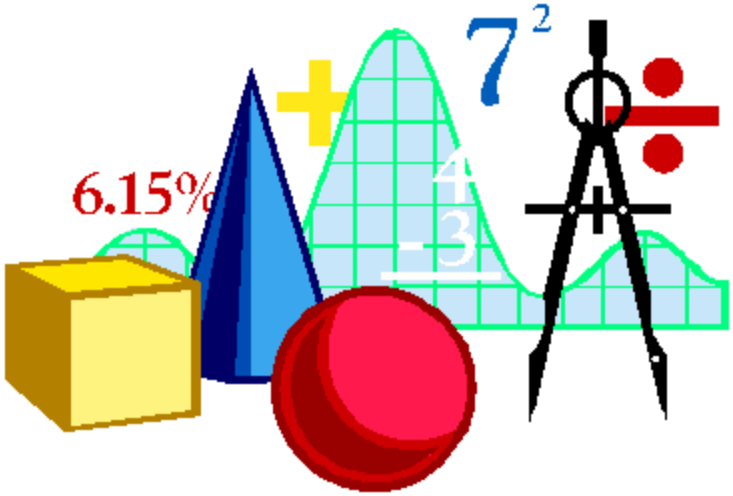
مدرسة توام النموذجية الخاصة بالعين



الصف الثاني عشر متقدم

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثانية والثالثة

2019/2018

اعداد أ.هلال حسين أحمد

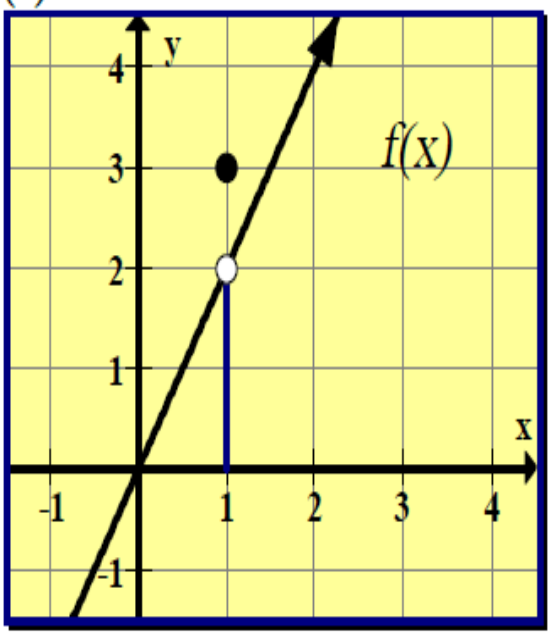
Hilal Hussein Ahmed
سؤال وجواب

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الأول:-

من الرسم المجاور أوجد

(2)



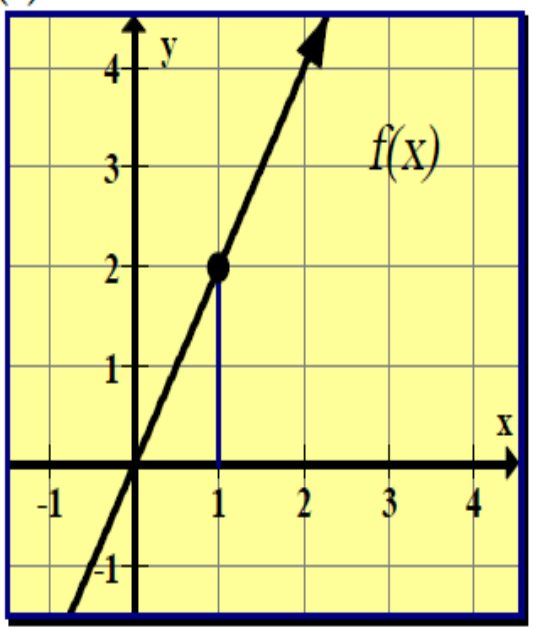
$(1) f(1) = 3$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

(1)



$(1) f(1) = 2$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

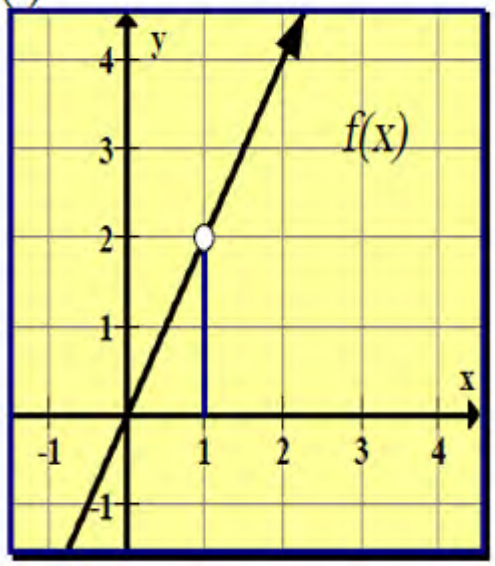
$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

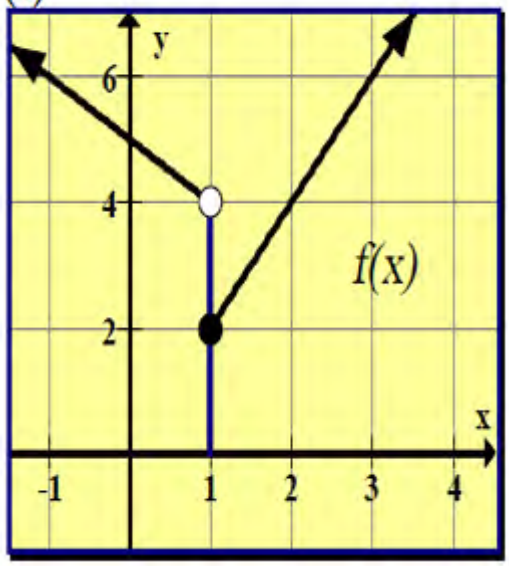
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(3)



(4)



$(1) f(1) =$ غير موجودة

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

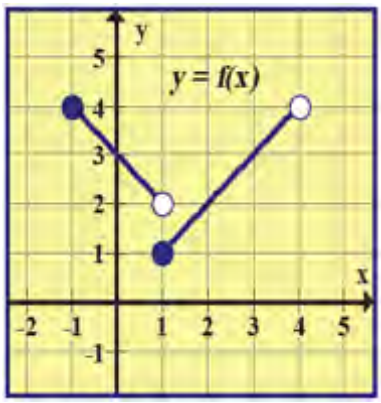
$(4) \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$(1) f(1) = 2$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 4$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة



$(1) \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

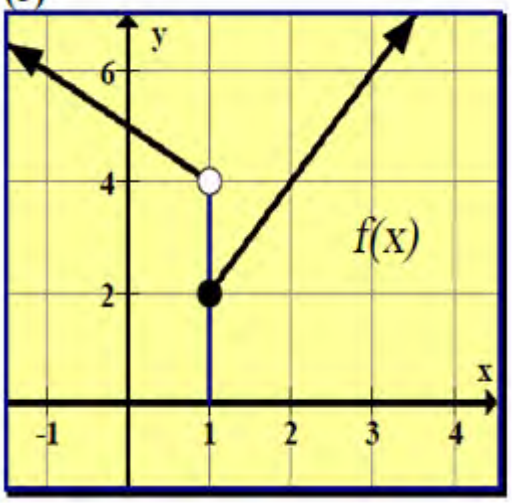
$(3) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة

$\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$ لأن

$(4) f(1) = 1$

Hilal Hussein Ahmed

(5)



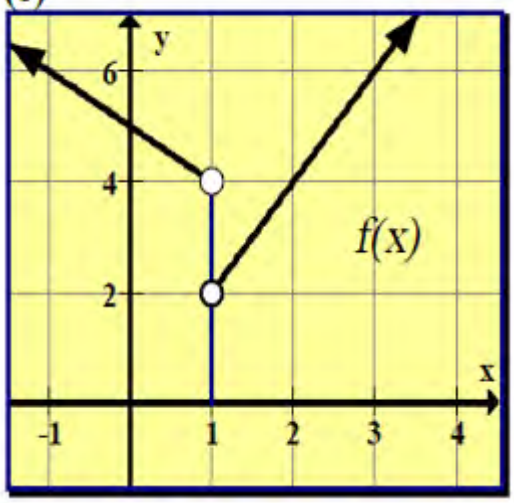
$(1) f(1) = 2$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 4$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة

(6)

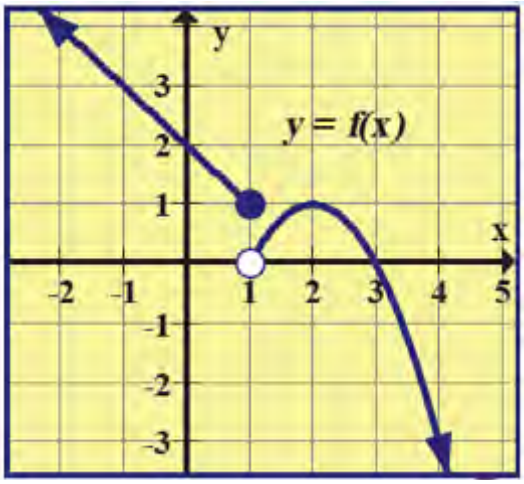


$(1) f(1) =$ غير موجودة

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 4$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة



$(1) \lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 0$

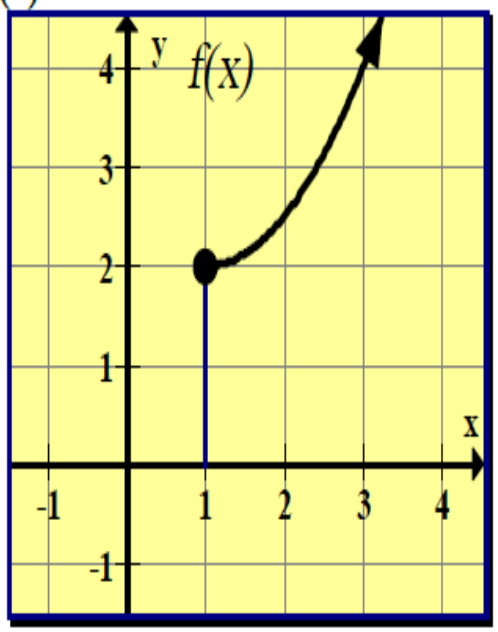
$(3) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة

$\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$ لأن

$(4) f(1) = 1$

Hilal Hussein Ahmed

(7)



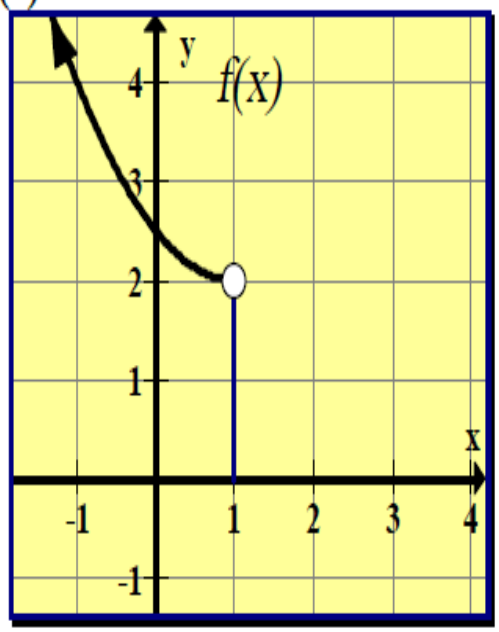
$(1) f(1) = 2$

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) =$ غير موجودة

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة

(8)

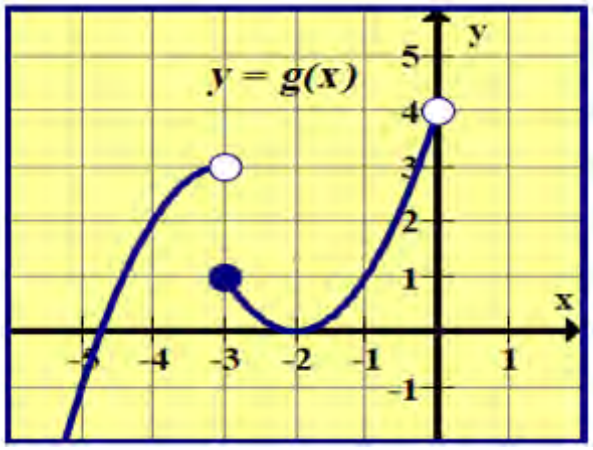


$(1) f(1) =$ غير موجودة

$(2) \lim_{x \to 1+} f(x) =$ غير موجودة

$(3) \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

$(4) \lim_{x \to 1} f(x) =$ غير موجودة



$(1) \lim_{x \to -3-} g(x) = 3$

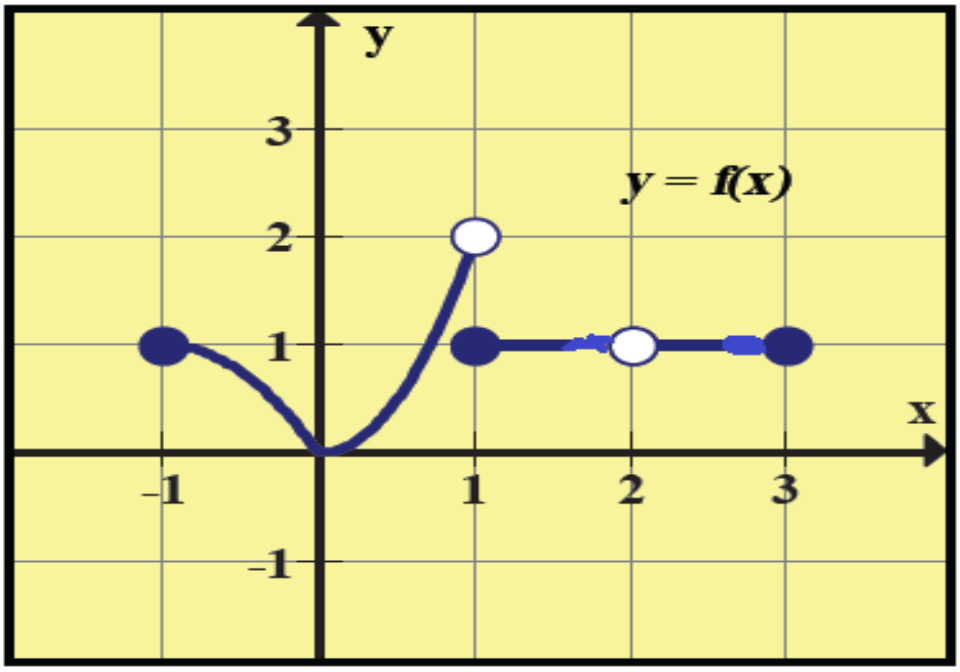
$(2) \lim_{x \to -3+} g(x) = 1$

$(3) \lim_{x \to -3} g(x) =$ غير موجودة

$\lim_{x \to -3+} g(x) \neq \lim_{x \to -3-} g(x)$ لأن

$(4) g(-3) = 1$

Hilal Hussein Ahmed



$(1)\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$

$(2)\lim_{x\to 1-} f(x) = 2$

$(3)\lim_{x\to 1} f(x) =$ غير موجودة

$(4)\lim_{x\to 2-} f(x) = 1$

$(5)\lim_{x\to 2+} f(x) = 1$

$(6)\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

$(7)\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$

$(8)\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$

$(9)\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

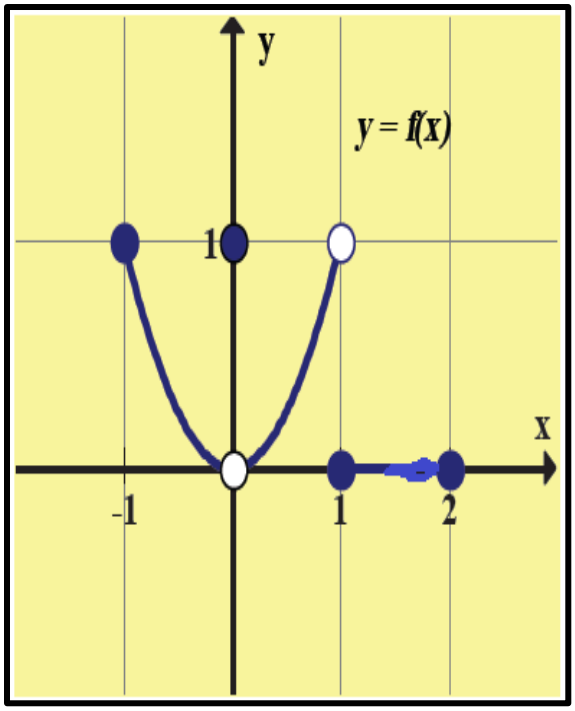
$(10)\lim_{x\to 3} f(x) =$ غير موجودة

$(11) f(2) =$ غير موجودة

$(12) f(1) = 1$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed



$(1)\ \lim_{x\to -1+} f(x) = 1$

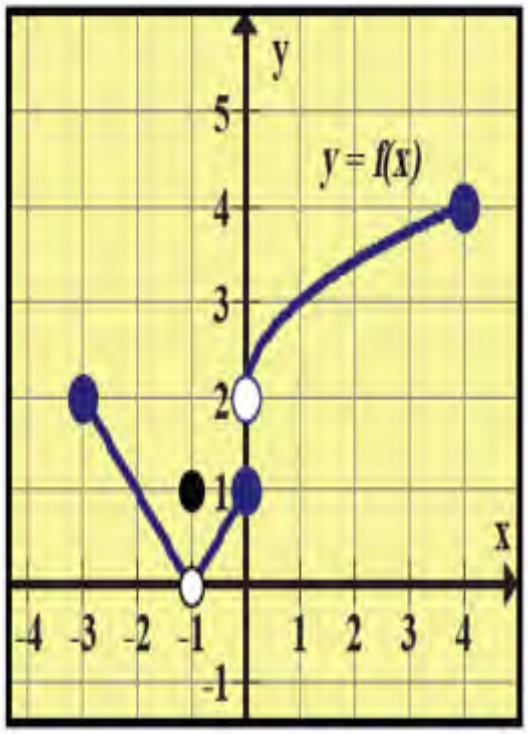
$(3)\lim_{x\to 1} f(x) =$ غير موجودة

$(5)\ \lim_{x\to 2+} f(x) =$ غير موجودة

$(7)\ \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$

$(9)\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$(11) f(0) = 1$



يمثل الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[-3, 4]$

عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة .

عند $x = 4$

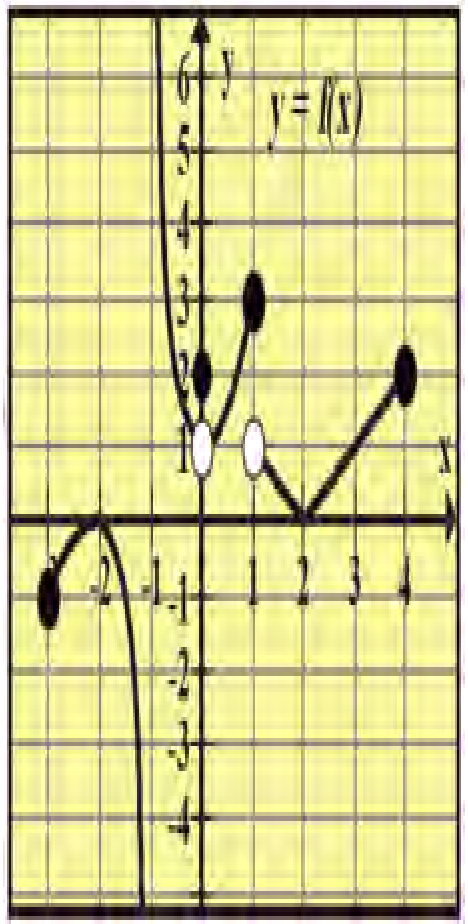
عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليمين موجودة .

عند $x = -3$

(iii) هل $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة ؟ علل إجابتك

لا لأن $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0+} f(x)$

Hilal Hussein Ahmed



الشكل المجاور يمثل الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[-3,4]$

(i). $\lim_{x\to 1-} f(x) = 3.$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1.$, $\lim_{x\to 1} f(x) =$ غير موجودة

(ii) $\lim_{x\to 4} f(x)$ ... غير موجودة ... ...

(iii) $f(1)$ ... ... 3 ... ...

(iv) عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليمين موجودة .؟ وما ؟قيمتها

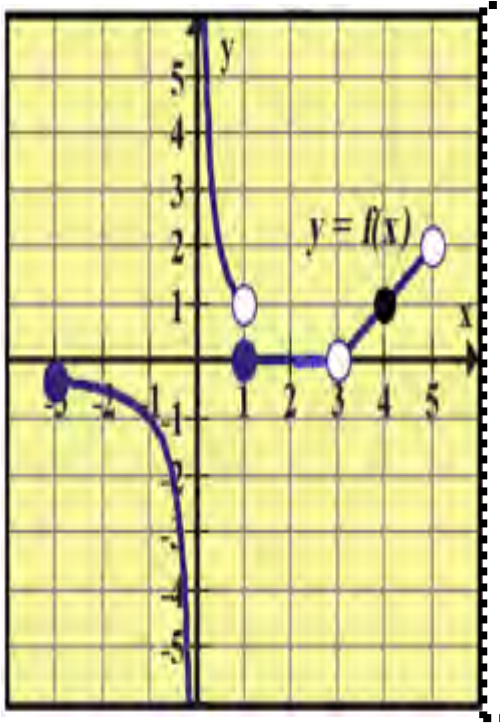
عند $x = -3$, وقيمتها $= -1$

(v) عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليسري موجودة .؟ وما ؟قيمتها

عند $x = 4$, وقيمتها $= 2$

هل $f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x)$ ؟ برر ؟إجابتك

نعم لأن الدالة متصلة عند $x = -2$



(i) $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1.$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 0.$, $\lim_{x\to 4} f(x) = 1$

(ii) $\lim_{x\to 5-} f(x)$ ... 2 ... ...

(iii) $f(1)$ ... ... 0 ... ...

(iv) عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليمين موجودة .؟ وما ؟قيمتها

عند $x = -3$, وقيمتها $= -\frac{1}{4}$

(v) عند نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليسري موجودة .؟ وما ؟قيمتها

عند $x = 5$, وقيمتها $= 2$

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الثاني :-

أوجد النهايات التالية:-

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\left(x^2-x+1\right)=1^2-1+1=1$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\left(x^2-3x+5\right)=0^2-3\times 0+5=5$$

$$(3)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right)=\frac{1^2+2\times 1+1}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

$$(4)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{4+x}{3+x}\right)=\frac{4+3}{3+3}=\frac{7}{6}$$

$$(5)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right)=\frac{3^2+4\times 3+3}{3+3}=\frac{9+12+3}{6}$$

$$=\frac{24}{6}=4$$

$$(6)\ \lim_{x\to -4}(x+3)^{1998}=$$

$$\left(\lim_{x\to -4}x+\lim_{x\to -4}3\right)^{1998}=(-4+3)^{1998}=(-1)^{1998}=1$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(7)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} ln(\sin x) = ln\sin\frac{\pi}{2} = ln\,1 = 0$$

$$(8)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16^2}\right) =$$

$$\left(\frac{5\times 1^3+8\times 1^2}{3\times 1^4-16^2}\right) = \frac{5+8}{3-256} = \frac{13}{-253} = -\frac{13}{253}$$

$$(9)\ \lim_{x\to 2} 3x^2(2x-1) = 3\times 2^2(4-1) = 12\times 3 = 36$$

$$(10)\ \lim_{x\to 3}\left(2x^2+\frac{1}{x}+4\right) =$$

$$2\times 3^2+\frac{1}{3}+4 = 2\times 9+\frac{1}{3}+4 = 18+\frac{1}{3}+4 = \frac{67}{3}$$

السؤال الثالث :-

بفرض أن : $\lim_{x\to 4} g(x) = 3\ ,\ \lim_{x\to 4} f(x) = 2$

$$(1)\ \lim_{x\to 4}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 4} f(x) + \lim_{x\to 4} g(x) = 2+3 = 5$$

$$(2)\ \lim_{x\to 4}(g(x)+3) = \lim_{x\to 4} g(x) + \lim_{x\to 4} 3 = 3+3 = 6$$

$$(3)\ \lim_{x\to 4}(x.f(x)) = \lim_{x\to 4} x\,.\lim_{x\to 4} f(x) = 4\times 2 = 8$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

$$(4)\ \lim_{x\to 4}(g(x))^2 = \left(\lim_{x\to 4} g(x)\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$(5)\ \lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1} = \frac{\lim_{x\to 4} g(x)}{\lim_{x\to 4} f(x) - \lim_{x\to 4} 1} = \frac{3}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$(6)\ \lim_{x\to 4}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to 4} f(x).\lim_{x\to 4} g(x) = 2\times 3 = 6$$

$$(7)\ \lim_{x\to 4}(f(x)+x^2+5) = \lim_{x\to 4} f(x) + \lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 5$$
$$= 2 + 4^2 + 5 = 2 + 16 + 5 = 23$$

السؤال الرابع :-أوجد النهايات مع ذكر السبب ؟

$(i)\ \lim_{x\to 1-}\sqrt{1-x} = 0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايسر للعدد 1)

$(ii)\ \lim_{x\to 2+}\sqrt{x-2} = 0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايمن للعدد 2)

$(iii)\ \lim_{x\to 3}\sqrt{3-x}$ = غير موجودة (لأن الدالة غير معرفة فى جوار ايمن للعدد 3)

$$(iv)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{2+\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2+\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

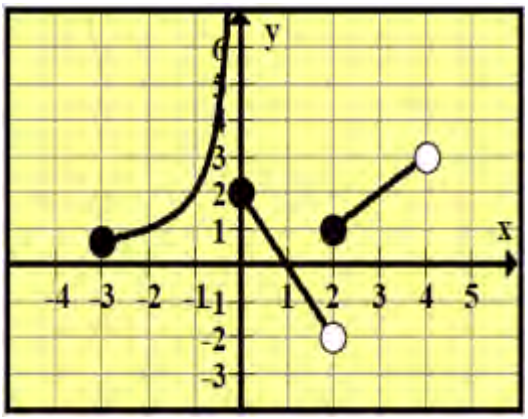
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الخامس :-

استخدم الرسم البياني التالي للدالة $f(x)$ حيث $-3 \leq x \leq 4$

فى الإجابة عن الأسئلة التالية :

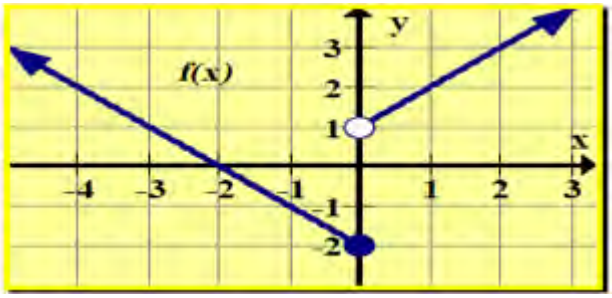


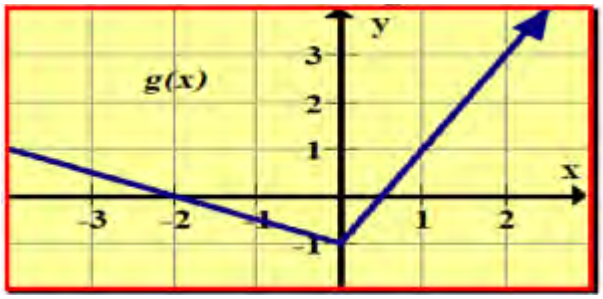
(1) $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$ = غير موجودة

(2) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ = غير موجودة

(3) $\lim_{x\to -1} \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

استخدم الأشكال البيانية الموضحة أدناة فى النهايات التالية مع تبرير إجابتك





(1) $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 3+3 = 6$

(2) $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{g(x)}\right) = \sqrt{\lim_{x\to 1} g(x)} = \sqrt{1}$

$= 1$ (لأن الدالة $\sqrt{g(x)}$ معرفة فى جوار للعدد 1)

Hilal Hussein Ahmed

$(3)\ \lim_{x\to -1}\left(\sqrt{f(x)}\right)$

$=$ غير موجودة $(-1$ للعدد غير معرفة فى جوار $\sqrt{f(x)}$ لأن الدالة$)$

$(4)\ \lim_{x\to -2}\left(\sqrt{g(x)}\right)=\sqrt{\lim_{x\to -2} g(x)}$

$=$ غير موجودة $(-2$ للعدد غير معرفة فى جوار ايمن $\sqrt{g(x)}$ لأن الدالة$)$

$(5)\ \lim_{x\to -2}\left(\sqrt{f(x)}\right)=\sqrt{\lim_{x\to -2} f(x)}$

$=$ غير موجودة $(-2$ للعدد غير معرفة فى جوار ايمن $\sqrt{f(x)}$ لأن الدالة$)$

$(6)\ \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{g(x)+f(x)}\right)=\sqrt{3+3}$

$=\sqrt{6}\left(\sqrt{\lim_{x\to 2} g(x)+\lim_{x\to 2} f(x)}\right)$ لأن موجودة

السؤال السادس :-

$(1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$

$(2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{3}$

$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+3}{x+2}=$

$\frac{0-0+3}{0+2}=\frac{3}{2}$

$(4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

$(5)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=$

$\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$

$(6)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\frac{2}{1}=2$

Hilal Hussein Ahmed

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{6}$$

(8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}=$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)}=-1$$

(9) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(10) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$$

(11) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{2(x-3)}=\frac{27}{2}$$

(12) $$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x-2)(2+x+2)}{x}=\frac{4}{1}=4$$

(11) $$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x-sin\,2x}{sin\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(sinx-2\cos x)}{sin\,x}=\frac{0-2}{1}=-2$$

[إرشاد : $\sin 2x=2\sin x\cos x$]

(11) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{sin^2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{sin^2\,x\,(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^2\,x\,(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^2\,x\,(1+cos\,x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

[إرشاد : $\sin^2 x=1-cos^2x$]

Hilal Hussein Ahmed

السؤال السابع :-الضرب في المرافق

$$(1)\ \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)}=\sqrt{4}+2=4$$

$$(3)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{(x-3)(x+1)}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2-1}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{4\times 2}=\frac{1}{8}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{4}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(\sqrt{x+3}-2)}\times\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{(x+3-4)}\times\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{1}\right)=2+2=4$$

$$(5)\ \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{(x-7)}\times\frac{(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt{x+2}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{x+2-9}{(x-7)}\times\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$(6)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-2)(x-1)}\times\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-1)}\times\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$(7)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(\sqrt{x}-2)}\times\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}=4(4)=16$$

السؤال الثامن :- توحيد المقام

$$(1)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x.(x-2)}=-\frac{1}{4}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+1-2}{2(x+1)}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x+1).(x^2-1)}$$

$$=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x+1).(x-1)(x+1)}=\frac{1}{8}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-2-x}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(2+x)}=-\frac{1}{4}=$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

أشرح لماذا لايمكنك استخدام التعويض لتحديد النهاية ثم أوجد النهاية.

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4-4-x}{4(x+4)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x(x+4)}=-\frac{1}{16}=$$

$$(5)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{(2-x)(2+x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2+x-4}{(2-x)(2+x)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(2-x)(2+x)}\right)=-\frac{1}{4}$$

لتكن : $f(x)=\frac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}$, $g(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}$ (6)

أوجد : (مفسراً إجابتك كل حالة)

$$(i)\ \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{4}$$

$$(ii)\ \lim_{x\to 1} f(x).g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}\times\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{4-(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{4-x-3}=-\frac{2}{1}=-2$$

(iii) هل يمكن إيجاد $\lim_{x\to -3} g(x)$ ؟ أعط تفسيراً لإجابتك

لا لأن الدالة غير معرفة فى جوار أيسر للعدد 3 -

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

(7) فى إحدي الدراسات على عيون القطط وجد أن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط

على عينية وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$

أوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تسعي شدة الإضاءة x إلى الصفر

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$ بالضرب ومقاما بسطا فى $x^{0.04}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{160+90\ x^{0.04}}{4+15\ x^{0.04}}=\frac{160}{4}=40$$

السؤال التاسع:- دالة المطلق

أوجد النهاية إن وجدت مفسراً إجابتك .

(1) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2-x}{x-2}=-1$: $|x-2|=2-x, x\le 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{|x-1|}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{3}$: $|x-1|$

$=x-1, x\ge 1$

(3) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{|x+1|-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x+1-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}$: $|x+1|$

$=x+1, x\ge -1$

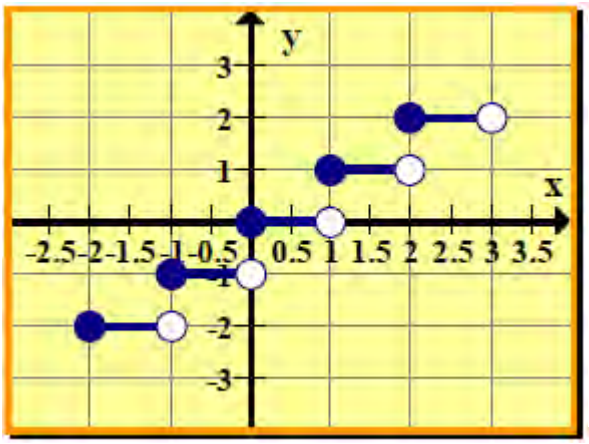
(4) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{|x-1|-1}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-1-1}{2(x-2)}=\dfrac{1}{2}$: $|x-1|=x-1, x\ge 1$

(5) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\dfrac{1}{4}$: $|x-2|=-(x-2), x\le 2$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

دالة الصحيح : $y = [x]$ حيث $n \le x < n+1$



أوجد النهايات التالية :-

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[x] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0.01}[x] = [0.01] = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}[x] = 0$ (4) $\lim\limits_{x\to 0-}[x] = -1$

(5) $\lim\limits_{x\to 2-}[x] = 1$ (6) $\lim\limits_{x\to 2+}[x] = 2$

(7) $\lim\limits_{x\to 2-}[x-1] = \lim\limits_{x\to 2-}([x]-1) = 1-1 = 0$ (8) $\lim\limits_{x\to 2+}[x-1] = 2-1 = 1$

(9) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{[x]}{x} = 0$ (10) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{[x]} = 0$

(11) $\lim\limits_{x\to 2-} x^2 + 2x - [x] = 4 + 2\times 2 - 1 = 8 - 1 = 7$

(12) $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x}{[x]} = \lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2} : \ [x] = 2 \ , x \to 3-$

(13) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x([x]+3)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x(0+3)}{x^2+x}$

$= \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{6x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{6x}{x(x+1)} = 6$

(14) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{x}{|x|} - 2[x]\right) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{x}{x} - 2\times 0\right) = 1$ $: [x] = 0 \ , |x| = x : x \to 0+$

(15) $\lim\limits_{x\to 2+}(|x-2| + [x]) = \lim\limits_{x\to 2+}(x - 2 + 2) = 2$

$: [x] = 2 \ , |x-2| = x - 2 : x \to 2+$

Hilal Hussein Ahmed

$$(16)\ \lim_{x\to 7}\frac{x-7}{|x-6|-1}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{x-6-1}=1$$

$$:|x-6|=x-6:x\to 7$$

السؤال العاشر:-

أوجد النهايات التالية :

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=2\times 1=2$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{1}{2x+3}=\frac{4}{3}$$

$$(6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{\sin 4x}{x}\right)=4\times 4=16$$

$$(7)\ \lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin 3x}{2x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{\tan x}{x}}\right)=\frac{5+3}{2-1}=\frac{8}{1}=8$$

$$(8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{5x}+\frac{\sin 2x}{5x}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(9)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$(10)\ \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}\right)=\frac{12}{3}=4$$

$$(11)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{2x-1}\right)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$(12)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1}\right)=1\times 0=0$$

$$(13)\ \lim_{x\to 0} x\csc x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$(14)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=1+1=2$$

$$(15)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1+2}{1}=3$$

$$(16)\ \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x^2\cot x}{x\cot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos x-x\times\frac{x}{\tan x}}{\frac{x}{\tan x}}\right)=\frac{3-0}{1}=3$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

$$(17)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{|x|}-2[x]\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}-2\times 0\right)=1$$

$|x|=x\ ,[x]=0 \Leftarrow x\to 0^+$ عندما

$$(18)\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|x+1|-2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin kx}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1-2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin kx}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)=\frac{5}{k}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{5}{k}$$

$$\Rightarrow k=10$$

$|x+1|=x+1 \Leftarrow x\to 1^+$ عندما

$$(19)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x\cos 3x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 8x}{x}\times\cos 3x}{\frac{\sin 2x}{x}}\right)=\frac{8\times 1}{2}=4$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الحادي عشر:-

بإستخدام نظرية الشطيرة أوجد :-

(1) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin x$ $\because -1 \le \sin x \le 1$ $\times x^2$

$$-x^2 \le x^2 \sin x \le x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad , \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin x = 0$$

(2) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ $\because -1 \le \sin \frac{1}{x^2} \le 1$ $\times x^2$

$$-x^2 \le x^2 \sin \frac{1}{x^2} \le x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad , \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

(3) $\lim_{x\to 0} x \sin x$ $\because -1 \le \sin x \le 1$ $\times x$

لابد من تمييز حالتين

$x > 0$	$x < 0$
$\because -1 \le \sin x \le 1 \quad \times x$	$\because -1 \le \sin x \le 1 \quad \times x$
$-x \le x \sin x \le x \Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x) = 0$	$-x \ge x \sin x \ge x \Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x) = 0$
$, \lim_{x\to 0}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x \sin x = 0$	$, \lim_{x\to 0}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x \sin x = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x \sin x = 0$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(4)\ \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} \quad \because\ -1 \le \cos\frac{1}{x^2} \le 1 \qquad \times x^2$$

$$-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x^2} \le x^2 \ \because \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0\ ,\ \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$$

$$(5)\ \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} \quad \because\ -1 \le \cos\frac{1}{x^2} \le 1 \qquad \times\ \sqrt{x} > 0$$

$$-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} \le \sqrt{x} \ \because \lim_{x\to 0+}(-\sqrt{x}) = 0\ ,\ \lim_{x\to 0+}(\sqrt{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} = 0$$

أشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين فى إيجاد كلاً من :-

$$(6)(i)\ \lim_{x\to 0} x^2 \sin x \ , \qquad (ii)\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

ثم أوجد قيمة كل من النهايتين بخطوات تحليلية.

$(i)\ \lim_{x\to 0}(x^2 \sin x) = 0 \times \sin 0 = 0$ تعويض مباشر

, $(ii)\ \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ $x = 0$ الدالة غير معرفة عند

: لذلك نطبق نظرية الإحاطة

$$\because\ -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \qquad \times x^2 \Rightarrow\ -x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \ ,\lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$$

Hilal Hussein Ahmed

(7) $f(x) = 3 + x^2 \sin\frac{1}{x}$: إذا كانت

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$: استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد

$\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \times x^2$

$-x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2 \ (+3) \Rightarrow -x^2+3 \le 3 + x^2\sin\frac{1}{x} \le 3 + x^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(-x^2+3) = 3 \ , \lim\limits_{x\to 0}(3+x^2) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(3 + x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 3$

(8) $\lim\limits_{x\to 0+} h(x)$: استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد $h(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$: لتكن

$\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \times \sqrt{x} > 0$

$-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \le \sqrt{x} \ \because \lim\limits_{x\to 0+}(-\sqrt{x}) = 0 \ , \lim\limits_{x\to 0+}(\sqrt{x}) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$

لتكن $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$: $2 - x^2 < f(x) < 2 + x^2 + x^3$ صحيحة في فترة حول الصفر (9)

أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ بالطريقتين التاليتين : (i) استخدم نظرية الإحاطة.

$\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2) = 2, \lim\limits_{x\to 0}(2+x^2+x^3) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

$(ii) \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x} \times \left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x} \times \frac{(1+\cos x)}{1} = 1 \times 2 = 2$

Hilal Hussein Ahmed

$(10)[-3\ ,3]$ في الفترة $x \neq 1$ حيث $(x^2-1)(x^2+1)$

إذا كانت $\leq (x-1)f(x) \leq (x^2+2x-3)$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$

$\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)} \leq \frac{(x-1)f(x)}{(x-1)} \leq \frac{(x^2+2x-3)}{(x-1)}$: بالقسمة علي $(x-1)$

$\lim\limits_{x\to 1+} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)} = 4\ ,\ \lim\limits_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 4$

$(11)(\sin x + x) \leq f(x) \leq (x^2+2x)$ إذا كانت

أوجد: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ حيث $x \neq 0$ في الفترة $[-\pi\ ,\pi]$

$\frac{(\sin x + x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{(x^2+2x)}{x}$: بالقسمة علي $(x-1)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{x}\right)}{\frac{x}{x}} = 2\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

(12) إذا كانت $|g(x)+4| \leq 2(3-x)^4$ صحيحة

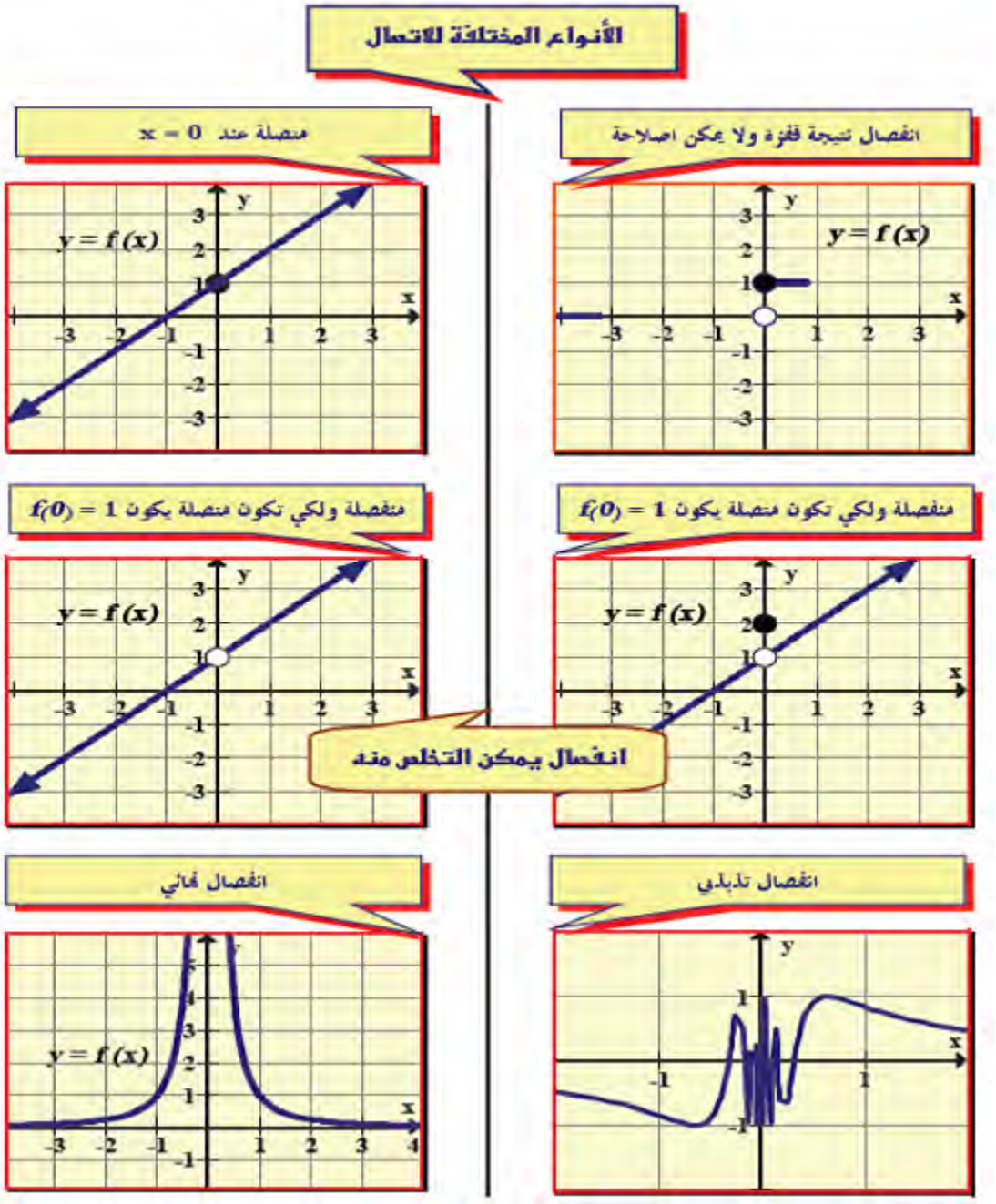
أوجد: $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ لجميع قيم x

$-2(3-x)^4 \leq g(x)+4 \leq 2(3-x)^4$. (إضافة -4)

$, -2(3-x)^4 - 4 \leq g(x) \leq 2(3-x)^4 - 4$

$\lim_{x\to 3}\left(-2(3-x)^4-4\right)=-4$, $\lim_{x\to 3}\left(2(3-x)^4-4\right)=-4 \Rightarrow$

$\lim_{x\to 3} g(x)=-4$

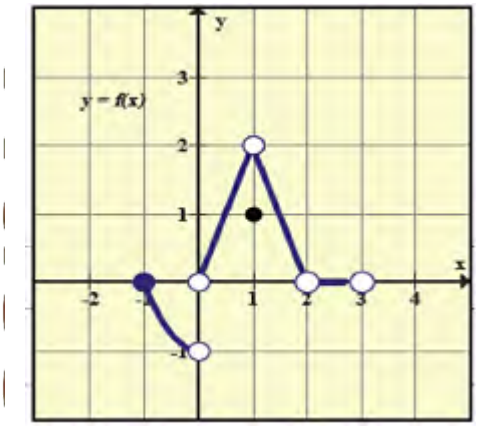


مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الثاني عشر:-

استخدام الرسم البياني للإجابة عن الأسئلة ؟



(1) هل $f(-1)$ موجودة ؟ نعم $= 0$

(2) هل $\lim_{x\to -1+} f(x)$ موجودة ؟ نعم $= 0$

(3) هل $\lim_{x\to -1+} f(x) = f(-1)$ ؟ نعم

(4) هل f متصلة عند $x = -1$ ؟

نعم . حيث (-1) نقطة طرفية لجهة اليمين في مجال $f(x)$

و $\lim_{x\to -1+} f(x) = f(-1)$ ∴ f متصلة عند $x = -1$

(5) هل $f(1)$ موجودة ؟ نعم $= 1$

(6) هل $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة ؟ نعم $= 2$

(7) هل $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ؟ لا

(8) هل f متصلة عند $x = 1$ لا حيث $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ ؟

(9) هل f معرفة عند $x = 2$ ؟ لا

(10) هل f متصلة عند $x = 2$ ؟ لا لأن f غير معرفة عند $x = 2$

(11) عند أي قيم لـ x تكون f متصلة ؟ هي $]-1\ ,\ 3[/\{0,2\ ,\ 1\}$

(12) ما القيمة التي يجب أن نعطيها لـ $f(2)$ لتجعل الدالة متصلة عند $x = 2$ ؟ هي القيمة 0

(13) ما القيمة التي يجب أن نعطيها لـ $f(1)$ لتجعل الدالة متصلة عند $x = 1$ ؟ هي القيمة 2

(14) أوجد : (a) كل نقطة عدم اتصال (انفصال) .

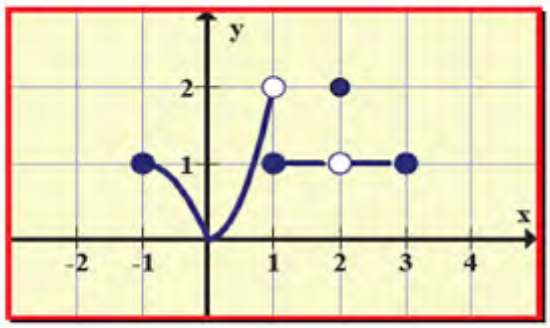
(b) أي نقطة يمكن التخلص من الانفصال عندها ؟ اذكر الأسباب التي اعتمدت عليها في إجابتك .

Hilal Ahmed

(14) أوجد : (a) كل نقطة عدم اتصال (انفصال) .

(b) أي نقطة يمكن التخلص من الانفصال عندها ؟ اذكر الأسباب التي اعتمدت عليها في إجابتك .

(15)

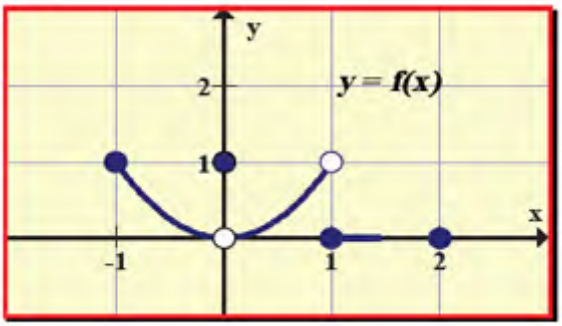


(a) $\{1\ ,2\}$

(b) عند $x=2$

وذلك بجعل $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=1$

(16)

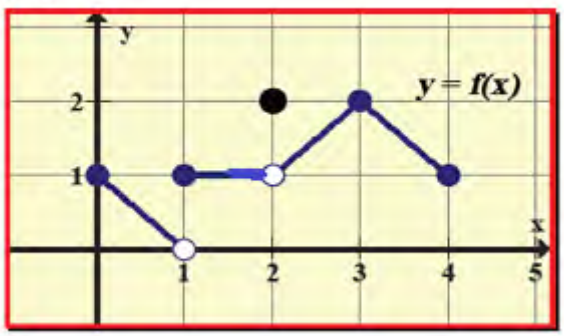


(a) $\{0\ ,1\}$

(b) عند $x=0$

وذلك بجعل $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

(17)



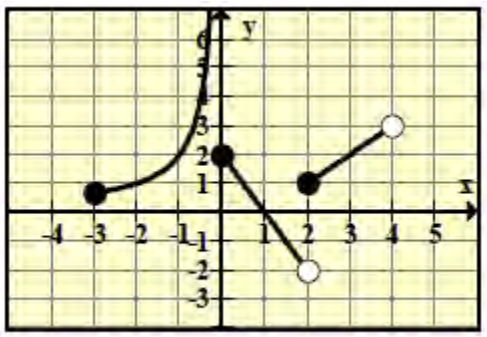
(a) $\{1\ ,2\}$

(b) عند $x=2$

وذلك بجعل $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=1$

Hilal Hussein Ahmed

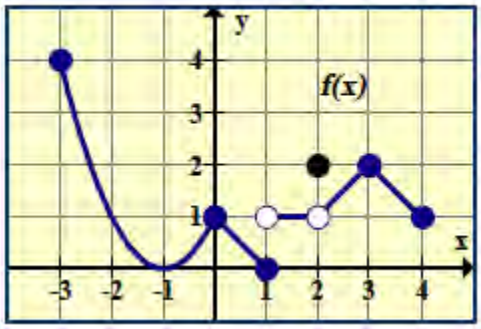
■ استخدم الرسومات البيانية التالية للدوال $f(x)$ حيث $-3 \leq x \leq 4$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :اوجد



(18) عند أي نقاط C في مجال الدالة $f(x)$ تكون الدالة منفصلة ؟ وما نوع هذا الإنفصال ؟

(فجوة) يمكن التخلص من $x = 4$, قفزة

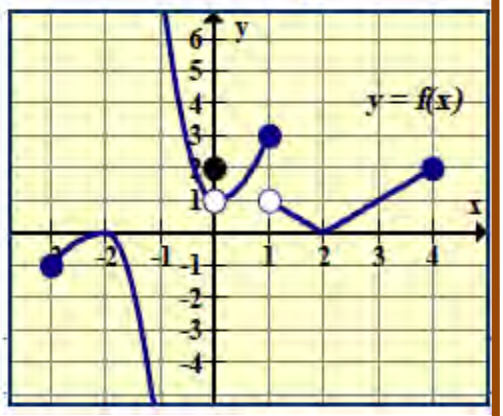
$x = 2$, لانهائي $x = 0$



(19) عين قيم x التي تكون الدالة عندما غير متصلة .

وبين نوع الإنفصال عند كل منها .

(فجوة) يمكن التخلص من $x = 2$, قفزة $x = 1$



(20) عين قيم x التي تكون الدالة عندما منفصلة .

وحدد نوع الإنفصال .

(فجوة) يمكن التخلص من $x = 0$, قفزة $x = 1$, لانهائي $x = -1$

(21) أي نقطة يمكن التخلص من الانفصال عندها ؟ وكيف يتم ذلك .

(يمكن التخلص من $x = 0$)وذلك بجعل $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

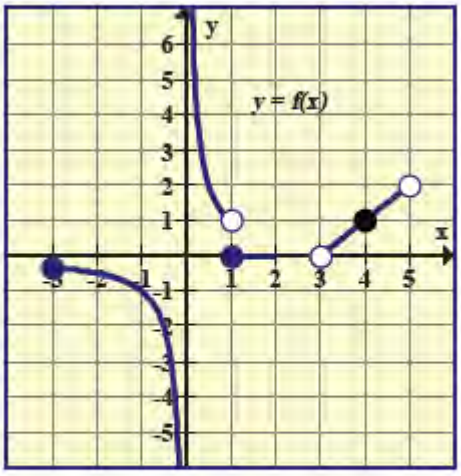
(22) هل $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$. وماذا نستنتج من ذلك ؟

نعم لان الدالة متصلة عند $x = -2$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

■ استخدم الرسومات البيانية المجاور للدالة$f(x)$



(23) أوجد نقاط الانفصال للدالة$f(x)$ ثم حدد نوع الإنفصال

$x = 1$ قفزة, $x = 0$ لانهائي,

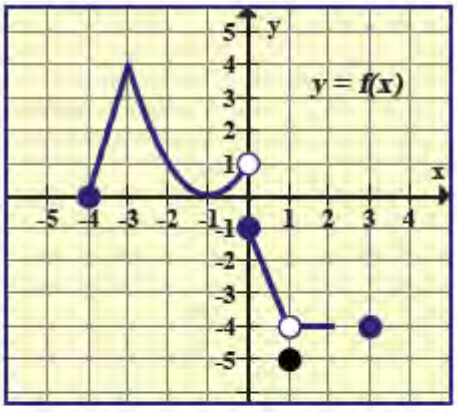
$x = 3$ (فجوة) يمكن التخلص من

$x = 5$ (فجوة) يمكن التخلص من,

(24) ماالقيم التي يمكن أن نعطيها للدالة $f(x)$عند $x = 5$

وتكون الدالة متصلة عند هذة النقطة ولماذا ؟

القيمة هي 2 لتكون $f(5) = \lim_{x \to 5-} f(x) = 2$

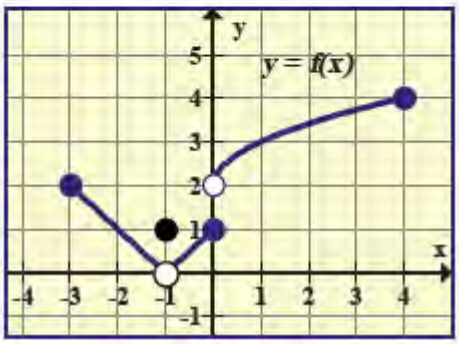


(25) عين قيم x التي تكون عندها الدالة

$f(x)$ منفصلة وبين نوع الإنفصال

$x = 0$ قفزة,

$x = 1$ (فجوة) يمكن التخلص من



(26) أوجد نقاط الانفصال للدالة$f(x)$ ثم حدد نوع الإنفصال

$x = 0$ قفزة,

$x = -1$ (فجوة) يمكن التخلص من

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الثالث عشر:-

أوجـــــــــــــــــــــــــــــــد :

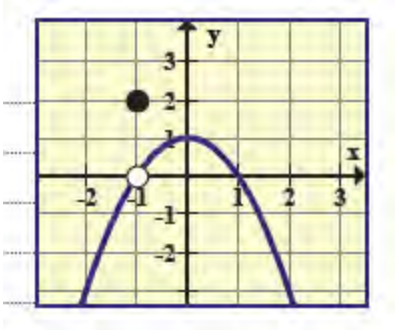
a) كل نقطة عدم إتصال (إنفصال)

b) أي نقطة يمكن التخلص من الإنفصال عندها وأي منها لا يمكن ؟ اذكر الأسباب التي اعتمدت عليها في إجابتك.

$$(27) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x \neq -1 \\ 2 & , \quad x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ (فجوة) يمكن التخلص من

$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = 0$ وذلك بجعل



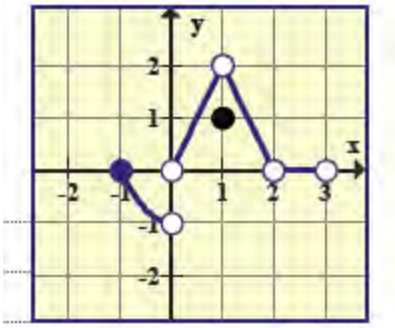
$$(28)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , -1 \leq x < 0 \\ 2x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ -2x + 4 & , 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

$x = 0$ قفزة , $x = 1$ (فجوة) يمكن التخلص من

x , $x = 2$, (فجوة) يمكن التخلص من

$= 3$ (فجوة) يمكن التخلص من

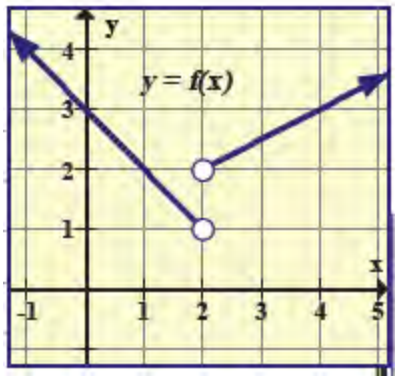
$a \in \{1, 2, 3\}, f(a) = \lim f(x)$ وذلك بجعل



$$(29) f(x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$x = 2$ قفزة

$\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$ لأن



Hilal Hussein Ahmed

أوجد:-

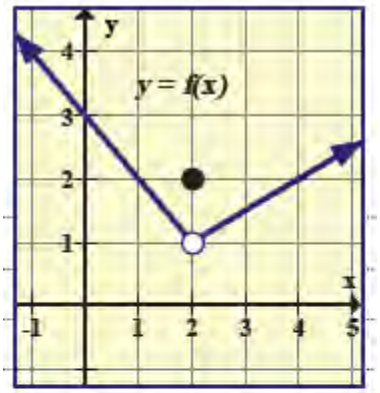
(a) كل نقطة عدم إتصال (إنفصال)

(b) أي نقطة يمكن التخلص من الإنفصال عندها وأي منها لا يمكن ؟ اذكر الأسباب التي اعتمدت عليها في إجابتك.

$$(30) f(x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 2 \\ 2 & , x = 2 \\ \frac{x}{2} & , x > 2 \end{cases}$$

(فجوة) يمكن التخلص من $x = 2$

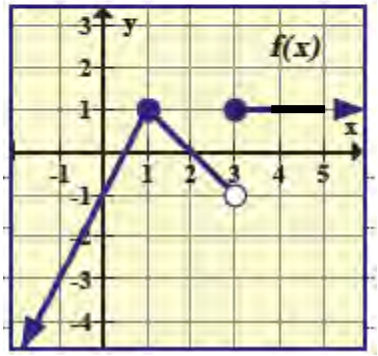
وذلك بجعل $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 1$



$$(31) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 1 \\ -x + 2 & , 1 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

قفزة $x = 3$

لأن $\lim_{x \to 3-} f(x) \neq \lim_{x \to 3+} f(x)$



مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الرابع عشر:-

أوجد نقاط الإنفصال للدالة . حدد نوع الإنفصال .

$(36)\ f(x)=x^2+3x-5$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R	$(37)\ f(x)=x+2$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R
$(38)\ f(x)=\sqrt[3]{3x+2}$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R	$(39)\ f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R
$(40)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R لا توجد أصفار للمقام	$(41)\ y=\sqrt{2x+3}$ الدالة متصلة علي $x\geq\frac{-3}{2}$ أي الفترة $\left[\frac{-3}{2},\infty\right[$ (مجالها)
$(42)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R	$(43)\ y=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ فجوة) يمكن التخلص من $x=2$, لانهائي $x=3$)
$(44)\ f(x)=\lvert x-1\rvert$ لا توجد نقاط إنفصال لأن الدالة متصلة علي R	$(45)\ y=[x]$ جميع الأعداد الصحيحة نقاط إنفصال
$(46)\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$ فجوة) يمكن التخلص من $x=1$, لانهائي $x=3$)	$(47)\ f(x)=\dfrac{x+1}{4-x^2}$ لانهائي $x=\pm2$
$(48)\ f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}$ لانهائي $x=1$	$(49)\ f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$ قفزة) لا يمكن التخلص منها

Hilal Hussein Ahmed

$(50)\ y = \cot x$

نقاط الإنفصال {حيث n عدد صحيح $\forall x \in \{n\pi$,

$(51)\ f(x) = ln(x+1)$

الدالة متصلة علي $x > -1$ أي الفترة $(-1, \infty)$ (مجالها)

السؤال الخامس عشر:-

(52) هل يمكن تعريف : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ عند $x = 1$ لتصبح دالة متصلة ؟ فسر .

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = -2$$ موجودة

∵ النهاية موجودة ∴ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = 1$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & , x \neq 1 \\ -2 & , x = 1 \end{cases}$$

أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند النقطة المشار اليها

$(53) f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x = -3$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = -6$$ موجودة

∵ النهاية موجودة ∴ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = -3$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$$

$(54) f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$ موجودة

∵ النهاية موجودة ∴ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = \frac{3}{2}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , x \neq 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$$

$(55) f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $x = 4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)} = 4$$ موجودة

∵ النهاية موجودة ∴ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي

تصبح متصلة عند $x = 4$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , x \neq 4 \\ 4 & , x = 4 \end{cases}$$

أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند النقطة المشار اليها $(56) f(x) = \frac{\sin x}{x} , x = 0$

$\because \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ موجودة $\therefore$ النهاية موجودة $\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = 0$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

$(57) f(x) = \frac{\sin 4x}{x} , x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4$ موجودة

$\because$ النهاية موجودة $\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = 0$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & , x \neq 0 \\ 4 & , x = 0 \end{cases}$$

(58)أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند $x = 0$: $f(x) = \frac{\sin 4x + 3x^2}{3x}$

$\because \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 4x + 3x^2}{x}}{\frac{3x}{x}} = \frac{4}{3}$ موجودة $\therefore$ النهاية موجودة $\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة حتي تصبح متصلة عند $x = 0$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x + 3x^2}{3x} & , x \neq 0 \\ \frac{4}{3} & , x = 0 \end{cases}$$

إذا علمت أن : $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(59) حدد نقاط الإنفصال للدالة $g(x)$ مبيناً نوع الإنفصال

(60) هل يمكنك إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

لجميع قيم x الحقيقية

(فجوة) يمكن التخلص من $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x - 2}$$

$= 3$ موجودة

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

(61) لتكن : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} & ,x\neq 2\\ \dfrac{-1}{4} & ,x=2\end{cases}$ هل f متصلة عند $x=2$ ؟ فسر .

$(i)f(2)=\dfrac{-1}{4}$ $(ii)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-1}{4}$

$(iii)\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\dfrac{-1}{4}$ لتوفر الشروط $x=2$ متصلة عند f ∴

(62) لتكن : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2\\ 3 & ,x=2\end{cases}$ هل f متصلة عند $x=2$ ؟ فسر .

$(i)f(2)=3$ $(ii)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}=3$

$(iii)\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}=3$ لتوفر الشروط $x=2$ متصلة عند f ∴

(63) لتكن : $g(x)=\begin{cases}2x^3 & ,x\geq 1\\ 3x-1 & ,x<1\end{cases}$ هل $g(x)$ متصلة عند $x=1$ ؟ فسر .

$(i)g(1)=2\times 1=2$, $(ii)\lim\limits_{x\to 1-}2x^3=\lim\limits_{x\to 1+}3x-1=2$

$(iii)\ g(1)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$ لتوفر الشروط $x=2$ متصلة عند g ∴

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

السؤال السادس عشر:-

أكمل الجدول التالي :-

الدالة	نوع الإنفصال عند $x = 0$	سبب الإنفصال
$f(x) = sin\frac{1}{x^2}$	تذبذبي	لأن الدالة تتذبذب تذبذباً كثيراً للوصول للنهاية
$g(x) = \frac{1}{x}$	لانهائي	$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$
$L(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , x \geq 0 \\ x + \cos x & , x < 0 \end{cases}$	قفزة	$\lim_{x\to 0+} L(x) \neq \lim_{x\to 0-} L(x)$
$N(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} & , x \neq 0 \\ 4 & , x = 0 \end{cases}$	فجوه	$N(0) \neq \lim_{x\to 0} N(x)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال السابع عشر:-

■ إذاً كانت $f(x)=\begin{cases}\sin x & ,-\pi\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \csc x & ,\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

أجب عمايلي :- هل $f(x)$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$ ولماذا ؟

$(i)\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\qquad$ $(ii)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\csc x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin x=1$

$(iii)\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=1 \implies$ لتوفر الشروط $x=\frac{\pi}{2}$ متصلة عند f $\therefore$

ابحث عن نقاط C في الفترة $\left[-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ تكون عندها $f(x)$ منفصلة . موضحاً نوع هذا الإنفصال .

$f(\pi)=\csc\pi=\frac{1}{\sin\pi}=$ غير موجودة $\implies x=\pi$ الدالة غير متصلة عند

$\implies$ مجموعة نقاط الإنفصال هي $\{\pi\}$

(■) أوجد قيمة لـ a لتجعل الدالة الآتية متصلة $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ,x<3\\ 2ax & ,x\ge3\end{cases}$

$6a=8\implies a=\frac{4}{3}\impliedby\therefore\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)=9-1=8\impliedby x=3$ الدالة متصلة عند

■ لتكن $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\ge2\\ ax+b & ,1<x<2\\ 5x-4 & ,x\le1\end{cases}$

a,b متصلة عند كل نقطة في مجالها فأوجد قيمة الثوابت

$\because$ الدالة متصلة عند $x=2,1\impliedby\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1,\lim\limits_{x\to2-}f(x)=4$

بحل المعادلتين معا $a+b=1\ ,2a+b=4$

■ لتكن دالة معرفة كالآتي : $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ,x>2 \\ 2x-4 & ,x\le 2 \end{cases}$

حيث $a\,,b$ ثوابت إذا كان $f(x)$ متصلة لكل x مجالها . ما العلاقة بين $a\,,b$ ؟

∵ الدالة متصلة عند $x=2 \Leftarrow \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$

العلاقة بين $a\,,b$ هي $4a+2b=0 \Rightarrow 2a+b=0$

■ إذا كانت : $h(x)=\dfrac{\sin x-2x}{\sin x}$

(*) وضح ان الدالة $h(x)$ غير متصلة عند $x=0$

∴ f غير متصلة عند $x=0$ لعدم توفر الشروط $\Rightarrow$ $h(0)=$ غير موجودة

(*) أعد تعريف الدالة $h(x)$ لتكون متصلة عند $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-2}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-2}{1}=-1$ موجودة $\Rightarrow$ $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x-2x}{\sin x} & ,x\neq 0 \\ -1 & ,x=0 \end{cases}$

اولاً : لتكن : $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ ، $G(x)=\frac{d}{dx}|x|$

(■) أوجد نقاط عدم اتصال كل من الدالتين $f(x),G(x)$

$G(x),$ عند $x=0$ (قفزة) *بالنسبة للدالة* $f(x)$ عند $x=2$ (فجوة) *بالنسبة للدالة*

(■) أي من هذة النقط يمكن التخلص من الإنفصال عندها لكل دالة علي حدي ؟ وضح السبب .

(فجوة) يمكن التخلص من $x=2$ وذلك بجعل $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

(قفزة) لا يمكن التخلص من $x=0$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

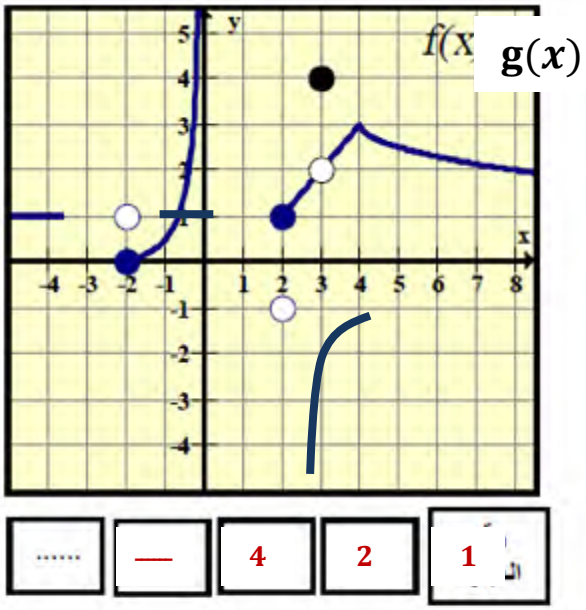
Hilal Hussein Ahmed

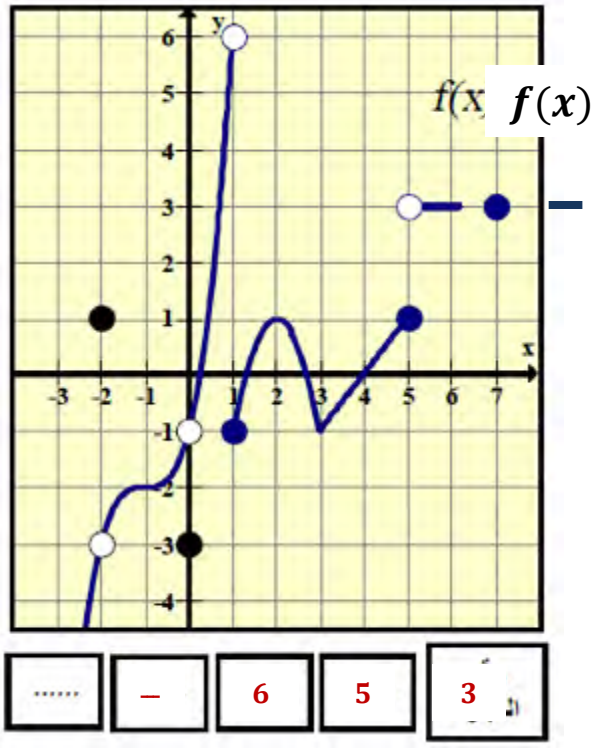
السؤال الثامن عشر:-

الرسم البياني المقابل يمثل بيان الدالتين $g(x), f(x)$

اقرأ العبارات التالية جيداً ثم ضع العبارة المناسبة أسفل الرسم الذي تحققة :

رقم العبارة	العبـــــــــــــــارة
(1)	نهاية الدالة عندما $x \to 3$ تساوي 2
(2)	نهاية الدالة عندما $x \to 2$ تساوي غير موجودة
(3)	تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x = 7$
(4)	لها انفصال لانهائي عند $x = 0$
(5)	لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x = -2$
(6)	الدالة متصلة عند $x = 3$





مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال التاسع عشر:-

■ لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\geq 2 \\ ax+b & ,1<x<2 \\ 5x-4 & ,x\leq 1 \end{cases}$

a,b متصلة عند كل نقطة في مجالها فأوجد قيمة الثوابت

∵ الدالة متصلة عند $x=2,1 \Leftarrow \lim_{x\to 1+} f(x)=1, \lim_{x\to 2-} f(x)=4$

بحل المعادلتين معا $a+b=1\ ,2a+b=4$

أكمل ..... $a=3\ ,b=-2$

***إذا علمت أن :1) متوسط تغير الدالة علي الفترة $[2,5]$ يساوي 4 .**

2) الدالة متصلة عند $x=1$

أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4 \Rightarrow \frac{5a+6-2a-6}{5-2}=4 \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4$$

بما أن الدالة متصلة عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1+}(ax+6)=\lim_{x\to 1-}(x^2+bx+6) \Rightarrow a+6=7+b$$

$$\Rightarrow 10-7=b \Rightarrow b=3$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(■) أوجد قيمة a, b علماً بأن الدالة متصلة حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 2}{x - 1} & , x \neq 1 \\ b & , x = 1 \end{cases}$$

بما أن الدالة متصلة عند $x = 1$

$$\because \lim_{x \to 1}(x - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1}(x^2 - ax + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\because \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = b \Rightarrow -1 = b$$

(■) أوجد قيمة a, b علماً بأن الدالة g متصلة $x = -1$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - bx - 3}{x + 1} & , x \neq -1 \\ ax + 5 & , x = -1 \end{cases}$$

بما أن الدالة متصلة عند $x = 1$

$$\because \lim_{x \to -1}(x + 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -1}(x^2 - bx - 3) = 0$$

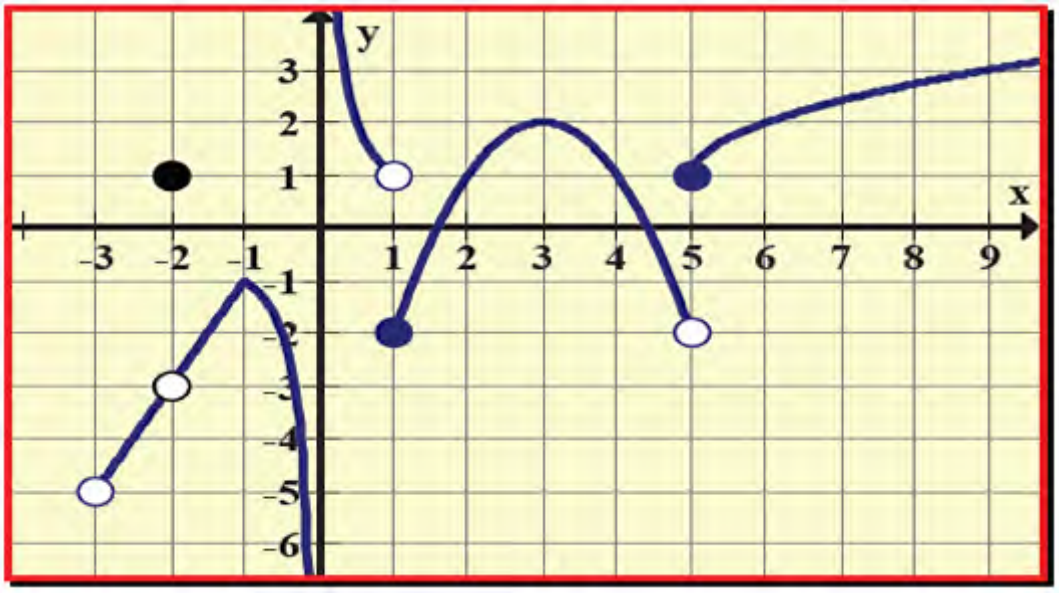
$$\Rightarrow 1 + b - 3 = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\because \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = -a + 5 \Rightarrow -4 = -a + 5 \Rightarrow a = 9$$

Hilal Hussein Ahmed

السؤال العشرين:-

أستخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ حيث $x \geq -3$ لإكمال الجدول



قيمة x_1	$\lim_{x\to x_1} f(x)$	هل الدالة متصلة عند $x = x_1$ فسر إجابتك	حدد نوع الإنفصال
$x_1 = -2$	-3	لا لأن $f(-2) \neq \lim_{x\to -2} f(x)$	يمكن التخلص منة
$x_1 = -1$	-1	نعم لأن $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$	متصلة
$x_1 = 3$	2	نعم لأن $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$	متصلة
$x_1 = 5$	غير موجودة	لا لأن $\lim_{x\to 5+} f(x) \neq \lim_{x\to 5-} f(x)$	قفزة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

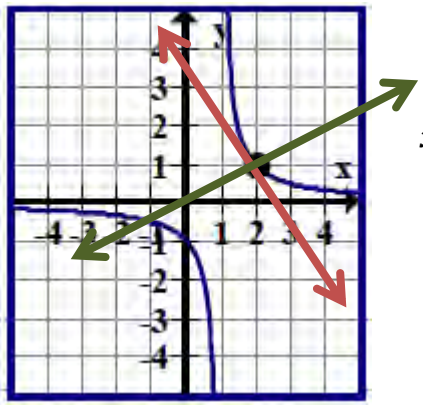
Hilal Hussein Ahmed

السؤال الواحد العشرين:-

(■) أوجد متوسط التغير الدالة $f(x) = \sqrt{4x+1}$ علي الفترة $[0\ ,2]$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\sqrt{4\times 2+1}-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

■ لتكن الدالة



$y = \frac{1}{x-1}$ أوجد : (a) ميل المنحني $x=2$. (b) معادلة المماس $x=2$

(c) معادلة الخط العمودي علي المماس $x=2$

$$(a)\ m(\text{الميل}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h-1}-\frac{1}{1}}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1-1-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)} = -1$$

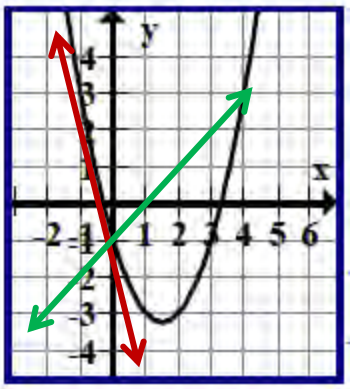
$$(b)x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (2,1) \Rightarrow y-1 = -1(x-2)$$

$\Rightarrow y = -x+3$ معادلة المماس

$(c)\ \ y = x-1$ معادلة العمودي

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed



■ لتكن الدالة $y = x^2 - 3x - 1$ أوجد :

(a) ميل المنحني $x = 0$. (b) معادلة المماس $x = 0$

(c) معادلة الخط العمودي علي المماس $x = 0$

$$(a)\ m(\text{الميل}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}\ (\text{أكمل}) = -3$$

$$(b) x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1) \Rightarrow y + 1 = -3(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -3x - 1 \text{ معادلة المماس}$$

$$(c)\ y = \frac{1}{3}x - 1$$

■) إذا كانت : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x < 2 \\ 4x - 7 & , x \geq 2 \end{cases}$ هل يوجد مماس لمنحني الدالة عند $x = 2$

فسر ؟

$$m(\text{الميل}) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{4(2+\Delta x) - 7 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4 \to (i)$$

$$m(\text{الميل}) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4$$

$$\to (ii)$$

نعم.الميل من جهة اليسار 4 والميل من جهة اليمين 4 . توجد نهاية من الجهتين .

■ أوجد ميل مماس للمنحني الدالة عند $x = 0$

إذا كانت : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x > 0 \\ -x^2 + 1 & , x \leq 0 \end{cases}$

$$m(\text{الميل}) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{(0+\Delta x)^2 + 1 - 1}{\Delta x} = 0 \to (i)$$

$$m(\text{الميل}) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-(0+\Delta x)^2 + 1 - 1}{\Delta x} = 0 \to (ii)$$

نعم الميل يساوي 0

(■) أوجد الميل المنحني عند النقاط المبينة $f(x) = |x|\,, (a)x = 2\,, \quad (b)\ x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} x & ,x > 0 \\ -x & ,x \le 0 \end{cases} \Rightarrow (a) \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{2 + \Delta x - 2}{\Delta x} = 1$$

$$(b) \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(-3+\Delta x) - f(-3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-(-3+\Delta x) - 3}{\Delta x} = -1$$

(■) أوجد الميل المنحني عند النقاط المبينة $f(x) = |x-2|\,, \quad x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & ,x > 2 \\ 2-x & ,x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - (1+\Delta x) - 1}{\Delta x} = -1$$

$$|x-2| = 2 - x \quad : x = 1$$

(■) حدد ما إذا كان المنحني له مماس عند النقطة , إذا كان كذلك أوجد ميلة , إذا لم يكن اشرح لماذا لا

$$(■)\ f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & ,x < 0 \\ 2x + 2 & ,x \ge 0 \end{cases} \quad ,x = 0$$

$$(a) \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{2 - 2(0+\Delta x) - (0+\Delta x)^2 - 2}{\Delta x} = -2$$

$$(b) \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{2(0+\Delta x) + 2 - 2}{\Delta x} = 2$$

$\Longrightarrow\Longrightarrow$ لايوجد يوجد ميل $\therefore$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$(\blacksquare)\ f(x)=\begin{cases}\sin x & ,0\le x<\frac{3\pi}{4}\\ & ,x=\frac{3\pi}{4}\\ \cos x & ,\frac{3\pi}{4}\le x\le 2\pi\end{cases}$$

$x=\frac{3\pi}{4}$ لا . فالدالة غير متصلة عند

لأن , $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}-}\sin x=\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}$

لكن . $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}$

السؤال الثاني والعشرين:-

(■) سقوط حر . سقط جسم من أعلي برج ارتفاع $100m$.

إذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بعد $t\ sec$ هو

$$,f(t)=100-4.9t^2m$$

(i) ما سرعة الجسم بعد $2\ sec$ من السقوط

(ii) السرعة المتوسطة للصاروخ بين الثانيتين الثالثة والخامسة . ؟

(iii) السرعة المتوسطة للصاروخ خلال أول ثانيتين .

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{100-4.9(2+h)^2-100+4.9\times4}{h}$$

Hilal Hussein Ahmed

$$= \lim_{h\to 0} \frac{100 - 19.6 - 19.6h - 4.9h^2 - 100 + 19.6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-19.6 - 4.9h) = -19.6$$

يتساقط الجسم بسرعة $19.6\ m/sec$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(5) - S(3)}{5 - 3} = \frac{100 - 4.9(5)^2 - 100 + 4.9(3)^2}{2}$$

$$= -39.2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(2) - S(0)}{2} = \frac{100 - 4.9(2)^2 - 100 + 4.9(0)^2}{2}$$

$$= -9.$$

السؤال الثالث والعشرين:-

(1) لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$f'(x) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(2) لتكن الدالة $f(x) = x^2$ أوجد $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)} \right) = 2a$$

(3) لتكن الدالة $f(x) = x^2$ أوجد $\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \lim_{h\to 0} \frac{h(2a + h)}{h} = 2a$$

نستنتج أن $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

لتكن الدالة $f(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ إذا كانت موجودة تسمي

مشتقة الدالة $f(x)$ عند $x=a$ ويسمي التعريف البديل

رموز المشتقة :

لتكن $y=f(x)$ يرمز للمشتقة الأولي بأحد الرموز التالية :

$$\frac{dy}{dx}\ ,f'(x)\ ,y'\ ,\frac{d}{dx}f(x),\frac{df}{dx}$$

(4) أوجد المشتقة للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ عند $x=2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\frac{-1}{4}$$

(5) أوجد المشتقة للدالة $f(x)=x^2-3x$ عند $x=-1$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-(1+3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-4)(x+1)}{x+1}=-5$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(6) أوجد المشتقة للدالة $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ واستخدمها

لإيجادها معادلة المماس للمنحني عند $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 3x + 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x - 3)(2x + 3)}{x - 3} = 9$$

$x = 3 \Longrightarrow f(3) = 14 \Longrightarrow (3\ ,14)$ النقطة هي

$$\Longrightarrow y = 9(x - 3) - 14 \Longrightarrow y = 9x - 41$$

(7) لتكن $f(x) = \frac{x}{x-2}$ أوجد بإستخدام التعريف $f'(x)$

هل يوجد مشتقة للدالة عند $x = 2$ فكر ؟

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-2} - \frac{x}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x + h)(x - 2) - x(x + h - 2)}{(x - 2)(x + h - 2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(x - 2)(x + h - 2)} = \frac{-2}{(x - 2)(x - 2)}$$

لا لأن الدالة غير متصلة عند $x = 2$:

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(8) استخدام المشتقة من جهة واحدة لتبيان أن الدالة التالية

ليس لها مشتقة عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \le 1 \\ 3x & , x > 1 \end{cases}$$

نبين كيف أن المشتقة لجهة اليمين عند $x = 1$ غير موجودة .

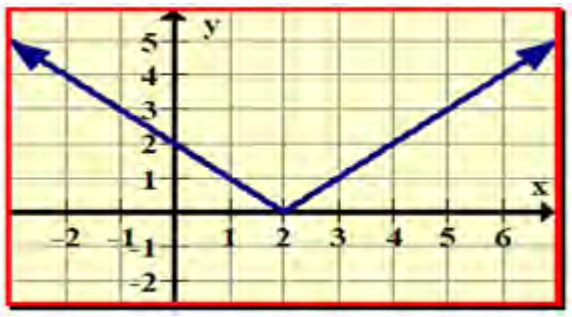
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{3(1+h) - (1)^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{2+3h}{h} = \lim_{h\to 0+} \left(\frac{2}{h} + 3\right)$$

وهي غير موجودة

السؤال الرابع والعشرين:-

استخدام الرسم البياني لإيجاد النهايات التالية أن أمكن



$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 1$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$$

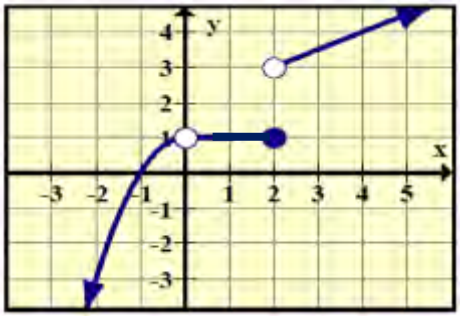
$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

= غير موجودة

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الخامس والعشرين:-

استخدام الرسم البياني لإيجاد النهايات التالية أن أمكن :



(1) $f(2) = 1$

(2) $f(0) =$ غير موجودة

(3) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(4) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ غير موجودة

(5) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$

(7) $f'(4) = \frac{1}{2}$

(8) $f'(0) =$ غير موجودة

(9) $f'(2^-) = 0$

(10) $f'(2^+) =$ غير موجودة

(11) $f'(2) =$ غير موجودة

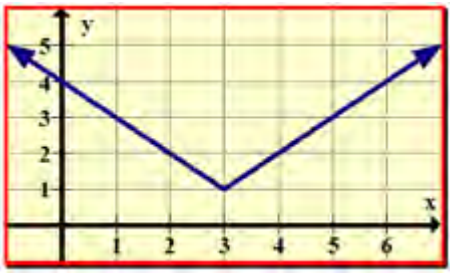
(12) $f(0) =$ غير موجودة

(13) $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

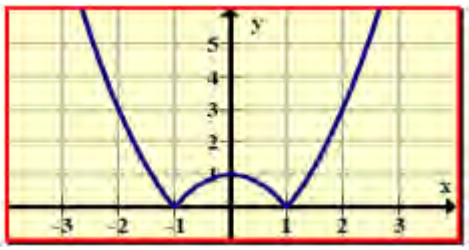
السؤال السادس والعشرين:-

(1) أوجد كل النقاط في مجال الدالة $f(x) = |x-3| + 1$ حيث تكون f غير قابلة للاشتقاق.



عند $x = 3$ لأن $f'(3^+) \neq f'(3^-)$

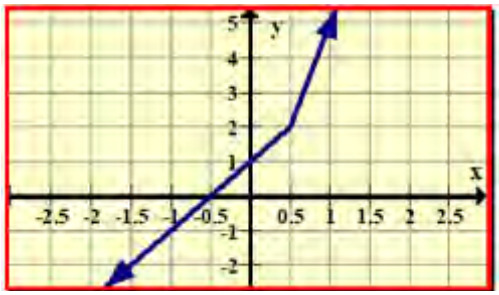
(2) أوجد كل النقاط في مجال الدالة $f(x) = |x^2 - 1|$ حيث تكون f غير قابلة للاشتقاق.



عند $x = 1$ لأن $f'(1^+) \neq f'(1^-)$

عند $x = -1$ لأن $f'(-1^+) \neq f'(-1^-)$

(3) لتكن : $f(x) = |2x-1| + 4x$ بين أن f



متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

عند $x = \frac{1}{2}$ غير قابلة للاشتقاق لأن $f'\left(\frac{1}{2}^+\right) \neq f'\left(\frac{1}{2}^-\right)$

$\because f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ تكون الدالة متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

$f(x)$ الدالة R مجموع دالتين متصلتين علي

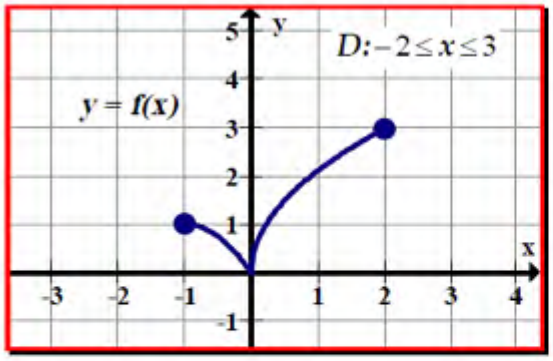
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(4) الرسم البياني للدالة علي فترة مغلقة D معلومة . عند أي من نقاط المجال يمكن للدالة أن تكون :

a) متصلة ولكن غير قابلة للاشتقاق . b) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق . c) قابلة للاشتقاق .

(5)

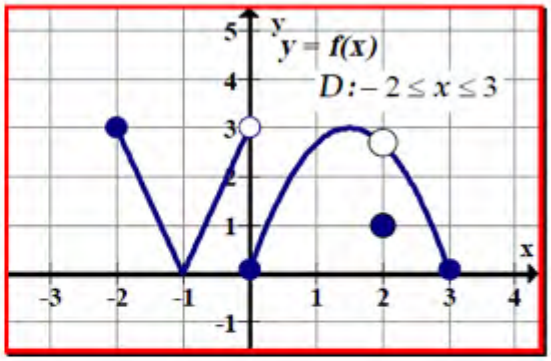


(a) $x = 0$

(b) لا يوجد

(c) $[-1, 2]$ ماعدا $\{0\}$

(6)

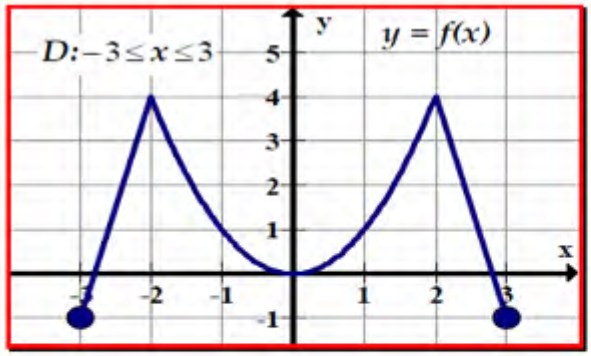


(a) $x = -1$

(b) $x = 0, x = 2$

(c) $[-2, 3]$ ماعدا $\{0, 2, -1\}$

(7)

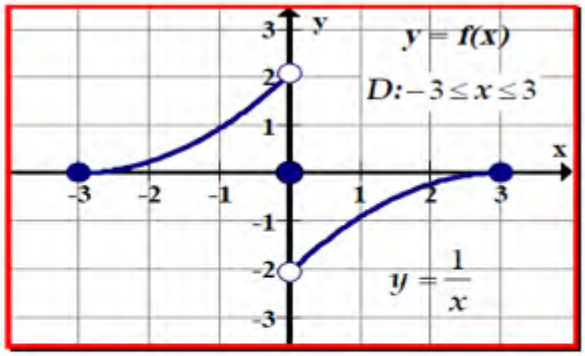


(a) $x = -2, x = 2$

(b) لا يوجد

(c) $[-3, 3]$ ماعدا $\{-2, 2\}$

(8)



(a) لا يوجد

(b) $x = 0$

(c) $[-3, 3]$ ماعدا $\{0\}$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال السابع والعشرين:-

أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق .

$(1)\ f(x) = 3\cos(|x|)$

$\because \cos(-x) = \cos(x)$ $\therefore$ الدالة زوجية

$\Leftarrow f(x)$ قابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية

$(2)\ f(x) = sin(|x|) - 1$

$\because sin(-x) = -sin(x)$ $\therefore$ الدالة فردية

نعد تعريف الدالة نجد أن $f(x) = \begin{cases} -\sin x - 1 & ,x < 0 \\ \sin x - 1 & ,x \geq 0 \end{cases}$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

الدالة قابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية ماعدا$\{0\}$ لأن $f'(0^-) \neq f'(0^+)$

(3)لدالة $f(x) = \begin{cases} x(-x) & ,x < 0 \\ x(x) & ,x \geq 0 \end{cases}$ نعد تعريف الدالة نجد أن

$f(x) = x|x| \implies x = 0$ ا قابلة للاشتقاق عند

الدالة قابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية (R)

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

استخدم تعريف المشتقة لبيان أن $\mathbf{g}$ قابلة للاشتقاق عند (4)

باعتبار $\mathbf{g}'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ وان $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x}^2 \sin\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} & , \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$: الدالة

$$\mathbf{g}'(\mathbf{0}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{0}+\boldsymbol{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{h}}$$

$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{0}+\boldsymbol{h})^2 \sin\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}+\boldsymbol{h}}\right) - \mathbf{0}}{\boldsymbol{h}}$$

$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\boldsymbol{h})^2 \sin\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{h}}\right) - \mathbf{0}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\boldsymbol{h})^2 \sin\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{h}}\right) - \mathbf{0}}{\boldsymbol{h}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{h} \sin\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{h}}\right) ,$$

$\left(\mathbf{g}'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\right.$ نستخدم نظرية الإحاطة نجد أن

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الثامن والعشرين:-

- **اختر الإجابة الصحيحة :-**

1. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = -2$

فإن قيمة $\lim_{x\to c} \frac{3f(x)}{f(x) - 5g(x)}$ تساوي

$a)\ 0$ ✓$b)\ 1$ $c)\ \frac{1}{5}$ $d)\ -3$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{2x + 3sin2x}{5tan4x}$

$a)\ 0$ $b)\ \frac{5}{2}$ ✓$c)\ \frac{2}{5}$ $d)\ 1$

3. $\lim_{t\to -5} [x]$

$a)\ -5$ $b)\ -6$ $c)\ -4$ ✓$d)$ غير موجودة

4. $\lim_{t\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{(19 - 3sec2t)}}\right)$

$a)\ \frac{1}{2}$ ✓$b)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $c)\ 2\sqrt{2}$ $d)\ -2\sqrt{2}$

5. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{3}}$

Hilal Hussein Ahmed

$a)\ 0$ $b)\ \infty$ ✓$c)\ 1$ $d)\ \frac{1}{3}$

6. $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$: الخط التقاربي الرأسي هو

✓$a)\ x = -4$ $b)\ x = -2\ , x = 4$

$c)\ x = -2$ $d)\ x = 1$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{sin(2x)}{x}$

$a)\ \infty$ $b)\ -\infty$ ✓$c)\ 0$ $d)\ 2$

8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}}$

✓$a)\ \infty$ $b)\ -\infty$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{2}{3}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}$

✓$a)\ \infty$ $b)\ 0$ $c)\ -\infty$ $d)$ غير موجودة

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + 12}{4 - 3x^2} = -2$

$a)\ a = -6$ ✓$b)\ a = 6$

$c)\ a = -12$ $d)\ a = 2$

Hilal Hussein Ahmed

السؤال التاسع والعشرين:-

- **س. أوجد معادلة المقارب المائل** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \hline -x^2 \pm 2x & \\ \hline -2x-1 & \\ \pm 2x \pm 4 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$y=x-2 \longrightarrow$ معادلة المقابل المائل

السؤال الثلاثون:-

- **س. أوجد النهايات :**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}\times\frac{cosx+1}{cosx+1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-1}{x(cosx+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\times\frac{sin\,x}{cosx+1}\right)$$

$$1\times\frac{0}{2}=0$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5}{x-1} = \dfrac{0}{0}$

الحل

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5\right)}{\frac{d}{dx}(x-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{6x-7\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+0}{1}$$

$$= \frac{6-\frac{21}{2}-\frac{1}{2}}{1} = \frac{6-\frac{22}{2}}{1} = 6-11 = -5$$

3. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

الحل

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \times \frac{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}$$ بالضرب في المرافق

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h^2+4h+\cancel{5}-\cancel{5}}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)}$$

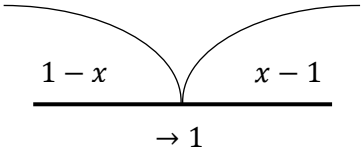
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Hilal Hussein Ahmed

4. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}} =$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة في جوار أيسر للعدد 0



5. $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2x}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(1-x)}} = -\sqrt{2}$$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos x}{\sin x.\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x} = \frac{1+1}{1\times 1} = 2$$

7. $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{\infty}\right)$

$$= \sin 0 = 0$$

8. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x^3-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)}\times\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}\,(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{siny}{-y}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

$y=1-\sqrt{x}$

$x\to 1$

$y\to 0$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$ بالضرب في المرافق

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}}{1}\times\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+9-\cancel{x}-4}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}=0$$

10. $\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{2-x}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\frac{-1}{0}=-\infty$

11. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x+1}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}$$

$=(-2-1)^2=9$ موجودة

يمكن إعادة التعريف

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x+1} & : \ x\neq -1\\ 9 & : \ x=1\end{cases}$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1}{2}$

موجودة يمكن إعادة التعريف

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & : \quad x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & : \quad x=1\end{cases}$$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2bx-x+2b}{x-1}=-3$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)-2b(x-1)}{x-1}=-3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)-2b(x-1)}{x-1}=-3$$

$$1-2b=-3 \implies 2b=4 \implies b=2$$

14. $\lim\limits_{x\to 3^+}2ax=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1)$

$$6a=9-1=8$$

$$a=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 3x}{27x^2}=k$

$\dfrac{1}{27}\times\left(\dfrac{3}{1}\right)^2=k$

$\dfrac{1}{27}\times 9=k \implies k=\dfrac{1}{3}$

16. $f(x)=sin^{-1}(x-7)$

$-1\le x-7\le 1$

$6\le x\le 8$ $[6,8]$ متصلة على

17. $f(x)=cos^{-1}(x+3)$

$-1\le x+3\le 1$

$-4\le x\le -2$ $[-4,-2]$ متصلة على

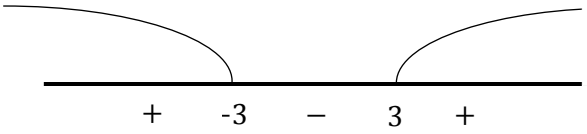
18. $f(x)=tan^{-1}x$

مجالها $\mathbb{R}$ ، هي متصلة على مجالها

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$



$x^2 - 9 \geq 0$

متصلة على $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

20. $f(x) = ln(6 - x)$

$6 - x > 0$

$x < 6$

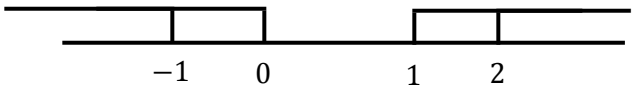
الدالة متصلة على $(-\infty, 6)$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 7}$

متصلة على $[-1, \infty)$ ما عدا $\{\pm\sqrt{7}\}$

22. $f(x) \dfrac{ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$x^2 - 1 > 0$



الدالة متصلة على $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

23. $f(x) = ln(sinx)$

$sinx > 0$

حيث n عدد صحيح متصلة على مجالها $(2n\pi\ , (2n+1)\pi)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الواحد الثلاثون:-

- **س. حدد كل نهاية (أجب بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو غير موجودة) :**

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x\cdot sinx)$

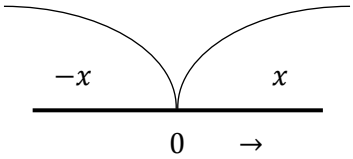
الحل

$$\lim_{x\to 0^+}(xsinx) = 0\times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} ln\,x = -\infty \qquad : \qquad x>0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} ln(x\cdot sinx) = -\infty$$

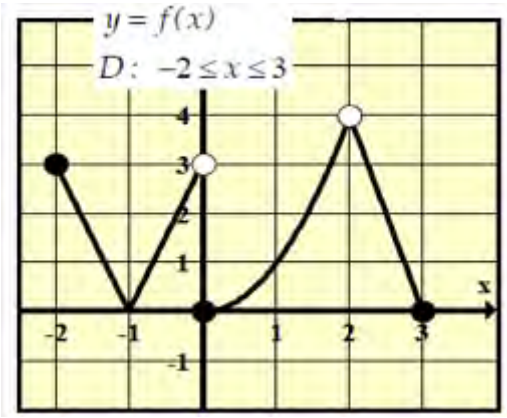
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1}$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{x^3+1} = 1$$

السؤال الثاني والثلاثون:-

■) الرسم البيانى للدالة على فترة مغلقة D معلومة . عند أي من نقاط المجال يمكن للدالة أن تكون :



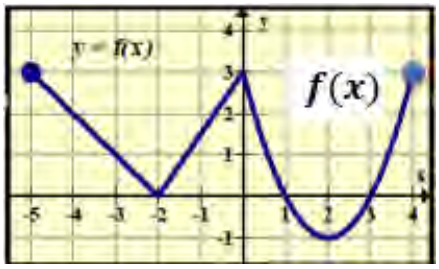
(1) متصلة وغير قابلة للاشتقاق. $\Longleftarrow x=-1$

(2) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق. $\Longleftarrow x=0, x=2$

(3) منفصلة ونوع الإنفصال. $\Longleftarrow x=0$(قفزة), $x=2$(فجوة)

(4) قابلة للاشتقاق. $\Longleftarrow [-2,3]$ ماعدا $\{-1,0,2\}$

(■) عند أية قيم x الواقعة في الفترة $[-5,4]$ تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق ؟ ما هو السبب في رأيك .



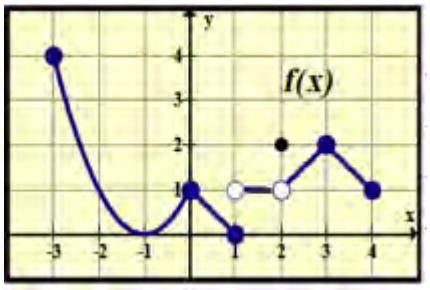
(i) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=-2$ لأن

$f'(-2^+) \neq f'(-2^-)$ **(ركن)**

(ii) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ لأن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$

(ناب)

■ عند أية قيم x الواقعة في الفترة $[-3,4]$ تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق فسر إجابتك .



(i) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$ لأن $f'(3^+) \neq f'(3^-)$

(ii) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$ لأن الدالة منفصلة $x=2$

(iii) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$ لأن الدالة منفصلة $x=1$

(iv) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ لأن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$

■ إذا كانت $f(x)=\sqrt{x-3}$ استخدم تعريف المشتقة لبيان أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}\times\left(\frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-3-1}{(x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Hilal Hussein Ahmed

■ إذا كانت $f(x)=\frac{3}{x-2}$ استخدم تعريف المشتقة لبيان أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=5$

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{3}{x-2}-1}{x-5}=\lim_{x\to 4}\frac{3-x+2}{(x-5)(x-2)}=\frac{-1}{3}$$

السؤال الثالث والثلاثون:-

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل دالة مماياتي :

(1) $y=5\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

(2) $y=\pi\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

(3) $y=x\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$

(4) $y=2x+1\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2$

(5) $y=\frac{x^2}{2}-x$

$\frac{dy}{dx}=x-1$

(6) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$

$\frac{dy}{dx}=x^2+x+1$

(7) $y=-x^2+3$

$\frac{dy}{dx}=-2x$

(8) $y=x^2+x+1$

$\frac{dy}{dx}=2x+1$

(9) $y=1-x+x^2-x^3$

$\frac{dy}{dx}=-1+2x-3x^2$

(10) $y=x^4-7x^3+2x^2+15$

$\frac{dy}{dx}=4x^3-21x^2+4x$

(11) $y=4x^{-2}-8x+1$

$\frac{dy}{dx}=-8x^{-3}-8$

(12) $y=5x^3-3x^5$

$\frac{dy}{dx}=15x^2-15x^4$

(13) $y=x^{-2}-5x+\pi^2$

$\frac{dy}{dx}=-2x^{-3}-5$

(14) $y=5x^2-3x^3$

$\frac{dy}{dx}=10x-9x^2$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$(15) y = \left(\frac{x^2}{5} + x - \frac{5}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5} + 1 + \frac{10}{x^3}$$

$$(16)\ y = (x+1)(x^2+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1(x^2+1) + 2x(x+1) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$(17)\ y = (3x^2 - x)(x^3 + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x-1)(x^3+2) + 3x^2(3x^2 - x)$$ (فك القواس وجمع)

$$(18)\ y = \frac{x}{x^2+3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1(x^2+3) - 2x(x)}{(x^2+3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$(19)\ y = \frac{x^2}{1-x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x(1-x^3) + 3x^2(x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4 + 2x}{(1-x^3)^2}$$

$$(20)\ y = \frac{x^2+3}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x) - 1(x^2+3)}{(x)^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 3}{(x)^2} = \frac{x^2 - 3}{(x)^2}$$

$$(21)\ y = \frac{2x+5}{3x-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(3x-2) - 3(2x+5)}{(3x-2)^2} = \frac{6x - 4 - 6x - 15}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{-19}{(3x-2)^2}$$

$$(22)\ y = \frac{x^2 + 5x - 1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(2x+5)x^2 - 2x(x^2 + 5x - 1)}{(x)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x^3 - 10x^2 + 2x}{(x)^4} = \frac{2x - 5x^2}{(x)^4}$$

$$(23)\ y=(x^2+1)(3x+2)^{-1}=\frac{(x^2+1)}{(3x+2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x(3x+2)-3(x^2+1)}{(3x+2)^2}$$

$$=\frac{6x^2+4x-3x^2-3}{(3x-2)^2}=\frac{3x^2+4x-3}{(3x-2)^2}$$

$$(24)\ y=(x^3-x)(2+x^2)^{-1}=\frac{(x^3-x)}{(2+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2-1)(2+x^2)-2x(x^3-x)}{(2+x^2)^2}$$ فك الأقواس وجمع

$$(25)\ y=\sqrt{x+2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$(26)\ y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الرابع والثلاثون:-

بفرض أن v, u دالتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$, وأن

$$v'(0) = 2\ , v(0) = -1, u'(0) = -3, u(0) = 5$$

أوجد قيم المشتقات التالية عند $x = 0$

$$(1)\ \frac{d}{dx}(uv)|_{x=0} = u'v + v'u = -3 \times -1 + 2 \times 5$$
$$= 3 + 10 = 13$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)|_{x=0} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
$$= \frac{-3 \times -1 - 2 \times 5}{(-1)^2} = -7$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}(7v - 2u)|_{x=0} = 7v' - 2u'$$
$$= 7 \times 2 - 2 \times -3 = 14 + 6 = 20$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

■ بفرض أن v, u دالتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 2$, وأن

$$v'(2) = 2\ , v(2) = 1, u'(2) = -4, u(2) = 3$$

أوجد قيم المشتقات التالية عند $x = 2$

$$(1)\ \frac{d}{dx}(uv)|_{x=2} = u'v + v'u = -4 \times 1 + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)|_{x=2} = \frac{v'u - u'v}{u^2} = \frac{2 \times 3 + 4 \times 1}{(-4)^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}(3v - 2u + 2uv)|_{x=2} = 3v' - 2u' + 2(u'v + v'u)$$
$$= 3 \times 2 - 2 \times -4 + 2 \times 2 = 6 + 8 + 4 = 18$$

السؤال الخامس والثلاثون:-

لتكن $(1)\quad :\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \le -2, x \ge 2 \\ 4 - x^2 & , -2 < x < 2 \end{cases}$

هل للدالة f مشتقة عند $x = -2, x = 2$ ؟ فسر .

$$f'(-2^+) = -2x|_{x=-2} = 4\ , f'(-2^-) = 2x|_{x=-2}$$
$$= -4 \implies f'(-2) = \text{غير موجودة}$$

$$f'(2^+) = 2x|_{x=2} = 4\ , f'(2^-) = -2x|_{x=2}$$
$$= -4 \implies f'(2) = \text{غير موجودة}$$

حيث $f'(-2^+) \neq f'(-2^-)\ , f'(2^+) \neq f'(2^-)$

(2) أوجد القيمة الوحيدة لـ k التي الدالة تجعل الدالة قابلة للاشتقاق عند

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x\le 1 \\ 3x+k & ,x>1 \end{cases} : x=1$$

$\because$ الدالة متصلة عند $x=1$ موجودة $f'(1) \Longrightarrow$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}(3x+k)=\lim_{x\to 1^-}x^3 \Longrightarrow 3-1=-k$$

$$\Longrightarrow k=-2$$

(3) لتكن :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 1 \\ 2x & ,x>1 \end{cases}$$

(■) أوجد $f'(x)$ حيث $x<1$ ؟ $\Longleftarrow f'(x)=2x : x<1$

(■) أوجد $f'(x)$ حيث $x>1$ ؟ $\Longleftarrow f'(x)=2 : x>1$

(■) أوجد $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$ ؟ $\Longleftarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x)=2\times 1=2$

(■) أوجد $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$ ؟ $\Longleftarrow \lim_{x\to 1^+} f'(x)=2$

(■) هل $\lim_{x\to 1} f'(x)$ موجودة أشرح ؟ $\Longleftarrow$

نعم لأن $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=2$

(■) هل $f'(1)$ موجودة أشرح ؟ $\Longleftarrow$

لا لأن الدالة منفصلة عند $x=1$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

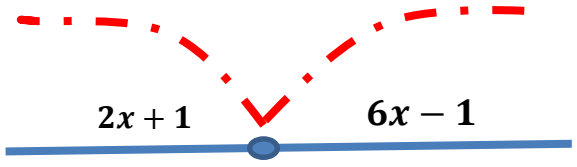
Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(4) لتكن : $f(x) = |2x - 1| + 4x$ بين أن f متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$.

$f(x)$ مجموع دالتين متصلتين علي R ∴ هي متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}^{+}\right) = 6 \ , f'\left(\frac{1}{2}^{-}\right) = 2 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}^{+}\right) \neq f'\left(\frac{1}{2}^{-}\right)$



(5) لتكن f دالة معرفة كالاني .

$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 1 \\ ax^2 + bx & , x \geq 1 \end{cases}$ حيث a , b ثابتان

(i) إذا كانت f متصلة لكل x , ماالعلاقة بين a, b ؟

∵ الدالة متصلة عند $x = 1 \Leftarrow \lim_{x \to 1^+}(ax^2 + bx) = \lim_{x \to 1^-}(3 - x)$

العلاقة هي $a + b = 2 \quad \Rightarrow (1)$

(ii) أوجد القيم الوحيدة لكل من a , b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق .

$2ax + b|_{x=1} = -1|_{x=1}$ الدالة قابلة للاشتقاق ∵$\Rightarrow 2a + b = -1 \Longrightarrow (2)$

بحل المعادلتين 1 , 2 معاً نجد أن :

$$a = -3 \ , b = 5$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(6) لتكن f دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x\le 1 \\ ax+b & ,x>1 \end{cases}$$ حيث a , b ثابتان

أوجد القيم لكل من a , b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق .

∵ الدالة متصلة عند $x=1$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)$

$$a+b=2 \quad \Longrightarrow\Longrightarrow (1)$$

الدالة قابلة للاشتقاق $a=2$ $\Rightarrow b=0$ $\quad a|_{x=1}=2x|_{x=1}$

(7) لتكن : $f(x)=\begin{cases} ax+2 & ,x<3 \\ x^2+b & ,x\ge 3 \end{cases}$ حيث

a , b ثابتين أوجد قيمة الثابتين a,b التي تجعل $f'(3)$ موجودة

∵ الدالة متصلة عند $x=1$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+b)=\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+2)$

$$9+b=3a+2\Rightarrow 3a-b=7 \quad \Longrightarrow\Longrightarrow (1)$$

الدالة قابلة للاشتقاق $a=6$ $\Rightarrow b=11$ $\quad 2x|_{x=3}=a|_{x=3}$

(8) لتكن f دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ,x>2 \\ 2x-4 & ,x\le 2 \end{cases}$$ حيث a , b ثابتان

(■) إذا كانت f متصلة لكل x , ماالعلاقة بين a,b ؟

∵ الدالة متصلة عند $x=2$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^+}(ax^2+bx)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-4)$

العلاقة هي $4a+2b=4-4 \Rightarrow 4a+2b=0 \Rightarrow (1)$

(9) أوجد القيم الوحيدة لكل من a , b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق .

∵ الدالة قابلة للاشتقاق $2ax+b|_{x=2}=2|_{x=2}$

$\Rightarrow 4a+b=2 \Longrightarrow (2)$

بحل المعادلتين 1 , 2 معاً نجد أن :

$$a=1\,,b=-2$$

(10) لتكن : $g(x)=\begin{cases}2x^3 & ,x\geq 1\\ 3x-1 & ,x<1\end{cases}$

(■) وضح ما إذا كانت الدالة $G(x)$ متصلة عند $x=1$.

$(i)\ f(1)=2\ ,(ii)\ \lim_{x\to 1^+}2x^3=\lim_{x\to 1^-}(3x-1)=2\ ,g(1)=\lim_{x\to 1}g(x)$

∴ الدالة $G(x)$ متصلة عند $x=1$.

(■) ابحث قابلية الإشتقاق للدالة $G(x)$ عند $x=1$.

$6x^2|_{x=1^+}=6\ ,3|_{x=1^-}=3 \Rightarrow f'(1^+)\neq f'(1^-)$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $\Longrightarrow x=1$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق .....أ.هلال حسين

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(11) لتكن f دالة معرفة كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & ,x\geq 2 \\ bx-5 & ,x<2 \end{cases}$$ حيث $a\,,b$ ثابتان

أوجد القيم لكل من $a\,,b$ التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق .

∴ الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^+}(ax^2+3)=\lim_{x\to 2^-}(bx-5)$$

$$4a+3=2b-5\Rightarrow 4a-2b=-8\Rightarrow (i)$$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق $2ax|_{x=2^+}=b|_{x=2^-}$

$$4a-b=0\Rightarrow (ii)$$

بحل المعادلتين $i\,,ii$ نجد أن :

$$b=8\ ,a=2$$

السؤال الخامس والثلاثون:-

(1) أوجد معادلة المماس والخط العمودي للمنحني

$y=x^2-5x+2$ عند $x=2$

$$y'(x)|_{x=2}=2x-5|_{x=2}\Rightarrow m(\text{الميل})=-1\,,x=2$$

$$\Rightarrow y=4-10+2=-4\Rightarrow (2,-4)$$ النقطة

$$(y+4)=-1(x-2)\Rightarrow y=-x-2$$ معادلة المماس

$$(y+4)=1(x-2)\Rightarrow y=x-6$$ معادلة الخط العمودي

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

(2) أوجد النقاط التي يكون عندها مماس أفقي للدالة

$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ وأوجد معادلتة

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1\ , x = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 + 1 - 2 = -2 \therefore$$

$(1,-2)\ , m|_{x=1} = 0 \ \Rightarrow y = -2$ معادلة المماس $|_{(1,-2)}$

$$, x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{-50}{27} \therefore \left(\frac{1}{3}, \frac{-50}{27}\right)$$

$, m|_{x=\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow y = \frac{50}{27}$ معادلة المماس $|_{\left(\frac{1}{3}, \frac{-50}{27}\right)}$

(3) أوجد معادلة الخط العمودي علي المنحني $y = \frac{1}{1+x}$ عند النقطة $(0,1)$

$$m|_{x=0} = \frac{-1}{(1+x)^2}|_{x=0} = -1 \Rightarrow 1 = \text{ميل الخط العمودي}$$

$$\Rightarrow (y-1) = 1(x-0) \ \Rightarrow y = x + 1 \text{ معادلة الخط العمودي}$$

(4) أوجد معادلة المماس علي للمنحني $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$

$$m|_{x=2} = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}|_{x=2} \Rightarrow m|_{x=1} = \frac{-1}{2}$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

معادلة المماس $\Rightarrow (y-1)=\frac{-1}{2}(x-2) \Rightarrow y=\frac{-1}{2}x+2$

(5) أوجد معادلة المماس علي للمنحني $y=\frac{4x}{1+x^2}$ عند النقطة $(1,2)$

$$m|_{x=1}=\frac{4(1+x^2)-8x^2}{(1+x^2)^2}|_{x=1} \Rightarrow m|_{x=1}=0$$

معادلة المماس $\Rightarrow (y-2)=0(x-1) \Rightarrow y=2$

(6) أوجد النقاط علي المنحني $f(x)=2x^3-3x^2-12x+20$ التي يكون المماس عندها موازيا لمحور السينات .

$$y'=6x^2-6x-12=0 \Rightarrow x=-1\,,x=2$$

$$x=-1 \Rightarrow y=-2-3+12+20=26 \therefore (-1,27)$$

$$x=2 \Rightarrow y=16-12-24+20=0 \therefore (2,0)$$

(7) أوجد معادلة خط المماس المنحني $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

$$m|_{x=1}=\frac{1(x+2)-1(x-1)}{(2+x)^2}|_{x=1}=\frac{1}{3}$$

معادلة خط المماس $\Rightarrow (y-0)=\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

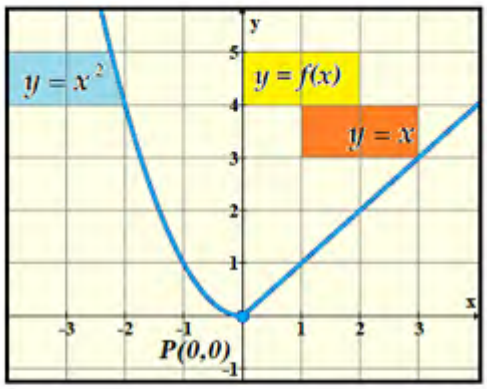
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(8) أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0 \Leftarrow f'(x)=\frac{-2}{x^3}$

قارن بين المشتقتين اليمنى و اليسرى لبيان أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة P .

(1)

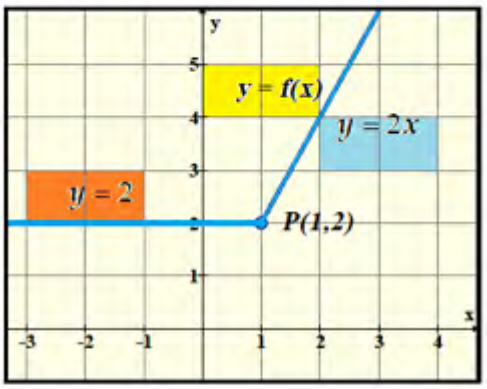


$y=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=0}=1|_{x=0}=1 \rightarrow (1)$

$y=x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=0}=0 \rightarrow (2)$

من $1\ ,2$ نجد أن الدالة غير للاشتقاق عند p

(2)

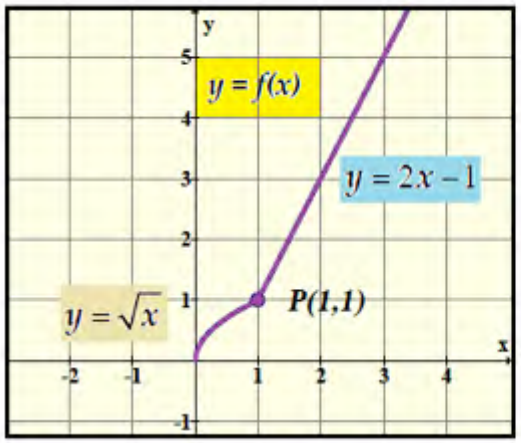


$y=2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=2|_{x=1}=2 \rightarrow (1)$

$y=2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=0 \rightarrow (2)$

من $1\ ,2$ نجد أن الدالة غير للاشتقاق عند p

(3)

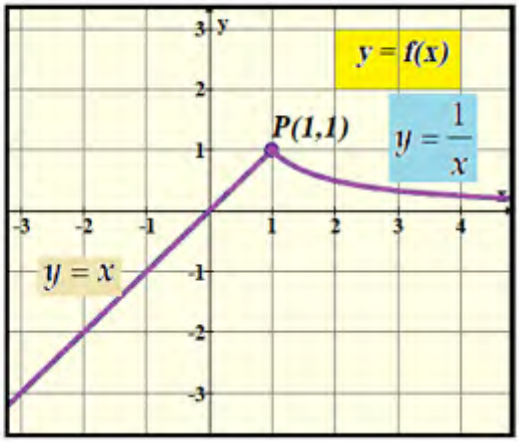


$y=2x-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=2|_{x=1}=2 \rightarrow (1)$

$y=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \rightarrow (2)$

من $1\ ,2$ نجد أن الدالة غير للاشتقاق عند p

(4)



$y=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=\frac{-1}{x^2}|_{x=1}=-1 \rightarrow (1)$

$y=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=1}=1 \rightarrow (2)$

من $1\ ,2$ نجد أن الدالة غير للاشتقاق عند p

(5) أكمل الجدول التالي لتوضح أياً من الدوال التالية

قابلة للاشتقاق أو غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

مع ذكر السبب ؟

الدالـــــــــــــة	قابلة للاشتقاق أو غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$	الســـــــــــــبب
$f(x) = \lvert x - 1 \rvert$	غير قابلة للاشتقاق	$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$
$G(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$	غير قابلة للاشتقاق	عند $x = \pm 1$ الدالة غير متصلة
$L(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 : x \geq 1 \\ 6x + 2 : x < 1 \end{cases}$	غير قابلة للاشتقاق	الدالة غير متصلة عند $x = 1$
$N(x) = \sqrt{x^2 + 5}$	قابلة للاشتقاق	موجودة $N'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+5}}$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

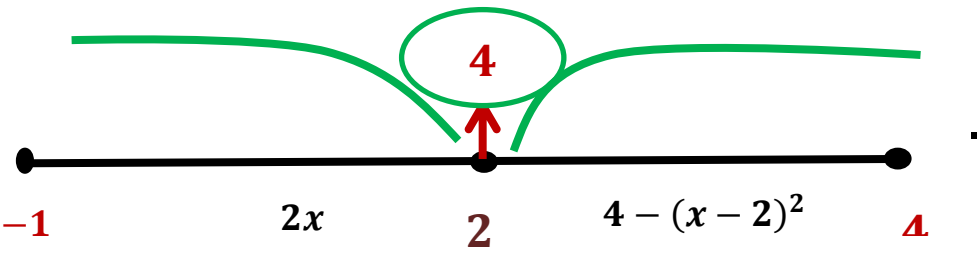
Hilal Hussein Ahmed

(6) أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة .

$$f(x)=\begin{cases}2x & ,-1\le x<2\\ 4-(x-2)^2 & ,2\le x\le 4\end{cases}$$

الحل

قابلة للاشتقاق على مجالها مبيناً خطوات الحل



.

الدالة متصلة على مجالها (أكتب السبب)

لكل c في مجال الدالة , $c\neq -1$ يكون :

$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ وبالتالي الدالة متصلة عندها .

$$f'(x)=\begin{cases}2 & ,-1\le x<2\\ ? & ,x=2\\ -2(x-2) & ,2<x\le 4\end{cases}$$

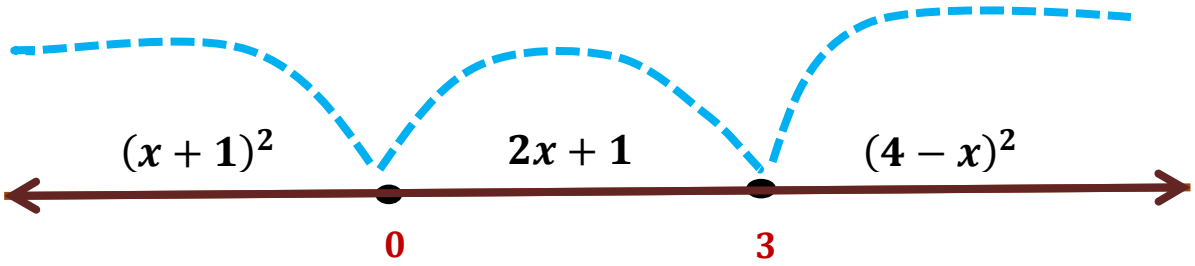
$$,f'(2^+)\neq f'(2^-)$$

الدالة قابلة للاشتقاق على $[-1,4]$ ماعدا $\{2\}$

(7) أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة

قابلة للاشتقاق على مجالها مبيناً خطوات الحل

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x\le 0\\ 2x+1 & ,0<x<3\\ (4-x)^2 & ,x\ge 3\end{cases}$$



أتبع نفس خطوات المثال السابق (6) مع ملاحظة أن الدالة غير متصلة عند $x=3$ أكمل الحل.....

السؤال السادس والثلاثون:-

أوجد : للدوال التالية : $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$

$$(1)\ y=x^2-5x+6\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x-5\ ,\frac{d^2y}{dx^2}=2\ ,\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

$$(2)\ y=5x^3-3x^2+\pi\Rightarrow \frac{dy}{dx}=15x^2-6x\ ,\frac{d^2y}{dx^2}=30x-6$$

$$,\frac{d^3y}{dx^3}=30$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$(3)\ y = x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4 - 12x^3 + 14x - 4$$

$$,\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 36x^2 + 14\ , \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 72x$$

السؤال السابع والثلاثون:-

قذفت كرة رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها $160\ ft/sec$ ويعين ارتفاع الكرة عن الأرض بالأقدام بعد t ثانية من قذفها بالعلاقة : $s(t) = 160\,t - 16\,t^2$ أوجـــــد

أقصى ارتفاع تصل إلية الكرة .

السرعة المتجهة ، والسرعة العددية للكرة عندما كانت على ارتفاع 256 قدماً فوق سطح الأرض .

عجلة الكرة في اللحظة t .

الزمن الذي تستغرقه الكرة لتعود إلى الأرض بدءاً من لحظة قذفها .

$$(1)\ v(t) = 160 - 32t = 0 \Longrightarrow$$

$$t = \frac{160}{32} = 5 \Longrightarrow s(5) = 160 \times 5 - 16 \times 25 = 400$$

$$(2)\ 256 = 160t - 16t^2 \Longrightarrow 16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$t = 2\ , t = 8 \Longrightarrow v(t)|_{t=2} = 160 - 32t|_{t=2} = 96\ ft/sec$$

السرعة العددية= $|96| = 96\ \ ft/sec$

$$v(t)|_{t=8} = 160 - 32t|_{t=8} = -96\ ft/sec$$

السرعة العددية= $|-96| = 96\ \ ft/sec$

$(3)\ a(t) = -32\ ft/sec^2$ (عند صعود الكرة تتبأطأ العجلة وعند هبوطها تتسارع)

(4) قذفت الكرة رأسياً للاعلي عند $t = 0$

وعادت الكرة إلي الأرض بعد 10 ثوان من بدء حركتها $160t - 16t^2 = 0 \Longrightarrow t = 0\ , t = 10$

Hilal Hussein Ahmed

وصف حركة جسيم يتحرك على خط

نوصف حركة الجسيم تبع ما يلي :

دراسة إشارة دالة السرعة (ومنها نحدد اتجاه حركة الجسيم) بوضع $v(t)=0$ ..... t_2 ، t_1 تنعدم عندها السرعة

t	0		t_1		t_2	
إشارة $v(t)$	+ + +		0	− − −	0	+ + +
اتجاه حركة الجسيم	في الاتجاه الموجب للمحور الاحداثي		توقف لحظة	في الاتجاه السالب للمحور الاحداثي	توقف لحظة	في الاتجاه الموجب للمحور الاحداثي

دراسة إشارة العجلة :

توضح التغير في سرعة الجسيم بوضع $a(t)=0$ ..... t_3 تنعدم عندها العجلة

t	0		t_3	
إشارة $a(t)$	− − −		0	+ + +
سرعة الجسيم	السرعة متناقصة		تنعدم عندها العجلة	السرعة متزايدة

دراسة إشارتي السرعة والعجلة :

t	0		t_1		t_3		t_2	
v	+		0	−	−	−	0	+
a	0	−	−	−	0	+	+	+
حركة الجسيم	متباطئا		متسارعا		متباطئا		متسارعا	

بالنظر إلى إشارتي السرعة والعجلة في جدول مشترك نحدد متى يكون الجسيم متسارعاً ومتى يكون الجسيم متباطئا

وصف حركة جسيم يتحرك على خط

الفـــــترة	[a , b]	[b, c]	[c, d]	[d, e]
v	+	−	−	+
a	−	−	+	+
وصف الحركة	- الجسيم صاعد . - الجسيم تباطؤ . - الجسيم يتحرك بعيدا عن نقط البدء .	- الجسيم هابط . - تسارع الجسيم . - يتحرك في اتجاه نقطة البدء .	- الجسيم هابط . - الجسيم تباطؤ . الجسيم يتحرك بعيدا عن نقط البدء .	الجسيم صاعد . الجسيم تسارع . الجسيم يتحرك في اتجاه نقطة البدء .

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

السؤال الثامن والثلاثون:-

بفرض أن الدالتين f و g ومشتقاتهما لهما القيم التالية عند $x=0$ و $x=1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	− 4	−1/3	−8/3

احسب قيم المشتقـــــات بالنسبة إلى x عند قيم x المعطاة للدوال المركبة :

$$(1)\ \frac{d}{dx}\big(5f(x)-g(x)\big), x=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\big(5f(x)-g(x)\big)|_{x=1}$$
$$= 5f'(1)+g'(1) = 1$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\big(f(x).g^3(x)\big), x=0$$
$$\Rightarrow \big(f'(0).g^3(0) + 3g^2(0)\,g'(0)f(0)\big)|_{x=0} = 6$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big), x=0 \Rightarrow \big(f'(g(0)).g'(0)\big)|_{x=0}$$
$$= \left(f'(1).\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{9}$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)+1}\right)|_{x=1} = \frac{f'(1)(g(1)+1)-g'(1)f(1)}{(g(x)+1)^2(1)} = 1$$

$$(5)\ \frac{d}{dx}\big(g(f(x))\big), x=0 \Rightarrow \big(g'(f(0)).f'(0)\big)$$
$$= (g'(1).5) = \frac{-40}{3}$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$(6)\ \frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big)^{-2},x=1$$

$$\Rightarrow -2\big(f(1)+g(1)\big)^{-3}\big(f'(1)+g'(1)\big)|_{x=1}$$

$$=2\times\left(\frac{-1}{3}+\frac{-8}{3}\right)=-6$$

$$(7)\ \frac{d}{dx}\Big(f\big(x+g(x)\big)\Big),x=0$$

$$\Rightarrow \Big(f'\big(0+g(0)\big).\big(1+g'(0)\big)\Big)|_{x=0}$$

$$=\left(f'(1).\frac{4}{3}\right)=\frac{20}{3}$$

السؤال التاسع والثلاثون:-

الدالتان $f(x)$, $g(x)$ قابلتان للاشتقاق ، والدالتان ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=1$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	2	-1	-3	2

أحسب ما يلي :-

$$(1)\ \lim_{x\to1}(f(x)+2g(x))$$ (x متصلة عند $x=1$ ∴ الدالتين قابلتين للاشتقاق عند $x=1$)

$$\lim_{x\to1}(f(x)+2g(x))=f(1)+2g(1)=2-2=0$$

$$(2)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{g(x)+x}{f(x)}\right)=\frac{-1+1}{2}=0$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(3)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{(f+g)(x)-1}{x-1}\right)=(f+g)'(1)$$
$$=f'(1)+g'(1)=-3+2=-1$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\left(2f(x)-\frac{g(x)}{3}\right)|_{x=1}=2f'(1)-\frac{g'(1)}{3}$$
$$=-6-\frac{2}{3}=\frac{-20}{3}$$

$$(5)\ \frac{d}{dx}(f(x)\times g(x)|_{x=1}=f'(1).g(1)+f(1).g'(1)$$
$$=3+4=7$$

$$(6)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{g}{f}\right)|_{x=1}=\frac{g'(1).f(1)-f'(1).g(1)}{f^2(1)}=\frac{3-4}{4}=\frac{-1}{4}$$

$$(7)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g}\right)|_{x=1}=\frac{-g'(1)}{g^2(1)}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$(8)\ \frac{d}{dx}\Big(g\big(f(1)\big)\Big)=\frac{d}{dx}\big(g(2)\big)=0$$

Hilal Hussein Ahmed

السؤال الأربعون:-

أوجد المشتقات :-

$$(1)\ f(x) = \sin x \times \sin x \Rightarrow f'(x)$$
$$= \cos x \sin x + \sin x \cos x$$
$$= 2 \sin x \cos x = sin\, 2x$$

$$(2)\ f(x) = cos^2 x \Rightarrow f'(x) = -2 \cos x \times \sin x = -sin\, 2x$$

$$(3)\ y = x^2\, sin\, x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x\, sin\, x + x^2 cos\, x$$

أوجد المشتقات $\frac{dy}{dx}$

$$(4)\ g(x) = \frac{x}{cos\, x} \Rightarrow g'(x) = \frac{cos\, x + x\, sin\, x}{cos^2 x}$$

$$(5)\ u(x) = \frac{sin\, x}{sin\, x + cos\, x} \Rightarrow$$

$$u'(x) = \frac{cos\, x\,(sin\, x + cos\, x) - (cos\, x - sin\, x)\, sin\, x}{cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

$$(6)\ u(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} \Longrightarrow$$

$$u'(x) = \frac{-\sin x\,(1-\sin x) + \cos x \cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$u'(x) = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

$$(7)\ f(x) = \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow f(x) = \sec x \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \sec x \tan x$$

$$(8)\ y = 2\sin x - \tan x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos x - \sec^2 x$$

$$(9)\ y = 4 - x^2 \sin x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \sin x - x^2 \cos x$$

$$(10)\ y = \frac{\cot x}{1+\cot x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{-\csc^2 x(1+\cot x) + \csc^2 x \cot x}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

Hilal Hussein Ahmed

أوجد المشتقات $\frac{dy}{dx}$:

$$(11)\ y=\frac{\cos x}{1+\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\sin x\,(1+\sin x)-\cos x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-1}{1+\sin x}$$

$$(12)\ y=\frac{1}{x}+5\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}+5\cos x$$

$$(13)\ y=\frac{x}{1+\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1\times(1+\cos x)+x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{1+\cos x+x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$(14) y=3x+x\tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=3+1\times\tan x+x\times\sec^2 x$$

$$(15)\ y=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\,(\cos x+\sin x)-\sin x\,(-\sin x+\cos x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x-\sin x\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}$$
$$=\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(15)\ y=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\ \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\,(\cos x+\sin x)+\sin x\,(\sin x-\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{(\cos x)^2}=\sec^2 x$$

حل آخر:

$$y=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\Longrightarrow y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}=\tan x-1$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\sec^2$$

$$(17)\ y=\frac{4}{x+\cos x}\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-4(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}$$

السؤال الواحد والأربعون:-

(1) أوجد معادلة المستقيم العمودي على الرسم البياني للمنحني

$$y=\frac{\tan x}{x}\ \text{عند}\ x=\frac{\pi}{4}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow y=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}\Longrightarrow \left(\frac{\pi}{4},\frac{4}{\pi}\right)\ \text{النقطة هي}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$$

Hilal Hussein Ahmed

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\pi-2}{2}}{\frac{\pi^2}{16}} = \frac{8(\pi-2)}{\pi^2}$$ ميل المماس

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8(2-\pi)}$$ ميل العمودي

$$y-\frac{4}{\pi} = \frac{\pi^2}{8(2-\pi)}\left(x-\frac{4}{\pi}\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{\pi^2}{8(2-\pi)}\left(x-\frac{4}{\pi}\right)+\frac{4}{\pi}$$ معادلة المستقيم العمودي

(2) أوجد معادلة المماس للرسم البياني للمنحني

$y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$

$x = \pi \Rightarrow y = 0+3 = 3 \Rightarrow (\pi, 3)$ النقطة هي

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x\ |_{x=\pi} = -1$$

$$y-3 = -1(x-\pi)$$

$$\Rightarrow y = -1(x-\pi)+3$$ معادلة المماس

(3) أثبت أن المنحنيات $y = \cos x$, $y = \frac{1}{\cos x}$ لهما مماس أفقي عند $x = 0$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = 0 = m_1 , \quad m_2 = \frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}|_{x=0} = 0$$

$\therefore$ لهما مماس أفقي عند $x = 0$ حيث: $m_1 = 0 , m_2 = 0$

(4) أوجد معادلة خط المماس للمنحني $y = x^2 \sin x$ عند $x = 3$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=3} = 2x\sin x + x^2\cos x|_{x=3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6\sin 3 + 9\cos 3 \approx -8$$

$x = 3 \Rightarrow y = 9\sin 3 \approx 1.27 \Rightarrow (3, 1.27)$ نقطة التماس

$$\Rightarrow y = -8(x-3) - 1.27 \Rightarrow y = -8x + 24 - 1.27 \Rightarrow y = -8x + 22.7$$

(5) أثبت أن المنحنيين $y = \cot x$, $y = \tan x$ ليس لهما مماسات أفقية.

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 : (1 \neq 0) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x} \neq 0 : (-1 \neq 0)$$

∴ ليس لهما مماسات أفقية

(6) لتكن $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ اوجد معادلة :

(a) المماس للمنحني عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$ (b) المماس الأفقي للمنحني عند Q.

$$\frac{dy}{dx}|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x} - \csc^2 x|_{x=\frac{\pi}{4}} = -2 - 2 = -4 \quad (a)$$

معادلة المماس $y - 4 = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x} - \csc^2 x = 0 \Rightarrow -\sqrt{2}\cos x = \csc^2 x \sin^2 x = 1$$

Hilal Hussein Ahmed

$$\Rightarrow \sin x = \frac{-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \quad (Q \text{ عند النفقطة})$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} + \cot\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow$$

$Q\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$ Q إحداثي النقطة $\Rightarrow y = 2$ معادلة المماس

(7) أوجـــــــــــــد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$\Rightarrow y'' = csc^2 x \csc x + \csc x \cot x \cot x$$

$$\Rightarrow y'' = \csc x \left(csc^2 x + cot^2 x\right)$$

(8) أوجـــــــــــــد y'' حيث $y = \theta \tan\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 1\tan\theta + \theta sec^2\theta \Rightarrow y''$$

$$= sec^2\theta + 1sec^2\theta + 2\theta \sec\theta \sec\theta \tan\theta$$

$$y'' = 2sec^2\theta + 2\theta sec^2\theta \tan\theta = sec^2\theta(2 + 2\theta \tan\theta)$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(9) أوجد $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$

$y' = -\sin x \ , y'' = -\cos x$

$, y''' = \sin x, \quad y^{(4)} = \cos x$

$999 \div 4 = 249\frac{3}{4}$

$\frac{d^{999}}{dx^{999}}(cos\, x) = y''' = \sin x \quad \Leftarrow 3$ لاحظ أن الباقي

(10) أوجد $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(sin\, x)$

$y' = cos\, x \ , y'' = -sin\, x$

$, y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x$

$725 \div 4 = 249\frac{1}{4}$

$\frac{d^{725}}{dx^{725}}(sin\, x) = y' = \cos x \quad \Leftarrow 1$ لاحظ أن الباقي

(11) بفرض أن $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ حيث $f(x) = y = \frac{1}{2}tan\, x$

(■) أوجد ميل المماس المرسوم للدالة $f(x)$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

ميل المماس $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}sec^2 x \ |_{x=\frac{\pi}{4}} = 1$

Hilal Hussein Ahmed

(12) ما العلاقة بين التماس المرسوم للدالة $f(x)$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

والمستقيم المار بالنقطة $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ والذي ميلة (-1) ؟ وضح إجابتك ؟

ثم أوجد معادلة هذا المستقيم .

(لأن حاصل ضرب الميلين $= -1$) متعامدان

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$ النقطة

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -1\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

(13) أوجد $\frac{dy}{dx}$ $y = cos(sin\, x)$

$$\frac{dy}{dx} = -cos\, x\, sin(sin\, x)$$

(14) إذا كانت $y = sin(ax)$ حيث a عدد ثابت أوجد $\frac{d^{80}y}{dx^{80}}$

موضحاً النمط الذي توصلت إلية من خلال الحل .

$$y' = a\, cos(ax) \Rightarrow y'' = -a^2\, sin(ax) \Rightarrow y''' = -a^3\, cos(ax)$$

$$y^{(4)} = a^4\, sin(ax)$$

$80 \div 4 = 20$

Hilal Hussein Ahmed

$\frac{d^{80}y}{dx^{80}} = a^{80}\sin(ax) \Leftarrow 0$ لاحظ أن الباقي

(15) إذا كانت $y = \frac{1}{x}$ فأوجد

$\frac{d^5y}{dx^5}$ ثم اكتب نمطاً لـــــ $\frac{d^ny}{dx^n}$ (حيث n عدد صحيح موجب)

$$y' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow y''' = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{24}{x^5}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \frac{-120}{x^6} = \frac{(-1)^5 5!}{x^{5+1}}$$

$\therefore$ حسب النمط المتبع نجد أن $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(16) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \times \cos x - 1 \times \sin x}{x^2}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

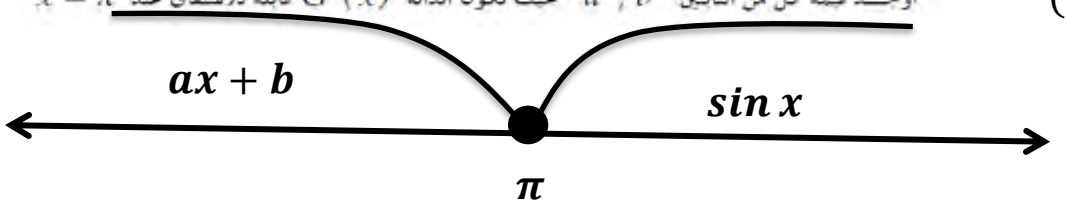
Hilal Hussein Ahmed

السؤال الثاني والأربعون:-

(1)

إذا كانت : $G(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq \pi\\ ax+b, & x<\pi\end{cases}$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a\ ,\ b$ حيث تكون الدالة $G(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x=\pi$



$G'(\pi^+)=G'(\pi^-)\Rightarrow \cos\pi=a\Rightarrow a=-1$ (المشتقة موجودة عند $x=\pi$)

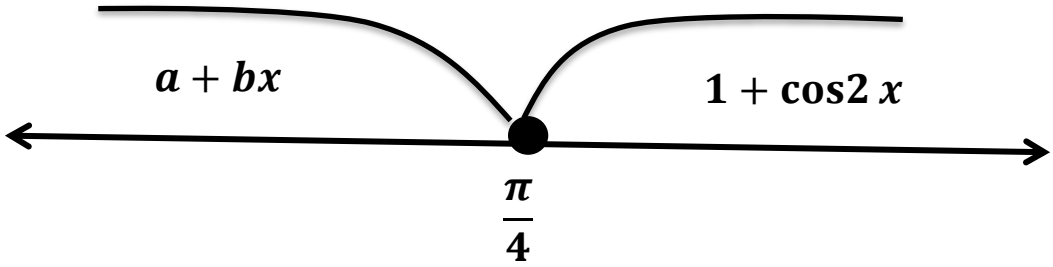
الدالة متصلة عند $x=\pi$ نجد ان

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin x=\lim_{x\to\pi^-}(ax+b)\Rightarrow 0=\pi a+b\Rightarrow b=\pi$$

(2)

إذا كانت : $f(x)=\begin{cases}1+\cos 2x & ,\ x\geq\frac{\pi}{4}\\ a+bx & ,\ x<\frac{\pi}{4}\end{cases}$

احسب قيمة كل من الثابتين $a\ ,\ b$ قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{\pi}{4}$



$$f'\left(\frac{\pi^+}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi^-}{4}\right)\Rightarrow -2\sin\frac{\pi}{2}=b\Rightarrow b=-2$$

(المشتقة موجودة عند $x=\frac{\pi}{4}$)

نجد ان $x=\frac{\pi}{4}$ الدالة متصلة عند

Hilal Hussein Ahmed

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{+}} 1+cos2x$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^{-}} (a+bx) \Rightarrow 1 = a + \frac{-2\pi}{4} \Rightarrow a = 1 + \frac{\pi}{2}$$

السؤال الثالث والأربعون:-

أوجد $\frac{dy}{dx}$:-

$$(1)\ y = sin(3x-1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\,cos(3x-1)$$

$$(2)\ y = tan(2x-x^3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2-3x^2)sec^2(2x-x^3)$$

$$(3)\ y = \frac{1}{cos(tan\,x)} \Rightarrow y = sec(tan\,x) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2x\,sec(tan\,x)\,tan(tan\,x)$$

$$(4)\ y = sin(7-3x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3\,cos(7-3x)$$

$$(5)\ y = \frac{x}{x^2+3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3-x(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$(6)\ y = 5cot\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-10}{x^2}csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(7)\ y = cos(sin\,x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\,cos\,x\,sin(sin\,x)$$

السؤال الرابع والأربعون:-

أوجد قيمة $(fog)'$ عند القيم المعطاة لـ x

$$(1) y = f(u) = u^5 + 1\ , u = g(x) = \sqrt{x}\ \ , x = 1$$

$$\frac{dy}{du} = 5u^4\ , \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(\sqrt{x}\right)^4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

$y = \left(\sqrt{x}\right)^5 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (fog)'(1) = 5\left(\sqrt{x}\right)^4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=1} = \frac{5}{2}$ ⟸ حل آخر

$$(2)\ f(u) = u + \frac{1}{cos^2 u}\ ,\quad u = g(x) = \pi x\ , x = \frac{1}{4}$$

$$f(u) = u + sec^2 u \Longrightarrow \frac{dy}{du} = 1 + 2sec^2 u\,tan\,u\ ,$$

$$\frac{du}{dx} = \pi\ , x = \frac{1}{4} \therefore u = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ (fog)'|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (1 + 2 \times 2 \times 1) \times (\pi) = 5\pi$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

حل آخر :-

$$\because (fog)'|_{x=\frac{1}{4}} = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(u) = 1 + 2sec^2 u \tan u \quad \Big| \quad g'(x) = \pi$$

$$f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \quad \Big| \quad g'\left(\frac{1}{4}\right) = \pi$$

$$\therefore (fog)'|_{x=\frac{1}{4}} = 5\pi$$

$$(2)\ y = f(u) = \frac{2u}{u^2+1}\ ,\quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1\ , x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{2(u^2+1) - 2u \times 2u}{(u^2+1)^2} = \frac{2-2u^2}{(u^2+1)^2}\ , \frac{du}{dx} = 20x + 1\ ,$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\therefore\ (fog)'|_{x=0} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{2-2}{4}\right) \times (1) = 0$$

ويمكن إستخدام الحل الآخر المذكور أعلاه كما في رقم 2

(3) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \cos(6x+2)$ وذلك بكتابة y كدالة الدالة مكونة من :

$$y = \cos u\ , u = 6x + 2$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin u\ , \frac{du}{dx} = 6\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -6\sin u = -6\sin(6x+2)$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

$$(4)\ y = \cos 2u\ , u = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = -2\sin 2u\ , \frac{du}{dx} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -6\sin 2u = -6\sin 2(3x+1)$$

(5) يتحرك جسيم علي محور السينات محور بحيث إن موضعة عند أي زمن $t \geq 0$

يعطي بالدالة : $S(t) = \cos(t^2 + 1)$ أوجد السرعة المتجهة للجسم كدالة في t

$$S'(t) = -2t\sin(t^2+1)$$

السؤال الخامس والأربعون:-

أوجـــــــــــــــــد $\frac{dy}{dx}$

$$(6)\ y = \sin^2(3x-2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$$

$$(7)\ y = (1 + \cos^2 7x)^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3(1+\cos^2 7x)^2 \times 14\cos 7x \times \sin 7x$$

$$= -21(1+\cos^2 7x)^2 \times \sin 14x$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

$(8)\ \ y = x^3(2x-5)^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2(2x-5)^3 + 6(2x-5)^2 \times x^3$$

$(9)\ \ y = sin^3x\ tan4x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3sin^2x\cos x\ tan4x\ + 4sec^2 4x\ sin^3x$$

$(10)\ \ y = \cos(5 - sinx) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \sin(5 - sinx)$

(11) أوجد ميل خط مماس المنحني

$y = sin^5x$ عند النقطة حيث $x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = 5sin^4x\ cos\ x\ |_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = 5\left(\frac{9}{16}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{45}{32}$$

(12) بين أن كل خط مماس المنحني $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ يكون موجباً .

$$y = (1-2x)^{-3} \Rightarrow y' = -3 \times -2(1-2x)^{-4}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6}{(1-2x)^4} : x \neq \frac{1}{2}$$ (الميل موجب مهما قيمة x)

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح..... أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

السؤال السادس والأربعون:-

(■) أوجد $y'' = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$:-

$$(1)\ y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \Rightarrow y'' = 2\sec^2 x \tan x$$

$$(2)\ y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x \Rightarrow y'' = 2\csc^2 x \cot x$$

$$(3)\ y = 9\tan\frac{x}{3} \Rightarrow y' = 9 \times \frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3} \Rightarrow y'' = 2\sec^2\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}$$

$$(4)\ y = \cot(3x-1) \Rightarrow y' = -3\csc^2(3x-1)$$

$$\Rightarrow y'' = 2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$$

السؤال السابع والأربعون:-

$(1) y^2 = x$ حيث $\frac{dy}{dx}$ أوجد

$$\Rightarrow\ 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} \Rightarrow y' = \frac{\pm 1}{2\sqrt{x}}$$

(2)أوجـــــــــد

(a) معادلة المماس على المنحني .

(b) معادلة الخط العمودي المماس فى النقاط المعطاة على منحني الدلات .

عند النقطة $(3, -4)$, $x^2 + y^2 = 25$

Hilal Hussein Ahmed

$(a)\ 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$

$\Rightarrow y' = \frac{3}{4}$ الميل (يمكن التعويض مباشرة بعد الإشتقاق)

$(b) y + 4 = \frac{3}{4}(x - 3)$ معادلة المماس

$y + 4 = \frac{-4}{3}(x - 3)$ معادلة العمودي

$(3)\ x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2\ ,3)$ عند النقطة

$(a)\ 2x + y + xy' - 2yy'|_{(2,3)} = 0$

$\Rightarrow 4 + 3 + 2y' - 6y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{7}{4}$ الميل

$(b) y - 3 = \frac{7}{4}(x - 2)$ معادلة المماس

$(b) y - 3 = \frac{-4}{7}(x - 2)$ معادل العمودي

$(4)\ x^2y^2 = 4$, $(1\ ,2)$ عند النقطة

$(a)\ 2xy^2 + 2yy'x^2 = 0 \Rightarrow$

$2 \times 1 \times 4 + 2 \times 2 \times y' \times 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-8}{4} = -2$ الميل

Hilal Hussein Ahmed

معادلة المماس $(b)y-2=-2(x-1)$

معادلة العمودي $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$

(5)أوجـــــــــد

(a) معادلة المماس على المنحني .

(b) معادلة الخط العمودي المماس فى النقاط المعطاة على منحني الدلات .

عند النقطة $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, $(\blacksquare)\ 2xy+\pi\sin y=2\pi$

$(a)\ 2(y+xy')+\pi y'\cos y\ |_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}=0\Longrightarrow$

$2\left(\frac{\pi}{2}+y'\right)+\pi y'\cos\frac{\pi}{2}=0\Longrightarrow$

$y'=-\frac{\pi}{2}$ الميل $\Longrightarrow$ معادلة المماس $(b)y-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}(x-1)$

معادلة العمودي $y-\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}(x-1)$

عند النقطة $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $(6)\ x\sin 2x=y\cos 2x$

$(a)\ (\sin 2x+2x\cos 2x)=y'\cos 2x-2y\sin 2x$

$\Longrightarrow y'=\frac{\sin 2x+2x\cos 2x+2y\sin 2x}{\cos 2x}\ |_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)}$

معادلة المماس $(b)x = \frac{\pi}{4}$ $\Longrightarrow$ الميل غير معرف $y' = -\frac{1+0+\pi}{0}$

$\Longrightarrow y - \frac{\pi}{2} = 0$ معادلة العمودي

(7) $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$ عند النقطة

$(a)\ 12x + 3(y + xy') + 4yy' + 17y'|_{(-1,0)} = 0$

$\Longrightarrow -12 - 3y' + 0 + 17y'|_{(-1,0)} = 0$

معادلة المماس $(b)y = \frac{6}{7}(x+1)$ $\Longrightarrow$ الميل $\Longrightarrow y' = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

$\Longrightarrow y = \frac{-7}{6}(x+1)$ معادلة العمودي

(8) $x^2 + xy\sqrt{3} + 2y^2 = 5$, $(\sqrt{3}, 2)$ عند النقطة

$(a)\ 2x + \sqrt{3}(y + xy') + 4yy'|_{(\sqrt{3},2)} = 0$

$\Longrightarrow 2\sqrt{3} + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}y') + 8y'|_{(\sqrt{3},2)} = 0$

$\Longrightarrow 11y' = -4\sqrt{3}$

معادلة المماس $(b)y - 2 = \frac{-4\sqrt{3}}{11}(x - \sqrt{3})$ $\Longrightarrow$ الميل $y' = \frac{-4\sqrt{3}}{11}$,

$\Longrightarrow y - 2 = \frac{11}{4\sqrt{3}}(x - \sqrt{3})$ معادلة العمودي

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(9) بين أن الميل $\frac{dy}{dx}$ معرف عند أي نقطة على منحني المعادلة : $2y = x^2 + \sin y$

$$2y' = 2x + y' \cos y \implies$$

$$y'(2 - \cos y) = 2x \implies y' = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\because \ -1 \le \cos y \le 1 \ \forall \ y \in R \implies$$

$\therefore$ الميل $\frac{dy}{dx}$ معرف عند أي نقطة على منحني المعادلة

$$2 - \cos y \neq 0 \ \forall \ y \in R$$

$$(10)\ y^2 = \frac{x-1}{x+1} \implies y^2(x+1) = (x-1)$$

$$\implies 2yy'(x+1) + y^2 = 1$$

$$2yy'(x+1) = 1 - y^2 \implies y' = \frac{1-y^2}{2y(x+1)}$$

$$(11)\ x^2 = \frac{x-y}{x+y} \implies x^2(x+y) = x - y$$

$$\implies x^3 + x^2 y = x - y$$

$$3x^2 + 2xy + y'x^2 = 1 - y'$$

$$\implies y'(x^2 + 1) = -3x^2 - 2xy + 1$$

Hilal Hussein Ahmed

$$y' = \frac{-3x^2 - 2xy + 1}{x^2 + 1}$$

$$(12)\ 1 = y'\ sec^2 y \implies y' = \frac{1}{sec^2 y} = cos^2 y$$

$$(13)\ x + sin\, y = xy \implies 1 + y'\ \cos y = y + xy'$$

$$\implies y'(\cos y - x) = y - 1$$

$$y' = \frac{y - 1}{\cos y - x}$$

السؤال الثامن والأربعون:-

الدالتان $f(x)$, $g(x)$ قابلتان للاشتقاق ، والدالتان ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 1$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	2	-1	-3	2

أحسب ما يلي :-

$$(1)\ \lim_{x \to 1}\big(f(x) + 2g(x)\big)$$

(الدالتين قابلتين للاشتقاق عند $x = 1$ $\therefore$ $x = 1$ متصلة عند)

$$\lim_{x \to 1}(f(x) + 2g(x)) = f(1) + 2g(1) = 2 - 2 = 0$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)+x}{f(x)}\right)=\frac{-1+1}{2}=0$$

$$(3)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{(f+g)(x)-1}{x-1}\right)=(f+g)'(1)$$

$$=f'(1)+g'(1)=-3+2=-1$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\left(2f(x)-\frac{g(x)}{3}\right)|_{x=1}$$

$$=2f'(1)-\frac{g'(1)}{3}=-6-\frac{2}{3}=\frac{-20}{3}$$

$$(5)\ \frac{d}{dx}(f(x)\times g(x)|_{x=1}$$

$$=f'(1).g(1)+f(1).g'(1)=3+4=7$$

$$(6)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{g}{f}\right)|_{x=1}=\frac{g'(1).f(1)-f'(1).g(1)}{f^2(1)}=\frac{3-4}{4}=\frac{-1}{4}$$

$$(7)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g}\right)|_{x=1}=\frac{-g'(1)}{g^2(1)}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$(8)\ \frac{d}{dx}\Big(g\big(f(1)\big)\Big)=\frac{d}{dx}\big(g(2)\big)=0$$

Hilal Hussein Ahmed

السؤال التاسع والأربعون:-

(1) إذا كانت : $x^2 + y^2 = 25$

فأثبت أن : $(y')^2 + yy'' + 1 = 0$

$$2x + 2yy' = 0 \Longrightarrow x + yy' = 0 \Longrightarrow$$

$$1 + y'y' + yy'' = 0 \Longrightarrow (y')^2 + yy'' + 1 = 0$$

(2) إذا كانت : $y = ax\cos x$

أوجد : y''

$$y' = a(\cos x - x\sin x) \Longrightarrow$$

$$y'' = a(-\sin x - \sin x - x\cos x)$$

$$y'' = -2a\sin x - ax\cos x$$

$$\Longrightarrow y'' + ax\cos x = -2a\sin x$$

(3) إذا كانت $y'' + y = sin\, x$ أوجد قيمة الثابت a

$$y'' + ax\cos x = -2a\sin x \Longrightarrow y'' + y$$

$$= -2a\sin x \Longrightarrow -2a\sin x = sin\, x$$

مقارنة المعاملات نجد أن :-

$$-2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{-1}{2}$$

Hilal Hussein Ahmed

(4)أوجد $\frac{dy}{dx}$ $6x^2 - 2xy + y^3 = 9$

$$12x - 2(y + xy') + 3y^2y' = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 2y - 2xy' + 3y^2y' = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 2y = 2xy' - 3y^2y' \Rightarrow 12x - 2y =$$

$$y'(2x - 3y^2) \Rightarrow y' = \frac{12x - 2y}{(2x - 3y^2)}$$

(4) أوجد معادلة خط المماس المرسوم للمنحني المعرف بارامترياً كالتالي :

$y = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $x = 3t^2 - 2t$ حيث $t = 0$.

نقطة التماس $t = 0 \Rightarrow x = 0 , t = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0 , 1)$

$$\frac{dy}{dt} = sec^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)|_{t=0} = 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t - 2|_{t=0} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{-2} = -1$$

معادلة خط المماس $y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$

(5) لتكن $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{3+2t}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $t = 3$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{2\sqrt{3+2t}}|_{t=3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t - 2|_{t=3} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{12}$$

(6) $y = 4x^{\frac{-2}{7}} + x^3 \Rightarrow$

$$y' = 4 \times \frac{-2}{7} x^{\frac{-9}{7}} + 3x^2 = \frac{-8}{7} x^{\frac{-9}{7}} + 3x^2$$

(7) $y = 6\sqrt{x} \Rightarrow y' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(8) $y = (x^2 - 5x)^{\frac{7}{2}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{7}{2} \times (x^2 - 5x)^{\frac{5}{2}} \times (2x - 5)$$

(9) $y = \sqrt{x^3 + 4x^2} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 8x}{2\sqrt{x^3 + 4x^2}}$

(10) $y = \sqrt{x^2 - 3} \Rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$(11)\quad y=\sqrt{x^2+1}\Longrightarrow y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(12)\quad y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Longrightarrow$$

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(13)\quad y=(1-6x)^{\frac{2}{3}}\Longrightarrow$$

$$y'=\frac{2}{3}\times(1-6x)^{-\frac{1}{3}}\times-6=-4(1-6x)^{\frac{-1}{3}}$$

$$(14)\quad y=\left(x^2-3x\right)^{\frac{5}{3}}\Longrightarrow$$

$$y'=\frac{5}{3}\times\left(x^2-3x\right)^{\frac{2}{3}}\times(2x-3)$$

$$(15)\quad y=\sqrt{4+\cos 5x}\Longrightarrow y'=\frac{-5\,sin\,5x}{2\sqrt{4+\cos 5x}}$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(16)\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\Longrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{x}}=\frac{y'}{2\sqrt{y}} \Longrightarrow y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$(17)\quad y=\left(x^3-1\right)^{\frac{3}{7}} \Longrightarrow$$

$$y'=\frac{3}{7}\times\left(x^3-1\right)^{\frac{-4}{7}}\times\left(3x^2\right)$$

السؤال الخمسون:-

(1) لتكن $f(x)=cos^2x$

أثبت أن :- $f''(x)+4f(x)=2$

$$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$$

$$\Longrightarrow f(x)''=-2\cos 2x$$

$$\therefore \text{الأيسر}=f''(x)+4f(x)=-2\cos 2x+4cos^2x$$

$$=-2\left(2cos^2x-1\right)+4cos^2x$$

$$=-4cos^2x+2+4cos^2x=2 \text{الأيمن}$$

الطرفان متساويان

(2) لتكن $f(2)=1\ ,f'(2)=3\quad ,\quad 3g'(2)=g(2)=6$

(■) أوجد عند $x=2$ قيمة : $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)+x}{g(x)}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)+x}{g(x)}\right)=\frac{(f'(x)+1)g(x)-g'(x)(f(x)+x)}{(g(x))^2}|_{x=2}$$

$$\frac{(f'(2)+1)g(2)-g'(2)(f(2)+2)}{(g(2))^2}=\frac{4\times6-2\times3}{36}\ \frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

السؤال الواحد الخمسون:-

(1) بين أن الدالة $f(x)=x^2$ تحقق شروط القيمة المتوسطة علي الفترة $[0\ ,2]$.

ثم أوجد c في المعادلة : $f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ علي هذة الفترة .

(1) الدالة حدودية متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,2]$

(2) $f'(x)=2x$ $\therefore$ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,2)$

$\therefore$ شروط النظرية متوفرة

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0\ ,2)$ يكون عندها $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$$\therefore\ 2c=\frac{4-0}{2-0}=2\Rightarrow c=1\in(0\ ,2)$$

Hilal Hussein Ahmed

(2) بين أن الدالة $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط المتوسطة علي الفترة $[-3\ ,\ 1]$.

ثم أوجد قيمة c .

(1) الدالة حدودية متصلة علي الفترة المغلقة $[-3\ ,\ 1]$

(2) $f'(x) = 3x^2$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(-3\ ,\ 1)$

∴ شروط النظرية متوفرة

في الفترة $(-3, 1)$ يكون عندها $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-3)}{1 + 3}$

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c

$$\therefore\ 3x^2 = \frac{2 + 26}{4} = 7 \Rightarrow c = -\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1.5 \in (-3\ ,\ 1)$$

(3) بين أن الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

تحقق شروط المتوسطة علي الفترة $[0\ ,\ 2]$.

ثم أوجد قيمة c .

(1) الدالة حدودية متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,\ 2]$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,\ 2)$

∴ شروط النظرية متوفرة

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

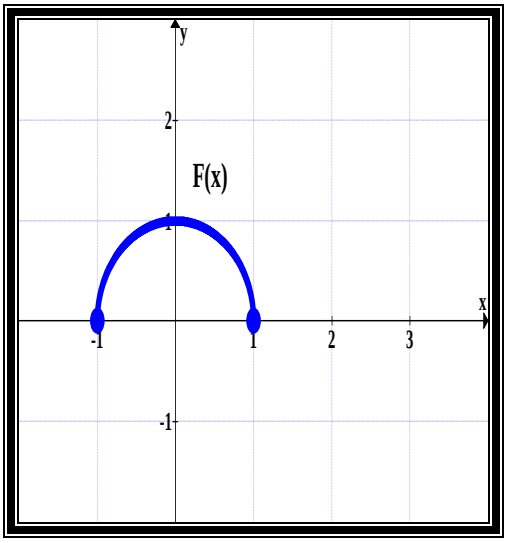
فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0,2)$ يكون

عندها $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$\therefore\ 3c^2-4c+1=\frac{2}{2}\Rightarrow c=\frac{4}{3}\in(0,2)\ ,\quad c=0\notin(0,2)$

(4)لتكن $f(x)=\sqrt{1-x^2}, A(-1,f(-1)), B(1,f(1))$ أوجد مماساً للدالة f

في الفترة $(-1,1)$ يكون موازياً للقاطع AB



(1) الدالة متصلة علي الفترة المغلقة $[-1,1]$

$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore$ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$\therefore$ شروط النظرية متوفرة

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة

$(-1,1)$ يكون عندها $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

$\therefore\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{0}{2}\Rightarrow c=0\in(-1,1)\ ,c=0\in(-1,1)$

فإن المماس الذي نبحث عنة أفقي. نجد أن $f'(x)=0$ عند $x=0$

حيث الرسم البياني لة مماس أفقي $y=1$

(5) بين أن الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقق شروط القيمة المتوسطة علي الفترة $[0\ ,\ 1]$.

ثم أوجد c الفترةفي $(a\ ,\ b)$ التي تحقق المعادلة : $f'(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

(1) الدالة حدودية متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,\ 1]$

(2) $f'(x) = 2x + 2$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,\ 1)$

∴ شروط النظرية متوفرة

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0,\ 1)$ يكون

$f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$ عندها

$$\therefore\ 2c + 2 = \frac{3}{1} \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \in (0\ ,\ 1)$$

(6) بين أن الدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط القيمة المتوسطة علي الفترة $[0\ ,1]$.

ثم أوجد c الفترةفي $(0\ ,1)$ التي تحقق المعادلة : $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

(1) الدالة متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,\ 1]$

(2) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,\ 1)$

∴ شروط النظرية متوفرة

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0,\ 1)$ يكون عندها $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$\therefore \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{27} \in (0\ ,1)$$

■) أثبت أن الدالة f لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة المعطاة $[a\ ,b]$

$$(6) f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad ,[-1\ ,1]$$

(1) الدالة متصلة علي الفترة المغلقة $[-1\ ,1]$

(2) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(-1\ ,1)$

∴ شروط النظرية غير متوفرة

فأنة قد توجد c أو لا توجد في الفترة $(-1,1)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

$$\therefore \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} = 1 \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{8} = \pm 0.192 \in (-1\ ,1)$$

$$(7)\ f(x) = |x-1|\ ,[0\ ,3]$$

(1) الدالة متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,3]$

الدالة غير قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,3)$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > 1 \\ \text{غير موجودة} & : x = 1 \\ -1 & : x < 1 \end{cases} (2)$$

∴ شروط النظرية متوفرةغير

فأنة قد توجد c أو لا توجد في الفترة $(0,3)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$(i) f'(x) = 1 \quad : x > 1 \implies 1 = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{1}{3}$ عبارة خطأ

$(ii) f'(x) = -1 \quad : x < 1 \implies -1 = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{1}{3}$ عبارة خطأ

$\therefore$ لا توجد c

$$(8) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x > 2 \\ 5x - 1 & : x \le 2 \end{cases} \quad , [0\ ,3]$$

الدالة غير متصلة عند $x = 2$ $\therefore$ غير متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,3]$

$\therefore$ شروط النظرية غير متوفرة

فأنة قد توجد c أو لا توجد في الفترة $(0, 3)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x > 2 \\ \text{غير موجودة} & : x = 2 \\ 5 & : x < 2 \end{cases}$$

$$(i) f'(x) = 2x + 1 \qquad : x > 2$$

$$\implies 2x + 1 = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{13}{3}$$

$$2x = \frac{13}{3} - 1 \implies x = \frac{5}{3} \in (0\ ,3)$$

$$(ii) f'(x) = 5 \qquad : x < 2$$

$$\implies 5 = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{13}{3} \text{ خطأ} \quad \text{عبارة} \quad \implies c = \frac{5}{3} \text{ يوجد} \quad \therefore$$

Hilal Hussein Ahmed

$$(9) f(x) = \begin{cases} \cos x & : -\pi \le x \le 0 \\ 1 + \sin x & : 0 < x \le \pi \end{cases} \quad , [-\pi , \pi]$$

(1) الدالة متصلة علي الفترة المغلقة$[-\pi , \pi]$لتوفر شروط الإتصال

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad (2)$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \sin x - 1}{x} = 1 \Longrightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة$(-\pi , \pi)$

∴ شروط النظرية غير متوفرة

فأنة قد توجدcأو لا توجد في الفترة$(-\pi , \pi)$ يكون عندها

$$f'(c) = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{\pi + \pi}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & : -\pi \le x < 0 \\ \cos x & : 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$-\sin c = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{\pi + \pi} = \frac{1}{\pi} \Longrightarrow$$

$$c = -\sin^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right) \Longrightarrow c \approx -0.3245, -2.818 \in (-\pi, 0)$$

$$\cos x = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{\pi + \pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$\Longrightarrow c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right) \Longrightarrow c \approx 1.247 \in (0, \pi)$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

القيم لـالممكنة c هي تقريباً $1.247\ , -0.324\ , -2.818$

(10) لتكن $f(x) = \sin x$

■ أثبت أن$f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[a\ , b\ ] = \left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]$

(1) الدالة مثلثية متصلة علي الفترة المغلقة $\left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]$

(2) $\therefore f'(x) = \cos x$ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $\left(0\ , \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ شروط النظرية متوفرة

■ أوجد قيم C في الفترة$(a\ , b)$ حيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $\left(0\ , \frac{\pi}{2}\right)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$

$$\therefore \cos c = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow c = 0.69 \in \left(0\ , \frac{\pi}{2}\right)$$

■ أكتب معادلة الوتر المار بالنقطتين$A(a\ , f(a))\ , B(b, f(b))$

$$A(0\ , 0)\ , B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \Longrightarrow\ y = \frac{2}{\pi}x$$

فسر هندسياً العلاقة بين الوتر AB والمماس المرسومة للدالة$f(x)$ عند C التي حصلت عليها .

المماس المرسوم من$C = 0.69$ يوازي الوتر المار AB

(11) لتكن $f(x) = x^2 + x + 1$

■ أثبت أن $f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[0\ ,4]$

(1) الدالة حدودية متصلة علي الفترة المغلقة $[0\ ,4]$

(2) $f'(x) = 2x + 1$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,4)$

شروط النظرية متوفرة

■ أوجد قيم C في الفترة $(0\ ,4)$ حيث $f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0\ ,4)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$

$\therefore\ 2c + 1 = 5 \Rightarrow c = 2 \in (0\ ,4)$

(12) لتكن $f(x) = x^2 - 2x + 3$

■ أثبت أن $f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[0\ ,3]$

(1) متصلةحدوديةالدالة علي الفترة المغلقة $[0\ ,3]$

(2) $f'(x) = 2x - 2$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(0\ ,3)$

شروط النظرية متوفرة

■ أوجد قيم C في الفترة $(0\ ,3)$ حيث $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة $(0\ ,3)$ يكون عندها $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

$\therefore\ 2c - 2 = 2 \Rightarrow c = 2 \in (0\ ,3)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح.....أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

(13) أنلتكن $f(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[2\ ,\ 5]$ وقابلة للإشتقاق علي الفترة $(2\ ,\ 5)$

أجب عما يلي .

■ هل $f(x)$ تحقق نظرية القيمة ؟المتوسطة

∵ $f(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[2\ ,\ 5]$ وقابلة للإشتقاق علي الفترة $(2\ ,\ 5)$(معطي)

نعم شروط النظرية متوفرة .

■ لتكن $2 \le f'(x) \le 5$ من أجمل جميع قيم x في الفترة $(2\ ,\ 5)$

أثبت أن $6 \le f(5) - f(2) \le 15$

∵ شروط النظرية متوفرة .

$$\therefore\ f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \quad \because 2 \le f'(x) \le 5 \implies 2 \le \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \le 5$$

$$\therefore\ 2 \le \frac{f(5) - f(2)}{3} \le 5 \quad \Rightarrow \therefore\ 6 \le f(5) - f(2) \le 15$$

(14) الدالة المرسوسة أمامك هي $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

■ وضح أن نظرية القيمة المتوسطة لا يمكن تطبيقها في الفترة $[-3\ ,\ 3]$

الدالة غير قابلة للإشتقاق $x = 0$ ∴ الدالة غير

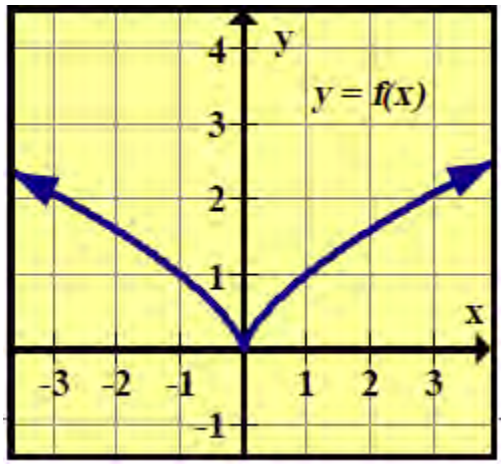
قابلة عليللإشتقاق الفترة المفتوحة $(-3\ ,\ 3)$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح.....أ.هلال حسين أحمد

■ اختر فترة يمكن تطبيق النظرية عليها ثم عين (C) تنص عليها النظرية في هذة الفترة .

$$(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$$

نختر الفترة $[0\ ,3]$



$f(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[0\ ,3]$ وقابلة للإشتقاق علي الفترة $(0\ ,3)$

الشروط متوفرة لنظرية القيمة المتوسطة

إذاً يوجد (C) بحيث يكون $f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$

$$c^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\Rightarrow c=1\in(0\ ,3)$$

(15) إذا كانت $N(x)=4-x+\sin x$ حيث x تقع في الفترة $[-\pi\ ,\pi]$

■ أثبت الدالةأن $N(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات علي الفترة $[-\pi\ ,\pi]$

(1) الدالة مجموع دالتين متصلتين علي الفترة المغلقة $[-\pi\ ,\pi]$

(2) $f'(x)=-1+\cos x$ ∴ قابلة للإشتقاق علي الفترة المفتوحة $(-\pi\ ,\pi)$

شروط النظرية متوفرة

Hilal Hussein Ahmed

■ أوجد قيم C في الفترة$(-\pi\ ,\pi)$ حيث $N'(c)=\dfrac{N(\pi)-N(-\pi)}{2\pi}$

∵ شروط النظرية متوفرة

فأنة توجد نقطة واحدة علي الأقل c في الفترة$(-\pi\ ,\pi)$ يكون

عندها $N'(c)=\dfrac{N(\pi)-N(-\pi)}{\pi-(-\pi)}$

$$\therefore\ -1+\cos c=-1\Rightarrow\cos c=0\Rightarrow c=\frac{\pi}{2}\ ,\frac{-\pi}{2}\in(-\pi\ ,\pi)$$

السؤال الثاني الخمسون:-

على فرض أن الدالة$f(x)=x^5+3x^3+2x+1$ (1)

أحسب $g'(7)$ لها دالة عكسية g

$$g'(7)=\frac{1}{f'(g(7))}\Rightarrow g'(7)=f^{-1}(7)=1$$

$$f'(x)=5x^4+9x^2+2\Rightarrow f'(1)=5+9+2=16$$

$$g'(7)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{16}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح.....أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ الدالة على فرض أن (2)

لها دالة عكسية g أحسب $g'(2)$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} \Rightarrow g'(2) = f^{-1}(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x + 4}} \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$g'(7) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

السؤال الثالث الخمسون:-

1) أوجد المشتقة $a)\ f(x) = 3e^{x^2}$

$b)\ g(x) = xe^{2/x}$, $c)\ h(x) = 3^{2x^2}$

الحل

من قاعدة السلسلة نحصل على

$$f'(x) = 3e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 3e^{x^2}(2x) = 6xe^{x^2}\ (a)$$

$b)$ باستخدام قاعدة ناتج الضرب و قاعدة السلسلة ، نحصل على

$$g'(x) = (1)e^{2/x} + xe^{2/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) = e^{2/x} + xe^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

Hilal Hussein Ahmed

$$= e^{2/x} - 2\frac{e^{2/x}}{x} = e^{2/x}(1 - 2/x)$$

c) في النهاية ، يوجد لدينا $h'(x) = 3^{2x^2} ln3 \frac{d}{dx}(2x^2)$

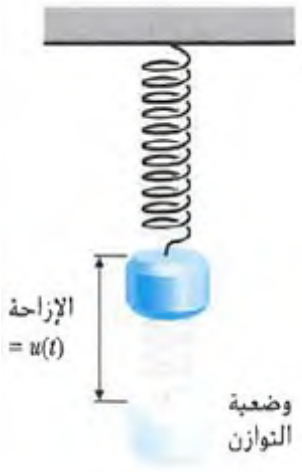
$$= 3^{2x^2} ln3(4x) = 4x(ln3)3^{2x^2}$$

(2) إذا صممنا مضائلة (أي مقاومة للحركة بسبب الاحتكاك على سبيل المثال) في نموذج نظام الزنبرك – الكتلة ، الإزاحة الرأسية في الزمن t. للكتلة المعلقة من زنبرط معين يمكن وصفها باستخدام

$$u(t) = Ae^{\alpha t}cos(\omega t) + Be^{\alpha t}sin(\omega t)$$

حيث يكون كل من B ، A ، α ، ω ثوابت بالنسبة إلى كل من

$a)\ u_1(t) = e^{-t}cost$ ، $b)\ u_2(t) = e^{-t/6}cos4t$



الحل

$$u_1'(t) = \frac{d}{dt}(e^{-t})cost + e^{-t}\frac{d}{dt}(cost)$$

$$= e^{-t}\frac{d}{dt}(-t)\ cost - e^{-t}sint$$

$$= -e^{-t}(cost + sint)$$

$$u_2'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t/6}\right)cos(4t) + e^{-t/6}\frac{d}{dt}[cos(4t)]$$

$$= e^{-t/6}\frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{6}\right)cos(4t) + e^{-t/6}[-sin(4t)]\frac{d}{dt}(4t)$$

Hilal Hussein Ahmed

$$= -\frac{1}{6}e^{-t/6}cos(4t) - 4e^{-t/6}sin(4t)$$

(3) . أوجد مشتقة ما يأتي : $a)\ f(x) = xlnx$ ، $b)\ g(x) = lnx^3$

$$c)\ h(x) = ln(x^2+1)$$ ،

الحل

$a)$ باستخدام قاعدة ناتج الضرب ، نحصل على

$$f'(x) = (1)lnx + x\left(\frac{1}{x}\right) = lnx + 1$$

$b)$ يمكننا بالتأكيد استخدام قاعدة السلسلة لاشتقاق $g(x)$.

و مع ذلك ، باستخدام خصائص اللوغاريتمات ، تذكر أن بإمكاننا إعادة كتابة $g(x)lnx^3 = 3lnx$ ، و نحصل على

$$g'(x) = 3\frac{d}{dx}(lnx) = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

$c)$ باستخدام قاعدة السلسلة $h(x)$ ، نحصل على

$$h'(x) = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

و كبديل لتعليم قانون اشتقاق منفصل للدالة الأسية العامة ، لاحظ أنه بالنسبة إلى أي أساس $a > 0$ ، يمكننا كتابة

$$a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x.lna}$$

باستخدام القواعد العادية للأسس و اللوغاريتميات. ثم يتبع ذلك

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{xlna} = e^{xlna} \times \frac{d}{dx}(xlna)$$
$$= e^{xlna} \times lna = a^x \times lna$$

(4) يتم تحديد تركيز c لمادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{10}{9e^{-20t}+1}$. بيّن أن $c'(t) > 0$ و استخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 10.

الحل

$$c(t) = 10(9e^{-20t} + 1)^{-1}$$

$$c'(t) = -10(9e^{-20t} + 1)^{-2}\frac{d}{dt}(9e^{-20t} + 1)$$

$$= -10(9e^{-20t} + 1)^{-2}(-180e^{-20t})$$

$$= 1800e^{-20t}(9e^{-20t} + 1)^{-2}$$

$$= \frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t} + 1)^2} > 0$$

بما أن التركيز يزداد في كل الوقت ، فإن التركيز يظل دائماً أقل من القيمة المحددة $\lim_{t\to\infty} c(t)$ و التي يمكن حسابها بسهولة لتصبح

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10}{9e^{-20t}+1} = \frac{10}{0+1} = 10$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح.....أ.هلال حسين أحمد

Hilal Hussein Ahmed

(5) أوجد مشتقة $f(x) = x^x$ ، لـ $x > 0$.

الحل

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي المعادلة

$$ln[f(x)] = ln(x^x) = xlnx$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = (1)lnx + x\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = lnx + 1$$

$$f'(x) = (lnx + 1)f(x) = (lnx + 1)x^x$$

==========

6. في ظل ظروف معينة ، تكون معادلة فإن دير والز التي تربط بين الضغط P الحجم V لغاز معين هي

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03) = 9.7$$

على فرض أن المعادلة السابقة تحدد ضمنياً الحجم V كدالة للضغط P استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5, 1)$.

الحل

$$\frac{d}{dP}\left[\left(P + 5V^{-2}\right)(V - 0.03)\right] = \frac{d}{dP}(9.7)$$

$$\left(1 - 10V^{-3}\frac{dV}{dP}\right)(V - 0.03) + \left(P + 5V^{-2}\right)\frac{dV}{dP} = 0$$

$$\left[-10V^{-3}(V - 0.03) + P + 5V^{-2}\right]\frac{dV}{dP} = 0.03 - V$$

Hilal Hussein Ahmed

$$\frac{dV}{dP} = \frac{0.03 - V}{-10V^{-3}(V - 0.03) + P + 5V^{-2}}$$

$$V'(5) = \frac{0.03 - 1}{-10(1)(0.97) + 5 + 5(1)} = \frac{-0.97}{0.3} = -\frac{97}{30}$$

==========

(7) احسب مشتقة

$$a)\ cos^{-1}(3x^2) \quad ، \quad b)\ (sec^{-1}x)^2 \quad ، \quad c)\ tan^{-1}(x^3)$$

الحل

$$a)\ \frac{d}{dx}cos^{-1}(3x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{-6x}{\sqrt{1-9x^4}}$$

$$b)\ \frac{d}{dx}(sec^{-1}x)^2 = 2(sec^{-1}x)\frac{d}{dx}(sec^{-1}x)$$

$$= 2(sec^{-1}x)\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$c)\ \frac{d}{dx}[tan^{-1}(x^3)] = \frac{1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

==========

(8) حساب مشتقة $f(x) = sinh^2(3x)$

الحل

$$f'(x) = \frac{d}{dx}sinh^2(3x) = \frac{d}{dx}[sinh(3x)]^2$$

Hilal Hussein Ahmed

Hilal Hussein Ahmed

$$= 2sinh(3x)\frac{d}{dx}[sinh(3x)]$$

$$= 2sinh(3x)cosh(3x)\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 2sinh(3x)cosh(3x)(3) = 6sinh(3x)cosh(3x)$$

(9) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ ، في الفترة $[0, 1]$.

الحل

f قابلة للإشتقاق و متصلة لكل قيم x ، بما أن $f(x)$ كثيرة حدود و جميع كثيرات الحدود متصلة و قابلة للإشتقاق دائماً ، كذلك لدينا $f(0) = f(1) = 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Longrightarrow f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0$$

$c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.5774$ ليست في الفترة $(0, 1)$

$$c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42265 \in (0, 1)$$

(10). اثبت أن $|sin\, a| \leq |a|\ for\ all\ a$

الحل

$$cosc = \frac{sina - sin0}{a - 0} \Longrightarrow cosc = \frac{sina}{a}$$

$$-1 \leq cosc \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{sina}{a} \leq 1$$

$$\left|\frac{sina}{a}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{|sina|}{|a|} \leq 1$$

$$|sina| \leq |a|$$

==========

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح.....أ.هلال حسين

تابعوا قناة فن الرياضيات هلال حسين

على اليوتيوب

شرح كامل

الفصل الدراسي الأول

2019/2018

Hilal Hussein Ahmed