} = 2$
18. $\frac{12}{a+3} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{8}{a+3}$
19. $\frac{3n}{n-1} + \frac{6n-9}{n-1} = 6$
20. $\frac{n^2-n-6}{n^2-n} - \frac{n-5}{n-1} = \frac{n-3}{n^2-n}$

مثال 4 21. **الطلاء** إذا كان سعيد يستغرق 3 ساعات لطلاء جانب واحد من السياج. ويستغرق ذلك من طارق 5 ساعات. فكم من الوقت سيستغرق ذلك منهما إذا عملا معًا؟

22. **غسل الصحون** إذا كان عبيد يعمل غاسلاً للصحون ويستطيع غسل 500 صحن في ساعتين و 15 دقيقة. ويستطيع عبد الرحمن إنهاء 500 صحن في 3 ساعات. فكم سيستغرقان من الوقت لإنهاء كل الصحون إذا عملا معًا؟

مثال 5 23. **الثلج** إذا كان الفندق به جهازان لصنع الثلج في المطبخ. فكم عدد الساعات التي سيستغرقها الجهازان لصنع 60 kg من الثلج؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



24. **قيادة الدراجات** إذا اتجه قائدا دراجتين كلٌ في اتجاه معاكس للآخر في مسار دائري طوله 5.6 كيلومترات. وبدئا في الوقت نفسه. وأكمل قائد الدراجة الأول المسار في 22 دقيقة وقائد الدراجة الثاني في 28 دقيقة. ففي أي وقت تجاوز كلٌ منهما الآخر؟

حاسبة التمثيل البياني بالنسبة لكل دالة، a) صِف شكل التمثيل البياني، b) استخدم التحليل إلى العوامل لتحويل الدالة لأبسط صورة، c) أوجد أصفار الدالة.

25. $f(x) = \frac{x^2-x-30}{x-6}$
26. $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x+2}$
27. $f(x) = \frac{x^3+6x^2+12x}{x}$

28. **التبرير** إذا كان عبد الكريم يستطيع طلاء منزل مساحته قياسية في حوالي 5 أيام. واستأجر مساعدين اثنين لمهمته الأخيرة. فبأي معدل يجب على هذين المساعدين العمل لصالح عبد الكريم للوفاء بالموعد النهائي البالغ يومين؟

29. **الطائرات** إذا كانت الرياح المعاكسة تهب في اتجاه الطائرة وتقلل من سرعتها الإجمالية، في حين تدفع الرياح الخلفية الطائرة وتزيد من سرعتها الإجمالية. ليكن w يساوي سرعة الرياح، و r يساوي السرعة التي حددها الطيار، و s يساوي السرعة الإجمالية.

a. أكتب معادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح المعاكسة ومعادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح الخلفية.

b. استخدم قاعدة المعدل لكتابة معادلة للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح المعاكسة ومعادلة أخرى للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح الخلفية. ثم حل كل معادلة لإيجاد الزمن بدلاً من المسافة.

30. **كوكتيل العصائر** إذا كان بائع عصائر الفاكهة لديه 3 لترات من عصير الأناناس ولتران من عصير البرتقال. وتريد فتحية إضافة المزيد من عصير البرتقال بحيث يكون 60% من كوكتيل عصير الفاكهة من عصير البرتقال. ليكن x يساوي لترات عصير البرتقال التي تريد إضافتها.

a. انسخ الجدول التالي وأكمله.

العصير	لترات عصير البرتقال	إجمالي لترات العصير	النسبة المئوية لعصير البرتقال
الكوكتيل الأصلي		5	
الكوكتيل النهائي	$x + 2$		0.6

b. أكتب معادلة وحلها لإيجاد لترات عصير البرتقال المطلوب إضافتها.

31. **السكن الجماعي** إذا كان عدد الساعات h المستغرقة في تنظيف السكن الجماعي يتغير عكسيًا مع عدد الأشخاص الذين ينظفونه c ويتغير طرديًا مع عدد الأشخاص الذين يعيشون هناك p.

a. فأكتب معادلة توضح الارتباط بين h، و c، و p. (إرشاد: قم بتضمين الثابت k.)

b. إذا كان تنظيف السكن الجماعي يستغرق 8 ساعات من 5 أشخاص عندما يوجد 100 شخص ساكن. فكم سيستغرق تنظيف السكن إذا كان يوجد 10 أشخاص ينظفون ولا زال عدد الأشخاص الذين يعيشون في السكن كما هو؟

حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

32. $\frac{4b + 2}{b^2 - 3b} + \frac{b + 2}{b} = \frac{b - 1}{b}$

33. $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = 3$

34. $\frac{y^2 + 5y - 6}{y^3 - 2y^2} = \frac{5}{y} - \frac{6}{y^3 - 2y^2}$

35. $\frac{x - \frac{6}{5}}{x} - \frac{x - 10\frac{1}{2}}{x - 5} = \frac{x + 21}{x^2 - 5x}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **التحدي** حُل المعادلة: $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{(x + 1)(x - 2)}$.

37. **التبرير** ما وجه الارتباط بين القيمة المستبعدة من التعبير النسبي والحل الدخيل للمعادلة النسبية المناظرة؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يجب عليك التحقق من حلولك للمعادلات النسبية؟

39. **الفرضيات** أوجد مثالاً مضاداً للعبارة التالية.

حل المعادلة النسبية لا يمكن أبدًا أن يكون صفرًا.

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوات حل معادلة نسبية لا تكون عبارة عن تناسب.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

41. يستغرق علي 4 ساعات في بناء سياج. وإذا استأجر عمر لمساعدته، فسوف يمكنهما إنجاز العمل في 3 ساعات. فإذا بنى عمر السياج نفسه بمفرده، فكم من الوقت سيستغرق منه ذلك؟

A $1\frac{5}{7}$ ساعة C 8 ساعات

B $3\frac{2}{3}$ ساعات D 12 ساعة

42. في سباق 1000 متر، أكمل عدنان 35 مترًا قبل منصور و 53 مترًا قبل أيوب. فما المسافة التي سبق منصور بها عدنان؟

F 18 m G 35 m H 53 m J 88 m

43. تم صب عشرين لترًا من عصير الليمون في وعائين لهما حجم مختلف. عبّر عن كمية عصير الليمون التي تم صبها في الوعاء الأصغر بدلالة g، وهي الكمية التي تم صبها في الوعاء الأكبر.

A $g + 20$ C $g - 20$

B $20 + g$ D $20 - g$

44. الإجابة الشبكية صالة ألعاب رياضية بها أقراص ذات وزن كيلوجرامين و 5 كيلوجرامات. ويوجد أربعون قرصًا بشكل إجمالي. فإذا كان الوزن الإجمالي لأقراص الكيلوجرامين هو نفسه الوزن الإجمالي لأقراص 5 كيلوجرامات. فكم عدد أقراص الكيلوجرامين الموجودة؟

مراجعة شاملة

45. التعداد السكاني يشهد التعداد السكاني في دولة ما تناقصًا سنويًا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

46. الطماطم يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطماطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبذور تنتج عبوات بذور لـ 200 صنف من الطماطم، فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بذورًا لها؟

47. القيادة يجب أن يبقى ضغط الإطارات في حدود رطلين للبوصة المربعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مدى قيم الضغط المقبولة؟

عبّر عن كل عدد بالصيغة العلمية.

48. 12,300 **49.** 0.0000375 **50.** 1,255,000

51. المعرفة المالية إذا كان مع محمد AED 13 لطلب بيتزا. وتبلغ تكلفة البيتزا AED 7.50 زائد AED 1.25 لكل إضافة. وهو يعتزم دفع 15% من التكلفة الإجمالية بقشيشًا. أكتب متباينة وحلها لإيجاد عدد الإضافات التي يمكن أن يطلبها.

حُـلّ كل متباينة. تحقق من صحة الحل.

52. $\frac{b}{10} \leq 5$ **53.** $-7 > -\frac{r}{7}$ **54.** $\frac{5}{8}y \geq -15$

مراجعة المهارات

حدد احتمال وقوع كل حدث إذا قمت باختيار كرة زجاجية من حقيبة تحتوي على 9 كرات حمراء، و 6 كرات زرقاء، و 5 كرات صفراء.

55. P(زرقاء) **56.** P(حمراء) **57.** P(ليست صفراء)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

3-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية عن طريق التمثيل البياني، واستخدام الجداول وأحد النظم الجبرية الحاسوبية (CAS).

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

للحل بالتمثيل البياني، مثّل بيانيًا كلا طرفي المعادلة وحدد موقع نقطة (نقاط) التقاطع.

النشاط 1 حل المعادلة النسبية بالتمثيل البياني

حُـلّ المعادلة: $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$ بالتمثيل البياني.

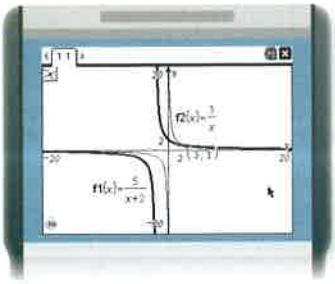
الخطوة 1 أضف صفحة **Graphs** جديدة.

الخطوة 2 استخدام خيار **Window Settings** من قائمة **Window/Zoom** لضبط النافذة إلى 20− إلى 20 بالنسبة لكل من x و y. اضبط المقياسين إلى 2.

الخطوة 3 أدخل $\frac{5}{x+2}$ إلى $f_1(x)$ و $\frac{3}{x}$ إلى $f_2(x)$.

الخطوة 4 غير سُمك التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ عن طريق تحديد التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ وخيار **ctrl menu** **Attributes**.

الخطوة 5 استخدم أداة **Intersection Point(s)** من قائمة **Points & Lines** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. حدد التمثيل البياني لـ **f1(*x*) enter** ثم التمثيل البياني لـ **f2(*x*) enter**.



[−20, 20] scl: 2 بمعدل [−20, 20] scl: 2

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند النقطة (3, 1). وهذا يعني أن $\frac{5}{x+2}$ و $\frac{3}{x}$ كليهما يساويان 1 عندما يكون $x = 3$. إذًا، حل $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$ هو $x = 3$.

تمارين

استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل كل معادلة.

1. $\frac{5}{x} + \frac{4}{x} = 10$
2. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$
3. $\frac{6}{x} + \frac{3}{2x} = 12$
4. $\frac{4}{x} + \frac{3}{4x} = \frac{1}{8}$
5. $\frac{4}{x} + \frac{x-2}{2x} = x$
6. $\frac{3}{3x-2} + \frac{5}{x} = 0$
7. $\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{2}{x}$
8. $\frac{x}{x+2} + x = \frac{5x+8}{x+2}$
9. $\frac{1}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{4x-3}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} = 6$

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية تابع

النشاط 2 حل المعادلة النسبية باستخدام جدول

حُـلّ المعادلة: $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ باستخدام جدول.

الخطوة 1 أضف صفحة **Lists & Spreadsheet** جديدة.

الخطوة 2 قم بتسمية العمود A بـ x. أدخل القيم من -4 إلى 4 في الخلايا A1 إلى A9.

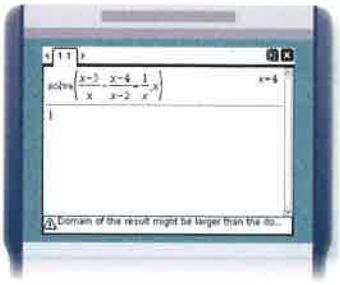
الخطوة 3 في العمود B في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيسر من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. في العمود C في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيمن من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. حدد **Variable Reference** عندما يُطلب منك.

مرِّر حتى ترى أين تتساوى القيم في العمودين B و C. يحدث هذا عند $x = 4$.
لذا، حل $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ هو 4.

يمكنك استخدام نظام جبري حاسوبي (CAS) أيضًا لحل المعادلات النسبية.

النشاط 3 حل المعادلة النسبية باستخدام نظام جبري حاسوبي

حُـلّ المعادلة: $\frac{1}{x} = \frac{x-4}{x-2} - \frac{x-3}{x}$ باستخدام نظام جبري حاسوبي (CAS).



الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** جديدة.

الخطوة 2 لحل المعادلة، حدد أداة **Solve** من القائمة **Algebra**. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة مع وضع ثنائيات الحدود بين الأقواس.
أدخل = والطرف الأيمن من المعادلة.
ثم أكتب فاصلة وأتبعها بـ x، ثم اضغط **enter**.

سيظهر الحل، 4.

تمارين

حُـلّ كل معادلة مما يلي باستخدام جدول أو نظام جبري حاسوبي.

11. $\frac{2}{x} + \frac{2+x}{2} = \frac{x+3}{2}$

12. $\frac{4}{x-2} = -\frac{1}{x+3}$

13. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 0$

14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 0$

15. $\frac{2}{x+4} + \frac{4}{x-1} = 0$

16. $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{4} = 2x$

17. $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{2} = x$

18. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x}$

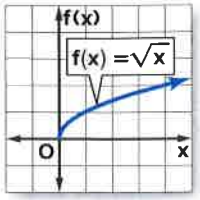
19. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = x$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

دوال الجذر التربيعي (الدرس 3-1)



- تشتمل دالة الجذر التربيعي على الجذر التربيعي لمتغير.
- الدالة الأصلية لمجموعة دوال الجذر التربيعي تكون $f(x) = \sqrt{x}$.

المعادلات الجذرية (الدرس 3-2)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما
- لا يوجد مجذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
- لا يوجد أي مجذور مشتمل على كسور.
- لا يظهر أي مجذور في مقام كسر.

التغير العكسي (الدرس 3-3)

- يمكنك استخدام $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لحل المسائل المشتملة على تغير عكسي.

الدوال النسبية (الدرس 3-4)

- القيم المستبعدة هي قيم متغير ينتج عنها مقام صفري.
- إذا حدثت خطوط مقاربة رأسية، فسوف تقع عند قيم مستبعدة.

المعادلات النسبية (الدرس 3-5)

- استخدم الضرب التبادلي لحل المعادلات النسبية ذات كسر واحد على كل طرف من طرفي علامة يساوي.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

asymptote خط تقارب	radical function دالة جذرية
closed مغلقة	radicand مجذور
conjugate مرافق	rate problem مسألة معدل
excluded value قيمة مستبعدة	rationalize the denominator إنطاق المقام
extraneous solution حل دخيل	rational function دالة نسبية
inverse variation تغير عكسي	rational equation معادلة نسبية
product rule قاعدة ناتج الضرب	square root function دالة الجذر التربيعي
radical equations معادلات جذرية	work problem مسألة عمل
radical expression تعبير جذري	

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة *صحيحة* أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة أو التعبير أو العدد الذي تحته خط لصياغة جملة صحيحة.

1. التعبيران $12\sqrt{4}$ و $\sqrt{288}$ متكافئان.
2. التعبيران $\sqrt{5} - 2$ و $\sqrt{5} + 2$ مترافقان.
3. في التعبير $-5\sqrt{2}$، يكون المجذور هو 2.
4. إذا كان ناتج ضرب متغيرين عبارة عن ثابت غير صفري، فإن العلاقة بينهما تكون تغيرًا عكسيًا.
5. إذا كان المستقيم $x = a$ خطًا تقاربيًا رأسيًا لدالة نسبية، فإذا تكون a قيمة مستبعدة.
6. القيم المستبعدة من التعبير $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ هي -3 و -2.
7. المعادلة $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$ لها حل دخيل، 2.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

3-1 دوال الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

8. $y = \sqrt{x} - 3$
9. $y = \sqrt{x} + 2$
10. $y = -5\sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x} - 6$
12. $y = \sqrt{x - 1}$
13. $y = \sqrt{x} + 5$

14. **الهندسة** يمكن استخدام الدالة $s = \sqrt{A}$ لإيجاد طول ضلع المربع المُعطى مساحته. استخدم هذه الدالة لاكتشاف طول ضلع مربع مساحته 90 سنتيمترًا مربعًا. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

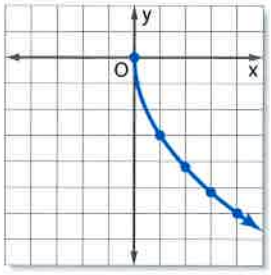
مثال 1

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولاً. اختر قيمًا غير سالبة لـ x.

x	0	1	2	3	4
y	0	−3	≈−4.2	≈−5.2	−6

عيّن النقاط وارسم منحنى منتظمًا.



التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ تمدد رأسيًا وانعكس على المحور x.

المجال هو $\{x | x \geq 0\}$.

المدى هو $\{y | y \leq 0\}$.

3-2 المعادلات الجذرية

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

34. $10 + 2\sqrt{x} = 0$
35. $\sqrt{5 - 4x} - 6 = 7$
36. $\sqrt{a + 4} = 6$
37. $\sqrt{3x} = 2$
38. $\sqrt{x + 4} = x - 8$
39. $\sqrt{3x - 14} + x = 6$

40. **السقوط الحر** بافتراض عدم وجود مقاومة للهواء، يمكن إيجاد الزمن t بالثواني الذي يستغرقه جسم ما للسقوط من h أمتار، باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{4}}$. إذا قفز لاعب قفز حر من طائرة وكان في سقوط حر لمدة 10 ثوانٍ قبل فتح المظلة، فكم عدد أمتار السقوط الحر؟

مثال 2

حُلّ المعادلة: $\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$.

$\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7x + 4} = 23$	اجمع 18 إلى كل طرف.
$(\sqrt{7x + 4})^2 = 23^2$	قم بتربيع كل طرف.
$7x + 4 = 529$	بسّط.
$7x = 525$	اطرح 4 من كل طرف.
$x = 75$	اقسم كل طرف على 7.

المعادلة الأصلية

$\sqrt{7(75) + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	$x = 75$
$\sqrt{525 + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اضرب.
$\sqrt{529} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اجمع.
$23 - 18 \stackrel{?}{=} 5$	بسّط.
$5 = 5$ ✓	صحيح.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

3-3 التغير العكسي

أوجد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

41. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 1$، فأوجد x عندما يكون $y = 12$

42. إذا كان $y = -1$ عندما يكون $x = -3$، فأوجد y عندما يكون $x = -9$

43. إذا كان $y = 1.5$ عندما يكون $x = 6$، فأوجد y عندما يكون $x = -16$

44. الفيزياء إذا كان شخص وزنه 61 كيلوجرامًا يجلس على بعد 1.5 m من مركز أرجوحة. فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 49 كيلوجرامًا أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

مثال 3

إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 28$ عندما يكون $x = 42$، فأوجد y عندما يكون $x = 56$.

ليكن $x_1 = 42$، و $x_2 = 56$، و $y_1 = 28$. حل لإيجاد y_2.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ تناسب للتغير العكسي

$\frac{42}{56} = \frac{y_2}{28}$ التعويض

$1176 = 56y_2$ الضرب التبادلي.

$21 = y_2$

لذا، $y = 21$ عندما يكون $x = 56$.

3-4 الدوال النسبية

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

45. $y = \frac{1}{x - 3}$

46. $y = \frac{2}{2x - 5}$

47. $y = \frac{3}{3x - 6}$

48. $y = \frac{-1}{2x + 8}$

49. حفل البيتزا طلبت هيام بيتزا ومياهًا غازية للمجموعة الدراسية لديها مقابل AED 38. التكلفة لكل شخص y تُعطى بالمعادلة $y = \frac{38}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص في المجموعة الدراسية. مثّل الدالة بيانيًا واذكر الخطوط المقاربة.

مثال 4

اذكر القيمة المستبعدة من الدالة $y = \frac{1}{4x + 16}$.

اجعل المقام يساوي الصفر.

$4x + 16 = 0$

$4x + 16 - 16 = 0 - 16$ اطرح 16 من كل طرف.

$4x = -16$ بسّط.

$x = -4$ اقسم كل طرف على 4.

3-5 المعادلات النسبية

حلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

50. $\frac{5n}{6} + \frac{1}{n - 2} = \frac{n + 1}{3(n - 2)}$

51. $\frac{4x}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7x}{12} - 14$

52. $\frac{11}{2x} + \frac{2}{4x} = \frac{1}{4}$

53. $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$

54. $\frac{1}{n - 2} = \frac{n}{8}$

55. الطلاء إذا كانت وفاء تستطيع طلاء غرفة في 6 ساعات. وتستطيع هنا طلاء الغرفة في 4 ساعات. فكم ستستغرقان من الوقت لطلاء الغرفة إذا عملتا معًا؟

مثال 5

حلّ المعادلة: $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$x(x + 3)\left(\frac{3}{x(x + 3)}\right) + x(x + 3)\left(\frac{x + 2}{x + 3}\right) = x(x + 3)\left(\frac{1}{x}\right)$

$3 + x(x + 2) = 1(x + 3)$

$3 + x^2 + 2x = x + 3$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ أو $x = -1$

الحل هو -1، ويوجد حل دخيل يساوي 0.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

1. $y = -\sqrt{x}$
2. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$
3. $y = \sqrt{x} + 5$
4. $y = \sqrt{x + 4}$

5. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما محيط دائرة مساحتها 64 سنتيمترًا مربعًا؟

A 64 سنتيمترًا

B 8 سنتيمترات

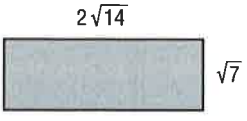
C 32 سنتيمترًا

D 16 سنتيمترًا

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $5\sqrt{36}$
7. $\frac{3}{1 - \sqrt{2}}$
8. $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$
9. $3\sqrt{6}(5\sqrt{2})$

10. **اختيار من متعدد** أوجد مساحة المستطيل.



F $7\sqrt{2}$

G 14

H $14\sqrt{2}$

J $98\sqrt{2}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

11. $\sqrt{10x} = 20$

12. $\sqrt{4x - 3} = 6 - x$

13. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة يبلغ حجمها حوالي $2564.7\ m^3$. يمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. إذا كان الارتفاع 21 سنتيمترًا، فأوجد نصف قطر الحاوية.

14. **حدد ما إذا كان كل جدول يعبر عن تغير عكسي. اشرح.**

x	y
2	10
4	12
8	14

أوجد الحل. افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*.

15. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 9$. فأوجد x عندما يكون $y = 1$

16. إذا كان $y = 2$ عندما يكون $x = 0.5$، فأوجد y عندما يكون $x = 3$.

افترض أن *y* يتغير عكسيًا مع *x*. أكتب معادلة تغير عكسي تربط بين *x* و *y*.

17. $y = 2$ عندما يكون $n\ x = 8$

18. $y = -3$ عندما يكون $x = 1$

19. **اختيار من متعدد** إذا كان حميد يستطيع إزالة الثلج من الممر في 3 ساعات، ويستطيع حمد القيام بذلك في ساعتين. فكم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

F 6 ساعات

G 5 ساعات

H $\frac{3}{2}$ ساعة

J $\frac{6}{5}$ ساعة

20. **الطلاء** إذا كان مازن يستطيع طلاء جدار قياسه 60 قدمًا مربعًا في 40 دقيقة. وإذا عمل مع صديقه جمال، فإنهما يستطيعان طلاء الجدار في 25 دقيقة. فكم سيستغرق جمال من الوقت لإكمال العمل بمفرده؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التحضير للاختبارات المعيارية

رسم صورة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل تصور كيفية حل المسألة إذا رسمت صورة أولاً. يمكنك رسم الصورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار الخاصة بك (إذا كان مسموحًا بذلك). ولكن انتبه ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما الكمية المجهولة التي يتعيّن عليّ الحلّ لإيجادها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ميّز الصورة بالأسماء بعناية. احرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك في تمثيل حالة المسألة بمعادلة. ثم حل المعادلة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

سلم طوله 5.5 أمتار يستند على بناء. من أجل الثبات، يجب أن تكون قاعدة السلم بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. فما الارتفاع الذي يصل السلم إليه على الجدار؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

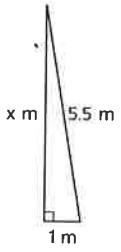
اقرأ نص المسألة بعناية. أنت تعرف ارتفاع السلم المستند على المبنى وتعرف أن قاعدة السلم يجب أن تكون بعيدة 100 سنتيمتر عن الجدار. وأنت تحتاج إلى إيجاد الارتفاع الذي يصل إليه السلم على الجدار.

مثال على إجابة من نقطتين:

حوّل جميع القياسات إلى الأقدام أولاً.

100 سنتيمتر = متر واحد

استخدم مثلثًا قائم الزاوية لإيجاد مدى الارتفاع الذي يبلغه السلم.
ارسم مثلثًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.



أنت تعرف قياسي إحدى الساقين والوتر، وتحتاج إلى معرفة طول الساق الأخرى.
إذًا، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس.

$$5.5^2 = 1^2 + b^2$$
$$30.25 = 1 + b^2$$
$$29.25 = b^2$$
$$\pm 5.4 = b$$
$$5.4 \approx b$$

100 سنتيمتر = متر واحد

يصل السلم إلى حوالي 5.4 أمتار.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**الدرجة**
الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	0

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

1. بناء يسقط ظلاً طوله 4.6 أمتار، بينما لوحة إعلانات تسقط ظلاً طوله 1.4 متر. فإذا كانت لوحة الإعلانات ارتفاعها 7.9 أمتار، فما ارتفاع البناء؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

2. مركبة فضائية تم توجيهها نحو القمر ولكنها انحرفت بمعدل 1.2° عن مسارها المقصود. وتبعد المسافة من الأرض إلى القمر حوالي 386,200 كيلومتر. فإذا لم يعد القائد بالمركبة الفضائية إلى مسارها، فما المسافة التي ستبعدها في انحرافها عن مكان هبوطها المقصود؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education. حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 3

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم أكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. في كل عام يتولى نادٍ محلي رعاية دورة التنس. ويبدأ اللعب بـ 256 مشاركًا. وخلال كل جولة، يتم إزالة نصف اللاعبين. فكم عدد اللاعبين الذين سيتبقون بعد 6 جولات؟

A 128

B 64

C 16

D 4

2. أوجد قيمة $\frac{5^5 - 5^6}{4}$.

F 5^6

G 5^5

H $\frac{5}{4}$

J $\frac{25}{4}$

3. أي من الأعداد التالية أصغر من الصفر؟

A 1.03×10^{-21}

B 7.5×10^{2}

C 8.21543×10^{10}

D لا شيء مما سبق

4. أكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع بميل $\frac{9}{10}$ والمقطع مع المحور y عند 3.

F $y = 3x + \frac{9}{10}$

G $y = \frac{9}{10}x + 3$

H $y = \frac{9}{10}x - 3$

J $y = 3x - \frac{9}{10}$

5. إذا كان بلال يلعب الألعاب في مركز ترفيهي للعائلات. وربح 38 بطاقة جائزة حتى الآن. فكم عدد البطاقات الإضافية التي يحتاج إلى الفوز بها ليضع نفسه في فئة الجائزة الذهبية؟

عدد البطاقات	فئة الجائزة
1-20	برونزية
21-40	فضية
41-60	ذهبية
61-80	بلاتينية

F $2 \le t \le 22$

G $3 \le t \le 22$

H $1 \le t \le 20$

J $3 \le t \le 20$

6. أي مما يلي هي معادلة المستقيم العمودي على $4x - 2y = 6$ والمار بالنقطة $(4, -4)$؟

F $y = -\frac{3}{4}x + 3$

G $y = -\frac{3}{4}x - 1$

H $y = -\frac{1}{2}x - 4$

J $y = -\frac{1}{2}x - 2$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

أكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. **الإجابة الشبكية** اشترى أ. عبد الله إجمالي 9 تذاكر إلى حديقة الحيوان. واشترى تذاكر أطفال بسعر AED 6.50 وتذاكر بالغين بسعر AED 9.25 لكل فرد. فإذا أنفق AED 69.50 إجمالاً، فكم عدد تذاكر البالغين التي اشتراها أ. عبد الله؟

8. ما مجال العلاقة التالية؟
$\{(2, -1), (4, 3), (7, 6)\}$

9. أضاف رشيد 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص به، ليصبح إجمالي الأناشيد أكثر من 84 نشيدًا. ارسم خط أعداد يمثل العدد الأصلي للأناشيد التي كانت على مشغل الوسائط الرقمي الخاص برشيد.

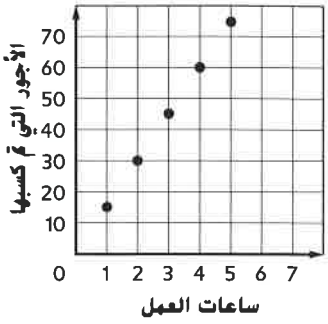
10. اشترى خليفة لوحة نادرة في عام 1995 مقابل AED 14,200. وبحلول 2003، أصبحت قيمة اللوحة AED 17,120. بافتراض وجود علاقة خطية، أكتب دالة في صيغة الميل والمقطع تمثل قيمة اللوحة V بعد t أعوام.

11. أنفق أحمد AED 24.50 على شراء الفول السوداني والجوز من أجل حفل عشاء. واشترى 1.5 كيلوجرام من الفول السوداني زيادة عن الجوز. فكم عدد كيلوجرامات الفول السوداني والجوز التي اشتراها؟

ناتج الضرب	السعر لكل كيلوجرام
فول سوداني p	AED 3.80
كاجو c	AED 6.90
جوز w	AED 5.60

12. **الإجابة الشبكية** اشترت موزة سيارة منذ عدة أعوام مضت بسعر AED 21,459. وتعرضت السيارة للإهلاك بمعدل 15% سنويًا. فكم بلغت قيمة السيارة بعد 5 أعوام؟ قرّب إجابتك إلى أقرب درهم.

13. **الإجابة الشبكية** المبلغ الذي يجنيه ناصر يتغير طرديًا مع عدد الساعات التي يعمل فيها كما هو مبين في التمثيل البياني. فكم المبلغ الذي سيحققه مقابل عمل 40 ساعة الأسبوع المقبل؟ أكتب الإجابة بالدولارات.



الإجابة الموسعة

أكتب إجاباتك على ورقة. أكتب الحل هنا.

14. الأجرة الثابتة لركوب السيارة الأجرة هي AED 3 زائد AED 0.35 لكل كيلومتر. دفعت ميسون AED 10 مقابل توصيلها لمسافة m كيلومترات.

الجزء A أكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد m. أكتب الحل هنا.

الجزء B استخدم المعادلة المستمدة من الجزء A لاكتشاف عدد الكيلومترات التي ركبت من أجلها ميسون. أكتب الحل هنا.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education. حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4

علاقات المثلثات

السابق	الحالي	لماذا؟ ▲
● تعلمت من قبل كيفية تصنيف المثلثات.	● بعد دراستك لهذه الوحدة، ستكون قادرًا على: ▪ التعرف على القطع المستقيمة الخاصة والنقاط المرتبطة بالمثلثات. ▪ التعرف على العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات. ▪ التعرف على طريقة كتابة البراهين غير المباشرة.	● **تصميم الديكور الداخلي** تستخدم علاقات المثلث لإيجاد قياسات الزوايا والمسافات ومقارنتها. ويستخدم مصممو الديكور الداخلي علاقات المثلثات لزيادة الكفاءة إلى الحد الأقصى وإحداث توازن في تصاميمهم.

الاستعداد للوحدة

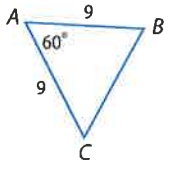
1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

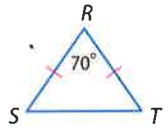
مراجعة سريعة

أوجد قياس كل مما يلي.

1. BC



2. $m\angle RST$



3. **الحدائق** يصمم خميس حوض أزهار على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول ضلعين من أضلاع حوض الأزهار يساوي 7 أقدام، فما طول الضلع الثالث مع التقريب إلى أقرب قدم؟

خمّن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة.

4. $\angle 3$ و $\angle 4$ تشكلان زوجًا خطيًا.
5. $JKLM$ عبارة عن مربع.
6. $\overrightarrow{BD}$ عبارة عن منصف للزاوية $\angle ABC$.
7. **الاستنتاج** حدد إذا ما كان الاستنتاج التالي صحيحًا *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم غير صحيح على الإطلاق استنادًا إلى المعلومات المعطاة. علل استنتاجك.

المعطيات: تقع النقاط D، و E، و F على مستقيم واحد

التخمين: $DE + EF = DF$

حُلّ كل متباينة مما يلي.

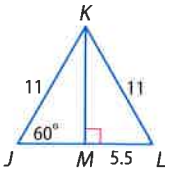
8. $x + 13 < 41$
9. $x - 6 > 2x$
10. $6x + 9 < 7x$
11. $8x + 15 > 9x - 26$
12. **الأناشيد** أضافت غادة 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل MP3 الخاص بها، ليصل الإجمالي إلى أكثر من 120 نشيد. كم عدد الأناشيد التي كانت على المشغل في الأساس؟

تدريب سريع

مثال 1

أوجد قياس كل مما يلي.

a. JM



$m\angle J = m\angle L$، إذا $m\angle L = 60$ و $\overline{JM} \cong \overline{LM}$ حسب عكس نظرية المثلث متساوي الساقين. بما أن $LM = 5.5$، فإن $JM = 5.5$ عن طريق التعويض.

b. $m\angle JKL$

$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180$	نظرية الجمع △
$60 + m\angle JKL + 60 = 180$	$m\angle J = m\angle L = 60$
$120 + m\angle JKL = 180$	بسّط
$m\angle JKL = 60$	اطرح

مثال 2

K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. خمّن بالاستناد إلى المعلومات المعطاة وارسم شكلاً يصور تخمينك.

المعطيات: K هو نقطة منتصف $\overline{JL}$. J، K، و L هي نقاط على خط واحد، ويقع K على مسافة متساوية بين J و L.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

التحقّق: ارسم $\overline{JL}$. وهذا يصور التخمين.

مثال 3

حُلّ المتباينة $3x + 5 > 2x$.

$3x + 5 > 2x$	مُعطى
$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$	اطرح
$5 > -x$	بسّط
$-5 < x$	اقسِم

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

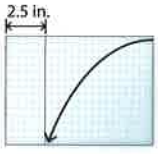
البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 6. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

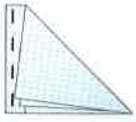
علاقات المثلثات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على الوحدة 4 حول علاقات المثلثات. ابدأ باستخدام سبع ورقات من ورق الرسم البياني.

1 **اجمع** الورق فوق بعضه. اطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلية لتشكيل مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية.

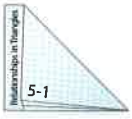


2 **اطوِ** الجزء المستطيل إلى نصفين.

3 **قم** بتثبيت الورق بطول الثنية المستطيلة الشكل في أربعة أماكن.



4 **قم** بتسمية كل ورقة برقم أحد الدروس، والتبويب مستطيل الشكل بعنوان الوحدة.



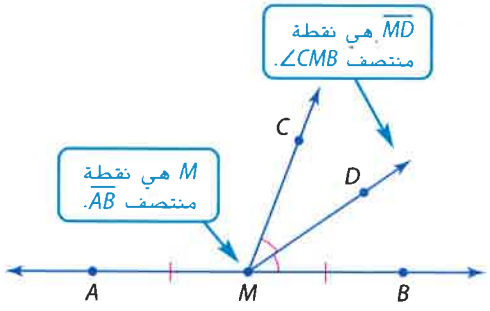
المفردات الجديدة

- منصف عمودي (perpendicular bisector)
- مستقيمات متلاقية (concurrent lines)
- نقطة الالتقاء (point of concurrency)
- مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)
- مركز الدائرة الداخلية (incenter)
- متوسط (median)
- نقطة مركزية (centroid)
- ارتفاع (altitude)
- ملتقى الارتفاعات (orthocenter)
- تبرير غير مباشر (indirect reasoning)
- برهان غير مباشر (indirect proof)
- برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

منصف الزوايا هو عبارة عن شعاع يقسّم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين

نقطة المنتصف هي النقطة الموجودة على قطعة مستقيمة بمنتصفها تمامًا بين أطرافها



4-1 مختبر الهندسة
إنشاء المنصفات

يمكن استخدام طي الأوراق لإنشاء قطع مستقيمة خاصة في المثلثات.

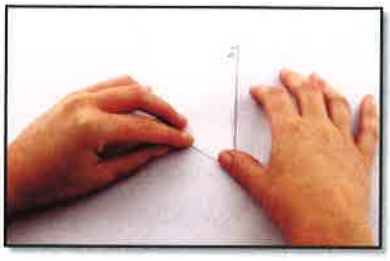
الإنشاء منصف عمودي

أنشئ منصفًا عموديًا على أحد أضلاع المثلث.

الخطوة 1

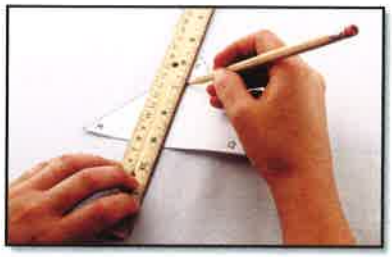
ارسم $\triangle MPQ$، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث من منتصفه $\overline{MQ}$ بحيث تلمس الرأس M الرأس Q.

الخطوة 3



استخدم مسطرة لرسم $\overline{AB}$ بطول الثنية. $\overline{AB}$ هو المنصف العمودي على $\overline{MQ}$.

منصف زاوية المثلث هو مستقيم يمر برأس المثلث ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

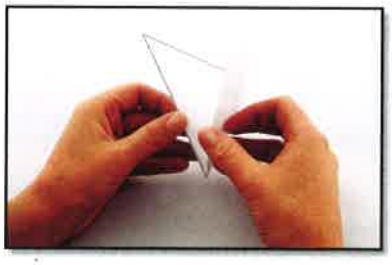
الإنشاء منصف الزاوية

أنشئ منصف زاوية لأي مثلث.

الخطوة 1

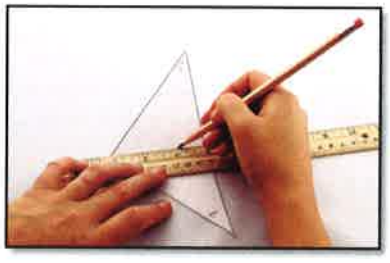
ارسم $\triangle ABC$، وقم بتسميته وقصه.

الخطوة 2



اطوي المثلث إلى نصفين من الرأس A، بحيث يكون الضلعان $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ محاذيين لبعضهما.

الخطوة 3



حدد النقطة L في الثنية بطول الحافة $\overline{BC}$. استخدم مسطرة لرسم $\overline{AL}$ بطول الثنية. $\overline{AL}$ هو منصف زاوية في $\triangle ABC$.

النموذج والتحليل

1. أنشئ منصفين عموديين على الضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. أنشئ منصفين للزوايا على الزاويتين الأخريين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ بشأن تقاطعهما؟

كرر طريقتي الإنشاء لكل نوع من المثلثات.

2. حاد
3. منفرج
4. قائم

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 4-1

منصفات المثلثات

السابق:
- لقد استخدمت مُنصِّفات القطع المستقيمة والزوايا.

الحالي:
1 تحديد المُنصِّفات العمودية في المثلثات واستخدمها.
2 تحديد مُنصِّفات الزوايا في المثلثات واستخدمها.

لماذا؟
- إن إنشاء مثلث عمل في المطبخ من شأنه تحسين كفاءة عملية تحضير الطعام من خلال تقليل عدد الخطوات التي ينبغي اتخاذها. لتحديد النقطة التي تقع على مسافة واحدة من الحوض ومن الفرن ومن الثلاجة، يمكنك استخدام المُنصِّفات العمودية للمثلث.

المفردات الجديدة

مُنصِّف عمودي (perpendicular bisector)

المستقيمات المتقاطعة (concurrent lines)

نقطة التقاطع (point of concurrency)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

مركز الدائرة الداخلية (incenter)

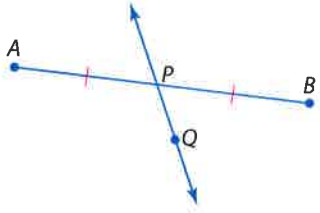
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

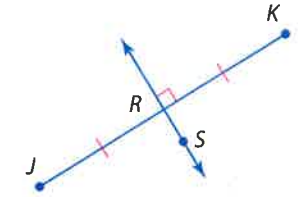
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المُنصِّفات العمودية

لقد تعلمت أن المستقيم المُنصِّف هو أي قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة بمنتصفها. إذا كان المُنصِّف عمودي أيضًا على القطعة المستقيمة، فإنه يُسمى **مُنصِّف عمودي**.



$\overline{AB}$ هو منصف $\overleftrightarrow{PQ}$.



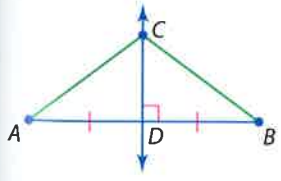
$\overline{JK}$ هو منصف عمودي لـ $\overleftrightarrow{RS}$

تذكر أن *المحل الهندسي* هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا مُعينًا. كما أن المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة هو محل هندسي لنقاط في مستوى تقع على مسافة واحدة من أطراف القطعة المستقيمة. هذا ينقلنا إلى النظريات التالية.

نظريات المُنصِّفات العمودية

4.1 نظرية المُنصِّفات العمودية

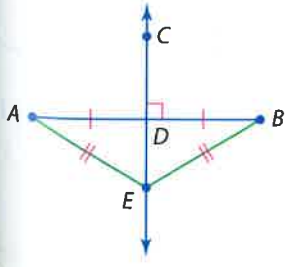
إذا وُجدت نقطة على المُنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة ما، إذًا فهي تقع على مسافة واحدة من طرفي القطعة المستقيمة.



مثال: إذا كان $\overline{CD}$ هو مُنصِّف $\perp$ $\overline{AB}$، إذًا $AC = BC$.

4.2 عكس نظرية المُنصِّفات العمودية

إذا وُجدت نقطة تقع على مسافة واحدة من طرفي قطعة مستقيمة ما، إذًا فهي على المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة.



مثال: إذا كان $AE = BE$، إذًا E تقع على $\overline{CD}$. المُنصِّف $\perp$ لـ $\overline{AB}$.

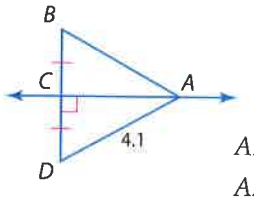
سوف تقوم بإثبات نظريتي 4.1 و 4.2 من خلال التمرينين 39 و 37، على الترتيب.

McGraw-Hill Education

مثال 1 استخدام نظريات المُنصِّفات العمودية

أوجد قياس كل مما يلي.

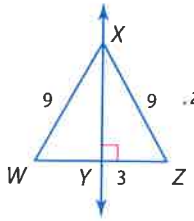
a. AB



من المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{BD}$.

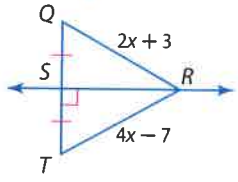
$AB = AD$	نظرية المُنصِّف العمودي
$AB = 4.1$	تعويض

b. WY



بما أن $WX = ZX$ و $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$, $\overleftrightarrow{XY}$ هو المُنصِّف العمودي لـ $\overline{WZ}$ وفقًا لعكس نظرية المُنصِّف العمودي. وفقًا لتعريف مُنصِّف القطعة المستقيمة، $WY = YZ$. بما أن $WY = 3$, $YZ = 3$.

c. RT

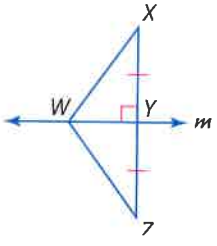


$\overleftrightarrow{SR}$ هو مُنصِّف عمودي لـ $\overline{QT}$.

$RT = RQ$	نظرية المُنصِّف العمودي
$4x - 7 = 2x + 3$	بالتعويض
$2x - 7 = 3$	طرح $2x$ من كل طرف
$2x = 10$	اجمع 7 لكل طرف
$x = 5$	اقسم كل طرف على 2

فإن $RT = 4(5) - 7$ أو 13.

تمرين موجه



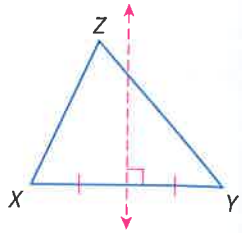
1A. إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$ و $WZ = 25.3$ أوجد XY.

1B. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ و $WZ = 14.9$، فأوجد WX.

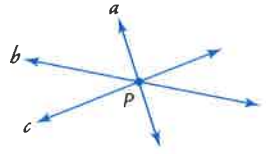
1C. إذا كان m هو المُنصِّف العمودي لـ XZ، $WX = 4a - 15$ و $WZ = a + 12$ فأوجد WX.

نصيحة دراسية

المُنصِّفات العمودية ليس بالضرورة أن يمر المُنصِّف العمودي لأحد أضلاع المثلث برأس المثلث. على سبيل المثال، في $\triangle XYZ$ أدناه، نجد أن المُنصِّف العمودي لـ $\overline{XY}$ لا يمر بالنقطة Z.



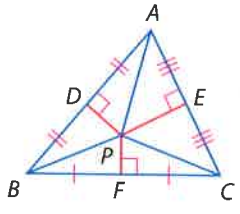
عندما تتقاطع ثلاث مستقيمات أو أكثر عند نقطة مشتركة، فإن المستقيمات تُسمى **مستقيمات متقاطعة**. والنقطة التي تتقاطع بها المستقيمات المتقاطعة تُسمى **نقطة التقاطع**.



الخطوط a, b, c متقاطعة عند النقطة P.

بما أن للمثلث ثلاثة أضلاع، فإن لديه ثلاث مُنصِّفات عمودية. تعتبر المُنصِّفات مستقيمات متقاطعة. وتُسمى نقطة تقاطع المُنصِّفات العمودية **نقطة تقاطع مُنصِّفات** أضلاع المثلث.

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة المحيطة

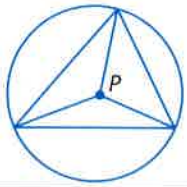


الشرح تتقاطع المُنصِّفات العمودية لأضلاع المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة المحيطة* بحيث تكون على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

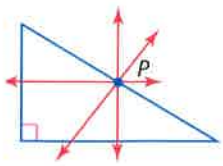
مثال إذا كانت P هي نقطة تقاطع المُنصِّفات لـ $\triangle ABC$، إذًا $PB = PA = PC$.

قراءة في الرياضيات

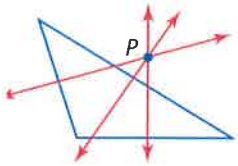
المحيط- كلمة المحيط- تعني الشيء الذي يكون من جميع الجهات أو الإطار الخارجي. فنقطة تقاطع المُنصِّفات هي مركز الدائرة التي تمس رؤوس المثلث من الخارج.



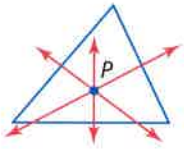
قد تقع نقطة تقاطع المُنصِّفات داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم

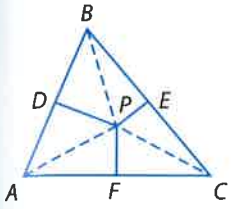


مثلث منفرج



مثلث حاد

إثبات نظرية مركز الدائرة المحيطة



المعطيات: $\overline{PD}$ و $\overline{PF}$ و $\overline{PE}$ هم مُنصِّفات عمودية لـ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$، على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

الفقرة الإثباتية:

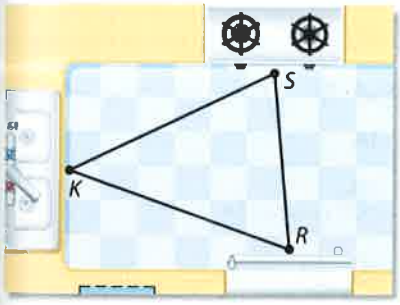
بما أن P يقع على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{AC}$، فإنها تكون على مسافة واحدة من A و C. باستخدام تعريف المسافة الواحدة، $AP = CP$. تقع P على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{BC}$. فإن، $CP = BP$. باستخدام خاصية التعدي في المساواة، $AP = BP$. فإن، $AP = CP = BP$.

الربط بالحياة اليومية

من إحدى القواعد الأساسية لمساحة العمل المثلثة بالمطبخ هي ألا تكون أضلاع المثلث أكبر من 9 أقدام وألا تكون أقل من 4 أقدام. كما لا ينبغي أن يكون محيط المثلث أكبر من 26 قدمًا أو أقل من 12 قدمًا.

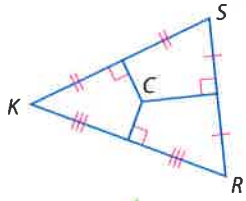
المصدر: شركة ميريلات

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة



تصميم داخلي فرن S، حوض K، و ثلاجة R موضوعة في مطبخ بالشكل الموضح. أوجد موقعًا متوسطًا لطاولة تحضير الطعام بحيث تكون على مسافة واحدة من هذه النقاط الثلاث.

باستخدام نظرية مركز الدائرة المحيطة، يمكن إيجاد نقطة تقع على مسافة واحدة من ثلاث نقاط باستخدام المُنصِّفات العمودية للمثلث الذي تشكل هذه النقاط الثلاث رؤوسه.



انسخ $\triangle SKR$، واستخدم مسطرة ومنقلة لرسم المُنصِّفات العمودية. موقع المركز الذي ستوضع فيه الطاولة هو C، نقطة تقاطع مُنصِّفات $\triangle SKR$.

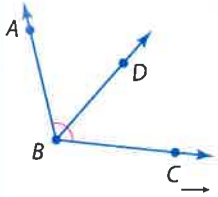
تمرين موجه

2. يحتاج جاسم عند ري حديقته المثلثة إلى وضع آلة رش على مسافة واحدة من كل رأس من رؤوس مثلث الحديقة. أين ينبغي على جاسم وضع آلة الرش؟

2 مُنصِّفات الزاوية

تذكر أن مُنصِّف الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين. قد يكون مُنصِّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو شعاعًا.

يمكن وصف مُنصِّف الزاوية بأنه محل هندسي للنقاط الموجودة داخل الزاوية التي تقطع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية. ينقلنا هذا الوصف إلى النظريات التالية.

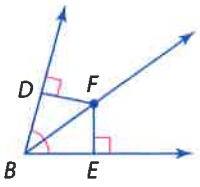


$\overrightarrow{BD}$ هو منصف الزاوية $\angle ABC$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

نظريات مُنصِّفات الزاوية

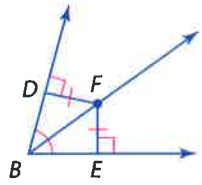
4.4 نظرية مُنصِّفات الزاوية



إذا وُجدت نقطة على مُنصِّف زاوية ما، فإنها تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$، $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$، و $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$، فإن $DF = FE$.

4.5 معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية



إذا وُجدت نقطة داخل الزاوية تقع على مسافة واحدة من ضلعي الزاوية، فإنها تقع على مُنصِّف الزاوية.

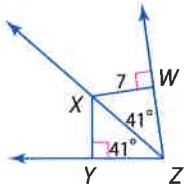
مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$، و $DF = FE$، فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle DBE$.

سوف تقوم بإثبات النظريتين 4.4 و 4.5 من خلال التمرينين 43 و 40.

مثال 3 استخدام نظريات مُنصِّف الزاوية

أوجد قياس كل مما يلي.

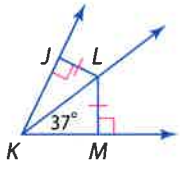
a. XY



$XY = XW$ نظرية مُنصِّف الزاوية

$XY = 7$ بالتعويض

b. $m\angle JKL$



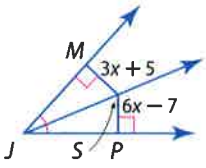
بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$، $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$، $\overline{LJ} \cong \overline{LM}$، L يقع على مسافة واحدة من ضلعي $\angle JKM$. باستخدام معكوس نظرية مُنصِّف الزاوية نظرية $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف مُنصِّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37$ بالتعويض

c. SP



$SP = SM$ نظرية مُنصِّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ بالتعويض

$3x - 7 = 5$ طرح $3x$ من كل جانب.

$3x = 12$ اجمع 7 مع كل طرف.

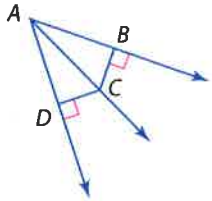
$x = 4$ اقسم كل طرف على 3.

إذًا، $SP = 6(4) - 7$ أو تساوي 17

نصيحة دراسية

مُنصِّف الزاوية بالنسبة للجزء b، فإن عدم توفر أي معطيات سوى أن $JL = LM$ لن يكون كافيًا لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ تنصف $\angle JKM$.

تمرين موجه



3A. إذا كان $m\angle BAC = 38, BC = 5, DC = 5$، فأوجد $m\angle DAC$.

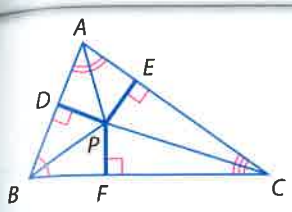
3B. إذا كان $m\angle BAC = 40, m\angle DAC = 40, DC = 10$، فأوجد BC.

3C. إذا كان $\overrightarrow{AC}$ تنصف $\angle DAB$، $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$، فأوجد BC.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ونفس الشيء ينطبق على المُنصّفات العمودية، فبما أن المثلث له ثلاث زوايا، فإن له أيضًا ثلاث مُنصّفات زوايا. إن مُنصّفات زاوية المثلث متقاطعة، ونقطة تقاطعها تُسمى **مركز الدائرة الداخلية** للمثلث.

نظرية 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية



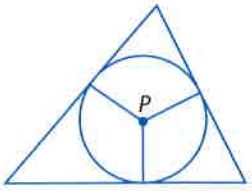
الشرح تتقاطع مُنصّفات زوايا المثلث في نقطة تُسمى *مركز الدائرة الداخلية* بحيث تكون على مسافة واحدة من أضلاع المثلث.

مثال إذا كانت النقطة P هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$، فإن $PD = PE = PF$.

سوف تثبت النظرية 4.6 في تمرين 338

قراءة في الرياضيات

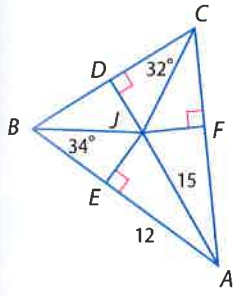
مركز الدائرة الداخلية هو مركز الدائرة التي تتقاطع مع كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. لهذا السبب، يقع مركز الدائرة الداخلية دائمًا داخل المثلث.



مثال 4 استخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية

أوجد قياس كل مما يلي إذا علمت أنَّ J هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a. JF



باستخدام نظرية مركز الدائرة الداخلية، بما أن $JF = JE$ وبما أن J تقع على مسافة واحدة من أضلاع $\triangle ABC$. أوجد JF باستخدام نظرية فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$JE^2 + 144 = 225$	$15^2 = 225$ و $12^2 = 144$
$JE^2 = 81$	بطرح 144 من كل طرف
$JE = \pm 9$	بحساب الجذر التربيعي من كل طرف

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، استخدم الجذر التربيعي الموجب فقط وهو 9.
بما أن $JE = JF$، $JF = 9$.

b. $m\angle JAC$

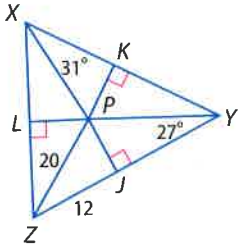
بما أن $\overrightarrow{BJ}$ تنصف $\angle CBE$، $m\angle CBE = 2m\angle JBE$. إذًا $m\angle CBE = 2(34)$ أو 68.
وبالمثل، $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$. إذًا $m\angle DCF = 2(32)$ أو تساوي 64.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$68 + 64 + m\angle FAE = 180$	$m\angle CBE = 68, m\angle DCF = 64$
$132 + m\angle FAE = 180$	بسّط
$m\angle FAE = 48$	بطرح 132 من كل طرف

بما أن $\overrightarrow{AJ}$ تنصف $\angle FAE$، $2m\angle JAC = m\angle FAE$. فهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2}m\angle FAE$ إذًا $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48)$ أو 24.

تمرين موجه

إذا كانت P هي المركز الداخلي لـ $\triangle XYZ$، أوجد قياس كل مما يلي.



4A. PK

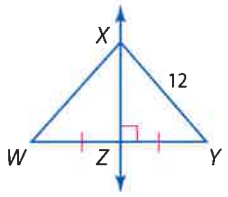
4B. $m\angle LZP$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

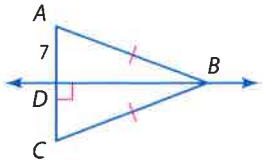
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

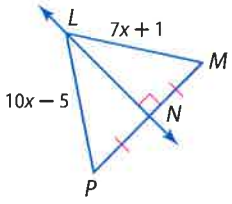
1. XW



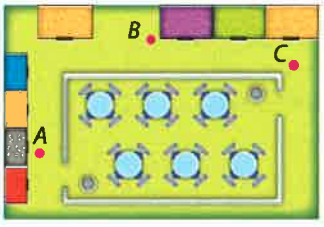
2. AC



3. LP

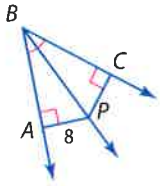


مثال 2 **4. إعلان** أربع صديقات يتبادلن النشرات الإعلانية بساحة طعام بأحد المراكز التجارية. أخذت ثلاث منهن ما استطعن جمعه من النشرات الإعلانية وجلسن كما هو موضح. تحتفظ الصديقة الرابعة بمخزون إضافي من النشرات الإعلانية. انسخ مواضع النقاط A, B, C. ثم عيّن موقع الصديقة الرابعة عند النقطة D حتى تكون على مسافة واحدة من الصديقات الثلاث الأخريات.

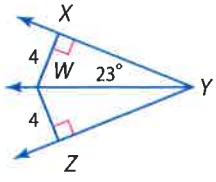


مثال 3 **أوجد قياس كل من الآتي.**

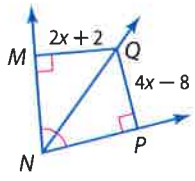
5. CP



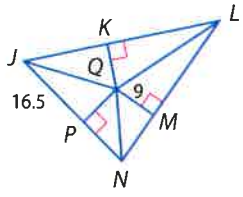
6. $m\angle WYZ$



7. QM



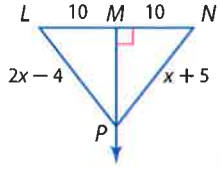
مثال 4 **8. الاستنتاج المنطقي** أوجد JQ إذا كانت Q هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$.



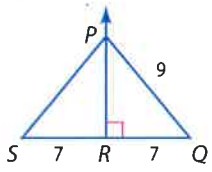
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد قياس كل مما يلي.**

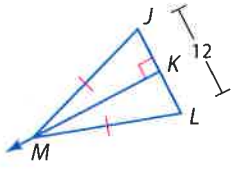
9. NP



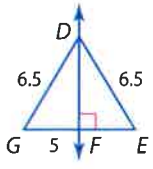
10. PS



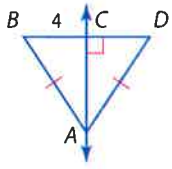
11. KL



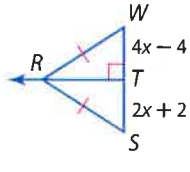
12. EG



13. CD



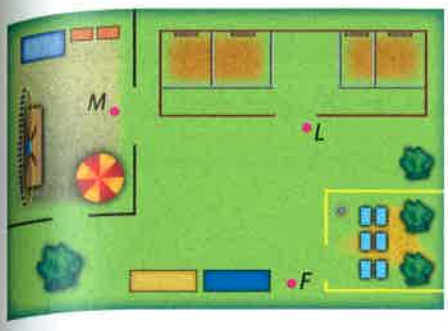
14. SW



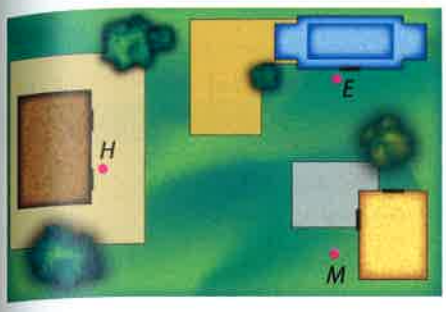
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

مثال 2

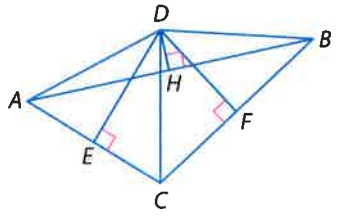
15. **المعرض الوطني** تم تحديد مواقع جناح الملاهي ومسابقات الماشية وبائعي المواد الغذائية في المعرض الوطني.
قرر المخططون للمعرض وضع دورات المياه المتنقلة على مسافة واحدة من كل موقع. انسخ مواضع النقاط *M*, *L* و *F*.
ثم أوجد موقع دورات المياه وسمها النقطة *R*.



16. **المدرسة** أنشأت إدارة مجمع مدارس مبنى للحلقة الاولى وآخر للحلقة الثانية وآخر للحلقة الثالثة كما هو موضح بالرسم التخطيطي.
انسخ مواضع النقط *E*, *M* و *H*. ثم أوجد موقع ساحة الحافلات *B* التي ستخدم هذه المدارس الثلاثة بحيث تكون الساحة على نفس المسافة من كل المدارس.



النقطة *D* هي مركز الدائرة المحيطة لـ $\triangle ABC$. اذكر أي القطع المستقيمة تتطابق مع القطع المستقيمة الأخرى.



17. $\overline{AD}$

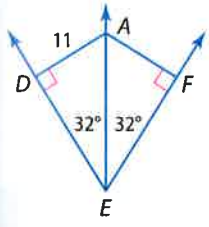
18. $\overline{BF}$

19. $\overline{AH}$

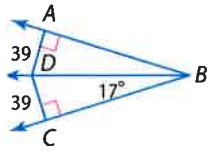
20. $\overline{DC}$

أوجد قياس كل مما يلي.

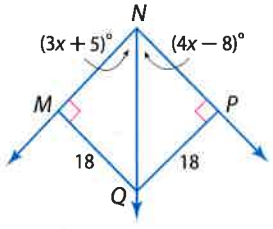
21. AF



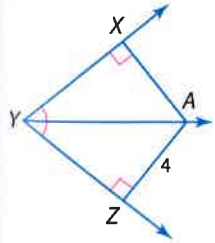
22. $m\angle DBA$



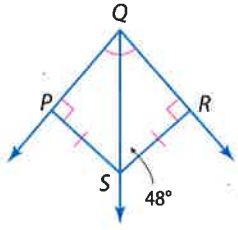
$m\angle PNM$



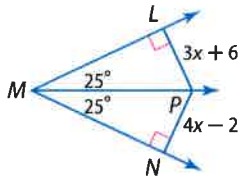
24. XA



25. $m\angle PQS$

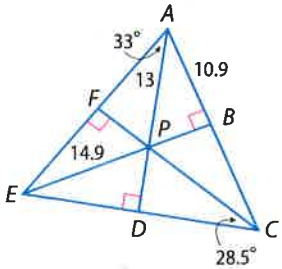


26. PN



مثال 4

الاستنتاج المنطقي النقطة *P* هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$. أوجد قياس كل مما يلي.



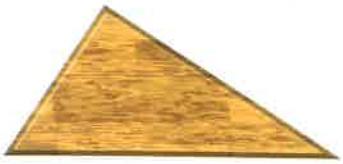
27. PB

28. DE

29. $m\angle DAC$

30. $m\angle DEP$

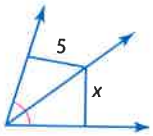
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



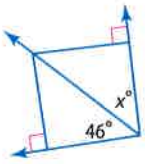
تصميم داخلي إذا أردت وضع مزهرية على طاولة ركنية بحيث تكون على مسافة واحدة من جميع حواف الطاولة. اصنع رسمًا تخطيطيًا لتوضيح موقع المزهرية. اشرح استنتاجك.

حدد ما إذا كانت المعلومات المعطاة بكل رسم تخطيطي كافية لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.

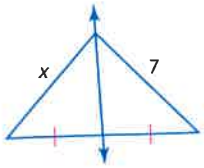
32.



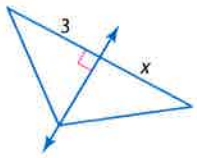
33.



34.



35.



36. كرة قدم يتجه لاعب كرة القدم P إلى مرمى الفريق الخصم كما هو موضح بالرسم التخطيطي. لإحراز الهدف، ينبغي على اللاعب ركل الكرة بين عارضتي المرمى عند النقطتين L و R. يقف حارس المرمى أمام اللاعب. ثم حاول الحارس الوقوف بطريقة تساعده على القفز بجسده لإيقاف الركلة، بحيث يبعد عن الضلع الأيسر لزاوية التسديد بنفس المسافة التي يبعد بها عن الضلع الأيمن لزاوية التسديد.

a. صف الموقع الذي ينبغي على الحارس الوقوف عنده. اشرح استنتاجك.

b. انسخ $\triangle PRL$. استخدم منقلة ومسطرة لتحديد النقطة G التي ينبغي على الحارس الوقوف عندها.

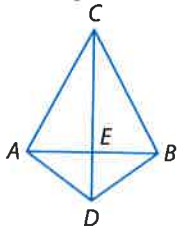
c. إذا تم ركل الكرة لتتبع المسار من P إلى R، حدد أقصر مسار ينبغي على حارس المرمى اتباعه لصد الركلة. اشرح استنتاجك.

الإثبات اكتب إثباتًا من عمودين.

37. النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

الإثبات: تقع النقطتان C و D على العمودي $\overline{AB}$

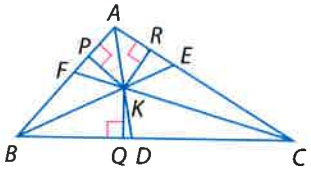


38. النظرية 4.6

معطى: مُنصِّفات زوايا $\triangle ABC$، $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$

$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC}, \overline{KR} \perp \overline{AC}$

الإثبات: $KP = KQ = KR$



الفرضيات اكتب الفقرة الإثباتية لكل نظرية.

39. النظرية 4.1

40. النظرية 4.5

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة بالأطراف المعطاة. علل إجابتك.

41. $A(-3, 1)$ و $B(4, 3)$

42. $C(-4, 5)$ و $D(2, -2)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

43. الإثبات اكتب إثباتًا من عمودين للنظرية 4.4.

44. تصميم بياني تقوم خولة بتصميم علم مثلث لمدرستها. فهي تريد وضع صورة لشعار المدرسة داخل دائرة في العلم الرياضي. انسخ رسمة العلم المثلث وحدد موقع النقطة التي ستكون مركز الدائرة لعمل أكبر دائرة ممكنة. علل رسمك.

هندسة إحداثية حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة للمثلث ذي الرؤوس المعطاة. اشرح.

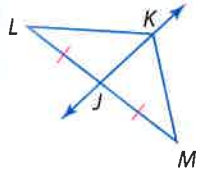
45. $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$

46. $J(5, 0), K(5, -8), L(0, 0)$

47. محل هندسي فكر في $\overline{CD}$. صف مجموعة كل النقاط الموجودة في الفراغ الواقع على مسافة واحدة من C و D.

مهارات التفكير العليا مسائل

48. تحليل الخطأ يقول حليم إنه بعد اطلاعه على المعلومات المبينة بالرسم التخطيطي، يمكنه استنتاج أن K تقع على المُنصِّف العمودي لـ $\overline{LM}$. لا يوافق حمادة على هذا الرأي. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



49. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثلثًا به مركز دائرة داخلية يقع داخل المثلث ولكن مع وجود مركز الدائرة المحيطة خارج المثلث. برر رسمك باستخدام مسطرة ومنقلة لإيجاد نقطتي التقاطع.

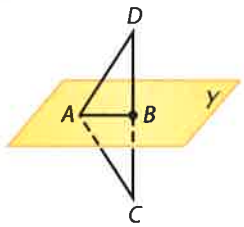
فرضيات حدّد ما إن كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا أو صحيحة دائمًا*، أو غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك باستخدام مثال مضاد أو إثبات.

50. تتقاطع مُنصِّفات زوايا المثلث في نقطة تقع على مسافة واحدة من رؤوس المثلث.

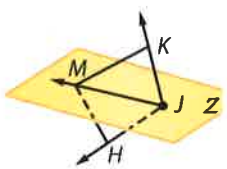
51. في المثلث المتساوي الساقين، يكون المُنصِّف العمودي للقاعدة هو أيضًا مُنصِّف زاوية الرأس المقابل.

تحدَّ اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ من التالي.

52. المعطيات: المستوى Y عمودي على $\overline{DC}$ مُنصِّف $\angle ADB$.
الإثبات: $\angle ADB \cong \angle ACB$



53. المعطيات: المستوى Z هو مُنصِّف زاوية $\angle KJH$, $\overline{KJ} \cong \overline{HJ}$
اثبت أن: $\overline{MH} \cong \overline{MK}$



54. الكتابة في الرياضيات قارن بين المُنصِّفات العمودية ومُنصِّفات زوايا المثلث. ما أوجه الشبه بينها؟ وما أوجه الاختلاف بينها؟ تأكد من مقارنة نقاط تقاطعها.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين على الاختبار المعياري

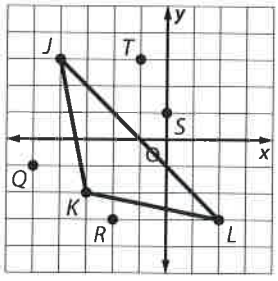
55. الجبر تم رمي جسم لأعلى بسرعة ابتدائية v متر في الثانية ومن ارتفاع ابتدائي s متر. يُقدر الارتفاع h بالأمتار للجسم بعد t ثانية بالمعادلة $h = -10t^2 + vt + s$. تقف رنا على حافة شرفة ترتفع 54 مترًا عن سطح الأرض ورمت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 12 مترًا في الثانية. بعد كم ثانية سترتطم الكرة بالأرض؟

A 3 ثوانٍ
B 4 ثوانٍ
C 6 ثوانٍ
D 9 ثوانٍ

56. SAT/ACT حيث $x \neq -3$, $\frac{3x+9}{x+3} =$

F $x + 12$
G $x + 9$
H $x + 3$
J x
K 3

57. أيّ من النقاط التالية يمكن رسم مستقيم يمر بها بحيث يكون المستقيم مُنصِّفًا عموديًا لـ $\triangle JKL$؟



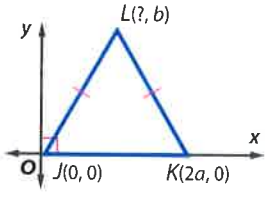
A T و K
B L و Q
C J و R
D S و K

58. إجابة مختصرة اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تصف المستقيم الذي تقع عليه النقطتين $(0, -1)$ و $(4, 2)$.

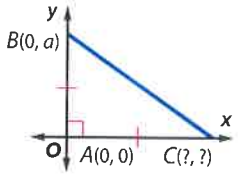
مراجعة شاملة

عين الإحداثيات المفقودة لكل مثلث.

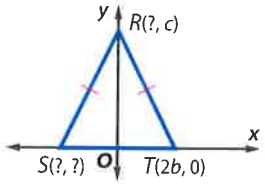
59.



60.



61.



هندسة إحداثية ارسم كل زوج من المثلثات بالرؤوس المعطاة. ثم حدد التحويل الهندسي وتحقق من أنه عبارة عن تحويل هندسي متطابق.

62. $A(-2, 4)$, $B(-2, -2)$, $C(4, 1)$; $R(12, 4)$, $S(12, -2)$, $T(6, 1)$

63. $J(-3, 3)$, $K(-3, 1)$, $L(1, 1)$; $X(-3, -1)$, $Y(-3, -3)$, $Z(1, -3)$

أوجد المسافة من المستقيم إلى النقطة المعطاة.

64. $y = 5$, $(-2, 4)$

65. $y = 2x + 2$, $(-1, -5)$

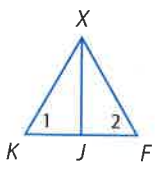
66. $2x - 3y = -9$, $(2, 0)$

67. الهندسة الصوتية يقوم مهندس الاستوديو بتحصيل رسوم ثابتة بمقدار AED 450 مقابل تأجير المعدات و AED 42 مقابل ساعة من التسجيل والتجهيز. اكتب المعادلة التي توضح تكلفة تأجير مهندس الاستوديو كدالة زمنية. كم قد يُكلف تأجير مهندس الاستوديو لمدة 17 ساعة؟ (الدرس 3-4)

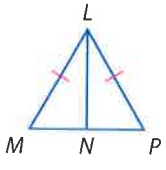
مراجعة المهارات

إثبات اكتب برهاناً من عمودين لكلٍ مما يلي.

68. المعطيات: $\triangle XKF$ متساوي الأضلاع.
$\overline{XJ}$ تنصف $\angle X$.
المطلوب: J هي نقطة منتصف $\overline{KF}$.



69. المعطيات: $\triangle MLP$ متساوي الساقين.
N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$.
المطلوب: $\overline{LN} \perp \overline{MP}$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

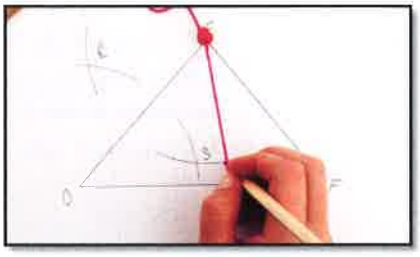
4-2 مختبر الهندسة
إنشاء المتوسطات والارتفاعات

المتوسط في المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة طرفها رأس المثلث والطرف الآخر هو منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس. يمكنك إنشاء متوسط من خلال تحديد نقطة منتصف على قطعة مستقيمة.

لف طرف خيط حول قلم رصاص. واستخدم دبوسًا لتثبيت الخيط بالرأس.

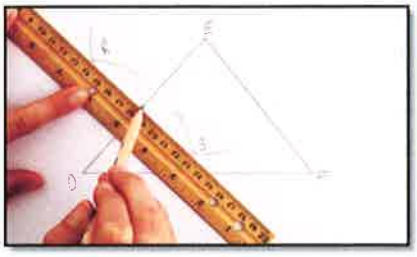
الإنشاء 1 متوسط المثلث

الخطوة 1



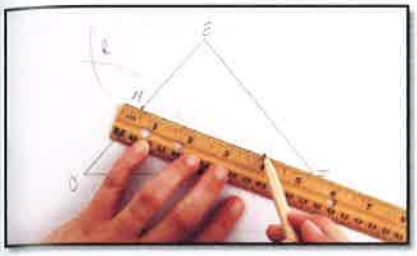
ضع الدبوس على الرأس D ثم على الرأس E لرسم أقواس متقاطعة أعلى وأسفل $\overline{DE}$. اكتب على نقاط التقاطع R و S.

الخطوة 2



استخدم مسطرة لإيجاد النقطة الناشئة من تقاطع $\overline{RS}$ مع $\overline{DE}$. اكتب على النقطة M. هذه هي نقطة المنتصف في $\overline{DE}$.

الخطوة 3

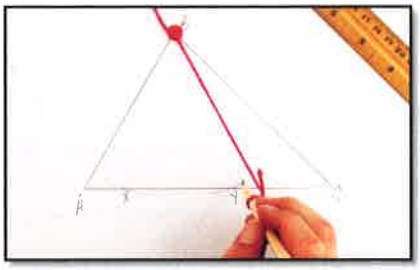


ارسم مستقيمًا يمر عبر F و M. $\overline{FM}$ هو متوسط في $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو عبارة عن قطعة مستقيمة من رأس مثلث إلى الضلع المقابل ويكون عموديًا على الضلع المقابل.

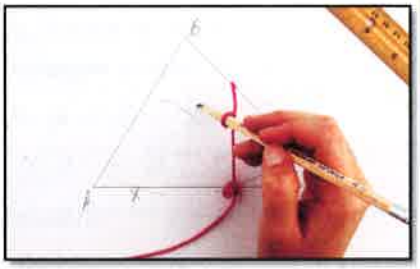
الإنشاء 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1



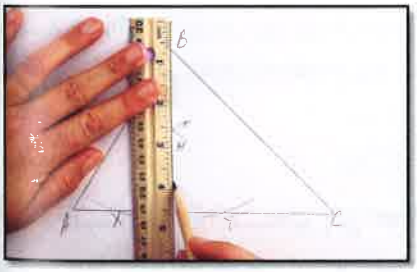
ضع الدبوس على الرأس B وارسم قوسين يتقاطعان عند $\overline{AC}$. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين مع الضلعين X و Y.

الخطوة 2



عدّل طول الخيط بحيث يكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$. ثبت المسمار على X وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$. استخدم نفس طول الخيط لرسم قوس من Y. اكتب على نقطتي تقاطع القوسين H.

الخطوة 3



استخدم مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$. اكتب على النقطة الناشئة عن تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ اسم D. $\overline{BD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$ وعمودي على $\overline{AC}$.

استخدام النماذج والتحليل

1. أنشئ متوسطين لضلعين آخرين في $\triangle DEF$. ماذا تلاحظ بشأن متوسطات المثلث؟
2. أنشئ ارتفاعين للضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

السابق:
- لقد تعرفت على المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا في المثلث وقمت باستخدامهما.

الحالي:
1. تحديد المتوسطات في المثلثات واستخدامها.
2. تحديد الارتفاعات في المثلثات واستخدامها.

لماذا؟
- المنحوتة المتحركة هي جسم حركي أو متحرك تستخدم مبادئ التوازن والاتزان. تتكون المنحوتة المتحركة البسيطة من عدة قضبان متصلة بخيوط تُعلق عليها أجسام لها أوزان مختلفة. تتوازن الأجسام المعلقة مع بعضها ويمكن أن تدور بحرية. ولضمان تعليق مثلث على المنحوتة المتحركة، بحيث يكون موازي للأرض، فعلى الفنانين معرفة نقطة توازن المثلث.

المفردات الجديدة

متوسط المثلث (median)

النقطة المركزية للمثلث (centroid)

ارتفاع المثلث (altitude)

ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

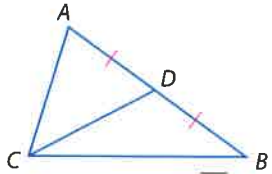
ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 المتوسطات

متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة يمثل أحد طرفيها أحد رؤوس المثلث والآخر نقطة منتصف الضلع المقابل.



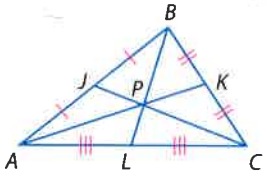
$\overline{CD}$ هو متوسط $\triangle ABC$.

لكل مثلث ثلاثة متوسطات متلاقية.

وتُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث **النقطة المركزية للمثلث** وتقع دائما داخل المثلث.

النظرية 4.7 نظرية النقطة المركزية للمثلث

تتقاطع متوسطات المثلث في النقطة تُسمى النقطة المركزية للمثلث، وهي تقع على بعد ثلثي المسافة من الرأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل.

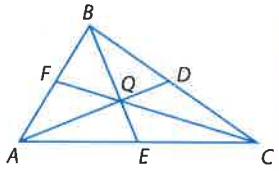


مثال إذا كانت النقطة P هي نقطة المركزية لـ $\triangle ABC$، إذا $AP = \frac{2}{3}AK$, $BP = \frac{2}{3}BL$ و $CP = \frac{2}{3}CJ$.

سوف تقوم بإثبات النظرية 4.7 في التمرين 36.

مثال 1 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle ABC$ إذا كان Q هي النقطة المركزية للمثلث و $BE = 9$. أوجد BQ و QE.



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية النقطة المركزية
$= \frac{2}{3}(9)$ or 6	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	بإضافة قطعة مستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	بطرح 6 من كل طرف.

تمرين موجه في $\triangle ABC$ أعلاه، $FC = 15$. أوجد قياس كل من ما يلي.

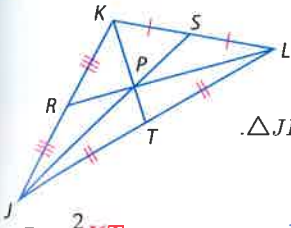
1A. FQ

1B. QC

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 استخدام نظرية النقطة المركزية

في $\triangle JKL$ إذا كان $PT = 2$ فأوجد KP.



بما أن $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ و $\overline{LR}$ تمثل متوسط $\triangle JKL$. وبالمثل، S و T هما نقطتا منتصف $\overline{KL}$ و $\overline{LJ}$ على التوالي، لذا $\overline{JS}$ و $\overline{KT}$ هما أيضًا متوسطا $\triangle JKL$. وعليه، فالنقطة P هي النقطة المركزية لـ $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية النقطة المركزية
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	بالتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصية التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من كل طرف
$KP = 4$	اضرب كل طرف في 3

نصيحة دراسية

الاستنتاج في المثال 2، يمكنك أيضًا استخدام الحس العددي لمعرفة KP. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$, $PT = \frac{1}{3}KT$ و $KP = 2PT$. بالتالي، إذا كان $PT = 2$، إذًا $KP = 2(2)$ أو 4.

تمرين موجه

في $\triangle JKL$ أعلاه، $RP = 3.5$ و $JP = 9$. أوجد قياس كل مما يلي.

2A. PL

2B. PS

كل المضلعات لها نقطة توازن أو مركز متوسط. تعتبر النقطة المركزية أيضًا هي نقطة التوازن أو مركز *الجاذبية* للمنطقة المثلثة. مركز الجاذبية هو النقطة التي تستقر عندها المنطقة بفعل الجاذبية.

مثال من الحياة اليومية 3 إيجاد النقطة المركزية للمثلث في المستوى الإحداثي

الفنون الاستعراضية يخطط فنان استعراضي لموازنة قطع مثلثة معدنية خلال عرضه التالي. عند وضع هذا المثلث على المستوى الإحداثي، تقع رؤوس المثلث على النقاط (1,10) و (5,0) و (9,5). ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟

الاستيعاب تحتاج إلى إيجاد النقطة المركزية للمثلث على الإحداثيات المعطاة. تلك هي النقطة التي سوف يتوازن المثلث عندها.

التخطيط مثل المثلث بيانيًا مع تسمية رؤوسه كالتالي A(1, 10)، و B (5, 0)، و C(9, 5).
بما أن النقطة المركزية هي نقطة التقاء متوسطات المثلث، استخدم نظرية النقطة المركزية لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث. تقع النقطة المركزية على بعد ثلثي المسافة من الرأس المقابلة إلى نقطة المنتصف تلك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الربط بتاريخ الرياضيات

بيير دو فيرما

(1601–1665) ثمة مركز آخر للمثلث وهو ما يعرف بنقطة فيرما، وهي النقطة التي تكون المسافة الكلية بينها وبين الرؤوس الثلاثة أقل ما يمكن. فيرما هو أحد أشهر علماء الرياضيات في تخصص البراهين الكتابية.

الحل مثل بيانيًا $\triangle ABC$.

أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ بطرفيه $A(1, 10)$ و $B(5, 0)$.

$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$ مثل بيانيًا النقطة D.

لاحظ أن $\overline{DC}$ يُعد مستقيمًا أفقيًا. المسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تبلغ $9 - 3$ أو 6 وحدات.

إذا كانت P هي النقطة المركزية لـ $\triangle ABC$،

إذًا $PC = \frac{2}{3}DC$. إذًا تمثل النقطة المركزية $\frac{2}{3}(6)$ أو 4 وحدات على يسار C. وتكون إحداثيات النقطة P $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

ينبغي على الفنان الاستعراضي موازنة المثلث عند النقطة (5,5).

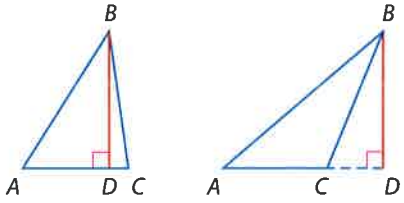
التحقق استخدم متوسطًا آخر للتحقق من الإجابة. إن نقطة المنتصف F للضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$. $\overline{BF}$ هو مستقيم عرضي. لذا فالمسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ أو 7.5. $\overline{PB} = \frac{2}{3}(7.5)$ أو 5. لذا تكون P أعلى بمقدار 5 وحدات عن B. تكون إحداثيات النقطة P $(5, 0 + 5)$ أو $(5, 5)$. ✓

تمرين موجه

3. تقع رؤوس مثلث آخر على النقاط **(0, 4)** و **(6, 11.5)** و **(12, 1)**. ما إحداثيات النقطة التي ينبغي على الفنان دعم المثلث عندها حتى يتوازن؟ اشرح استنتاجك.

2 الارتفاعات

إن **ارتفاع** المثلث هو القطعة المستقيمة الممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يقع عليه الضلع المقابل وتتعامد على المستقيم الذي يقع عليه هذا الضلع. قد يكون ارتفاع المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على الضلع.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

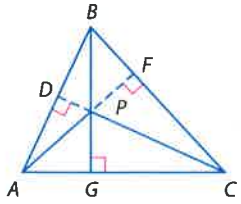
قراءة في الرياضيات

ارتفاع المثلث يُعرف بأنه المسافة بين قاعدة *المثلث* وقمته. يُستخدم ارتفاع المثلث لحساب مساحته.

لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات. إذا امتدت ارتفاعات المثلث فسوف تتقاطع في نقطة مشتركة.

المفهوم الأساسي ملتقى الارتفاعات

تتلاقى المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث وتتلاقى في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.



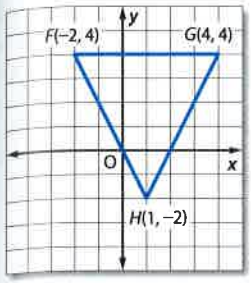
مثال تتقاطع المستقيمات التي تقع عليها الارتفاعات $\overline{AF}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{BG}$ عند النقطة P، ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية تقع رؤوس $\triangle FGH$ على النقاط $F(-2, 4), G(4, 4)$ و $H(1, -2)$.
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$.

الخطوة 1 مثل بيانيًا $\triangle FGH$. لإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين أو ثلاثة ارتفاعات.



الخطوة 2 أوجد معادلة للارتفاع من F إلى $\overline{GH}$. ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}$ أو 2؛ إذًا فإن ميل الارتفاع، المتعامد على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$	$(x_1, y_1) = F(-2, 4)$ و $m = -\frac{1}{2}$
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$	بسّط
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$	خاصية التوزيع
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	أضف 4 لكل طرف

أوجد معادلة للارتفاع من G إلى $\overline{FH}$. ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)}$ أو -2، لذا فإن ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$	$(x_1, y_1) = G(4, 4)$ و $m = \frac{1}{2}$
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$	خاصية التوزيع
$y = \frac{1}{2}x + 2$	أضف 4 لكل طرف

الخطوة 3 حل نظام المعادلات الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

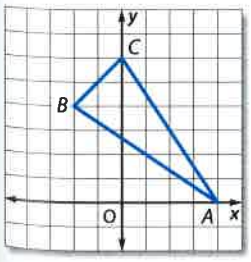
إضافة المعادلتين لحذف x ينتج $2y = 5$ أو $y = \frac{5}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	بطرح $\frac{4}{2}$ أو 2 من كل طرف
$1 = x$	بضرب كل طرف في 2

إن إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle FGH$ تساوي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

تمرين موجه

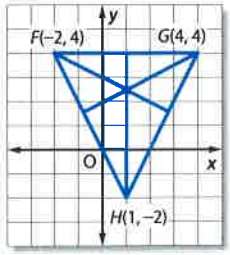
4. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ المرسوم بيانيًا على اليسار.



نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل

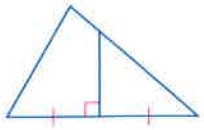
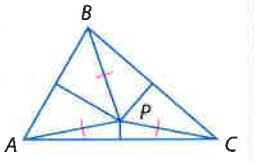
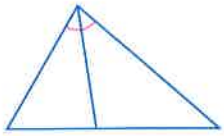
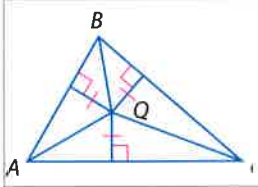
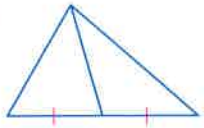
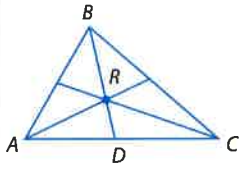
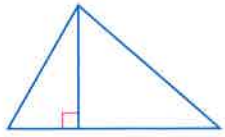
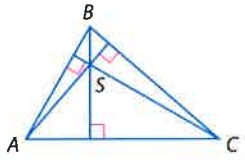
استخدم جانبًا من الورقة لرسم ارتفاعات كل ضلع بالمثلث.



يقع التقاطع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$. إذًا، فالإجابة معقولة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

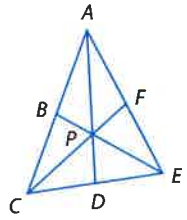
ملخص المفهوم القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلثات

الاسم	مثال	نقطة الالتقاء	خاصية خاصة	مثال
منصف عمودي		مركز الدائرة المحيطة	مركز الدائرة المحيطة $\triangle ABC$ لـ P يقع على مسافة واحدة من كل رأس.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية	مركز الدائرة الداخلية $\triangle ABC$ لـ Q يقع على مسافة واحدة من كل أضلاع المثلث.	
متوسط المثلث		النقطة المركزية	النقطة المركزية R لـ $\triangle ABC$ تقع على بعد ثلثي المسافة من كل رأس إلى نقطة منتصف الضلع المقابل لها.	
ارتفاع المثلث		ملتقى الارتفاعات	المستقيمات التي تقع عليها ارتفاعات المثلث $\triangle ABC$ تتقاطع مع ملتقى الارتفاعات S.	

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2

في $\triangle ACE$، إذا كان P هي النقطة المركزية، $PF = 6$، و $AD = 15$. أوجد قياس كل مما يلي.

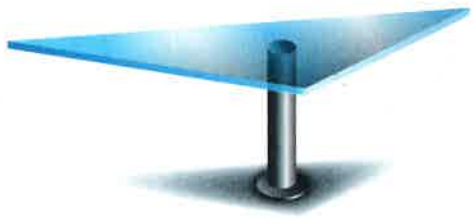


1. PC
2. AP

مثال 3

3. **تصميم داخلي** يقوم مهندس ديكور بتصميم طاولة قهوة مخصوصة لأحد زبائنه.

سطح الطاولة عبارة عن مثلث زجاجي تجب موازنته على دعامة واحدة. إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث هي (3,6) و (5,2) و (7,10)، فبأي نقطة يجب وضع الدعامة؟



مثال 4

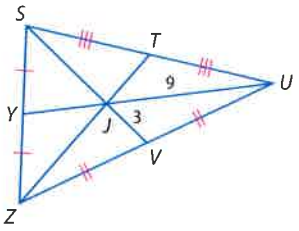
4. **هندسة الإحداثيات** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث $\triangle ABC$ مع رؤوس A(−3, 3), B(−1, 7) و $C(3, 3)$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-2

في $\triangle SZU$ إذا كان $UJ = 9$ و $VJ = 3$ و $ZT = 18$. أوجد طول كل مما يلي.



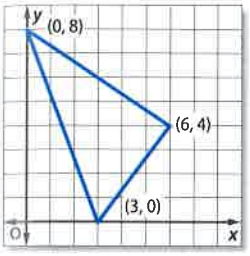
5. YJ
6. SJ
7. YU
8. SV
9. JT
10. ZJ

مثال 3

الهندسة الإحداثية حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث حسب الرؤوس المعطاة.

11. $A(-1, 11), B(3, 1), C(7, 6)$
12. $X(5, 7), Y(9, -3), Z(13, 2)$

تصميم داخلي صنعت حوريه ملصق عليه صور أصدقائها. تريد تعليق الملصق بسقف غرفتها بحيث يكون موازيًا للسقف. يتوفر الرسم التخطيطي للملصق بالتمثيل البياني الموجود على اليسار. بأي نقطة ينبغي أن تُعلق الخيط؟



مثال 4

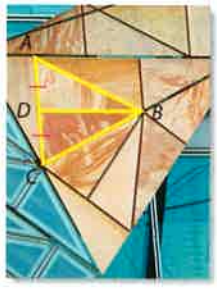
الهندسة الإحداثية حدّد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لكل مثلث له رؤوس معلومة.

14. $J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$
15. $R(-4, 8), S(-1, 5), T(5, 5)$

حدد إذا ما كانت كل قطعة مستقيمة $\overline{BD}$ عبارة عن ارتفاع أم متوسط أم منصف عمودي.

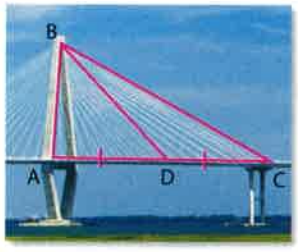
16.

17.

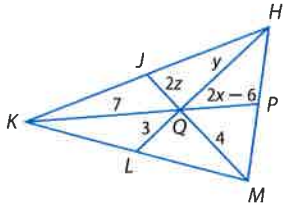


18.

19.



20. **الاستنتاج المنطقي** في الشكل الموجود على اليسار، إذا كانت J، P، و L هي نقاط منتصف $\overline{KH}$ و $\overline{HM}$، على الترتيب، أوجد x، y، و z.

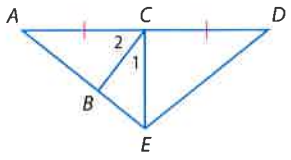


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

انسخ وأكمل كل عبارة للمثلث $\triangle RST$ والمتوسطات $\overline{RM}, \overline{SL}$ و $\overline{TK}$ والنقطة المركزية J.

21. $SL = x(JL)$ **22.** $JT = x(TK)$ **23.** $JM = x(RJ)$

الجبر استخدم الشكل على اليمين.

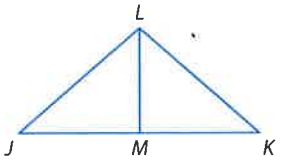


24. إذا كان $\overline{EC}$ هو ارتفاع المثلث $\triangle AED$. $m\angle 1 = 2x + 7$ و $m\angle 2 = 3x + 13$.
أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

أوجد قيمة x إذا كان $AC = 4x - 3, DC = 2x + 9$.
$m\angle ECA = 15x + 2$ و $\overline{EC}$ هو متوسّط $\triangle AED$.
هل يعد $\overline{EC}$ أيضًا ارتفاعًا للمثلث $\triangle AED$؟ اشرح.

26. ألعاب لوحة الألعاب الموضحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. فيها فجوات لقطع اللعب. هدف اللعبة هو التخلص من قطع اللعب من خلال القفز عليهم حتى لا يتبقى إلا قطعة واحدة. انسخ رسمة لوحة اللعب، وحدد أيًا من نقاط الالتقاء تمثلها القطعة الزرقاء: *مركز الدائرة المحيطة*، أو *مركز الدائرة الداخلية*، أو النقطة المركزية، أو ملتقى الارتفاعات. اشرح استنتاجك.

فرضيات استخدم المعلومات المعطاة لتحديد ما إذا كان $\overline{LM}$ منصف متعامد أو متوسط و/أو ارتفاع للمثلث $\triangle JKL$.



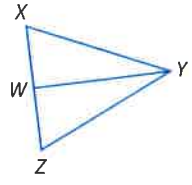
27. $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ **28.** $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

29. $\overline{JM} \cong \overline{KM}$ **30.** $\overline{LM} \perp \overline{JK}, \overline{JL} \cong \overline{KL}$

31. الإثبات اكتب فقرة إثباتية.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متساوي الساقين.
$\overline{WY}$ تنصف $\angle Y$.

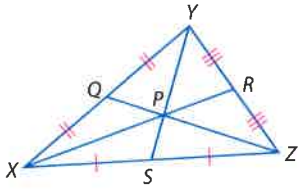
المطلوب: $\overline{WY}$ متوسط.



32. الإثبات اكتب إثبات جبري.

المعطيات: $\triangle XYZ$ ومتوسطاته $\overline{XR}$ $\overline{YS}, \overline{ZQ}$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



33. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف مكان نقاط الالتقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.

a. عمليًا أنشئ ثلاثة مثلثات مختلفة متساوية الأضلاع على ورق شفاف وقصها. اطوِ كل مثلث لتحديد مكان مركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي ومركز المتوسطات وملتقى الارتفاعات.

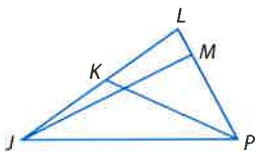
b. لفظيًا خمن العلاقات بين أربع نقاط التقاء لأي مثلث متساوي الأضلاع.

c. بيانيًا ضع مثلثًا متساوي الأضلاع ومركز الدائرة المحيطة والمركز الداخلي والمركز المتوسط وملتقى الارتفاعات على المستوى الإحداثي مستخدمًا إحداثيات مختلفة. وحدد إحداثيات كل نقطة التقاء.

جبريًا في $\triangle JLP, m\angle JMP = 3x - 6$ و $JK = 3y - 2$ و $LK = 5y - 8$.

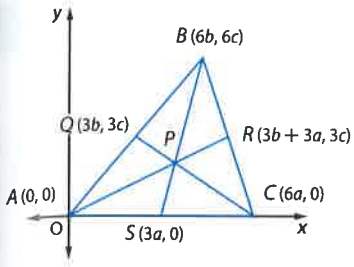
34. إذا كان $\overline{JM}$ هو ارتفاع في $\triangle JLP$. فأوجد x.

35. أوجد LK إذا كان $\overline{PK}$ متوسطًا.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

36. **البرهان** **اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات نظرية النقطة المركزية.**



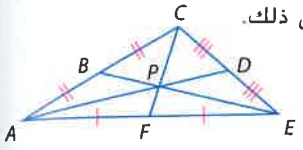
المعطيات: متوسطات $\triangle ABC$، هي $\overline{AR}, \overline{BS}$ و $\overline{CQ}$

البرهان: تتقاطع المتوسطات عند النقطة P، حيث P تساوي ثلثي المسافة بين كل رأس ونقطة منتصف الضلع المقابل.

(*إرشاد:* أولاً، أوجد معادلات المستقيمات التي بها متوسطات. ثم أوجد إحداثيات النقطة P وأثبت أن المتوسطات الثلاثة جميعها تتقاطع عند النقطة P.
بعد ذلك، استخدم قانون المسافة وعملية الضرب لإثبات أن $BP = \frac{2}{3}BS$, $AP = \frac{2}{3}AR$ و $CP = \frac{2}{3}CQ$.)

مسائل مهارات التفكير العليا

تحليل الخطأ وفقًا للشكل على اليسار، يقول حماد إن $AD = \frac{2}{3}AP$. لا يوافق بدر على ذلك. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



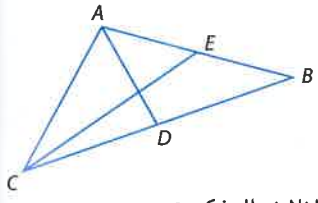
38. **فرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا.

يقع ملتقى ارتفاعات المثلث دائمًا على رأس الزاوية القائمة.

39. **التحدي** يوجد في $\triangle ABC$ الرؤوس $A(-3, 3)$، و $B(2, 5)$، و $C(4, -3)$. فما إحداثيات النقطة المركزية في $\triangle ABC$؟ اشرح العملية المستخدمة للتوصل للإجابة.

40. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين المنصفات العمودية والمتوسطات والارتفاعات للمثلث.

41. **التحدي** في الشكل على اليسار، القطعتان المستقيمتان $\overline{AD}$ و $\overline{CE}$ هما عبارة عن متوسطين في $\triangle ACB$، و $\overline{AD} \perp \overline{CE}, AB = 10$، و $AB = 10$، و $CE = 9$. أوجد CA.



42. **مسألة غير محددة الإجابة** في هذه المسألة، إستكشف العلاقة بين نقاط الالتقاء الثلاث المذكورة.

a. ارسم مثلثًا حادًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

b. ارسم مثلثًا منفرجًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

c. ارسم مثلثًا قائمًا، وأوجد مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

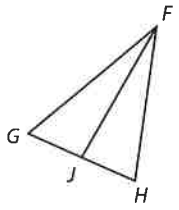
d. خمّن العلاقة بين مركز الدائرة المحيطة والنقطة المركزية وملتقى الارتفاعات.

43. **الكتابة في الرياضيات** استخدم المساحة لتوضيح سبب اعتبار النقطة المركزية للمثلث هي نفسها مركز جاذبيته. ثم استخدم هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين على الاختبار المعياري

44. بالشكل أدناه، $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$. أي مما يلي لا بد أن يكون صحيحًا؟



A $\overline{FJ}$ هو ارتفاع $\triangle FGH$.

B $\overline{FJ}$ هو منصف زاوية $\triangle FGH$.

C $\overline{FJ}$ هو متوسط في $\triangle FGH$.

D $\overline{FJ}$ هو المنصف العمودي لـ $\triangle FGH$.

45. إجابة شبكية ما نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني لـ $4x - 6y = 12$؟

46. جبريًا تطوع أربعة طالبات لطي كتيبات لصالح مجموعة عمل مجتمعي محلية. أي طالبة هي الأسرع؟

الطالب	سرعة الطي
أماني	صفحة واحدة كل 3 ثوانٍ
سهيلة	صفحتان كل 10 ثوانٍ
منى	30 صفحة في الدقيقة
منال	45 صفحة كل دقيقتين

F منال
G أماني
H منى
J سهيلة

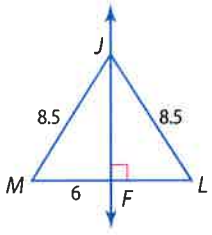
47. SAT/ACT 80 بالمائة من 42. ما نسبتها المئوية من 16؟

A 240
B 210
C 150
D 50
E 30

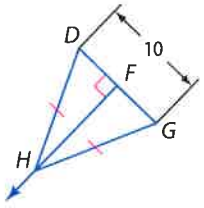
مراجعة شاملة

أوجد قياس كل منها.

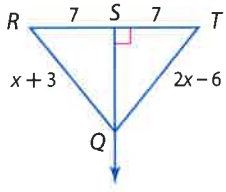
48. LM



49. DF



50. TQ



ضع كل نقطة مما يلي على المستوى الإحداثي ثم سمّها.

51. المثلث $\triangle XYZ$ قائم الزاوية وله وتر $\overline{XZ}$، ZY، ويبلغ ضعف قياس XY، و $\overline{XY}$، ويبلغ طوله b وحدة

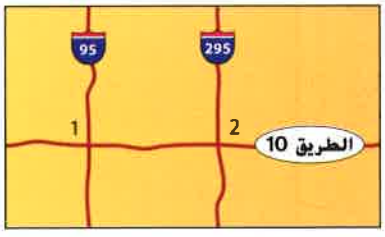
52. $\triangle QRT$ مثلث متساوي الساقين وقياس قاعدته $\overline{QR}$ يبلغ b وحدة طولاً

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{JK}$ *متوازيان، أم متعامدان، أم خلاف ذلك*. مثّل كل مستقيم بيانيًا للتأكد من صحة إجابتك.

53. $R(5, -4), S(10, 0), J(9, -8), K(5, -13)$

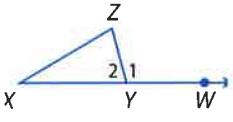
54. $R(1, 1), S(9, 8), J(-6, 1), K(2, 8)$

55. طرق سريعة بالقرب من مدينة هوبويل بولاية فيرجينيا، يقع الطريق 10 عموديًا على الطريقين المحوريين 95 و 295. اثبت أن زوايا تقاطع الطريق 10 مع الطريق المحوري 95 والطريق المحوري 295 متطابقان.



مراجعة المهارات

اكتب برهانًا تسلسليًا لإثبات نظرية الزاوية الخارجية.



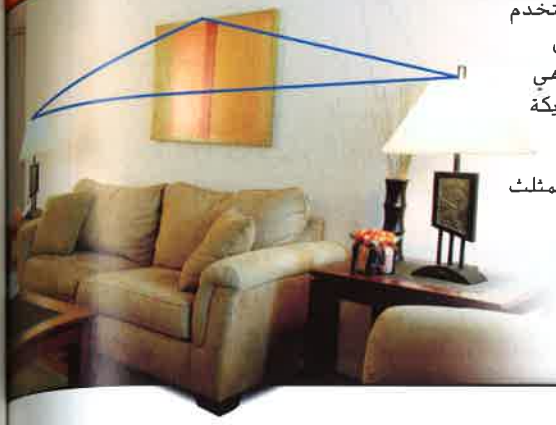
56. المعطيات: $\triangle XYZ$

المطلوب: $m\angle X + m\angle Z = m\angle 1$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

4-3 المتباينات في مثلث واحد

السابق	الحالي	لماذا
• تعرفت على العلاقة بين قياسات زاويا المثلث.	1 التعرف على خواص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلث.	• لإنشاء مظهر عمق في غرفة ما، يستخدم مصممو الديكور الداخلي تقنية تُسمى *التثليث*. من أهم أمثلة هذه التقنية هي وضع طاولة جانبية على طرفي الأريكة مع وجود لوحة فوق الأريكة. لابد أن تكون قياسات زوايا قاعدة المثلث أصغر من قياس الزاوية الأخرى.
	2 التعرف على خواص متباينات العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وتطبيقها.	



ممارسات في الرياضيات
افهم طبيعة المسائل واجتهد في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 متباينات الزاوية في علم الجبر، تعرفت على العلاقة المتباينة بين عددين حقيقيين. تُستخدم هذه العلاقة غالبًا بالبراهين.

المفهوم الأساسي تعريف المتباينة

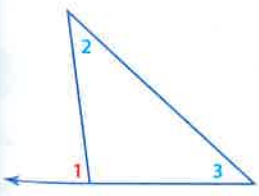
الشرح	لأي عددين حقيقيين a و b، و $a > b$ فقط في حالة وجود عدد موجب c حيث إن $a = b + c$.
مثال	إذا كان $3 + 2 = 5$، فإن $5 > 2$ و $3 < 5$.

يدرج الجدول أدناه بعض خواص المتباينات التي درستها بعلم الجبر.

المفهوم الأساسي خواص المتباينات للأعداد الحقيقية

الخصائص التالية صحيحة لأي أعداد حقيقية a و b و c.

خاصية المقارنة في المتباينات	$a < b$، أو $a = b$، أو $a > b$
خاصية التعدي في المتباينات	1. إذا كان $a < b$ و $b < c$، فإن $a < c$. 2. إذا كان $a > b$ و $b > c$، فإن $a > c$.
خاصية الجمع في المتباينات	1. إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$. 2. إذا كان $a < b$، فإن $a + c < b + c$.
خاصية الطرح في المتباينات	1. إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$. 2. إذا كان $a < b$، فإن $a - c < b - c$.



يمكن تطبيق تعريف المتباينة وخواص المتباينات على قياسات الزوايا والقطع المستقيمة، وذلك لأنها أعداد حقيقية. تأمل $\angle 1$، و $\angle 2$، و $\angle 3$ بالشكل الموضح.

باستخدام نظرية الزوايا الخارجية، فأنت تعرف أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

بما أن قياسات الزوايا تمثل أعدادًا موجبة، فإننا نستطيع القول أيضًا بأن

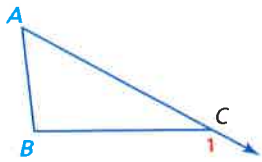
$m\angle 1 > m\angle 2$ و $m\angle 1 > m\angle 3$

باستخدام تعريف المتباينة، تقترح النتيجة النظرية التالية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية

قياس زاوية المثلث الخارجية أكبر من قياس كلا الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.



مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
$m\angle 1 > m\angle B$

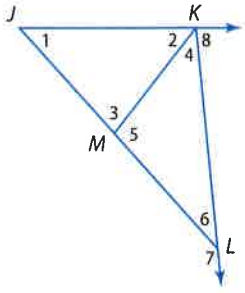
مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية غير المتجاورة
تحتوي كل زاوية مثلث خارجية على *زاويتين داخليتين* غير مجاورتين، وأيضًا غير مجاورتين للزاوية الخارجية.

برهان نظرية 4.8 بالدرس 4-4.

مثال 1 استخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية

استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



a. قياسها أصغر من $m\angle 7$

$\angle 7$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle KML$، حيث إن $\angle 4$ و $\angle 5$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 7 > m\angle 4$ و $m\angle 7 > m\angle 5$.

$\angle 7$ هي أيضًا زاوية خارجية في $\triangle JKL$، حيث إن $\angle 1$ و $\angle JKL$ زاويتين داخليتين غير مجاورتين. إذًا، $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. بما أن $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$. فإنه باستخدام التعويض $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$. وبالتالي، $m\angle 7 > m\angle 2$.

إذًا، فالزوايا ذات القياس الأصغر من $m\angle 7$ هي $\angle 1$، و $\angle 2$، و $\angle 4$، و $\angle 5$.

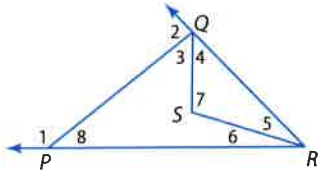
b. قياسها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ هي زاوية خارجية في $\triangle KLM$. لذا فباستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 6 > m\angle 3$. نظرًا لأن $\angle 8$ هي زاوية خارجية في $\triangle JKL$، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$. بالتالي، قياسات $\angle 3$، و $\angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

تمرين موجه

1A. قياسها أصغر من $m\angle 1$

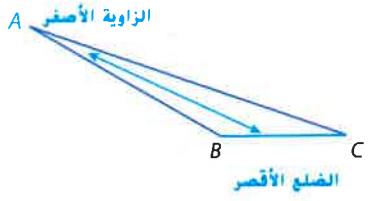
1B. قياسها أكبر من $m\angle 8$

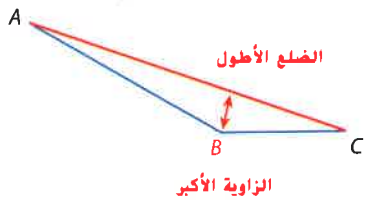


انتبه!

تحديد الضلع المقابل احرص على تحديد الضلع المقابل لزاوية ما بشكل صحيح. لا يمكن أن تكون الأضلاع المكونة للزاوية هي نفسها الأضلاع المقابلة.

2 متباينات ضلع الزاوية لقد تعلمت أنه إذا تطابق ضلعي مثلث، أو إذا كان المثلث متساوي الساقين، فإن الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع تكون متطابقة. ما العلاقة التي تتكوّن في حالة عدم تطابق الأضلاع؟ افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج مختلف الأضلاع.





لاحظ أن أطول ضلع وأكبر زاوية في $\triangle ABC$ متقابلان. وبالمثل، فإن أقصر ضلع وأصغر زاوية متقابلان.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

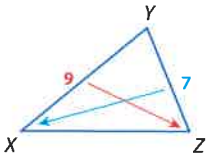
تنطبق علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات المنفرجة مختلفة الأضلاع على جميع المثلثات، وسيتم ذكر تلك العلاقات باستخدام المتباينات بالنظريات أدناه.

انتبه!

رموز الزوايا والمتباينات يبدو رمز الزاوية (∠) مشابهًا لرمز أقل من (<)، خاصةً عندما يُكتب بخط اليد. احرص على كتابة الرمز بشكل صحيح عند استخدام كليهما في نفس الوقت.

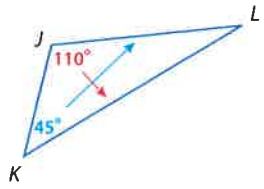
نظريات علاقات الزوايا والأضلاع في المثلثات

4.9 إذا كان أحد أضلاع المثلث أطول من ضلع آخر، فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول ذات قياس أكبر من الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.



مثال: نظرًا لأن $YZ > XY$، فإن $m\angle X > m\angle Z$.

4.10 إذا كانت إحدى زوايا المثلث لها قياس أكبر من زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.

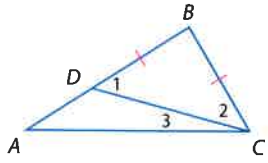


مثال: نظرًا لأن $m\angle K > m\angle J$، فإن $JL > KL$.

برهان النظرية 4.9

المعطيات: $\triangle ABC,\ AB > BC$

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$



البرهان:

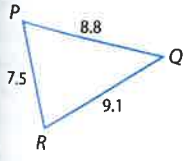
بما أن $AB > BC$ بالمثلث المعطى $\triangle ABC$، فإن النقطة D تقع على $\overline{AB}$ حيث إن $BD = BC$. ارسم $\overline{CD}$ لعمل مثلث متساوي الساقين $\triangle BCD$. باستخدام نظرية المثلثات متساوية الساقين، $\angle 1 \cong \angle 2$، إذًا $m\angle 1 = m\angle 2$ باستخدام تعريف الزوايا المتطابقة.

باستخدام مسلّمة إضافة الزوايا، $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$. إذًا $m\angle BCA > m\angle 2$ باستخدام تعريف المتباينات. باستخدام التعويض، نجد أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

باستخدام نظرية متباينة الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 1 > m\angle A$. بالتالي، نظرًا لأن $m\angle BCA > m\angle 1$ و $m\angle 1 > m\angle A$، فإنه باستخدام التعدي في المتباينات، نجد أن $m\angle BCA > m\angle A$.

سوف تُثبت النظرية 4.10 في الدرس 4-4، التمرين 31.

مثال 1 ترتيب قياسات زوايا المثلث

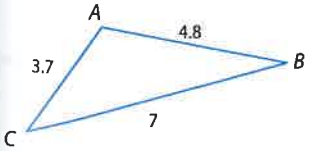


صنّف زوايا $\triangle PQR$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{PR}$، $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$.

الزوايا المقابلة لتلك الأضلاع هي $\angle Q$، و $\angle R$، و $\angle P$، على التوالي. إذًا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle Q$، و $\angle R$، و $\angle P$.

تمرين موجه

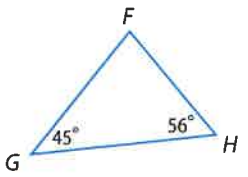


2. صنّف زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 ترتيب أطوال أضلاع المثلث

صنّف أضلاع $\triangle FGH$ بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.



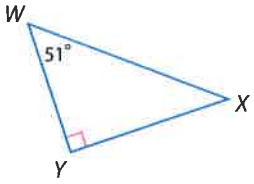
أوجد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

$m\angle F = 180 - (45 + 56)$ أو 79

إذًا، الزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle G$، و $\angle H$، و $\angle F$. الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي $\overline{FH}$، و $\overline{FG}$، و $\overline{GH}$، على التوالي. إذًا، الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{FH}$، $\overline{FG}$، $\overline{GH}$.

تمرين موجه

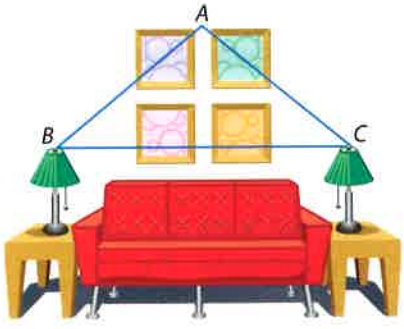
3. صنّف زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



يمكنك استخدام علاقات الزوايا والأضلاع في المثلث لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال من الحياة اليومية 4 علاقات الزوايا والأضلاع

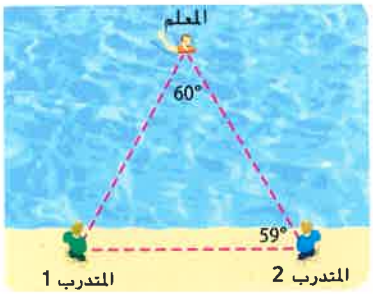
تصميم الديكور الداخلي يستخدم مصمم الديكور الداخلي التثليث لعمل عمق في غرفة معيشة أحد العملاء. إذا كان $m\angle B$ أصغر من $m\angle A$، فأي مسافة هي الأطول – المسافة بين المصباحين أم المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني؟ اشرح.



وفقًا للنظرية 4.10، حتى يكون $m\angle B < m\angle A$، فإنه يجب أن يكون طول الضلع المقابل $\angle B$ أصغر من طول الضلع المقابل $\angle A$. بما أن $\overline{AC}$ يقع مقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقع مقابل $\angle A$، إذًا $AC < BC$ و $BC > AC$. إذًا، يجب أن تكون BC، وهي المسافة بين المصباحين، أكبر من المسافة من المصباح عند النقطة B إلى نقطة المنتصف أعلى العمل الفني.

تمرين موجه

4. الإنقاذ أثناء تدريب على الإنقاذ، يُحاكي المدرّب كونه الشخص المستغيث حتى يتمكن المتدربون من ممارسة مهارات الإنقاذ التي تعلموها. إن كان المدرب والمتدرب 1 والمتدرب 2 واقفين بالمواضع الموضحة بالرسم التخطيطي، فأيُّ المتدربين هو الأقرب للمدرب؟



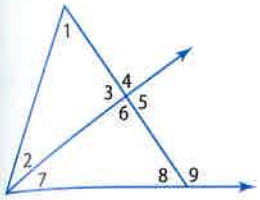
مهن من الحياة اليومية

تصميم ديكور داخلي يعمل مصمم ديكور داخلي على تزيين مساحة ما حتى تصبح مبهجة المنظر ومريحة لمن سيعيش أو يعمل بها. وينبغي على المصممين معرفة نظريات الألوان والدهان وتصميم الإضاءة وتخطيط المساحات. يوصى بالحصول على شهادة البكالوريوس لوظائف الخريجين الجدد. عادةً ما يتلقى الخريج تدريبًا مهنيًا لفترة تتراوح من 1 إلى 3 سنوات قبل دخول امتحان القبول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

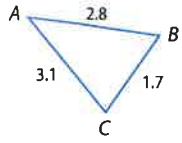
التحقق من فهمك

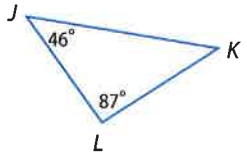
مثال 1 **استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.**



1. قياسها أصغر من $m\angle 4$
2. قياسها أكبر من $m\angle 7$
3. قياسها أكبر من $m\angle 2$
4. قياسها أصغر من $m\angle 9$

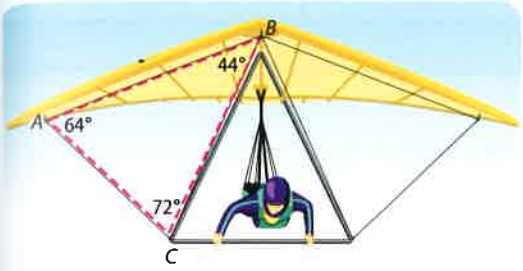
المثالان 3-2 **صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.**

5. 

6. 

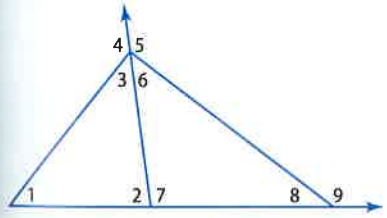
مثال 4

7. **الطيران الشراعي** تكوّن دعامات الطيران الشراعي مثلثات كما هو موضح. أي منها الأطول – الدعامة التي تمثلها $\overline{AC}$ أم الدعامة التي تمثلها $\overline{BC}$؟ اشرح استنتاجك.



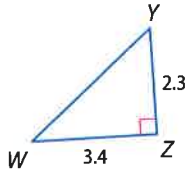
التمرين وحل المسائل

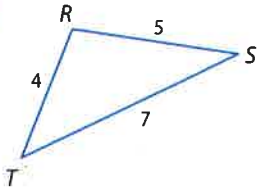
مثال 1 **الاستنتاج المنطقي** **استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.**

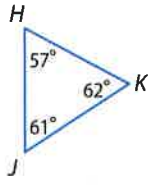


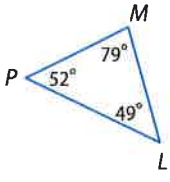
8. قياسها أكبر من $m\angle 2$
9. قياسها أصغر من $m\angle 4$
10. قياسها أصغر من $m\angle 5$
11. قياسها أصغر من $m\angle 9$
12. قياسها أكبر من $m\angle 8$
13. قياسها أكبر من $m\angle 7$

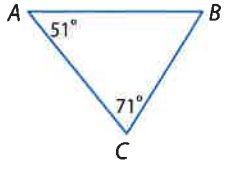
المثالان 3-2 **صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.**

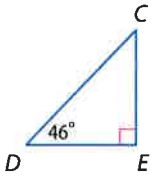
14. 

15. 

16. 

17. 

18. 

19. 

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

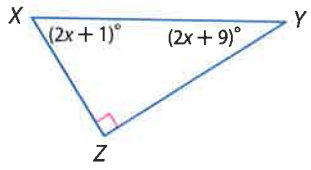
مثال 4

20. رياضة يلعب كل من زايد وسلطان وسالم لعبة تمرير القرص. يحاول سالم أن يقرر ما إذا كان سيمرر القرص لزايد أم لسلطان. أي من اللاعبين يجب أن يختار ليحصل على أقصر مسافة تمرير؟ اشرح استنتاجك.

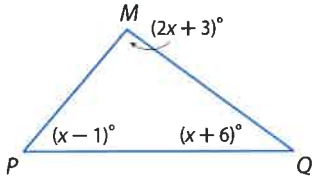
21. منحدرات يمثل المنحدر الخشبي أدناه منحدر دراجات. أي منها الأطول، طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$؟ اشرح استنتاجك مستخدمًا النظرية 7.9.

صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

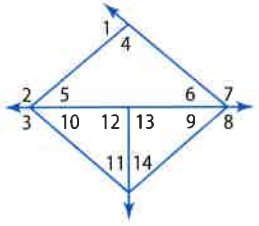
22.



23.



استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد الزاوية التي لها أكبر قياس.



24. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

25. $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

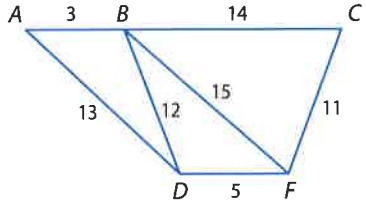
26. $\angle 7, \angle 4, \angle 5$

27. $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

28. $\angle 3, \angle 9, \angle 14$

29. $\angle 8, \angle 10, \angle 11$

الاستنتاج المنطقي استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقات بين قياسات الزوايا المعلومة.



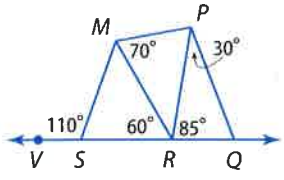
30. $\angle ABD, \angle BDA$

31. $\angle BCF, \angle CFB$

32. $\angle BFD, \angle BDF$

33. $\angle DBF, \angle BFD$

استخدم الشكل الواقع على اليسار لتحديد العلاقة بين الأطوال المعلومة.



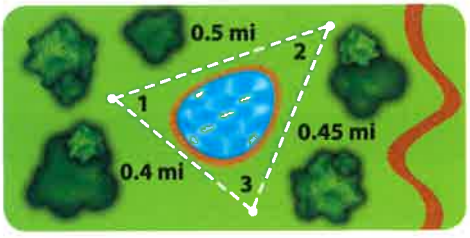
34. SM, MR

35. RP, MP

36. RQ, PQ

37. RM, RQ

38. نزهة على الأقدام يستمتع حمدان وأسرته بالمشي على الأقدام حول بحيرة كما هو موضح بالرسم التخطيطي على اليسار. رتّب زوايا المثلث المكون لمسارهما من الأكبر إلى الأصغر.



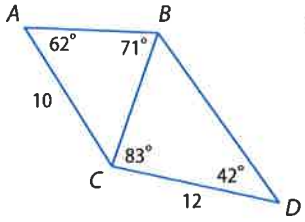
McGraw-Hill Education حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة

الهندسة الإحداثية صنّف زوايا كل مثلث بمعرفة الرؤوس المعطاة بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. **علل إجابتك.**

39. $A(-4, 6), B(-2, 1), C(5, 6)$

40. $X(-3, -2), Y(3, 2), Z(-3, -6)$

41. صنّف أطوال أضلاع المثلثات بالشكل من الأقصر إلى الأطول. اشرح استنتاجك.



42. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين أضلاع المثلث.

a. **الهندسة** ارسم ثلاثة مثلثات، أحدهم حاد الزاوية والآخر منفرج الزاوية والثالث قائم الزاوية. اكتب أسماء رؤوس كل مثلث A، و B، و C.

b. **جدوليًا** قِس طول كل ضلع من أضلاع المثلثات الثلاثة. ثم انسخ الجدول وأكمله.

المثلث	AB	BC	$AB + BC$	CA
حاد الزاوية				
منفرج الزاوية				
قائم الزاوية				

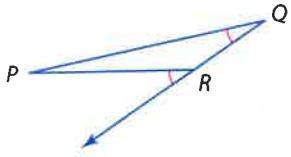
c. **جدوليًا** كوّن جدولين إضافيين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC و CA في أحد الجداول ومجموع AB و CA في الجدول الآخر.

d. **جبريًا** اكتب متباينة لكل من الجداول التي صنعتها من خلال ربط قياس مجموع ضلعين بقياس الضلع الثالث للمثلث.

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين قياس مجموع ضلعين بالمثلث وقياس الضلع الثالث.

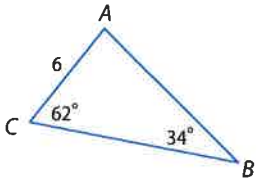
مسائل مهارات التفكير العليا

43. **الكتابة في الرياضيات حلل المعلومات المعطاة بالرسم التخطيطي واشرح سبب عدم صحة العلامات.**



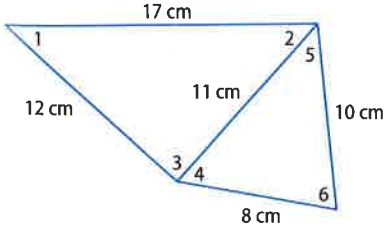
44. **تحدٍ** باستخدام مسطرة، ارسم $\triangle ABC$ بحيث يكون $m\angle A > m\angle B > m\angle C$. علل ما قمت برسمه.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** قد يكون قياسًا ممكنًا لـ $\overline{AB}$ في $\triangle ABC$ الموضح. اشرح استنتاجك.



46. **فرضيات** هل قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون أطول ضلع بالمثلث *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم *لا تكون أطول* منه على الإطلاق؟ اشرح.

47. **تحدٍ** استخدم أطوال الأضلاع في الشكل لترتيب الزوايا المرقمة من الأصغر إلى الأكبر مع العلم أن $m\angle 5 = m\angle 2$. اشرح استنتاجك.



48. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يكون الوتر دائمًا أطول ضلع بالمثلث القائم؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليب © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين على الاختبار المعياري

49. الإحصاء يوضح المخطط عدد أسطوانات DVD وأنواعها المبيعة في ثلاثة متاجر.

نوع أسطوانة DVD	المتجر 1	المتجر 2	المتجر 3
الكوميديا	75	80	92
الحركة	54	37	65
الرعب	30	48	62
الخيال العلمي	21	81	36
الإجمالي	180	246	255

وفقًا للمعلومات المقدمة بالمخطط، أيٌّ هذه العبارات صحيحة؟

A متوسط عدد أسطوانات DVD المباعة في كل متجر هو 56.

B باع المتجر 1 ضعف أفلام الحركة والرعب مما باعه المتجر 3 من أفلام الخيال العلمي.

C باع المتجر 2 أفلام كوميدية وخيال علمي أقل مما باعه المتجر 3.

D متوسط عدد أسطوانات DVD لأفلام الخيال العلمي المباعة في كل متجر هو 46.

50. يبلغ قياس زاويتين في مثلث 45° و92°. ما نوع المثلث؟

F منفرج مختلف الأضلاع **H** حاد مختلف الأضلاع

G منفرج متساوي الساقين **J** حاد متساوي الساقين

51. إجابة موسعة في مطعم من فئة الخمسة نجوم، يجني النادل إجمالاً t من الدراهم مقابل العمل لعدد h ساعات بحيث يحصل على AED 198 إكرامية ويجني AED 2.50 في الساعة.

a. اكتب معادلة لتمثيل المجموع الكلي من النقود التي يجنيها النادل.

b. إن كان إجمالي ما يجنيه النادل AED 213، فكم ساعة يعملها؟

c. إن كان ما يجنيه النادل من إكرامية يبلغ AED 150 ويعمل 12 ساعة، فما إجمالي ما يكسبه من مال؟

52. SAT/ACT أي تعبير يحمل *القيمة* الأقل؟

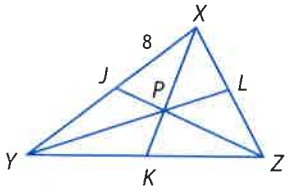
A $|-99|$ **D** $|-28|$

B $|45|$ **E** $|15|$

C $|-39|$

مراجعة شاملة

في $\triangle XYZ$، نجد أن P هي النقطة المركزية، و $KP = 3$، و $XJ = 8$. أوجد طول كل مما يلي.



53. XK

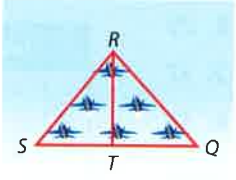
54. YJ

الهندسة الإحداثية اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع من أجل المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة ذات نقطتي النهاية المعلومتين. علل إجابتك.

55. $D(-2, 4)$ و $E(3, 5)$

56. $D(-2, -4)$ و $E(2, 1)$

57. الطائرات النفاثة يطير سرب طيران استعراضي في تشكيل يمكن رؤيته بمثلثين لهما ضلعًا مشتركًا. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$ إذا كان T هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$ و $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.



58. حمامات سباحة تبلغ مساحة حمام سباحة مستطيل الشكل 20 قدمًا في 30 قدمًا. ويبلغ عمق حمام السباحة 60 بوصة، ولكن يبلغ عمق الماء $\frac{3}{4}$ من عمق الحمام. أوجد كل قياس مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

a. مساحة سطح الحمام **b.** كمية الماء في الحمام

مراجعة المهارات

إذا كان $x = 8$، و $y = 2$، و $z = 3$. حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة.

59. $z(x - y) = 13$

60. $2x = 3yz$

61. $x + y > z + y$

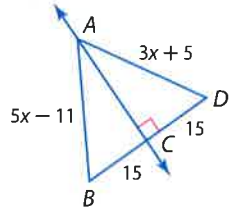
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 اختبار منتصف الوحدة

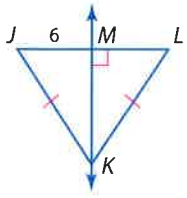
الدروس من 4-1 إلى 4-3

أوجد قياس كل مما يلي.

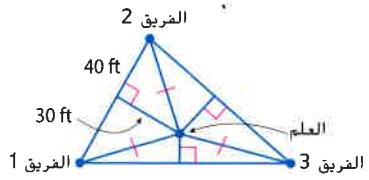
1. AB



2. JL

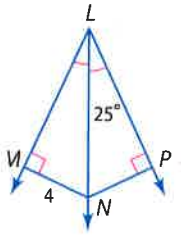


3. **المعسكر** انتهى معسكر أوناواتشي بلعبة إمساك العلم. إذا كانت مواقع البدء للثلاثة فرق موضحة بالرسم التخطيطي أدناه، بحيث يقع العلم على مسافة واحدة من قاعدة كل فريق، فكم يبعد العلم عن كل قاعدة بالأقدام؟

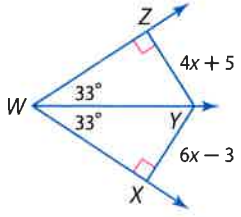


أوجد قياس كل مما يلي.

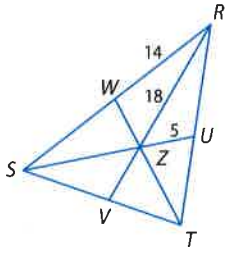
4. $\angle MNP$



5. XY



في $\triangle RST$، Z هو النقطة المركزية و $RZ = 18$. أوجد طول كل مما يلي.

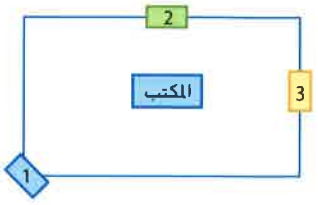


6. ZV
7. SZ
8. SR

الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات المركز لكل مثلث مع الرؤوس المعلومة.

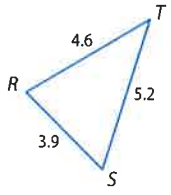
9. $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$
10. $X(-11, 0), Y(-11, -8), Z(-1, -4)$
11. $R(-6, 4), S(-2, -2), T(2, 4)$
12. $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$

13. **هندسة معمارية** يصمم مهندس معماري مبنى مدرسة ثانوية. صف كيف يمكن وضع المكتب المركزي بحيث يكون عند تقاطع الأروقة المتصلة بالمداخل الثلاثة للمدرسة.

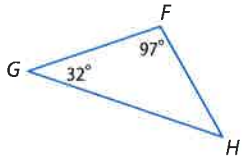


أدرج زوايا وأضلاع كل مثلث في ترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

14.



15.



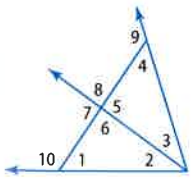
16. **إجازة** يخطط عبد الله للطيران بالمسار المحدد على خريطة هاواي أدناه.

a. إذا كان $m\angle A = 2 + m\angle B$ و $m\angle C = 2(m\angle B) - 14$، فما قياسات المثلثات الثلاثة؟

b. ما ترتيب المسافات التي سيقطعها عبد الله في رحلته من الأقل إلى الأكبر؟

c. طول الرحلة بأكملها حوال 68 ميلاً. تزيد مسافة الشوط الأوسط بمقدار 11 ميلاً عن نصف الشوط الأقصر. تزيد مسافة الشوط الأطول بمقدار 12 ميلاً عن ثلاثة أرباع الشوط الأقصر. ما مسافات أشواط الرحلة؟

استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.



17. قياسها أصغر من $m\angle 8$
18. قياسها أكبر من $m\angle 3$
19. قياسها أصغر من $m\angle 10$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

4-4 مختبر الهندسة
منطق المصفوفة

يستخدم منطق المصفوفات صفوفًا مستطيلة لتسجل المعلومات التي توصلت إليها من أجل حل مسألة منطق أو استنتاج. وبمجرد ملء كل الصفوف والأعمدة، يمكنك استنتاج النتيجة.

الطعام **يذهب كل من فهد وفالح وصالح وماجد وطارق إلى مطعم إيطالي. يطلب كل واحد منهم طبقه المفضل: رافيولي، أو بيتزا، أو لازانيا، أو مانيكوتي أو سباجيتي. يحب ماجد الرافيولي، ولكن فهد لا يحب أطباق البيتزا. فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي. طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي". ماذا طلب كل واحد منهم؟**

الخطوة 1 أنشئ مصفوفة مناسبة.

استخدم مصفوفة 5 × 5 التي تتضمن اسم كل شخص كعنوان لكل صف وأطعمته المفضلة المحتملة كعنوان لكل عمود.

الخطوة 2 استخدم كل فكرة واستدلال منطقي لملء المصفوفة.

- نظرًا لأن ماجد يحب الرافيولي، ضع علامة ✓ في صف ماجد الآن تحت "رافيولي" وعلامة × في كل خلية أخرى في هذا الصف. نظرًا لأن كل طبق يحبه شخص واحد فقط، يمكنك وضع علامة × في كل خلية أخرى في عمود "رافيولي".

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×			
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×			
طارق	×	×			

- ونظرًا لأن فهد لا يحب المعكرونة، فإنك تعرف أن فهد لا يمكن أن يحب المانيكوتي أو الرافيولي أو اللازانيا أو السباجيتي وكلها جميعًا أطباق معكرونة. لذا لا بد أن فهد يحب البيتزا. ضع علامة ✓ في صف فهد أسفل البيتزا. ضع علامة × في كل خلية أخرى في صف فهد وفي كل خلية أخرى في عمود البيتزا.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×			
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×			
طارق	×	×			

- نظرًا لأن فالح لا يحب اللازانيا أو المانيكوتي، ضع علامة × في صف فالح أسفل اللازانيا والمانيكوتي. وهذا يترك السباجيتي فقط بدون علامة × في صف فالح. لذلك، يمكنك استنتاج أنه من المؤكد أن فالح يحب السباجيتي. ضع علامة ✓ في هذه الخلية وعلامة × في كل خلية أخرى في عمود السباجيتي.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×	×	×	✓
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×			×
طارق	×	×			×

- يمكنك من خلال المصفوفة رؤية أن طبق صالح المفضل لا بد أن يكون إما اللازانيا أو المانيكوتي. ونظرًا لأن طبق صالح المفضل لا ينتهي بالحرف "ي"، يمكنك استنتاج أن صالح يحب اللازانيا. في صف صالح، ضع علامة ✓ أسفل اللازانيا وعلامة × أسفل المانيكوتي.

الاسم	رافيولي	بيتزا	لازانيا	مانيكوتي	سباجيتي
فهد	×	✓	×	×	×
فالح	×	×	×	×	✓
ماجد	✓	×	×	×	×
صالح	×	×	✓	×	×
طارق	×	×	×	✓	×

- وهذا يترك خلية واحدة فقط فارغة في صف طارق، لذا يمكنك استنتاج أن طبقه المفضل هو المانيكوتي.

الخطوة 3 استخدم مصفوفتك لتوضيح الإجابة على المسألة.

يمكنك من خلال المسألة معرفة أن فهد طلب البيتزا، وطلب فالح السباجيتي، وطلب ماجد الرافيولي، وطلب صالح اللازانيا وطلب طارق المانيكوتي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

منطق المصفوفات تابع

تمارين

استخدم مصفوفة لحل كل مسألة.

1. **الرياضات** يرتاد محمود وعبد العزيز، وعبد الرحمن وعبد الرحيم نفس المدرسة. يشارك كل واحد منهم في رياضة مدرسية مختلفة: كرة السلة، أو كرة القدم، أو الركض، أو التنس. استخدم المعلومات التالية لتحديد الرياضة التي يشارك فيها كل طالب.

- لا يحب عبد العزيز الركض أو كرة السلة.
- لا يشارك محمود في كرة القدم أو التنس.
- يفضل عبد الرحمن رياضات الشتاء الداخلية.
- أحرز عبد الرحمن أربعة أهداف في المباراة النهائية في الموسم.

2. **العائلة** يوجد خمسة أطفال في عائلة راشد. استخدم المعلومات التالية لتحديد الترتيب الذي وُلد به الأطفال.

- سها أكبر من لميس.
- خليفة أصغر من سهيلة.
- لميس أكبر من خليفة وخالد.
- خالد أكبر من خليفة.
- سهيلة أكبر من سها.

3. **الحيوانات الأليفة** ذهبت كل من خديجة وشيماء وعلياء إلى ملجأ للحيوانات الأليفة. اختارت كل فتاة حيوانًا أليفًا مختلفًا لتربيته: ببغاء أو أرنب أو قطة. أطلقت كل فتاة اسمًا على حيوانها الأليف باسم "الطاووس الجميل" أو "زوزو" أو "روسكو". استخدم المعلومات التالية والمصفوفة الموضحة لتحديد الحيوان الذي تربيه كل فتاة وما الاسم الذي أعطته إياه.

- الفتاة التي اعتنت بالببغاء لم تسميه "الطاووس الجميل".
- حيوان شيماء الأليف الذي أسمته "زوزو" ليس من نوع الحيوانات التي تقفز.
- اعتنت علياء بروسكو وهو ليس قطًا.
- لم تعتنِ خديجة بالأرنب.

اسم الفتاة	الحيوان الأليف			اسم الحيوان الأليف		
	ببغاء	أرنب	قطة	الطاووس	زوزو	روسكو
خديجة						
شيماء						
علياء						
الطاووس						
زوزو						
روسكو						

4. **الهندسة** رسم كل من علي وعمر وعامر مثلثًا، ولا يتشارك اثنان منهم في نفس طول الضلع أو نوع الزاوية. استخدم المعلومات التالية لتحديد نوع المثلث الذي رسمه كل منهم.

- لم يرسم علي مثلثًا متساوي الأضلاع.
- يوجد في مثلث عمر زاوية قياسها 25 درجة وزاوية أخرى قياسها 65 درجة.
- رسم عامر مثلثًا يحتوي على زوج واحد على الأقل من الأضلاع المتطابقة.
- يحتوي المثلث المنفرج على زاويتين متطابقتين.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

4-4 البرهان غير المباشر

السابق

- قمت بكتابة فقرة إثباتية، وبرهان من عمودين، وبرهان تسلسلي.

الحالي

1 كتابة براهين جبرية غير مباشرة.

2 كتابة براهين هندسية غير مباشرة.

لماذا

أحمد: "أنا ق... يوم ع... إثبات..."

بلال: "لنفترض أن يوم السبت هو يوم عمل للمعلمين. في أي يوم سيكون اختبار الرياضيات القادم؟"

أسامة: "ممم. . وفقًا للمنهج الدراسي، يكون يوم السبت القادم. لكننا لا نجري أي اختبارات في أيام عمل المعلمين؛ فنحن لسنا في المدرسة."

جمال: "بالضبط—إذًا هذا يثبت ذلك! لا يمكن أن يكون يوم السبت القادم يوم عمل للمعلمين."

المفردات الجديدة

تبرير غير مباشر (indirect reasoning)

برهان غير مباشر (indirect proof)

برهان بالتناقض (proof by contradiction)

ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 البرهان الجبري غير المباشر إن البراهين التي كتبتها هي *براهين مباشرة*—فقد بدأت بافتراض صحيح وأثبتّ أن الاستنتاج كان صحيحًا. في المثال السابق، استخدم الطالبان **الاستنتاج غير المباشر** بافتراض أن هذا الاستنتاج خاطئ ثم أظهرا أن هذا الافتراض قد أدى إلى تناقض.

في **البرهان غير المباشر** أو **البرهان بالتناقض**، أنت تفترض، بشكل مؤقت، عدم صحة ما تحاول إثباته. بإظهار استحالة هذا الافتراض منطقيًا، فإنك تثبت خطأ افتراضك وصحة الاستنتاج الأصلي. يُسمى هذا أحيانًا *البرهان بالنفي*.

المفهوم الأساسي كيف تكتب برهانًا غير مباشر

الخطوة 1 حدّد الاستنتاج المطلوب إثباته. افترض أن هذا الاستنتاج خاطئ من خلال افتراض صحة العكس.

الخطوة 2 استخدم التفكير المنطقي لإظهار أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع الافتراض أو مع بعض الحقائق الأخرى، مثل تعريف أو مسلّمة أو نظرية أو نتيجة ما.

الخطوة 3 وضّح أنه بما أن الافتراض يؤدي إلى تناقض، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي المطلوب إثباته صحيحًا.

مثال 1 ذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. إذا كان 6 من عوامل n، فإن 2 من عوامل n.

استنتاج العبارة الشرطية عبارة عن 2 من *عوامل* n. ويكون نفي الاستنتاج أن 2 *ليس من عوامل* n.

b. $\angle 3$ زاوية منفرجة.

إذا كان افتراض أن $\angle 3$ زاوية منفرجة خاطئًا، إذًا افتراض أن $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة صحيحًا.

تمرين موجه

1A. $x > 5$

1B. $\triangle XYZ$ هو مثلث متساوي الأضلاع.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يُمكن استخدام البراهين غير المباشرة في إثبات مفاهيم جبرية.

مثال 2 كتابة برهانًا جبريًا غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $-3x + 4 > 16$، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: $x < -4$

الخطوة 1 **البرهان غير المباشر:**
نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$. إذًا، افترض أن $x > -4$ أو $x = -4$ عبارة صحيحة.

الخطوة 2 قم بعمل جدول باحتمالات متعددة لـ x بافتراض أن $x > -4$ أو $x = -4$.

x	-4	-3	-2	-1	0
$-3x + 4$	16	13	10	7	4

عندما يكون $x > -4$، فإن $-3x + 4 < 16$؛ وعندما يكون $x = -4$، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3 في كلتا الحالتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض في المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 > 16$. لذا، لا بد أن يكون الافتراض بأن $x \geq -4$ عبارة خاطئة، ويكون الاستنتاج الأصلي بأن $x < -4$ عبارة صحيحة.

تمرين موجه

اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.

2A. إذا كان $7x > 56$، فإن $x > 8$.

2B. إذا كان $-c$ موجبًا، فإن c رمز سالب.

قراءة في الرياضيات

التناقض
التناقض هو أحد المبادئ المنطقية التي تشير إلى أن الافتراض لا يمكن أن يكون A وعكس A في الوقت نفسه.

يُمكن استخدام الاستنتاج والبرهان غير المباشرين في المواقف اليومية.

مثال من الحياة اليومية 3 البرهان الجبري غير المباشر

تكاليف حفل التخرج **طلب ماجد من صديقه محمد معرفة ثمن وجبته ووجبة محمد التي تناولاها عند خروجهما الأسبوع الماضي. لم يستطع محمد تذكر التكاليف الخاصة بكل وجبة، ولكنه تذكر إجمالي قيمة الفاتورة التي زادت عن 60 AED، بدون الإكرامية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى الوجبتين على الأقل زادت تكلفتها عن 30 AED.**

افترض أن تكلفة إحدى الوجبتين هي x وتكلفة الوجبة الأخرى هي y.

الخطوة 1 **المعطيات:** $x + y = 60$

المطلوب: $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:
افترض أن $x \leq 30$ و $y \leq 30$.

الخطوة 2 إذا كان $x \leq 30$ و $y \leq 30$، فإن $x + y \leq 30 + 30$ أو $x + y \leq 60$. يُعد هذا تناقضًا لأننا نعلم أن $x + y > 60$.

الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 30$ و $y \leq 30$ يؤدي إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فلا بد أن يكون الافتراض خاطئًا. لذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج بأن $x > 30$ أو $y > 30$ صحيحًا. لهذا، لا بد أن تكلفة إحدى الوجبتين زادت عن 30 AED.

تمرين موجه

3. السفر قطع إسماعيل ما يزيد عن 360 كيلو متراً خلال رحلته، وتوقف في استراحتين. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أنه سافر أكثر من 120 كيلو متراً في رحلة الذهاب فقط.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تُستخدم البراهين غير المباشرة غالبًا لإثبات المفاهيم في نظرية الأعداد. في هذه البراهين، يساعد تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي بالتعبير $2k$ وتمثيل العدد الفردي بالتعبير $2k + 1$ لأي عدد صحيح k.

مثال 4 البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًا صحيحًا، فإن x عدد زوجي صحيح.

الخطوة 1 **المعطيات:** $x + 2$ هو عدد زوجي صحيح.

المطلوب: x هو عدد زوجي صحيح.

برهان غير مباشر:
افترض أن x هو عدد صحيح فردي. هذا يعني أن $x = 2k + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة k.

الخطوة 2

$x + 2 = (2k + 1) + 2$ تعويض الافتراض

$= (2k + 2) + 1$ خاصية التبديل

$= 2(k + 1) + 1$ خاصية التوزيع

حدّد الآن ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا صحيحًا زوجيًا أم فرديًا. بما أن k عدد صحيح و $k + 1$ أيضًا عدد صحيح. افترض أن m تمثل العدد الصحيح $k + 1$.

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ التعويض

إذًا، يمكن تمثيل $x + 2$ باستخدام $2m + 1$، حيث m عدد صحيح. لكن هذا التمثيل يعني أن $x + 2$ هو عدد صحيح فردي، وهو ما يتعارض مع العبارة المعطاة بأن $x + 2$ عدد صحيح زوجي.

الخطوة 3 بما أن افتراض أن x هو عدد فردي صحيح يؤدي إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي، وهو أن x عدد زوجي صحيح، استنتاجًا صحيحًا.

تمرين موجه

4. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أنه إذا كان تربيع العدد الصحيح فرديًا، فإن هذا العدد الصحيح يكون فرديًا.

انتبه!

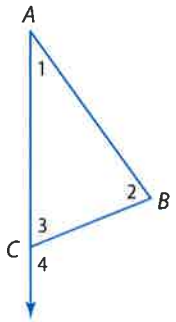
الفرضيات لا يوجد تشابه بين البراهين بالتناقض واستخدام مثال مضاد. يساعدك المثال المضاد في نبذ تخمين ما. ولا يمكن استخدامه في إثبات تخمين.

2 البراهين غير المباشرة في الهندسة

البراهين غير المباشرة في الهندسة يُمكن استخدام الاستنتاج غير المباشر لإثبات عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

إذا كانت إحدى الزوايا زاوية خارجية لمثلث، فأثبت أن قياسها أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين المتناظرتين غير المجاورتين.



الخطوة 1 صمم رسمًا تخطيطيًا لهذا الموقف. ثم حدّد المعطيات والمطلوب إثباته.

المعطيات: $\angle 4$ هي زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: $m\angle 4 > m\angle 1$ و $m\angle 4 > m\angle 2$.

برهان غير مباشر:
افترض أن $m\angle 4 \not> m\angle 1$ أو $m\angle 4 \not> m\angle 2$.
بعبارة أخرى، $m\angle 4 \leq m\angle 1$ أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

(يُتبع في الصفحة التالية)

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

الخطوة 2 تحتاج فقط إلى بيان أن افتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقض. تتبع فرضية $m\angle 4 \leq m\angle 2$ نفس الاستنتاج.

$m\angle 4 \leq m\angle 1$ تعني أنه إما $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة رقم 1 $m\angle 4 = m\angle 1$

نظرية الزاوية الخارجية $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

تعويض $m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$

اطرح $m\angle 4$ من كل طرف $0 = m\angle 2$

هذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0. إذًا $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة رقم 2 $m\angle 4 < m\angle 1$

بتطبيق نظرية الزاوية الخارجية، نجد أن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$. بما أن قياس الزاوية موجب، فإن تعريف المتباينة يشير ضمنيًا إلى أن $m\angle 4 > m\angle 1$. يتناقض هذا مع افتراض أن $m\angle 4 < m\angle 1$.

الخطوة 3 في كلتا المسألتين، يؤدي الافتراض إلى وجود تناقض مع نظرية أو تعريف. ولذلك، لا بد أن يكون الاستنتاج الأصلي بأن $m\angle 4 > m\angle 1$ و $m\angle 4 > m\angle 2$ صحيحًا.

نصيحة دراسية

التعرف على التناقضات

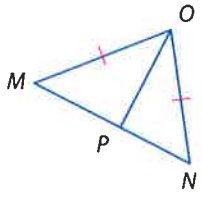
تذكر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا متضمنًا في المعلومة المعطاة أو الافتراض. قد يكون التناقض في حقيقة معلومة أو تعريف، مثل المسألة رقم 1 للمثال رقم 5؛ حيث لا بد أن يكون قياس الزاوية أكبر من 0.

تمرين موجه

5. اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$



التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.**

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2. $\triangle XYZ$ هو مثلث مختلف الأضلاع.

كان $4x < 24$. فإن $x < 6$.

4. $\angle A$ ليست زاوية قائمة.

مثال 2 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.**

5. إذا كان $2x + 3 < 7$، فإن $x < 2$.

6. إذا كان $3x - 4 > 8$، فإن $x > 4$.

مثال 3 7. **لاكروس** أحرزت هيام 13 نقطة لحساب فريق مدرستها الثانوية في لعبة اللاكروس خلال المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط إحرازها للنقاط في كل مباراة أقل من 3 نقاط.

مثال 4 8. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أنه إذا كان $5x - 2$ عددًا صحيحًا فرديًا، فإن x يجب أن يكون عددًا صحيحًا فرديًا.

مثال 5 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.**

9. وتر المثلث قائم الزاوية هو الضلع الأكبر في هذا المثلث.

10. إذا كانت هناك زاويتان متكاملتين، فلا يمكن أن تكونا زاويتين منفرجتين.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

11. إذا كان $2x > 16$، فإن $x > 8$.

12. $\angle 1$ و $\angle 2$ ليستا زاويتين متكاملتين.

13. إذا كان المستقيمان لهما نفس الميل، فإنهما متوازيان.

14. إذا كانت الزاويتان الداخليتان المتتاليتان اللتان تكوّنتا من مستقيمين ومحور قاطع، زاويتين متكاملتين، فإن هذين المستقيمين يكونان متوازيين.

15. إذا كان المثلث غير متساوي الأضلاع، فإنه يكون مثلثًا غير متساوي الزوايا.

16. العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2.

مثال 2

اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.

17. إذا كان $2x - 7 > -11$، فإن $x > -2$.

18. إذا كان $5x + 12 < -33$، فإن $x < -9$.

19. إذا كان $-3x + 4 < 7$، فإن $x > -1$.

20. إذا كان $-2x - 6 > 12$، فإن $x < -9$.

مثال 3

21. ألعاب الكمبيوتر اشترى إبراهيم لعبتين من ألعاب الكمبيوتر بتكلفة AED 80. بعد مرور بضعة أسابيع، سأله صديقه عن ثمن كل لعبة. لم يتذكر إبراهيم أسعار كل لعبة على حدة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن إحدى اللعبتين على الأقل تزيد تكلفتها عن AED 40.

22. جمع التبرعات تحتفل مدرسة أمال بمهرجان الخريف لجمع التبرعات للأعمال الخيرية المحلية. تصل تكلفة تذكرة الفرد البالغ لدخول المهرجان AED 6 وتذكرة الطفل AED 2.50. إذا كان إجمالي ما تم بيعه من التذاكر 375 تذكرة، وزاد الربح عن AED 1460، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل من تذاكر البالغين.

المثالان 4-5

الفرضيات اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة.

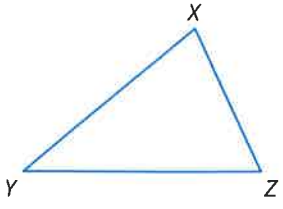
23. **المعطيات:** xy هو عدد فردي صحيح.
المطلوب: x و y هما عددان صحيحان فرديان

24. **المعطيات:** n^2 هو عدد زوجي.
المطلوب: n^2 يقبل القسمة على 4.

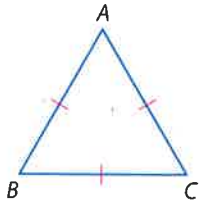
25. **المعطيات:** x هو عدد فردي.
المطلوب: x لا يقبل القسمة على 4.

26. **المعطيات:** xy هو عدد صحيح زوجي.
المطلوب: x أو y هو عدد صحيح زوجي.

27. **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \ncong \angle Y$



28. **المعطيات:** $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متساوي الزوايا.



29. في المثلث متساوي الساقين لا يمكن أن تكون إحدى زوايا القاعدة زاوية قائمة.

30. توجد زاوية قائمة واحدة في المثلث.

31. اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10

32. اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$، فإن b يكون سالبًا.

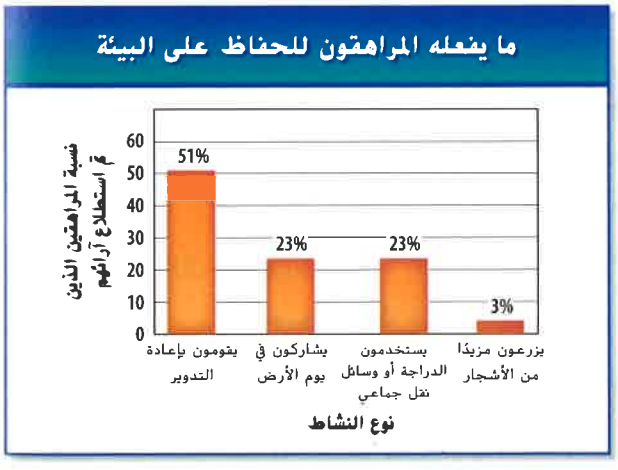
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

33. كرة السلة في رياضة كرة السلة، توجد ثلاث طرق ممكنة لتسجيل ثلاث نقاط دفعة واحدة. يمكن للاعب التسجيل في السلة من خلف خط الثلاث نقاط، أو قد تتم عرقلة اللاعب أثناء تسجيله رمية النقطتين وتحتسب له رمية حرة. أو قد تتم عرقلة اللاعب خلف خط الثلاث نقاط وتحتسب له ثلاث رميات حرة. عندما دخلت حصة في أحد صفوف الانتظار، كانت النتيجة 28 نقطة للفريق المضيف و 26 نقطة للفريق الزائر. وعند عودتها، كانت النتيجة 28 للفريق المضيف و 29 للفريق الزائر. استنتجت حصه أن أحد لاعبي الفريق الزائر قام بتسجيل رمية ثلاثية. أثبت أو ادحض افتراضها باستخدام البرهان غير المباشر.

34. الألعاب تدور لعبة حاسوب حول فارس في مهمة للبحث عن الكنز. وفي نهاية الرحلة، يقترب الفارس من البابين الظاهرين بالأسفل.

يخبر أحد الخدم الفارس أن إحدى العلامتين خاطئة والأخرى صحيحة. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد الباب الذي يجب أن يختاره الفارس. اشرح استنتاجك.

تطلاعات الرأي أجرت مكتبة بدرية المحلية استطلاعات من خلال الإنترنت للمراهقين لمعرفة الأنشطة التي يشارك فيها المراهقون للحفاظ على البيئة. جاءت نتائج الاستطلاع كما هو موضح في الرسم البياني.



a. المطلوب: *أكثر من نصف المراهقين المشاركين قالوا إنهم يقومون بإعادة التصنيع للحفاظ على البيئة.*

b. إذا تم أخذ رأي 400 مراهق في استطلاع الرأي، فأثبت أن 92 مراهقًا قالوا إنهم شاركوا في يوم الحفاظ على الأرض.

36. الاستنتاج يمتلك كل من ناصر ومنصور ومحمود سياراتٍ ذات ألوان مختلفة. توجد عبارة واحدة صحيحة بين العبارات التالية. استخدم الاستنتاج غير المباشر لتحديد العبارة الصحيحة. اشرح.

(1) ناصر لديه سيارة حمراء.

(2) منصور ليس لديه سيارة حمراء.

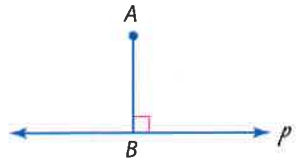
(3) محمود ليس لديه سيارة زرقاء.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدّد إذا ما كان من الممكن إثبات صحة كل عبارة حول المسافة الأقصر بين نقطة ومستقيم أو مستوى باستخدام البرهان المباشر أو غير المباشر. ثم اكتب برهانًا لكل عبارة.

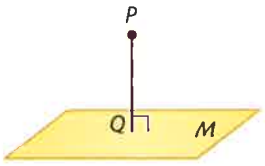
37. المعطيات: $\overline{AB} \perp$ المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من A إلى المستقيم p.



38. المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ المستوى M

المطلوب: $\overline{PQ}$ هي القطعة المستقيمة الأقصر من P إلى المستوى M.



39. نظرية الأعداد في هذه المسألة، ستضع تخمينًا وتثبته حول علاقة نظرية الأعداد.

a. اكتب تعبيرًا حول *مجموع مكعب أحد الأعداد والعدد ثلاثة*.

b. أنشئ جدولاً يشتمل على قيمة التعبير لـ 10 قيم مختلفة لـ n. أضف قيمًا زوجية وفردية لـ n.

c. اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة التعبير زوجية.

d. اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

40. الكتابة في الرياضيات اشرح الإجراء لكتابة برهان غير مباشر.

41. مسألة غير محددة الإجابة اكتب عبارة يمكن إثباتها باستخدام البرهان غير المباشر. أضف برهانًا غير مباشر لعبارتك.

42. تحدٍ إذا كان x عددًا نسبيًا، فيمكن تمثيله بناتج القسمة $\frac{a}{b}$ بالنسبة للعددين الصحيحين a و b، إذا كان $b \neq 0$. لا يمكن تمثيل العدد غير النسبي بناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر لإظهار أن ناتج ضرب عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عددًا غير نسبي.

43. النقد تحاول كل من أسماء وإيمان إثبات العبارة التالية باستخدام البرهان غير المباشر. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إذا كان مجموع العددين زوجيًا، فإن الأعداد زوجية.

أسماء

العبارة صحيحة. إذا كان أحد الأعداد زوجيًا والعدد الآخر صفرًا، فإن المجموع يكون زوجيًا. بما أن الافتراض يكون صحيحًا حتى عندما يكون الاستنتاج خاطئًا، فإن العبارة صحيحة.

إيمان

العبارة صحيحة. إذا كان العددان فرديين، فإن المجموع يكون زوجيًا. بما أن الافتراض يكون صحيحًا عندما يكون الاستنتاج خاطئًا، فإن العبارة صحيحة.

44. الكتابة في الرياضيات راجع التمرين 8. اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة ثم اكتب البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي. كيف يتصل كل من البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

45. إجابة مختصرة اكتب معادلة في صيغة الميل والمقطع لوصف المستقيم الذي يمر بالنقطة (5, 3) ويوازي المستقيم الذي تمثله المعادلة $-2x + y = -4$.

46. عبارة: إذا كانت $\angle A \cong \angle B$ و$\angle A$ مكملة لـ $\angle C$، فإن $\angle B$ مكملة لـ $\angle C$.

تثبت بثينة العبارة السابقة من خلال التناقض. فقد بدأت بافتراض أن $\angle B$ غير مكملة لـ $\angle C$. أي من التعريفات التالية ستستخدمه بثينة للوصول إلى التناقض؟

A تعريف التطابق

B تعريف الزوج الخطي

C تعريف الزاوية القائمة

D تعريف الزوايا المتكاملة

47. صنّف زوايا $\triangle MNO$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر إذا كان $MN = 9$، و $NO = 7.5$، و $OM = 12$.

F $\angle N, \angle O, \angle M$

G $\angle O, \angle M, \angle N$

H $\angle O, \angle N, \angle M$

J $\angle M, \angle O, \angle N$

48. SAT/ACT إذا كان $b > a$، فأي مما يلي لا بد أن يكون صحيحًا؟

A $-a > -b$

B $3a > b$

C $a^2 < b^2$

D $a^2 < ab$

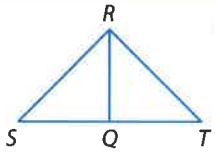
E $-b > -a$

مراجعة شاملة

49. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

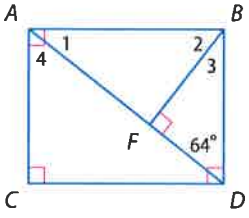
المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$



الهندسة الإحداثية **حدّد إحداثيات مركز الدائرة المحيطة لكل مثلث له رؤوس معلومة.**

50. $D(-3, 3), E(3, 2), F(1, -4)$

51. $A(4, 0), B(-2, 4), C(0, 6)$



أوجد قياس كل مما يلي.

52. $m\angle 1$

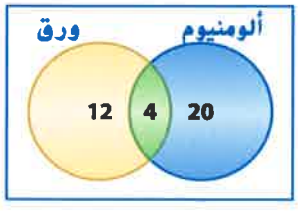
53. $m\angle 4$

الهندسة الإحداثية أوجد المسافة بين كل زوج من المستقيمات المتوازية باستخدام المعادلات المعطاة.

54. $x + 3y = 6$
$x + 3y = -14$

55. $y = 2x + 2$
$y = 2x - 3$

إعادة تدوير مخلفات الأرصفة



56. إعادة التدوير راجع مخطط فن الذي يمثل عدد الأحياء في مدينة معينة المشتركة في برنامج إعادة تدوير مخلفات الأرصفة من الورق أو الألومنيوم.

a. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الألومنيوم؟

b. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير كل من الورق أو الألومنيوم أو كليهما؟

c. كم عدد الأحياء التي تعيد تدوير الورق والألومنيوم؟

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كانت كل متباينة صحيحة أم خاطئة.

57. $23 - 11 > 9$

58. $41 - 19 < 21$

59. $57 + 68 < 115$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

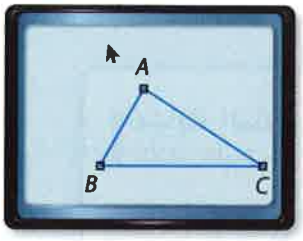
4-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
متباينة المثلث

يمكنك استخدام تطبيق خاص على بعض حاسبات التمثيل البياني لاكتشاف خصائص المثلثات.

نشاط 1

صمم مثلثًا. لاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الآخر.

الخطوة 1 ارسم مثلثًا باستخدام أداة المثلث الموجودة في قائمة **F2**. ثم استخدم الأداة **Alph-Num** الموجودة في قائمة **F5** لتسمية الرؤوس بالأحرف A، و B، و C.

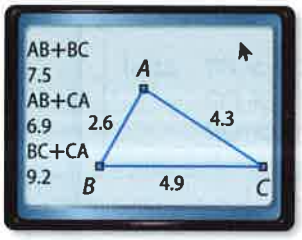


الخطوة 1

الخطوة 2 قم بالوصول إلى أداة **distance & length (المسافة والطول)** الموضحة باسم **D. & Length**، ضمن **Measure (قياس)** في القائمة **F5**. استخدم الأداة لقياس كل ضلع من أضلاع المثلث.

الخطوة 3 اعرض $AB + BC$، و $AB + CA$، و $BC + CA$ باستخدام أداة **Calculate (احسب)** في القائمة **F5**. أطلق أسماء على القياسات.

الخطوة 4 انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث.



الخطوتان 2 و 3

تحليل النتائج

1. استبدل كل ● بأحد الرموز $<$، أو $>$، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.

$BC + CA \bullet AB$ $\quad$ $AB + CA \bullet BC$ $\quad$ $AB + BC \bullet CA$

2. انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث. ثم راجع إجاباتك على التمرين 1. ماذا تلاحظ؟

3. انقر على النقطة A واسحبها لكي تقع على المستقيم BC. ماذا تلاحظ حول AB، و BC، و CA؟ هل الرموز A، و B، و C تمثل رؤوس المثلث؟ اشرح.

4. **ضع تخمينًا** حول مجموع أطوال ضلعين من مثلث وطول الضلع الثالث.

5. هل القياسات والملاحظات التي دونتها في النشاط والتمارين 1-3 تمثل برهانًا للتخمين الذي قمت به في التمرين 4؟ اشرح.

6. استبدل كل ● بأحد الرموز $<$، أو $>$، أو $=$ لجعل العبارة صحيحة.

$|BC - CA| \bullet AB$ $\quad$ $|AB - CA| \bullet BC$ $\quad$ $|AB - BC| \bullet CA$

ثم انقر واسحب الرؤوس لتغيير شكل المثلث ومراجعة إجاباتك. ماذا تلاحظ؟

7. كيف تمكنت من استخدام ملاحظاتك لتحديد الأطوال المحتملة للضلع الثالث بالمثلث من خلال معرفة طولي الضلعين الآخرين؟

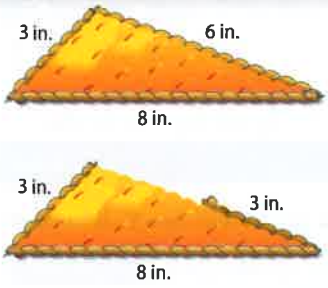
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

4-5 متباينة المثلث

السابق:
- لقد تعرفت على خواص متباينات العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث وقمت بتطبيقها.

الحالي:
1. استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد المثلثات المحتملة.
2. أثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية متباينة المثلث.

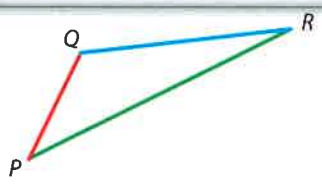
لماذا:
- في عرض لتحسين المنازل، أرادت مصممة استخدام قطع مقصوصة من أحبال من مشروع حياكة آخر لتزيين الوسائد المثلثية الشكل التي صنعتها هي وصاحب المنزل. ولتقليل التكاليف، أرادت المصممة استخدام القصاصات دون قطعها. واختارت ثلاث قصاصات بشكل عشوائي وحاولت تكوين مثلث. تم توضيح محاولتين من ذلك.



ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 متباينة المثلث في حين أن المثلث يتم تصميمه باستخدام هذه القطع المستقيمة الثلاث، يجب أن تنشأ علاقة خاصة بين أطوال القطع المستقيمة حتى تشكّل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث



يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة
$PQ + QR > PR$
$QR + PR > PQ$
$PR + PQ > QR$

سوف تثبت النظرية 4.11 في تمرين 23.

لتوضيح أنه ليس من الصعب تكوين مثلث باستخدام ثلاثة أطوال أضلاع، يجب عليك فقط توضيح أن إحدى متباينات المثلث الثلاث ليست صحيحة.

مثال 1 تحديد أطوال الأضلاع المعطاة المحتملة للمثلثات

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا، فاشرح السبب.

a. 8 in., 15 in., 17 in.

تحقق من كل متباينة.

$8 + 15 \stackrel{?}{>} 17$
$23 > 17$ ✔

$8 + 17 \stackrel{?}{>} 15$
$25 > 15$ ✔

$15 + 17 \stackrel{?}{>} 8$
$32 > 8$ ✔

بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 8 و 15 و 17 بوصة ستكوّن مثلثًا.

b. 6 m, 8 m, 14 m

$6 + 8 \stackrel{?}{>} 14$
$14 \not> 14$ ✘

بما أن مجموع زوج واحد من أطوال الأضلاع ليس أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 6 و 8 و 14 مترًا لن تكوّن مثلثًا.

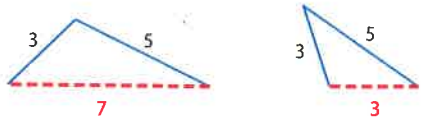
تمرين موجه

1A. 15 yd, 16 yd, 30 yd

1B. 2 ft, 8 ft, 11 ft

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عندما يكون طولا ضلعين في مثلث معلومين، قد يكون الضلع الثالث أي طول في مدى معين من القيم. يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث لتحديد مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث.



مثال على الاختبار المعياري 2 إيجاد الأطوال المحتملة للضلع

إذا كان قياسا ضلعين في مثلث 3cm و 7cm، فما *أقل* عدد صحيح ممكن لقياس الضلع الثالث؟

A 3 cm **B** 4 cm **C** 5 cm **D** 10 cm

نصيحة عند حل الاختبار

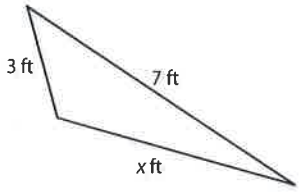
اختبار الخيارات إذا لم يكن لديك متسع من الوقت، فيمكنك اختبار كل خيار لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد الخيارات المتبقية.

قراءة فقرة الاختبار

يجب أن تحدد أي قيمة تمثل أقل قياس محتمل للضلع الثالث من المثلث الذي يبلغ طولا ضلعيه 3 أقدام و 7 أقدام.

حَل فقرة الاختبار

لتحديد أقل قياس محتمل من الخيارات المعطاة، حدد أولاً مدى القياس المحتمل للضلع الثالث.



صم رسمًا تخطيطيًا وافرض أن x يمثل طول الضلع الثالث.

أولاً، أنشئ كل متباينات المثلثات الثلاثة وحلها.

$3 + 7 > x$ $\quad$ $3 + x > 7$ $\quad$ $x + 7 > 3$

$10 > x$ أو $x < 10$ $\quad$ $x > 4$ $\quad$ $x > -4$

قراءة في الرياضيات

رموز المتباينات المتعددة

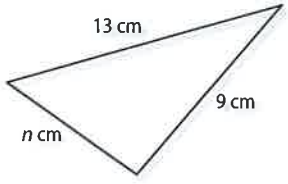
المتباينة المركبة $4 < x < 10$ تُقرأ x بين 4 و 10.

لاحظ أن $x > -4$ صحيح دائمًا لأي قياس عدد صحيح لـ x.
بجمع المتباينتين المتبقيتين، فإن مدى القيم التي تلائم كلا المتباينتين هو $x < 10$ و $x > 4$، والذي يمكن كتابته بالصيغة $4 < x < 10$.

أقل قيمة لعدد صحيح بين 4 و 10 هي 5. إذًا الإجابة الصحيحة هي الخيار C.

تمرين موجه

2. أي مما يلي قد *لا* يمكن أن يمثل قيمة n؟



F 7 **G** 10 **H** 13 **J** 22

2 البراهين باستخدام نظرية متباينة المثلث

يمكنك استخدام نظرية متباينة المثلث للاستنتاج في البراهين.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

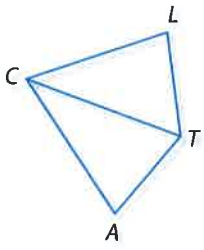
مثال من الحياة اليومية 3 البرهان باستخدام نظرية متباينة المثلث

الربط بالحياة اليومية

لا تقطع رحلة الطيران المباشرة نفس المسافة التي تقطعها رحلة الطيران التي تنطلق دون توقف. بالنسبة إلى رحلة الطيران المباشرة، لا يغير المسافرون الطائرات، ولكن قد تهبط الطائرة في محطة واحدة أو اثنتين قبل المتابعة إلى وجهتها النهائية.

السفر المسافة من ينابيع كولورادو، في منطقة الينابيع، بكولورداو، إلى أبيلين في تكساس هي نفسها المسافة من ينابيع كولورادو إلى تولسا في أوكلاهوما. أثبت أن رحلة الطيران مباشرة من ينابيع كولورادو إلى تولسا عبرلنكولن، في نبراسكا، تقطع مسافة أكبر من رحلة الطيران التي تنطلق دون توقف من ينابيع كولورادو إلى أبيلين.

صمم رسمًا تخطيطيًا أبسط لهذه الحالة وحدد اسمًا له. ارسم الضلع $\overline{LT}$ لتكوين $\triangle CTL$.



المعطيات: $CA = CT$

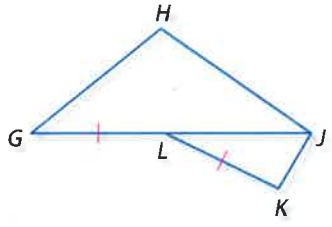
المطلوب: $CL + LT > CA$

البرهان:

العبارات	التبرير
1. $CA = CT$	1. المعطيات
2. $CL + LT > CT$	2. نظرية متباينة المثلث
3. $CL + LT > CA$	3. التعويض

تمرين موجه

3. اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$

التحقق من فهمك

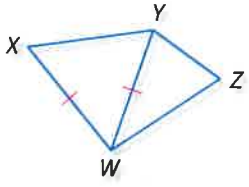
مثال 1 **هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.**

5 cm, 7 cm, 10 cm **2.** 3 in., 4 in., 8 in. **3.** 6 m, 14 m, 10 m

مثال 2 **4. الاختيار من متعدد** إذا كان قياسا ضلعي مثلث 5 أمتار و 9 أمتار، فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟

A 4 m **B** 5 m **C** 6 m **D** 14 m

مثال 3 **5. البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام أطوال الأضلاع المعطاة؟ إذا كان لا يُمكن ذلك، فاشرح السبب.**

6. 4 ft, 9 ft, 15 ft

7. 11 mm, 21 mm, 16 mm

8. 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm

9. 2.1 in., 4.2 in., 7.9 in.

10. $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m

11. $1\frac{1}{5}$ km, $4\frac{1}{2}$ km, $3\frac{3}{4}$ km

مثال 2 **احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.**

12. 4 ft, 8 ft

13. 5 m, 11 m

14. 2.7 cm, 4.2 cm

15. 3.8 in., 9.2 in.

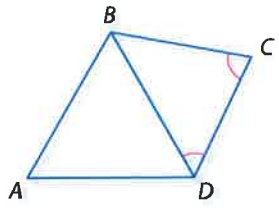
16. $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km

17. $2\frac{1}{3}$ yd, $7\frac{2}{3}$ yd

مثال 3 **البرهان اكتب برهانًا من عمودين.**

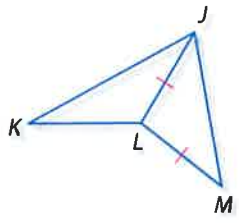
18. المعطيات: $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $AB + AD > BC$



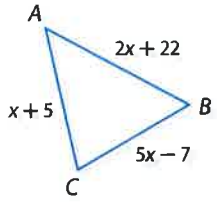
19. المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

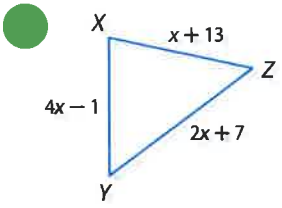
المطلوب: $KJ + KL > LM$



الاستنتاج المنطقي **حدد القيم المحتملة لـ x.**

20.





22. القيادة يريد حارب اتخاذ أقصر طريق من منزله إلى مباراة كرة قدم في استاد نادي الاتحاد. يمكنه أن يتخذ طريق أبو ظبي الرئيسي أو الطريق السريع 4 ثم شارع 6 للوصول إلى نادي الاتحاد.

a. أي طريق من المسارين المحتملين يعطي أقصر مسافة؟ اشرح استنتاجك.

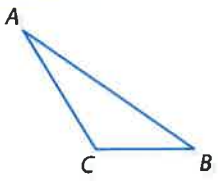
b. افترض أن حارب يقود دائمًا بأقل من حد السرعة. إذا كان أقصى سرعة في طريق أبو ظبي الرئيسي هو 30 ميلاً في الساعة وفي كل من الطريق السريع 4 وشارع 6 هو 55 ميلاً في الساعة، فما الطريق الأسرع؟ اشرح.

23. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

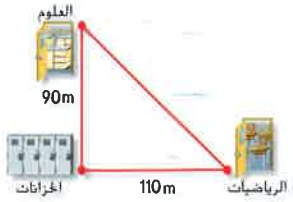
المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة إضافية $\overline{CD}$، بحيث يكون C بين B و D، و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$.)



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف. McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف.

24. المدرسة عندما تذهب رهام من صف العلوم إلى صف الرياضيات، فإنها تتوقف عند خزانتها. المسافة بين صف العلوم وخزانتها هي 90 متراً. والمسافة من غرفتها إلى صف الرياضيات هي 110 أمتار. ما المسافة المحتملة من صف العلوم إلى صف الرياضيات إذا كانت تمشي في الطريق الذي يمر مباشرة بين الفصلين الدراسيين



أوجد مدى القياسات الممكنة لـ x إذا كانت كل مجموعة من التعابير تمثل قياسات أضلاع المثلث.

25. x, 4, 6

26. 8, x, 12

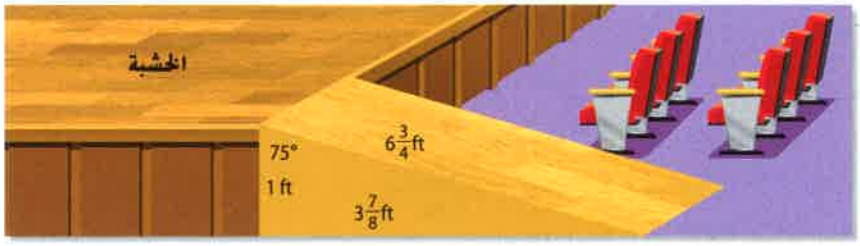
27. $x + 1$, 5, 7

28. $x - 2$, 10, 12

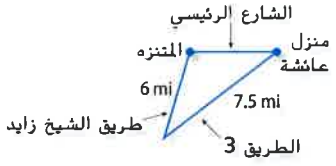
29. $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$

30. x, $2x + 1$, $x + 4$

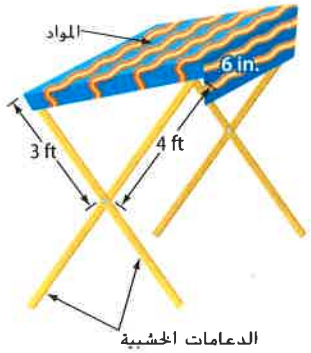
31. نادي الدراما يعمل حميد وحسن على إنشاء منحدر للمسرح من أجل الإنتاج القادم لنادي الدراما. نموذج حميد للانحدار موضح أدناه. يهتم حسن بالقياسات ويعتقد أنه يجب أن يتحققا من القياسات قبل بدء تقطيع الخشب. هل اهتمام حسن في محله؟ اشرح استنتاجك.



32. الاستنتاج المنطقي تركب عائشة دراجتها إلى المتنزه ويمكنها أن تتخذ أحد طريقين. الطريق الأكثر اختصارًا من منزلها هو اتخاذ الشارع الرئيسي، ولكن سيزداد الأمان باتخاذ الطريق رقم 3 ثم التحول يمينًا إلى طريق الشيخ زايد كما هو موضح. ما المسافة الإضافية التي ستمشيها بالميل إذا اتخذت الطريق رقم 3 إلى طريق الشيخ زايد؟



33. صميم صممت سالي مظلة يمكنها هي وصديقاتها أخذها إلى الشاطئ. وقررت سالي تغطية الجزء العلوي من المظلة بمواد ستمتد بمقدار 6 بوصات فوق المقدمة. ما طول المواد التي يجب عليها شراؤها لاستخدامها في تصميمها بحيث تتم تغطية الجزء العلوي من المظلة، بما في ذلك الثنية عندما تكون الدعامات مفتوحة بأكبر قدر ممكن؟ لنفترض أن عرض المادة يكفي لتغطية المظلة.



التقدير دون استخدام الحاسبة، حدد هل من الممكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة للأضلاع أم لا. اشرح.

34. $\sqrt{8}$ ft, $\sqrt{2}$ ft, $\sqrt{35}$ ft

35. $\sqrt{99}$ yd, $\sqrt{48}$ yd, $\sqrt{65}$ yd

36. $\sqrt{3}$ m, $\sqrt{15}$ m, $\sqrt{24}$ m

37. $\sqrt{122}$ in., $\sqrt{5}$ in., $\sqrt{26}$ in.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التبرير حدد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة هي رؤوس المثلث أم لا. اشرح.

38. $X(1, -3)$, $Y(6, 1)$, $Z(2, 2)$

39 $F(-4, 3)$, $G(3, -3)$, $H(4, 6)$

40. $J(-7, -1)$, $K(9, -5)$, $L(21, -8)$

41. $Q(2, 6)$, $R(6, 5)$, $S(1, 2)$

42. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستخدم المتباينات لعقد مقارنات بين أضلاع مثلثين وزواياه.

a. هندسيًا ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات التي يوجد بها زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج واحد من الأضلاع غير المتطابقة. حدد كل زوج من الأضلاع المتطابقة. اكتب على كل زوج مثلثات الرموز ABC و DEF، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

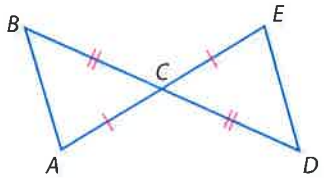
b. جدوليًا انسخ الجدول أدناه. قِس وسجّل قيم BC، و $m\angle A$، و EF، و $m\angle D$ لكل زوج من المثلثات.

زوج من المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

c. لفظيًا ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزوايا المقابلة للأضلاع غير المتطابقة لزوج المثلثات التي بها ضلعان متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا

43. التحدي ما المدى للمحيطات المحتلة للشكل $ABCDE$ إذا كان $AC = 7$ و $DC = 9$؟ شرح استنتاجك.



44. الاستدلال ما المدى لأطوال كل ضلع في مثلث متساوي الساقين إذا كان قياس القاعدة 6 بوصات؟ اشرح.

45. الكتابة في الرياضيات ما الذي يمكنك التوصل إليه حول مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة؟ قم بتضمين عنصرين على الأقل.

46. تحدٍ أضلاع مثلث متساوي الساقين هي أعداد صحيحة ومحيطه يساوي 30 وحدة. ما احتمال أن يكون المثلث متساوي الأضلاع؟

47. مسألة غير محددة الإجابة طول أحد أضلاع مثلث متران. ارسم مثلثًا يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أقصر ضلع، وارسم مثلثًا آخر يكون فيه الضلع الذي يبلغ طوله متران هو أطول ضلع. قم بتضمين قياسات الأضلاع والزوايا في رسمك.

48. الكتابة في الرياضيات لنفرض أن منزلك يبعد $\frac{3}{4}$ كيلو متر عن أحد المتنزهات، ويبعد المتنزه كيلو مترا ونصف عن مركز التسوق.

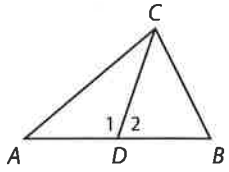
a. إذا لم يكن منزلك والمتنزه ومركز التسوق على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت المواقع الثلاثة على خط واحد، فما المعطيات التي تعرفها حول المسافة من منزلك إلى مركز التسوق؟ اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

49. إذا كان $\overline{DC}$ متوسطًا في $\triangle ABC$ و $m\angle 2 > m\angle 1$، أي العبارات التالية ليست صحيحة؟



A $AD = BD$

B $m\angle ADC = m\angle BDC$

C $AC > BC$

D $m\angle 1 > m\angle B$

50. إجابة مختصرة يرغب فريق كرة قدم في مدرسة ثانوية في الفوز بنسبة 75% بعد خوض 15 مباراة هذا الموسم. في الأسابيع الثلاثة الأولى، فاز الفريق في 5 مباريات. كم عدد المباريات الإضافية التي يجب على الفريق الفوز فيها لتحقيق هدفه؟

51. أي مما يلي يمثل خاتمة منطقية وفقًا للعبارة وعكسها أدناه؟

عبارة: إذا كان المضلع عبارة عن مستطيل، فإن له أربعة أضلاع.

العكس: إذا كان المضلّع به أربعة أضلاع، إذًا فهو مستطيل.

F العبارة وعكسها صحيحان.

G العبارة خاطئة، والعكس خطأ.

H العبارة صحيحة؛ والعكس خطأ.

J العبارة خاطئة، والعكس صحيح.

SAT/ACT .52 عند طرح 7 من $14w$، تكون النتيجة z. أي من المعادلات التالية تمثّل هذه العبارة؟

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

E $7 + 14w = 7z$

مراجعة شاملة

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

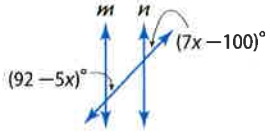
53. إذا كان $4y + 17 = 41$، إذًا $y = 6$.

54. إذا كان المستقيمان مقطوعين بقاطع وكان زوج من الزوايا الداخلية البديلة متطابقًا، فإن الخطان متوازيان.

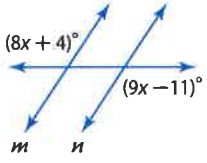
55. الجغرافيا تبلغ المسافة بين مدينة العين في إمارة أبو ظبي ومدينة دبا الحصن في إمارة الشارقة حوالي 375 كيلو متراً. المسافة من دبا الحصن إلى مدينة زايد في إمارة العين حوالي 243 كيلو متراً. استخدم نظرية متباينة المثلث لإيجاد المسافة المحتملة بين مدينة العين ومدينة زايد.

أوجد قيمة x حيث إن $n \parallel m$. حدد المسلمة أو النظرية التي استخدمتها.

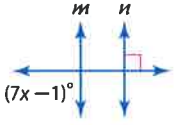
56.



57.



58.



الجبر أوجد قيمة x و JK إذا كان J بين K و L.

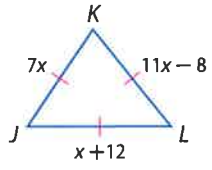
59. $KJ = 3x$، و $JL = 6x$، و $KL = 12$

60. $KJ = 3x - 6$، و $JL = x + 6$، و $KL = 24$

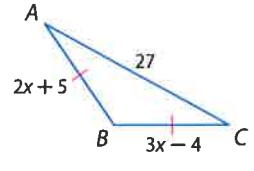
مراجعة المهارات

أوجد قيمة x وقياسات الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

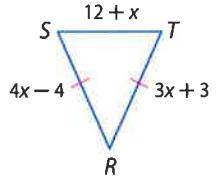
61.



62.



63.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

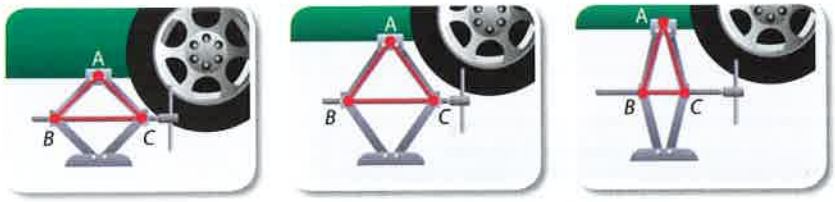
4-6 المتباينات في مثلثين

السابق | **الحالي** | **لماذا**

- لقد استخدمت المتباينات لعمل مقارنات في مثلث واحد.

1. تطبيق نظرية المِفْصَلَة أو عكسها لعمل مقارنة بين مثلثين.
2. إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المِفْصَلَة أو عكسها.

- يُستخدم مرفاع السيارة لرفع السيارات. وهذا المرفاع الموضح أدناه يعد أحد أبسط المرافيع المستخدمة اليوم. لاحظ أنه عند خفض المرفاع، تظل ساقا $\triangle ABC$ متساوي الساقين متطابقتين، ولكن تتسع الزاوية المحصورة A ويطول كلٌ من $\overline{BC}$، والضلع المقابل لـ $\angle A$.



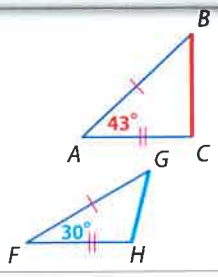
ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

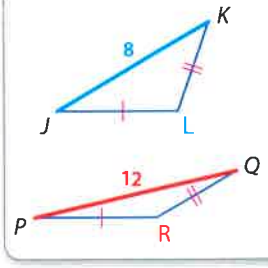
1 نظرية المِفْصَلَة تعد الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من أنواع المثلثات، وهي تصور النظريات التالية.

النظريات المتباينات في مثلثين



4.13 نظرية المِفْصَلَة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة للمثلث الأول أكبر من الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان $m\angle A > m\angle F$ و $\overline{AB} \cong \overline{FG}, \overline{AC} \cong \overline{FH}$.
إذًا $BC > GH$.



4.14 عكس نظرية المِفْصَلَة إذا تطابق ضلعان في مثلث مع ضلعي مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول تكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

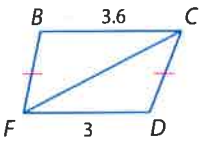
مثال: إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{PR}, \overline{KL} \cong \overline{QR}$، و $PQ > JK$، إذًا $m\angle R > m\angle L$.

سوف تُثبت النظرية 4.14 في تمرين 28.

مثال 1 استخدام نظرية المِفْصَلَة وعكسها

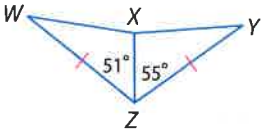
قارن بين القياسات المعطاة.

a. WX و XY



في $\triangle BCF$ و $\triangle DFC$، يكون $\overline{BF} \cong \overline{DC}$.
و $\overline{FC} \cong \overline{CF}$، و $BC > FD$.
إذًا $\angle BFC > \angle DCF$ وعكسها، المِفْصَلَة.

b. $m\angle FCD$ و $m\angle BFC$



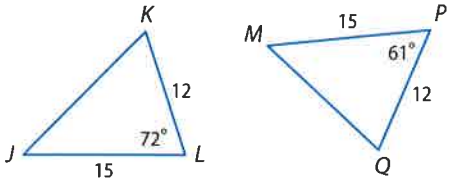
في $\triangle WXZ$ و $\triangle YXZ$، يكون $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$.
و $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$، و $\angle WZX > \angle YZX$.
بتطبيق نظرية
المِفْصَلَة، إذا $m\angle WZX < m\angle YZX$، $WX < XY$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

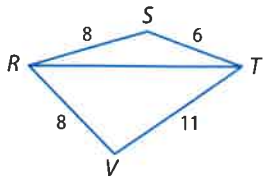
تمرين موجه

قارن بين القياسات المعطاة.

1A. JK و MQ

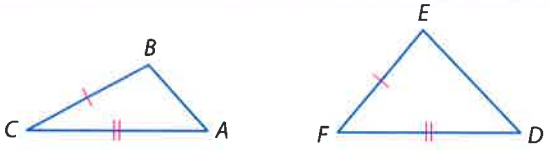


1B. $m\angle SRT$ و $m\angle VRT$



البرهان نظرية المِفْصَلَة

المعطيات: $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$، يكون
$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$
$m\angle F > m\angle C$



المطلوب: $DE > AB$

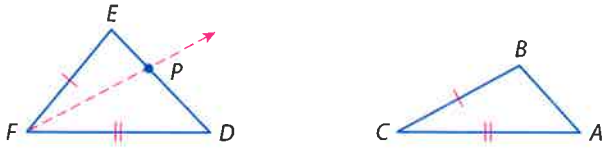
البرهان:

نعلم أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. ونعلم أيضًا أن $m\angle F > m\angle C$.

ارسم شعاعًا مساعدًا FP بحيث يكون $m\angle DFP = m\angle C$ و $\overline{PF} \cong \overline{BC}$. يؤدي ذلك إلى حالتين.

الحالة 1 تقع P على $\overline{DE}$.

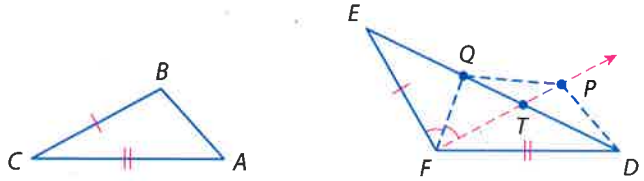
إذا $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بتطبيق مسلمة SAS. إذًا، $PD = BA$ بتطبيق CPCTC وتعريف القطع المتطابقة.



بتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة، $DE = EP + PD$. وأيضًا، $DE > PD$ حسب تعريف المتباينة. لذلك، $DE > AB$ بالتعويض.

الحالة 2 **لا تقع** P على $\overline{DE}$.

ثم افترض أن تقاطع $\overline{FP}$ و $\overline{ED}$ يكون عند النقطة T، وارسم قطعة مستقيمة مساعدة أخرى $\overline{FQ}$ بحيث يقع Q على $\overline{DE}$ و $\angle EFQ \cong \angle QFP$. ارسم بعد ذلك القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PD}$ و $\overline{PQ}$.



بما أن $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ و $\overline{FP} \cong \overline{EF}$، إذًا $\overline{FP} \cong \overline{BC}$ بتطبيق خاصية التعدي. أيضًا يتطابق $\overline{QF}$ مع نفسه بتطبيق خاصية الانعكاس. إذًا، $\triangle PFQ \cong \triangle EFQ$ بتطبيق مسلّمة SAS. بتطبيق CPCTC أو $\overline{PQ} \cong \overline{EQ}$ أو $PQ = EQ$. أيضًا، $\triangle CBA \cong \triangle FPD$ بتطبيق مسلّمة SAS. إذًا، $\overline{BA} \cong \overline{PD}$ بتطبيق CPCTC و $BA = PD$.

في $\triangle QPD$، يكون $QD + PQ > PD$ بتطبيق نظرية متباينة المثلث. بتطبيق التعويض، نجد أن $QD + EQ > PD$. بما أن $ED = QD + EQ$ بتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة، فإن $ED > PD$. باستخدام التعويض، $ED > BA$ أو $DE > AB$.

نصيحة دراسية

نظرية المتباينة SAS و SSS

تُسمى نظرية المِفْصَلة كذلك بنظرية المتباينة SAS. يُسمى أيضًا عكس نظرية المفصلة بنظرية المتباينة SSS.

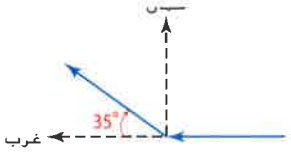
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام نظرية المِنْصَلَة لحل مسائل من واقع الحياة.

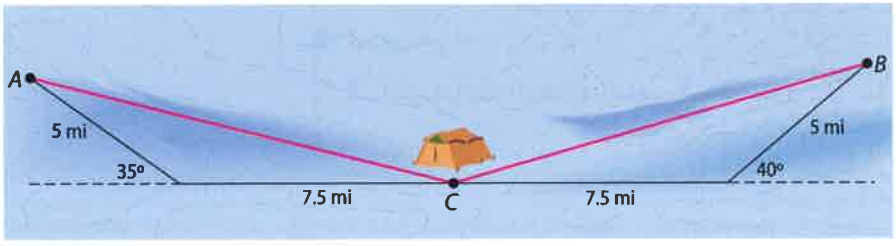
مثال من الحياة اليومية 2 استخدام نظرية المِنْصَلَة

التزلج على الجليد غادرت مجموعتان من متزلجي الجليد من المعسكر الأساسي نفسه. قطعت المجموعة A مسافة 7.5 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 35° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 5 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 7.5 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 40° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 5 أميال. عند هذه النقطة، أي من المجموعتين قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي؟ اشرح استنتاجك.

الفهم لاستخدام مجموعة الاتجاهات المعطاة في هذه المسألة، ستحتاج إلى تحديد أي من مجموعتي التزلج على الجليد قطعت مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ثم تفسير التحول بمقدار 35° باتجاه الشمال الغربي بشكل صحيح كما هو موضح.



التخطيط صمم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.



تشكّل المسارات التي سلكتها المجموعتان وخط العودة المستقيم مثلثين. قطعت كل مجموعة 7.5 أميال ثم حولت اتجاهها وقطعت 5 أميال.

استخدم الأزواج الخطية لحساب قياس الزاويتين المحصورتين. ثم طبّق نظرية المِنْصَلَة لمقارنة المسافة التي قطعتها كل مجموعة بعيدًا عن المعسكر الرئيسي.

الحل قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي 35 − 180 أو 145.
قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة B يساوي 40 − 180 أو 140.

بما أن 140 < 145. فإن $AC > BC$ بتطبيق نظرية المِنْصَلَة. إذًا قطعت المجموعة A مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي.

التحقق تحولت المجموعة B بمقدار 5° أكثر من المجموعة A عند عودتهما إلى المعسكر الرئيسي، لذا يجب أن تكون المجموعة B أقرب إلى المعسكر من المجموعة A. وبذلك يجب أن تكون المجموعة A على مسافة أبعد عن المعسكر الرئيسي. ✓

تمرين موجه

2A. التزلج غادرت مجموعتان من المتزلجين المنتجع نفسه. وقطعت المجموعة A مسافة 4 أميال في اتجاه الشرق ثم تحولت 70° في الاتجاه الشمالي الشرقي وقطعت 3 أميال. وقطعت المجموعة B مسافة 4 أميال في اتجاه الغرب ثم تحولت 75° في الاتجاه الشمالي الغربي وقطعت 3 أميال. عند هذه النقطة، أي المجموعتين قطعت مسافة *أبعد* عن المنتجع؟ اشرح استنتاجك.

2B. التزحلق في المسألة 2A، افترض أنه بدلاً مما سبق قطعت المجموعة A مسافة 4 أميال غربًا ثم تحولت 45° في الاتجاه الشمالي الغربي وسارت 3 أميال. أي المجموعتين ستكون أقرب إلى المنتجع؟ اشرح استنتاجك.

إذا كانت الزاوية المحصورة لأحد المثلثين أكبر من الزاوية المحصورة للمثلث الآخر، فإننا نستخدم عكس نظرية المِنْصَلَة.

الربط بالحياة اليومية

يوجد أكثر من 225,000 ميلاً من مسارات الجليد الممهدة والمحددة في أمريكا الشمالية.

المصدر: الجمعية الدولية لمصنعي مركبات التزلج على الجليد

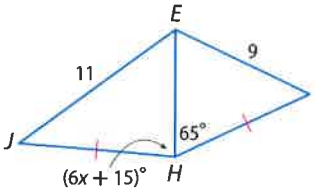
نصيحة في حل المسائل

تصميم رسم تخطيطي صمم رسمًا تخطيطيًا لمساعدتك في رؤية المسألة الموصوفة بالكلمات وتفسيرها بشكل صحيح.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 تطبيق الجبر على العلاقات بين المثلثات

الجبر احسب القيم المحتملة لـ x.



الخطوة 1 من خلال الرسم التخطيطي، نعلم أن $JE > EG$ و $\overline{JH} \cong \overline{GH}, \overline{EH} \cong \overline{EH}$

$m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس نظرية المِفْصَلَة

$6x + 15 > 65$ التعويض

$x > 8\frac{1}{3}$ الحل لإيجاد قيمة x.

الخطوة 2 استخدم حقيقة أن قياس أي زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة ثانية.

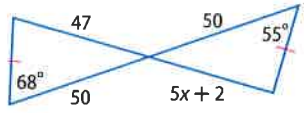
$m\angle JHE < 180$

$6x + 15 < 180$ التعويض

$x < 27.5$ حل لإيجاد قيمة x.

الخطوة 3 اكتب $x > 8\frac{1}{3}$ و $x < 27.5$ في صورة المتباينة المركّبة $8\frac{1}{3} < x < 27.5$.

تمرين موجه



3. احسب القيم المحتملة للمتغير x.

نصيحة دراسية

استخدام حقائق إضافية عند حساب المدى للقيم المحتملة لـ x، قد تحتاج إلى استخدام إحدى الحقائق التالية.

- قياس أي زاوية يكون دائمًا أكبر من 0 وأصغر من 180.
- قياس أي قطعة مستقيمة يكون دائمًا أكبر من 0.

2 إثبات العلاقات بين مثلثين

يمكنك استخدام نظرية المِفْصَلَة وعكسها لإثبات العلاقات بين مثلثين.

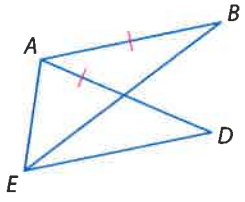
مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستخدام نظرية المِفْصَلَة

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:



العبارات	التبرير
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1. المعطيات
2. $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2. خاصية الانعكاس
3. $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3. مسلّمة جمع الزوايا
4. $m\angle EAB > m\angle EAD$	4. تعريف المتباينة
5. $EB > ED$	5. نظرية المِفْصَلَة

تمرين موجه

4. اكتب برهانًا من عمودين.

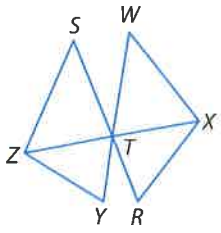
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 إثبات العلاقات باستخدام عكس نظرية المِفْصَلة

اكتب برهانًا تسلسليًا.



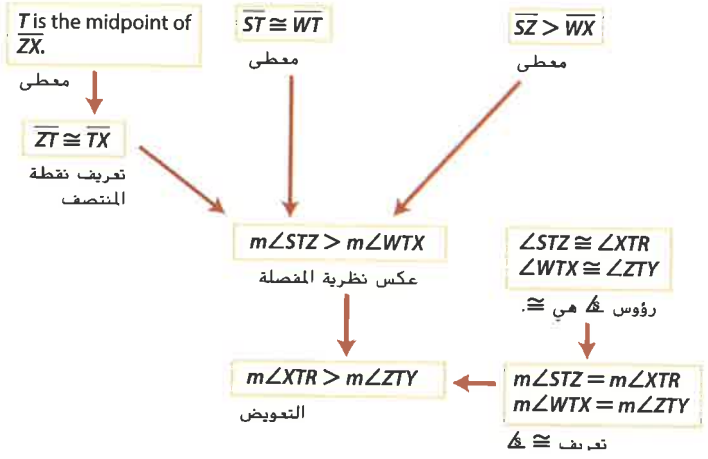
المعطيات: T هي نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$

$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:



تمرين موجه

5. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ هو أحد متوسطات $\triangle JMN$.

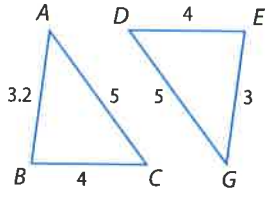
$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

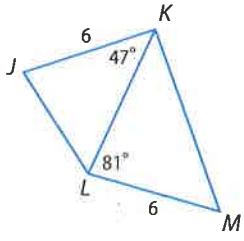
التحقق من فهمك

مثال 1 **قارن بين القياسات المعطاة.**

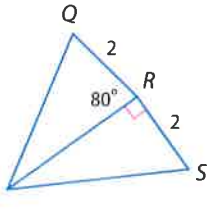
1. $m\angle ACB$ و $m\angle GDE$



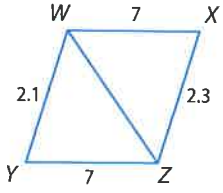
2. JL و KM



3. QT و ST



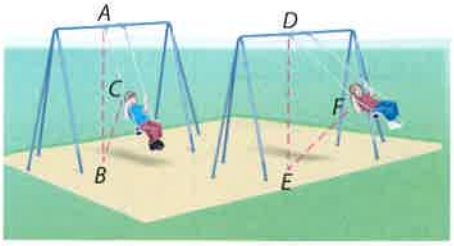
4. $m\angle XWZ$ و $m\angle YZW$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2

5. الأراجيح يتغير وضع الأرجوحة وفقًا لمدى قوة دفعها.

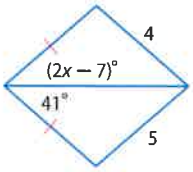


a. أي من أزواج القطع المستقيمة التالية يكون متطابقًا؟

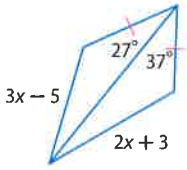
b. هل قياس $\angle A$ أكبر أم قياس $\angle D$ ؟ اشرح.

مثال 3 **احسب مدى القيم المحتملة للمتغير x.**

6.



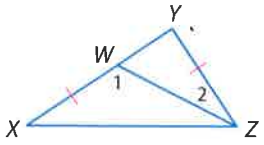
7.



المثالان 5-4 **الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين.

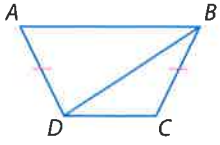
8. المعطيات: $\triangle YZX$
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $ZX > YW$



9. المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$DC < AB$

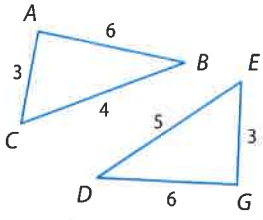
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



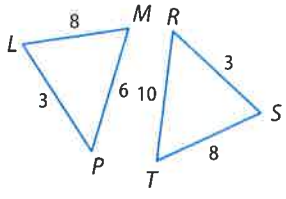
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **قارن بين القياسات المعطاة.**

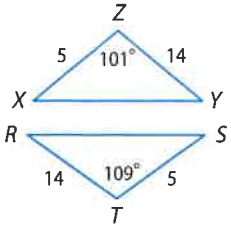
10. $m\angle BAC$ و $m\angle DGE$



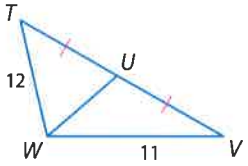
11. $m\angle MLP$ و $m\angle TSR$



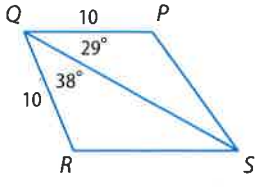
12. SR و XY



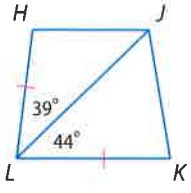
13. $m\angle TUW$ و $m\angle VUW$



14. PS و SR



15. JK و HJ



مثال 2

16. التخييم أقام حسن ومازن معسكرًا في حديقة وطنية. في الصباح، قرر حسن السير إلى الشلال. لذا غادر المعسكر وسار 5 أميال باتجاه الشرق ثم تحول 15° إلى الجنوب الشرقي وسار ميلين آخرين. وغادر مازن المعسكر وسار 5 أميال إلى الغرب، ثم تحول 35° باتجاه الشمال الغربي وسار ميلين إلى البحيرة للسباحة.

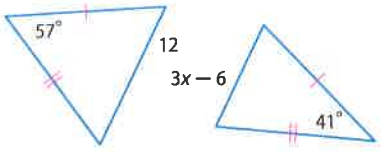
a. عند وصولهما إلى وجهتيهما، من منهما أقرب إلى المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.

b. افترض أنه بدلاً من تحول مازن 35° باتجاه الشمال الغربي، تحول 10° باتجاه الجنوب الغربي. من سيكون على مسافة أبعد عن المعسكر؟ اشرح استنتاجك. أرفق رسمًا تخطيطيًا.

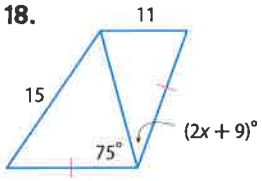
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

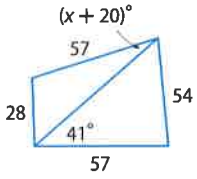
مثال 3 احسب مدى القيم المحتملة للمتغير x.

17.

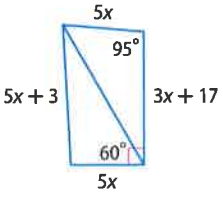


18.

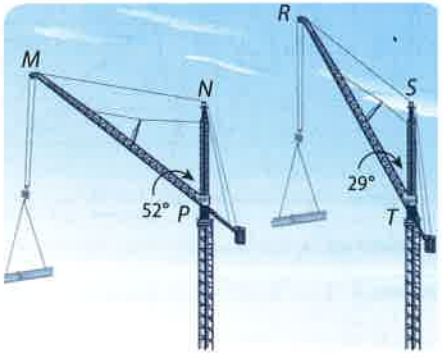




20.



21. **الرافعات** في الرسم التخطيطي، تظهر رافعة وهي ترفع جسمًا ما إلى ارتفاعين مختلفين. يتم تثبيت طول ذراع الرافعة، و $\overline{MP} \cong \overline{RT}$. فما الأقصر طولاً: $\overline{MN}$ أم $\overline{RS}$؟ اشرح استنتاجك.

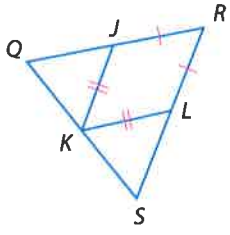


22. **الخزائن** تركت كلٌ من سمية وسندية خزانتيهما مفتوحتين كما هو موضح في الرسم التخطيطي. من صاحبة الخزانة التي تشكّل زاوية أكبر؟ اشرح استنتاجك.

المثالان 5–4 **الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين.

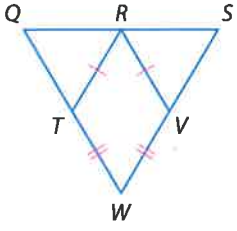
23. **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}, \overline{RL} \cong \overline{RJ}$
K هي نقطة منتصف $\overline{QS}$.
$m\angle SKL > m\angle QKJ$

المطلوب: $RS > QR$



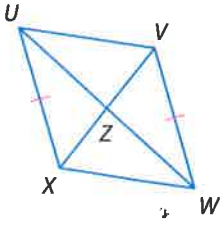
24. **المعطيات:** $\overline{VR} \cong \overline{RT}, \overline{WV} \cong \overline{WT}$
$m\angle SRV > m\angle QRT$
R هي نقطة منتصف $\overline{SQ}$.

المطلوب: $WS > WQ$



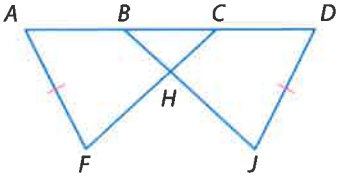
25. **المعطيات:** $\overline{XU} \cong \overline{VW}, VW > XW$
$\overline{XU} \parallel \overline{VW}$

المطلوب: $m\angle XZU > m\angle UZV$



26. **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}$
$AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

27 تمرين رياضي يقوم خلف بتمرينات تكوير عضلة الذراع الأمامية بالارتكاز على الركبة كجزء من تدريبات التقوية.

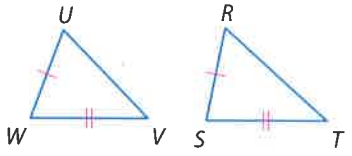
a. هل المسافة بين قبضة خلف وكتفه أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2 ؟ برر إجابتك باستخدام القياسات.

b. هل قياس الزاوية التي يشكّلها مرفق خلف أكبر في الوضع 1 أم في الوضع 2؟ اشرح استنتاجك.

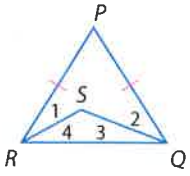
28. البرهان استخدم برهانًا غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS (النظرية 6.14).

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$ ، $\overline{ST} \cong \overline{WV}$ ، $RT > UV$

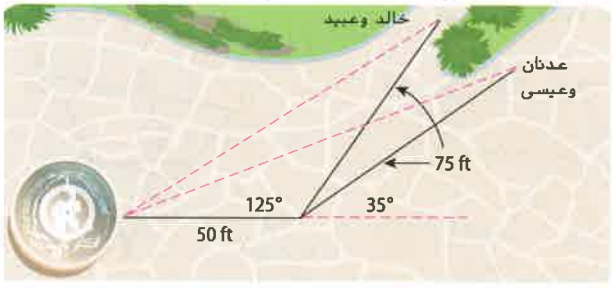
المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



29. البرهان إذا كان $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$ و $SQ > SR$، فاكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $m\angle 2 < m\angle 1$.



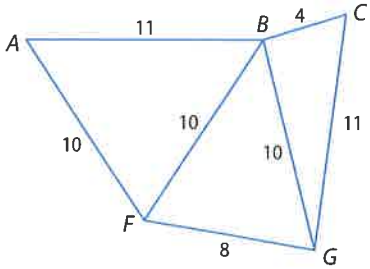
30. البحث عن الكنز شارك كل من عبيد وعدنان وعيسى وخالد في لعبة البحث عن الكنز كجزء من درس الجغرافيا. تُظهر هذه الخريطة أن المفتاح التالي لحل اللغز يبعد 50 قدمًا في اتجاه الشرق ثم 75 قدمًا بزاوية °35 باتجاه الشمال الشرقي من نقطة البداية؛ وهي النافورة الموجودة في فناء المدرسة. عندما استعدوا للدوران والسير 75 قدمًا بزاوية °35 في اتجاه الشرق الشمالي، اختلفوا حول اختيار الطريق، لذا افترقوا وسلكوا الطريقين الموضحين في الرسم التخطيطي أدناه.



a. أي ثنائي منهما اختار الطريق الصحيح؟ وضّح استنتاجك.

b. أي ثنائي منهما هو الأقرب إلى النافورة عندما يتوقف؟ اشرح استنتاجك.

الاستنتاج المنطقي **استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوج الزاوية المعطاة أو قياسات القطعة المستقيمة.**



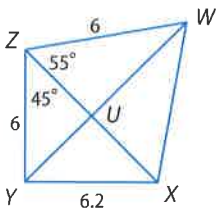
31. AB و CB

32. $m\angle BFA$ و $m\angle FBG$

33. $m\angle BFA$ و $m\angle FBG$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

استخدم الشكل الظاهر على اليسار لكتابة متباينة تتعلق بزوج الزوايا المعطاة أو قياسات القطعة.



34. $m\angle ZUY$ و $m\angle ZUW$

35 YU و WU

36. XY و WX

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف خواص المضلّعات.

a. هندسيًا ارسم مضلعًا ثلاثي الأضلاع ورباعي الأضلاع وخماسي الأضلاع. اجعل اسم المضلّع ثلاثي الأضلع ABC، والمضلّع رباعي الأضلع $FGHJ$، والمضلّع خماسي الأضلع $PQRST$. استخدم المنقلة لقياس كل زاوية وتسميتها.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

عدد الأضلاع	قياسات الزاوية				مجموع الزوايا
3	$m\angle A$		$m\angle C$		
	$m\angle B$				
4	$m\angle F$		$m\angle H$		
	$m\angle G$		$m\angle J$		
5	$m\angle P$		$m\angle S$		
	$m\angle Q$		$m\angle T$		
	$m\angle R$				

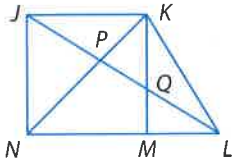
c. لفظيًا اكتب تخمينًا حول العلاقة بين عدد أضلع المضلّع ومجموع قياسات زوايا المضلّع.

d. منطقيًا ما نوع الاستنتاج الذي استخدمته في الجزء c؟ اشرح.

e. جبريًا اكتب تعبيرًا جبريًا لمجموع قياسات زوايا مضلّع له عدد n من الأضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا

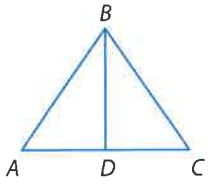
38. التحدي إذا كان $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$، $m\angle LJN > m\angle KJL$، و $\overline{JN} \perp \overline{NL}$. فما الأكبر: $m\angle LKN$ أم $m\angle LNK$؟ وضّح استنتاجك.



39. مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لأداة تستخدم مِفْصَلة. صمم رسمين تكون فيهما المِفْصَلة المثبتة في الأداة في موضعين مختلفين. استخدم الرسومات لشرح سبب تسمية نظرية 7.13 بنظرية المفصلة.

40. التحدي المعطيات $\triangle RST$ مع المتوسط $\overline{RQ}$، إذا كان RT أكبر من أو يساوي RS، فما التصنيفات المتاحة لـ $\triangle RQT$؟ اشرح استنتاجك.

41. الدقة إذا كان $\overline{BD}$ متوسطًا و $AB < BC$، إذًا $\angle BDC$ تكون *دائما أو أحيانًا أو لا تكون أبدًا* زاوية حادة. اشرح.

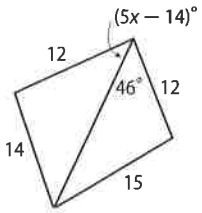


42. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين نظرية المِفْصَلة ومسلّمة SAS في تطابق المثلثات.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

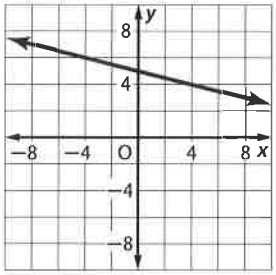
تمرين على الاختبار المعياري

43. إجابة مختصرة اكتب متباينة لوصف مدى القيم المحتملة للمتغير x.



44. أي من العبارات التالية معكوس العبارة إذا كان الثلج يتساقط، فإن *خليفة يرتدي حذاء الثلوج*؟

A إذا ارتدى خليفة حذاء الثلوج، فإن الثلج يتساقط.
B إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.
C إذا لم يتساقط الجليد، فإن خليفة يرتدي حذائه الشتوي.
D إذا لم يتساقط الثلج أبدًا، فإن خليفة لا يرتدي حذائه الشتوي.



45. الجبر ما الدالة الخطية التي تصف التمثيل البياني الموضح بشكل أفضل؟

F $y = -\frac{1}{4}x + 5$

G $y = -\frac{1}{4}x - 5$

H $y = \frac{1}{4}x + 5$

J $y = \frac{1}{4}x - 5$

46. SAT/ACT إذا كان ضلع المربع يساوي $x + 3$، فقطر المربع هو

A $x^2 + 1$
B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
C $2x + 6$
D $x^2\sqrt{2} + 6$
E $x^2 + 9$

مراجعة شاملة

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.

47. 3.2 cm, 4.4 cm

48. 5 ft, 10 ft

49. 3 m, 9 m

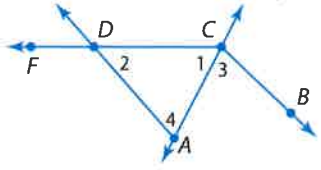
50. الجولات البحرية سألت مها صديقتها ميساء عن تكلفة الرحلة البحرية التي قامت بها هي وأقرب صديقاتها بعد التخرج. لم تتذكر ميساء تكلفة الفرد، ولكنها تذكرت إجمالي التكلفة التي تجاوزت AED 500. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإظهار أن تكلفة الفرد كانت أكبر من AED 250.

ارسم شكلًا واذكر اسمه لتمثيل المثلثات المتطابقة. أوجد قيمة x.

51. $\triangle QRS \cong \triangle GHJ$, و $RS = 12$, و $QR = 10$, و $QS = 6$, و $HJ = 2x - 4$.

52. $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$, و $AB = 13$, و $AC = 19$, و $BC = 21$, و $XY = 3x + 7$.

استخدم الشكل على اليسار.



53. ما اسم رأس $\angle 4$؟

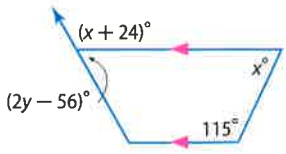
54. ما الاسم الآخر لـ $\angle 2$؟

55. ما الاسم الآخر لـ $\angle BCA$؟

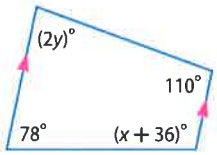
مراجعة المهارات

أوجد قيمة المتغير (المتغيرات) في كل شكل. اشرح استنتاجك.

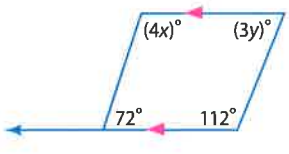
56.



57.



58.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات

- القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات هي المنصفات العمودية ومنصفات الزوايا والمتوسطات والارتفاعات.
- تُسمى نقاط تقاطع كلٍ من القطع المستقيمة الخاصة في المثلث بنقاط الالتقاء.
- نقاط الالتقاء في المثلث هي مراكز الدائرة المحيطة ومراكز الدائرة الداخلية والنقاط المركزية وملتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر

- كتابة برهان غير مباشر:

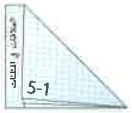
1. افتراض أن الاستنتاج خاطئ.
2. وضّح أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
3. بما أن الاستنتاج الخاطئ يؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فيجب أن يكون الاستنتاج الأصلي صحيحًا.

متباينات المثلث

- تقابل الزاوية الأكبر في المثلث الضلع الأكبر، وتقابل الزاوية الأصغر الضلع الأصغر.
- مجموع طولي أي ضلعين من أضلاع المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- **متباينة SAS (نظرية المنصلة)**: في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان، فقياس الزاوية المحصورة يحدد أي من المثلثين لديه الضلع الثالث الأكبر.
- **متباينة SSS** : في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان متناظران في كل من المثلثين، فطول الضلع الثالث يحدد أيًا من المثلثين يحتوي على الزاوية المحصورة ذات القياس الأكبر.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.



المفردات الأساسية

ارتفاع (altitude)

نقطة مركزية (centroid)

مركز الدائرة المحيطة (circumcenter)

مستقيمات متلاقية (concurrent lines)

مركز الدائرة الداخلية (incenter)

برهان غير مباشر (indirect proof)

تبرير غير مباشر (indirect reasoning)

متوسط (median)

ملتقى الارتفاعات (orthocenter)

منصف عمودي (perpendicular bisector)

نقطة الالتقاء (point of concurrency)

برهان بالتناقض (proof by contradiction)

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لعمل عبارة صحيحة.

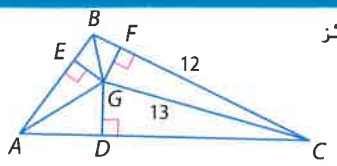
1. تتقاطع ارتفاعات المثلث عند النقطة المركزية.
2. تُسمى نقطة التقاء متوسطات المثلث بمركز الدائرة الداخلية.
3. نقطة الالتقاء هي نقطة تقاطع ثلاثة خطوط أو أكثر.
4. مركز الدائرة المحيطة للمثلث يساوي البعد عن رؤوس المثلث.
5. لإيجاد النقطة المركزية للمثلث، يتم أولاً إنشاء منصفات الزاوية.
6. المنصفات العمودية لمثلث هي مستقيمات متلاقية.
7. لعمل برهان بالتناقض، تفترض أولاً أن ما تحاول إثباته صحيح.
8. يستخدم البرهان بالتناقض الاستنتاج غير المباشر.
9. يربط متوسط المثلث نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث بنقطة منتصف ضلع آخر في المثلث.
10. مركز الدائرة الداخلية هو نقطة تتقاطع فيها منصفات زاوية المثلث.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة درس بدرس

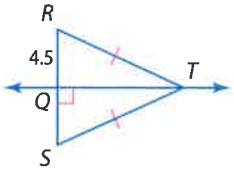
4-1 منصفات المثلثات

11. أوجد EG إذا كان G هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

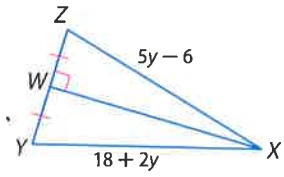


أوجد قياس كل مما يلي.

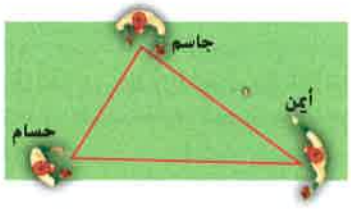
12. RS



13. XZ

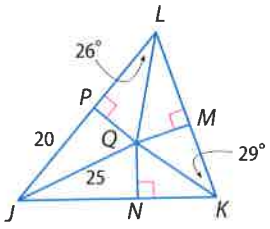


14. **كرة القاعدة** يقوم جاسم وحسام وأيمن بعملية الإحماء قبل لعب مباراة كرة القاعدة. يتطلب أحد تدريبات الإحماء وجود ثلاثة لاعبين لتشكيل مثلث، مع وجود لاعب في المنتصف. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع بحيث يكون على مسافة متساوية من اللاعبين الثلاثة؟



مثال 1

أوجد قياس كل مما يلي إذا كان Q هو مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$.



a. $\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$2(26) + 2(29) + m\angle NJP = 180$	التعويض
$110 + m\angle NJP = 180$	بسّط
$m\angle NJP = 70$	الطرح

بما أن $\overrightarrow{JQ}$ ينصف $\angle NJP$، فإن $2m\angle QJK = m\angle NJP$.
إذًا، $m\angle QJK = \frac{1}{2}m\angle NJP$. إذًا $m\angle QJK = \frac{1}{2}(70) = 35$.

b. QP

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$	التعويض
$(QP)^2 + 400 = 625$	$20^2 = 400$ و $25^2 = 625$
$(QP)^2 = 225$	الطرح.
$QP = 15$	بسّط

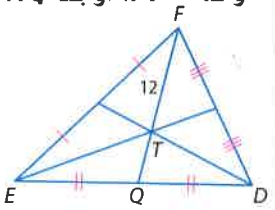
4-2 متوسطات المثلثات وارتفاعاتها

15. رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$، و $E(0, 7)$، و $F(6, 3)$.
أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

16. **حفل التخرج** ليلى هي إحدى أعضاء لجنة حفل التخرج. وترغب في تعليق 12 مثلثًا متطابقًا في السقف بحيث تكون موازية للأرض. لذا رسمت مثلثًا واحدًا على مستوى إحداثي بالإحداثيات $(0, 4)$، و $(3, 8)$، و $(6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيتم تعليقه بسلسلة واحدة، ما إحداثيات النقطة التي يجب أن تتصل السلسلة عندها بالمثلث؟

مثال 2

في $\triangle EDF$، T هو النقطة المركزية و $FT = 12$. أوجد TQ.



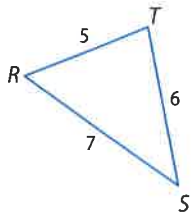
$FT = \frac{2}{3}FQ$	
$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$	
$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$	$FT = 12$
$12 = 8 + \frac{2}{3}TQ$	خاصية التوزيع
$4 = \frac{2}{3}TQ$	الطرح.
$6 = TQ$	الضرب.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

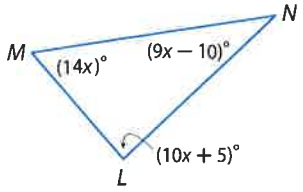
4-3 المتباينات في مثلث واحد

صنّف زوايا كل مثلث وأضلاعه بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.

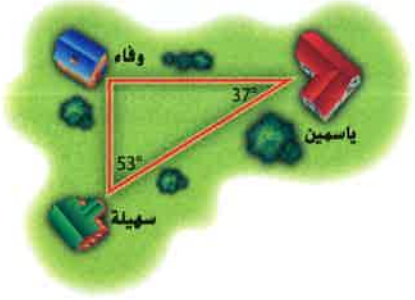
17.



18.

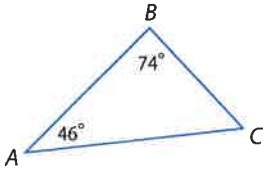


19. الأحياء المجاورة تعيش كل من ياسمين وسهيلة ووفاء عند تقاطعات ثلاثة طرق وهذا يشكّل المثلث الموضح. إذا أرادت الفتيات قضاء فترة ما بعد الظهر معًا، هل الطريق الأقصر لياسمين هو الذهاب إلى سهيلة وأخذها إلى بيت وفاء، أم الطريق الأقصر لسهيلة هو الذهاب إلى وفاء ثم الذهاب إلى بيت ياسمين؟



مثال 3

صنّف زوايا وأضلاع ABC△ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر.



a. أوجد أولاً قياس الزاوية المفقودة باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث.

$m\angle C = 180 - (46 + 74)$ أو 60

لذا فالزوايا من الأصغر إلى الأكبر هي $\angle A$، و $\angle C$، و $\angle B$.

b. الأضلاع من الأقصر إلى الأطول هي $\overline{BC}, \overline{AB}$ و $\overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر

اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.

20. $m\angle A \geq m\angle B$

21. $\triangle FGH \cong \triangle MNO$

22. $\triangle KLM$ هو مثلث قائم الزاوية.

23. إذا كان $3y < 12$، فإن $y < 4$.

24. اكتب برهانًا غير مباشر يثبت أن الزاويتين المتتامتين لا تكون أي منهما زاوية قائمة.

25. الأفلام اشترى سالم أسطوانات DVD بتكلفة تجاوزت AED 50. استخدم الاستنتاج غير المباشر لإثبات أن تكلفة إحدى أسطوانات (DVD) التي اشترها تجاوزت AED 25.

مثال 4

اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

a. $\overline{XY} \ncong \overline{JK}$

$\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b. إذا كان $3x < 18$، فإن $x < 6$.

استنتاج العبارة الشرطية هو $x < 6$.
نفي الاستنتاج هو $x \geq 6$.

c. $\angle 2$ هي زاوية حادة.

إذا كان افتراض أن $\angle 2$ *زاوية حادة* خاطئ، فلابد أن يكون افتراض أن $\angle 2$ *زاوية غير حادة* صحيحًا. هذا يعني أن افتراض $\angle 2$ *زاوية منفرجة أو زاوية قائمة* يجب أن يكون صحيحًا.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5 متباينة المثلث

هل يُمكن تكوين مثلث باستخدام الأطوال المعطاة؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

26. 5, 6, 9 **27.** 3, 4, 8

احسب مدى قياس الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياس ضلعيه الآخرين.

28. 5 ft, 7 ft **29.** 10.5 cm, 4 cm

30. الدراجات يقود يوسف دراجته لزيارة سعيد. ونظرًا لإغلاق الطريق السريع، فلابد أن يسير ميلين في الطريق الرئيسي والدوران لسير 3 أميال إضافية في الطريق رقم 5. إذا رسمنا مثلثًا يحتوي على رأسين إحداهما ليوسف والأخرى لبيت سعيد، احسب مدى المسافة المحتملة بين يوسف وبيت سعيد عند السير مباشرة في الطريق السريع.

المثال 5

هل يُمكن تكوين مثلث بالأطوال7 و 10 و 9 أقدام؟ وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.

تحقق من كل متباينة.

$10 + 9 > 7$ $7 + 9 > 10$ $7 + 10 > 9$

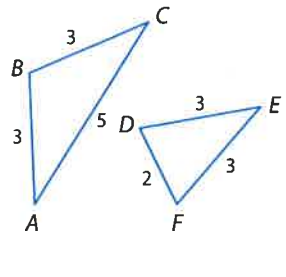
$19 > 7$ ✓ $16 > 10$ ✓ $17 > 9$ ✓

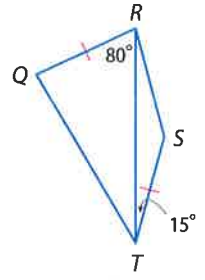
بما أن مجموع كل زوج من أطوال الأضلاع أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأضلاع ذات الأطوال 7 و 10 و 9 أقدام ستكوّن مثلثًا.

4-6 المتباينات في مثلثين

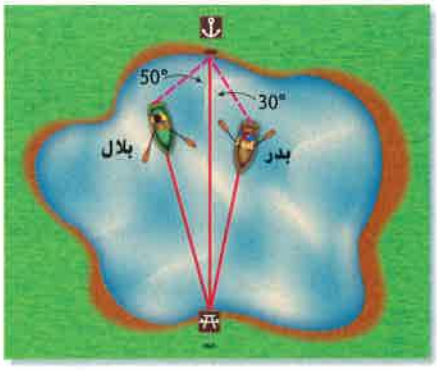
قارن بين القياسات المعطاة.

31. $m\angle ABC,\ m\angle DEF$ **32.** QT و RS



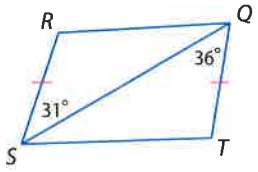


33. الزوارق يقوم كل من بدر وبلال بالتجديف حول بركة ويتجهان إلى نفس النقطة. هذه أول تجربة لهما في التجديف، لذا خرجوا عن المسار كما هو موضح في الرسم التخطيطي. بعد دقيقتين، قاموا بالتجديف لمسافة 50 ياردة. من منهم الأقرب إلى وجهته؟



مثال 6

قارن بين القياسات المعطاة.

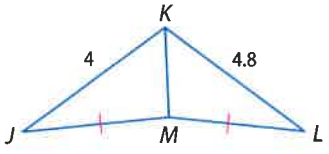


a. RQ و ST

In $\triangle QRS$ و $\triangle STQ$, $\overline{RS} \cong \overline{TQ}, \overline{QS} \cong \overline{QS}$, و $\angle SQT > \angle RSQ$. بحسب نظرية المفصلة
$m\angle SQT < m\angle RSQ$, إذًا $RQ < ST$.

b. $m\angle JKM$ و $m\angle LKM$

In $\triangle JKM$ و $\triangle LKM$, $\overline{JM} \cong \overline{LM}, \overline{KM} \cong \overline{KM}$, و $LK > JK$. بحسب عكس نظرية المفصلة
$\angle LKM > \angle JKM$.

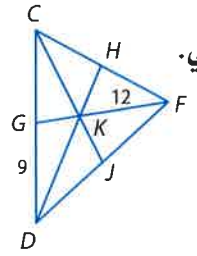


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار

1. **الحدائق** تريد شيخة زراعة حوض للزهور داخل منطقة مثلثة محددة بثلاثة ممرات. ما نقطة الالتقاء المرتبطة بالمثلثات التي ستستخدمها لمركز الدائرة الأكبر الذي سيتناسب وضعه داخل المثلث؟

في $\triangle CDF$، K هو النقطة المركزية و $DK = 16$. أوجد طول كل مما يلي.



2. KH
3. CD
4. FG

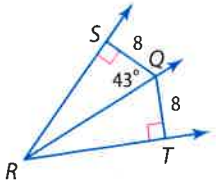
5. **الإثبات** اكتب إثباتًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

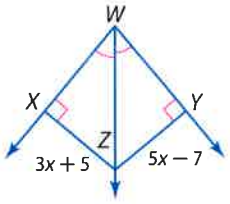
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد قياس كل مما يلي.

6. $m\angle TQR$



7. XZ

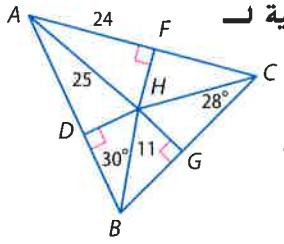


8. **الجغرافيا** تبعد تونوبا عن راوند ماونتن نفس المسافة التي تبعدها عن وورم سبرينغز. والمسافة التي تفصل تونوبا عن مدينة هوثورن هي نفس المسافة التي تبعدها عن مدينة بيتي. حدّد المسافة الأكبر: راوند ماونتن إلى هوثورن أم من وورم سبرينغز إلى بيتي.

9. **الاختيار من متعدد** إذا كان قياس ضلعين في مثلث هو 3.1 أقدام و 4.6 أقدام. فما قياس *أقل* عدد كلي محتمل للضلع الثالث؟

A 1.6 أقدام
C 7.5 أقدام
B قدمان
D 8 أقدام

النقطة H هي مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$. أوجد قياس كل مما يلي.



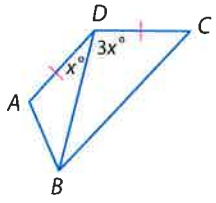
10. DH
11. BD
12. $m\angle HAC$
13. $m\angle DHG$

14. **الاختيار من متعدد** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 5 أقدام و 11 قدمًا. فما مدى الأطوال المحتملة للضلع الثالث؟

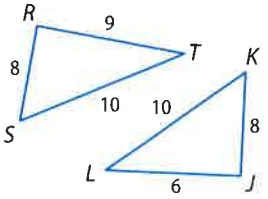
F $6 < x < 10$
H $6 < x < 16$
G $5 < x < 11$
J $x < 5$ أو $x > 11$

قارن بين كل مما يأتي:

15. AB و BC



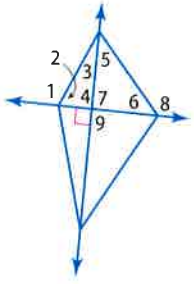
16. $\angle RST$ و $\angle JKL$



اذكر الافتراض اللازم لبدء البرهان غير المباشر لكل عبارة.

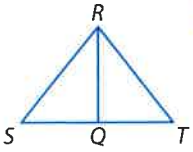
17. إذا كان 8 هو عامل n، إذًا 4 هو عامل n.
18. $m\angle M > m\angle N$
19. إذا كان $3a + 7 \leq 28$، إذًا $a \leq 7$.

استخدم الشكل لتحديد أكبر الزوايا قياسًا.



20. $\angle 1, \angle 5, \angle 6$
21. $\angle 9, \angle 8, \angle 3$
22. $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

23. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

المطلوب: $m\angle SQR > m\angle SRQ$

احسب طول الضلع الثالث لمثلث تم إعطاء قياسي ضلعيه الأخريين.

24. 10 ft, 16 ft
25. 23 m, 39 m

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
McGraw-Hill Education

4 التحضير للاختبارات المعيارية

استبعاد الإجابات غير المنطقية

يمكنك استبعاد الإجابات غير المنطقية لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل بنود اختبار الاختيار من متعدد.

إستراتيجيات استبعاد الإجابات غير المنطقية

الخطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية لتحديد ما المطلوب منك إيجاده بدقة.

- ما المطلوب حله؟
- هل الإجابة الصحيحة عدد صحيح، أم كسر أم رقم عشري؟
- هل يجب عليّ استخدام رسمًا بيانيًا أم جدولاً؟
- ما الوحدات (إن وجدت) إلتي ستتضمنها الإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته.

لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.

- حدد أي خيارات إجابة تكون غير صحيحة بشكل واضح واستبعدها.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون بتنسيق سليم.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تشمل وحدات صحيحة.

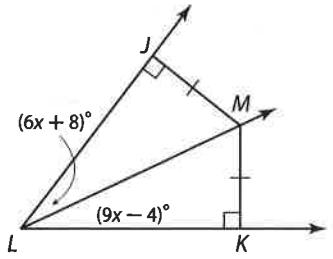
الخطوة 3

حل المسألة واختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المتبقية. تحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

ما قياس $\angle KLM$؟



A 32

B 44

C 78

D 94

McGraw-Hill Education. حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. بما أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث هي 180°. إذًا يجب أن يكون $m\angle KLM + m\angle LMK$ يساوي 90°. وإلا سيتجاوز المجموع 180 درجة. بما أن خيار الإجابة D هو زاوية منفرجة، فيمكن استبعادها كإجابة غير منطقية. لا بد أن تكون الإجابة الصحيحة A، أو B، أو C.

حل المسألة. وفقًا لعكس نظرية منصف الزاوية، إذا كانت هناك نقطة داخل زاوية معينة وتقع على مسافة واحدة من جوانب الزاوية، فإن النقطة تقع على منصف الزاوية. النقطة M تقع على مسافة واحدة من الشعاعين LJ و LK، لذا فهي تقع على منصف $\angle JLK$. لذا، يجب أن تكون $\angle JLM$ مطابقة لـ $\angle KLM$. كوّن معادلة وحلها لـ x.

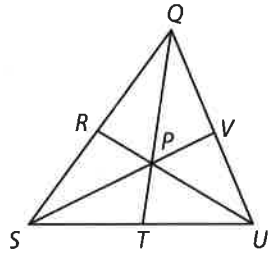
$$6x + 8 = 9x - 4$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

لذا فإن قياس $\angle KLM$ هو $[9(4) - 4]°$، أو 32°. الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين

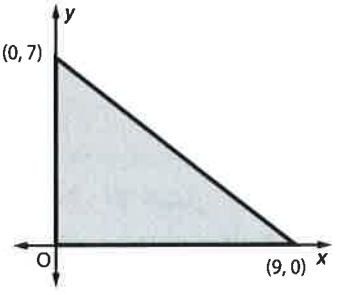
اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. النقطة P هي النقطة المركزية للمثلث QUS. إذا كان $QP = 14$ سنتيمترًا، فما طول $\overline{QT}$؟



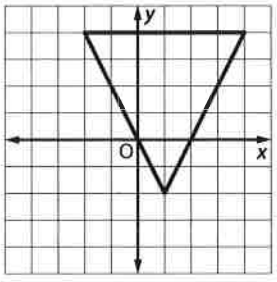
A 7 cm
B 12 cm
C 18 cm
D 21 cm

2. ما المساحة بالوحدات المربعة للمثلث الموضح أدناه؟



F 8
G 27.4
H 31.5
J 63

3. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$
B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$
D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4. إذا كان $\triangle ABC$ متساوي الساقين و $m\angle A = 94$. فأي مما يلي ينبغي أن يكون صحيحًا؟

F $m\angle B = 94$
G $m\angle B = 47$
H $AB = BC$
J $AB = AC$

5. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل أبعاد مثلث؟

A 1.9, 3.2, 4
B 1.6, 3, 4.6
C 3, 7.2, 7.5
D 2.6, 4.5, 6

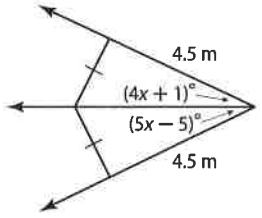
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4 تدريب على الاختبار المعياري

اختيار من متعدّد

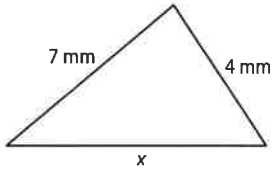
اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. أوجد حل x.



A 3
B 4
C 5
D 6

2. أي مما يلي لا يمكن أن يمثل قيمة x؟



F 8 mm
G 9 mm
H 10 mm
J 11 mm

3. يزعم أيوب أنك إذا كنت تعيش في أبو ظبي، فإنك تعيش مدينة العين. أي افتراض قد تحتاجه للوصول إلى برهان غير مباشر لهذا الزعم؟

A لنفرض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين ولكن ليس في إمارة أبو ظبي.

B لنفرض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين وإمارة أبو ظبي.

C لنفرض أن شخصًا ما يعيش في إمارة أبو ظبي وفي مدينة العين.

D لنفرض أن شخصًا ما يعيش في إمارة أبو ظبي، ولكن ليس في مدينة العين.

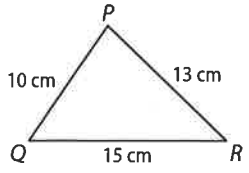
4. أي مما يلي يصف أقصر مسافة من إحدى رؤوس مثلث إلى الضلع المقابل؟

F الارتفاع
G قطر الدائرة
H المتوسط
J قطعة مستقيمة

5. بدأ رشيد جز الأعشاب. لنفرض أن x يمثل عدد الأسابيع بعد بدء رشيد جز الأعشاب، و y يمثل عدد العملاء. استخدم النقطتين (3, 4) و (9, 6) لإيجاد معادلة مستقيم يمكن أن يتم استخدامها للتنبؤ بعدد العملاء الموجودين لدى رشيد بحلول نهاية أسبوع معين.

A $y = \frac{1}{3}x$
B $y = \frac{1}{3}x + 3$
C $y = \frac{2}{3}x + 2$
D $y = \frac{2}{3}x$

6. ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا △PQR؟



F $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$
G $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$
H $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$
J $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$

7. أي افتراض قد تحتاجه من أجل بدء برهان غير مباشر للعبارة؟

الزاوية S ليست منفرجة.

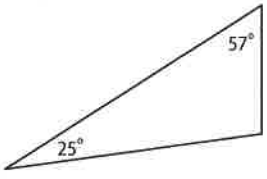
A ∠S هي زاوية قائمة.

B ∠S هي زاوية منفرجة.

C ∠S هي زاوية حادة.

D ∠S ليست زاوية حادة.

8. صنّف المثلث أدناه وفقًا لقياسات زواياه.



F حاد
G متساوي الزوايا
H منفرج
J قائم الزاوية

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 يجب أن يكون مجموع أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث.

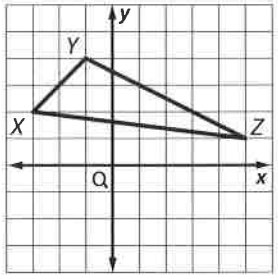
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

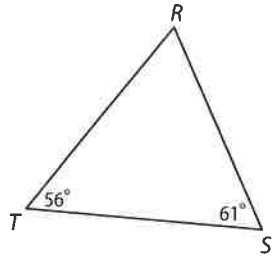
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. **إجابة شبكية** إذا كان قياسي ضلعين من مثلث 9 سنتيمترات و 15 سنتيمترًا، فما أقل قياس محتمل للضلع الثالث بالسنتيمترات إذا كان القياس عددًا صحيحًا؟

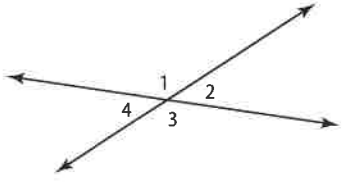
10. ما إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث أدناه؟



11. صنّف أضلاع المثلث أدناه بالترتيب من الأقصر إلى الأطول.



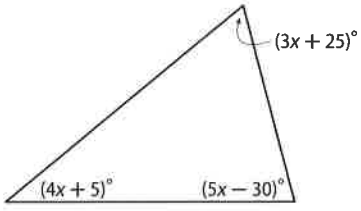
12. لنفرض أن مستقيمين يتقاطعان في مستوى إحداثي معين لتكوين أربع زوايا.



ما الذي تعرفه حول أزواج الزوايا المجاورة التي تكونت؟ اشرح.

13. عمر وعلي يأخذان مجموعة من المخيمين للتنزه في الغابات. غادرت مجموعة عمر المعسكر وسارت ميلين باتجاه الشرق، ثم تحولت بمقدار 20° إلى الجنوب الشرقي وسارت 4 أميال أخرى. غادرت مجموعة علي المعسكر وسارت ميلين باتجاه الغرب، ثم تحولت 30° إلى الشمال الغربي وسارت 4 أميال أخرى. كم عدد الدرجات إلى الجنوب الشرقي التي احتاج عمر أن يتحولها لكي تكون مجموعته ومجموعة علي على نفس المسافة من المعسكر بعد جولتين من التنزه؟

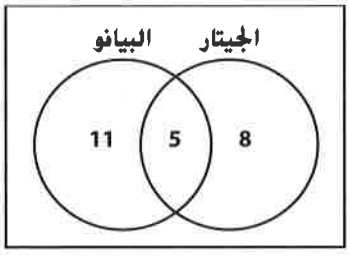
14. **إجابة شبكية** أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

15. ارجع إلى الشكل للإجابة على كل سؤال.



a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على الجيتار؟

a. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على البيانو؟

c. كم عدد الطلاب الذين يعزفون على كل من البيانو والجيتار؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

كتيب الطالب

يمكنك بمساعدة **كتاب الطالب**
هذا الإجابة عن هذه الأسئلة.

ماذا لو نسيتُ إحدى الصيغ؟

الدوال والمتطابقات المثلثية، الصيغ والرموز TF-1

هذه قوائم من **الصيغ والمتطابقات والرموز** المستخدمة في الكتاب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الرموز

$\neq$	لا يساوي	AB	قياس $\overline{AB}$
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\angle$	زاوية
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتّب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f لـ x؛ قيمة f لـ x	$P(n, r)$	تباديل مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB	$C(n, r)$	توافيق مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة

الخواص الجبرية والمفاهيم الأساسية

المحايد	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، فإن يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث a و $b \neq 0$، يوجد فقط عدد واحد $\frac{a}{b}$ بحيث $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c،إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مربع فرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على $>$ و $\geq$ و $\leq$.*

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

الصيغ

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على مستوى إحداثي	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف على مستوى إحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
محيط المستطيل	$P = 2\ell + 2w$ أو $P = 2(\ell + w)$
محيط الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مستطيل	$A = \ell w$	شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$		

مساحة السطح

مكعب	$S = 6s^2$	هرم منتظم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم منتظم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in.)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على خط الأعداد:	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة في مستوى إحداثي:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
المسافة في الفضاء:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
طول قوس المسافة:	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد:	$M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف في مستوى إحداثي:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نقطة المنتصف في الفضاء:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المُحيط ومحيط الدائرة

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مربع	$A = s^2$	مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
مستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	مُضلع منتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	قطاع دائري	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
معين	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1d_2$		

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	كرة	$S = 4\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور مستطيل	$V = \ell wh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$
منشور	$V = Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
إسطوانة	$V = \pi r^2h$		

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

صيغة الميل والمقطع لمستقيم	$y = mx + b$	دائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
صيغة النقطة والميل لمستقيم	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$		

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الرموز

$\neq$	لا يساوي	$\parallel$	يوازي	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\nparallel$	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
$\cong$	يطابق	$\perp$	متعامد على	$\rightarrow$	موضوع على
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
$\angle$, $\measuredangle$	زاوية، زوايا	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$^\circ$	درجة	$\square$	متوازي أضلاع	$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	n-gon	مضلع عدد أضلاعه n	$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	f لـ x؛ قيمة f لـ x
$\overrightarrow{AB}$	شعاع تحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتّب	!	مضروب
AB	قياس $\overline{AB}$؛ المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر(ثلاثي مُرتب)	${}_nP_r$	تباديل مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$\sim p$	نفي p؛ ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	${}_nC_r$	توافيق مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p و q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q	$\vec{a}$	المتجه a		
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا كان q	$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 يادرة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 ياردة = 36 بوصة
	1 قدم = 12 بوصة (in.)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع فرق	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$ أو $x = a(y-k)^2 + h$	قطع ناقص	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	قطع زائد	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني، لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني، لمتتالية هندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

حساب المثلثات

قانون الجيب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$$

قانون جيب التمام

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

النسب المثلثية

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف

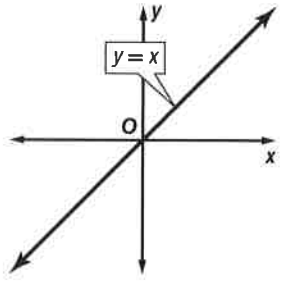
الرموز

$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a
$f(x, y)$	f حسب x و y؛ دالة متغيراها x وy
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB
i	الوحدة التخيلية
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x؛ تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\log_b x$	أساس اللوغاريتم b من x
$\log x$	اللوغاريتم العادي x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x

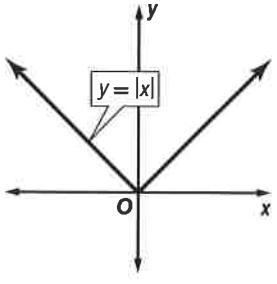
$\sum$	سيغما، المجموع
$\bar{x}$	متوسط عينة
μ	متوسط مجتمع إحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
$P(B \mid A)$	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل
nPr	تباديل مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها مجموعة فيها r عنصر في كل مرة
nCr	توافيق مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها مجموعة فيها r عنصر في كل مرة
$\text{Sin}^{-1} x$	Arcsin x
$\text{Cos}^{-1} x$	Arccos x
$\text{Tan}^{-1} x$	Arctan x

الدوال الأصلية

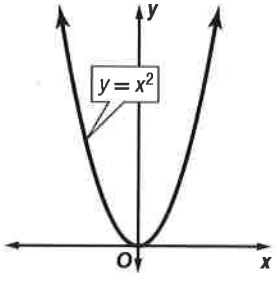
الدوال الخطية



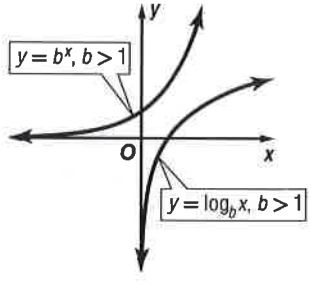
دوال القيمة المطلقة



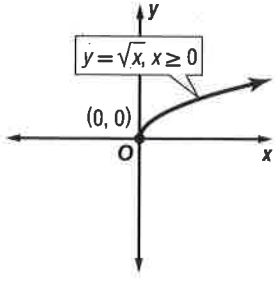
الدوال التربيعية



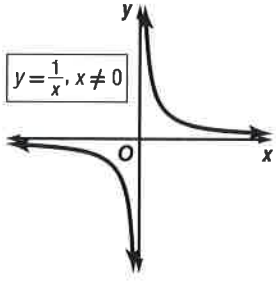
الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

رؤيـــة
VISION
2021
الإمارات العربية المتحدة
UNITED ARAB EMIRATES

المدرسة الإماراتية

mheducation.com/prek-12

ISBN-13: 978-1-5268-7157-2
ISBN-10: 1-5268-7157-2

Mc Graw Hill Education