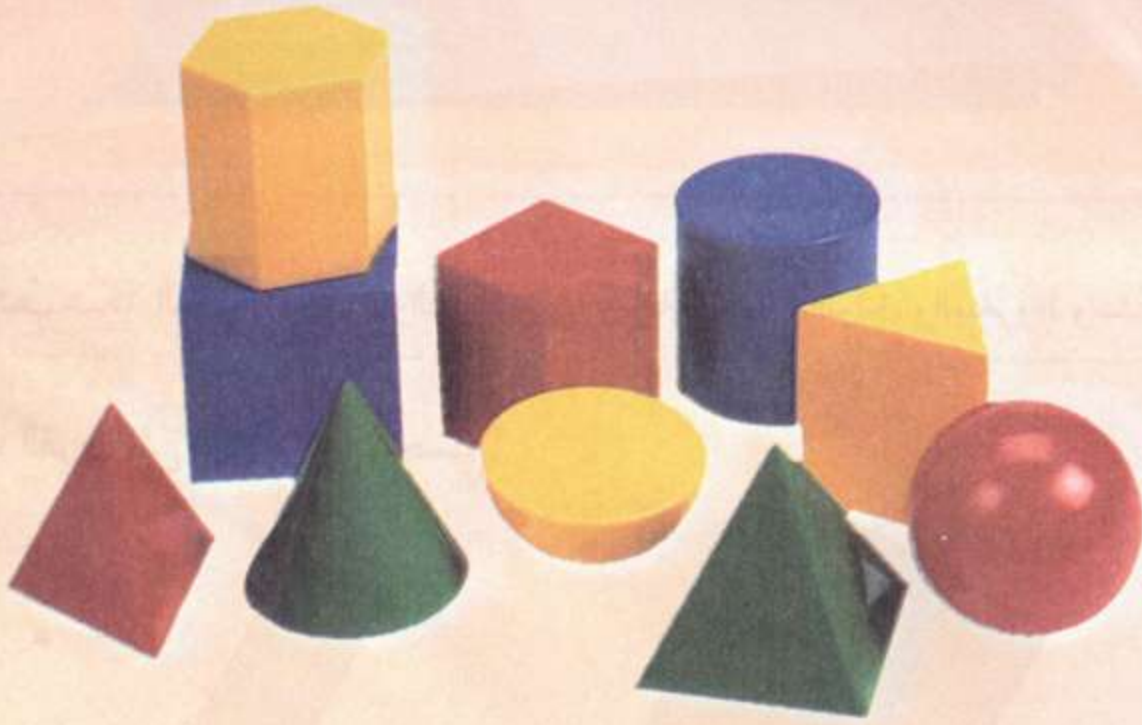


الوحدة الثامنة

المجسمات

نستخدم في حياتنا اليومية مجسمات مثل العلب والصناديق، وللتعامل مع هذه الأشياء بشكل سليم وصحيح من حيث التصميم والسعة والتخزين والتوزيع والعرض؛ فلا بد من دراسة خصائصها، بالإضافة إلى أن هنالك العديد من الأشياء منها ما هو مسطح (ثنائي الأبعاد) وما هو مجسم (ثلاثي الأبعاد). ومن أجل بناء الفهم الصحيح لبنية الأشكال والمجسمات، يحتاج الطلبة إلى خبرات تعليمية تتعلق بالأشكال ثنائية الأبعاد، والمجسمات ثلاثية الأبعاد، ليتوصلوا إلى أن الأسطح المستوية (ثنائية الأبعاد)، تكون عند طيها مجسمات (ثلاثية الأبعاد).

إن فهم المجسمات (المنشور، الهرم، الأسطوانة، والمخروط، والكرة)، والصيغ المتعلقة بحجومها ومساحات سطحها يساعد في حل العديد من المشكلات.



يتوقع من الطالب في نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

▶ اكتشاف شبكة المنشور الثلاثي، والهرم الثلاثي، والرباعي، والأسطوانة، والمخروط، وإنشائها.

▶ استقصاء صيغة لحجم المنشور الثلاثي، ومساحة سطحه.

▶ تعرف صيغة لحجم الأسطوانة، ومساحة سطحها.

▶ استقصاء صيغة لحجم المخروط، ومساحة سطحه.

▶ استقصاء صيغة لحجم الهرم الثلاثي، والرباعي، ومساحة سطحه.

▶ استقصاء صيغة لحجم الكرة، ومساحة سطحها.

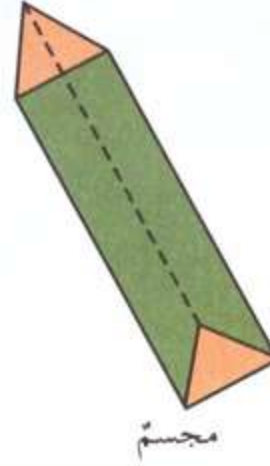
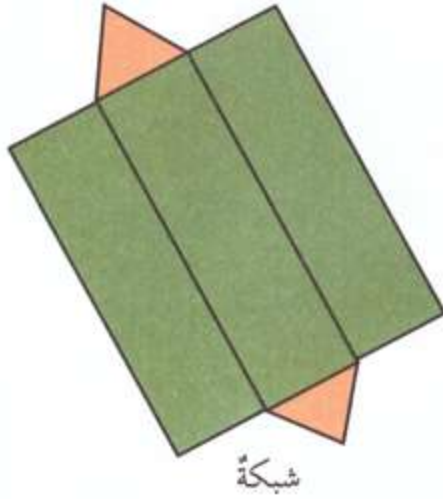
▶ استقصاء تأثير التغير في أبعاد المجسم على مساحة سطحه، وحجمه.

▶ حل مسائل حياتية على المساحات والحجوم.

النتائج

- تكتشف شبكة المنشور الثلاثي، والهرم الثلاثي والرباعي، والأسطوانة، والمخروط وتنشئها.

ما الفرق بين الشبكة والمجسم؟



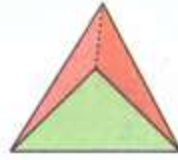
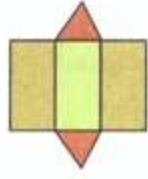
أكمل الفراغ في الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X)، للإجابة عن السؤال أعلاه:

ثلاثي الأبعاد	ثنائي الأبعاد	
		الشبكة
		المجسم

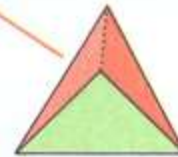
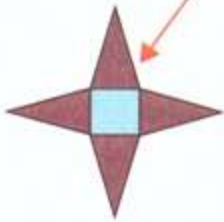
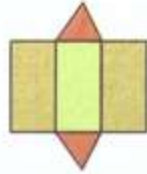
الشبكة: مسطح مستوي (ثنائي الأبعاد)، يمكن أن يطوى لعمل مجسم (ثلاثي الأبعاد)، وتتكون الشبكة من القاعدة، والأسطح (الأوجه)، والرووس.

مثال (١)

صل كل مجسم بشبكته في ما يأتي:



الحل



تدريب

أنا مجسم شبكتي تتكون من مستطيل، وأربعة مثلثات متطابقة الضلعين، عند طيها تلتقي رؤوسها في نقطة واحدة، فمن أنا؟ وماذا تسمى نقطة الالتقاء؟



- (١) ارسم شبكة المجسم الوارد في تدريب (١).
- (٢) اطو الشبكة لتشكّل المجسم.
- (٣) قارن منتجك بمنتج زملائك.

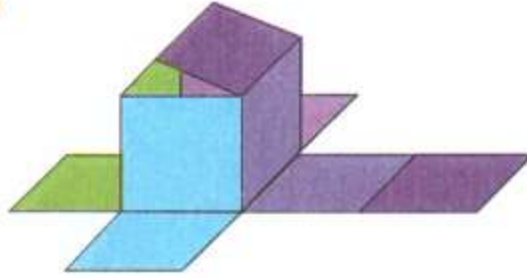
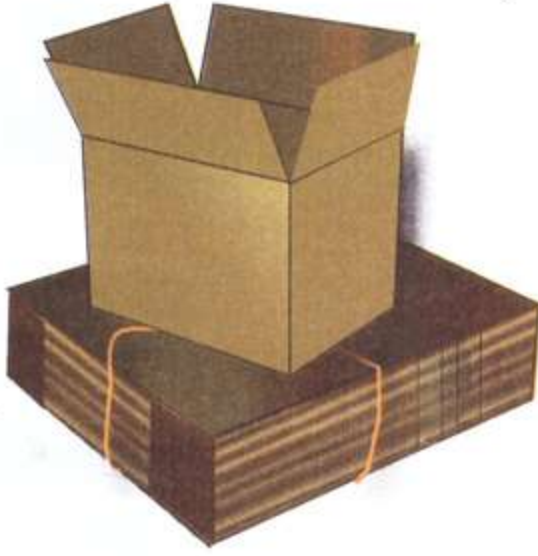
مثال (٢)

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

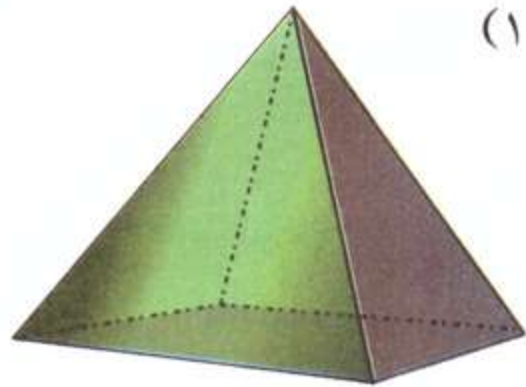
المجسم	اسم المجسم	شكل القاعدة	عدد القواعد	شكل الأوجه الجانبية
				مستطيلات
	هرم ثلاثي			
			قاعدة واحدة	



عبّر بلغتك الخاصة عما تراه في الصور أدناه.

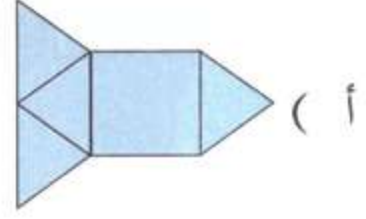


ارسم شبكة لكل مجسم من المجسمات الآتية:

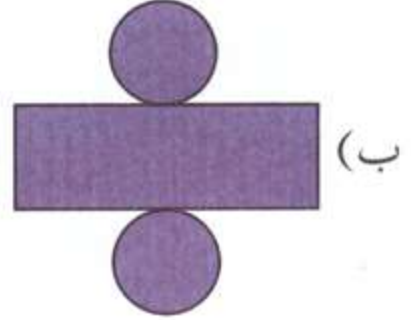


(١) اكتب اسم المجسم الذي تكوّنهُ كلُّ شبكةٍ مما يأتي:

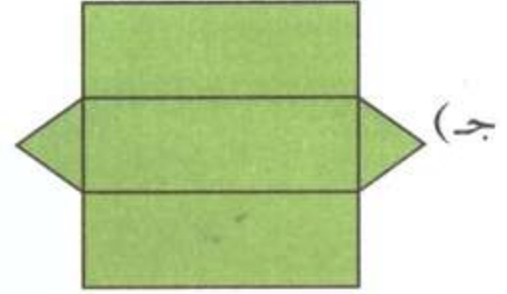
اسم المجسم هو:



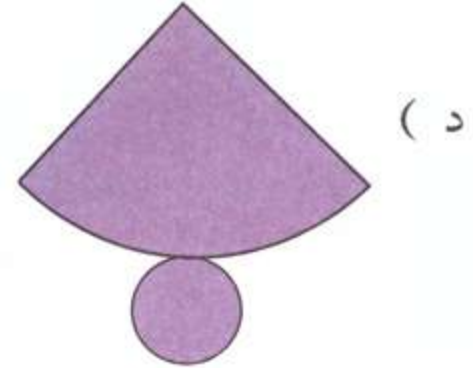
اسم المجسم هو:



اسم المجسم هو:



اسم المجسم هو:



(٢) ارسم شبكة لكل مجسم مما يأتي ، ثم قارن منتجك بمنتجات زملائك:

(ج) هرم رباعي

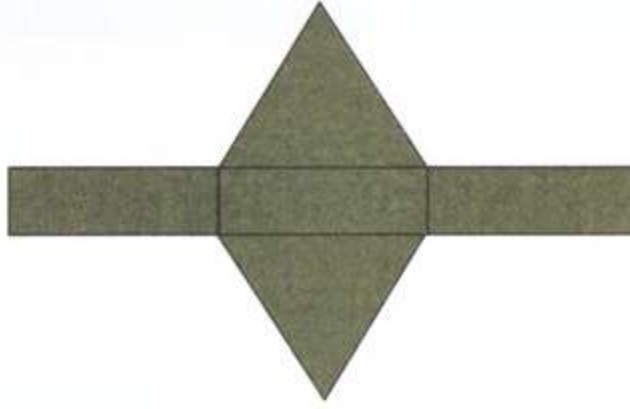
(ب) هرم ثلاثي

(أ) منشور ثلاثي

(هـ) مخروط

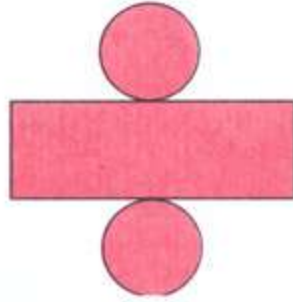
(د) أسطوانة

٣) كلف معلم الرياضيات الطالب سعيداً برسم شبكة هرم ثلاثي، فرسم الطالب الشبكة الآتية:



هل تتفق مع ما رسمه سعيد؟ مبرراً إجابتك.

٤) طلبت معلمة الرياضيات رسم شبكة لمجسم الأسطوانة، فرسمت راما الشبكة (أ)، ورسمت ريم الشبكة (ب):



(ب)



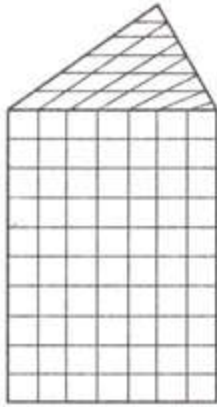
(أ)

هل تتفق مع ما رسمته كل من راما، وريم؟ مبرراً إجابتك.

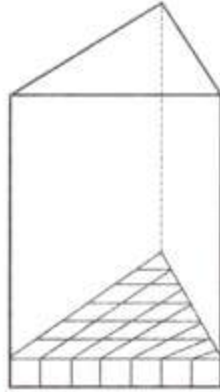
النتائج

- تستقصي صيغة لحجم المنشور الثلاثي القائم، ومساحة سطحه.
- تحل مسائل حياتية على المساحات والحجوم.

نشاط



شكل (٢)



شكل (١)

(١) ما عدد الوحدات المكعبة -تقريبًا- التي تغطي قاعدة المنشور في شكل (١)؟ ماذا يمثل عدد الوحدات بالنسبة إلى قاعدة المنشور؟

(٢) إذا ملئ المنشور بالوحدات المكعبة كما هو موضح في الشكل (٢)، ما عدد الطبقات التي تملأ المنشور؟ ماذا يمثل عدد الطبقات بالنسبة إلى المنشور؟ (٣) ما حجم المنشور؟

تعلمت سابقاً أن:

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع
ومتوازي المستطيلات ما هو إلا منشور رباعي، والفرق بين المنشور الرباعي والمنشور الثلاثي يكمن في شكل القاعدة فقط، وعليه فإن:
حجم المنشور الثلاثي = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

تذكر

$$\text{مساحة المنطقة المثلثة} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مثال (١)

جد حجم المنشور الثلاثي المجاور.

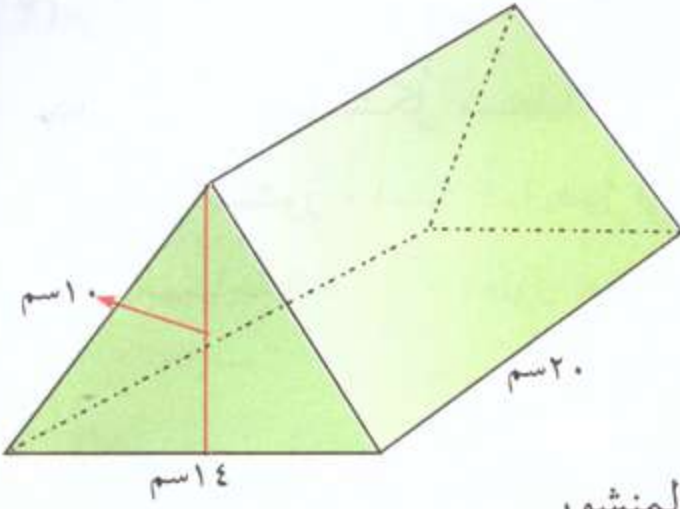
الحل

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times 14 \times 10 =$$

$$= 70 \times 10 = 700 \text{ سم}^2$$

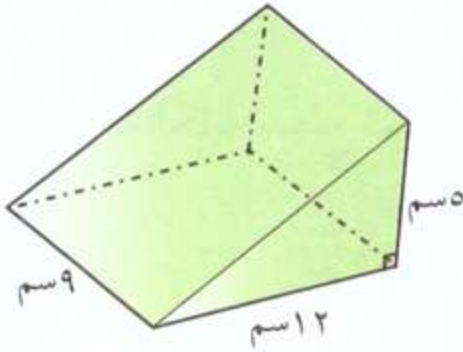
حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ ارتفاع المنشور

$$= 700 \times 20 = 14000 \text{ سم}^3$$



تدريب ١

جد حجم المنشور الثلاثي المجاور.



مثال (٢)

للمنشور الثلاثي المجاور:

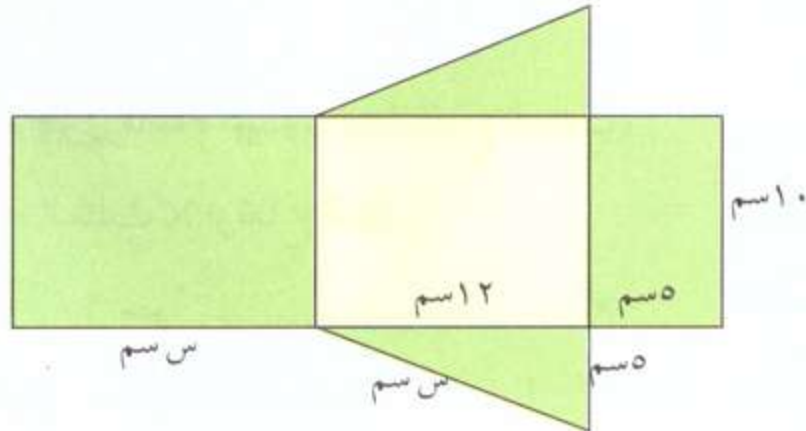
(١) ارسم شبكة للمنشور.

(٢) احسب المساحة الكلية لسطح المنشور،

ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

(١)



لماذا؟

$$(2) \text{ س}^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \text{ ، ومنه س} = 13.$$

الأوجه الجانبية تشكل مستطيلاً طوله يساوي $(5 + 12 + 13)$ ، وعرضه يساوي ارتفاع المنشور 10 سم، كما يظهر في الشبكة.

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \text{الطول} \times \text{العرض} \quad \text{المساحة الجانبية} = \text{مساحة المستطيل}$$

$$= \text{محيط قاعدة المنشور} \times \text{ارتفاع المنشور}$$

$$= 10 \times (13 + 12 + 5) =$$

$$= 10 \times 30 = 300 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث} \quad \text{القاعدة مثلثة الشكل}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية لسطح المنشور} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$= 300 + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 300 + 2 \times 30 =$$

$$= 360 + 60 = 360 \text{ سم}^2$$

التحقق من صحة الحل:

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{مساحة الوجه الأول} + \text{مساحة الوجه الثاني} + \text{مساحة الوجه الثالث}$$

$$= (10 \times 13) + (10 \times 12) + (10 \times 5) =$$

$$= 130 + 120 + 50 = 300 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

$$\text{مساحة القاعدتين} = 2 \times \text{مساحة القاعدة}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث} \right)$$

$$= \text{طول قاعدة المثلث} \times \text{ارتفاع المثلث}$$

$$= 12 \times 5 = 60 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية لسطح المنشور} = 360 + 60 = 360 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

نستنتج مما سبق أن:

المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة $\times$ ارتفاع المنشور
المساحة الكلية لسطح المنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

تدريب ٢

منشور ثلاثي مساحة سطحه الكلية ٤٨ سم^٢، ومساحته الجانبية ٣٦ سم^٢. جد مساحة قاعدته.

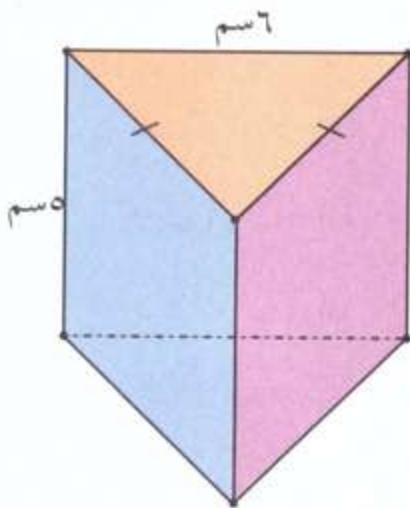
(١) منشور ثلاثي أطوال قاعدته على التوالي هي: ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم، وارتفاعه ١١ سم. جد كلاً مما يأتي:

(أ) حجمه.

(ب) مساحة سطحه الكلية.

(٢) منشور ثلاثي حجمه ٢٨ م^٣، ومساحة قاعدته ٧ م^٢. جد ارتفاعه.

(٣) منشور ثلاثي مساحته الجانبية $\frac{1}{3}$ ٣١ سم^٢، وارتفاعه $\frac{1}{3}$ ٤ سم. جد محيط قاعدته.

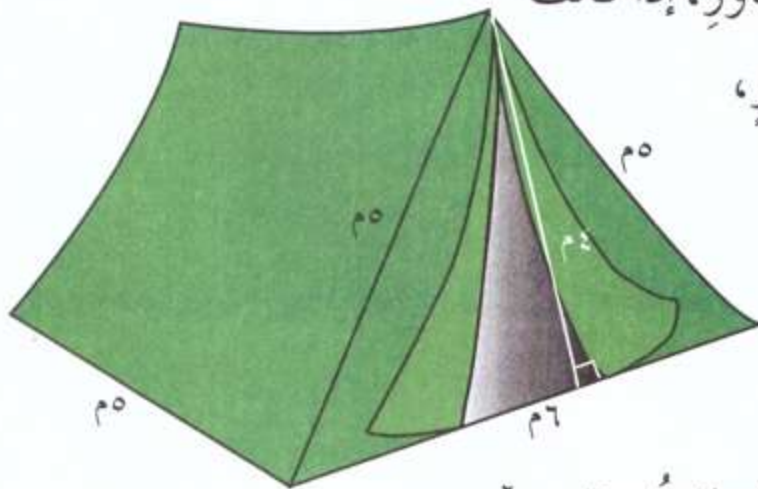


(٤) يمثل الشكل المجاور منشورًا ثلاثيًا مساحته

الجانبية ٨٠ سم^٢، وارتفاعه ٥ سم، وقاعدته على

شكل مثلث متطابق الضلعين، طول قاعدته ٦ سم.

جد مساحة سطحه الكلية.



(٥) ينتج مصنع خيمًا كما في الشكل المجاور، إذا كانت

تكلفة المتر المربع الواحد ١,٥ دينار،

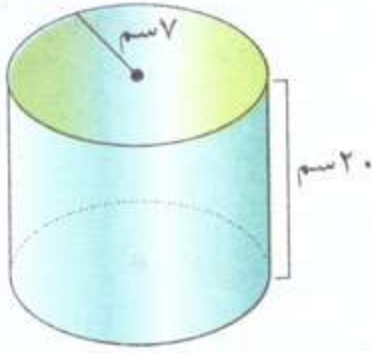
جد تكلفة ٩ خيم من النوع نفسه.

(٦) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الجانبية ٦٠ سم^٢.

(٧) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الكلية ٦٠ سم^٢.

النتائج

• تتعرف صيغة لحجم الأسطوانة، ومساحة سطحها.



جد حجم عبوة دهان أسطوانية الشكل، مستخدماً الأبعاد الموضحة في الشكل المجاور.

تعلمت في الدرس السابق أن: حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع، ولإيجاد حجم عبوة الدهان المطروحة في مقدمة الدرس، نستخدم القانون:

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

القاعدة على شكل دائرة

$$\text{حجم الأسطوانة} = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

$$20 \times (7)^2 \times \frac{22}{7} \approx$$

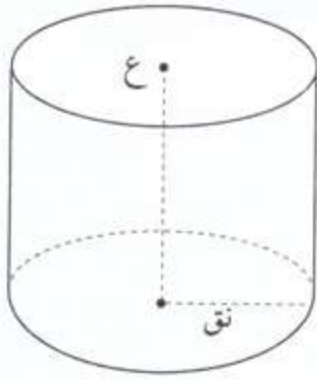
$$20 \times 7 \times 22 \approx$$

$$\therefore \text{حجم عبوة الدهان} \approx 3080 \text{ سم}^3.$$

١ تدريب

علبة حليب للأطفال على شكل أسطوانة، حجمها ١٨٠٠ سم^٣، وارتفاعها ٢٠ سم. جد مساحة قاعدتها.

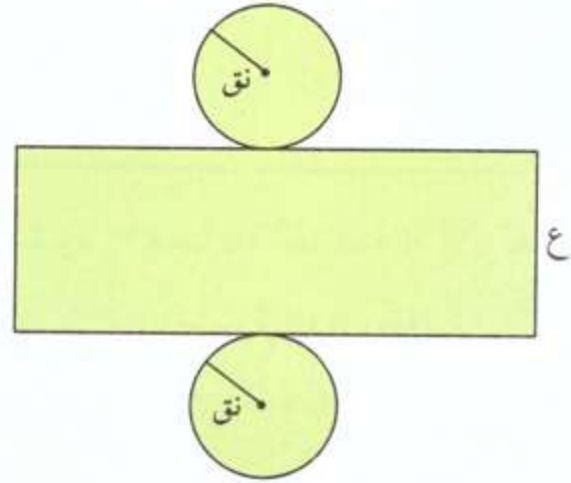
مثال (١)



- معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل أسطوانة، أجب عما يأتي:
- (١) ارسم شبكة تقريبية لها.
 - (٢) جد مساحة سطحها الكلية إذا كان نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ١٦ سم، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

(١)



(٢) مساحة السطح الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

لماذا؟

$$= (\text{الطول} \times \text{العرض}) + ٢ \times \text{مساحة القاعدة}$$

لماذا؟

$$= (\text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}) + ٢ \times \pi \times \text{نق}^2$$

$$= ٢ \times \pi \times \text{نق} \times \text{ع} + ٢ \times \pi \times \text{نق}^2$$

$$\approx (٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢ + (١٦ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢))$$

$$\approx ١٠١٢ \text{ سم}^2$$

التحقق من صحة الحل:

لماذا؟

$$\text{مساحة السطح الكلية} = ٢ \times \pi \times (\text{ع} + \text{نق})$$

$$\approx (٧ + ١٦) \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢$$

$$23 \times 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \approx$$

$$\approx 23 \times 44 = 1012 \text{ سم}^2.$$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \pi r^2 h$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= 2\pi r h$$

المساحة الكلية لسطحها = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة

$$= 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (h + r)$$

تدريب ٢

أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها ٢٨ سم، وارتفاعها ٣ سم:

(١) ارسم شبكة تقريبية لهذه الأسطوانة.

(٢) جد مساحة سطحها الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

مثال (٢)

أسطوانة دائرية قائمة مساحة سطحها الكلية ٤٨ سم^٢، ومساحتها الجانبية ٣٦ سم^٢، جد مساحة قاعدتها.

الحل

لماذا؟

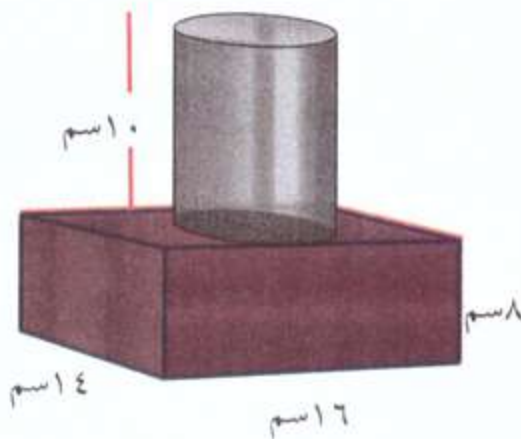
$$\begin{aligned} \text{مساحة القاعدة} &= (\text{مساحة السطح الكلية} - \text{المساحة الجانبية}) \div 2 \\ &= 2 \div (36 - 48) = \\ &= 12 \div 2 = 6 \text{ سم}^2. \end{aligned}$$

تدريب ٣

أسطوانة دائرية مساحة سطحها الكلية ٧٢ سم^٢، ومساحة قاعدتها ١٦ سم^٢. جد مساحتها الجانبية.

مثال (٣)

جد حجم المجسم المركب في الشكل المجاور علمًا أن طول قطر الأسطوانة يساوي عرض متوازي المستطيلات.



الحل

حجم متوازي المستطيلات (وهو منشور رباعي)

$$8 \times 14 \times 16 =$$

$$= 1792 \text{ سم}^3.$$

قطر الأسطوانة = ١٤ سم.

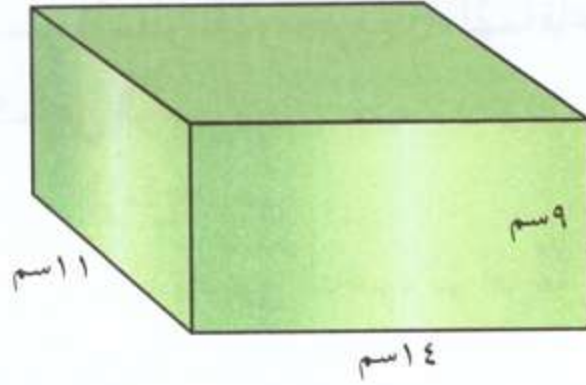
$$\text{حجم الأسطوانة} = \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع} \approx \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 10 =$$

$$\approx 1540 \text{ سم}^3.$$

حجم المجسم المركب = حجم متوازي المستطيلات + حجم الأسطوانة

$$\approx 1792 + 1540 \approx 3332 \text{ سم}^3.$$

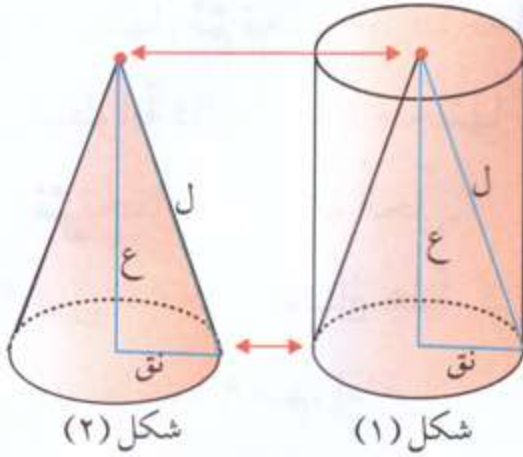
- (١) أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٠ سم، وارتفاعها ٤ سم. جد حجمها، ومساحة سطحها الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.
- (٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٢٨, ٦ سم^٣، ارتفاعها ٢٠ سم، جد طول نصف قطر قاعدتها. ثم تحقق من صحة الحل، معتبراً $(\pi = 3, 14)$.
- (٣) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٥٢ سم^٣، وطول قطر قاعدتها ٨ سم، جد ارتفاعها. ثم تحقق من صحة الحل.
- (٤) يبين الشكل أدناه علبة كرتونية، طول قاعدتها ١٤ سم، وعرضها ١١ سم، وارتفاعها ٩ سم. إذا قررت الشركة المصنعة استعمال تصميم جديد للعلبة بالحجم نفسه والارتفاع نفسه، ولكن بشكل أسطواني، فجد طول قطر قاعدة الأسطوانة الذي يمكن استعماله.



- (٥) ادعى عمر أن حجم أسطوانة نصف قطرها ٥ سم، وارتفاعها ١٢ سم يساوي حجم أسطوانة أخرى نصف قطرها ١٠ سم، وارتفاعها ٦ سم. ناقش ادعاء عمر، مبرراً إجابتك.

النتائج

• تستقضي صيغة لحجم المخروط القائم، ومساحة سطحه.



ماذا يمثل شكل (١)؟

ماذا يمثل شكل (٢)؟

ما العلاقة بينهما؟

هل يمكنك صنع مجسمين لهما المواصفات

نفسها؟

نشاط (١)

(١) أحضر مجسمين (أسطوانة، ومخروطاً)، لهما قاعدتان متساويتان، وارتفاعان

متساويان كما في الرسم أعلاه، بحيث يكونان مفرغين من الداخل.

(٢) أحضر كمية من الرمل الناعم.

(٣) املا المخروط تماماً بالرمل الناعم، ثم أفرغه في الأسطوانة. كرر العملية حتى تمتلئ الأسطوانة تماماً.

(٤) كم عدد المرات التي لزمّت لملء الأسطوانة تماماً؟

(٥) ماذا تستنتج؟

تعلمت سابقاً أن: حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h$

ولاحظ أنك احتجت إلى ملء المخروط القائم ٣ مرات تماماً، لكي تملأ الأسطوانة

تماماً، وهذا يعني أن:

حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

نستنتج أن: حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

حيث: نق: نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

ع: ارتفاع المخروط القائم.

π : النسبة التقريبية وتُقَرَّبُ بـ $\frac{22}{7}$ أو ٣,١٤.

مثال (١)

جد حجم المخروط القائم الموضح جانبًا.

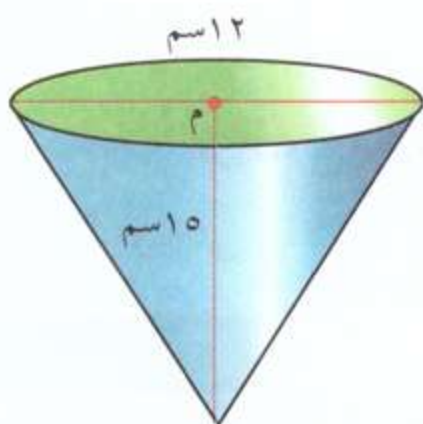
الحل

حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 10$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 10$$

$$= 12 \times 10 \times \pi = 180 \pi \text{ سم}^3$$



تدريب ١

مخروط دائري قائم مساحته قاعدته ٣١٤ سم^٢، وارتفاعه ٩ سم. جد:

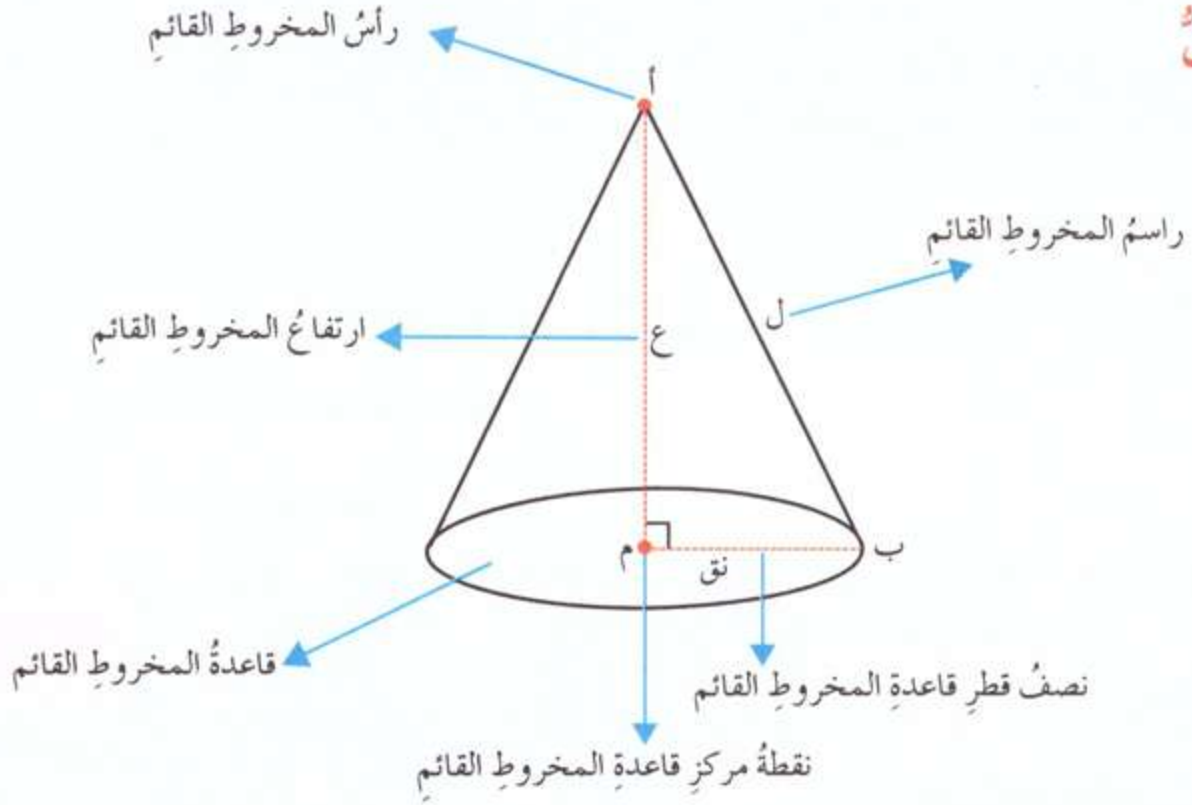
(١) حجم المخروط القائم.

(٢) نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

مثال (٢)

ارسم مجسم مخروط قائم، وعيّن عليه نصف قطر القاعدة نق، وارتفاعه ع، وراسمه ل،

ثم حدّد من الرسم العلاقة بين ل، ع، نق؟



العلاقة بين $ل$ ، $ع$ ، $نق$ ، هي $ل^2 = ع^2 + نق^2$ (مبرهنة فيثاغورس)؛ لأن المثلث $أ م ب$ قائم الزاوية في $م$.

تدريب ٢

مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، وطول قطري قاعدته ١٠ سم. جد حجم المخروط القائم وطول راسمه.

نشاط (٢)

- (١) أحضر مجسم مخروط قائم مصنوع من الكرتون.
- (٢) قص المخروط القائم على طول أحد الرواسم. ماذا نسمي الشكل الناتج؟
- (٣) ما العلاقة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم، ومساحة القطاع الدائري الناتج من قص المخروط القائم على طول أحد الرواسم (شبكة المخروط القائم).

المساحة الجانبية للمخروط القائم تُستنتج من مساحة القطاع الدائري.

المساحة الجانبية للمخروط القائم πl نق، حيث:

ل: طول راسم المخروط القائم.

نق: نصف قطر قاعدة المخروط القائم.

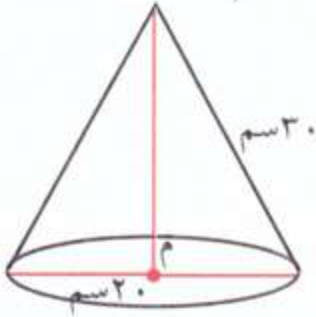
المساحة الكلية لسطح المخروط القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

$$\pi l \text{ نق} + \pi \text{ نق}^2 =$$

$$\pi \text{ نق} (ل + \text{نق}) =$$

مثال (٣)

مخروط دائري قائم طوله ٢٠ سم، وطوله راسمه ٣٠ سم، جذ مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.



الحل

المساحة الكلية لسطح المخروط القائم $\pi \text{ نق} (ل + \text{نق})$

$$(10 + 30) 10 \times \pi =$$

$$40 \times 10 \times \pi = 400 \pi \text{ سم}^2.$$

التحقق من صحة الحل:

المساحة الجانبية للمخروط القائم $\pi l \text{ نق} = 10 \times 30 \times \pi = 300 \pi \text{ سم}^2.$

مساحة القاعدة $\pi \text{ نق}^2 = 10 \times 10 \times \pi = 100 \pi \text{ سم}^2.$

المساحة الكلية لسطح المخروط القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

$$400 \pi \text{ سم}^2 = 100 \pi + 300 \pi =$$

تدريب ٢

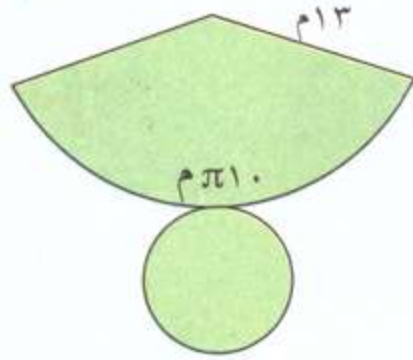
مخروط دائري قائم طوله نصف قطر قاعدته ٥ سم، وارتفاعه ١٢ سم، جذ مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

- (١) جد حجم مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٢٠ م، وارتفاعه ٢٥ م.
- (٢) مخروط دائري قائم، حجمه 360π سم^٣، وارتفاعه ٩ سم. جد طول نصف قطره قاعدته.

- (٣) مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم، جد كلاً مما يأتي:
- أ (حجم المخروط.
- ب) مساحته الجانبية.

ج) مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

- (٤) الشكل المجاور يمثل شبكة مخروط دائري قائم طول راسمه ١٣ مترًا، ومحيط قاعدته 10π متر، جد كلاً مما يأتي:



أ (حجم المخروط.

ب) مساحته الجانبية.

ج) مساحة سطحه الكلية، ثم تحقق من صحة الحل.

- (٥) أسطوانة، ومخروط لهما الحجم نفسه والارتفاع نفسه، إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ٤ سم، وارتفاعها ١٨ سم. فجد طول نصف قطر قاعدة المخروط؟

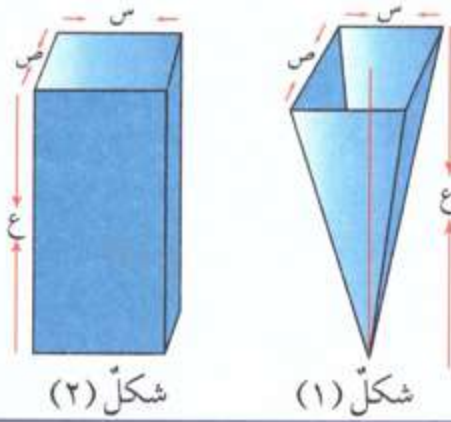
- (٦) قبة على شكل مخروط، حجمها 180π سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول الراسم، ثم تحقق من صحة الحل.

- (٧) هل يبقى حجم المخروط ثابتًا، إذا أضفنا واحدًا إلى نصف القطر، وطرحنا واحدًا من الارتفاع؟ مبررًا إجابتك.

- (٨) أثبت أن: المساحة الجانبية للمخروط $= \pi l$ نق، حيث l طول راسم المخروط، نق نصف قطر قاعدته.

النتائج

- تستقضي صيغة لحجم الهرم الثلاثي القائم، والرباعي القائم، ومساحة سطح كل منهما.



ماذا يمثل شكل (١)؟

ماذا يمثل شكل (٢)؟

ما العلاقة بينهما؟ هل يمكنك صنع مجسمين لهما المواصفات نفسها؟

نشاط (١)

- (١) أحضر مجسمين (هرمًا رباعيًا، منشورًا رباعيًا)، مشتركين في أبعاد القاعدة والارتفاع، كما في الرسم أعلاه، بحيث يكونان مفرغين من الداخل.
- (٢) أحضر كمية من الرمل الناعم.
- (٣) املا الهرم تمامًا بالرمل الناعم، ثم أفرغه في المنشور. كرر العملية حتى يمتلئ المنشور تمامًا.
- (٤) كم عدد المرات التي لزم ملء المنشور تمامًا؟
- (٥) ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك لاحظت حاجتك إلى ملء الهرم ٣ مرات تمامًا، لكي تملأ المنشور تمامًا، وهذا يعني أن: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

$$\text{حجم الهرم القائم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مثال (١)

جد حجم الهرم القائم الموضح جانباً.

الحل

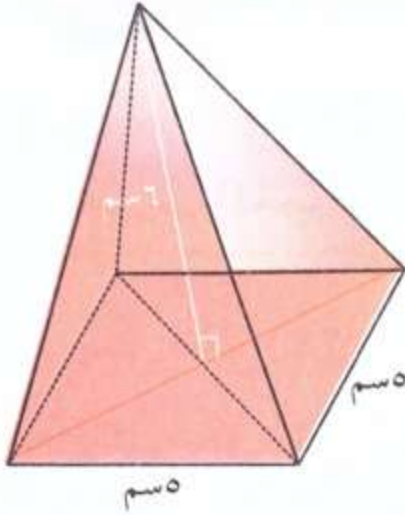
حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 6$$

$$= \frac{1}{3} \times 25 \times 6$$

$$= 25 \times 2$$

$$= 50 \text{ سم}^3$$



تدريب ١

هرم قائم ثلاثي ارتفاعه ١٥ م، وقاعدته على شكل مثلث طول قاعدته ١٠ سم. جد حجمه.

نشاط (٢)



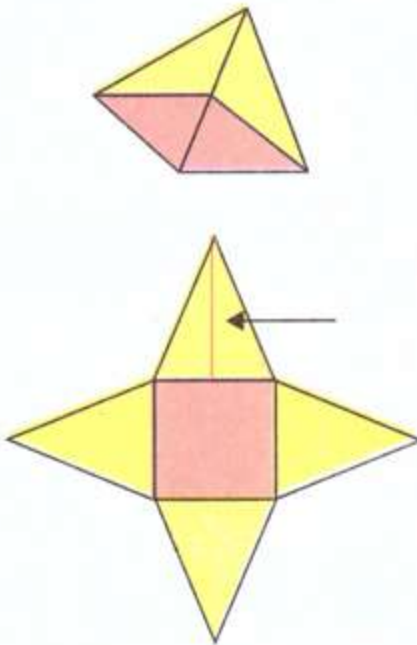
(١) أحضر مجسم هرم قائم مصنوع من الكرتون.

(٢) قص الهرم لتحصل على شبكته.

(٣) ما العلاقة بين ارتفاع كل وجه جانبي والارتفاع الجانبي للهرم القائم؟

(٤) ما العلاقة بين المساحة الجانبية للهرم، ومجموع مساحات الأوجه الأربعة التي تشكل مثلثات متطابقة الضلعين، ولها الارتفاع نفسه؟

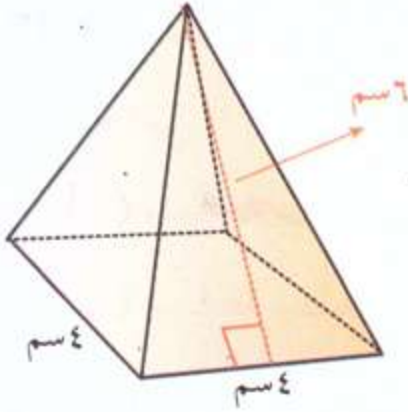
ماذا تلاحظ؟



المساحة الجانبية لسطح الهرم القائم = مجموع مساحات الأوجه.

$$= \frac{1}{3} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم القائم}$$

المساحة الكلية لسطح الهرم القائم = المساحة الجانبية للهرم + مساحة القاعدة



مثال (٢)

جد المساحة الجانبية والكلية لسطح الهرم القائم الموضح جانباً.

الحل

المساحة الجانبية لسطح الهرم القائم

$$= \frac{1}{3} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم القائم}$$

$$= \frac{1}{3} \times (4 + 4 + 4 + 4) \times 6$$

$$= 48 \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية لسطح الهرم القائم = المساحة الجانبية للهرم القائم + مساحة القاعدة

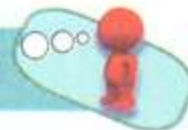
$$= 48 + 4 \times 4$$

$$= 64 \text{ سم}^2$$

تدريب ٢

هرم ثلاثي قائم طول ضلع قاعدته 6 سم، وارتفاعه الجانبي 8 سم. جد مساحة سطحه الجانبية، ثم تحقق من صحة الحل.

تحدث

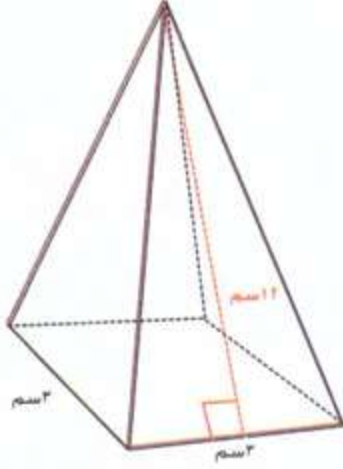


ما أوجه الشبه والاختلاف بين الهرم الثلاثي القائم والهرم الرباعي القائم؟

(١) جد حجم هرم قائم ارتفاعه ١٧ مترًا، وقاعدته مربع الشكل طول ضلعها ٢٢ مترًا.

(٢) جد ارتفاع شمعة على شكل هرم قائم، حجمها ٨٤٧ سم^٣، ومساحة قاعدتها

١٢١ سم^٢.



(٣) هرم قائم ثلاثي طول ضلع قاعدته ٣ سم، وارتفاعه

الجانب ١٢ سم، كما هو موضح جانبًا، جد:

أ) مساحة سطحه الجانبية.

ب) مساحة سطحه الكلية.



(٤) الهرم الأكبر "خوفو" من أهرامات الجيزة في

مصر، يبلغ ارتفاعه ١٤٦,٥ مترًا، وقاعدته

مربعة الشكل طول ضلعها ٢٣٠ مترًا. جد

حجمه.



(٥) الشكل الموضح جانبًا يمثل هرمًا رباعيًا

قاعدته مستطيلة الشكل طولها ١٥ م، وعرضها

١٠ م، ومساحتها الجانبية ٢٢٥ م^٢. جد ارتفاعه

الجانب.

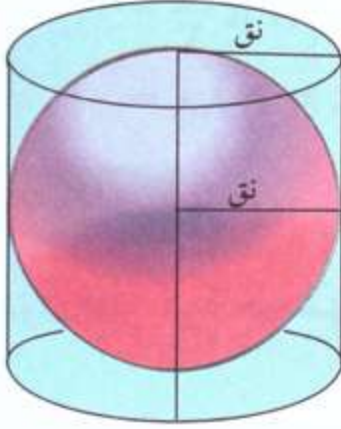
(٦) ارسم شبكة لهرم ثلاثي بحيث تكون مساحته

الجانبية (٦٠) سم^٢.

(٧) ارسم شبكة لهرم رباعي بحيث تكون مساحته الكلية (٦٠) سم^٢.

النتائج

• تستقضي صيغة لحجم الكرة ، ومساحة سطحها.



- (١) ماذا يمثل الشكل المجاور؟
- (٢) ما العلاقة بين نصف قطر الكرة ونصف قطر الأسطوانة؟
- (٣) ما العلاقة بين نصف قطر الكرة وارتفاع الأسطوانة؟
- (٤) ما حجم الكرة؟

أثبت أرخميدس أن حجم الكرة يساوي $\frac{2}{3}$ حجم الأسطوانة المحيطة بها كما في الشكل أعلاه، وعليه فإن:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{2}{3} \times \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

وبما أن:

- (١) نصف قطر الأسطوانة = نصف قطر الكرة
 - (٢) ارتفاع الأسطوانة = $2 \times \text{نصف قطر الكرة}$
- إذن: حجم الكرة = $\frac{2}{3} \times \pi \times \text{نق}^2 \times 2 \times \text{نق}$
- $$= \frac{4}{3} \times \pi \times \text{نق}^3$$

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \times \pi \times \text{نق}^3$ حيث نق نصف قطر الكرة

مثال (١)

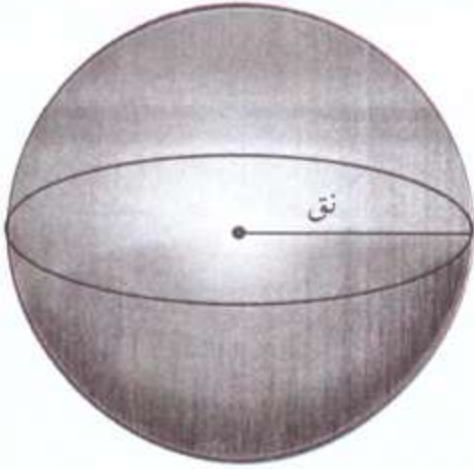
كرة طول نصف قطرها ٦ سم . جد حجمها .

الحل

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3$$

$$= 288 \pi \text{ سم}^3$$



تدريب ١

جد طول قطر كرة حجمها $\frac{5000}{3} \pi$ سم^٣.

نشاط

(١) أحضر برتقالة على شكل كرة قدر الإمكان، وقسمها إلى نصفين.



(١) ب



(١) أ



(٢)

(٢) ارسم أربع دوائر مستخدماً البرتقالة بنفسها.



(٣)

(٣) قشّر البرتقالة تمامًا إلى قطع صغيرة واستخدم قشّر البرتقالة لتغطية الدوائر الأربع.



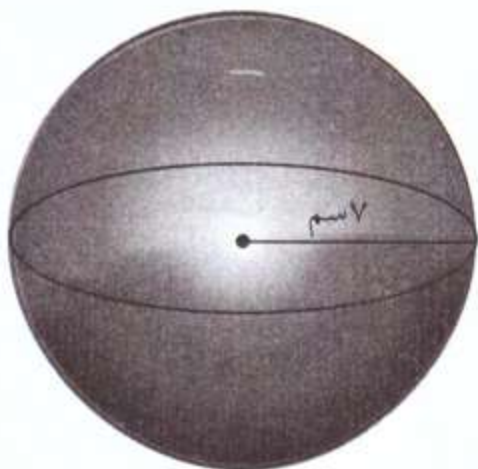
(٤)

٥) من الشكل (٤) ماذا تستنتج؟

تعلمت سابقاً أنّ مساحة الدائرة $= \pi \text{ نق}^2$ ، وأنّ قشر البرتقالة غطّى الدوائر الأربع تماماً، وهذا يعني أنّ: مساحة سطح الكرة $= 4 \times \text{مساحة الدائرة}$
 $= 4 \pi \text{ نق}^2$.

مساحة سطح الكرة $= 4 \pi \text{ نق}^2$ ، حيث نق نصف قطر الكرة.

مثال (٢)



جدّ مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ٧ سم.

الحلّ

مساحة سطح الكرة $= 4 \pi \text{ نق}^2$

$$\approx 4 \times \frac{22}{7} \times 7^2$$

$$\approx 616 \text{ سم}^2$$

تدريب ٢

جدّ مساحة سطح كرة، طول نصف قطرها ٢٠ سم.

مثال (٣)

جد طول نصف قطر كرة مساحة سطحها 784π سم^٢.

الحل

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$

$$784\pi = 4\pi \times r^2$$

$$784 = 4r^2$$

$$r^2 = 196$$

$$r = \sqrt{196} \pm$$

$$r = \sqrt{196}$$

$$\therefore r = 14 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{نصف قطر الكرة} = 14 \text{ سم.}$$

التعويض في القانون

قسمة طرفي المعادلة على π

حل المعادلة

إهمال القيمة السالبة. لماذا؟

تدريب ٣

خزان كروي الشكل مساحة سطحه 1256π م^٢ جد :

(١) طول نصف قطر الخزان.

(٢) حجم الخزان.

(استخدم $\pi \approx 3.14$)



- (١) كرة طول نصف قطرها ٢١ سم . جد حجمها ، ومساحة سطحها .
- (٢) جد طول نصف قطر كرة حجمها 36π سم^٣ .
- (٣) جد مساحة سطح كرة حجمها $\frac{256}{3}$ سم^٣ .
- (٤) جد حجم الكرة التي مساحة سطحها 100π سم^٢ .
- (٥) مكعب من الرصاص حجمه 3880.8 سم^٣ ، صُهر لإعادة صنعه على صورة كرة ،
جد:

أ (طول نصف قطر الكرة الناتجة بعد إعادة التصنيع .

ب) مساحة سطح الكرة الناتجة بعد إعادة التصنيع .

- (٦) الشكل المجاور يمثل بالونا كرويًا يُستخدم
لدراسة الطقس ، ويبلغ حجمه 36π سم^٣ ، جد
مساحة سطحه .

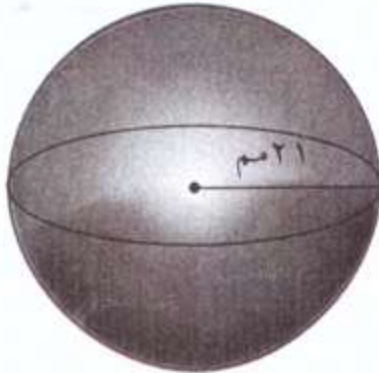


النتائج

- يستقصي تأثير التغير في أبعاد المجسم على حجمه ومساحة سطحه.



شكل (١)



شكل (٢)

كرة نصف قطرها ٧ مم تتمدد بفعل الحرارة
بشكل منتظم محافظةً على شكلها؛ بحيث أصبح
نصف قطرها ٢١ مم، انظر الشكل المجاور، ثم
أجب عما يأتي:

(١) ما معامل التغير؟

(٢) ما حجم الكرة قبل عملية التمدد؟

(٣) ما حجم الكرة بعد عملية التمدد؟

بما أن نصف قطر الكرة تغير من ٧ مم إلى ٢١ مم فإن معامل التغير هو ٣

∴ حجم الكرة قبل التمدد (التغير) $\approx \frac{4}{3} \times \pi \times 7^3$

$$\approx \frac{1372}{3} \pi \text{ مم}^3$$

حجم الكرة بعد عملية التمدد (التغير) $\approx \frac{4}{3} \times \pi \times 21^3$

$$\approx \frac{37044}{3} \pi \text{ مم}^3$$

لاحظ أن: حجم الكرة بعد التغير = $(3)^3 \times$ حجم الكرة قبل التغير.

كرة ثلجية نصف قطرها ٢٠ سم، أخذت بالذوبان بشكل منتظم محافظةً على شكلها وفي لحظة ما أصبح نصف قطرها ١٠ سم، جد كلاً مما يأتي:

(١) معامل التغير.

(٢) حجم الكرة بعد ذوبانها في اللحظة حيث نصف قطرها ١٠ سم.

مثال (١)

كرة من المعدن نصف قطرها ٣ سم، أخذت تتمدد بفعل الحرارة، وفي لحظة معينة أصبح نصف قطرها ٦ سم، جد ما يأتي:

(١) معامل التغير.

(٢) مساحة سطحها لحظة أصبح نصف قطرها ٦ سم.

الحل

معامل التغير هو ٢

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$

∴ مساحة سطح الكرة قبل التغير = $4\pi (3)^2$

$$= 36\pi \text{ سم}^2$$

مساحة سطح الكرة بعد التغير = $4\pi (6)^2$

$$= 144\pi \text{ سم}^2$$

لاحظ أن: مساحة سطح الكرة بعد التغير = $(2)^2 \times$ مساحة سطح الكرة قبل التغير.

بالون كروي الشكل مساحة سطحه 125π سم^٢ أخذ يتسرب منه الهواء بشكل منتظم بحيث يبقى محافظاً على شكله الكروي، وفي لحظة ما أصبح نصف قطره $\frac{2}{3}$ نصف قطره السابق، جد مساحة سطحه عند تلك اللحظة.

تحدث

تحدث لزميلك عن أثر معامل التغير في كل من: حجم الكرة، ومساحة سطحها بعد التغير. مبرراً إجابتك من خلال تقديم أمثلة.

مثال (٢)

بركة سباحة أسطوانية الشكل نصف قطرها ٧ م وارتفاعها ٤ م، تم عمل توسعة لها بحيث أصبح نصف قطرها ١٤ م وارتفاعها ٨ م، أكمل الجدول الآتي:

بركة السباحة	نصف القطر	الارتفاع	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
قبل التوسعة	٧	٤	٤٤		١٧٦		٦١٦
بعد التوسعة	١٤	٨		٦١٦		١٩٣٦	

ماذا تلاحظ؟

الحل

بركة السباحة	نصف القطر	الارتفاع	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
قبل التوسعة	٧	٤	٤٤	١٥٤	١٧٦	٤٨٤	٦١٦
بعد التوسعة	١٤	٨	٨٨	٦١٦	٧٠٤	١٩٣٦	٤٩٢٨

نلاحظ أنَّ: معامل التغيُّر هو ٢

$$(١) ٨٨ \times \frac{1}{٢} = ٤٤ \text{ أو } ٤٤ \times ٢ = ٨٨$$

$$(٢) ١٥٤ \times ٢(٢) = ٦١٦$$

$$(٣) ١٧٦ \times ٢(٢) = ٧٠٤$$

$$(٤) ٤٨٤ \times ٢(٢) = ١٩٣٦$$

$$(٥) ٦١٦ \times ٢(٢) = ٤٩٢٨$$

تدريب ٣

قالبٌ من الثلج أسطوانيّ الشكل، حجمه ٣٦π سم^٣، أخذَ بالذوبانِ بشكلٍ منتظمٍ، وفي لحظةٍ ما كانَ معاملُ التغيُّر ٢، ٠، جذَّ حجمَ القالبِ في تلكَ اللحظة.

(١) مصنع للحلويات يعمل كعك العيد على شكل كرات، حجم كل منها 3π سم^٣ قرر صاحب المعمل تصغير الكعكة إلى الثلثين، وذلك من أجل إعادة تسعيرها. ما حجم الكعكة بعد عملية التصغير؟

(٢) أسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن حجمها 6π سم^٣، أخذت تتمدد بفعل الحرارة بشكل منتظم وفي لحظة ما ازدادت أبعادها بمقدار الضعفين. فجد حجم الأسطوانة في تلك اللحظة.

(٣) منشور ثلاثي مصنوع من الثلج حجمه 768 سم^٣، وأبعاده: 12 سم، 16 سم، 20 سم، ومساحته الجانبية 384 سم^٢. أخذ بالذوبان بشكل منتظم محافظاً على شكله، وفي لحظة ما أصبحت أبعاده 3 سم، 4 سم، 5 سم، جد كلاً مما يأتي:
أ) معامل التغير.

ب) حجم المنشور في تلك اللحظة.

ج) مساحته الجانبية في تلك اللحظة.

مراجعة

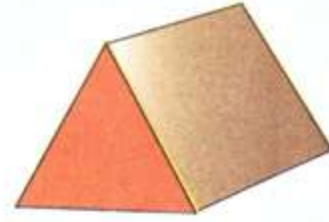
(١) ارسم شبكة تقريبية لكل مجسم من المجسمات الآتية:



(ج)



(ب)



(أ)

(٢) منشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية، أطوال أضلاعه: ٥ سم، ١٢ سم، ١٣ سم، وارتفاعه ١٠ سم، جد:

أ (حجمه .

ب) مساحة سطحه الكلية.

ج) حجمه ومساحة سطحه الكلية إذا ضربت أبعاده في ٤ .

(٣) منشور قاعدته على شكل شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيتين ١٢ سم، ٨ سم وارتفاعها ٦ سم، وارتفاع المنشور ٩ سم. جد حجمه.

(٤) هرم قائم رباعي حجمه ٧٢ م^٣، وارتفاعه ٨ م جد مساحة قاعدته.

(٥) هرم قائم ارتفاعه ١٧ م، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢ م، جد:

أ (حجمه .

ب) إذا تضاعفت أبعاده، فما حجمه بعد التغير؟

(٦) أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ١٤ سم، وارتفاعها ١٢ سم، جد:

أ (حجمها .

ب) مساحة سطحها الكلية.

ج) إذا تضاعفت أبعادها فجد حجمها.

(٧) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية $٧٠٤ \text{ سم}^٢$ ، وطول نصف قطرها ٧ سم جد ارتفاعها.

(٨) مخروط مساحة قاعدته $٣١٤ \text{ سم}^٢$ ، وارتفاعه ٢٤ سم ، جد:
 أ (حجمه .

ب (مساحته الجانبية .

ج (مساحة سطحه الكلية .

٩ (مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ سم ، وطول راسمه ٥ سم ، جد:
 أ (حجم المخروط .

ب (مساحته الجانبية .

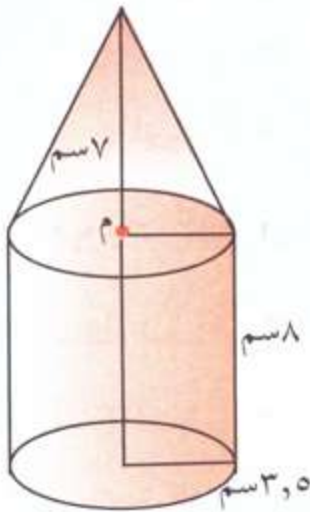
ج (إذا ضربت أبعاده في ٣ ، فجد حجمه ومساحته الجانبية .

(١٠) يمثل الجسم جانباً كرة طول قطرها ٦ م ، جد:
 أ (حجمها .



ب (مساحة سطحها الكلية .

(١١) أسطوانة دائرية قائمة، طول نصف قطرها ٦ سم ، وحجمها $٣٢٤ \pi \text{ سم}^٣$ ، جد ارتفاعها.



(١٢) جد حجم الجسم المركب المرسوم جانباً.

اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من ٦ فقرات، من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها ٤ بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) منشور رباعي مساحته الجانبية ٨٤π سم^٢، وارتفاعه ٦ سم؛ لذا فإن طول محيط قاعدته يساوي:

أ (٨ سم ب (٤ سم ج (٨π سم د (٦π سم

(٢) أسطوانة طول نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ١٠ سم، ما مساحة سطحها الكلية بالسنتيمتر المربع؟

أ (٧٤٨ ب (٣٠٨ ج (١٥٤٠ د (٤٤٠

(٣) مخروط دائري قائم مساحته قاعدته ٦١٦ سم^٢؛ ما محيط قاعدته بالسنتيمتر؟

أ (١٤ ب (٤٤ ج (٨٨ د (١٩٦

(٤) هرم حجمه ١٧٥ سم^٣، وارتفاعه ٢٥ سم، ما مساحة قاعدته؟

أ (٧ سم^٢ ب (٢١ سم^٢ ج (٢٨ سم^٢ د (١٤ سم^٢

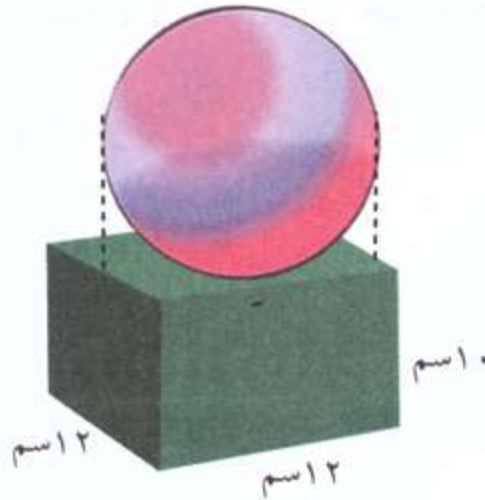
(٥) كرة طول نصف قطرها ٦ سم؛ ما حجمها بالسنتيمتر المكعب:

أ (١٤٤π ب (٣٦π ج (٢١٦π د (٢٨٨π

(٦) كرة مساحة سطحها ٣٦π سم^٢، تناقص نصف قطرها إلى النصف، ما مساحة سطحها؟

أ (٣٦π سم^٢ ب (٩π سم^٢ ج (٤π سم^٢ د (١٨π سم^٢

- (٢) منشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه: (٦) سم ، (٨) سم ، (١٠) سم ، وارتفاعه (١١) سم. جد مساحته الجانبية.
- (٣) أسطوانة دائرية قائمة مساحة قاعدتها ١٥٤ سم^٢، وارتفاعها ٢٠ سم. جد كلاً مما يأتي:
- أ (محيط قاعدتها.
- ب) مساحة سطحها الكلية.
- (٤) قبة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ π سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول نصف قطرها.
- (٥) في حصة التربية المهنية، عمل أحد الطلبة كوباً أسطوانياً الشكل من الفخار بحيث كان حجمه ٤٨ π سم^٣، ونصف قطر قاعدته ٢ سم، ما ارتفاعه؟
- (٦) جد حجم المجسم المركب المرسوم أدناه.



تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ تَعَالَى



ISBN: 978-9957-84-686-2



9 789957 846862

الفغد