الشرح الوافي

في الرياضيات

الصف العاشر / الفصل الثاني

الوحدة السابعة

الإحصاء والاحتمالات

إعداد

الأستاذ : سليمان دلدوم أبو هبه

٠٧٩٥٠٠٠٥٧٣

الوحدة السابعة :- الاحصاء والاحتمالات

الإحصاء :-

مراجعة : مقاييس النزعة المركزية

(المتوسط الحسابي ، المنوال ، الوسيط)

سبب التسمية : لأنها تصف البيانات الإحصائية عن طريق قيمة عددية تتجمع حولها باقي القيم أو المشاهدات

أنواع البيانات :- مفردة ، جدول تكراري ، جدول تكراري ذي فئات

وهناك مقاييس أخرى تسمى (مقاييس التشتت) مثل (المدى ، الانحراف المعياري ، التباين)، وسميت بهذا الاسم ، لأنها تصف مدى تباعد القيم عن بعضها أو تقاربها

مراجعة في القوانين (للمشاهدات)

١) المتوسط الحسابي :- هو مجموع القيم مقسوما على عددها

$$\text{المتوسط الحسابي} = \bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$$

حيث $\bar{\text{س}}$ المتوسط الحسابي ، ن عدد المشاهدات (القيم)

$\sum \text{س}$ مجموع المشاهدات (القيم)

٢) المدى :- هو الفرق بين أكبر مشاهدة وأصغر مشاهدة .

المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣) الانحراف المعياري :- هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

الانحراف المعياري للمشاهدات $\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3 ، \ldots ، \text{س}_\text{ن}$ يساوي

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}}$$

ويفضل استخدام هذا القانون إذا كان الوسط الحسابي عدد صحيح .

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}}$$

ويفضل استخدام هذا القانون إذا كان الوسط الحسابي عدد غير صحيح .

حيث ن هو عدد المشاهدات ، $\bar{\text{س}}$ هو المتوسط الحسابي لهذه المشاهدات .

٤) التباين = مربع الانحراف المعياري = ع^2

قال الإمام مالك رحمه الله :-

إذا رأيت الرجل يدافع عن الحق ، فيشتم ويسب ويغضب فأعلم أنه معلول النية ، لأن الحق لا يحتاج إلى هذا .

سليمان دلدوم أبو هبه

١

حل نشاط (٧ – ١) ص٨٥

أ) موظفي الشركة أ :-

١) المتوسط الحسابي = $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

$\bar{\text{س}} = \frac{٣٣٢}{١٠} = ٣٣٫٢$

٢) المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة

= ٤٠ – ٢٤ = ١٦

٣) الانحراف المعياري :-

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}}$$

س	٢٤	٢٧	٢٨	٣٢	٣٢
س^2	٥٧٦	٧٢٩	٧٨٤	١٠٢٤	١٠٢٤
س	٣٥	٣٦	٣٨	٤٠	٤٠
س^2	١٢٢٥	١٢٩٦	١٤٤٤	١٦٠٠	١٦٠٠

$\sum (\text{س})^2 = ١١٣٠٢$

ن = ١٠ ، $(\bar{\text{س}})^2 = (٣٣٫٢)^2 = ١١٠٢٫٢٤$

وبالتعويض في القانون

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{١١٣٠٢ - ١٠(١١٠٢٫٢٤)}{١٠ - ١}} = ٥٫٥٧$$

ب) موظفي الشركة ب :-

١) المتوسط الحسابي = $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

$\bar{\text{س}} = \frac{٣٣٢}{١٠} = ٣٣٫٢$

١) المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة

= ٤٠ – ٢٤ = ١٦

٢) الانحراف المعياري :-

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}}$$

تذكر :- كلما زادت قيمة التباين زاد تباعد (تشتت) القيم عن متوسطها الحسابي

سليمان دلدوم أبو هبه

٢

س	٢٤	٢٥	٣٢	٢٥	٣٢
$س^٢$	٥٧٦	٦٢٥	١٠٢٤	٦٢٥	١٠٢٤
س	٣٥	٣٩	٤٠	٤٠	٤٠
$س^٢$	١٢٢٥	١٥٢١	١٦٠٠	١٦٠٠	١٦٠٠

$\sum (س)^٢ = ١١٤٢٠$

$ن = ١٠$ ، $(\bar{س})^٢ = (٣٣و٢)^٢ = ١١٠٢و٢٤$

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{١١٤٢٠ - ١٠(١١٠٢و٢٤)}{١٠ - ١}} = ٦و٦٥$$

نلاحظ مما سبق أن القيم لا تتوزع حول متوسطهما الحسابي بالطريقة نفسها .

معلومة :

بالنسبة للقوانين في الإحصاء ليست ثابتة في كل المراجع فمنها من يعتمد في قانون الانحراف المعياري القسمة على (ن) وهذا ما درسناه في المرحلة الثانوية) ومنها من يعتمد القسمة على (ن − ١)

البيانات في جدول تكراري ذي فئات

١) المتوسط الحسابي (Mean)

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع نواتج ضرب القيم في تكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

المتوسط الحسابي لجدول تكراري دون فئات .

المتوسط الحسابي لجدول تكراري ذي فئات هو :-

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع نواتج ضرب مراكز الفئات في تكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

أي أنه إذا كانت المشاهدات $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \dots ، س_ر$ تمثل مشاهدات في جدول تكراري أو مراكز فئات التوزيع التكراري للبيانات ، وكانت التكرارات المقابلة لها هي $ت_١ ، ت_٢ ، ت_٣ ، \dots ، ت_ر$

على التوالي فإن :-

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (ت_ر)}$$

٣

سليمان دلدوم أبو هبه

مثال : للجدول التالي // جد المتوسط الحسابي

الفئات	٥ ـ ٩	١٠ ـ ١٤	١٥ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٤
التكرار	٣	٤	٧	٦

الحل :

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (س)	س x ت
٥ ـ ٩	٣	٧	٢١
١٠ ـ ١٤	٤	١٢	٤٨
١٥ ـ ١٩	٧	١٧	١١٩
٢٠ ـ ٢٤	٦	٢٢	١٣٢
المجموع	٢٠		٣٢٠

من الجدول نلاحظ أن :-

$\sum (ت) = ٢٠$ ، $\sum (س \times ت) = ٣٢٠$ وبالتعويض في القانون

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (ت_ر)} = \frac{٣٢٠}{٢٠} = ١٦$$

٢) الانحراف المعياري (Standard Deviation)

يحسب الانحراف المعياري في حالة الجداول التكرارية باستخدام أي من القانونين التاليين

إذا كانت المشاهدات $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \dots ، س_ر$ تمثل مشاهدات في جدول تكراري أو مراكز فئات التوزيع التكراري للبيانات ، وكانت التكرارات المقابلة لها هي $ت_١ ، ت_٢ ، ت_٣ ، \dots ، ت_ر$

على التوالي فإن :-

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢ \times ت_ر}{ن - ١}}$$ حيث ن مجموع التكرارات

ويفضل استخدام هذا القانون ، إذا كان الوسط الحسابي عدد صحيح

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^٢ \times ت) - ن(\bar{س})^٢}{ن - ١}}$$ حيث ن مجموع التكرارات

ويفضل استخدام هذا القانون ، إذا كان الوسط الحسابي عدد غير صحيح

تذكر :- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر دائماً

٤

سليمان دلدوم أبو هبه

٣) المدى

يحسب المدى في حالة الجداول التكرارية كما يلي :-

المدى = الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا ـ الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا

تذكر للفئة ٥ ـ ٩ ، الفئة الفعلية لها هي ٤و٥ – ٩و٥

حيث ٤و٥ الحد الفعلي الأدنى للفئة

٩و٥ الحد الفعلي الأعلى للفئة

٤) التباين

التباين هو مربع الانحراف المعياري = $ع^{٢}$

((كلما زادت قيمة التباين زاد تباعد (تشتت) القيم عن متوسطها الحسابي))

مثال :- للجدول التالي // جد المتوسط الحسابي

الفئات	٥ ـ ٩	١٠ ـ ١٤	١٥ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٤
التكرار	٣	٤	٧	٦

احسب :

١) المدى   ٢) الانحراف المعياري   ٣) التباين

الحل :-

المدى = الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا ـ الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا

الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا = ٢٤و٥

الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا = ٤و٥

المدى = ٢٠

٢) الانحراف المعياري

نجد الوسط الحسابي (من المثال السابق) $\bar{س} = ١٦$ وبما أن الوسط الحسابي عدد صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}}$$

من الجدول في الأسفل (الصفحة التالية) نلاحظ أن

$$ن = \sum (ت) = ٢٠ \quad ،، \quad \sum (س - \bar{س})^{٢} \times ت = ٥١٤$$

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٥١٤}{١٩}} = ٥و٢$$

٥

سليمان دلدوم أبو هبه

الفئات	ت	س	س × ت	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$(س - \bar{س})^{٢} \times ت$
٥ ـ ٩	٣	٧	٢١	-٩	٨١	٢٤٣
١٠ ـ ١٤	٤	١٢	٤٨	-٤	١٦	٤٨
١٥ ـ ١٩	٧	١٧	١١٩	١	١	٧
٢٠ ـ ٢٤	٦	٢٢	١٣٢	٦	٣٦	٢١٦
المجموع	٢٠		٣٢٠			٥١٤

٣) التباين = ٢٧و٠٥ = $ع^{٢}$

حل تدريب (٧ ـ ٢) ص٩٥

١) الشركة (ب) الرواتب فيها الأكثر تشتتاً لأن معظم الرواتب تتركز في الأطراف ، بينما الشركة (أ) الرواتب معظمها يتركز في الوسط

٢) في الشكل الأول توزيع طبيعي معتدل (الوسط = الوسيط = المنوال) ((مقاييس النزعة المركزية متساوية) ، بينما في الشكل الثاني نلاحظ أن القيم فيها تشتت كثير

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

حل سؤال (٢) ص٩٨

نحول التوزيعين (أ) ، (ب) إلى جداول كما يلي

التوزيع (أ) :-

س	١	٢	٣	٤	٥
ت	١	٢	٤	٢	٤

التوزيع (ب) :-

س	١	٢	٣	٤	٥
ت	٢	٢	٤	٢.٥	٢.٥

أ) المدى

للتوزيع (أ) = ٥ ـ ١ = ٤

للتوزيع (ب) = ٥ ـ ١ = ٤

المتوسط الحسابي للتوزيع (أ)

$$\bar{س} = \frac{(٤\times٥)+(٢\times٤)+(٤\times٣)+(٢\times٢)+(١\times١)}{٤+٢+٤+٢+١}$$

$$\bar{س} = \frac{٤٥}{١٣} = ٣و٥$$

٦

سليمان دلدوم أبو هبه

المتوسط الحسابي للتوزيع (ب)

$$\bar{س} = \frac{(1\times2)+(2\times2)+(3\times4)+(4\times2.5)+(5\times2.5)}{2+2+4+2.5+2.5}$$

$$\bar{س} = \frac{40.5}{13} = 3.1$$

الانحراف المعياري للتوزيع (أ)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر^2 \times ت) - ن(\bar{س})^2}{ن-1}}$$

س	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
ت	١	٢	٤	٢	٤	١٣
س٢	١	٤	٩	١٦	٢٥	
س٢ ×ت	١	٨	٣٦	٣٢	١٠٠	١٧٧

$\bar{س} = 3.5 \;,\; \sum (س^2 \times ت) = 177 \;,\; ن = \sum(ت) = 13$

وبالتعويض في القانون أعلاه

$$ع = \sqrt{\frac{(177) - 13(3.5)^2}{13-1}} = \sqrt{\frac{177 - 159.25}{12}} = 1.2$$

الانحراف المعياري للتوزيع (ب)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر^2 \times ت) - ن(\bar{س})^2}{ن-1}}$$

س	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
ت	٢	٢	٤	٢.٥	٢.٥	١٣
س٢	١	٤	٩	١٦	٢٥	
س٢ ×ت	٢	٨	٣٦	٤٠	٦٢.٥	١٤٨.٥

$\bar{س} = 3.1 \;,\; \sum (س^2 \times ت) = 148.5 \;,\; ن = \sum(ت) = 13$

وبالتعويض في القانون أعلاه

$$ع = \sqrt{\frac{(148.5) - 13(3.1)^2}{13-1}} = \sqrt{\frac{148.5 - 124.9}{12}} = 1.4$$

ب) التوزيع (أ) الأكثر تجانساً

سليمان دلدوم أبو هبه

٧

أثر تعديل البيانات على مقاييس التشتت

المقصود بتعديل البيانات :- هو إحداث تغيير على البيانات باستخدام العمليات الحسابية (الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة)

هل التعديل على البيانات يؤثر على المقاييس الإحصائية

(النزعة المركزية ، التشتت)

تذكر أن تعديل البيانات يؤثر على مقاييس النزعة المركزية

مثال مراجعة :-

إذا كانت علامات (٧) طلاب في أحد الاختبارات كالآتي :

٩ ، ٦ ، ٨ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، وعدلت العلامات بضرب كل علامة في العدد (٢) وإضافة ثلاث علامات على ناتج الضرب لكل منها

احسب المتوسط الحسابي قبل التعديل وبعده .

الحل :-

١) قبل التعديل

$$\text{المتوسط الحسابي} = \bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{9+6+8+4+6+4+5}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

٢) بعد التعديل

التعديل تم كما يلي ((س بعد = ٢ س قبل + ٣))

س/قبل	٩	٦	٨	٤	٦	٤	٥
س/بعد	٢١	١٥	١٩	١١	١٥	١١	١٣

$$\bar{س}_{بعد} = \frac{21+15+19+11+15+11+13}{7} = \frac{105}{7} = 15$$

لاحظ أن الوسط الحسابي تأثر بتعديل العلامات ، ويمكن استخدام العلاقة التالية في إيجاد قيمة المتوسط الحسابي أو المشاهدة بشكل سريع

$$ص = أ س + ب$$

حيث س (المشاهدة ، المتوسط الحسابي) قبل التعديل

ص (المشاهدة ، المتوسط الحسابي) بعد التعديل

ملاحظة : تم تعديل مثال (٧ – ٥) ص١٠٠ ، لأنه يوجد خطأ في الطباعة حيث أن مجموع القيم في الكتاب (٣٩) وليس (٤٢) كما هو مكتوب في الحل (الفرع الثاني) (التعديل تم على القيم فقط ليتناسب مع حل الكتاب)

سليمان دلدوم أبو هبه

٨

حل نشاط (٧ ـ ٣) ص١٠١

الحل :

١) القيم قبل ٣٨ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٥

$$\bar{س} = \frac{٣٨+٤٠+٤٥+٥٢+٥٥}{٥} = \frac{٢٣٠}{٥} = ٤٦ \text{قبل}$$

القيم بعد ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٥٧ ، ٦٠

$$\bar{س} = \frac{٤٣+٤٥+٥٠+٥٧+٦٠}{٥} = \frac{٢٥٥}{٥} = ٥١ \text{بعد}$$

٢) المدى $_{قبل}$ = ٥٥ ـ ٣٨ = ١٧

المدى $_{بعد}$ = ٦٠ ـ ٤٣ = ١٧

٣) الانحراف المعياري

بما أن المتوسط الحسابي في الحالتين (قبل ، بعد) عدد صحيح سوف نستخدم القانون التالي

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}{ن-١}}$$

$\bar{س}_{(قبل)}$ = ٤٦ ،،،، $\bar{س}_{(بعد)}$ = ٥١

الانحراف المعياري /// قبل التعديل ($\bar{س}_{(قبل)}$ = ٤٦)

س	٣٨	٤٠	٤٥	٥٢	٥٥	المجموع
$س - \bar{س}$	٨-	٦-	١-	٦	٩	صفر؟؟
$(س - \bar{س})^٢$	٦٤	٣٦	١	٣٦	٨١	٢١٨

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}{ن-١}} = \sqrt{\frac{٢١٨}{٥-١}} = ٧٫٣٨$$

الانحراف المعياري /// بعد التعديل ($\bar{س}_{(بعد)}$ = ٥١)

س	٤٣	٤٥	٥٠	٥٧	٦٠	المجموع
$س - \bar{س}$	٨-	٦-	١-	٦	٩	صفر؟؟
$(س - \bar{س})^٢$	٦٤	٣٦	١	٣٦	٨١	٢١٨

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}{ن-١}} = \sqrt{\frac{٢١٨}{٥-١}} = ٧٫٣٨$$

سليمان دلدوم أبو هبه

٩

لاحظ مما سبق أن مقاييس التشتت لم تتأثر في عملية الجمع

المدى (قبل) = المدى (بعد)

الانحراف المعياري (قبل) = الانحراف المعياري (بعد)

حل تدريب (٧ ـ ٤) ص١٠١

القيم قبل (١٠، ١٥، ٢٠، ١٠، ٢٠، ١٥، ١٠)

القيم بعد زيادة التوفير (٥) قروش

القيم قبل (١٥، ٢٠، ٢٥، ١٥، ٢٥، ٢٠، ١٥)

بعد الحل نجد أن

$\bar{س}_{(قبل)}$ = ١٤.٣ ،،،، $\bar{س}_{(بعد)}$ = ١٩.٣

١) المدى (قبل) = ٢٠ ـ ١٠ = ١٠

٢) الانحراف المعياري (قبل)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س^٢ - ن(\bar{س})^٢}{ن-١}}$$

حيث ن = ٧ ،،،، $\bar{س}_{(قبل)}$ = ١٤.٣

س	١٠	١٥	٢٠	١٠	٢٠	١٥	١٠	المجموع
$س^٢$	١٠٠	٢٢٥	٤٠٠	١٠٠	٤٠٠	٢٢٥	١٠٠	١٥٥٠

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{(١٥٥٠) - ٧(١٤٫٣)^٢}{٧-١}} = ٤٫٤٥$$

٣) / ٤) من التدريب السابق مقاييس التشتت لا تتأثر بعملي الجمع لذلك
المدى بعد التعديل = المدى قبل التعديل = ١٠

الانحراف المعياري قبل = الانحراف المعياري بعد = ٤.٤٥

حل نشاط (٧ ـ ٤) ص١٠٢

العلامات قبل التعديل

١١، ١٠، ١٤، ١٦، ١٩، ٢٠، ٢٢، ٢٤

العلامات بعد التعديل (تم ضرب كل علامة في (٤))

٤٤، ٤٠، ٥٦، ٦٤، ٧٦، ٨٠، ٨٨، ٩٦

نجد المتوسط الحسابي ($\bar{س}_{(قبل)}$ = ١٧ ،،،، $\bar{س}_{(بعد)}$ = ٦٨)

سليمان دلدوم أبو هبه

١٠

١) المدى قبل = ٢٤ – ١٠ = ١٤

المدى بعد = ٩٦ – ٤٠ = ٥٦

٢) الانحراف المعياري

أ) الانحراف المعياري (قبل) (($\bar{س}_{(قبل)}$ = ١٧))

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
١١	-٦	٣٦
١٠	-٧	٤٩
١٤	-٣	٩
١٦	-١	١
١٩	٢	٤
٢٠	٣	٩
٢٢	٥	٢٥
٢٤	٧	٤٩
المجموع	صفر ????	١٨٢

بما أن الوسط الحسابي (قبل ، بعد) عدد صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن-1}} = \sqrt{\frac{182}{8-1}} = ٥,١ \text{ ((قبل))}$$

ب) الانحراف المعياري (بعد) (($\bar{س}_{(بعد)}$ = ٦٨))

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٤٤	-٢٤	٥٧٦
٤٠	-٢٨	٧٨٤
٥٦	-١٢	١٤٤
٦٤	-٤	١٦
٧٦	٨	٦٤
٨٠	١٢	١٤٤
٨٨	٢٠	٤٠٠
٩٦	٢٨	٧٨٤
المجموع	صفر ????	٢٩١٢

سليمان دلدوم أبو هبه

١١

(($\bar{س}_{(بعد)}$ = ٦٨))

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن-1}} = \sqrt{\frac{2912}{8-1}} = ٢٠,٤ \text{ ((بعد))}$$

٣) التباين قبل = ٢٦ /// التباين بعد (الضرب في ٤) = ٤١٦

ماذا تستنتج ....

حل تدريب (٧ – ٥) ص١٠٢

القيم قبل التعديل (٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ٥)

القيم بعد التعديل (الضرب في العدد (- ٢))

((-١٢ ، -٨ ، -٦ ، -٤ ، -١٠))

باستخدام قانون المتوسط الحسابي ، نجد أن

$\bar{س}_{(قبل)}$ = ٤ ،،،، $\bar{س}_{(بعد)}$ = -٨

١) المدى (قبل) = ٦ – ٢ = ٤

المدى (بعد) = -٤ - -١٢ = ٨

ماذا تلاحظ ....

ماذا تستنتج ....

٢) الانحراف المعياري

أ) قبل التعديل ،،،،،،، $\bar{س}_{(قبل)}$ = ٤ ((عدد صحيح))

س	٦	٤	٣	٢	٥	المجموع
$س - \bar{س}$	٢	٠	-١	-٢	١	صفر؟؟
$(س - \bar{س})^2$	٤	٠	١	٤	١	١٠

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن-1}} = \sqrt{\frac{10}{5-1}} = ١,٥٨ \text{ (قبل التعديل)}$$

ب) بعد التعديل ،،،،،،، $\bar{س}_{(بعد)}$ = -٨ ((عدد صحيح))

س	-١٢	-٨	-٦	-٤	-١٠	المجموع
$س - \bar{س}$	-٤	٠	٢	٤	-٢	صفر؟؟
$(س - \bar{س})^2$	١٦	٠	٤	١٦	٤	٤٠

سليمان دلدوم أبو هبه

١٢

وبالتعويض في القانون

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}} = \sqrt{\frac{٤٠}{٥ - ١}} = ٣٫١٦ \text{ (بعد التعديل)}$$

ماذا تلاحظ ....

ماذا تستنتج ....

٣) التباين (قبل) = ٢.٥ // التباين (بعد) = ٤٠

ماذا تلاحظ ....

ماذا تستنتج ....

نلاحظ مما سبق ما يلي :-

١) أن المتوسط الحسابي (مقاييس النزعة المركزية بشكل عام) يتأثر بالعمليات الحسابية الأربع .

٢) مقاييس التشتت لا تتأثر في حالتي الجمع والطرح

٣) مقاييس التشتت (المدى ، والانحراف المعياري) تتأثر في حالة الضرب في عدد (موجب أو سالب) لكن بالنسبة للعدد السالب بعد أخذ القيمة المطلقة له

٤) التباين يتأثر بالضرب كما يلي :- (مربع العدد) x التباين

سليمان دلدوم أبو هبه

ويمكن التعبير عن كل ما سبق كما يلي

لتكن ص القيمة بعد التعديل ، س القيمة قبل التعديل

وكانت العلاقة بينهما كما يلي :-

$$\text{ص} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$$

١) الانحراف بعد التعديل $= |\text{أ}| \times \text{ع}_{\text{قبل}}$

٢) المدى بعد التعديل $= |\text{أ}| \times$ المدى $_{\text{قبل}}$

٣) التباين بعد التعديل $= (\text{أ})^2 \times$ التباين $_{\text{قبل}}$

حل تدريب (٧ – ٦) ص١٠٣

$\bar{\text{س}} = ٣$ ...... المدى = ٦ ...... $\text{ع}^2 = ١٫٦٩$ ... $\text{ع} = ١٫٣$

التعديل تم حسب العلاقة :- $\text{ص} = ٥\,\text{س} - ٣$

١) $\bar{\text{س}}_{\text{بعد}} = ٥ (٣) - ٣ = ١٢$ (المتوسط الحسابي)

٢) المدى $_{\text{بعد}} = ٥ (٦) = ٣٠$ (المدى)

٣) $\text{ع}_{\text{بعد}} = ٥ (١.٣) = ٦.٥$ (الانحراف المعياري)

٤) $\text{ع}^2_{\text{بعد}} = (٥)^2 \times (١.٦٩) = ٤٢.٢٥$ (التباين)

١٣

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

حل تدريب (٧ – ٧) ص١٠٣

المدى = ٧ ...... الانحراف المعياري (ع) = ٢.٥٢

العلاقة المستخدمة في التحويل من سلسيوس إلى فهرنهايت

$$\text{ف} = \frac{٩}{٥}\text{س} + ٣٢$$

١) المدى $_{\text{بعد}} = \frac{٩}{٥}(٧) = \frac{٦٣}{٥} = ١٢٫٦$

٢) $\text{ع}_{\text{بعد}} = \frac{٩}{٥}(٢٫٥٢) = \frac{٢٢٫٦٨}{٥} = ٤٫٥٤$

دمج البيانات

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات كما في الجدول التالي

المجموعة	عدد القيم	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الأولى	ن_1	$\bar{\text{س}}_1$	ع_1
الثانية	ن_2	$\bar{\text{س}}_2$	ع_2

سليمان دلدوم أبو هبه

كيف نجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري بعد دمج المجموعتين

١) المتوسط الحسابي بعد الدمج

$$\bar{\text{س}}_{\text{بعد الدمج}} = \frac{\text{ن}_1 \times \bar{\text{س}}_1 + \text{ن}_2 \times \bar{\text{س}}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

لإيجاد الانحراف المعياري بعد الدمج يجب علينا إيجاد مجموع مربعات القيم لكل مجموعة، وذلك عن طريق قانون الانحراف المعياري للقيم والقانون هو

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}}$$

بتربيع الطرفين لإيجاد قانون التباين

$$\text{ع}^2 = \frac{\sum \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}$$ بالضرب التبادلي

$$\text{ع}^2(\text{ن} - 1) = \sum \text{س}^2 - \text{ن}(\bar{\text{س}})^2$$ نجعل $\sum \text{س}^2$ موضع للقانون

$$\sum \text{س}^2 = \text{ع}^2(\text{ن} - 1) + \text{ن}(\bar{\text{س}})^2$$

وباستخدام هذا القانون نتمكن من إيجاد مجموع مربعات

١٤

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

القيم لأي مجموعة

لنفرض أن م = مجموع مربعات القيم لأي مجموعة

$$م_1 = \sum س^2 = ع_1^2 (ن_1 - 1) + ن_1 (\bar{س}_1)^2$$

$$م_2 = \sum س^2 = ع_2^2 (ن_2 - 1) + ن_2 (\bar{س}_2)^2$$

مما سبق يكون التباين بعد الدمج كما يلي :-

$$ع^2 = \frac{(م_1 + م_2) - (ن_1 + ن_2)(\bar{س})^2}{(ن_1 + ن_2) - 1}$$

حل تدريب (٧ – ٨) ص١٠٦

الفرع	عدد الموظفين	المتوسط الحسابي للرواتب	الانحراف المعياري للرواتب
الفرع أ	$ن_1 = ٨$	$\bar{س}_1 = ٤٠٠$	$ع_1 = ٤$
الفرع ب	$ن_2 = ١١$	$\bar{س}_2 = ٤٨٠$	$ع_2 = ٦$

١) $\bar{س}_{\text{بعد الدمج}} = \frac{ن_1 \times \bar{س}_1 + ن_2 \times \bar{س}_2}{ن_1 + ن_2}$

$$= \frac{٨ \times ٤٠٠ + ١١ \times ٤٨٠}{٨ + ١١} = ٤٤٦و٣$$

٢) مجموع مربعات القيم

$$م_1 = \sum س^2 = ع_1^2 (ن_1 - 1) + ن_1 (\bar{س}_1)^2$$

$$م_1 = \sum س^2 = (٤)^2 (٨ - ١) + ٨ (٤٠٠)^2$$

$$م_1 = ١١٢ + ١٢٨٠٠٠٠ = ١٢٨٠١١٢$$

$$م_2 = \sum س^2 = ع_2^2 (ن_2 - 1) + ن_2 (\bar{س}_2)^2$$

$$م_2 = \sum س^2 = (٦)^2 (١١ - ١) + ١١ (٤٨٠)^2$$

$$م_2 = ٣٦٠ + ٢٥٣٤٤٠٠ = ٢٥٣٤٧٦٠$$

الأن نعوض بقانون التباين بعد الدمج

$$ع^2 = \frac{(م_1 + م_2) - (ن_1 + ن_2)(\bar{س})^2}{(ن_1 + ن_2) - 1}$$

١٥

سليمان دلدوم أبو هبه

$$ع^2 = \frac{١٢٨٠١١٢ + ٢٥٣٤٧٦٠ - (١٩)(٤٤٦و٣)^2}{١٨}$$

$$ع^2 = \frac{٣٠٣٨١و٨٩}{١٨} = ١٦٨٧و٩$$

منها الانحراف المعياري ع

$$ع = \sqrt{١٦٨٧و٩} = ٤١و٠٨$$

الحذف أو الإضافة للقيم

هل يتأثر الانحراف المعياري إذا حذفت بعض القيم ، أو إضافة قيم جديدة

حل تدريب (٧ – ٩) ص١٠٩

القيم قبل الحذف

٩٢ ، ١٠٠ ، ٩٥ ، ٩٧ ، ٨٨ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ٩٥

القيم بعد الحذف

٩٢ ، ٩٥ ، ٩٧ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ٩٥

$\bar{س}_{(\text{قبل})} = ٩٣.٧٥$ ،،،، $\bar{س}_{(\text{بعد})} = ٩٣.٦٧$

التباين قبل الحذف (($\bar{س}_{(\text{قبل})} = ٩٣.٧٥$)) ((عدد غير صحيح))

نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س^2 - ن(\bar{س})^2}{ن - 1}}$$

س	٩٢	١٠٠	٩٥	٩٧	٨٨
$س^2$	٨٤٦٤	١٠٠٠٠	٩٠٢٥	٩٤٠٩	٧٧٤٤
س	٩٣	٩٠	٩٥	قبل الحذف مجموع $س^2$ ٧٠٤١٦	
$س^2$	٨٦٤٩	٨١٠٠	٩٠٢٥		

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{٧٠٤١٦ - ٨(٩٣و٧٥)^2}{٨ - ١}} = ٣و٨٥$$

التباين $= ع^2 = ١٤و٧٩$

١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

التباين بعد الحذف (($\bar{س}_{(بعد)} = ٩٣.٦٧$)) ((عدد غير صحيح))

نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س^٢ - ن(\bar{س})^٢}{ن-١}}$$

س	٩٢	١٠٠	٩٥	٩٧	٨٨
$س^٢$	٨٤٦٤	١٠٠٠٠	٩٠٢٥	٩٤٠٩	٧٧٤٤
س	٩٣	٩٠	٩٥	بعد الحذف مجموع $س^٢$ ٥٢٦٧٢	
$س^٢$	٨٦٤٩	٨١٠٠	٩٠٢٥		

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{٥٢٦٧٢ - ٦(٩٣٫٦٧)^٢}{٦-١}} = ٢٫٢٧$$

التباين $= ع^٢ = ٦٫٢٦$

لاحظ أن قيمة الانحراف المعياري تتغير إذا حذفت أي من القيم ، وكذلك إذا أضيف إليها قيم أخرى ، أو أجري تغيير على هذه القيم ، والسبب في ذلك هو أن قيمة الانحراف المعياري تعتمد على القيم جميعها

حل الأسئلة / ص ١١٠

س ١ :- $\bar{س} = ٢٥$ ، $ع = ٤$ ،،، المدى = ١٠

تم التعديل وفق العلاقة $ص = ٤س - ١٠$

المطلوب ١) $س_{قبل}$: $س_{بعد} = ٢٢$

بالتعويض في العلاقة $٢٢ = ٤س - ١٠$ ،، $س_{قبل} = ٨$

٢) أ) $\bar{س} = ٤(٢٥) - ١٠ \leftarrow \bar{س} = ١١٠$ بعد

ب) المدى بعد = ٤ (١٠) = ٤٠

ج) $ع = ٤(٤) \leftarrow ع = ١٦$ بعد

د) التباين قبل = ١٦ ،،،، التباين بعد = $(٤)^٢(١٦) = ٢٥٦$

س ٢ :- التباين قبل = ٣٦ ،، إذا الانحراف المعياري قبل = ٦ ،، ونعلم أن الانحراف المعياري يتأثر فقط بالضرب في القيمة المطلقة للعدد لذلك الانحراف المعياري بعد الضرب

$ع = ٢(٦) \leftarrow ع = ١٢$ بعد

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

١٧

س ٣ :- عدد الطلاب (ن) = ٢٥

المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) = ٤٥

الانحراف المعياري (ع) = ٨

انتقل أحد الطلاب من الصف كتلته (س = ٥٣)

المطلوب :- ١) المتوسط الحسابي لكتل الطلاب بعد انتقال الطالب

٢) التباين لكتل الطلاب بعد انتقال الطالب

الحل :- ١) نجد مجموع كتل الطلاب قبل انتقال الطالب

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} \leftarrow ٤٥ = \frac{\sum س}{٢٥}$$

$\sum س = ١٢٢٥$ ، نحذف كتلة الطالب الذي انتقل

$١٢٢٥ - ٥٣ = ١٠٧٢$ $\sum س$ بعد انتقال الطالب

(ن) بعد انتقال الطالب = ٢٤

إذا المتوسط الحسابي بعد

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٠٧٢}{٢٤} = ٤٤٫٦٧$$

٢) التباين بعد انتقال الطالب ((نجد $\sum س^٢$)) حسب العلاقة

$$\sum س^٢ = ع^٢(ن-١) + ن(\bar{س})^٢$$

$$\sum س^٢ = (٨)^٢(٢٥-١) + ٢٥(٤٥)^٢ = ٥٢١٦١$$

الآن نحذف مربع كتلة الطالب الذي انتقل من مجموع مربعات كتل الطلاب

مجموع $(الكتل)^٢_{بعد}$ = مجموع $(الكتل)^٢_{قبل}$ − $(ك الطالب)^٢$

$$\sum س^٢ = ٥٢١٦١ - (٥٣)^٢ = ٤٩٣٥٢$$

وبتطبيق قانون التباين (أو الانحراف المعياري) على بعد

$$ع^٢ = \frac{\sum س^٢ - ن(\bar{س})^٢}{ن-١} = \frac{٤٩٣٥٢ - ٢٤(٤٤٫٦٧)^٢}{٢٤-١}$$

$$\frac{٤٩٣٥٢ - ٢٤(٤٤٫٦٧)^٢}{٢٤-١} = ٦٤٫٥$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

١٨

سليمان دلدوم أبو هبه

س ٤ :-

الشعب	عدد الطلاب	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
أ	٤٢	١٣	٦
ب	٤١	١٢	٤
جـ	٤٠	١٥	٥

المطلوب :-

حساب كل من (المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري) لعلامات الطلاب

الحل : نجد المتوسط الحسابي لكل الطلاب حسب القانون

$$\bar{س} = \frac{ن_{أ} \times \bar{س}_{أ} + ن_{ب} \times \bar{س}_{ب} + ن_{ج} \times \bar{س}_{ج}}{ن_{أ} + ن_{ب} + ن_{ج}}$$

$$\bar{س} = \frac{٤٢ \times ١٣ + ٤١ \times ١٢ + ٤٠ \times ١٥}{٤٢ + ٤١ + ٤٠} = ١٣٫٣$$

نجد الآن مجموع مربعات علامات كل شعبة حسب القانون

$$\sum س^٢ = ع^٢ (ن - ١) + ن (\bar{س})^٢$$

م١ (أ) ،، م٢ (ب) ،، م٣ (جـ)

$$م_{أ} = \sum س^٢ = (٦)^٢ (٤٢ - ١) + ٤٢ (١٣)^٢ = ٨٥٧٤$$

$$م_{ب} = \sum س^٢ = (٤)^٢ (٤١ - ١) + ٤١ (١٢)^٢ = ٦٥٤٤$$

$$م_{ج} = \sum س^٢ = (٥)^٢ (٤٠ - ١) + ٤٠ (١٢)^٢ = ٩٩٧٥$$

إذا مجموع مربعات علامات الطلاب لكل الشعب

$$\sum س^٢ = ٨٥٧٤ + ٦٥٤٤ + ٩٩٧٥ = ٢٥٠٩٣$$

عدد الطلاب لكل الشعب = ١٢٣

المتوسط الحسابي لكل الشعب $\bar{س}$ = ١٣٫٣

وبالتعويض في القانون

$$ع^٢ = \frac{\sum س^٢ - ن (\bar{س})^٢}{ن - ١} = \frac{٢٥٠٩٣ - ١٢٣ (١٣٫٣)^٢}{١٢٣ - ١}$$

ع² = ٢٧٫٣ التباين لكل الشعب

ع = ٢٫٥ الانحراف المعياري لكل الشعب

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

الاحتمالات

أنواع التجارب

أ) تجارب مؤكدة مثل التجارب العلمية

ب) تجارب غير مؤكدة مثل التجارب العشوائية وهي التجارب موضع الدراسة في هذه الوحدة .

١) التجربة العشوائية

هي التجربة التي يمكن معرفة نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد أي من هذه سيتحقق فعلا إلا بعد إجراء التجربة : مثل إلقاء حجر النرد ، إلقاء قطعة نقد ...... الخ

والتجارب العشوائية مرتبطة بمفهوم يستخدم في معظم الحالات هو مفهوم الاحتمال

مراجعة في بعض المفاهيم

أ) الفضاء العيني :- هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (Ω)

ب) الحادث : هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني لتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (ع)

ت) احتمال وقوع حادث ما : هو فرصة وقوع ذلك الحادث ، ويرمز له بالرمز ل (ع) وتكون قيمته محصورة بين الصفر والواحد صحيح ٠ ≤ ل (ع) ≤ ١

٢) أنواع الحوادث :

أ) الحادث البسيط : هو الحادث الذي يحتوي عنصرا واحدا من عناصر الفضاء العيني (Ω)

ب) الحادث المركب : هو الحادث الذي يحتوي عنصرين أو أكثر من عناصر الفضاء العيني (Ω)

ت) الحادث المستحيل : هو الحادث الذي لا يحتوي أي عنصر من عناصر الفضاء العيني (Ω) ، ويساوي (∅) ويكون احتماله = ٠

ث) الحادث الأكيد : هو الحادث الذي يحتوي جميع عناصر الفضاء العيني (Ω) ويساوي (Ω) ويكون احتماله يساوي ١ .

تذكر : إذا كان (Ω) الفضاء العيني لتجربة عشوائية ، وكان ع ⊃ Ω ، فإن احتمال وقوع الحادث ح هو

$$ل(ح) = \frac{\text{عدد عناصر الحادث ح}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر }(\Omega)} = \frac{ع(ح)}{ع(\Omega)}$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

مجموع احتمالات الحوادث البسيطة المكونة للفضاء العيني يساوي ١

حل تدريب (٧ – ١٠) ص ١١٤

١) {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص
ك ك ك، ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك}

٢) حسب مبدأ العد العام

ع(Ω) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨

٣) احتمال ظهور ٣ صور

ح = {ص ص ص} ← ع(ح) = ١

ل(ح) = ع(ح) / ع(Ω) = ١/٨

٤) احتمال ظهور كتابتين على الأقل

المقصود هنا (ظهور كتابتين وصورة أو ظهور ٣ كتابات)

((على الأقل نكمل للأعلى ،، على الأكثر نكمل للأسفل))

ح = {ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك} ← ع(ح) = ٤

ل(ح) = ع(ح) / ع(Ω) = ٤/٨ = ١/٢ = ٠,٥

ملاحظة : بالنسبة للجواب النهائي ليس بالضرورة أن يختصر

جواب فكر ((لا يوجد فرق نهائياً))

حل تدريب (٧ – ١١) ص ١١٥

الحل:- $\boxed{١٢٠٣٩٥٨٧٤٦}$

ع(Ω) = ١٠

١) ل (ظهور الرقم ٩) = ١/١٠

٢) ل (عدم ظهور الرقم ٩) = ٩/١٠

سليمان دلدوم أبو هبه

٢١

حل نشاط (٧ – ٥) ص ١١٥

حل تدريب (٧ – ١٢) ص ١١٦

(١،١)	(١،٢)	(١،٣)	(١،٤)	(١،٥)	(١،٦)
(٢،١)	(٢،٢)	(٢،٣)	(٢،٤)	(٢،٥)	(٢،٦)
(٣،١)	(٣،٢)	(٣،٣)	(٣،٤)	(٣،٥)	(٣،٦)
(٤،١)	(٤،٢)	(٤،٣)	(٤،٤)	(٤،٥)	(٤،٦)
(٥،١)	(٥،٢)	(٥،٣)	(٥،٤)	(٥،٥)	(٥،٦)
(٦،١)	(٦،٢)	(٦،٣)	(٦،٤)	(٦،٥)	(٦،٦)

١) ع(Ω) = ٦ × ٦ = ٣٦

٢) نفرض ح مجموع العددين ٧

ح = {(١،٦)،(٦،١)،(٢،٥)،(٥،٢)،(٣،٤)،(٤،٣)}

ع(ح) = ٦

ل(ح) = ع(ح) / ع(Ω) = ٦/٣٦ = ١/٦

٣) نفرض ح عددين زوجيين

ح = {(٢،٢)،(٦،٦)،(٤،٤)}

ع(ح) = ٣

ل(ح) = ع(ح) / ع(Ω) = ٣/٣٦ = ١/١٢

٤) نفرض ح مجموع العددين أقل من أو يساوي ٥

ح = {(١،١)،(١،٢)،(١،٣)،(١،٤)،(٢،١)،
(٢،٢)،(٢،٣)،(٣،١)،(٣،٢)،(٤،١)}

ع(ح) = ١٠

ل(ح) = ع(ح) / ع(Ω) = ١٠/٣٦ = ٥/١٨

٥) صفر \\\\\\ مستحيل

٦) أكبر من ١ و أقل من ١٣

الجواب (١) \\ أكيد

سليمان دلدوم أبو هبه

٢٢

حل تدريب (٧ – ١٣) ص ١١٦

١) حسب مبدأ العد العام

$$ع(\Omega) = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٣٢$$

أو نستخدم القاعدة $ع(\Omega) = ٢^{ن} = ٢^{٥} = ٣٢$

استخدمنا الأساس ٢ لأن النواتج ثنائية

٢) $ع(\Omega) = ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٢٩٦$

أو $ع(\Omega) = ٦^{ن} = ٦^{٤} = ٢٥٦$

٣) $ع(\Omega) = ٦ \times ٦ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢٨٨$

أو $ع(\Omega) = ٦^{ن} \times ٢^{ر} = ٦^{٤} \times ٢^{٣} = ٢٨٨$

تحدث \\ ص ١١٧

١) إرجاع ما تم سحبه ثم السحب من جديد وهكذا

٢) عدم إرجاع ما تم سحبه والاستمرار في السحب

٣) السحب دفعة واحدة حسب المطلوب وفي العادة الكمية أكبر من واحد ((التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم))

مثال توضيحي لحالات السحب

يحتوي صندوق على ٣ كرات سوداء ، ٢ بيضاء سحب من الصندوق كرتان

جد عدد عناصر الفضاء العيني ، ثم أكتب الفضاء العيني إذا كان السحب

١) على التوالي مع الإرجاع

٢) على التوالي دون إرجاع

٣) معاً

الحل :-

١) على التوالي مع الإرجاع

حسب مبدأ العد العام \\ نسحب الكرة الأولى من ٥ ثم نعيدها ونسحب الكره الثانية من ٥ ، لذلك فإن عدد عناصر الفضاء العيني هو

$$ع(\Omega) = ٥ \times ٥ = ٢٥$$

$\Omega = \{$ س س، س ب، ب س، ب ب $\}$

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني = ٢٥ ، لكن ما تم كتابته في الفضاء العيني ٤ فقط ؟؟؟؟

لنأخذ الحالة الأولى في الفضاء العيني س ، س

س الأولى تم سحبها من ٣ ثم تم إرجاعها وسحب س الثانية أيضاً من ٣ لذلك فإن ع (س ، س) = ٣ x ٣ = ٩

وبنفس الطريقة الباقي

ع (س ، ب) = ٣ x ٢ = ٦

ع (ب ، س) = ٢ x ٣ = ٦

ع (ب ، ب) = ٢ x ٢ = ٤

وبجمع النواتج ٩ + ٦ + ٦ + ٤ = ٢٥ عدد عناصر الفضاء العيني

تفسير أخر باستخدام الجدول

	س	س	س	ب	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب

١) على التوالي دون إرجاع

حسب مبدأ العد العام \\ نسحب الكرة الأولى من ٥ ثم لا نعيدها ونسحب الكره الثانية من ٤ ، لذلك فإن عدد عناصر الفضاء العيني هو

$$ع(\Omega) = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$\Omega = \{$ س س، س ب، ب س، ب ب $\}$

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني = ٢٠ ، لكن ما تم كتابته في الفضاء العيني ٤ فقط ؟؟؟؟

لنأخذ الحالة الأولى في الفضاء العيني س ، س

س الأولى تم سحبها من ٣ ثم لم يتم إرجاعها وسحب س الثانية

من ٢ لذلك فإن ع (س ، س) = ٣ x ٢ = ٦

وبنفس الطريقة الباقي

ع (س ، ب) = ٣ x ٢ = ٦

ع (ب ، س) = ٢ x ٣ = ٦

ع (ب ، ب) = ٢ x ١ = ٢

وبجمع النواتج ٦ + ٦ + ٦ + ٢ = ٢٠ عدد عناصر الفضاء العيني

في الجدول نشطب عناصر القطر لأن الكرة التي تم سحبها مستحيل أن تسحب مرة ثانية

	س	س	س	ب	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب

١) معاً

$$ع(\Omega) = \frac{٥ \times ٤}{٢} = ١٠$$

Ω = {س س، س ب، ب ب}

لاحظ أن الكرة السوداء الأولى لا يمكن أن تظهر مع نفسها وكذلك الثانية والثالثة وأيضا البيضاء الأولى لا يمكن أن تظهر مع نفسها كذلك الثانية والسوداء الأولى تظهر مع البيضاء الأولى أو الثانية وليس هناك فرق بين (س ، ب) أو (ب ، س)

في الجدول نشطب عناصر القطر والعناصر التي أسفله أو أعلاه

	س	س	س	ب	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب

حل مثال (٧ – ١٢) ص ١١٧

حل تدريب (٧ – ١٤) ص ١١٨

١) سحب بطاقتان على التوالي مع الإرجاع

أ) ع(Ω) = ٣ × ٣ = ٩

ب) Ω = {(١،١)،(١،٢)،(١،٣)،(٢،١)،(٢،٢)،(٢،٣)،(٣،١)،(٣،٢)،(٣،٣)}

ج) نفرض ع١: العددان فرديان

ع١ = {(١،١)،(١،٣)،(٣،١)،(٣،٣)}

$$ل(ع_١) = \frac{ع(ع_١)}{ع(\Omega)} = \frac{٤}{٩}$$

د) نفرض ع٢: المجموع أكبر من ٣

ع٢ = {(١،٣)،(٢،٢)،(٢،٣)،(٣،١)،(٣،٢)،(٣،٣)}

$$ل(ع_٢) = \frac{ع(ع_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

٢) سحب بطاقتان على التوالي دون إرجاع

أ) لاحظ هنا أننا نسحب البطاقة الأولى ولا نعيدها ثم نسحب البطاقة الثانية ، لذلك

ع(Ω) = ٣ × ٢ = ٦

ب) البطاقة لا تكرر نفسها أثناء عملية السحب لذلك

Ω = {(١،٢)،(١،٣)،(٢،١)،(٢،٣)،(٣،١)،(٣،٢)}

ج) نفرض ع١: العددان فرديان

ع١ = {(١،٣)،(٣،١)}

$$ل(ع_١) = \frac{ع(ع_١)}{ع(\Omega)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

د) نفرض ع٢: المجموع أكبر من ٣

ع٢ = {(١،٣)،(٢،٣)،(٣،١)،(٣،٢)}

$$ل(ع_٢) = \frac{ع(ع_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

٣) السحب للبطاقتين معاً

التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم

أ) لاحظ هنا أن العدد لا يمكن أن يظهر مع نفسه وسحب بطاقتين تحملان الرقمان ١ ، ٢ هو نفسه ٢ ، ١ وهكذا ، لذلك

$$\text{ع}(\Omega) = ٣$$

ب) $\Omega = \{(١،٢)،(١،٣)،(٢،٣)\}$

ج) نفرض ح_1: العددان فرديان

$$\text{ح}_1 = \{(١،٣)\}$$

$$\text{ل}(\text{ح}_1) = \frac{\text{ع}(\text{ح}_1)}{\text{ع}(\Omega)} = \frac{١}{٣}$$

د) نفرض ح_2: المجموع أكبر من ٣

$$\text{ح}_2 = \{(١،٣)،(٢،٣)\}$$

$$\text{ل}(\text{ح}_2) = \frac{\text{ع}(\text{ح}_2)}{\text{ع}(\Omega)} = \frac{٢}{٣}$$

توضيح لما سبق باستخدام الجداول ((الفضاء العيني))

١) سحب بطاقتان على التوالي مع الإرجاع

	١	٢	٣
١	(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢	(١ ، ٢)	(٢ ، ٢)	(٣ ، ٢)
٣	(١ ، ٣)	(٢ ، ٣)	(٣ ، ٣)

٢) سحب بطاقتان على التوالي دون إرجاع

	١	٢	٣
١	[redacted]	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢	(١ ، ٢)	[redacted]	(٣ ، ٢)
٣	(١ ، ٣)	(٢ ، ٣)	[redacted]

٣) السحب للبطاقتين معاً

	١	٢	٣
١	[redacted]	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢	[redacted]	[redacted]	(٣ ، ٢)
٣	[redacted]	[redacted]	[redacted]

تعريف

ليكن ل اقترانا يربط كل حادث ح في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما بعدد حقيقي ، فإن ل يسمى اقتران احتمال ، إذا حقق الفرضيات التالية :

١) لكل حادث $\text{ح} \subset \Omega$ يكون $٠ \leq \text{ل}(\text{ح}) \leq ١$

٢) $\text{ل}(\Omega) = ١$

مراجعة

١) الرمز $\cup$ ← اتحاد

٢) الرمز $\cap$ ← تقاطع

٣) الرمز $\bar{\text{ح}}$ ← متممة ح

٤) الرمز $\subset$ ← محتواه

٥) الرمز $-$ ← الفرق (طرح)

٦) الرمز $\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2$ ← وقوع أحد الحادثين ح_1، ح_2 على الأقل

٧) الرمز $\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2$ ← وقوع الحادثين ح_1، ح_2 معاً

٨) الرمز $\text{ح}_1 - \text{ح}_2$ ← وقوع الحادث ح_1 وعدم وقوع الحادث ح_2

ويمكن التعبير عنها بالرمز $\text{ح}_1 \cap \bar{\text{ح}}_2$

ويعبر عنها لفظاً أيضاً بالصورة (وقوع الحادث ح_1 فقط)

٩) قانونا ديمورغان

$$\overline{\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2} = \bar{\text{ح}}_1 \cap \bar{\text{ح}}_2$$

$$\overline{\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2} = \bar{\text{ح}}_1 \cup \bar{\text{ح}}_2$$

١٠)

$$\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2 = \text{ح}_2 \cup \text{ح}_1$$

$$\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2 = \text{ح}_2 \cap \text{ح}_1$$

$$\text{ح}_1 - \text{ح}_2 \neq \text{ح}_2 - \text{ح}_1$$

ملاحظة :

لكل ما سبق $\text{ح}_1 ، \text{ح}_2 \subset \Omega$

قوانين الاحتمالات

سوف نعرض هنا بعض القوانين وإن شاء الله في الدروس القادمة نعرض القسم الآخر

إذا كان $ع_١ ، ع_٢ \subset \Omega$ ((حادثين في فضاء عيني))

١) احتمال الحادث الأكيد $ل(\Omega) = ١$

٢) احتمال الحادث المستحيل $ل(\varnothing) = ٠$

٣) إذا كان $ع_١ \cap ع_٢ = \varnothing$ في هذه الحالة يسمى $ع_١ ، ع_٢$ حادثين منفصلين وعليه فإن

$$ل(ع_١ \cap ع_٢) = ل(\varnothing) = ٠$$

٤) قانون الاتحاد

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

وإذا كان $ع_١ \cap ع_٢ = \varnothing$ فإن

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢)$$

سليمان دلدوم أبو هبه

٥) قانون المتممة

أ) $ل(\overline{ع_١}) + ل(ع_١) = ١$

ب) $ل(\overline{ع_١ \cap ع_٢}) = ١ - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

ت) $ل(\overline{ع_١ \cup ع_٢}) = ١ - ل(ع_١ \cup ع_٢)$

ث) $ل(\overline{ع_١} \cap \overline{ع_٢}) = ل(\overline{ع_١ \cup ع_٢}) = ١ - ل(ع_١ \cup ع_٢)$

ج) $ل(\overline{ع_١} \cup \overline{ع_٢}) = ل(\overline{ع_١ \cap ع_٢}) = ١ - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

٦) قانون الطرح (الفرق)

أ) $ل(ع_١ - ع_٢) = ل(ع_١) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

ب) $ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

ت) $ل(ع_١ \cap \overline{ع_٢}) = ل(ع_١ - ع_٢) = ل(ع_١) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

ث) $ل(\overline{ع_١} \cap ع_٢) = ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

ج) وإذا كان $ع_١ \cap ع_٢ = \varnothing$ فإن

$ل(ع_١ - ع_٢) = ل(ع_١)$ ، ، ، $ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢)$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٧) قانون الاحتواء

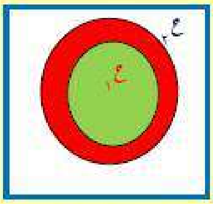
إذا كان $ع_١ \subset ع_٢$ فإن

أ) $ل(ع_١ \cap ع_٢) = ل(ع_١)$

ب) $ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_٢)$

ت) $ل(ع_١ - ع_٢) = ل(\varnothing) = ٠$

ث) $ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١)$



$ع_١ \subset ع_٢$

وبهذا نكون قد أنهينا القسم الأول من قوانين الاحتمالات

مع الاعتذار عن عدم رسم أشكال فن

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

في المسائل والتدريبات الواردة في الكتاب المدرسي إن شاء الله سوف أعمل على زيادة المطلوب (حسب السؤال أو التدريب)

حل تدريب (٧ ـ ١٥) ص ١١٩

(١،١)	(٢،١)	(٣،١)	(٤،١)	(٥،١)	(٦،١)
(١،٢)	(٢،٢)	(٣،٢)	(٤،٢)	(٥،٢)	(٦،٢)
(١،٣)	(٢،٣)	(٣،٣)	(٤،٣)	(٥،٣)	(٦،٣)
(١،٤)	(٢،٤)	(٣،٤)	(٤،٤)	(٥،٤)	(٦،٤)
(١،٥)	(٢،٥)	(٣،٥)	(٤،٥)	(٥،٥)	(٦،٥)
(١،٦)	(٢،٦)	(٣،٦)	(٤،٦)	(٥،٦)	(٦،٦)

ع١ = {(١،١)،(٢،١)،(٣،١)،(٤،١)،(٥،١)،(١،٢)،(٢،٢)،
(٣،٢)،(٤،٢)،(١،٣)،(٢،٣)،(٣،٣)،(١،٤)،(٢،٤)،(١،٥)}

$ل(ع_١) = \frac{ع(ع_١)}{ع(\Omega)} = \frac{١٥}{٣٦}$

ع٢ = {(٣،٦)،(٤،٦)،(٥،٦)،(٦،٦)،(٤،٥)،
(٥،٥)،(٦،٥)،(٥،٤)،(٦،٤)،(٦،٣)}

$ل(ع_٢) = \frac{ع(ع_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{١٠}{٣٦}$

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

لاحظ أن $ع_1 \cap ع_2 = \emptyset$ وهذا ما يجب الانتباه إليه عند حل المسائل وهو إيجاد التقاطع ، سواء طلب السؤال ذلك أم لا

إذاً $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(\emptyset) = ٠$ حادثان منفصلان ((متباعدان))

١) $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(\emptyset) = ٠$

٢) $ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2)$ حادثان منفصلان

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = \frac{١٥}{٣٦} + \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٢٥}{٣٦}$$

٣) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1)$ حادثان منفصلان

$$ل(ع_1 - ع_2) = \frac{١٥}{٣٦}$$

حل تدريب (٧ – ١٦) ص ١٢٠

$ع_1 \subset ع_2$ ، $ل(ع_1) = ٠,٣٥$ ، $ل(ع_2) = ٠,٩$

١) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(\emptyset) = ٠$ من قانون الاحتواء

٢) $ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1)$

$$ل(ع_2 - ع_1) = ٠,٩٠ - ٠,٣٥ = ٠,٦$$

حل تدريب (٧ – ١٧) ص ١٢١

$$ل(ع) = \frac{٢}{٣} ل(ع)$$

١) حسب قانون المتممة $ل(ع) + ل(\overline{ع}) = ١$

$$ل(ع) + \frac{٣}{٢} ل(ع) = ١ \leftarrow \frac{٥}{٣} ل(ع) = ١ \leftarrow ل(ع) = \frac{٣}{٥}$$

٢) $ل(ع) + ل(\overline{ع}) = ١ \leftarrow \frac{٣}{٥} + ل(\overline{ع}) = ١$

$$ل(\overline{ع}) = ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$$

٣) $ل(ع \cap \overline{ع}) = ٠$ لماذا ؟؟؟؟

٤) $ل(ع \cup \overline{ع}) = ١$ لماذا ؟؟؟؟

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣١

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تدريب (٧ – ١٨) ص ١٢٣

يحل هذا التدريب بأكثر من طريقة وسوف أقوم هنا بترجمة السؤال إلى رموز

$$ع(\Omega) = ٥٠$$

$ع_1$: يفضلون شرب الشاي $\leftarrow ع(ع_1) = ٢٥$

$$\leftarrow ل(ع_1) = \frac{٢٥}{٥٠}$$

$ع_2$: يفضلون شرب القهوة $\leftarrow ع(ع_2) = ٣٠$

$$\leftarrow ل(ع_2) = \frac{٣٠}{٥٠}$$

يفضلون شرب الشاي والقهوة معاً $(ع_1 \cap ع_2)$

$$ع(ع_1 \cap ع_2) = ١٥ \leftarrow ل(ع_1 \cap ع_2) = \frac{١٥}{٥٠}$$

١) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب القهوة فقط ؟

الترجمة : يشرب قهوة ولا يشرب الشاي

$ع_2 - ع_1$ نستخدم قانون الفرق

$$ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

$$ل(ع_2 - ع_1) = \frac{٣٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١٥}{٣٠}$$

٢) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب الشاي فقط ؟

الترجمة : يشرب شاي ولا يشرب القهوة

$ع_1 - ع_2$ نستخدم قانون الفرق

$$ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

$$ل(ع_1 - ع_2) = \frac{٢٥}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١٠}{٣٠}$$

٣) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب أحد المشروبين على الأقل ؟

الترجمة : يشرب قهوة أو يشرب الشاي ((الاتحاد))

$ع_1 \cup ع_2$ نستخدم قانون الاتحاد

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

$$= \frac{٢٥}{٥٠} + \frac{٣٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{٤٠}{٣٠}$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣٢

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تدريب (٧ – ١٩) ص ١٢٣

نفرض القلم الأزرق ز ، نفرض القلم الأخضر خ

أزرق (ز)	أخضر (خ)
٢	٣

المجموع ٥

نوع السحب : قلمان على التوالي دون إرجاع

القلم الأول يسحب من ٥ والقلم الثاني يسحب من ٤

$$ع(\Omega) = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$$\Omega = \{ \text{خ خ، ز خ، خ ز، ز ز} \}$$

أحمد : $ل(\text{خ خ}) = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} = \frac{٦}{٢٠}$

حامد : $ل(\text{ز ز}) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٢٠}$

سارة : $ل(\text{خ ز}) + ل(\text{ز خ}) = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{٢٠}$

لسارة الفرصة الأكبر

حل الأسئلة // ص ١٢٤

س ١ :-

١) صحيحة ، لأنه لا يمكن أن يكون ناتج عد كميات سالب

٢) خطأ ، لأن احتمال الفضاء العيني دائماً = ١

٣) صحيحة ،

٤) خطأ ، لأن الاحتمال محصور بين العددين ٠ ، ١

٥) خطأ ، والصواب

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

٦) خطأ ، والصواب $ل(ع_١ \cap \overline{ع_١}) = ٠$

٧) صحيحة

س ٢ :

في هذا السؤال من الصعوبة كتابة الفضاء العيني حيث أن عدد عناصره ١٦ عنصر

$$ع(\Omega) = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$$

سليمان دلدوم أبو هبه

٣٣

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

لذلك في الحل سوف يتم التفسير

أ) $ع_١$: لدى العائلة ولد واحد فقط من الذكور

$$ع_١ = \{ \text{و ب ب ب، ب و ب ب، ب ب و ب، ب ب ب و} \}$$

$$ع(ع_١) = ٤ \leftarrow ل(ع_١) = \frac{٤}{١٦}$$

ب) $ع_٢$: لدى العائلة أربع بنات فقط

$$ع_٢ = \{ \text{ب ب ب ب} \}$$

$$ع(ع_٢) = ١ \leftarrow ل(ع_٢) = \frac{١}{١٦}$$

ت) $ع_٣$: لدى العائلة ثلاثة أولاد من الذكور على الأقل

يوجد لدينا حالتان

٣ أولاد ذكور وبنت واحدة أو ٤ أولاد ذكور

$$ع_٣ = \{ \text{و و و ب، و و ب و، و ب و و، ب و و و، و و و و} \}$$

$$ع(ع_٣) = ٥ \leftarrow ل(ع_٣) = \frac{٥}{١٦}$$

د) $ع_٤$: لدى العائلة بنتان على الأكثر

يوجد لدينا ٣ حالات

بنتان وولدان أو بنت و ٣ أولاد أو ٤ أولاد

$$ع_٤ = \{ \text{و و ب ب، و ب ب و، و ب و ب، ب و و ب، ب و ب و، ب ب و و، و و و ب، و و ب و، و ب و و، ب و و و، و و و و} \}$$

$$ع(ع_٤) = ٩ \leftarrow ل(ع_٤) = \frac{١١}{١٦}$$

ملاحظة : بالنسبة لفرع (د)

لدى العائلة بنتان على الأكثر متممة لعبارة لدى العائلة ثلاثة أولاد من الذكور على الأقل !!! أي أن

$$ع_٣ \cup ع_٤ = \Omega$$

$$ل(ع_٤) = ل(\Omega) - ل(ع_٣) = ١ - \frac{٥}{١٦} = \frac{١١}{١٦}$$

سليمان دلدوم أبو هبه

٣٤

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

س٣ : -

ناجح في الرياضيات ع١ ← ل(ع١) = ٠,٨٥

ناجح في الفيزياء ع٢ ← ل(ع٢) = ٠,٧

ناجح في المادتين ع١ ∩ ع٢ ← ل(ع١ ∩ ع٢) = ٠,٦

١) احتمال نجاح الطالب في الفيزياء فقط

ناجح فيزياء وغير ناجح رياضيات (الفرق)

ل(ع٢ − ع١) = ل(ع٢) − ل(ع١ ∩ ع٢)

ل(ع٢ − ع١) = ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,١

٢) نجاحه في إحدى المادتين على الأقل (الاتحاد)

ل(ع١ ∪ ع٢) = ل(ع١) + ل(ع٢) − ل(ع١ ∩ ع٢)

ل(ع١ ∪ ع٢) = ٠,٨٥ + ٠,٧٠ − ٠,٦٠ = ٠,٩٥

٣) نجاحه في أي من المادتين (يوجد حالتان)

(ناجح رياضيات وراسب فيزياء أو ناجح فيزياء وراسب رياضيات)

يمكن استخدام طريقتين في الحل

الأولى : الاتحاد – التقاطع

ل(ع١ ∪ ع٢) − ل(ع١ ∩ ع٢) = ٠,٩٥ − ٠,٦٠ = ٠,٣٥

الثانية : نستخدم قانون الفرق ل(ع١ − ع٢) + ل(ع٢ − ع١)

ل(ع١ − ع٢) + ل(ع٢ − ع١) =

ل(ع١) − ل(ع١ ∩ ع٢) + ل(ع٢ − ع١) =

٠,٨٥ − ٠,٦٠ + ٠,١٠ = ٠,٣٥

٤) احتمال عدم نجاحه في أي من المادتين

٥) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء

٦) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء ونجاحه في الرياضيات

٧) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء ورسوبه في الرياضيات

س٤ : نعم يتفق \\ بتطبيق قانون الاتحاد على معطيات السؤال نجد أن الناتج في النهاية = ١

٣٥

سليمان دلدوم أبو هبه

ل(ف١ ∪ ف٢) = ل(ف١) + ل(ف٢) − ل(ف١ ∩ ف٢)

ل(ف١ ∪ ف٢) = ٠,٩٠ + ٠,٦٥ − ٠,٥٥ = ١

س٥ :

ناجح نظري ع١ ← ل(ع١) = ٠,٨٨

ناجح عملي ع٢ ← ل(ع٢) = ٠,٧٢

ناجح فيهما معاً ع١ ∩ ع٢ ← ل(ع١ ∩ ع٢) = ٠,٧٠

أ) احتمال نجاحه في الاختبار النظري فقط ؟

((ناجح نظري وغير ناجح عملي)) ((الفرق)) ع١ − ع٢

ل(ع١ − ع٢) = ل(ع١) − ل(ع١ ∩ ع٢)

ل(ع١ − ع٢) = ٠,٨٨ − ٠,٧٠ = ٠,١٨

حل عمر خطأ

ب) احتمال نجاحه في أحدهما على الأقل ((الاتحاد))

ل(ع١ ∪ ع٢) = ل(ع١) + ل(ع٢) − ل(ع١ ∩ ع٢)

ل(ع١ ∪ ع٢) = ٠,٨٨ + ٠,٧٢ − ٠,٧٠ = ٠,٩٠

س٦ : عدد طالبات الصف ((٤٠)) = ع(Ω)

تلعب كرة الطاولة ع١ ← ل(ع١) = ٢٤/٤٠

تلعب كرة الطائرة ع٢ ← ل(ع٢) = ؟؟؟؟؟

يلعبن الكرة الطائرة ولا يلعبن كرة الطاولة ع٢ − ع١

ل(ع٢ − ع١) = ١٢/٤٠

يلعبن كرة الطاولة ولا يلعبن كرة الطائرة ع١ − ع٢

ل(ع١ − ع٢) = ١٤/٤٠

المطلوب :- احتمال أن تكون الطالبة ممن يلعبن إحدى اللعبتين على الأقل ((الاتحاد))

الحل :- لا حظ هنا عدم وجود احتمال التقاطع وكذلك احتمال الحادث الثاني ((ل(ع٢)))

٣٦

سليمان دلدوم أبو هبه

لذلك نستخدم المعطيات في إيجادهما

- $ل(ع_١ - ع_٢) = ل(ع_١) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

$\frac{١٤}{٢٠} = \frac{١٤}{٤٠} - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

$ل(ع_١ \cap ع_٢) = \frac{٢٤}{٤٠} - \frac{١٤}{٤٠} = ل(ع_١ \cap ع_٢) = \frac{١٠}{٤٠}$

- $ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

$\frac{١٢}{٤٠} = ل(ع_٢) - \frac{١٠}{٤٠}$

$\frac{١٢}{٤٠} + \frac{١٠}{٤٠} = ل(ع_٢) \leftarrow ل(ع_٢) = \frac{٢٢}{٤٠}$

- احتمال أن تكون الطالبة ممن يلعبن إحدى اللعبتين على الأقل ((الاتحاد))

$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

$ل(ع_١ \cup ع_٢) = \frac{٢٤}{٤٠} + \frac{٢٢}{٤٠} - \frac{١٠}{٤٠} = \frac{٣٦}{٤٠}$

حل أخر ⇐ ⇐

$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$

لكن $ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$ وبالتعويض في قانون الاتحاد نجد أن

$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢ - ع_١)$

$ل(ع_١ \cup ع_٢) = \frac{٢٤}{٤٠} + \frac{١٤}{٤٠} = \frac{٣٦}{٤٠}$

س٧ :- الحوادث منفصلة (($ع(\Omega) = ٣٦٠^\circ$))

أ) $ل(F) = \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$ ب) $ل(B) = \frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$

جـ) $ل(C) = \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$

د) $ل(A) + ل(D) = \frac{١٠٥^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{١٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

د) $ل(E) + ل(F) = \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٧٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

٣٧

سليمان دلدوم أبو هبه

و) $ل(B) + ل(C) + ل(D) + ل(E) + ل(F) =$

$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٢٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

حل أخر باستخدام المتممة

$= \frac{٣٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} - \frac{١٠٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٢٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

ز) $ل(B) + ل(C) + ل(D)$

$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{١٨٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$

أسئلة إضافية

السؤال الأول :-

حجر نرد كتب عليه الأرقام ((٠ ، ٠ ، ١ ، ١ ، ٤ ، ٥))

إذا رمي الحجر مرتين ، وتسجيل الأرقام الظاهرة على الوجه العلوي في كل رمية

١) ما عدد عناصر الفضاء العيني ؟

٢) مثل الفضاء العيني باستخدام الشبكة .

٣) احسب احتمال الحصول على عددين مجموعهما ٥ .

٤) احسب احتمال ظهور عددين متساويين .

السؤال الثاني :-

تم سؤال (٦٠) رجل متزوج السؤال التالي :

((في أخر عيد ميلاد لزوجتك ، هل أهديتها وردة أم شوكولاته))

فكانت الإجابات كما يلي :-

(٢٦) رجل أهدى زوجته شوكولاته ، (٢١) رجل أهدى زوجته وردة (٥) رجال كل منهم أهدى زوجته شوكولاته ووردة .

إذا اختير رجل عشوائياً احسب احتمال أن يكون ممن أهدى زوجته

١) وردة فقط .

٢) شوكولاته أو ورده

٣) لا ورده ولا شوكولاته .

٣٨

سليمان دلدوم أبو هبه

السؤال الثالث :-

في صف ما (٣٠) طالب ، (١٩) منهم يلعبون كرة القدم ، (٨) منهم يلعبون الكرة الطائرة ، (٣) منهم يلعبون اللعبتين معاً .

١) مثل البيانات المعطاة في السؤال باستخدام أشكال فن .

٢) إذا اختير طالب من هذا الصف بشكل عشوائي احسب احتمال:-

أ) أن يكون ممن يلعبون إحدى اللعبتين على الأقل .

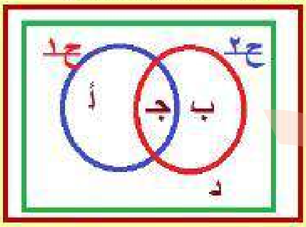
ب) أن يكون ممن يلعب الكرة الطائرة فقط .

ت) أن يكون ممن يلعب لعبة واحدة فقط .

ث) أن يكون لا يلعب الكرة الطائرة ولا يلعب كرة القدم .

السؤال الرابع :-

في الشكل المجاور أذا كان



$\text{ل}(\text{ح}_1) = \dfrac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}}$

جد :- ١) $\text{ل}(\text{ح}_1)$ ٢) $\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2)$ ٣) $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$

٤) $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \overline{\text{ح}_2})$ ٥) $\text{ل}(\text{ح}_1 - \text{ح}_2)$ ٦) $\text{ل}(\overline{\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2})$

السؤال الخامس :-

سجلت إحدى القابلات في أحد المستشفيات ولادة ثلاثة أطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة ، فإذا علمت أن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات .

١) ما عدد عناصر الفضاء العيني .

٢) أكتب الفضاء العيني (Ω)

٣) احسب احتمال :-

أ) أن يكون جميع المواليد من الإناث .

ب) أن يكون المواليد ذكور وإناث .

ت) أن يكون من المواليد أنثى واحدة على الأقل .

ث) أن يكون من المواليد ذكر واحد على الأكثر .

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

٣٩

الاحتمال المشروط والحوادث المستقلة

الاحتمال المشروط :- هو احتمال وقوع حادث ما ، مع توافر معلومات جزئية عن نتيجة التجربة العشوائية .

إذا كان ح_1 ، ح_2 حادثين في فضاء عيني فإن جملة وقوع ح_1 بشرط وقوع ح_2 يعبر عنها كما يلي $(\text{ح}_1/\text{ح}_2)$

والاحتمال $\text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2)$

$$\text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة التي تحقق كلا من ح١ ، ح٢ معاً}}{\text{عدد النواتج الممكنة التي تحقق ح٢}}$$

$$\text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_2)}$$

ونستنتج مما سبق أن $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_2) \times \text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2)$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

حل تدريب (٧ – ٢٠) ص ١٢٨

$\text{ل}(\text{ح}_1) = \frac{1}{3}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_2) = \frac{5}{12}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \frac{1}{9}$

المطلوب : -

١) $\text{ل}(\text{ح}_2/\text{ح}_1)$ ٢) $\text{ل}(\text{ح}_1/\overline{\text{ح}_2})$

الحل :-

١) $$\text{ل}(\text{ح}_2/\text{ح}_1) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_1)} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$$

٢) $$\text{ل}(\text{ح}_1/\overline{\text{ح}_2}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \overline{\text{ح}_2})}{\text{ل}(\overline{\text{ح}_2})} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 - \text{ح}_2)}{1 - \text{ل}(\text{ح}_2)}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ح}_1) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{1 - \text{ل}(\text{ح}_2)} = \frac{1/3 - 1/9}{1 - 5/12} = \frac{8}{21}$$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

٤٠

دمج مثال (٧ – ١٩) ص ١٢٨
و تدريب (٧ – ٢١) ص ١٢٩

==============================

إن شاء الله سوف يتم النقاش بأكثر من طريقة

نرمز للكرة البيضاء (ب) ، للكرة الحمراء (ح)

$\text{ع(ب)} = ٧$ ، $\text{ع(ح)} = ٥$

العدد الكلي في الصندوق (١٢)

١) سحب كرتان عشوائياً دون إرجاع

$\text{ع}(\Omega) = ١٢ \times ١١ = ١٣٢$ (الطريقة الأولى)

(Ω)	ب، ب	ب، ح	ح، ب	ح، ح	$\text{ع}(\Omega)$
	٦x٧	٥x٧	٧x٥	٤x٥	١٣٢

أ) احتمال الحصول على كرتين حمراوين

الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء

$$\text{ل}(ح_1، ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$

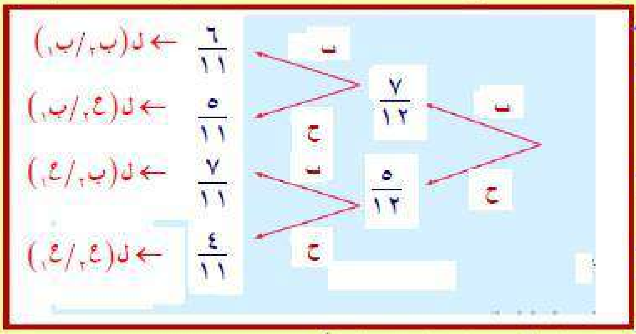
(الطريقة الثانية) لاحظ هنا أن الشرط ///

الكرة الثانية حمراء بشرط الأولى حمراء $\text{ل}(ح_2 / ح_1) = \frac{٤}{١١}$

وبتطبيق القانون $\text{ل}(ح_1 \cap ح_2) = \text{ل}(ح_1) \times \text{ل}(ح_2 / ح_1)$

$$\text{ل}(ح_1 \cap ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$ ((نفس الجواب))

(الطريقة الثالثة) ويمكن استخدام طريقة الشجرة في الحل كما يلي :



وبتتبع المطلوب على الشجرة نجد أن

$$\text{ل}(ح_1 \text{ و } ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٤١

سليمان دلدوم أبو هبه

ب) احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون

يوجد حالتان :-

الأولى حمراء والثانية بيضاء أو الأولى بيضاء والثانية حمراء

$$\text{ل}(ح_1 \text{ و } ب_2) + \text{ل}(ب_1 \text{ و } ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٧}{١١} + \frac{٧}{١٢} \times \frac{٥}{١١} = \frac{٣٥}{٦٦}$$

ونفس الطريقة باستخدام طريقة الشجرة أعلاه

الحل باستخدام القانون (الحل السابق مختصر عن حل القانون)

$$\text{ل}(ح_1 \text{ و } ب_2) = \text{ل}(ح_1) \times \text{ل}(ب_2 / ح_1) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٧}{١١} = \frac{٣٥}{١٣٢}$$

$$\text{ل}(ب_1 \text{ و } ح_2) = \text{ل}(ب_1) \times \text{ل}(ح_2 / ب_1) = \frac{٧}{١٢} \times \frac{٥}{١١} = \frac{٣٥}{١٣٢}$$

$$\text{ل}(ح_1 \text{ و } ب_2) + \text{ل}(ب_1 \text{ و } ح_2) = \frac{٣٥}{١٣٢} + \frac{٣٥}{١٣٢} = \frac{٣٥}{٦٦}$$

التدريب //

٢) سحب كرتان عشوائياً مع الإرجاع

نسحب الكرة الأولى ثم نعيدها ثم نسحب الكرة الثانية .

(الطريقة الأولى) $\text{ع}(\Omega) = ١٢ \times ١٢ = ١٤٤$

(Ω)	ب، ب	ب، ح	ح، ب	ح، ح	$\text{ع}(\Omega)$
	٧x٧	٥x٧	٧x٥	٥x٥	١٤٤

أ) احتمال الحصول على كرتين حمراوين

الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء

$$\text{ل}(ح_1 \text{ و } ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٥}{١٢} = \frac{٢٥}{١٤٤}$$

(الطريقة الثانية) /// لاحظ هنا أن الشرط ///

الكرة الثانية حمراء بشرط الأولى حمراء $\text{ل}(ح_2 / ح_1) = \frac{٥}{١٢}$

وبتطبيق القانون $\text{ل}(ح_1 \cap ح_2) = \text{ل}(ح_1) \times \text{ل}(ح_2 / ح_1)$

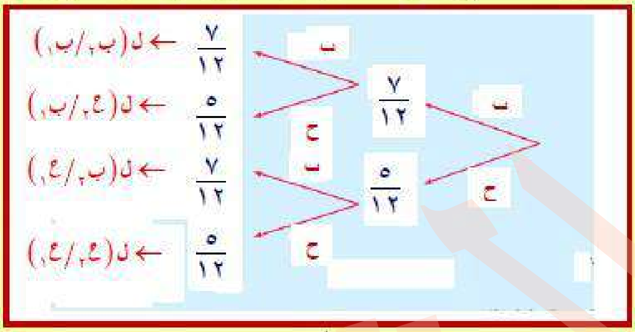
$$\text{ل}(ح_1 \cap ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٥}{١٢} = \frac{٢٥}{١٤٤}$$ ((نفس الجواب))

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٤٢

سليمان دلدوم أبو هبه

(الطريقة الثالثة) ويمكن استخدام طريقة الشجرة في الحل كما يلي :



ويتتبع المطلوب على الشجرة نجد أن

$\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ع}_2)=\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}\times\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}=\frac{\text{٥}}{\text{٣٣}}$

ت) احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون

يوجد حالتان :-

الأولى حمراء والثانية بيضاء أو الأولى بيضاء والثانية حمراء

$\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ب}_2)+\text{ل}(\text{ب}_1\,\text{و}\,\text{ع}_2)=\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}\times\frac{\text{٧}}{\text{١٢}}+\frac{\text{٧}}{\text{١٢}}\times\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}=\frac{\text{٣٥}}{\text{٧٢}}$

ونفس الطريقة باستخدام طريقة الشجرة أعلاه

الحل باستخدام القانون (الحل السابق مختصر عن حل القانون)

$\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ب}_2)=\text{ل}(\text{ع}_1)\times\text{ل}(\text{ب}_2/\text{ع}_1)=\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}\times\frac{\text{٧}}{\text{١٢}}=\frac{\text{٣٥}}{\text{١٤٤}}$

$\text{ل}(\text{ب}_1\,\text{و}\,\text{ع}_2)=\text{ل}(\text{ب}_1)\times\text{ل}(\text{ع}_2/\text{ب}_1)=\frac{\text{٧}}{\text{١٢}}\times\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}=\frac{\text{٣٥}}{\text{١٤٤}}$

ب) $\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ب}_2)+\text{ل}(\text{ب}_1\,\text{و}\,\text{ع}_2)=\frac{\text{٣٥}}{\text{١٤٤}}+\frac{\text{٣٥}}{\text{١٤٤}}=\frac{\text{٣٥}}{\text{٧٢}}$

==================================

معلومة إضافية

كيف نتعامل مع ((إذا سحبت كرتان معاً)) نفس السؤال

١) الكرتان من نفس اللون // نتعامل كأنه السحب بدون إرجاع

فمثلا $\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ع}_2)=\frac{\text{٥}}{\text{٣٣}}$

٢) الكرتان مختلفتي اللون /// أيضا السحب دون ارجاع لكن نأخذ حالة واحدة فقط .

$\text{ل}(\text{ع}_1\,\text{و}\,\text{ب}_2)=\frac{\text{٣٥}}{\text{١٣٢}}$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٤٣

سليمان دلدوم أبو هبه

استقلال الحوادث

في بعض التجارب العشوائية ، تجد أن احتمال وقوع حادث ما مثل (ع_1) ، لا يؤثر في احتمال وقوع أو احتمال عدم حادث آخر مثل (ع_2) ، وتسمى الحوادث في مثل هذه الحالة حوادث مستقلة ، فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وإلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور الصورة على قطعة النقد لا يؤثر على احتمال ظهور العدد (٦) على الوجه العلوي لحجر النرد .

ومن أهم التجارب العشوائية الدالة على ظهور حوادث مستقلة :

- **سحب كرة على التوالي مع الإرجاع .**
- **رمي قطعة نقد ، ثم رمي حجر نرد منتظم .**
- **أطلق صيادان طلقة واحدة .**
- **حل مسألة رياضية من طالبين .**
- **نجاح طالب ونجاح طالب آخر .**

تعريف

إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، فإن :

$ل\left(ع_١ / ع_٢\right) = ل\left(ع_١\right)$ وكذلك $ل\left(ع_٢ / ع_١\right) = ل\left(ع_٢\right)$

- نعلم من الاحتمال المشروط أن $ل\left(ع_١ / ع_٢\right) = \frac{ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right)}{ل\left(ع_٢\right)}$ ، ومن التعريف السابق

$ل\left(ع_١ / ع_٢\right) = ل\left(ع_١\right) \leftarrow ل\left(ع_١\right) = \frac{ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right)}{ل\left(ع_٢\right)}$ وبالضرب التبادلي نجد أن

$ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right) = ل\left(ع_١\right) \times ل\left(ع_٢\right)$: $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين مستقلين

نتيجة

إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، فإن :

$ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right) = ل\left(ع_١\right) \times ل\left(ع_٢\right)$

مثال (١) :

إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان :

$ل\left(ع_١\right) = ٠،٦$ ، $ل\left(ع_٢\right) = ٠،٤$: جد :

١) $ل\left(\overline{ع_١}\right)$ ٢) $ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right)$ ٣) $ل\left(ع_١ \cup ع_٢\right)$

٤) $ل\left(ع_١ - ع_٢\right)$ ٥) $ل\left(\overline{ع_١} \cap \overline{ع_٢}\right)$ ٦) $ل\left(\overline{ع_١} \cup \overline{ع_٢}\right)$

الحل :

١) $ل\left(\overline{ع_١}\right) = ١ - ل\left(ع_١\right) = ١ - ٠،٦ = ٠،٤$ قانون المتممة

٢) $ل\left(ع_١ \cap ع_٢\right) = ل\left(ع_١\right) \times ل\left(ع_٢\right) = ٠،٦ \times ٠،٤ = ٠،٢٤$ قانون الاستقلال

٣) $ل(ع_{١} \cup ع_{٢}) = ل(ع_{١}) + ل(ع_{٢}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ **قانون الاتحاد**

$ل(ع_{١} \cup ع_{٢}) = ل(ع_{١}) + ل(ع_{٢}) - ل(ع_{١}) \times ل(ع_{٢})$ ← **$ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ حادثين مستقلين**

$ل(ع_{١} \cup ع_{٢}) = ٠و٦ + ٠و٤ - ٠و٦ \times ٠و٤ = ١ - ٠و٢٤ = ٠و٧٦$

٤) $ل(ع_{١} - ع_{٢}) = ل(ع_{١}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ **قانون الطرح**

$= ٠و٦٠ - ٠و٢٤ = ٠و٣٦$ ← **$ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ حادثين مستقلين**

٥) $ل(\bar{ع}_{١} \cap \bar{ع}_{٢}) = ل(\overline{ع_{١} \cup ع_{٢}}) = ١ - ل(ع_{١} \cup ع_{٢})$ **قانون ديمورغان ثم قانون المتممة**

$= ١ - ٠و٧٦ = ٠و٢٤$ **ناتج الاتحاد من فرع ٣**

فائدة

إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، فإن :

$\bar{ع}_{١}$ ، $\bar{ع}_{٢}$ حادثين مستقلين أيضاً $ل(\bar{ع}_{١} \cap \bar{ع}_{٢}) = ل(\bar{ع}_{١}) \times ل(\bar{ع}_{٢})$

لذلك يمكن حل الفرع الخامس كما يلي :

$ل(\bar{ع}_{١} \cap \bar{ع}_{٢}) = ل(\bar{ع}_{١}) \times ل(\bar{ع}_{٢}) = ٠و٤ \times ٠و٦ = ٠و٢٤$

٦) $ل(\bar{ع}_{١} \cup \bar{ع}_{٢}) = ل(\overline{ع_{١} \cap ع_{٢}}) = ١ - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ **قانون ديمورغان ثم المتممة**

$= ١ - ٠و٢٤ = ٠و٧٦$

أو يمكن الحل كما يلي :

$ل(\bar{ع}_{١} \cup \bar{ع}_{٢}) = ل(\bar{ع}_{١}) + ل(\bar{ع}_{٢}) - ل(\bar{ع}_{١} \cap \bar{ع}_{٢})$ **قانون الاتحاد**

$ل(\bar{ع}_{١} \cup \bar{ع}_{٢}) = ٠و٤ + ٠و٦ - ٠و٢٤$ **$\bar{ع}_{١}$ ، $\bar{ع}_{٢}$ حادثين مستقلين**

$= ١ - ٠و٢٤ = ٠و٧٦$

مثال (٢) : (٧ – ٢٠) كتاب مدرسي

قام معلم الرياضيات بإعطاء مسألة رياضية للطالبين : مهند و رائد ، إذا كان احتمال أن يحل مهند المسألة بطريقة صحيحة يساوي $\frac{٢}{٥}$ ، و احتمال أن يحل رائد المسألة بطريقة صحيحة يساوي $\frac{١}{٦}$ ، فما احتمال أن يحل الطالبان المسألة بطريقة صحيحة ؟

الحل :

نفرض : $ع_١$: أن يحل مهند المسألة بطريقة صحيحة $\leftarrow$ ل $(ع_١) = \frac{٢}{٥}$

$ع_٢$: أن يحل رائد المسألة بطريقة صحيحة $\leftarrow$ ل $(ع_٢) = \frac{١}{٦}$

لاحظ أن $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثان مستقلان ، لأن حل مهند لا يؤثر في حل رائد والعكس صحيح

احتمال أن يحل الطالبان المسألة بطريقة صحيحة $\longleftarrow$ $\leftarrow$ ل $(ع_١ \cap ع_٢)$

ل $(ع_١ \cap ع_٢)$ = ل $(ع_١) \times$ ل $(ع_٢) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٥}$

حل تدريب (٧ – ٢٢) ص١٣٠

صيادان أطلق كل منهما طلقة واحدة نحو هدف معين ، إذا كان احتمال إصابة من الصياد الأول للهدف ٧و٠ ، و احتمال إصابة من الصياد الثاني ٦٥و٠ ، فما احتمال :

١) إصابة الهدف من الصيادين معاً .

٢) إصابة الهدف من أحد الصيادين على الأقل .

٣) إصابة الهدف من الصياد الأول فقطَ .

الحل :

نفرض : $ع_١$: إصابة الهدف من الصياد الأول $\leftarrow$ ل $(ع_١)$ = ٧و٠

$ع_٢$: إصابة الهدف من الصياد الثاني $\leftarrow$ ل $(ع_٢)$ = ٦٥و٠

لاحظ أن $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثان مستقلان ، لأن إصابة الصياد الأول لا تؤثر في إصابة الصياد الثاني للهدف

١) احتمال إصابة الهدف من الصيادين <u>معاً</u> $\longleftarrow$ **تفيد التقاطع** $\leftarrow$ ل $(ع_١ \cap ع_٢)$

ل $(ع_١ \cap ع_٢)$ = ل $(ع_١) \times$ ل $(ع_٢)$ = ٧و٠ × ٦٥و٠ = ٤٥٥و٠

٢) احتمال إصابة الهدف من <u>أحد</u> الصيادين <u>على الأقل</u> ⟵ تفيد ⟵ $ل(ع_1 \cup ع_2)$

$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$ **قانون الاتحاد**

$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1) \times ل(ع_2)$ $\longleftarrow$ $ع_1$ ، $ع_2$ **حادثين مستقلين**

$ل(ع_1 \cup ع_2) = ٠و٧ + ٠و٦٥ - ٠و٧ \times ٠و٦٥ = ١و٣٥ - ٠و٤٥٥ = ٠و٨٩٥$

٣) احتمال إصابة الهدف من الصياد الأول <u>فقطً</u> ⟵ (الصياد الأول يصيب الهدف و الصياد الثاني لا يصيب الهدف) تفيد ⟵ $ل(ع_1 - ع_2)$ **أو** ⟵ $ل(ع_1 \cap \overline{ع_2})$

$ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$ **قانون الطرح**

$= ٠و٧ - ٠و٤٥٥ = ٠و٢٤٥$ $\longleftarrow$ $ع_1$ ، $ع_2$ **حادثين مستقلين**

ويمكن الحل كما يلي :

$ل(ع_1 \cap \overline{ع_2}) = ل(ع_1) \times ل(\overline{ع_2})$ **لأن الحادثين مستقلين**

$ل(ع_1 \cap \overline{ع_2}) = ٠و٧ \times ٠و٣٥ = ٠و٢٤٥$

مثال (٣) : (٧ – ٢١) كتاب مدرسي

صندوقان ، الأول فيه (٥) كرات حمراء ، و (٣) كرات خضراء ، و الثاني فيه (٤) كرات حمراء ، و (٦) كرات خضراء ، وجميع الكرات في الصندوق متماثلة :

١) سحبت كرة واحدة من كل صندوق ، فما احتمال :

أ) أن تكون الكرتان المسحوبتان خضراوين ؟

ب) أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ؟

٢) سحبت كرتان من الصندوق الأول الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع ، فما احتمال أن تكونا حمراوين ؟

الحل :

سوف نحل هذا المثال بطريقة مختلفة عن طريقة الكتاب ، حيث سوف نستخدم طريقة الشجرة في الحل الأول ، ثم عن طريق كتابة الفضاء العيني في الحل الثاني .

١)

الصندوق الأول		الصندوق الثاني	
ح	خ	ح	خ
٥	٣	٤	٦
المجموع ٨		المجموع ١٠	
سحب كرة واحدة		سحب كرة واحدة	
ح	خ	ح	خ
$\frac{٥}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٤}{١٠}$	$\frac{٦}{١٠}$

أ) احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان خضراوين ؟

احتمال (خضراء من الأول و خضراء من الثاني) : لاحظ أن الحادثان مستقلان

$$\text{ل}(\text{خ}_1 \cap \text{خ}_2) = \text{ل}(\text{خ}_1) \times \text{ل}(\text{خ}_2) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٩}{١٥}$$

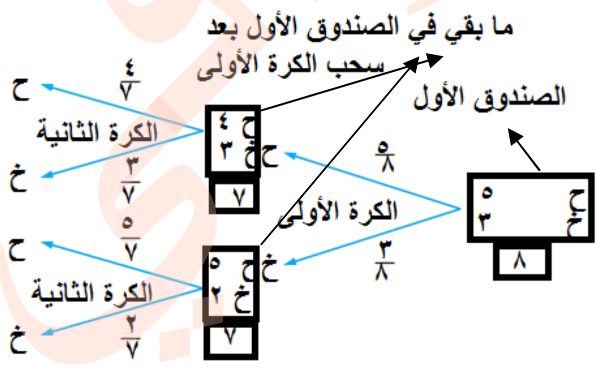
ب) احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ؟

احتمال (حمراء من الأول و خضراء من الثاني) + احتمال (خضراء من الأول و حمراء من الثاني)

$$\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{خ}_2) + \text{ل}(\text{خ}_1 \cap \text{ح}_2)$$

$$\text{ل}(\text{ح}_1) \times \text{ل}(\text{خ}_2) + \text{ل}(\text{خ}_1) \times \text{ل}(\text{ح}_2) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٢١}{٤٠}$$

٢) الشكل المجاور ، يمثل عملية سحب كرة واحدة من الصندوق الأول الواحدة تلو الأخرى ، دون إرجاع ، وكما تلاحظ أن عملية سحب الكرة الأولى يؤثر في عملية سحب الكرة الثانية ، الكرة الأولى تسحب من ٨ كرات ، بينما الكرة الثانية تسحب من ٧ كرات ، لذلك الحادثان غير مستقلان .



سحب كرتان الواحدة تلو الآخرى

- **لذلك فإن احتمال أن الكرتان حمراوين هو :**

احتمال (الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء)

= احتمال (الكرة الأولى حمراء) × احتمال (الكرة الثانية حمراء بشرط الأولى حمراء)

$$ل\left(ح_{١} \cap ح_{٢}\right) = ل\left(ح_{١}\right) \times ل\left(ح_{٢}/ح_{١}\right) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

الطريقة الثانية في الحل :

١)

الصندوق الأول		
ح	٥	٨
خ	٣	

الصندوق الثاني		
ح	٤	١٠
خ	٦	

عدد عناصر الفضاء العيني = ٨

$$\Omega = \left\{ ح_{ص١} ، خ_{ص١} \right\}$$

عدد عناصر الفضاء العيني = ١٠

$$\Omega = \left\{ ح_{ص٢} ، خ_{ص٢} \right\}$$

أ) احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان خضراوين ؟

$$ل\left(خ_{ص١} \cap خ_{ص٢}\right) = ل\left(خ_{ص١}\right) \times ل\left(خ_{ص٢}\right) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٩}{١٥}$$

الحادثان مستقلان

ب) احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ؟

$$ل\left(ح_{ص١} \cap خ_{ص٢}\right) + ل\left(خ_{ص١} \cap ح_{ص٢}\right)$$

$$ل\left(ح_{ص١}\right) \times ل\left(خ_{ص٢}\right) + ل\left(خ_{ص١}\right) \times ل\left(ح_{ص٢}\right) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٢١}{٤٠}$$

٢)

الصندوق الأول		
ح	٥	٨
خ	٣	

نجد عدد عناصر الفضاء العيني

نسحب الكرة الأولى من (٨) ، ثم نسحب الكرة الثانية من (٧)

$$ع(\Omega) = ٨ \times ٧ = ٥٦$$

$$\Omega = \left\{ \underset{٥\times٤}{ح ح} ، \underset{٥\times٣}{ح خ} ، \underset{٣\times٥}{خ ح} ، \underset{٣\times٢}{خ خ} \right\}$$

$$ل\left(ح ح\right) = \frac{ع\left(ح ح\right)}{ع\left(\Omega\right)} = \frac{٥ \times ٤}{٨ \times ٧} = \frac{٥}{١٤}$$

حل تدريب (٧ – ٢٣) ص١٣٢

علبتان تحتويان أقلاماً متماثلة ، الأولى فيها : (٧) أقلام زرقاء ، و (٣) أقلام سوداء ، والثانية فيها : (٤) أقلام زرقاء ، و (٥) أقلام حمراء :

١) اختارت سهاد قلماً واحداً من كل علبة ، ما احتمال :

أ) أن يكون القلمان أزرقين ؟

ب) أن يكون القلمان مختلفي اللون ؟

الحل :

العلبة الأولى		
ز	٧	١٠
س	٣	

العلبة الثانية		
ز	٤	٩
ح	٥	

- **التجربة : اختيار قلم واحد من كل علبة : سحب قلم من الأولى لا يؤثر في سحب قلم من الثانية**

$$\Omega = \{ ز_{ع١} ، س_{ع١} \} \qquad \Omega = \{ ز_{ع٢} ، ح_{ع٢} \}$$

أ) احتمال أن يكون القلمان أزرقين ؟

$$ل(ز_{ع١} \cap ز_{ع٢}) = ل(ز_{ع١}) \times ل(ز_{ع٢}) = \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{٩} = \frac{١٤}{٤٥}$$

الحادثان مستقلان

ب) احتمال أن يكون القلمان مختلفي اللون ؟

$$ل(ز_{ع١} \cap ح_{ع٢}) + ل(س_{ع١} \cap ز_{ع٢}) + ل(س_{ع١} \cap ح_{ع٢}) =$$

$$= ل(ز_{ع١}) \times ل(ح_{ع٢}) + ل(س_{ع١}) \times ل(ز_{ع٢}) + ل(س_{ع١}) \times ل(ح_{ع٢})$$

$$= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٥}{٩} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٤}{٩} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٣١}{٤٥}$$

٢) اختار وائل قلمين من العلبة الثانية ، الواحد تلو الآخر مع الإرجاع ، ما احتمال :

أ) أن يكون القلمين أحمرين ؟

ب) أن يكون القلمان مختلفي اللون ؟

الحل :

لاحظ أن السحب على التوالي مع الإرجاع ، أي يسحب وائل القلم الثاني بعد إرجاع القلم الأول ، لذلك احتمال سحب القلم الأول لا يؤثر في احتمال سحب القلم الثاني ⟵ الحادثان مستقلان .

العلبة الثانية		
ز	٤	٩
ح	٥	

- **عدد عناصر الفضاء العيني :**

يختار وائل القلم الأول من ٩ أقلام ، ثم يختار القلم الثاني من ٩ أقلام

$$ع(\Omega) = ٩ \times ٩ = ٨١$$

$$\Omega = \left\{ \underset{\underset{١٦}{٤\times٤}}{زز} \ ، \ \underset{\underset{٢٠}{٤\times٥}}{زح} \ ، \ \underset{\underset{٢٠}{٥\times٤}}{حز} \ ، \ \underset{\underset{٢٥}{٥\times٥}}{حح} \right\}$$

أ) احتمال أن يكون القلمين أحمرين ؟

$$ل(حح) = \frac{ع(حح)}{ع(\Omega)} = \frac{٥ \times ٥}{٩ \times ٩} = \frac{٢٥}{٨١}$$

ب) احتمال أن يكون القلمان مختلفي اللون ؟

$$ل(زح) + ل(حز) = \frac{ع(زح)}{ع(\Omega)} + \frac{ع(حز)}{ع(\Omega)} = \frac{٤ \times ٥}{٩ \times ٩} + \frac{٥ \times ٤}{٩ \times ٩} = \frac{٤٠}{٨١}$$

٣) لإيجاد احتمال اختيار قلمين مختلفي اللون من العلبة الثانية بحيث يكون السحب على التوالي دون إرجاع ، قامت وفاء بكتابة الحل الآتي :

ليكن $ح_١$: اختيار قلم أزرق من العلبة الثانية .

$ح_٢$: اختيار قلم أحمر من العلبة الثانية ، وعليه يكون :

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢) = \frac{٤}{٩} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٢٠}{٨١}$$

هل توافق وفاء في الحل ؟ برر إجابتك .

الحل :

- **أكيد لا أوافق وفاء في الحل ، لأن وفاء اعتبرت أن الحادثان مستقلان ، بينما الحادثان غير مستقلان ، لأن احتمال سحب القلم الأول أثر في احتمال سحب القلم الثاني ، حيث نسحب القلم الأول من ٩ أقلام ، بينما نسحب القلم الثاني من ٨ أقلام (السحب على التوالي دون إرجاع)**

والحل الصحيح كما يلي :

$$ع(\Omega) = ٩ \times ٨ = ٧٢$$

$$\Omega = \left\{ \underset{\underset{١٢}{٤\times٣}}{زز} \ ، \ \underset{\underset{٢٠}{٤\times٥}}{زح} \ ، \ \underset{\underset{٢٠}{٥\times٤}}{حز} \ ، \ \underset{\underset{٢٠}{٥\times٤}}{حح} \right\}$$

$$ل(زح) + ل(حز) = \frac{ع(زح)}{ع(\Omega)} + \frac{ع(حز)}{ع(\Omega)} = \frac{٤ \times ٥}{٩ \times ٨} + \frac{٥ \times ٤}{٩ \times ٨} = \frac{٤٠}{٧٢} = \frac{٥}{٩}$$

حل تدريب (٧ – ٢٤) ص١٣٣

المسألة الواردة في بداية الدرس

أجريت إحصائية في إحدى المدارس ، حول عدد الساعات التي يقضيها الطلاب في مشاهدة التلفاز في المنزل من عمر ٦ سنوات حتى عمر ١٥ سنة ، والجدول التالي يمثل نتائج هذه الإحصائية .

العمر / عدد الساعات	(٦ – ١٠)	(١١ – ١٥)	المجموع
ساعتان وأقل	٥٥	٦٠	١١٥
أكثر من ساعتين	٩٥	٣٠	١٢٥
المجموع	١٥٠	٩٠	٢٤٠

إذا اختير طالب عشوائياً من هذه المدرسة ، فما احتمال أن يكون ممن يشاهدون التلفاز أكثر من ساعتين و من الفئة العمرية (١١ – ١٥) سنة ؟

الحل :

نفرض : $ع_١$: اختيار طالب ممن يشاهدون التلفاز أكثر من ساعتين .

$ع_٢$: اختيار طالب من الفئة العمرية (١١ – ١٥) سنة .

المطلوب : $ل(ع_١ \cap ع_٢)$ الحادثان غير مستقلان

$$ل(ع_١ \cap ع_٢) = ل(ع_٢) \times (ع_١ / ع_٢)$$

$$ل(ع_١ \cap ع_٢) = \frac{٩٠}{٢٤٠} \times \frac{٣٠}{٩٠} = \frac{٣٠}{٢٤٠} = \frac{١}{٨}$$

الفرق بين الحادثين المستقلين والحادثين المنفصلين .

الحادثين المنفصلين لا يوجد أشياء مشتركة بينهما وتقاطعهما يساوي المجموعة الخالية ، أي أن احتمال تقاطعهما يساوي صفراً .

بينما الحادثين المستقلين ، احتمال وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر ، واحتمال تقاطعهما يساوي احتمال وقوع الأول ضرب احتمال وقوع الثاني

حل الأسئلة ص ١٣٤ + ١٣٥

١) إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ حادثين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان :

$ل(ع_{١}) = \frac{٢}{٣}$ ، $ل(ع_{٢}) = \frac{١}{٢}$ ، $ل(ع_{٢}/ع_{١}) = \frac{١}{٤}$ ، **فاحسب قيمة كل من :**

أ) $ل(ع_{١} - ع_{٢})$ ب) $ل(ع_{١}/ع_{٢})$

الحل :

في البداية نجد $ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ **من** $ل(ع_{٢}/ع_{١}) = \frac{١}{٤}$

$$ل(ع_{٢}/ع_{١}) = \frac{ل(ع_{١} \cap ع_{٢})}{ل(ع_{١})} \leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{ل(ع_{١} \cap ع_{٢})}{\frac{٢}{٣}} \leftarrow \boxed{ل(ع_{١} \cap ع_{٢}) = \frac{١}{٦}}$$

$$أ)\ ل(ع_{١} - ع_{٢}) = ل(ع_{١}) - ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$$
$$= \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$$ب)\ ل(ع_{١}/ع_{٢}) = \frac{ل(ع_{١} \cap ع_{٢})}{ل(ع_{٢})} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$$

٢) في مدينة ما ، إطفائيتان تعملان مستقلتين عن بعضهما ، احتمال وصول الأولى إلى مكان حريق ضمن حدود المدينة ، خلال عشر دقائق هو (٧٥و٠) واحتمال وصول الثانية إلى المكان نفسه خلال المدة نفسها هو (٦و٠) ما احتمال وصول الإطفائيتين إلى مكان الحريق معاً خلال عشر دقائق ؟

الحل :

لاحظ أن وصول الإطفائية الأولى لا يؤثر في وصول الإطفائية الثانية : (مستقلان)

نفرض : $ع_{١}$: وصول الإطفائية الأولى . $\leftarrow$ $ل(ع_{١}) = ٧٥و٠$

$ع_{٢}$: وصول الإطفائية الثانية . $\leftarrow$ $ل(ع_{٢}) = ٦و٠$

المطلوب : احتمال وصولهما معاً . $\leftarrow$ $ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$ **الحادثان مستقلان**

$$ل(ع_{١} \cap ع_{٢}) = ل(ع_{١}) \times ل(ع_{٢}) = ٧٥و٠ \times ٦و٠ = ٤٥و٠$$

٣) أراد مهند الحصول على رخصة قيادة السيارة ، فكان عليه التقدم لاختبارين أحدهما نظري والآخر عملي ، إذا كان احتمال نجاح مهند في الاختبار النظري (٩٣و٠) ، واحتمال نجاحه في الاختبار العملي إذا كان ناجحاً في الاختبار النظري (٨و٠) ، فما احتمال حصوله على رخصة قيادة السيارة ؟

الحل :

نفرض : $ع_١$: ناجح في الاختبار النظري ٠ $\leftarrow$ $ل(ع_١) = ٩٣و٠$

$ع_٢$: ناجح في الاختبار العملي ٠ $\leftarrow$ $ل(ع_٢) = ?$

$ع_١ \cap ع_٢$: ناجح في الاختبارين معاً $\leftarrow$ $ل(ع_١ \cap ع_٢)$

المطلوب : احتمال حصول مهند على رخصة قيادة السيارة ؟

لكي يحصل مهند على رخصة قيادة السيارة يجب أن يكون ناجحاً في الاختبارين معاً

$\leftarrow$ $ل(ع_١ \cap ع_٢) = ?$ ، (لاحظ أن الحادثان غير مستقلان)

المعطيات : احتمال نجاح مهند في الاختبار العملي إذا كان ناجحاً في الاختبار النظري $ل(ع_٢/ع_١) = ٨و٠$

$$ل(ع_٢/ع_١) = \frac{ل(ع_١ \cap ع_٢)}{ل(ع_١)} \leftarrow ٨و٠ = \frac{ل(ع_١ \cap ع_٢)}{٩٣و٠} \leftarrow \boxed{ل(ع_١ \cap ع_٢) = ٧٤٤و٠}$$

٤) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان :

$ل(ع_١) = ٦و٠$ ، $ل(ع_٢) = ٥و٠$ ، $ل(ع_١ \cup ع_٢) = ٨و٠$

فهل $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثان مستقلان ؟

الحل :

- من قانون الاتحاد نجد احتمال تقاطع الحادثين :

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$
$$٨و٠ = ٦و٠ + ٥و٠ - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$
$$ل(ع_١ \cap ع_٢) = ١و١ - ٨و٠ = ٣و٠ \quad ......(١)$$

- نجد حاصل ضرب احتمال الحادثين $ع_١$ ، $ع_٢$

$$ل(ع_١) \times ل(ع_٢) = ٦و٠ \times ٥و٠ = ٣و٠ \quad ....(٢)$$

- من ١ ، ٢ ، نلاحظ أن $ل(ع_١ \cap ع_٢) = ل(ع_١) \times ل(ع_٢) = ٣و٠$ $\longleftarrow$ الحادثان مستقلان

٥) صندوقان ، الأول فيه : (٤) بالونات صفراء ، و (٨) بالونات برتقالية اللون ، والثاني فيه : (٥) بالونات برتقالية اللون ، و (٦) بالونات خضراء ، وجميع البالونات في الصندوقين متماثلة :

أ) سحب بالونان من الصندوق الثاني ، الواحد تلو الآخر دون إرجاع ، ما احتمال أن يكونا خضراوين ؟

ب) سحب بالونان من الصندوق الأول ، الواحد تلو الآخر ، مع الإرجاع ، ما احتمال أن يكونا مختلفي اللون ؟

جـ) سحب بالون واحد من كل صندوق ، ما احتمال :

- أن يكونا برتقالي اللون ؟
- أن يكونان مختلفي اللون ؟

الحل :

أ) سحب بالونان من الصندوق الثاني ، الواحد تلو الآخر دون إرجاع ، ما احتمال أن يكونا خضراوين ؟

الصندوق الثاني			
برتقالي	ب	٥	١١
أخضر	خ	٦	

عدد عناصر الفضاء العيني (السحب على التوالي دون إرجاع)

- نسحب البالون الأول من ١١ بالون
- نسحب البالون الثاني من ١٠ بالون
- $ع\left(\Omega\right) = ١١ \times ١٠ = ١١٠$
- $\Omega = \left\{ \underset{٢٠}{\underset{٤\times٥}{ب\,ب}} \ ، \ \underset{٣٠}{\underset{٦\times٥}{ب\,خ}} \ ، \ \underset{٣٠}{\underset{٥\times٦}{خ\,ب}} \ ، \ \underset{٣٠}{\underset{٥\times٦}{خ\,خ}} \right\}$
- $ل\left(خ\,خ\right) = \frac{ع\left(خ\,خ\right)}{ع\left(\Omega\right)} = \frac{٦ \times ٥}{١١ \times ١٠} = \frac{٣٠}{١١٠} = \frac{٣}{١١}$

طريقة ثانية للحل :

- احتمال أن يكون البالون الأول أخضر ← $ل\left(خ_١\right) = \frac{٦}{١١}$
- احتمال أن يكون البالون الثاني أخضر إذا كان البالون الأول أخضر ← $ل\left(خ_٢ / خ_١\right) = \frac{٥}{١٠}$
- $ل\left(خ_١ \cap خ_٢\right) = ل\left(خ_١\right) \times ل\left(خ_٢ / خ_١\right) = \frac{٦}{١١} \times \frac{٥}{١٠} = \frac{٣}{١١}$

ب) سحب بالونان من الصندوق الأول ، الواحد تلو الآخر ، مع الإرجاع ، ما احتمال أن يكونا مختلفي اللون ؟

الصندوق الأول			
أصفر	ص	٤	١٢
برتقالي	ب	٨	

عدد عناصر الفضاء العيني (السحب على التوالي مع الإرجاع)

- **نسحب البالون الأول من ١٢ بالون**
- **نسحب البالون الثاني من ١٢ بالون**
- $ع(\Omega) = ١٢ \times ١٢ = ١٤٤$ **(الحادثان مستقلان لأن احتمال سحب البالون الأول لا يؤثر في احتمال سحب البالون الثاني)**

$$\Omega = \left\{ \underset{\underset{١٦}{٤\times٤}}{ص\,ص} \;،\; \underset{\underset{٣٢}{٤\times٨}}{ص\,ب} \;،\; \underset{\underset{٣٢}{٨\times٤}}{ب\,ص} \;،\; \underset{\underset{٦٤}{٨\times٨}}{ب\,ب} \right\}$$

$$ل(ص\,ب) + ل(ب\,ص) = \frac{ع(ص\,ب)}{ع(\Omega)} + \frac{ع(ب\,ص)}{ع(\Omega)} = \frac{٨ \times ٤}{١٢ \times ١٢} + \frac{٤ \times ٨}{١٢ \times ١٢} = \frac{٦٤}{١٤٤} = \frac{٤}{٩}$$

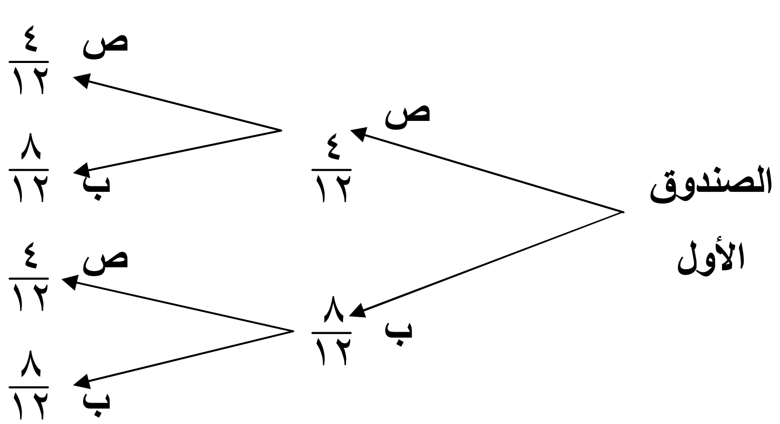
طريقة ثانية للحل :

- **احتمال أن يكون البالون الأول أصفر** ← $ل(ص_{١}) = \frac{٤}{١٢}$
- **احتمال أن يكون البالون الثاني أخضر** ← $ل(خ_{٢}) = \frac{٨}{١٢}$
- **احتمال أن يكون البالون الأول أخضر** ← $ل(خ_{١}) = \frac{٨}{١٢}$
- **احتمال أن يكون البالون الثاني أصفر** ← $ل(ص_{٢}) = \frac{٤}{١٢}$

ل (مختلفي اللون) = ل (الأول أصفر و الثاني أخضر) أو ل (الأول أخضر والثاني أصفر)

= ل (الأول أصفر) × ل (الثاني أخضر) + ل (الأول أخضر) × ل (الثاني أصفر)

$$= \frac{٤}{١٢} \times \frac{٨}{١٢} + \frac{٨}{١٢} \times \frac{٤}{١٢} = \frac{٦٤}{١٤٤} = \frac{٥}{٩}$$



جـ) سحب بالون واحد من كل صندوق ، ما احتمال :

١) أن يكونا برتقالي اللون ؟

٢) أن يكونان مختلفي اللون ؟

∵ بما أن التجربة سحب بالون من كل صندوق ، إذاً الحادثان مستقلان حيث احتمال سحب بالون من الصندوق الأول لا يؤثر في احتمال سحب بالون من الصندوق الثاني ، أو العكس .

الصندوق الأول			
أصفر	ص	٤	١٢
برتقالي	ب	٨	

الصندوق الثاني			
برتقالي	ب	٥	١١
أخضر	خ	٦	

- **عدد عناصر الفضاء العيني (سحب بالون من كل صندوق)**

- نسحب بالون واحد من الصندوق الأول من ١٢ بالون

- نسحب بالون واحد من الصندوق الثاني من ١١ بالون

$ع(\Omega) = ١٢ \times ١١ = ١٣٢$

$$\Omega = \left\{ \underset{٢٠}{\underset{٥\times٤}{ص_١ ب_٢}} ، \underset{٢٤}{\underset{٦\times٤}{ص_١ خ_٢}} ، \underset{٤٠}{\underset{٥\times٨}{ب_١ ب_٢}} ، \underset{٤٨}{\underset{٦\times٨}{ب_١ خ_٢}} \right\}$$

١) أن يكونا برتقالي اللون ؟ $\leftarrow ل\left(ب_١ ب_٢\right)$ **الحادثان مستقلان**

$$\leftarrow ل\left(ب_١ ب_٢\right) = \frac{ع\left(ب_١ ب_٢\right)}{ع\left(\Omega\right)} = \frac{٨ \times ٥}{١٢ \times ١١} = \frac{١٠}{٣٣}$$

الحل بطريقة ثانية : ل (برتقالي من الصندوق الأول)= ل (ب$_١$) = $\frac{٨}{١٢}$

ل (برتقالي من الصندوق الثاني)= ل (ب$_٢$) = $\frac{٥}{١١}$

$$\leftarrow ل\left(ب_١ \cap ب_٢\right) = \frac{٨}{١٢} \times \frac{٥}{١١} = \frac{١٠}{٣٣}$$

٢) أن يكونان مختلفي اللون ؟

$$ل\left(ص_١ ب_٢\right) + ل\left(ص_١ خ_٢\right) + ل\left(ب_١ خ_٢\right) = \frac{ع\left(ص_١ ب_٢\right)}{ع\left(\Omega\right)} + \frac{ع\left(ص_١ خ_٢\right)}{ع\left(\Omega\right)} + \frac{ع\left(ب_١ خ_٢\right)}{ع\left(\Omega\right)}$$

$$= \frac{٤ \times ٥}{١٢ \times ١١} + \frac{٤ \times ٦}{١٢ \times ١١} + \frac{٨ \times ٦}{١٢ \times ١١} = \frac{٩٢}{١٣٢} = \frac{٢٣}{٣٣}$$

أو : ل (مختلفي اللون = ١ – ل (من نفس اللون) $\leftarrow ١ - \frac{١٠}{٣٣} = \frac{٢٣}{٣٣}$ **(قانون المتممة)**

٦) أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ ، مع توضيح السبب ؟

أ) الاحتمال المشروط هو احتمال لا يتأثر فيه وقوع الحادث بوقوع حادث آخر .

خطأ : يمكن أن يتأثر ، الذي لا يتأثر فقط الحوادث المستقلة

ب) احتمال اتحاد الحادثين المستقلين يساوي مجموع احتماليهما .

خاطئة : يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه حاصل ضرب احتماليهما .

جـ) الحوادث المنفصلة يكون تقاطعها دائما $\varnothing$. ← صحيحة

د) عند سحب كرتين كل كرة من صندوق ، فإن الحوادث هنا تكون حوادث مستقلة . ← صحيحة

هـ) الحوادث المستقلة هي نفسها الحوادث المنفصلة . ← خطأ

الحادثين المنفصلين لا يوجد أشياء مشتركة بينهما وتقاطعهما يساوي المجموعة الخالية ، أي أن احتمال تقاطعهما يساوي صفراً .

بينما الحادثين المستقلين ، احتمال وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر ، واحتمال تقاطعهما يساوي احتمال وقوع الأول ضرب احتمال وقوع الثاني .

٧) صندوق يحتوي على أربع بطاقات مرقمة بالأرقام : ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، سحبت بطاقتان على التوالي دون إرجاع ، لتكوين عدد مكون من منزلتين :

أ) ما عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة ؟

ب) ما احتمال تكوين العدد ٧٨ ؟

جـ) إذا سحبت البطاقتان على التوالي مع الإرجاع ، ما احتمال تكوين العدد ٩٦ ؟

الحل :

أ) ما عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة ؟

نسحب البطاقة الأولى من ٤ بطاقات ولا نعيدها ، ثم نسحب البطاقة الثانية من ٣ بطاقات

$$ع\ (\Omega) = ٤ \times ٣ = ١٢$$

ب) ما احتمال تكوين العدد ٧٨ ؟

ل (سحب الرقم ٨) ← $ل\ (٨) = \frac{١}{٤}$

ل (سحب الرقم ٧ في المرة الثانية بشرط أن يكون الرقم الأول ٨) ← $ل\ (٧/٨) = \frac{١}{٣}$

$\leftarrow$ ل $(٧٨) = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢}$

حل ثاني باستخدام الشبكة :

من خلال الشبكة ، وبعد حذف عناصر القطر حيث أنه لا يمكن أن يكرر العدد نفسه في حالة السحب دون إرجاع

٩	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩
٨	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩
٧	٧٦	٧٧	$\boxed{٧٨}$	٧٩
٦	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩
	٦	٧	٨	٩

$\leftarrow$ ل $(٧٨) = \frac{١}{١٢}$

جـ) إذا سحبت البطاقتان على التوالي مع الإرجاع ، ما احتمال تكوين العدد ٩٦ ؟

نسحب البطاقة الأولى من ٤ بطاقات ثم نعيدها ، ثم نسحب البطاقة الثانية من ٤ بطاقات

ع $(\Omega) = ٤ \times ٤ = ١٦$

ل (سحب الرقم ٦) $\leftarrow$ ل $(٦) = \frac{١}{٤}$

ل (سحب الرقم ٩ في المرة الثانية بشرط أن يكون الرقم الأول ٦) $\leftarrow$ ل $(٩/٦) = \frac{١}{١٦}$

$\leftarrow$ ل $(٩٦) = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$

حل ثاني باستخدام الشبكة :

من خلال الشبكة ، حيث لا نحذف عناصر القطر لأنه يمكن أن يكرر العدد نفسه في حالة السحب مع الإرجاع

٩	$\boxed{٩٦}$	٩٧	٩٨	٩٩
٨	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩
٧	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩
٦	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩
	٦	٧	٨	٩

$\leftarrow$ ل $(٩٦) = \frac{١}{١٦}$

حل أسئلة الوحدة

١) يتكون هذا السؤال من ٥ فقرات من نوع الاختيار من متعدد / لكل منها أربعة بدائل ، واحد منها فقط صحيح ، اختر رمز البديل الصحيح لكل منها :

(١) ألقت ولاء قطعة نقد (٩) مرات متتالية ، وظهرت الكتابة على الوجه العلوي لقطعة النقد في الرميات جميعها ، إذا ألقت ولاء قطعة النقد للمرة العاشرة ، فإن احتمال ظهور الكتابة في الرمية العاشرة يساوي :

أ) ١   ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٩}{١٠}$ د) ٠

الجواب : فرع ب :: لأن الرميات الأولى معلومة نتيجتها

(٢) إذا كان ل $(ع_١)$ = ٠و٨ ، ل $(ع_٢)$ = ٠و٥ ، ل $(ع_٢ - ع_١)$ = ٠و٣

فإن ل $(ع_٢ / ع_١)$ يساوي :

أ) ٠و٣   ب) ٠و٥   جـ) ٠و٢٥   د) ٠و٢

ل $(ع_٢ - ع_١)$ = ل $(ع_٢)$ − ل $(ع_٢ \cap ع_١)$

٠و٣ = ٠و٥ − ل $(ع_٢ \cap ع_١)$ $\leftarrow$ ل $(ع_٢ \cap ع_١)$ = ٠و٢

ل $(ع_٢ / ع_١) = \frac{ل(ع_٢ \cap ع_١)}{ل(ع_١)} = \frac{٠و٢}{٠و٨}$ = ٠و٢٥   **فرع جـ**

(٣) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين منفصلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان ل $(ع_١) = \frac{٢}{٥}$ ، ل $(ع_٢) = \frac{١}{٣}$ فإن ل $(ع_١ \cap ع_٢)$ يساوي

أ) ٠   ب) $\frac{٢}{١٥}$ جـ) $\frac{١١}{١٥}$ د) $\frac{١}{١٥}$

$ع_١$ ، $ع_٢$ **حادثين منفصلين** $ع_١ \cap ع_٢ = \phi \leftarrow$ ل $(ع_١ \cap ع_٢)$ = ٠   **فرع أ**

(٤) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان ل $(ع_١)$ = ٠و٣ ، ل $(ع_٢)$ = ٠و٤ فإن ل $(ع_١ \cup ع_٢)$ يساوي

أ) ٠و٨٨   ب) ٠و٧   جـ) ٠و١٢   د) ٠و٥٨

ل $(ع_١ \cup ع_٢)$ = ل $(ع_١)$ + ل $(ع_٢)$ − ل $(ع_١)$ × ل $(ع_٢)$ $\longleftarrow$ $ع_١$ ، $ع_٢$ **حادثين مستقلين**

ل $(ع_١ \cup ع_٢)$ = ٠و٣ + ٠و٤ − ٠و٣ × ٠و٤ = ٠و٥٨   **فرع د**

	(٥)	إذا كان ع١ ، ع٢ حادثين مستقلين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما ، وكان ل (ع١) = ٠٫٥ ، ل ($\overline{ع_٢}$) = ٠٫٦ فإن ل (ع١ − ع٢) يساوي أ) ٠٫٢ ب) ٠٫٩ جـ) ٠٫٣ د) ٠٫١ ل ($\overline{ع_٢}$) = ٠٫٦ ← ل (ع٢) = ١ − ل ($\overline{ع_٢}$) = ٠٫٤ ل (ع١ − ع٢) = ل (ع١) − ل (ع١) × ل (ع٢) ← ع١ ، ع٢ مستقلان ل (ع١ − ع٢) = ٠٫٥ − ٠٫٥ × ٠٫٤ = ٠٫٣ فرع جـ

٢) أخذت عينة مكونة من (١٠٠) موظف ، وكانت رواتبهم الشهرية بالدينار الأردني ، كما يلي :

الدخل	٤٠٠	٥٥٠	٧٠٠	٨٥٠	١٠٠٠
التكرار	٣٠	٢٥	١٥	٢٠	١٠

احسب الانحراف المعياري لرواتب هؤلاء الموظفين .

الحل :

الدخل (س)	التكرار (ت)	س × ت	س^٢	س^٢ × ت
٤٠٠	٣٠	١٢٠٠٠	١٦٠٠٠٠	٤٨٠٠٠٠٠
٥٥٠	٢٥	١٣٧٥٠	٣٠٢٥٠٠	٧٥٦٢٥٠٠
٧٠٠	١٥	١٠٥٠٠	٤٩٠٠٠٠	٧٣٥٠٠٠٠
٨٥٠	٢٠	١٧٠٠٠	٧٢٢٥٠٠	١٤٤٥٠٠٠٠
١٠٠٠	١٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠٠
المجموع	١٠٠	٦٣٢٥٠		٤٤١٦٢٥٠٠

- $\bar{س} = \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت} = \frac{٦٣٢٥٠}{١٠٠} = ٦٣٢٫٥$

- $ع = \sqrt{\frac{\sum (س^٢ ت) - ن \left(\bar{س}\right)^٢}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{(٤٤١٦٢٥٠٠) - ١٠٠ (٦٣٢٫٥)^٢}{٩٩}} = ٢٠٤٫٩$

٣) في تجربة ألقاء (٤) قطع نقدية معدنية مختلفة مرة واحدة ، و تسجيل النواتج الظاهرة على الوجه العلوي لكل منها :

أ) ما عدد عناصر الفضاء العيني Ω في هذه التجربة ؟

ب) ما احتمال ظهور كتابة على الوجهين العلويين لقطعتي نقد وصورة على الوجهين العلويين للقطعتين الأخريين ؟

جـ) ما احتمال ظهور الصورة على الأوجه العلوية لقطع النقد الأربعة ؟

الحل :

	ك ك	ك ص	ص ك	ص ص
ك ك	ك ك ك ك	ك ص ك ك	ص ك ك ك	$\boxed{\text{ص ص ك ك}}$
ك ص	ك ك ك ص	$\boxed{\text{ك ص ك ص}}$	$\boxed{\text{ص ك ك ص}}$	ص ص ك ص
ص ك	ك ك ص ك	$\boxed{\text{ك ص ص ك}}$	$\boxed{\text{ص ك ص ك}}$	ص ص ص ك
ص ص	$\boxed{\text{ك ك ص ص}}$	ك ص ص ص	ص ك ص ص	ص ص ص ص

أ) ع (Ω) = ٢×٢×٢×٢ = ١٦

ب) المطلوب : ل (٢ ك ٢ ص) = ل (ع$_{١}$)

من الشبكة أعلاه الذي تمثل الفضاء العيني للتجربة ، نجد أن ل (ع$_{١}$) = $\frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$

جـ) المطلوب : ل (ص ص ص ص) = ل (ع$_{٢}$) ← ل (ص ص ص ص) = ل (ع$_{٢}$) = $\frac{١}{١٦}$

٤) المتوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالباً في الصف العاشر (أ) يساوي ٨٥ ، والانحراف المعياري لها يساوي ٧ ، والمتوسط الحسابي لعلامات (٢٥) طالباً في الصف العاشر (ب) يساوي ٩٠ ، والانحراف المعياري لها يساوي ٦ ، إذا دمجت الشعبتان معاً ، احسب المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري بعد الدمج

الحل : الجدول التالي ، يمثل البيانات قبل الدمج :

العاشر (أ)			العاشر (ب)		
$ن_{أ}$	$\bar{س}_{أ}$	$ع_{أ}$	$ن_{ب}$	$\bar{س}_{ب}$	$ع_{ب}$
٣٠	٨٥	٧	٢٥	٩٠	٦

- **المتوسط الحسابي بعد الدمج**

$$\bar{\text{س}}_{\text{أ+ب}} = \frac{\text{ن}_{\text{أ}}\,\bar{\text{س}}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}}\,\bar{\text{س}}_{\text{ب}}}{\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}}} = \frac{٣٠ \times ٨٥ + ٢٥ \times ٩٠}{٣٠ + ٢٥} = \frac{٢٥٥٠ + ٢٢٥٠}{٥٥} = ٨٧\text{و}٢٧$$

- **نجد مجموع مربعات العلامات قبل الدمج :**

للعاشر (أ) :

$$\text{م}_{\text{أ}} = \sum (\text{س}_{\text{أ}})^{٢} = (\text{ن}_{\text{أ}} - ١)\,\text{ع}_{\text{أ}}^{٢} + \text{ن}_{\text{أ}}\,(\bar{\text{س}}_{\text{أ}})^{٢}$$

$$\text{م}_{\text{أ}} = \sum (\text{س}_{\text{أ}})^{٢} = (٣٠ - ١)\,(٧)^{٢} + ٣٠\,(٨٥)^{٢}$$

$$\text{م}_{\text{أ}} = \sum (\text{س}_{\text{أ}})^{٢} = ١٤٢١ + ٢١٦٧٥٠ = ٢١٨١٧١$$

للعاشر (ب) :

$$\text{م}_{\text{ب}} = \sum (\text{س}_{\text{ب}})^{٢} = (\text{ن}_{\text{ب}} - ١)\,\text{ع}_{\text{ب}}^{٢} + \text{ن}_{\text{ب}}\,(\bar{\text{س}}_{\text{ب}})^{٢}$$

$$\text{م}_{\text{ب}} = \sum (\text{س}_{\text{ب}})^{٢} = (٢٥ - ١)\,(٦)^{٢} + ٢٥\,(٩٠)^{٢}$$

$$\text{م}_{\text{ب}} = \sum (\text{س}_{\text{ب}})^{٢} = ٨٦٤ + ٢٠٢٥٠٠ = ٢٠٣٣٦٤$$

- **نجد التباين بعد الدمج :**

$$\text{ع}_{\text{أ+ب}}^{٢} = \frac{(\text{م}_{\text{أ}} + \text{م}_{\text{ب}}) - (\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}})\,(\bar{\text{س}}_{\text{أ+ب}})^{٢}}{(\text{ن}_{\text{أ}} + \text{ن}_{\text{ب}}) - ١}$$

$$\text{ع}_{\text{أ+ب}}^{٢} = \frac{(٤٢١٥٣٥) - (٥٥)\,(٨٧\text{و}٢٧)^{٢}}{(٣٠ + ٢٥) - ١}$$

$$\text{ع}_{\text{أ+ب}}^{٢} = \frac{(٤٢١٥٣٥) - (٤١٨٨٨٢\text{و}٩١)}{٥٤}$$

$$\text{ع}_{\text{أ+ب}}^{٢} = ٤٨\text{و}٢٢ \Rightarrow \text{ع}_{\text{أ+ب}} = ٦\text{و}٩٤$$

٥) مازن مقاول بناء ، قام بالتخطيط لعمل مشروعي إسكان بشكل مستقل ، إذا كان احتمال أن ينجز المشروع الأول في الموعد المحدد يساوي $\frac{٢}{٣}$ ، واحتمال أن ينجز المشروعين معاً في الموعد المحدد يساوي $\frac{١}{٥}$ ، فما احتمال :

أ) أن ينجز مازن المشروع الثاني فقط في الموعد المحدد ؟

ب) أن ينجز مازن أحد المشروعين على الأقل في الموعد المحدد ؟

الحل :

- $ع_{1}$ ← **انجاز المشروع الأول** ← $ل(ع_{1}) = \frac{٢}{٣}$

  $ع_{2}$ ← **انجاز المشروع الثاني** ← $ل(ع_{2}) =$ ؟؟؟؟

  $ع_{1} \cap ع_{2}$ ← **انجاز المشروعين معاً** ← $ل(ع_{1} \cap ع_{2}) = \frac{١}{٥}$

الحادثان $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ مستقلان ←

$$← ل(ع_{1} \cap ع_{2}) = \frac{١}{٥} ← ل(ع_{1}) \times ل(ع_{2}) = \frac{١}{٥}$$

$$← \frac{٢}{٣} \times ل(ع_{2}) = \frac{١}{٥} ← \boxed{ل(ع_{2}) = \frac{٣}{١٠}}$$

أ) احتمال أن ينجز المشروع الثاني فقط ← ينجز الثاني ولا ينجز الأول (قانون الفرق)

$$ل(ع_{2} - ع_{1}) = ل(ع_{2}) - ل(ع_{1} \cap ع_{2})$$

$$ل(ع_{2} - ع_{1}) = \frac{٣}{١٠} - \frac{١}{٥} = \frac{١}{١٠}$$

ب) احتمال أن يجز أحد المشروعين على الأقل ← (قانون الاتحاد)

$$← ل(ع_{1} \cup ع_{2}) = ل(ع_{1}) + ل(ع_{2}) - ل(ع_{1} \cap ع_{2})$$

$$ل(ع_{1} \cup ع_{2}) = \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{١٠} - \frac{١}{٥} = \frac{٢٠ + ٩ - ٦}{٣٠} = \frac{٢٣}{٣٠}$$

٦) إذا كان $ل(ع_{1}) = ٠,٥$ ، $ل(ع_{1}/ع_{2}) = ٠,٣$ هل $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ حادثان مستقلان ؟ برر إجابتك .

الحل :

الحادثان غير مستقلان ، لأن ← $ل(ع_{1}/ع_{2}) \neq ل(ع_{1})$ **تعريف استقلال الحوادث**

٧) اشترت فدوى (٤) كتب للثقافة العلمية ، و (٣) كتب للتربية الدينية ، و (٣) كتب للثقافة الأدبية ، إذا قرأت فدوى كتابين اختارتهما بطريقة عشوائية من بين الكتب التي اشترتها ، فما احتمال :

أ) أن يكون الكتابان في الثقافة الأدبية ؟ ب) أن يكون الكتابان ليس ثقافة علمية ؟

جـ) أن يكون أحدهما في التربية الدينية و الآخر في الثقافة الأدبية ؟

ثقافة أدبية	تربية دينية	ثقافة علمي
أ	د	ع
٣	٣	٤
	١٠	المجموع

الحل :

- التجربة : اختيار كتابين بطريقة عشوائية
- نعتبر السحب كتاب تلو الآخر دون إرجاع
- طريقة الاختيار :

تختار فدوى الكتاب الأول من ١٠ كتب ، ولا تعيده ، ثم
تختار الكتاب الثاني من ٩ كتب .

$$ع\,(\Omega) = ١٠ \times ٩ = ٩٠$$

$$\Omega = \{ عع ، عد ، دع ، عأ ، أع ، دد ، دأ ، أد ، أأ \}$$

أ) احتمال أن يكون الكتابان في الثقافة الأدبية ؟

ل (الأول أدبي و الثاني أدبي) = ل (الأول أدبي) × ل (الثاني أدبي بشرط الأول أدبي)

$$ل\,(أ_١ \cap أ_٢) = ل\,(أ_١) \times ل\,(أ_٢ / أ_١) = \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٩} = \frac{١}{١٥}$$

ب) احتمال أن يكون الكتابان ليسا في الثقافة العلمية ؟

ل (الكتابان ليسا في الثقافة العلمية) = ١ – ل (الأول علمي والثاني علمي) <u>قانون المتممة</u>

$$ل\,\left(\overline{ع_١ \cap ع_٢}\right) = ١ - ل\,(ع_١ \cap ع_٢)$$

$$ل\,\left(\overline{ع_١ \cap ع_٢}\right) = ١ - ل\,(ع_١) \times ل\,(ع_٢ / ع_١)$$

$$ل\,\left(\overline{ع_١ \cap ع_٢}\right) = ١ - \frac{٤}{١٠} \times \frac{٣}{٩} = \frac{١٣}{١٥}$$

جـ) احتمال أن يكون أحدهما في التربية الدينية ، والآخر في الثقافة الأدبية ؟

ل (الأول ديني و الثاني أدبي) + ل (الأول أدبي و الثاني ديني) =

ل (الأول ديني) × ل (الثاني أدبي بشرط الأول ديني) + ل (الأول أدبي) × ل (الثاني ديني بشرط الأول أدبي) =

$$= ل\,(د_١) \times ل\,(أ_٢ / د_١) + ل\,(أ_١) \times ل\,(د_٢ / أ_١)$$

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{٩} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٥}$$

٨) يحتوي صندوقان لعباً للأطفال ، وفي كل صندوق (١٠) لعب جميعها متماثلة ، إذا كانت (٤) لعب غير صالحة في الصندوق الأول ، (٣) غير صالحة في الصندوق الثاني ، واختار أحد الأطفال عشوائياً لعبة واحدة من كل صندوق :

أ) ما احتمال أن تكون اللعبتان صالحتين ؟

ب) إذا اختار الطفل من اللعبتين من الصندوق الثاني على التوالي ، ودون إرجاع ، فما احتمال أن تكونا غير صالحتين ؟

الحل :

الصندوق الأول		الصندوق الثاني	
صالحة ص	تالفة ت	صالحة ص	تالفة ت
٦	٤	٧	٣
المجموع ١٠		المجموع ١٠	

أ) ما احتمال أن تكون اللعبتان صالحتين ؟

التجربة : اختيار لعبة من كل صندوق ⟵ استقلال

ل (صالحة من الأول و صالحة من الثاني) = ل (صالحة من الأول) × ل (صالحة من الثاني)

$$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{٧}{١٠} = \frac{٢١}{٥٠}$$

ب) إذا اختار الطفل من اللعبتين من الصندوق الثاني على التوالي ، ودون إرجاع ، فما احتمال أن تكونا غير صالحتين ؟

التجربة : اختيار لعبتين من الصندوق الثاني الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع ⟵ غير مستقلة

ل (غير صالحتين) = ل (تالفة و تالفة)

ل (غير صالحتين) =

= ل (الأولى تالفة) × ل (الثانية تالفة بشرط الأولى تالفة)

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٩} = \frac{٦}{٩٠} = \frac{١}{١٥}$$

٩) يمثل الجدول التالي ، كميات الأمطار المسجلة في إحدى مناطق المملكة على مدى ٢٠ عاماً لأقرب مليمتر ٠

كمية الأمطار	٤٥٠-٤٩٩	٤٠٠-٤٤٩	٣٥٠-٣٩٩	٣٠٠-٣٤٩	٢٥٠-٢٩٩	٢٠٠-٢٤٩
عدد السنوات	٢	٤	٣	٦	٣	٢

احسب :

أ) المتوسط الحسابي لكميات الأمطار ٠

ب) الانحراف المعياري لكميات الأمطار ٠

الحل :

أ) $\bar{س} = \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت}$

كميات الأمطار	عدد السنوات (ت)	مركز الفئة (س)	ت × س
٤٥٠ ـ ٤٩٩	٢	٤٧٤و٥	٩٤٩و٠
٤٠٠ ـ ٤٤٩	٤	٤٢٤و٥	١٦٩٨و٠
٣٥٠ ـ ٣٩٩	٣	٣٧٤و٥	١١٢٣و٥
٣٠٠ ـ ٣٤٩	٦	٣٢٤و٥	١٩٤٧و٠
٢٥٠ ـ ٢٩٩	٣	٢٧٤و٥	٨٢٣و٥
٢٠٠ ـ ٢٤٩	٢	٢٢٤و٥	٤٤٩و٠
المجموع	٢٠		٦٩٩٠

$$\bar{س} = \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت} = \frac{٦٩٩٠}{٢٠} = ٣٤٩و٥$$

ب) $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢} \times ت}{ن - ١}}$

$(س-\bar{س})^2 \times ت$	$(س-\bar{س})^2$	ت	$س-\bar{س}$	س
٣١٢٥٠	١٥٦٢٥	٢	١٢٥	٤٧٤و٥
٢٢٥٠٠	٥٦٢٥	٤	٧٥	٤٢٤و٥
١٨٧٥	٦٢٥	٣	٢٥	٣٧٤و٥
٣٧٥٠	٦٢٥	٦	٢٥ -	٣٢٤و٥
١٦٨٧٥	٥٦٢٥	٣	٧٥ -	٢٧٤و٥
٣١٢٥٠	١٥٦٢٥	٢	١٢٥ -	٢٢٤و٥
١٠٧٥٠٠		٢٠	٠	المجموع

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س-\bar{س})^2 \times ت}{ن-١}} = \sqrt{\frac{١٠٧٥٠٠}{١٩}} = ٧٥و٢$$

١٠) إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات يساوي ٦٠ ، والانحراف المعياري لها يساوي ٤ ، وعدلت المشاهدات حسب العلاقة : $ص = ٥ - ٣س$

حيث س : المشاهدة قبل التعديل ،، ص : المشاهدة بعد التعديل ، جد ى:

أ) المشاهدة قبل التعديل التي أصبحت بعد التعديل - ١٥١ .

ب) المتوسط الحسابي ، و الانحراف المعياري ، والتباين للمشاهدات بعد التعديل .

الحل :

أ) ص = - ١٥١ ،،، المطلوب س = ؟؟؟ ، نعوض في العلاقة ص = ٥ ــ ٣ س

-١٥١ = ٥ ــ ٣س ← ٣س = ١٥٦ ← س = ٥٢ المشاهدة قبل التعديل

ب) $\bar{س}$ قبل = ٦٠ ،، نعوض في العلاقة ص = ٥ -٣س

$\bar{س}$ بعد = ٥ ــ ٣ × ٦٠ $\bar{س}$ ← بعد = - ١٧٥

ع قبل = ٤ ،، نعوض في العلاقة ع بعد $= |-٣|$ ع قبل (لا يتأثر بالجمع والطرح)

ع بعد $= |-٣|(٤) = ١٢$

التباين بعد $= ع^2$ بعد = ١٤٤

١١) إذا كان احتمال حضور مدير شركة ما قبل بدء الدوام (٨٥و٠) ، واحتمال حضور نائبه قبل بدء الدوام (٩و٠) ، واحتمال حضور واحد منهم على الأقل قبل بدء الدوام (٩٣و٠) ، فما احتمال :

أ) حضور المدير ونائبه قبل بدء الدوام معاً ؟

ب) حضور نائب المدير وحده قبل بدء الدوام ؟

الحل :

- حضور المدير : $ع_{1} \longleftarrow ل\left(ع_{1}\right) = ٠٫٨٥$
- حضور النائب : $ع_{2} \longleftarrow ل\left(ع_{2}\right) = ٠٫٩$
- حضور واحد منهم على الأقل : $ع_{1} \cup ع_{2} \longleftarrow ل\left(ع_{1} \cup ع_{2}\right) = ٠٫٩٣$

أ) احتمال حضور المدير ونائبه قبل بدء الدوام معاً ؟ $\longleftarrow ل\left(ع_{1} \cap ع_{2}\right) = ؟؟$

$$ل\left(ع_{1} \cap ع_{2}\right) = ل\left(ع_{1}\right) + ل\left(ع_{2}\right) - ل\left(ع_{1} \cup ع_{2}\right)$$
$$ل\left(ع_{1} \cap ع_{2}\right) = ٠٫٨٥ + ٠٫٩٠ - ٠٫٩٣ = ٠٫٨٢$$

ب) احتمال حضور نائب المدير وحده قبل بدء الدوام ؟ $ل\left(ع_{2} - ع_{1}\right) = ؟؟ \longleftarrow$

$$ل\left(ع_{2} - ع_{1}\right) = ل\left(ع_{2}\right) - ل\left(ع_{1} \cap ع_{2}\right)$$
$$ل\left(ع_{2} - ع_{1}\right) = ٠٫٩٠ - ٠٫٨٢ = ٠٫٠٨$$

١٢) صندوقان الأول فيه (٥) كرات سوداء ، و (٣) كرات بيضاء ، والثاني فيه : (٤) كرات سوداء ، و (٤) كرات بيضاء ، وجميع الكرات في الصندوقين متماثلة :

أ) إذا سحبت كرة واحدة من كل صندوق ، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاويين ؟

ب) إذا سحبت كرتان من الصندوق الأول على التوالي ، دون إرجاع ، فما احتمال أن تكونا مختلفتي اللون ؟

الحل :

الصندوق الأول		الصندوق الثاني	
سوداء	بيضاء	سوداء	بيضاء
س	ب	س	ب
٥	٣	٤	٤
المجموع ٨		المجموع ٨	

أ) ل (بيضاء من الأول و بيضاء من الثاني) = ل (بيضاء من ١) × ل (بيضاء من ٢)

$= \frac{٤}{٨} \times \frac{٣}{٨} = \frac{٣}{١٦}$ **الحادثان مستقلان**

ب) سحب كرتان من الصندوق الأول على التوالي دون إرجاع ⟵ لا يوجد استقلال بين الحادثين

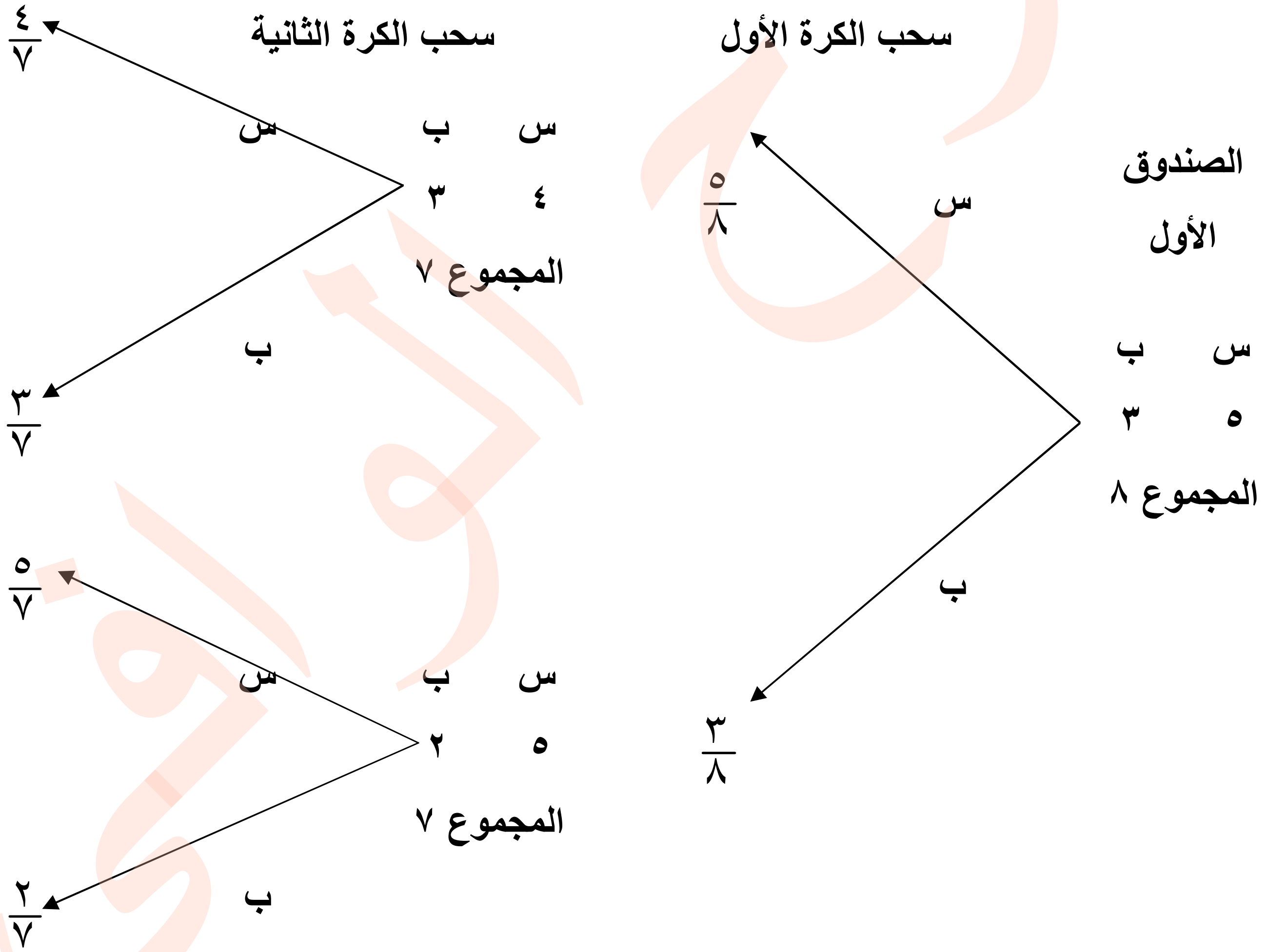
ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ؟؟

ل (الأولى بيضاء و الثانية سوداء) + ل (الأولى سوداء و الثانية بيضاء) =

ل (١بيضاء) × ل (٢سوداء بشرط ١بيضاء) + ل (١سوداء) × ل (٢بيضاء بشرط ١سوداء)

$$= \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} + \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٣٥}{٥٦}$$

الحل عن طريق الشجرة :



تم بحمد الله

نهاية الوحدة السابعة