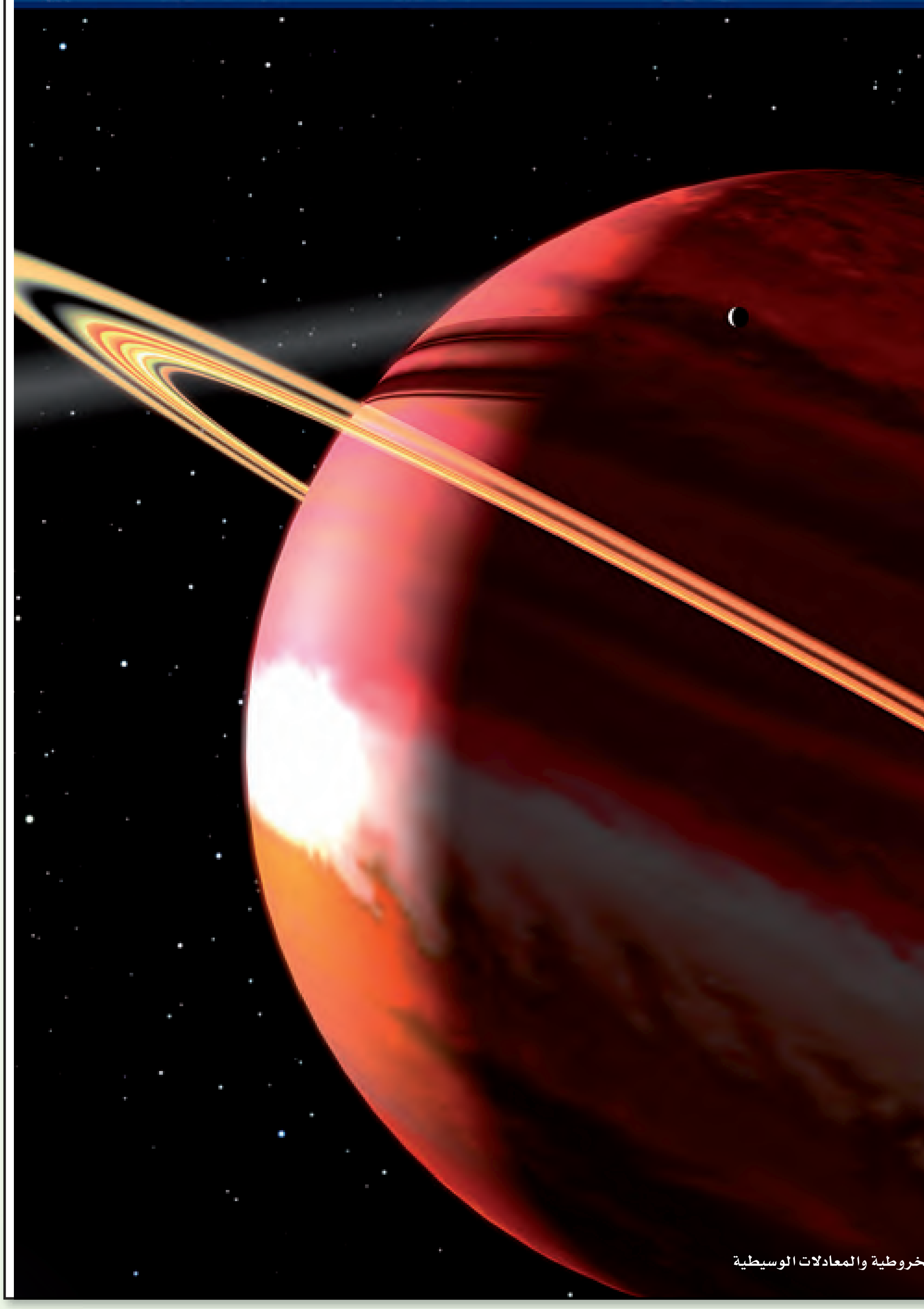
ملاحظات

الفصل 4

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية
Conic Sections and Parametric Equations



فيما سبق:

درستُ حلّ المعادلات المثلثية. الدرس (3-5)

والآن:

- أُحّلُ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضية تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

170 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مشروع الفصل

مجرات سماوية

يُطبّق الطلاب ما تعملوه حول القطوع المخروطية؛ ليتفحّصوا مسارات أجسام في الفضاء.

- يمكن للطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة طلاب أو أربعة، تقوم كل مجموعة باختيار الكوكب المفضل، ثم تبحث عن حقائق حول مداره البيضي حول الشمس. اطلب إلى كل مجموعة تحديد أبعد مسافة، وأقرب مسافة بين الشمس والكوكب. اطلب إليهم كذلك تحديد نسبة الاختلاف المركزي $\frac{c}{a}$ لمدار كل كوكب.
- اطلب إليهم تحديد كل من a, b, c من خلال افتراض أن الشمس تقع في إحدى البؤرتين، ومن خلال أبعد نقطة للكوكب عن الشمس وأقرب نقطة، إضافة إلى نسبة الاختلاف المركزي.
- اطلب إليهم تحديد معادلة المدار البيضي، مع تحديد أطول مسافة بين الكوكب والشمس، والمسافة بين موقع الكوكب عندما يكون في موقع المنتصف بين أبعد نقطة وأقرب نقطة للكوكب في المدار.
- كل قطع مخروطي له نسبة اختلاف مركزي مصاحب له. اطلب إلى الطلاب البحث عن قاعدة نسبة الاختلاف المركزي لكل من القطوع الناقصة والدوائر والقطوع المكافئة والقطوع الزائدة.

المفردات: قدّم المفردات في الفصل باستعمال الطريقة الآتية:

تعريف: القطع المخروطي هو الشكل الناتج عندما يقطع مستوى ما مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس. تتضمّن بعض القطوع المخروطية الشائعة القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.

مثال: $x^2 + 4y - 6 = 0$ هي معادلة قطع مخروطي.

سؤال: هل تمثل المعادلة $x^2 - 6y + 5 = 0$ قطعًا مخروطيًّا؟ بيّن ذلك. نعم هي معادلة قطع مكافئ

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي: **(1-6) انظر الهامش.**

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$
2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$
6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$
7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة. **$x = 25$; $(0, 550)$; $(25, 543.75)$**

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ **1**
9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$ **108**
10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **-8**
11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$ **100**
12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$ **121**
13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$ **-172**

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن: **(14, 15) انظر الهامش.**

14) $x^2 + 8x$
15) $x^2 - 18x$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: **(16, 17) انظر ملحق الإجابات.**

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$
17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثل هذا الموقف، ومثّلها بيانيًا. **$f(x) = \frac{50}{x}$ وللتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.**

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

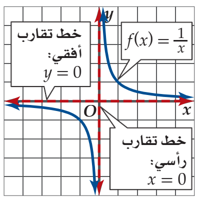
المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:
1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.
2) ربّع الناتج في الخطوة (1).
3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



التهيئة للفصل الرابع

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد المعالجة المناسبة.
تساعدك العبارة "إذا ... فقم" في الجدول أدناه على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين

فقم بمراجعة محور التماثل والمقطع y والرأس وإيجاد المميز للدالة التربيعية، وإكمال المربع للعبارات التربيعية، وتمثيل دوال المقلوب بيانيًا.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من التمارين

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

1) $x = 1; -12; (1, -13)$
2) $x = -1; 6; (-1, 5)$
3) $x = -1; -8; (-1, -10)$
4) $x = 3; 3; (3, -15)$
5) $x = 2; -4; (2, -16)$
6) $x = -1; -1; (-1, -5)$
14) $x^2 + 8x + 16$
15) $x^2 - 18x + 81$

4-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

تحديد الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًّا.

الدرس 4-1

تحليل معادلات قطوع مكافئة وتمثيلها بيانيًّا.

كتابة معادلات قطوع مكافئة.

ما بعد الدرس 4-1

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطع المكافئ بعد الدوران.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما لون الزئبق؟ فضي
- لماذا يُعدّ الزئبق بديلًا جيدًا عن المرآة الاعتيادية أو المعدن المصقول؟ لأنه يعكس صور الأشياء.
- لماذا يُعدّ القطع المكافئ الشكل المثالي لمرآة التلسكوب؟ لأن القطع المكافئ يعكس كل الأشعة المتوازية القادمة إلى النقطة نفسها.

4-1 القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًّا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحَلل معادلات قطوع مكافئة، وأمثلها بيانيًّا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

القطع المخروطي conic section

المحل الهندسي locus

القطع المكافئ parabola

البؤرة focus

الدليل directrix

محور التماثل axis of symmetry

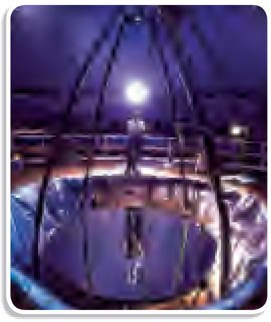
الرأس vertex

الوتر البؤري latus rectum

www.obeikaneducation.com

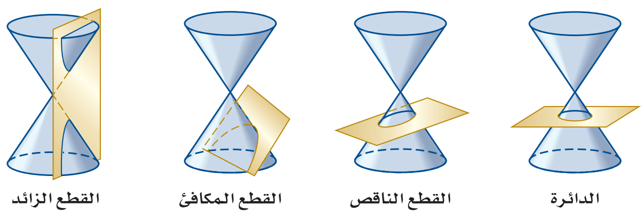
لماذا؟

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.



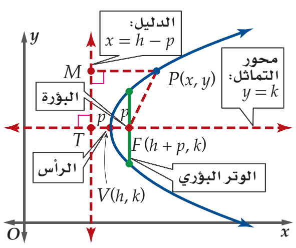
القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًّا: **المحل الهندسي** هو مجموعة النقاط التي تحقّق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى **البؤرة** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمّى **الدليل**.



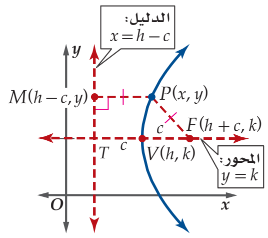
والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ: درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ كمحل هندسي؛ لإيجاد المعادلة العامة للقطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل، أو إلى اليمين أو اليسار.

مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (173 ,176)	• تنويع التعليم ص (173 ,176)	• تنويع التعليم ص (176 ,179)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-y)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2 = [x-(h-c)]^2 + 0^2$$ ربّع الطرفين

$$x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2x(h-c) + (h-c)^2$$ فك الأقواس

$$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$$ فك الأقواس

$$(y-k)^2 = 4xc - 4hc$$ بسّط

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$ حلّل

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

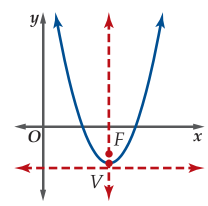
وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

قراءة الرياضيات

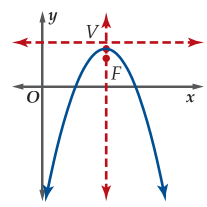
اتجاه فتحة منحنى القطع ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًّا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي **خصائص القطع المكافئ**

المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



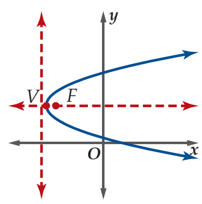
$c > 0$



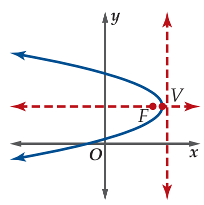
$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$



$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

تحليل القطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًّا

المثالان 1, 2 يبينان كيفية تحديد خصائص القطع المكافئ واستعمالها لتمثيل منحناه بيانيًّا.

مثال 3 يبين كيفية كتابة معادلة قطع مكافئ على الصورة القياسية.

المحتوى الرياضي

القطع المكافئ خاصية الانعكاس للقطع المكافئ مهمة؛ بسبب تطبيقاتها العملية. افترض أن P نقطة على منحنى القطع المكافئ. إذا رسَمت قطعة مستقيمة تصل بين P والبؤرة ورسَمت نصف مستقيم يمر من P موازيًا لمحور التماثل، فإن كلًّا من القطعة المستقيمة ونصف المستقيم يكوّنان مع المماس عند P زاويتين متطابقتين دائمًا، وهذا يعني أن أي نصف مستقيم منطلق من البؤرة سينعكس على منحنى القطع إلى الخارج موازيًا لمحور التماثل. كما أن أي نصف مستقيم داخل إلى منحنى القطع المكافئ ومواز لمحور التماثل سينعكس في البؤرة. ويمكن مشاهدة هذه الخاصية في أطباق استقبال الأقمار الاصطناعية.

إرشادات للمعلم الجديد

البعد عن الدليل ذكّر الطلاب بأن بعد نقطة عن مستقيم كالدليل مثلًا يُقاس بطول العمود النازل من النقطة على الدليل.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنى قطع مكافئ رأسه في نقطة الأصل، ويمر بالنقاط $(-4, 5), (4, 5), (-2, 1), (2, 1)$. ثم اطلب إليهم تعيين البؤرة عند النقطة $(0, 1)$ والدليل $y = -1$. واطلب إليهم أيضًا اختيار عدّة نقاط على المنحنى، وقياس البعد بين كل نقطة والبؤرة باستعمال مسطرة وقياس البعد أيضًا بين كل نقطة والدليل، وناقش معهم ملاحظاتهم. فمثلًا ناقشهم كيف يؤثر تغيير مواقع البؤرة في الدليل، وكيف أن البؤرة والدليل يؤثران في شكل منحنى القطع المكافئ.

مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًّا

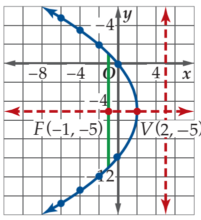
حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًّا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h+c, k)$	
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4c \rvert$	
الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$	
محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$	

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

x	y
0	−0.1, −9.9
−2	1.9, −11.9
−4	3.5, −13.5
−6	4.8, −14.8



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:
– مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x، وكان $c > 0$.
– مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x، وكان $c < 0$.
– مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y، وكان $c > 0$.
– مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y، وكان $c < 0$.

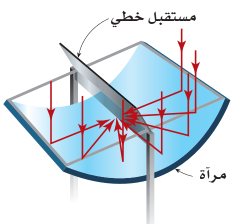
✓ تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات.

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع، أين يقع المستقبل الخطِّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k+c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0+0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

✓ تحقق من فهمك

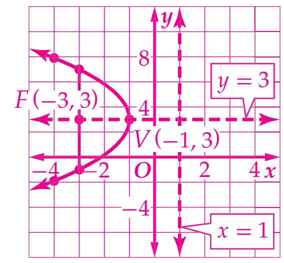
2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\,(y-6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟ **11.2 ft فوق الرأس**

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

مثالان إضافيان

1 حدِّد خصائص القطع المكافئ $(y-3)^2 = -8(x+1)$ ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار
الرأس: $(-1, 3)$؛ البؤرة: $(-3, 3)$؛ الدليل: $x = 1$؛ محور التماثل: $y = 3$



2 **فلك** تأخذ مرآة منظار فلكي شكلَ قطع مكافئ معادلته $y^2 = 2668x$ حيث يقاس كل من x و y بالبوصات.
ما المسافة بين البؤرة والرأس للجهاز المستقبِل؟ **667 in.**

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي وزِّع الطلاب إلى مجموعات، وأعطِ كل مجموعة معادلة قطع مكافئ مختلفة عن المجموعات الأخرى. واطلب إليهم تسجيل فيديو؛ لتوضيح كيفية إيجاد جميع الخصائص والمعلومات عن القطع المكافئ. واطلب إلى كل مجموعة مناقشة الفيديو الذي أعدوه أمام طلاب الصف.

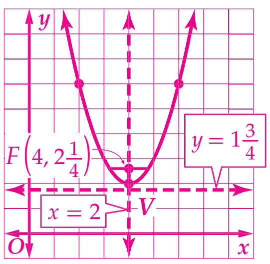
إرشادات للمعلم الجديد

تمثيل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا عندما يعرف الطلاب رأس القطع المكافئ ونقطة على كل جانب من جانبي محور التماثل، فإنه بإمكانهم استعمال التماثل لملاحظة الشكل العام للقطع المكافئ لرسم منحناه.

مثال إضافي

3 اكتب المعادلة $x^2 - 8x - y = -18$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًا.

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى
$(y - 2) = (x - 4)^2$؛
الرأس: $(4, 2)$؛
البؤرة: $\left(4, 2\frac{1}{4}\right)$؛
الدليل: $y = 1\frac{3}{4}$؛
محور التماثل $x = 4$
طول الوتر البؤري 1



معادلات القطوع المكافئة

مثال 4 يبيِّن كيفية كتابة معادلة قطع مكافئ بمعلومية بعض خصائصه.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ كمِّل المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $-\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ حلِّل

$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

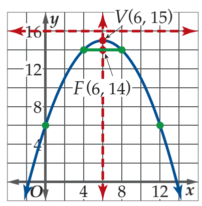
الرأس: $(6, 15)$ (h, k) الدليل: $y = 16$ $y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $(h, k + c)$ محور التماثل: $x = 6$ $x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $|4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

x	y
0	6
4	14
8	14
12	6



تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$ 3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

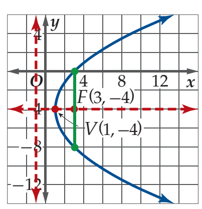
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $c = 2, h = 1, k = -4$

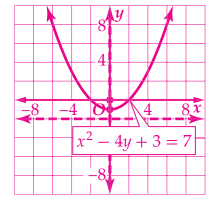
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بسِّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

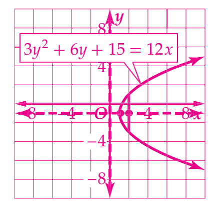


مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

3A) $x^2 = 4(y + 1)$،
الرأس: $(0, -1)$،
البؤرة: $(0, 0)$،
الدليل: $y = -2$
محور التماثل: $x = 0$
طول الوتر البؤري: 4



3B) $(y + 1)^2 = 4(x - 1)$،
الرأس: $(1, -1)$،
البؤرة: $(2, -1)$،
الدليل: $x = 0$
محور التماثل: $y = -1$
طول الوتر البؤري: 4



إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

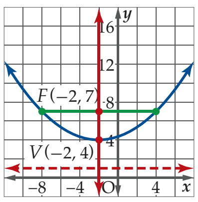
استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



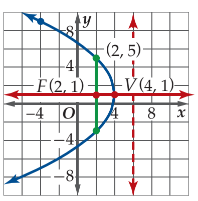
c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.
$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times (-2)| = 8$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

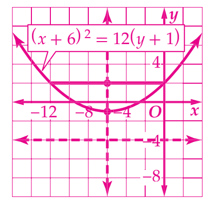
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

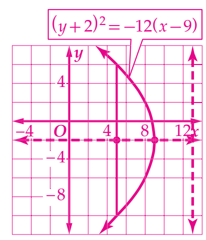
4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

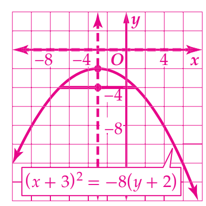
4A) $(x + 6)^2 = 12(y + 1)$



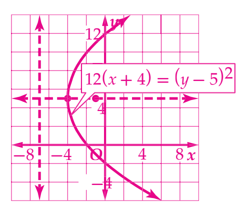
4B) $(y + 2)^2 = -12(x - 9)$



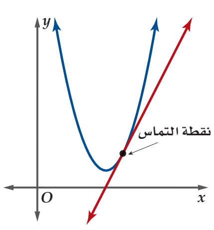
4C) $(x + 3)^2 = -8(y + 2)$



4D) $12(x + 4) = (y - 5)^2$



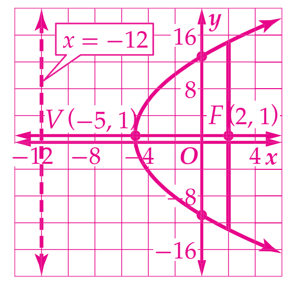
يمكن رسم مماس لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



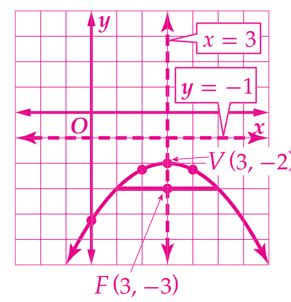
مثال إضافي

4 اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

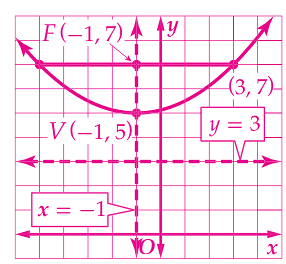
a) البؤرة $(2, 1)$، والرأس $(-5, 1)$.
$(y - 1)^2 = 28(x + 5)$



b) الرأس $(3, -2)$، والدليل $y = -1$.
$(x - 3)^2 = -4(y + 2)$



c) البؤرة $(-1, 7)$، ومفتوح إلى الأعلى ويمر بالنقطة $(3, 7)$.
$(x + 1)^2 = 8(y - 5)$



تنويع التعليم

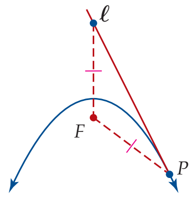
دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى كل طالب رمي كرة قوسيًّا إلى أعلى، وملاحظتها عندما ترتطم بجدار عليه علامات ارتفاع مختلفة. واطلب إليه قياس أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة. وتحديد معادلة تعبّر عن مسارها معتبرًا النقطة التي رميت منها الكرة هي رأس القطع المكافئ. ثم قارن بين نتائج الطلاب وناقشهم في كيفية الحصول على معادلات مختلفة بناءً على الأشكال المختلفة للقطوع المكافئة.

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

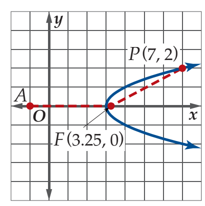
المنحنى مفتوح أفقيًا.

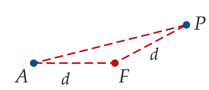
$x = y^2 + 3$ المعادلة الأصلية

$1(x - 3) = (y - 0)^2$ الصورة القياسية

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$ $(x_2, y_2) = (7, 2)$ و $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$

$= 4.25$ بسّط

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4}$ صيغة الميل

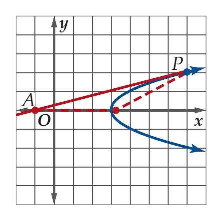
$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$ $m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$

$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ اجمع 2 إلى الطرفين

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$ $y = -8x$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

معادلة مماس القطع المكافئ

مثال 5 يبيّن كيفية كتابة معادلة مماس القطع المكافئ عند نقطة معطاة.

مثال إضافي

5 اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 - 2$ عند النقطة $(2, 2)$. $y = 4x - 6$

177 الدرس 1-4 القطوع المكافئة

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 27–1 للتحقق من استيعاب الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع عند إكمال المربع لتحويل المعادلات إلى الصورة القياسية في الأسئلة 14–9، على الطلاب أن يجمعوا العدد نفسه إلى طرفي المعادلة؛ حتى لا تتغير قيمتها. إذا كان هناك معامل ثابت لحدود x، فإن هذا المعامل يجب أن يُضرب في العدد الناتج من إكمال المربع قبل جمعه إلى العدد أو طرحه منه خارج حدود x.

إجابات:

15) $(x+9)^2 = -12(y+4)$

16) $(x-3)^2 = 20(y+2)$

17) $(y+1)^2 = 24(x+4)$

18) $(y-4)^2 = 12(x-8)$

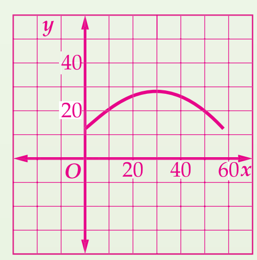
19) $(y+2)^2 = -16(x-1)$

20) $x^2 = -12(y+2)$

21) $(x+3)^2 = 8(y-2)$

22) $(y-2)^2 = 8(x+3)$ أو $(y-2)^2 = -8(x+3)$

23b)



تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1) **1-6 انظر ملحق الإجابات.**

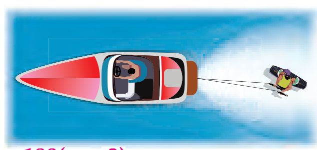
1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$ 2) $(x+1)^2 = -12(y-6)$

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$ 4) $-40(x+4) = (y-9)^2$

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$ 6) $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2) **4 ft**

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



$(y+5)^2 = 180(x-3)$

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟ **45 ft**

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3) **9–14 انظر ملحق الإجابات.**

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$ 10) $y^2 + 33 = -8x - 23$

11) $3x^2 + 72 = -72y$ 12) $60x - 80 = 3y^2 + 100$

13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$ 14) $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4) **15-22 انظر الهامش.**

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(2, -1)$ والرأس $(-4, -1)$

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

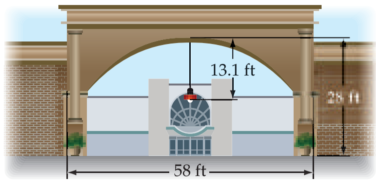
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثُبِّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



$(x-29)^2 = -52.4(y-28)$

a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا. **انظر الهامش.**

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\,; (-5, -5)$ **$y = -8x - 45$**

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\,; (24, 2)$ **$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$**

26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\,; (0, 14)$ **$y = 4x + 14$**

27) $-4x = (y+5)^2; (0, -5)$ **$x = 0$**

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

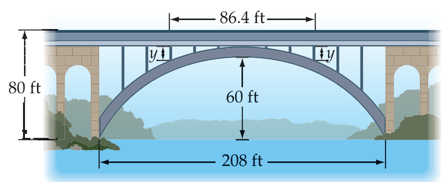
28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$ **مفتوح إلى أسفل**

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$ **مفتوح إلى اليسار**

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$ **مفتوح إلى أعلى**

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$ **مفتوح إلى اليمين**

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.



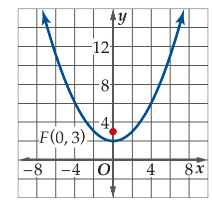
a) اكتب معادلة تمثِّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y. **إجابة ممكنة: $x^2 = -180.27(y+20)$**

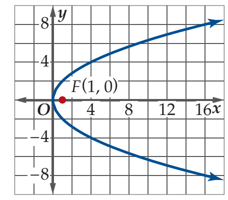
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft. **30.35 m تقريبًا**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–27، 36، 38–50
ضمن المتوسط	1–33 (فردي)، 35، 36، 38–50
فوق المتوسط	28–50

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، في كلٍّ مما يأتي: (33,34) انظر الهامش.

33)


34)


35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة. (b, c, e) انظر ملحق الإجابات

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ وحدة واحدة ii) $y^2 = 8(x-2)$ وحدتين iii) $y^2 = 16(x-2)$ 4 وحدات

b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيِّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا. اجابة ممكنة: $(x+1)^2 = 4(y+7)$

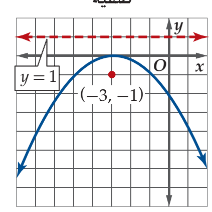
e) **تحليليًا:** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:

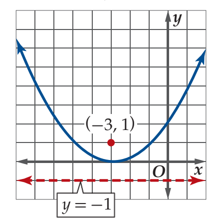
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$

ثم تحقق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

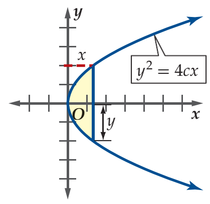
صفية


ميمونة


37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

38) **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

39) **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات. $y^2 = \frac{15}{8}x$



40) **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-2)

41) $\log_{16} 4$ $\frac{1}{2}$ 42) $\log_4 16^x$ $2x$ 43) $\log_3 27^x$ $3x$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (الدرسان 2-5, 2-2)

44) $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $x = 1$

45) $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$ $x = -3$

46) $\log_3 x \le -3$ $x \le \frac{1}{27}$

47) أوجد كلًا مما يأتي إذا كان: (الدرس 1-1)

$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$ 20

b) $h(6x)$ $16 - \frac{4}{4x+1}$

c) $h(10-2c)$ $16 - \frac{12}{23-4c}$

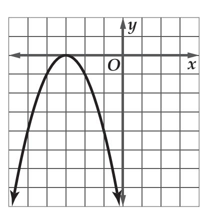
48) إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$، حيث θ زاوية في الربع الأول. (الدرس 1-3) $\sqrt{2}$

تدريب على اختبار

49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي B

A $x^{-\frac{1}{4}}$ B $\sqrt{x^3}$ C $x^{\frac{3}{4}}$ D $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟ D



A $y = x$

B $y = \sqrt{x}$

C $y = |x|$

D $y = x^2$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 35 الهندسة والتمثيل البياني والتحليل؛ لتكوين تخمينات حول منحنى القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ تكتب الطالبتان المعادلة في السؤال 36 على الصورة القياسية $4y = (x+3)^2$. وبما أنّ $C = 1$ فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يصف لزميله كيفية ارتباط البؤرة والرأس والدليل بالقطع المكافئ.

إجابات:

33) إجابة ممكنة: $x^2 = 4(y-2)$

34) إجابة ممكنة: $y^2 = 4x$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إلى كل منهم أن يرسم مستقيمًا ونقطة خارجة عنه. ثم اطلب إلى كل طالبين في المجموعة تبادل التمثيلين فيما بينهما. اطلب إلى كل طالب أن يمثّل منحنى القطع المكافئ المحدد بالمستقيم والنقطة، ويعيّن الرأس والبؤرة والدليل ومحور التماثل.

4-2 ملاحظات الدرس

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا. (الدرس 1–4)

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلُهما بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات:

القطع الناقص ellipse

البؤرتان foci

المحور الأكبر major axis

المركز center

المحور الأصغر minor axis

الرأسان vertices

الرأسان المرافقان co-vertices

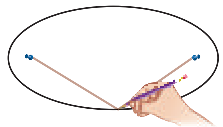
الاختلاف المركزي eccentricity

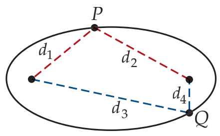
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

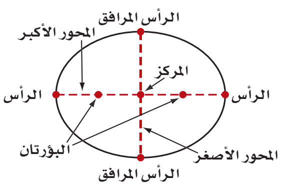
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**. و لتوضيح هذا المفهوم تخيل وجود خيط مربوط من طرفيه عند البؤرتين، حيث يمكنك أن ترسم قطعًا ناقصًا باستعمال قلم على أن يبقى الخيط مشدودًا. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

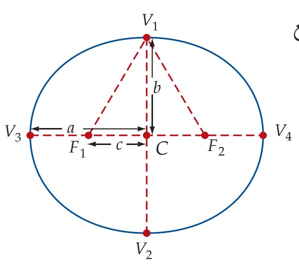




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر،** وتسمى نقطة منتصف المحور **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين،** بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق ضلع – زاوية – ضلع $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_1C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسِّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا.

الدرس 2-4

تحليل معادلات القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًّا.

كتابة معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

ما بعد الدرس 2-4

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطوع الناقصة والدوائر بعد دورانها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

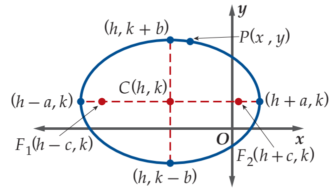
واسأل:

- مِمَّ يتكوّن نظامنا الشمسي؟ الشمس ومجموعة الأجرام التي تدور حولها.
- هل تبقى الأرض على بعد ثابت من الشمس؟ لا، تكون أقرب ما يمكن في يناير، وأبعد ما يمكن في يوليو.
- ما المقصود بأن الشمس في البؤرة؟ الشمس ليست في مركز القطع الناقص، فهي أقرب إلى أحد الأطراف.

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (181)	• تنويع التعليم ص (181)	• تنويع التعليم ص (187)
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:
افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$ تعريف القطع الناقص

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} + \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$$ صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} + \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 2a$$ خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2}$$ اطرح

$$(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$ ربِّع الطرفين

$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} = 4a^2 + 4c(x-h)$$ بسِّط

$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} = a^2 + c(x-h)$$ اقسم كلا الطرفين على 4

$$a^2[(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 + 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$ ربِّع الطرفين

$$a^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 + 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$ خاصية التوزيع

$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$ بسِّط

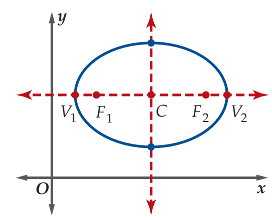
$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$ $a^2 - c^2 = b^2$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ اقسم الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

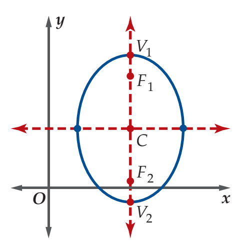
مفهوم أساسي **خصائص القطع الناقص**

المعادلة في الصورة القياسية:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرأسان: $(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a$
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b$
العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية:
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
الرأسان: $(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a$
المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b$
العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا

مثال 1 يبيِّن كيفية تمثيل منحنى القطع الناقص بيانيًا إذا أعطيَت معادلته.

مثال 2 يبيِّن كيفية كتابة معادلة قطع ناقص إذا علمت بعض خصائصه.

المثالان 3 , 4 يبيِّنان كيفية تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص واستعماله.

المحتوى الرياضي

البؤرتان عند استعمال النسبة لإيجاد الاختلاف المركزي، فإنّ c هي قياس المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين للقطع الناقص. وبما أنّ المسافة بين مركز القطع وأحد الرأسين a، فإنّ a دائمًا أكبر من c.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب استعمال دبوسين وقلم رصاص وخيط؛ لرسم منحنيات قطوع ناقصة متنوعة كما هو موضح في بداية الدرس 2–4. إذ يمكنهم أن يستعملوا مساطر لقياس أطوال الخيوط التي استعملت لتمثيل القطوع الناقصة وكتابة معادلاتها. ثم ناقش معهم كيفية تأثير تغير مواقع البؤرتين على شكل القطع الناقص.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" التي تلي كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-2, 1)$

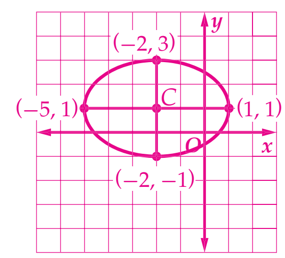
البؤرتان: $(-2 \mp \sqrt{5}\,, 1)$

الرأسان: $(1, 1)$، $(-5, 1)$

الرأسان المرافقان: $(-2, 3)$، $(-2, -1)$

المحور الأكبر: $y = 1$، وطوله 6

المحور الأصغر: $x = -2$، وطوله 4



b) $4x^2+24x+y^2-10y-3=0$

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-3, 5)$

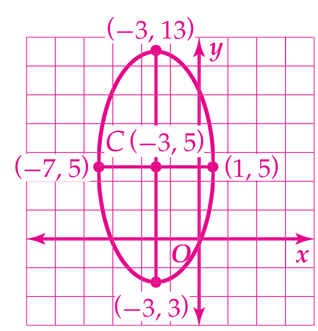
البؤرتان: $(-3, 5 \mp 4\sqrt{3})$

الرأسان: $(-3, -3)$، $(-3, 13)$

الرأسان المرافقان: $(-7, 5)$، $(1, 5)$

المحور الأكبر: $x = -3$، وطوله 16

المحور الأصغر: $y = 5$، وطوله 8



إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص
إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًّا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًّا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثـال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

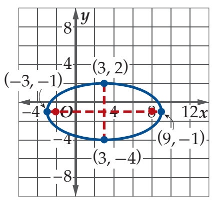
a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث
$h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



b) $4x^2+y^2-24x+4y+24=0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

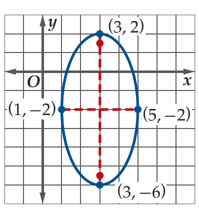
$4x^2+y^2-24x+4y+24=0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2-24x)+(y^2+4y)=-24$	جمِّع الحدود المتشابهة
$4(x^2-6x)+(y^2+4y)=-24$	حلّل
$4(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-24+4(9)+4$	كمِّل المربعين
$4(x-3)^2+(y+2)^2=16$	حلّل وبسِّط
$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$	اقسم الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:
$h=3, k=-2, a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{4}=2, c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=3$، وطوله 8	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=-2$، وطوله 4	$y=k$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16} = 1$

1B) $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

(1A

الاتجاه: رأسي

المركز: $(6, -3)$ ،

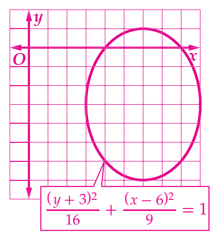
البؤرتان: $(6, -3 \pm \sqrt{7})$ ،

الرأسان: $(6, 1)$ و $(6, -7)$ ،

الرأسان المرافقان: $(9, -3)$ و $(3, -3)$ ،

المحور الأكبر: $x = 6$ ،

المحور الأصغر: $y = -3$



(1B

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-2, 5)$ ،

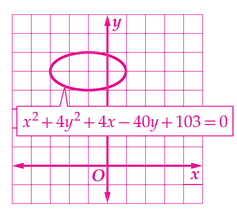
البؤرتان: $(-2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 5)$ ،

الرأسان: $(-1, 5)$ و $(-3, 5)$ ،

الرأسان المرافقان: $(-2, 4.5)$ و $(-2, 5.5)$ ،

المحور الأكبر: $y = 5$ ،

المحور الأصغر: $x = -2$



التعليم باستعمال التقنيات

إنترنت اطلب إلى الطلاب أن يجدوا مواقع متنوعة على الإنترنت تسمح لهم بتحريك بؤرتي قطع ناقص لتغيير بُعديه، أو تحريك نقاط على منحناه؛ لتوضيح أن مجموع بعدي كل نقطة عن البؤرتين يبقى ثابتًا. ثم اطلب إليهم عرض ما توصلوا إليه على الصف باستعمال السبورة التفاعلية.

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

إرشادات للدراسة

الاتجاه
إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$، $(-6, 2)$، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$، $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a، b.

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{2-(-8)}{2} = 5$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{-3-(-9)}{2} = 3$

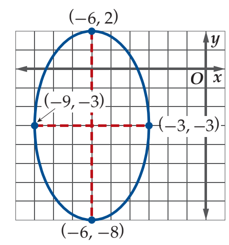
مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (-6, -3)$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .



الشكل 4.2.1

b) الرأسان $(6, 4)$، $(-4, 4)$، والبؤرتان $(4, 4)$، $(-2, 4)$.

إرشادات للدراسة

طول البعد البؤري
طول البعد البؤري يساوي $2c$ دائمًا.

طول المحور الأكبر $2a$، وهي المسافة بين الرأسين.

$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$ صيغة المسافة

$a = 5$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$ صيغة المسافة

$c = 3$ بسّط

أوجد قيمة b.

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 5^2 - b^2$ $a = 5, c = 3$

$b = 4$ بسّط

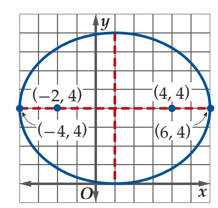
وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .



الشكل 4.2.2

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$، $(19, 3)$، وطول المحور الأكبر 30 وحدة. $\frac{(x-6)^2}{225} + \frac{(y-3)^2}{56} = 1$

2B) الرأسان $(-2, 8)$، $(-2, -4)$، وطول المحور الأصغر 10 وحدة. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

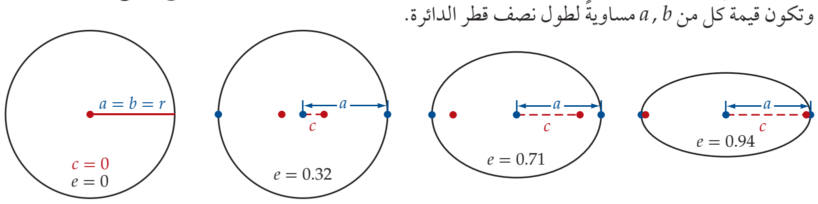
a) نهايتا المحور الأكبر هما $(5, -2)$، $(-1, -2)$، ونهايتا المحور الأصغر هما $(2, 0)$ ، $(2, -4)$

$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

b) الرأسان $(3, -4)$ ، $(3, 6)$، البؤرتان $(3, -2)$ ، $(3, 4)$

$\frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $a^2 = 100, b^2 = 9$

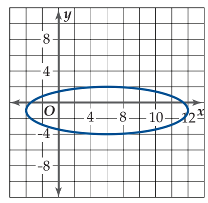
$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

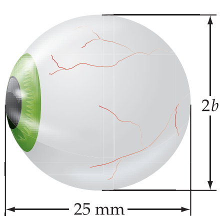
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$ 0.79

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$ 0.32

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

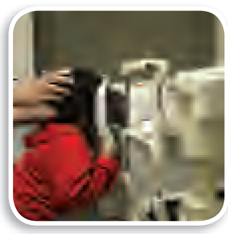
$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟ 23.02 mm



مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

مثالان إضافيان

3) حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ 0.66

4) **فلك** الاختلاف المركزي لمدار كوكب أورانوس هو 0.47. وطول المحور الأكبر لمداره حول الشمس 38.36 (وحدة فلكية). فما طول المحور الأصغر لهذا المدار؟ 33.86 وحدة فلكية

إرشادات للمعلم الجديد

الاختلاف المركزي عندما تقترب قيمة e من الصفر، فإن القطع الناقص يقترب من الدائرة. وعندما تقترب قيمة e من 1، فإنّ القطع الناقص يقترب من الخط المستقيم.

معادلة الدائرة

المثالان 6 , 5 يبينان كيفية كتابة معادلة الدائرة على الصورة القياسية إذا علم مركزها ونصف قطرها، أو طرفا قطر فيها.

مثالان إضافيان

5 اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(2, -3)$ ، وطول قطرها 18 .

$(x-2)^2+(y+3)^2=81$

6 اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا القطر فيها $(2, -8)$ ، $(-4, 6)$.

$(x+1)^2+(y+1)^2=58$

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ معادلة القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ $e=0$ عندما $a=b$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$ اضرب كلا الطرفين في a^2 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ a نصف قطر الدائرة

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$$ $(h, k)=(-1, 2), r=\frac{8}{2}=4$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$ بسّط

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3 $x^2+y^2=9$ **5B)** المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10 $(x-5)^2+y^2=25$

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$ ، $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(-1, -8)$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$=(3, -1)$$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2}$$ $(x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(3, -1)$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}$$ اطرح

$$=\sqrt{65}$$ بسّط

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$ ، $(3, -3)$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–21 للتحقق من استيعاب الطلاب. واستعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 13 – 10، قد يخلط الطلاب بين صيغة إيجاد البعد بين البؤرتين $c^2 = a^2 - b^2$ وصيغة نظرية فيثاغورس لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية $c^2 = a^2 + b^2$.

تنبيه !

خطأ شائع للسؤال 29، قد يجد بعض الطلاب قيمتي a, c مباشرة من الاختلاف المركزي المُعطى، فيعتبرون أن $a = 5$ ، $c = 4$ ، وهذا غير صحيح دائمًا؛ لأن المقدار $\frac{c}{a}$ هو نسبة.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1) **1-4 انظر ملحق الإجابات.**

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2) **5-9 انظر ملحق الإجابات.**

5) الرأسان $(13, -3), (-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3), (-5, -3)$

6) الرأسان $(4, -9), (4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2), (-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

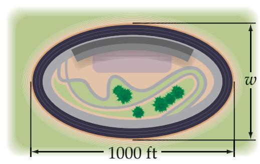
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$ **0.5**

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ **0.837**

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$ **0.869**

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$ **0.426**

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4) **a-b انظر ملحق الإجابات.**



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5) **15-17 انظر ملحق الإجابات.**

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1), (2, -4)$ **18-22 انظر ملحق الإجابات.**

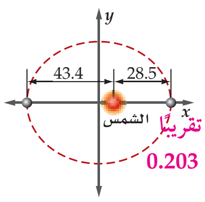
19) $(-4, -10), (4, -10)$

20) $(5, -7), (-2, -9)$

21) $(-6, 4), (4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد. **71.35 مليون ميل تقريبًا**

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار. **0.203**

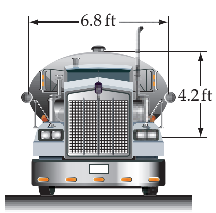
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **$(-5, 0); (-8, 0), (-2, 0); (-9, 0), (-1, 0)$**

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$ **$(-2, 1); (-2, 5), (-2, -3); (-2, 6), (-2, -4)$**

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$ **$(-1, 0); (-1, \mp 7); (-1, \pm\sqrt{65})$**

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة. **a-b انظر ملحق الإجابات.**



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي للخزان. **0.79**

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0), (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$ **$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$**

29) الرأسان المرافقان $(6, 1), (0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

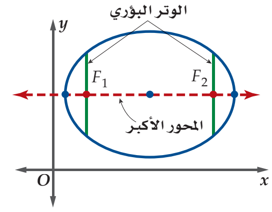
30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$**

29) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	41–54 ، 37–38 ، 28–31 ، 24–26 ، 1–21
ضمن المتوسط	1–27 (فردي)، 28–38 ، 41–54
فوق المتوسط	22–54

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة. $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$

32) **هندسة** تتقاطع المستقيمات $x-5y=-3,\ 2x+3y=7,\ 4x-7y=27$ لتشكّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث. $(x-6.5)^2+(y-4.5)^2=32.5$

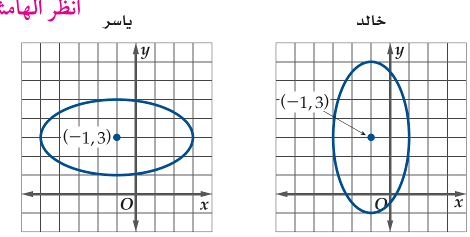
اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي: 33-36 انظر ملحق الإجابات.

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ **34)** $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ **36)** $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

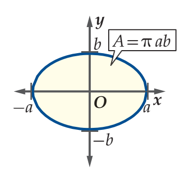
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟ انظر الهامش.



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p+r}=1,\ \frac{x^2}{p+r}+\frac{y^2}{p}=1$، حيث $r>0$، البؤرة نفسها. وضّح إجابتك. انظر الهامش.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالصيغة $A=\pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي: 39-40 انظر الهامش.



39) $b+a=12,\ A=35\pi$

40) $a-b=5,\ A=24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ حيث $h>0,\ k<0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني. انظر ملحق الإجابات.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-1) 43-45 انظر ملحق الإجابات.

43) $y=3x^2-24x+50$ **44)** $y=-2x^2+5x-10$

45) $x=5y^2-10y+9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0\le\theta\le 2\pi$. (الدرس 3-5)

46) $\sin\theta=\cos\theta$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

47) $\sin\theta=1+\cos\theta$ $\pi, \frac{\pi}{2}$

48) $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدّد مجالها. (الدرس 1-7)

49) $f(x)=\frac{x-2}{x+3}$ **49)** $f^{-1}(x)=\frac{-3x-2}{x-1}$ المجال: $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$

50) $f(x)=\sqrt{5-x}$ **50)** $f^{-1}(x)=5-x^2$ المجال: $[0, \infty)$

51) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **51)** غير ممكن

52) مثّل الدالة $g(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+3$ بيانيًّا، وحدّد مداها. (الدرس 2-1) انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟ **B**

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟ **C**

A $\frac{y^2}{13.5}+\frac{x^2}{7.5}=1$ **C** $\frac{y^2}{56.25}+\frac{x^2}{182.25}=1$

B $\frac{y^2}{182.25}+\frac{x^2}{56.25}=1$ **D** $\frac{y^2}{7.5}+\frac{x^2}{13.5}=1$

تنبيه !

اكتشف الخطأ على الطلاب في السؤال 37 أن يميزوا أن المحور الأكبر للقطع الناقص غير محدد إن كان أفقيًّا أو رأسيًّا؛ لذا يكون الحلان صحيحين بناءً على المعلومات المعطاة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب معادلة القطع الناقص الذي رأسا محوره الأكبر هما $(-3, 0)$، $(3, 0)$، ورأسا محوره الأصغر هما: $(0, 2)$، $(0, -2)$. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-1، 4-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

37) كلاهما؛ المحور الأكبر في الشكل الأيسر أفقي، بينما هو رأسي في الشكل الأيمن.

38) إجابة ممكنة: لا. إذا كان $b^2=p$ و $a^2=p+r$ فإنّ $c=\pm\sqrt{r}$، والبؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p+r}=1$ هما $(0, \pm\sqrt{r})$. بينما البؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p+r}+\frac{y^2}{p}=1$ هما $(\pm\sqrt{r}, 0)$.

39) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$ أو $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$

40) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$ أو $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$

42) إجابة ممكنة: بما أن $c=\sqrt{a^2-b^2}$ فعندما تقترب قيمة a من قيمة b، فإن قيمة c تقترب من الصفر، وبذلك يقترب الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ من الصفر، وتقترب البؤرتان من المركز، وبذلك يقترب شكل القطع الناقص من الدائرة.

تنويع التعليم

فوق

توسع: اطلب إلى الطلاب التوصل إلى تخمين مبني على معرفتهم بمعادلة الدائرة والقطع الناقص لكيفية إيجاد مساحة القطع الناقص. وعندما يكتبون تخميناتهم على ورقة، اطلب إليهم البحث عن الصيغة على الإنترنت؛ لمعرفة إن كانت تخميناتهم صحيحة. واطلب إليهم إيجاد محيط القطع الناقص أيضًا ، واسألهم: هل يمكنهم إيجاد تعميم لمحيط القطع الناقص باستعمال ما يعرفونه عن محيط الدائرة؟

4-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا.

الدرس 4-3

تحليل معادلات القطوع الزائدة وتمثيلها بيانيًّا.

ما بعد الدرس 4-3

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطوع الزائدة بعد دورانها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- يظهر مذنب هالي كل 76 عامًا تقريبًا، فإذا كان آخر ظهور له في عام 1986، ففي أي عام تقريبًا سيظهر في المرة التالية؟ **2062**
- ما وجه الاختلاف الرئيس بين القطع الزائد والقطوع المخروطية الأخرى؟ لمنحنى القطع الزائد فرعان.
- أي من القطوع المخروطية التي درستها يمثِّل دالة؟ القطع المكافئ الذي دالته الرئيسة (الأم) هي $y = x^2$ ، ومحور تماثله رأسيًّا.

4-3 القطوع الزائدة
Hyperbolas

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًّا. (الدرس 2—4)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

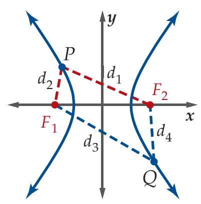
المحور المرافق
conjugate axis

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

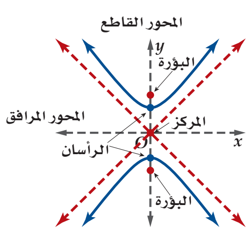
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًّا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.



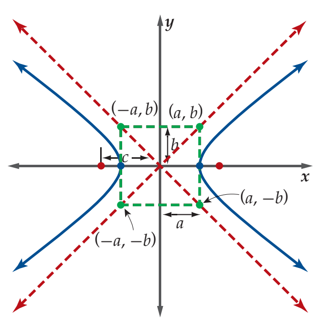
$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، **ورأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالرأسين، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، بحيث $c^2 = a^2 + b^2$، وتختلف عمّا في القطع الناقص. بالإضافة إلى أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد والبؤرتين هو $2a$.



مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (190)	• تنويع التعليم ص (190)	• تنويع التعليم ص (195)
كتاب التمارين	• ص (24)	• ص (24)	• ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا

المثالان 1, 2 يبينان كيفية تحديد خصائص قطع زائد علمت معادلته.

مثال 3 يبين كيفية كتابة معادلة قطع زائد إذا علمت بعض خصائصه.

مثال 4 يبين كيفية إيجاد الاختلاف المركزي لقطع زائد.

المحتوى الرياضي

القطوع الزائدة الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي:

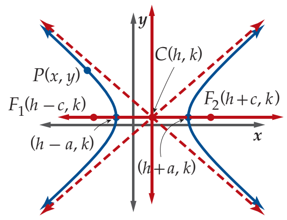
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

عندما يكون المحور القاطع أفقيًا. وعندئذٍ يمكن استعمال الإحداثيات $(\pm a, \pm b)$ كرؤوس الإطار المستطيلي الأربعة. كما يمكن رسم خطي التقارب اللذين يحددان شكل القطع الزائد أقطارًا للمستطيل. أمّا المحور القاطع فهو الذي يصل بين الرأسين، ويقطع المنحنى، لكن المحور المرافق لا يقطع المنحنى.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد: يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.



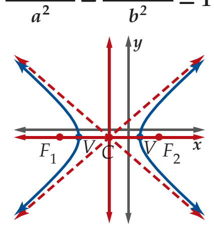
$PF_1 - PF_2 = 2a$	تعريف القطع الزائد
$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$	صيغة المسافة
$\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 2a$	خاصية التوزيع ثم التجميع
$\sqrt{[(x-h)+c]^2 + (y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2}$	اجمع
$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$	ربِّع الطرفين
$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$	بسِّط
$a\sqrt{[(x-h)-c]^2 + (y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$	اقسم الطرفين على -4 .
$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$	ربِّع الطرفين
$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$	الخاصية التوزيعية
$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$	بسِّط
$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$	الخاصية التوزيعية
$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$	$a^2 - c^2 = -b^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، وهي $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

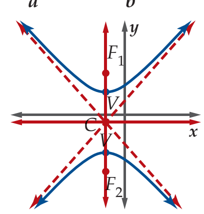
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

التقويم التكويني

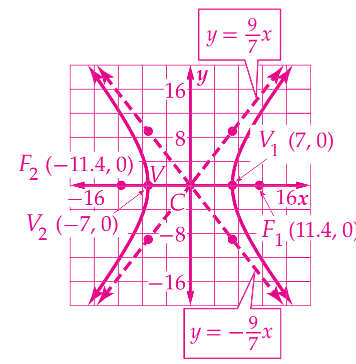
استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" التي تلي كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب.

مثال إضافي

1 حدِّد خصائص القطع الزائد في كل من a, b ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

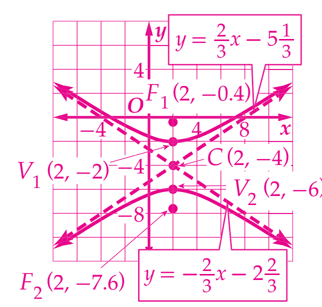
a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$

الاتجاه: أفقي
المركز: $(0, 0)$
الرأسان: $(\pm 7, 0)$
البؤرتان: $(\pm 11.4, 0)$
خطا التقارب $y = \pm \frac{9}{7}x$



b) $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

الاتجاه: رأسي
المركز: $(2, -4)$
الرأسان: $(2, -6), (2, -2)$
البؤرتان: $(2, -4 \pm \sqrt{13})$
خطا التقارب $y + 4 = \pm \frac{2}{3}(x-2)$



مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

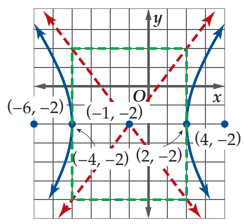
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$
	$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تنبيه!

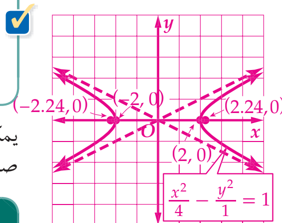
عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y، فإن اتجاه القطع رأسي.

1A)
الاتجاه: أفقي
المركز: $(0, 0)$
الرأسان: $(\pm 2, 0)$
البؤرتان: $(\pm\sqrt{5}, 0)$
خطا التقارب $y = \pm\frac{1}{2}x$



تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ **1B)** $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$ انظر الهامش

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) - (16x^2 - 96x) = 444$	جمِّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلِّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$	حلِّل وبسِّط
$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.

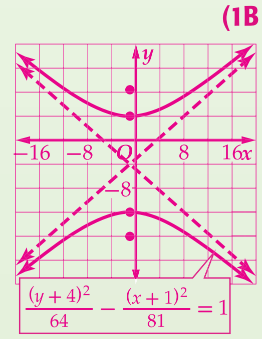
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب عمل ملصق يلخصون فيه خصائص جميع القطوع المخروطية (القطع المكافئ والناقص والدائرة والقطع الزائد) الواردة في هذا الفصل على أن يحتوي هذا الملصق على توضيح لكل قطع مخروطي. وشَجِّعهم على استعمال التمايز اللوني للمتغيرات في المعادلات والتوضيحات لبيان كيفية تأثيرها في القطع المخروطي.

إجابة (تحقق من فهمك):

1B)
الاتجاه: رأسي
المركز: $(-1, -4)$
الرأسان: $(-1, -12), (-1, 4)$
البؤرتان: $(-1, -4 \pm \sqrt{145})$
خطا التقارب $y + 4 = \pm\frac{8}{9}(x+1)$



الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

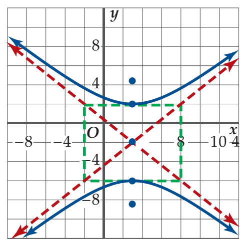
المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

الرأسان: $(3, 2)$, $(3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4)$, $(3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$ — $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

$y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$, $y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5}$

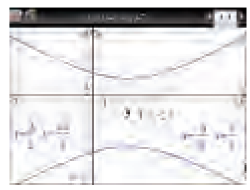


عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$ ، والبعد الآخر $2b = 10$ ، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح: menu ، esc ، on ثم اختيار 3: إدخال / تحرير الرسم البياني ، 2: معادلة ، 6: القطوع المخروطية ، 1: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



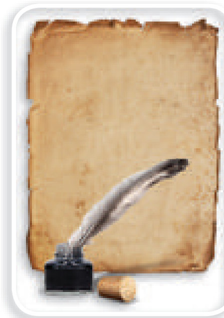
- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu ، ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد: 1: المركز ، 6: الخطوط المقاربة ، 2: الرؤوس ، 3: البؤرة

- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

تحقق من فهمك 2A-B) انظر الهامش.

2A) $4y^2-9x^2-8y-36x=68$

2B) $2x^2-3y^2-12x-36=0$



الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة القطع الزائد $4x^2-y^2+24x+4y=28$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$\frac{(x+3)^2}{15}-\frac{(y-2)^2}{60}=1$

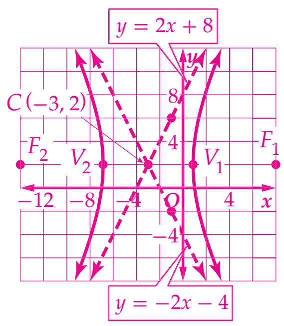
الاتجاه: أفقي

المركز: $(-3, 2)$

الرأسان: $(-3\pm\sqrt{15}, 2)$

البؤرتان: $(-3\pm5\sqrt{3}, 2)$

خطا التقارب: $y-2=\pm2(x+3)$



إجابات (تحقق من فهمك):

2A) $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$

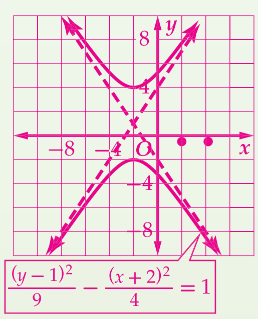
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2, 1)$

الرأسان: $(-2, 4)$, $(-2, -2)$

البؤرتان: $(-2, 1\pm\sqrt{13})$

خطا التقارب: $y-1=\pm\frac{3}{2}(x+2)$



2B) $\frac{(x-3)^2}{27}-\frac{y^2}{18}=1$

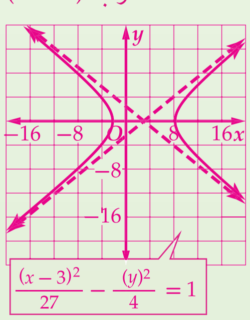
الاتجاه: أفقي

المركز: $(3, 0)$

الرأسان: $(3\pm3\sqrt{3}, 0)$

البؤرتان: $(3\pm3\sqrt{5}, 0)$

خطا التقارب: $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$



التعليم باستعمال التقنيات

صفحة على شبكة الإنترنت اطلب إلى الطلاب عمل بحث بالاستعانة بالإنترنت؛ لإيجاد تطبيقات تتضمن قطوعًا زائدة. واطلب إليهم عمل روابط على مواقعهم الاجتماعية في شبكة الإنترنت وتدوين أمثلة يجدونها مثيرة للاهتمام.

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافية.

مثـال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $(-3, -2)$ — نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين (أو الرأسين)

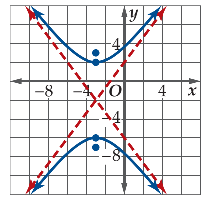
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ — المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ — المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ — $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $(-6, 0)$ — نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ — المسافة بين أي من الرأسين والمركز

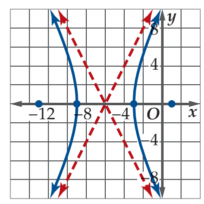
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ — الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ — $a = 3$

$b = 6$ — بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات. $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$

3B) البؤرتان $(12, -2)$, $(2, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$. $\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال إضافي

3 اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) البؤرتان $(1, -5)$ و $(1, 1)$؛ وطول المحور القاطع: 4 وحدات.
$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

b) الرأسان $(-3, 10)$ و $(-3, -2)$؛ وطول المحور المرافق 6 وحدات.
$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

إرشادات للمعلم الجديد

كتابة المعادلة اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا قائمة بالقيم المعطاة لِـ a, b, c, h, k ، حيث سيساعدهم هذا على تنظيم المعطيات وتحديد المطلوب.

إرشادات للمعلم الجديد

الاختلاف المركزي أكّد للطلاب أنّ المعادلة التي تربط a, b و c في القطع الزائد هي $a^2 - b^2 = c^2$ وليست $a^2 + b^2 = c^2$ كما كانت في القطع الناقص. وإضافة إلى ذلك فإن c دائمًا أكبر من a في القطوع الزائدة.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c	$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$c^2 = 48 + 36$	$a^2 = 48, b^2 = 36$	$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$	$a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$
$c = \sqrt{84}$	بسّط	≈ 1.32	بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(y-4)^2}{80} - \frac{(x+8)^2}{64} = 1$ **1.5**

4B) $\frac{(x+9)^2}{75} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1$ **2.45**

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

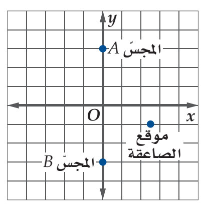
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد: **يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسمين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .**

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

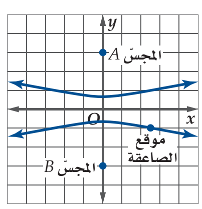
a) **اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.**



حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكَّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3^2 = 0.75^2 + b^2$	$c = 3, a = 0.75$
$8.4375 = b^2$	بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

مثال إضافي

4 حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$. 1.33

تطبيقات على القطع الزائد

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال القطوع الزائدة في مواقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

5 **نظام الملاحة البحري (لوران)** هو نظام تنقُّل طويل المدى للسفن مبني على أساس نبضات موجات المذياع التي لا تعتمد على ظروف الرؤية. افترض أن محطتي لوران E و F تقعان على شاطئ مستقيم، وتبعدان بعضهما عن بعض مسافة 350 ميلًا، وكانت E غرب F. عندما تقترب سفينة من الشاطىء، وتستقبل نبضات موجات الراديو من المحطتين، وكان بعدها عن F يزيد على بعدها عن E بمقدار 80 ميلًا.

a) أوجد معادلة القطع الزائد الذي تقع السفينة على منحناه. $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{29025} = 1$

b) أوجد إحداثيي موقع السفينة عندما يكون بعدها عن الشاطئ 125 ميلًا. $(-49.6, 125)$

إرشادات للمعلم الجديد

رسم مخطط على الطلاب أن يرسموا مخططًا لمسائل من واقع الحياة تتضمن عناوين تصفها؛ ممّا سيساعدهم هذا على تصوّر ما سيحدث وضمان دقة حلولهم.

3 التدريب

التقويم التكويني

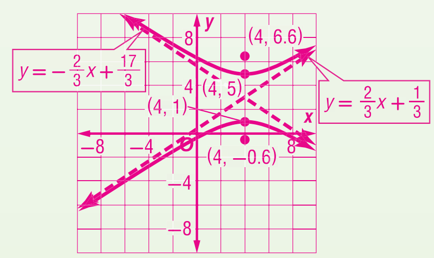
استعمل الأسئلة 28–1 للتحقق من استيعاب الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

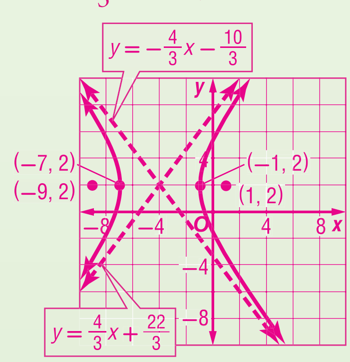
خطأ شائع قد يخطئ بعض الطلاب في الأسئلة 12–8 فيما يتعلق بالاتجاه عند تمثيل القطع الزائد. فإذا كان الحد x في الصورة القياسية موجبًا، فإن المحور القاطع أفقي، ممّا يعني أن المنحنى مفتوح إلى اليسار وإلى اليمين. وإذا كان الحد y موجبًا، فإن المحور القاطع رأسي، ممّا يعني أنّ المنحنى مفتوح إلى أعلى وإلى أسفل.

إجابات:

(11
$$\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{9}=1$$
الاتجاه: رأسي
المركز: $(4, 3)$
الرأسان: $(4, 1)$ ، $(4, 5)$
البؤرتان: $(4, 3\pm\sqrt{13})$
خطا التقارب $y-3=\pm\frac{2}{3}(x-4)$



(12
$$\frac{(x+4)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$$
الاتجاه: أفقي
المركز: $(-4, 2)$
الرأسان: $(-1, 2), (-7, 2)$
البؤرتان: $(-9, -2), (+1, 2)$
خطا التقارب $y-2=\pm\frac{4}{3}(x+4)$



b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$ ، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A ، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y .

$$\frac{y^2}{0.5625}-\frac{x^2}{8.4375}=1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625}-\frac{2.5^2}{8.4375}=1 \quad x=2.5$$

$$y\approx\pm0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي 0.99– تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية :** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًّا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(-100, 0), (100, 0)$. $\frac{x^2}{1600}-\frac{y^2}{8400}=1$

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$. $(40, 0)$

تدرب وحل المسائل

1-6) انظر ملحق الإجابات.

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{17}=1$

2) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{30}=1$

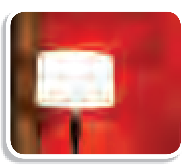
3) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49}-\frac{(x-4)^2}{64}=1$

5) $3x^2-2y^2=12$

6) $3y^2-5x^2=15$

7) **إضاءة :** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225}-\frac{x^2}{81}=1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1) انظر ملحق الإجابات.



اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2) **8-10) انظر ملحق الإجابات**

8) $x^2-4y^2-6x-8y=27$

9) $-x^2+3y^2-4x+6y=28$

10) $-5x^2+2y^2-70x-8y=287$

11) $9y^2-4x^2-54y+32x-19=0$ **11-12) انظر الهامش.**

12) $16x^2-9y^2+128x+36y+76=0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3) **13-19) انظر ملحق الإجابات.**

13) البؤرتان $(-7, -1), (-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5), (7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5), (11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3), (-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y=\pm\frac{3}{7}x+\frac{45}{7}$.

16) البؤرتان $(-17, 7), (9, 7)$ ، وخطا التقارب $y=\pm\frac{5}{12}x+\frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y=\frac{7}{5}x+\frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, -2), (2, 10)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

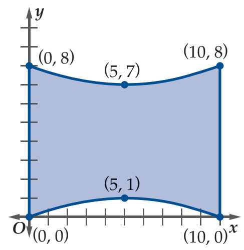
19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-2, 13), (-2, -1)$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	28–1، 30 ، 34–36 ، 39–48
ضمن المتوسط	29–1 (فردي)، 32، 33 ، 34–36 ، 38–48
فوق المتوسط	29–48

(20a $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x-5)^2}{\frac{225}{7}}=1$

20) **هندسة معمارية:** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل. انظر الهامش.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3) **90 ft**

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$ **1.52**

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$ **1.27**

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ **1.06**

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$ **1.33**

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$ **1.58**

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$ **2.83**

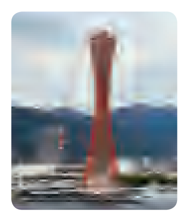
27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة. **انظر ملحق الإجابات.**

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة. **انظر ملحق الإجابات.**

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة. **(40, 13.7)**

28) **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19. **انظر ملحق الإجابات**

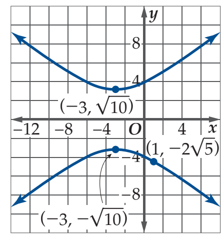


a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

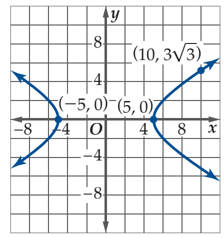
اكتب معادلة القطع الزائد الممثّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)



$\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

30)

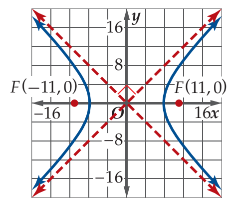


$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$

32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$

33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه. **انظر ملحق الإجابات.**

b) **تحليليًّا:** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب. **انظر ملحق الإجابات.**

c) **تحليليًّا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

d) **بيانيًّا:** مثل منحنيي القطعين في الفرع c. **انظر ملحق الإجابات.**

e) **لفظيًّا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين. **انظر الهامش.**

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 33 التمثيل البياني والتحليل الجبري والتعبير اللفظي لاستكشاف نوع خاص من القطوع الزائدة يسمى القطع الزائد المرافق.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب أن يكتب كيف يساعده الدرس الحالي عن القطع الزائد على تعلم الدرس التالي عن تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)

إجابات:

33e) إجابة ممكنة: القطعان الزائدان المترافقان لهما نفس خطوط التقارب، ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين في كلٍّ منهما.

34) إجابة ممكنة: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{15} = 1$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: القطع الزائد المتطابق الساقين هو نوع خاص من القطوع الزائدة يرتبط بالمعادلة العامة $xy = c$، حيث c ثابت لا يساوي الصفر. اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنيات عدّة قطوع زائدة متطابقة الساقين، وتسجيل مشاهداتهم حولها. كيف يظهر خطّا التقارب؟ وما الأنماط الأخرى التي يمكنهم تحديدها؟ **خطا التقارب هما المحوران x و y . وعندما تزداد $|c|$ ، فإن فرعي القطع الزائد يتحركان مبتعدين عن نقطة الأصل .**

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين. انظر الهامش.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a-d) انظر ملحق الإجابات.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟ انظر ملحق الإجابات.

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$، $F_2(0, -9)$، ويمر بالنقطة P. يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2. اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية. انظر ملحق الإجابات.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$. انظر ملحق الإجابات

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما يعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 2-4) 40-42 انظر ملحق الإجابات

40) $(x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قُذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 1-4)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟ 105 ft

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟ 5 ثوانٍ

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ. (الدرس 5-3)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$ $\quad 2n\pi, n \in Z$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$ $\quad \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in Z$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$ لا يوجد حل.

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟ B

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

$y-1 = \pm\frac{1}{2}(x+1)$

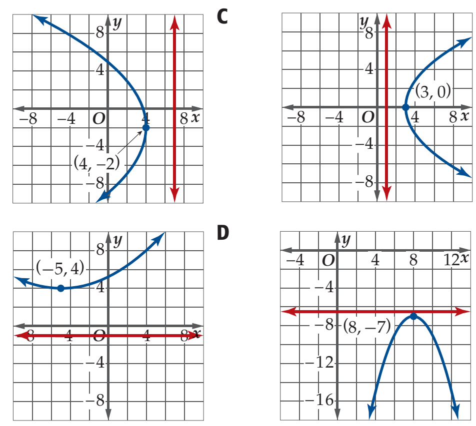
196 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 1-4) **2-1) انظر الهامش.**

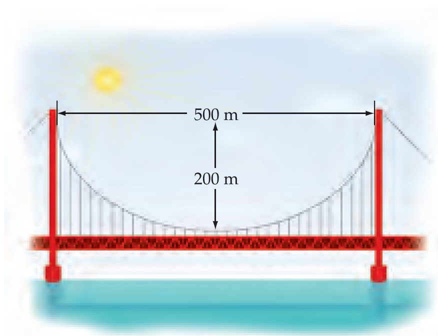
1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

2) البؤرة $(-7, 5)$، الرأس $(-7, 1)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثَّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 1-4) **D**



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثِّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 1-4) $y = \frac{2}{625}x^2$



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-4)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ **6-5) انظر ملحق الإجابات.**

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 2-4) **10-7) انظر الهامش**

7) الرأسان $(-3, -3)$, $(9, -3)$ ، والبؤرتان $(-1, -3)$, $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$ ، والرأسان المرافقان $(4, -7)$, $(-2, -7)$.

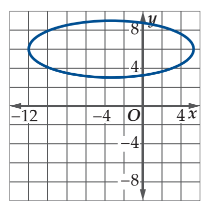
10) الرأسان $(8, -9)$, $(8, 5)$ ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 (الدرس 2-4)

a) ما أكبر عرض للبركة؟ **22 ft تقريبًا**

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{121} = 1$

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور القاطع في القطع الناقص الممثّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 2-4) **A**



A 17 وحدة
B 9 وحدات
C 6 وحدات
D 3 وحدات

مثّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4) **14-13) انظر ملحق الإجابات.**

13) $\frac{x^2}{81} - \frac{(y+7)^2}{81} = 1$

14) $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 3-4) **18-15) انظر ملحق الإجابات.**

15) الرأسان $(0, -5)$, $(0, 5)$ وطول المحور المرافق 6 وحدات.

16) البؤرتان $(-6, 0)$, $(10, 0)$ وطول المحور القاطع 4 وحدات.

17) الرأسان $(-11, 0)$, $(11, 0)$ والبؤرتان $(-14, 0)$, $(14, 0)$.

18) البؤرتان $(5, -9)$, $(5, 7)$ وطول المحور القاطع 10 وحدات.

الدروس من 1-4 إلى 3-4

التقويم التكويني

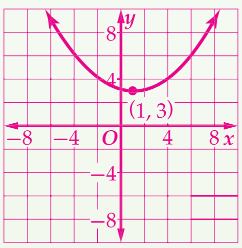
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

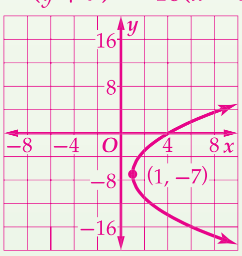
اختبار منتصف الفصل، ص (70) .

إجابات:

1) $(x-1)^2 = 8(y-3)$



2) $(y+7)^2 = 16(x-1)$



7) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$

8) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

9) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{36} = 1$

10) $\frac{(x-8)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 1-4 , 2-4 , 3-4	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (170)		

4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-4

تحليل قطوع مخروطية متنوعة.

الدرس 4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية من معادلاتها.

إيجاد دوران المحورين لكتابة معادلات قطوع مخروطية بعد دورانها.

ما بعد الدرس 4-4

حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية أو غير خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- يحتاج مذنّب هالي إلى 76 سنة ليدور حول الشمس دورة واحدة، وقد ظهر في المرة الأخيرة عام 1986، ففي أي سنة تقريبًا سيظهر مرة أخرى؟ 2062
- بماذا يختلف القطع الزائد عن بقية القطوع المخروطية؟ للقطع الزائد جزآن.
- من بين القطوع المخروطية التي درستها أي منها يُعَدُّ دالة؟ القطع المكافئ الذي دالته الرئيسة (الأم) $y = x^2$، وله محور تماثل رأسي.
- هل يمكن لمنحنى القطع الزائد أن يُمثّل دالة؟ لا

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها
Identifying Conic Sections and Rotations

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

(الدروس من 1—4 إلى 3—4)

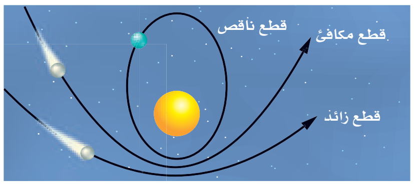
والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.
- أكتب معادلات قطوع مخروطية بعد دوران محاورها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة القطع.

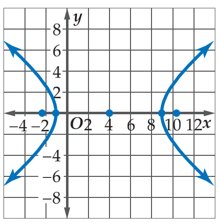


الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثـال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا:

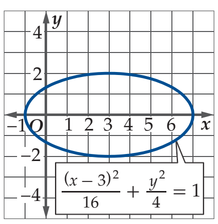
a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$



المعادلة الأصلية	$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$
جمّع الحدود المتشابهة، وأخرج العامل المشترك	$16(x^2 - 8x + ■) - 25y^2 = 144 + 16(■)$
حلّل وبسّط	$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$
مربع كامل	$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$
اقسم كل حدّ على 400	$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$



المعادلة الأصلية	$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$
جمّع الحدود المتشابهة	$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$
أكمل المربع	$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$
حلّل وبسّط	$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$
اقسم كلا الطرفين على 16	$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

✔ **تحقق من فهمك** انظر ملحق الإجابات.

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (200)	• تنويع التعليم ص (200)	• تنويع التعليم ص (200)
كتاب التمارين	ص (25)	ص (25)	ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعلم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ على الصورة القياسية. فعندما يكون الحد الذي يتضمّن xy موجودًا، أي أن $(B \neq 0)$، يمكنك استعمال المميز B^2-4AC لتحديد نوع القطع وهو مميز للمعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

مراجعة المفردات

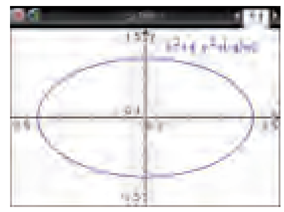
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو b^2-4ac.

مفهوم أساسي **تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز**

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2-4AC=0$
قطع ناقص	$B^2-4AC<0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2-4AC<0, B=0, A=C$
قطع زائد	$B^2-4AC>0$

يكون القطع أفقيًّا أو رأسيًّا عندما $B=0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًّا ولا رأسيًّا.

قطع ناقص أفقي: $B=0$



$x^2+4y^2-4=0$

قطع ناقص ليس رأسيًّا ولا أفقيًّا: $B \neq 0$

$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2+4x^2-3xy+4x-5y-8=0$

$A=4, B=-3, C=1$

المميز يساوي $(-3)^2-4(4)(1)=-7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2-6x+4y-5y^2+2xy-4=0$

$A=3, B=2, C=-5$

المميز يساوي $2^2-4(3)(-5)=64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2-8x+6y-14=0$

$A=0, B=0, C=4$

المميز يساوي $0^2-4(0)(4)=0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

مثال 1 يبيِّن كيفية كتابة معادلة تربيعية من الصورة العامة إلى الصورة القياسية، ثم تحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، وتمثيل منحناه بيانيًّا.

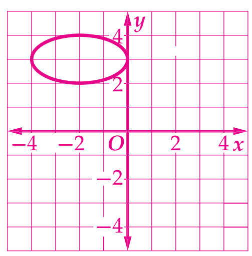
مثال إضافي

1 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

a) $x^2+4y^2+4x-24y+36=0$

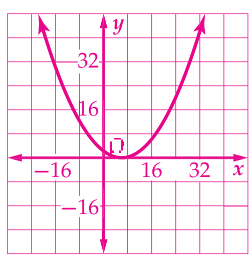
قطع ناقص

$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$



b) $x^2-12x-16y+36=0$

قطع مكافئ، $(x-6)^2=16y$



التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

تحديد أنواع القطوع المخروطية

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال المميِّز لتحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله معادلة معطاة بالصورة العامة.

مثال إضافي

2 حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $2x^2 + y^2 - 2x + 5xy + 12 = 0$
قطع زائد

b) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8 = 0$
دائرة

c) $2x^2 + 2y^2 - 6y + 4xy - 10 = 0$
قطع مكافئ

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض عدة معادلات لقطوع مخروطية على السبورة التفاعلية، كل منها على الصورة العامة. اطلب إلى كل طالب التعرّف إلى نوع القطع الذي تُمثّله المعادلة من خلال اختيار الرمز (A) للدلالة على القطع المكافئ، والرمز (B) للدلالة على الدائرة، والرمز (C) للدلالة على القطع الناقص، والرمز (D) للدلالة على القطع الزائد. ناقش الطلاب في نتيجة كل معادلة يكتبونها.

✓ تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$ قطع زائد

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$ قطع زائد

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$ قطع ناقص

دوران القطوع المخروطية: تعلم أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسيًّا أو أفقيًّا، فإن محوريه يوازيان المحورين الإحداثيين، وذلك عندما لا تحتوي معادلات هذه القطوع على الحد xy .

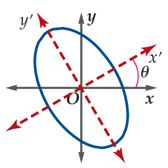
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ محورا القطع المخروطي موازيان للمحورين الإحداثيين.

ستتعامل في هذا الدرس مع قطوع مخروطية دوِّرت محاورها بحيث لا تكون موازية للمحورين الإحداثيين، وتكون $B \neq 0$ في الصورة العامة لهذه القطوع الدورانية، لذا يظهر الحد xy في المعادلة.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ دُوِّر محورا القطع المخروطي على المحورين الإحداثيين.

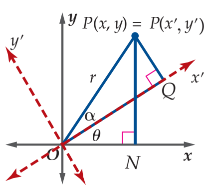
إذا حذف الحد xy ، فيمكن كتابة معادلة القطع المخروطي على الصورة القياسية بإكمال المربع. ولحذف هذا الحد نقوم بتدوير المحورين الإحداثيين حتى يصبحا موازيين لمحوري القطع المخروطي.

عندما يدوّر المحوران الإحداثيان بزاوية قياسها θ كما هو موضح تبقى نقطة الأصل ثابتة، ويتشكّل محوران جديدان هما x', y' ، و فيما يأتي الصورة العامة لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الإحداثي الجديد $x'y'$.



$$A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$ معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$

يمكن استعمال حساب المثلثات لاشتقاق علاقات تربط بين النقطة $P(x, y)$ في مستوى xy والنقطة $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.



في المثلث PNO المجاور لاحظ أن:
$OP = r, ON = x, PN = y, m\angle NOP = \alpha + \theta$.
يمكنك باستعمال $\triangle PNO$ التوصل إلى العلاقات الآتية:

$$x = r\cos(\alpha + \theta)$$ نسبة جيب التمام

$$= r\cos\alpha \cos\theta - r\sin\alpha \sin\theta$$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$$y = r\sin(\alpha + \theta)$$ نسبة الجيب

$$= r\sin\alpha \cos\theta + r\cos\alpha \sin\theta$$ متطابقة الجيب لمجموع زاويتين

وباستعمال المثلث القائم الزاوية POQ ، حيث $OP = r, OQ = x', PQ = y', m\angle QOP = \alpha$ يمكنك التوصل إلى العلاقتين $x' = r\cos\alpha$ ، $y' = r\sin\alpha$. وبالتعويض في العلاقات السابقة ينتج أن

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad \text{و} \quad y = y'\cos\theta + x'\sin\theta$$

تنويع التعليم

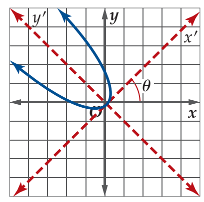
دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: وزِّع الطلاب إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية متفاوتة القدرات.
وبعد مناقشة الطلاب في المثالين 3, 4 اطلب إلى المجموعات العمل معًا؛ لإكمال تمارين تحقق من فهمك لكل مثال. ثم مقارنة نتائج كل مجموعة بنتائج غيرها من المجموعات ومناقشة الاختلافات إن وجدت. اطلب إلى كل مجموعة مشاركة الصف في نتائجها لكل مسألة ، ثم ناقش طلاب الصف في الأسئلة والصعوبات والاختلافات التي يمكن أن تظهر.

مفهوم أساسي: تحويل محاور القطوع المخروطية من المستوى xy إلى المستوى $x'y'$ بالدوران

يمكن إعادة كتابة المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy على الصورة $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$، بزاوية دوران قياسها θ، وذلك باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad , \quad y = y'\cos\theta + x'\sin\theta$$



مثال 3: كتابة معادلة في المستوى $x'y'$

استعمل $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 35 = 0$ في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

أوجد معادلتي x, y.

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad \text{صيغتا دوران } x, y \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوض في المعادلة الأصلية.

$$4x^2 \quad + \quad 6xy \quad + \quad 4y^2 \quad - 35 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 35 = 0$$

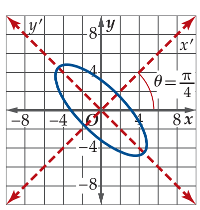
$$\frac{4[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{4[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} - 35 = 0$$

$$2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + 2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2 - 35 = 0$$

$$7(x')^2 + (y')^2 = 35$$

$$\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$$

فيكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا. والصورة القياسية له في مستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$ كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

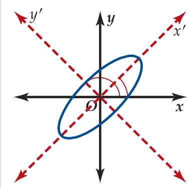
3) استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله. $\frac{(x')^2}{\frac{60}{9}} + \frac{(y')^2}{60} = 1$ ؛ قطع ناقص

يمكن استعمال علاقتين أخريين تربطان x', y' بـ x, y؛ لإيجاد معادلة في مستوى xy لقطع مخروطي بعد دورانه.

إرشادات للدراسة

زاوية الدوران

زاوية الدوران θ هي زاوية حادة؛ وذلك عائد إلى حقيقة أن المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. فمثلاً يمكن تدوير المستوى في الشكل أدناه $123°$ غير أن الدوران $33°$ هي الزاوية التي تحدد المحورين $x'y'$.



تحويل محاور القطوع المخروطية

مثال 3 يبيِّن كيفية كتابة معادلة في مستوى $x'y'$ إذا كانت معطاة في مستوى xy عندما يدور المحوران بزاوية قياسها θ.

مثال 4 يبيِّن طريقة كتابة معادلة في المستوى xy إذا كانت معطاة في المستوى $x'y'$ عندما يدور المحوران بزاوية قياسها θ.

مثال إضافي

3 استعمل $\theta = 90°$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

$\frac{(y')^2}{3} + x'y' - \frac{(x')^2}{3} = 1;$ قطع زائد

المحتوى الرياضي

الحد xy: إنّ وجود حد غير صفري xy يشير إلى دوران منحنى القطع المخروطي في المستوى. فمثلاً في حالة القطع الناقص فإنّ المحور الأكبر لم يعد موازيًا لمحور x أو محور y. يدور المحور الأكبر بزاوية تعتمد على A, B و C، ويكون قياسها صفرًا عندما $B = 0$.

مثال إضافي

4 فيزياء: إذا كانت معادلة الترس في المثال 4 بعد الدوران $45°$ في المستوى $x'y'$ هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{8} = 1$، فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوى xy.
$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0$

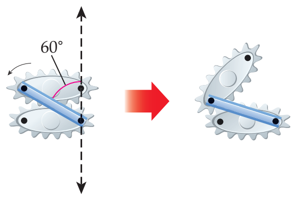
مفهوم أساسي — تحويل محاور القطوع المخروطية من المستوى $x'y'$ إلى المستوى xy بالدوران.

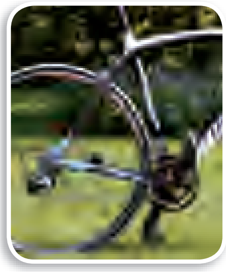
إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ بزاوية دوران قياسها θ، فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوى xy باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلة في المستوى xy

فيزياء: يمكن استعمال تُروس السرعة والتي تأخذ شكل قطع ناقص للحصول على سرعات متغيرة. فإذا كانت معادلة ترس بعد دورانه $60°$ في المستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$، فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوى xy.





الربط مع الحياة

سرعة الدراجة الهوائية
تعتمد سرعة الدراجة الهوائية على قطر الترس؛ فكلما قلَّ قطر الترس، زادت السرعة.

استعمل صيغتي الدوران لـ x', y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في مستوى xy.

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$	صيغتا الدوران لـ x', y'	$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$
$= x\cos 60° + y\sin 60°$	$\theta = 60°$	$= y\cos 60° - x\sin 60°$
$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

عوّض هذه القيم في المعادلة الأصلية.

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 36 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في 36}$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36 \quad \text{عوّض}$$

$$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36 \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36 \quad \text{جمّع الحدود المتشابهة}$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في 4}$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0 \quad \text{اطرح 144 من كلا الطرفين}$$

معادلة القطع الناقص في المستوى xy هي: $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$، فاكتب معادلة الترس في المستوى xy. $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 - 40 = 0$

202 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 26–1 للتحقق من استيعاب الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع للتمارين 26–19: تأكّد أنّ الطلاب يستعملون المعادلتين المثلثيتين

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

للحصول على قيم لتعويضها عن x' و y'.

إجابة:

12a) قطع مكافئ، $(x-660)^2 = -\frac{125}{3}(y-10500)$

تدرب وحل المسائل

4–1) انظر ملحق الإجابات.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $x^2+4y^2-6x+16y-11=0$

2) $x^2+y^2+12x-8y+36=0$

3) $9y^2-16x^2-18y-64x-199=0$

4) $6y^2-24y+28-x=0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2-5y=9x-12$ قطع مكافئ

6) $5y^2=2x+6y-8+3x^2$ قطع زائد

7) $8x^2+8y^2+16x+24=0$ دائرة

8) $4x^2-6y=8x+2$ قطع مكافئ

9) $4x^2-3y^2+8xy-12=2x+4y$ قطع زائد

10) $5xy-3x^2+6y^2+12y=18$ قطع زائد

11) $16xy+8x^2+-10y^2-18x+8y=13$ قطع ناقص

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2+1000y-31680x-45600=0$، وقد حدِّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدِّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية. انظر الهامش.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x=0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟ 1320 ft

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟ 10500 ft

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله: (مثال 3)

13) $x^2-y^2=9;\ \theta=\frac{\pi}{3}$ **(18–13)** انظر ملحق الإجابات.

14) $xy=-8;\ \theta=45°$

15) $x^2-8y=0;\ \theta=\frac{\pi}{2}$

16) $2x^2+2y^2=8;\ \theta=\frac{\pi}{6}$

17) $y^2+8x=0;\ \theta=30°$

18) $4x^2+9y^2=36;\ \theta=30°$

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ: (مثال 4)

19) $(x')^2+3(y')^2=8;\ \theta=\frac{\pi}{4}$ $x^2-xy+y^2-4=0$

20) $\frac{(x')^2}{25}-\frac{(y')^2}{225}=1;\ \theta=\frac{\pi}{4}$ $4x^2+10xy+4y^2-225=0$

21) $\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{36}=1;\ \theta=\frac{\pi}{3}$ $x^2+10\sqrt{3}xy+11y^2-144=0$

22) $(x')^2=8y';\ \theta=45°$ $x^2+2xy+y^2+8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y=0$

23) $\frac{(x')^2}{7}+\frac{(y')^2}{28}=1;\ \theta=\frac{\pi}{6}$ $13x^2+6\sqrt{3}xy+7y^2-112=0$

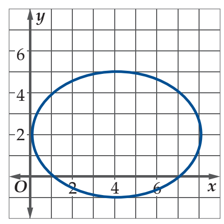
24) $4x'=(y')^2;\ \theta=30°$ $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-8\sqrt{3}x-8y=0$

25) $\frac{(x')^2}{64}-\frac{(y')^2}{16}=1;\ \theta=45°$ $3x^2-10xy+3y^2+128=0$

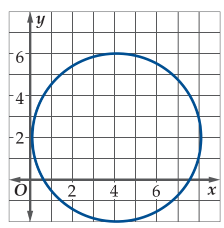
26) $(x')^2=5y';\ \theta=\frac{\pi}{3}$ $x^2+3y^2+2\sqrt{3}xy+10\sqrt{3}x-10y=0$

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثِّل كلًّا منها:

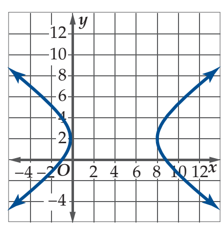
27) c



28) a



29) b



a) $x^2+y^2-8x-4y=-4$

b) $9x^2-16y^2-72x+64y=64$

c) $9x^2+16y^2=72x+64y-64$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	26–1، 48–37
ضمن المتوسط	33–1 (فردي)، 35، 48–37
فوق المتوسط	48–27

4 التقويم

تعلّم لاحق كلِّف الطلاب أن يكتبوا كيف يرتبط الدرس الحالي مع حل أنظمة المعادلات الخطية وغير الخطية.

التقويم التكويني

تحقّق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 4-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

تمثيلات متعددة

في السؤال 35 يستعمل الطلاب التحليل والتمثيل البياني والجبر في رسم القطع الناقص بمعطيات محدّدة، ثم إعادة تمثيله بعد إجراء دورانه بزاوية محددة.

---

30) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكِّلًا قطعًا مخروطيًّا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع، ومثّل منحناه بيانيًّا. انظر الهامش.

قابل بين كل حالة في التمارين 34-31 مع المعادلة التي تمثِّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

31) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft. **d**

32) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين. **b**

33) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال. **a**

34) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها. **c**

35) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه (-2)، $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$. انظر الهامش.

a) **تحليليًّا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًّا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًّا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.

d) **جبريًّا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في (**b**) في المستوى $x'y'$.

e) **بيانيًّا:** مثّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** بيِّن أن منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لا يتغير تحت تأثير أي دوران. انظر ملحق الإجابات.

37) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. انظر ملحق الإجابات.
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثِّل المعادلة قطعًا مكافئًا. انظر الهامش.

39) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

40) **فلك:** افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذنَّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3) انظر ملحق الإجابات.

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2) **(41-43)** انظر ملحق الإجابات.

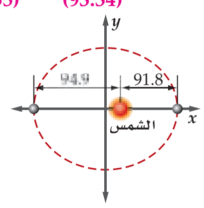
41) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

42) $4x^2 + 8y^2 = 32$

43) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

44) **فلك:** أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)

$$\frac{x^2}{(93.35)^2} + \frac{y^2}{(93.34)^2} = 1$$



حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 4-2)

45) $\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2$ **2**

46) $\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2$ **1**

تدريب على اختبار

47) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. **قطع مكافئ**

48) **اختيار من متعدد:** ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟ **A**

A $y = x^2 - 4x + 6$

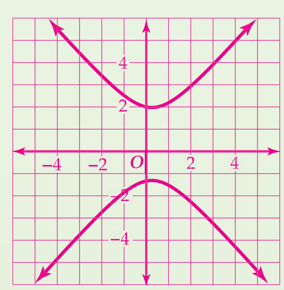
B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

إجابات:

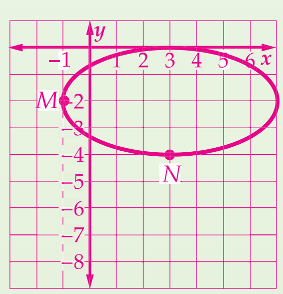
30) قطع زائد،



35a) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

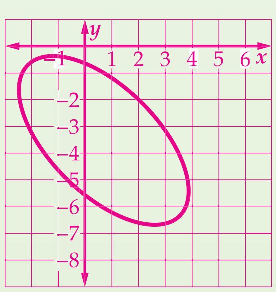
35b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$

35c)



35d) $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 10\sqrt{2}x' + 22\sqrt{2}y' + 18 = 0$

35e)



38) إجابة ممكنة: $9x^2 + 6xy + y^2 + 2x + 2y + 8 = 0$

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتقريب حلول أنظمة من المعادلات والمتباينات غير الخطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات التدريس

ذكّر طلاب الصف بأنّ حلول أنظمة المعادلات هي نقطة أو نقاط تقاطع الدوال.

وذكّرهم أيضًا بأنه عند تمثيل معادلة على حاسبة بيانية فإنّ المعادلة يجب أن تحل أولاً بالنسبة لِـ y ، ثم يتم إدخال المعادلتين إلى الحاسبة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية قدراتهم متفاوتة ، واطلب إليهم إكمال النشاطين 1 و 2 والأسئلة 8 ,2 ,1. ثم مقارنة نتائجهم بنتائج المجموعات الأخرى ومناقشة اختلاف النتائج إن وجد.

- اسأل الطلاب أن يحددوا نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة قبل تمثيلها بيانياً. وناقش الإمكانات المختلفة لنقاط التقاطع بين القطوع المخروطية.
- إذا لم يستطع الطلاب مشاهدة المنحنيات التي رسموها كاملة فذكّرهم بأن يضبطوا شاشة العرض على القياس المناسب.
- يستطيع الطلاب عند حل أنظمة المتباينات أن يتحققوا من صحة منطقة الحل بتعويض نقطة من منطقة الحل في كلّ متباينة.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 3-7, 9, 10.

توسع 4-4

معمل الحاسبة البيانية:

أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًّا

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًّا:

$x^2 + y^2 = 13$

$xy + 6 = 0$

لحل المعادلتين بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًّا.

- اضغط على المفاتيح: menu esc ثم اختيار 3: إدخال / تحرير الرسم البياني
2: معادلة 6: القطوع المخروطية
1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$
- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.

- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$, $x^2 - y^2 = 3$ **$(2, 1), (-2, -1)$**

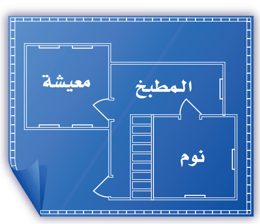
2) $49 = y^2 + x^2$, $x = 1$ **$(1, 6.9), (1, -6.9)$**

3) $x = 2 + y$, $x^2 + y^2 = 100$ **$(8, 6), (-6, -8)$**

4) $25 - 4x^2 = y^2$, $2x + y + 1 = 0$ **$(1.5, -4), (-2, 3)$**

5) $y^2 = 9 - 3x^2$, $x^2 = 10 - 2y^2$ **$(1.3, 2), (-1.3, 2), (1.3\ -2), (-1.3, -2)$**

6) $y = -1 - x$, $4 + x = (y - 1)^2$ **$(0, -1), (-3, 2)$**



7) **تحدّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$ ، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

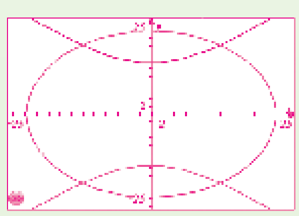
a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًّا، وقدّر طول كل غرفة. **انظر الهامش**

7a) $x^2 + y^2 = 468,$ $x^2 - y^2 = 180$

إجابة:

7b)

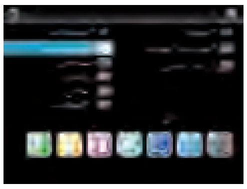


كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$



الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y.

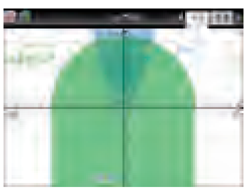
$y > x^2, y \leq \sqrt{36 - x^2}, y \geq -\sqrt{36 - x^2}$

الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على on .

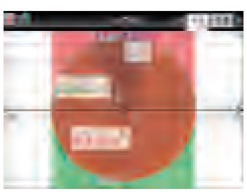
اختر من الشاشة الظاهرة 1 : مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية

الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر رمز التباين > مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط enter .



الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \leq \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر رمز التباين ≤ مستعملًا الأسهم، ستظهر $y \leq$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ثم اضغط على المفتاح tab وتمثيل المتباينة $y \geq -\sqrt{36 - x^2}$، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



أي قم بالضغط على المفاتيح:

tab enter $36 - x^2$ x^2 ctrl ≤ del del tab enter x^2 > del

enter $36 - x^2$ x^2 ctrl $- \geq$ del

لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا: **(8–10) انظر الهامش .**

8) $2y^2 \leq 32 - 2x^2$, $x + 4 \geq y^2$

9) $y + 5 \geq x^2$, $9y^2 \leq 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \leq 32$, $4x^2 + y^2 \leq 32$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختيار 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y: 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على menu ctrl، ثم اختيار 9: اللون ومنها 1: لون الخط أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

3 التقويم

التقويم التكويني

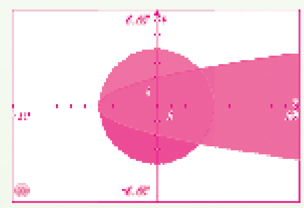
استعمل الأسئلة 1-7 لتقويم قدرات الطلاب على استعمال دالة التقاطع لتحديد نقاط التقاطع جميعها بين القطوع المخروطية. واستعمل الأسئلة 8-10 لتقويم قدرات الطلاب على استعمال دالة المنطقة المظلّلة بطريقة مناسبة لحل أنظمة متباينات .

من المحسوس إلى المجرد

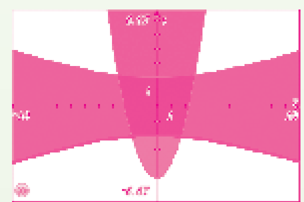
اسأل الطلاب أن يصفوا ما تمثّله المناطق المظلّلة في كل نظام رياضي للتمارين 10-8.

إجابات:

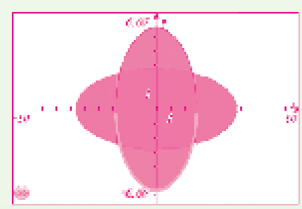
8)



9)



10)



4-5 المعادلات الوسيطية
Parametric Equations

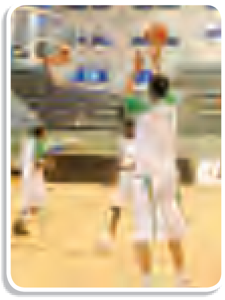
فيما سبق:
درست تمثيل الحركة باستعمال دوال تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أمثل المعادلات الوسيطية بيانيًا.
- أكتب المعادلات الوسيطية في الصورة الديكارتية وبالعكس.
- أحلّ مسائل متعلقة بحركة المقذوفات.

المفردات:
المعادلة الوسيطية parametric equation
المتغير الوسيط parameter
اتجاه المنحنى orientation
المنحنى الوسيطي parametric curve

www.obeikaneducation.com

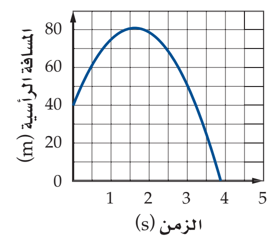
لماذا؟



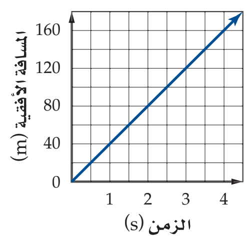
لقد استعملت الدوال التربيعية لتمثيل مسارات المقذوفات مثل كرة السلة. ويمكنك استعمال المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات وتحديد مداها وحساب قيمها.

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية: لقد مثلت في هذا الكتاب منحنيات في المستوى xy مستعملًا معادلة ذات متغيرين x, y . أما في هذا الدرس فإنك ستمثّل بعض هذه المنحنيات باستعمال معادلتين في متغير ثالث. لاحظ المنحنيات الثلاثة أدناه، يمثل كل منها ناحية مختلفة مما يحدث عندما يُقذف جسم في الهواء.

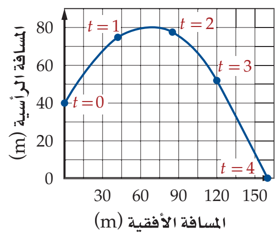
يظهر الشكل 4.5.1 المسافة الرأسية كدالة في الزمن. ويظهر الشكل 4.5.2 المسافة الأفقية على صورة دالة في الزمن، بينما يظهر الشكل 4.5.3 المسافة الرأسية على صورة دالة للمسافة الأفقية.



الشكل 4.5.1



الشكل 4.5.2



الشكل 4.5.3

تصف التمثيلات البيانية أعلاه ومعادلاتها جزءًا مما يحدث عند إطلاق قذيفة. ويمكننا استعمال **المعادلات الوسيطية** للتعبير عن موقع الجسم رأسيًا وأفقيًا. تمثّل المعادلات الآتية المنحنى المبين في الشكل 4.5.3 :

معادلة ديكارتية

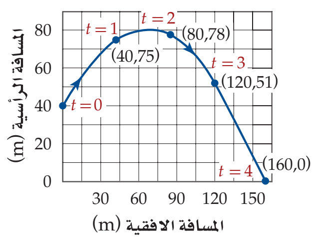
$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

معادلات وسيطية

$x = 30\sqrt{2}t$ المركبة الأفقية

$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$ المركبة الرأسية

يمكن تحديد موقع الجسم عند زمن معين باستعمال المعادلات الوسيطية بحساب المركبتين الأفقية والرأسية للزمن t . ومثال ذلك عندما كان الزمن $t = 0$ فإن موقع الجسم يكون عند $(0, 40)$. يسمى t **المتغير الوسيط**.



يوضّح الشكل تمثيل المنحنى على الفترة الزمنية $0 \le t \le 4$.
يُسمّى تمثيل النقاط مع ترتيب زيادة قيم t ورسم مسار المنحنى في اتجاه معين **اتجاه المنحنى**، ويُشار إليه بأسهم على المنحنى.

مفهوم أساسي **المعادلات الوسيطية**

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنى وسيطيًا. المعادلتان:

$$x = f(t), y = g(t)$$

هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط و I الفترة الوسيطية.

4-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5
تمثيل الحركة باستعمال دوال تربيعية.

الدرس 4-5
تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا.
حل مسائل تتعلق بحركة المقذوفات.

ما بعد الدرس 4-5
تمثيل مواقف تتضمن معادلات وسيطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما الشكل الذي يمكن استعماله لنمذجة مسار كرة السلة عند رميها باتجاه السلة؟ قطع مكافئ
- ماذا يعني كل من المسار والمدى عند رمي كرة سلة؟ المسار هو المنحنى في الفضاء الذي تسلكه الكرة، والمدى هو المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة.

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (211، 213)	• تنويع التعليم ص (213)
كتاب التمارين	ص (26)	ص (26)	ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية

مثال 1 يبيِّن كيفية التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية على فترة معطاة.

الأمثلة 4-2 تبيِّن كيفية كتابة المعادلات الوسيطية دون قيود وبقيود، ثم باستعمال θ متغيرًا وسيطيًّا بالصورة الديكارتية.

مثال 5 يبيِّن كيفية كتابة المعادلات الوسيطية إذا أُعطيت بالصورة الديكارتية وبمتغير وسيط واحد.

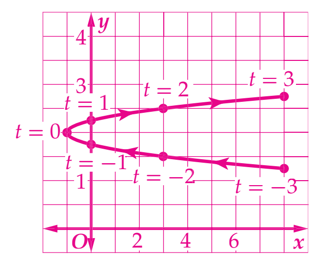
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

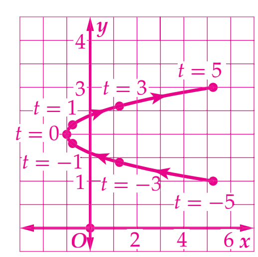
مثالان إضافيان

1 مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

a) $x = t^2 - 1$ و $y = \frac{t}{4} + 2$؛ $-3 \le t \le 3$



b) $x = \frac{t^2}{4} - 1$ و $y = \frac{t}{5} + 2$؛ $-5 \le t \le 5$



2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 2t$ و $x = t^2 + 2$ بالصورة الديكارتية.

$x = \frac{y^2}{4} + 2$

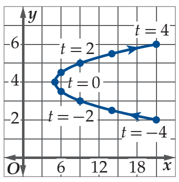
مثال 1 تمثيل منحنيات بدلالة معادلات وسيطية

مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

a) $x = t^2 + 5;\ y = \frac{t}{2} + 4,\ -4 \le t \le 4$.

كوِّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$، ثم مثِّل بيانيًّا إحداثيات (x, y) الناتجة عن تعويض قيم t في المعادلتين الوسيطيتين، ثم صِل بين النقاط بمنحنى.

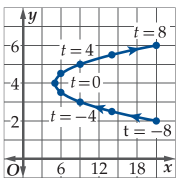
t	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x	21	14	9	6	5	6	9	14	21
y	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -4 إلى 4.

b) $x = \frac{t^2}{4} + 5,\ y = \frac{t}{4} + 4;\ -8 \le t \le 8$.

t	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
x	21	14	9	6	5	6	9	14	21
y	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -8 إلى 8.

تحقق من فهمك (1A-B) انظر الهامش.

1A) $x = 3t,\ y = \sqrt{t} + 6;\ 0 \le t \le 8$

1B) $x = t^2,\ y = 2t + 3;\ -10 \le t \le 10$

إرشادات للدراسة

منحنيات لا تمثل دوال

يمكن استعمال المعادلات الوسيطية لتمثيل منحنيات صورتها الجبرية لا تمثل دوالّ كما في مثال 1.

يمكنك تمثيل المنحنى نفسه بمعادلتين وسيطيتين مختلفتين، كما في مثال 1، ويكون الاختلاف الوحيد بين المنحنيين في سرعتيهما، إذ يسير الجسم على المنحنى في الجزء **a** بشكل أسرع من الجسم في الجزء **b**. وعوضًا عن تعيين النقاط لتحديد المنحنى، يمكنك تحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية بحذف المتغير الوسيط بطريقة التعويض.

مثال 2 كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 3t - 1,\ y = t^2 + 2$ بالصورة الديكارتية.

$x = 3t - 1$ معادلة x الوسيطية

$\frac{x+1}{3} = t$ الحل بالنسبة لـ t

$y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$ عوِّض $t = \frac{x+1}{3}$ في معادلة y الوسيطية

$= \frac{x^2 + 2x + 1}{9} + 2$ ربِّع $\frac{x+1}{3}$

$= \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$ بسِّط

فتكون المعادلة الديكارتية $y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$.

تحقق من فهمك

2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = t^2 - 5,\ y = 4t$ بالصورة الديكارتية. $x = \frac{y^2}{16} - 5$

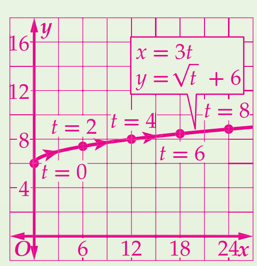
إرشادات للدراسة

حذف المتغير الوسيط

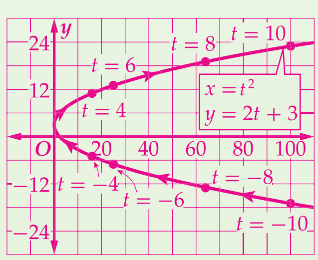
عند حذف المتغير الوسيط، وذلك بتحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية، يمكن أن تحل أي من المعادلتين الوسيطيتين، وتجد قيمة t، ثم يتم التعويض في المعادلة الأخرى.

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A



(1B



يجب أحيانًا وضع قيود على المجال بعد التحويل من الصورة الوسيطية إلى الصورة الديكارتية.

مثال 3 مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \frac{1}{\sqrt{t}},\ y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدّد المجال.

$x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ المعادلة الأولى

$\sqrt{t} = \frac{1}{x}$ الحل بالنسبة لـ t

$t = \frac{1}{x^2}$ ربّع الطرفين

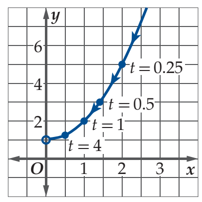
عوّض $\frac{1}{x^2}$ بدلًا من t في المعادلة الثانية.

$y = \frac{t+1}{t}$ المعادلة الثانية

$= \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$ عوّض $t = \frac{1}{x^2}$

$= \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ بسّط

$= x^2 + 1$ بسّط



على الرغم من أنّ الصورة الديكارتية هي $y = x^2 + 1$، فإن المنحنى معرّف فقط عند $t > 0$، وذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ معرفة فقط عندما $t > 0$. وكما يظهر في الشكل فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون هو $\{x \mid x \in R, x > 0\}$.

تحقق من فهمك

3) اكتب $x = \sqrt{t+4},\ y = \frac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال. انظر الهامش.

يمكن أن يكون المتغير الوسيط في المعادلة الوسيطية زاوية مثل θ.

مثال 4 الصورة الديكارتية عندما يكون المتغير الوسيط زاوية (θ)

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 2\cos\theta,\ y = 4\sin\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا.

حلّ المعادلتين بالنسبة لـ $\sin\theta, \cos\theta$ ثم استعمل متطابقة مثلثية.

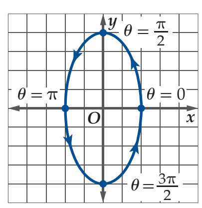
$y = 4\sin\theta$ المعادلتان الوسيطيتان $x = 2\cos\theta$

$\frac{y}{4} = \sin\theta$ الحل بالنسبة لـ $\sin\theta, \cos\theta$ $\frac{x}{2} = \cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$ $\sin\theta = \frac{y}{4},\ \cos\theta = \frac{x}{2}$

$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ بسّط



تُمثِّل المعادلتان الوسيطيتان قطعًا ناقصًا تمثيله البياني في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك انظر الهامش.

4) اكتب $x = 3\sin\theta,\ y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$

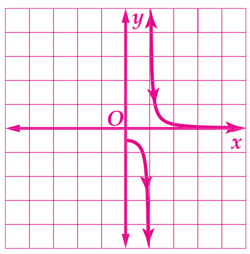
إرشاد تقني

المتغيرات الوسيطية عند تمثيل منحنيات معادلات وسيطية باستعمال الحاسبة البيانية، يستعمل المتغير t بدل θ

مثالان إضافيان

3 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \sqrt{t+1},\ y = \frac{1}{2t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا. وحدِّد المجال.

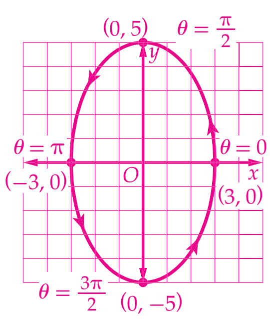
$y = \frac{1}{2x^2 - 2},\ x \geq 0,\ x \neq 1$



$x \neq -1$ ، $x \neq 1$

4 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 3\cos\theta$ و $y = 5\sin\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّلهما بيانيًّا.

$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

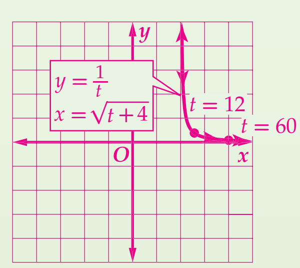


المحتوى الرياضي

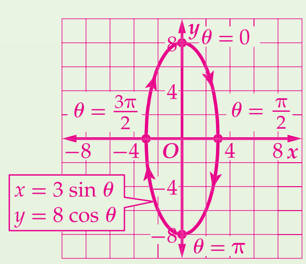
المعادلات الوسيطية هي مجموعة من المعادلات، يُعبَّر فيها عن كل من المتغيرين x, y بدلالة الزمن أو قياس زاوية. وعند كتابة المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية دون المتغير الوسيط تحقق دائمًا من أنّ الأجزاء الدخيلة غير متضمّنة.

إجابات (تحقق من فهمك):

3) $y = \frac{1}{x^2 - 4},\ x > 2,\ x \neq 2$



4)



يمكن وصف المنحنى نفسه باستعمال زوجين مختلفين أو أكثر من المعادلات الوسيطية. إذا كان الفرق فقط في السرعة أو الاتجاه أو كليهما. ويظهر الفرق في السرعة من خلال قيم المتغير الوسيط، ويُشار إلى الاتجاه بأسهم على المنحنى.

مثال 5 كتابة معادلة ديكارتية في الصورة الوسيطية

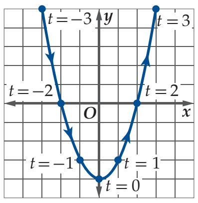
استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 - 4$. ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه:

a) $t = x$

$y = x^2 - 4$ المعادلة الأصلية

$= t^2 - 4$ عوِّض x في المعادلة الأصلية.

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = t$, $y = t^2 - 4$، وتبيِّن قيم t على التمثيل البياني المجاور السرعة، كما تبين الأسهم اتجاهات المنحنى.



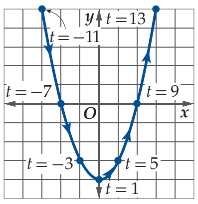
b) $t = 4x + 1$

$x = \frac{t-1}{4}$ الحل بالنسبة لـ x

$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$ عوِّض x في المعادلة الأصلية.

$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ بسِّط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = \frac{t-1}{4}$, $y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$



c) $t = 1 - \frac{x}{4}$

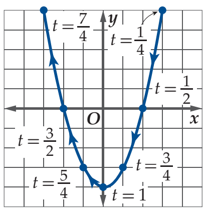
$4 - 4t = x$ الحل بالنسبة لـ x.

$y = (4 - 4t)^2 - 4$ عوِّض x في المعادلة الأصلية.

$= 16t^2 - 32t + 12$ بسِّط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = 4 - 4t$, $y = 16t^2 - 32t + 12$.

لاحظ أن السرعة هنا أكبر بكثير منها في a. أمّا الاتجاه، فكما هو مشار إليه بالأسهم.



تحقق من فهمك

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة الديكارتية $x = 6 - y^2$. ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: للتمثيل البياني انظر الهامش.

5A) $t = x + 1$ **5B)** $t = 3x$ **5C)** $t = 4 - 2x$

حركة المقذوفات: تستعمل المعادلات الوسيطية عادةً في محاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف يصنع زاوية غير قائمة مع الأفق بالمعادلتين الوسيطيتين الآتيتين:

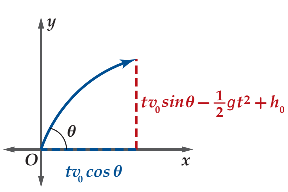
مفهوم أساسي حركة المقذوفات

إذا قُذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق، فإن:

المسافة الأفقية: $x = tv_0 \cos \theta$

المسافة الرأسية: $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الابتدائي.



إرشادات للدراسة

اختيار المعادلة الوسيطية
أسهل طريقة لتحويل معادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة الوسيطية هي استعمال $x = t$. وباستعمال هذه الطريقة تكون المعادلة الوسيطية الأولى هي $x = t$، والثانية هي المعادلة الأصلية مع استبدال المتغير x بـ t

5A) $x = t - 1$
$y = \sqrt{7 - t}$

5B) $x = \frac{t}{3}$
$y = \sqrt{6 - \frac{t}{3}}$

5C) $x = \frac{4 - t}{2}$
$y = \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$

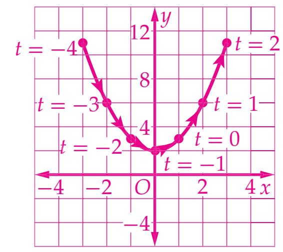
إرشادات للدراسة

ثابت الجاذبية الأرضية
يكون التسارع عند سطح الأرض بسبب جاذبيتها مساويًا $9.8\ m/s^2$ أو $32\ ft/s^2$. عند حل المسائل، تأكد من أنك تستعمل القيمة الصحيحة للجاذبية؛ بناءً على وحدات السرعة والمسافة المعطاة.

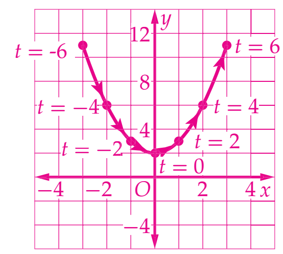
مثال إضافي

5 استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 + 2$ ثم مثِّل المعادلة بيانيًّا.

a) $t = x - 1$ $y = t^2 + 2t + 3$

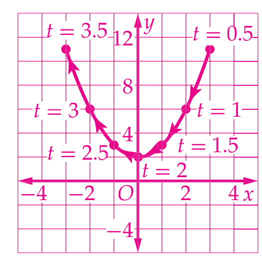


b) $t = 2x$ $y = \frac{t^2}{4} + 2$



c) $t = 2 - \frac{x}{2}$

$y = 4t^2 - 16t + 18$



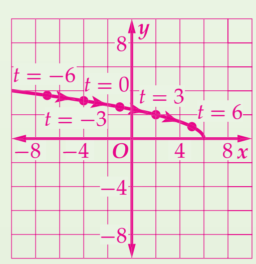
إرشادات للمعلم الجديد

تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًّا

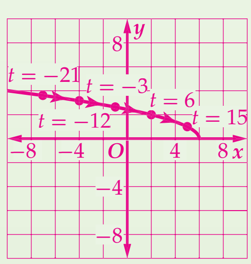
للمثال 5 أكّد على أن المنحنيات الثلاثة لها قيم x نفسها وقيم y نفسها التي تحدّد شكل المنحنى. وهو منحنى $y = x^2 - 4$. والتغير الوحيد يحدث للمتغير الوسيط t.

إجابات (تحقق من فهمك):

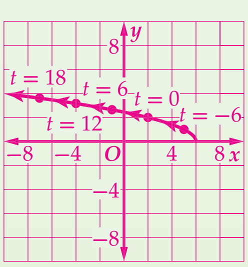
5A)



5B)



5C)



حركة المقذوفات

مثال 6 يبيِّن كيفية استعمال المعادلات الوسيطية لنمذجة حركة المقذوفات.

مثال إضافي

6 **كرة قدم:** ركل أحد اللاعبين كرة قدم بسرعة ابتدائية 26 yd/s. وتميل بزاوية قياسها °72 عن الأفق. أوجد المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا كان أقصى ارتفاع لها 46.47 yd .

24 yd تقريبًا

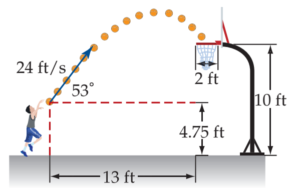
التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة يكتب الطلاب مدخلة حول المعادلات الوسيطية على مدوّنة الصف. وتأكّد من تضمنها معلومات تتعلق بالصورة الديكارتية والوسيطة.

مـثال 6 حركة المقذوفات

كرة سلة: يتدرب نواف على الرميات الحرة في كرة السلة، فقذف الكرة بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 24 ft/s ، وبزاوية تميل °53 على الأفق. وكانت المسافة الأفقية بين يده والحافة الأمامية لحلقة السلة هي 13 ft ، وارتفاع حلقة السلة عن الأرض 10 ft ، وقطر الحلقة 2 ft . إذا كان ارتفاع يده عن الأرض 4.75 ft، فهل سيحرز نواف نقاطًا من هذه الرمية؟

ارسم شكلًا يوضح الموقف.



لتحديد ما إذا كانت الرمية قد حقّقت نقاطًا أم لا، لا بد من حساب المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة عندما كان ارتفاعها 10 ft. اكتب أولًا معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$y = t(24) \sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$ $v_0 = 24, \theta = 53°, g = 32, h_0 = 4.75$

$10 = t(24) \sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$ $y = 10$ (ارتفاع الكرة 10 ft)

وبحل هذه المعادلة التربيعية باستعمال القانون العام تجد أن $t = 0.42$ ، $t = 0.77,$ حيث تمثل $t = 0.42$ قيمة t عندما تكون الكرة على ارتفاع 10 ft وهي صاعدة، وتمثل $t = 0.77$ قيمة t عندما تكون الكرة على ارتفاع 10 ft وهي ساقطة.

حدّد موقع الكرة الأفقي عند الزمن 0.77 ثانية

$x = tv_0 \cos \theta$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الأفقي

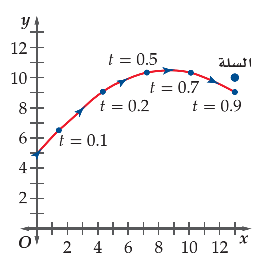
$= 0.77(24) \cos 53$ $v_0 = 24, \theta = 53°, t \approx 0.77$

≈ 11.1 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن الموقع الأفقي للكرة أقل من 13 ft، عندما تصل الكرة إلى ارتفاع 10 ft وهي ساقطة، فإن الكرة لن تصل إلى السلة؛ لذا فإن نوافًا لم يحرز نقاطًا من هذه الرمية.

التحقق: يمكنك تأكيد نتائج الحسابات بتمثيل منحنيَي المعادلتين الوسيطيتين، وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.

t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

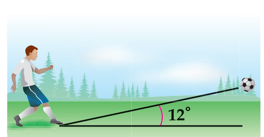


إرشادات للدراسة

إيجاد قيمة t باستعمال الحاسبة البيانية
يمكن أن تمثّل منحنى معادلة موقع الكرة الرأسي والمستقيم $y = 10$ على الشاشة نفسها. سيقطع المستقيم المنحنى في نقطتين. تمثل نقطة التقاطع الثانية الكرة وهي ساقطة في اتجاه السلة. استعمل ميزة نقاط التقاطع من قائمة تحليل الرسم البياني في الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لإيجاد نقطة التقاطع الثانية مع المستقيم $y = 10$ ، وهي القيمة 0.77 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) **كرة قدم:** ركل أحمد كرةً بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 56 m/s وبزاوية مقدارها °12 مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟ 130 m



تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، على أن تسجل كل مجموعة رمي كرة باستعمال فيديو رقمي. واطلب إليهم رصد زمن حركة الكرة منذ انطلاقها ثم مشاهدة الفيديو بالحركة البطيئة وتتبع مسارها. وعلى الطلاب تحديد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة وسرعتها الابتدائية وزاوية انطلاقها. واطلب إلى مجموعات الطلاب استعمال هذه البيانات لكتابة مسائل لفظية وتبادلها مع المجموعات الأخرى، على أن تعرض كل مجموعة شريط الفيديو على الصف.

تدرب وحل المسائل

مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1) 1-5) انظر ملحق الإجابات.

1) $x = t^2 + 3,\ y = \frac{t}{4} - 5;\ -5 \le t \le 5$

2) $x = \frac{t^2}{2},\ y = -4t;\ -4 \le t \le 4$

3) $x = -2t^2,\ y = \frac{t}{3} - 6;\ -5 \le t \le 5$

4) $x = \frac{t}{2},\ y = -\sqrt{t} + 5;\ 0 \le t \le 8$

5) $x = t^2 - 4,\ y = 3t - 8;\ -5 \le t \le 5$

للتمثيلات البيانية انظر ملحق الإجابات.

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال: (المثالان 2, 3)

6) $y = t^2 - 7,\ x = 3t + 9$ $\quad y = \frac{x^2}{9} - 2x + 2$

7) $y = 5t,\ x = t^2 - 2$ $\quad x = \frac{y^2}{25} - 2$

8) $y = -4t + 3,\ x = t^2 + 1$ $\quad x = \frac{(y-3)^2}{16} + 1$

9) $y = 2t^2 + 8,\ x = 5t - 1$ $\quad y = \frac{2x^2}{25} + \frac{4x}{25} + \frac{202}{25}$

10) $y = \frac{6t}{5} + 9,\ x = 4t^2$ $\quad x = \frac{25(y-9)^2}{9}$

11) $y = \frac{t^2}{6} - 7,\ x = \frac{t}{3} + 2$ $\quad y = \frac{3x^2}{2} - 6x - 1$

12) **ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد t ثانية، ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد t ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$، حيث x, y مقيسة بالأقدام. اكتب معادلة ديكارتية تمثِّل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 \le t \le 5$. (مثال 3) انظر الهامش.

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا: (مثال 4) 13-16) انظر ملحق الإجابات.

13) $y = 5 \sin \theta,\ x = 3 \cos \theta$

14) $y = 4 \sin \theta,\ x = 6 \cos \theta$

15) $y = \cos \theta,\ x = 8 \sin \theta$

16) $y = 6 \sin \theta,\ x = 5 \cos \theta$

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة المعطاة، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5) 17-20) انظر ملحق الإجابات.

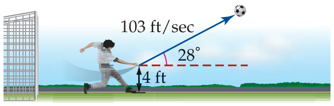
17) $t = 3x - 2,\ y = x^2 + 9$

18) $t = 2 - \frac{x}{3},\ y = \frac{x^2}{12}$

19) $t = \frac{x}{5} + 4,\ y = 10 - x^2$

20) $t = \frac{1 - x}{2},\ y = \frac{3 - x^2}{4}$

21) **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كما في الشكل أدناه كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 103 ft/s لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها °28. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟ (مثال 6) 282 ft



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال:

22) $4x^2 - 32x + 67,\ x \ge 4$

22) $x = \sqrt{t} + 4$, $y = 4t + 3$

23) $x = \log t$, $y = t + 3$ $\quad y = 10^x + 3$

24) $x = \sqrt{t - 7}$, $y = -3t - 8$ $\quad y = -3x^2 - 29,\ x \ge 0$

25) $x = \log (t - 4)$, $y = t$ $\quad y = 10^x + 4$

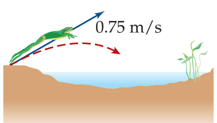
26) **كرة التنس:** ضرب جمال كرة تنس من على ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها °15.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية. انظر الهامش.

b) ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟ 1.05 s تقريبًا

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك، فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث، فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟ انظر الهامش.

27) **أحياء:** يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية 0.75 m/s، ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها °45. وينخفض سطح الجدول 0.3 m عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن g تساوي $9.8\,m/s^2$.



a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t، مفترضًا أن سطح الماء يُمثِّل بالمستقيم $y = 0$ انظر الهامش.

b) إذا كان عرض الجدول 0.5 m، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى، فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟ لا؛ 0.34 m

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-27 لتتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

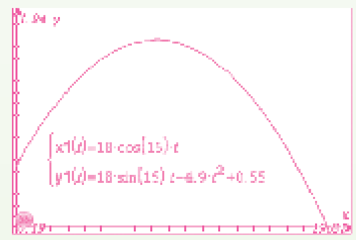
تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 1-5 تأكّد أنّ الطلاب يستعملون الإحداثيين x, y لتحديد شكل المنحنى. ثم كتابة مواقع المتغير الوسيط t عليه.

إجابات:

12) $y = 45 - 3x^2,\ x > 0$

26a)



26c) نعم: تصل الكرة إلى الشبكة بعد 0.575 ثانية. وعند هذا الزمن يكون ارتفاع الكرة 1.6 m، وبذلك تكون قد اجتازت الشبكة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-27، 28، 29، 33-40
ضمن المتوسط	1-25 (فردي)، 27-29، 31-40
فوق المتوسط	26-40

28) **سباق:** اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله 100 m ، وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة 8.0 m/s من النقطة (0, 2) وبتأخير 0.1 s ، بينما ركض سعيد بسرعة 8.1 m/s من النقطة (0, 5) وبتأخير 0.3 s . انظر الهامش.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور y كخط بداية، ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور x .

b) من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق 200 m بدلًا من 100 m، فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

29) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج عن مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور x . انظر ملحق الإجابات a – c.

a) **بيانيًّا:** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ، حيث t مقيسة بالراديان.

b) **تحليليًّا:** ما المسافة بين مقاطع x ؟ صف ما تُمثّله هذه المقاطع x ، وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين.

c) **تحليليًّا:** ما أكبر قيمة لـ y؟ صف ما تمثّله هذه القيمة، وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **تحدٍّ:** المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم ℓ هما $x = 2 + 3t$, $y = -t + 5$. اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m العمودي على ℓ والمار بالنقطة (4, 10) .
إجابة ممكنة: $x = 4 + t, y = 10 + 3t$

31) **اكتب:** اشرح لماذا يوجد عدد لا نهائي من المعادلات الوسيطة تصف المستقيم نفسه في المستوى xy . انظر ملحق الإجابات.

32) **تبرير:** حدّد ما إذا كان بالإمكان استعمال المعادلات الوسيطة لحركة المقذوفات لمحاكاة حركة الأجسام الساقطة بزاوية قياسها °90 . وضّح تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

33) **اكتب:** بيّن ميّزات استعمال المعادلات الوسيطة على استعمال المعادلات الديكارتية عند تحليل المركبات الأفقية والرأسية للمنحنى. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

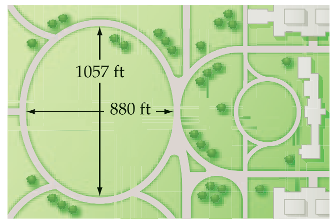
اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

34 – 36) انظر الهامش.

34) الرأسان (5, 8−) ، (5, 4) ، وطول المحور المرافق 4 وحدات.

35) طول المحور القاطع 4 وحدات، والبؤرتان (1−, 3) ، (5, 3)

36) اكتب معادلة تمثّل القطع الناقص في الشكل أدناه مفترضًا أن نقطة الأصل عند مركز القطع. (الدرس 2-4) $\frac{x^2}{193600} + \frac{y^2}{279312.25} = 1$



بسّط كل عبارة من العبارتين الآتيتين: (الدرس 1-3)

37) $\frac{\sin x}{\csc x - 1} + \frac{\sin x}{\csc x + 1}$ $2\tan^2 x$

38) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ $2\csc^2 x$

تدريب على اختبار

39) يحتوي كل مربع غير مظلّل في الشكل أدناه على مجموع العدد في المربع الذي فوقه مباشرة والعدد الذي إلى يساره. فمثلًا العدد 4 في المربع غير المظلّل هو مجموع العدد 2 في المربع الذي فوقه والعدد 2 في المربع الذي إلى يساره. ما قيمة x؟ D

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 8

B 15

C 23

D 30

40) الصورة الديكارتية للمنحنى المعرّف بالمعادلتين: $x = 3\cos\theta - 1$, $y = 3\sin\theta + 4$ ، هي: C

A $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$

B $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 3$

C $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$

D $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل المعادلات الوسيطة بتغيير الوضع في Graph Type إلى Parametric. ويمكن تمثيل دالة الدويري باستعمال المعادلتين الوسيطتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$. ثم اطلب إلى الطلاب البحث باستعمال الإنترنت ليجدوا خصائص الشكل الدويري cycloid ، ويمثّل كل منهم منحناه. ويمكنهم أيضًا استعمال حاسبة بيانية في وضعية Parametric لتمثيل منحنى هذا الشكل، ومقارنته بالمنحنى الذي رسموه سابقًا.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب خطوات إيجاد الصورة الديكارتية للمعادلة عندما تكون المعادلتان الوسيطتان معلومتين. حل إحدى المعادلتين بالنسبة لـ t ، ثم عوّض بتلك القيمة في المعادلة الثانية، وبسّط المعادلة الناتجة.

التقويم التكويني

تحقّق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 5-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

تمثيلات متعددة

في السؤال 29 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والتحليل لاستقصاء شكل المنحنى الناتج عن مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على المحور x.

إجابات:

27a) $x = t \cdot 0.75 \cos 45°$, $y = t \cdot 0.75 \sin 45° - 4.9t^2 + 0.3$

28a) حسن: $x = 8(t - 0.1), y = 2$ ؛ سعيد: $x = 8.1(t - 0.3), y = 5$

28b) يفوز حسن بسباق 100 متر بزمن 12.6 ثانية، في حين يكون زمن سعيد 12.65 ثانية. أمّا في سباق 200 متر، فيفوز سعيد.

34) $\frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$

35) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$

توسع

4-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتمثيل الدوال الوسيطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات للتدريس

يجب أن تأخذ مركبة المعادلة الرأسية نقصان الارتفاع بالحسبان بسبب الجاذبية، وذلك بطرح $4.9t^2$.

ولملاحظة التمثيل لمجالات مختلفة لـ t ، اختر المدى المناسب لـ t ، حيث سيعطيك هذا لقطات مختلفة للمنحنى.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات رباعية لتنفيذ النشاط.

اسأل:

- لماذا يكون من الضروري تمثيل هذا الموقف بأربع معادلات وسيطية؟ توجد معادلة وسيطية لكل من المركبة الرأسية والأفقية لكل من كرتي مشاري ونواف.

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال تمرين 1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل تمرين 2 لتقويم إمكانية استعمال الطلاب للحاسبة البيانية لتمثيل مواقف ممثَّلة بمعادلات وسيطة واختبارها.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

- ما الأنماط التي تربط السرعة الابتدائية وزاوية الانطلاق عند رمي كرة بالمسافة الأفقية المقطوعة؟

إجابة ممكنة: تتناسب المسافة الأفقية المقطوعة طرديًّا مع السرعة الابتدائية.

توسع **4-5**

معمل الحاسبة البيانية:

التمثيل بالمعادلات الوسيطية

Modeling with Parametric Equations

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لتمثيل الدوال الوسيطية.

المتغير المستقل t في بعض المعادلات الوسيطية يمثِّل الزمن، ويبين هذا المتغير السرعة في التمثيل البياني للمنحنى. إذا أمكن تمثيل منحنى بشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 5$ ، بينما أمكن تمثيل منحنى مطابق له وبشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 10$ ، فإن المنحنى الأول أسرع.

نشاط تمثيل القطوع المخروطية بالمعادلات الوسيطيّة بيانيًا

كرة قدم: وقف مشاري بجانب نواف، وركل كلٌّ منهما كرة في الوقت نفسه. فكانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة مشاري $35\,m/s$ ، وصنعت زاوية قياسها $60°$ مع الأفق، بينما كانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة نواف $30\,m/s$ ، وصنعت زاوية قياسها $45°$ مع الأفق. مثِّل بيانيًّا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire، مفترضًا أن الكرتين تم ركلهما من سطح الأرض.

الخطوة 1: المعادلتان الوسيطيتان لكل رمية كرة هما:

مشاري: $x = 35t \cos 60$ $\quad y = 35t \sin 60 - 4.9t^2$

$= 17.5t$ $\quad = 17.5\sqrt{3}t - 4.9t^2$

نواف: $x = 30t \cos 45$ $\quad y = 30t \sin 45 - 4.9t^2$

$= 15\sqrt{2}\, t$ $\quad = 15\sqrt{2}t - 4.9t^2$

الخطوة 2: رتِّب وضعية الحاسبة بالضغط على المفاتيح:

، ثم اختر 3: إدخال / تحرير الرسم البياني

ومنها 3: بارامتري ، مما يسمح لك بتمثيل المعادلات الوسيطيّة. أدخل المعادلات الوسيطة كما هو موضح.

الخطوة 3: حدِّد مدى قيم t من 0 إلى 0.1 في tstep ؛ لملاحظة مسارَي الكرتين.

الخطوة 4: مثِّل المعادلات بيانيًّا.

مسار كرة مشاري أعلى من مسار كرة نواف، بينما تسقط كرة نواف أولًا، وتقطع مسافة أفقية أقل.

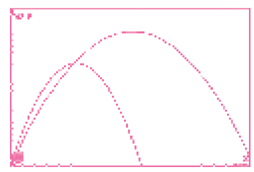
إرشادات للدراسة

تحديد المدى
استعمل معطيات المسألة لتحديد مدى قيم x, y, t .

تمارين:

1) **كرة قدم:** ركل نواف كرةً ثانيةً بسرعةٍ ابتدائية متجهة $33\,m/s$ ، فصنعت زاويةً قياسها $50°$ مع الأفق، وبعد ذلك بنصف ثانية ركل مشاري كرةً أخرى بسرعة ابتدائية متجهة $45\,m/s$ ، فصنعت زاوية قياسها $40°$ مع الأفق. مثِّل بيانيًّا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية، وفسِّر النتائج.

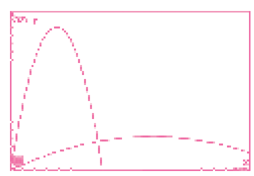
(1



إجابة ممكنة: تعلو رمية مشاري على رمية نواف عند أقصى ارتفاع تقريبًا. وتهبط رمية نواف قبل رمية مشاري بـ 1.5 ثانية.

2) **كرة سلة :** رمى أحمد كرةً نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة $43\,m/s$، فصنعت زاوية قياسها $87°$ مع الأفق. وبعد ثانية رمى فيصل كرة نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة $60\,m/s$، فصنعت مع الأفق زاوية قياسها $20°$. مثِّل منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية بيانيًّا، وفسِّر النتائج مفترضًا أن أحمد وفيصل يقفان متجاورين، وأن الارتفاع الابتدائي للرميتين هو متر واحد.

(2



إجابة ممكنة: رمية أحمد أعلى كثيرًا من رمية فيصل. بينما تهبط رمية فيصل على الأرض عند الزمن نفسه الذي تصل فيه رمية فيصل إلى أقصى ارتفاع.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 4 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 172 - 179)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **13–11)** انظر الهامش.

11) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

12) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

13) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **17–14)** انظر الهامش.

14) $F(1, 1), V(1, 5)$

15) $F(-3, 6), V(7, 6)$

16) $F(-2, -3), V(-2, 1)$

17) $F(3, -4), V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **20–18)** انظر ملحق الإجابات.

18) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

19) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

20) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $1 - (-3) = 4$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

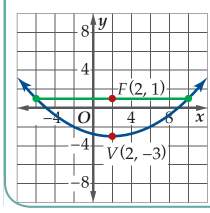
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k.

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2 = 16(y+3)$. مثّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 180 - 187)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا. **25–21)** انظر الهامش.

21) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

22) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

23) الرأسان $(3, -3), (7, -3)$، والبؤرتان $(4, -3), (6, -3)$

24) البؤرتان $(9, 2), (1, 2)$، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4), (-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7), (1, 1)$

$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 9$ (26

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

26) المركز $(-1, 6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

27) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0), (2, 5)$. انظر الهامش.

28) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-2, -6), (4, -2)$ انظر الهامش.

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4), (-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4), (1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a, b.

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

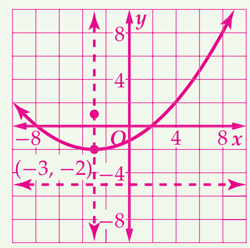
$= (1, 4)$ بسِّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

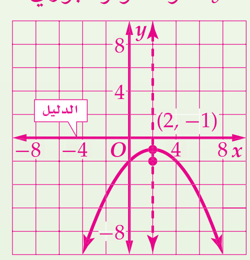
$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

إجابات:

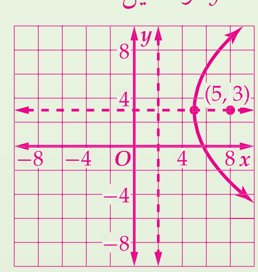
11) منحنى القطع مفتوح إلى أعلى الرأس: $(-3, -2)$؛ والبؤرة: $(-3, 1)$؛ ومحور التماثل: $x=-3$؛ والدليل: $y=-5$، طول الوتر البؤري 12



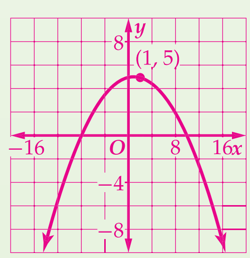
12) منحنى القطع مفتوح إلى أسفل الرأس: $(2, -1)$؛ والبؤرة: $(2, -2)$؛ ومحور التماثل: $x = 2$؛ والدليل: $y=0$، طول الوتر البؤري 4



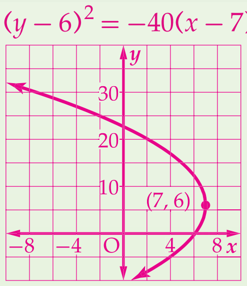
13) الرأس: $(5, 3)$؛ والبؤرة: $(8, 3)$؛ ومحور التماثل: $y = 3$؛ والدليل: $x = 2$



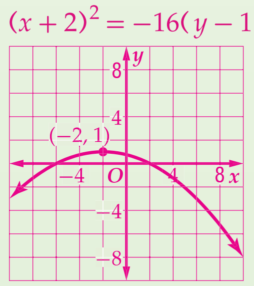
14) $(x-1)^2 = -16(y-5)$



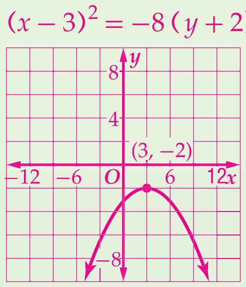
15) $(y-6)^2 = -40(x-7)$



16) $(x+2)^2 = -16(y-1)$



17) $(x-3)^2 = -8(y+2)$

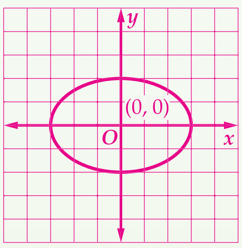


مراجعة حل المسائل

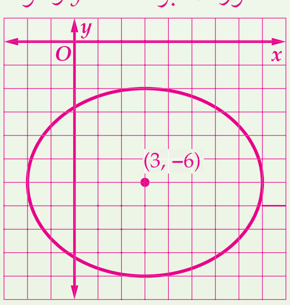
إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة، فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

إجابات:

21) الاتجاه: أفقي
المركز $(0, 0)$ ، البؤرتان $(\pm\sqrt{5}\ , 0)$
الرأسان $(\pm 3\ , 0)$
الرأسان المرافقان $(0\ , \pm 2)$
المحور الأكبر $y = 0$ وطوله 6
المحور الأكبر $x = 0$ وطوله 4



22) الاتجاه: رأسي
المركز $(3,-6)$، البؤرتان $(3,-3)$، $(3,-9)$
الرأسان $(3\ , -1)$، $(3\ , -11)$
الرأسان المرافقان $(7\ , -6)$، $(-1\ , -6)$
المحور الأكبر $x = 3$ وطوله 10
المحور الأكبر $y = -6$ وطوله 8



23) $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

24) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

25) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

27) $(x-1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

28) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 13$

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 188 - 196)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **29–32)** انظر ملحق الإجابات.

29) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

30) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

31) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

32) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: **46-49)** انظر ملحق الإجابات.

33) الرأسان $(-7, 0)$، $(7, 0)$، طول المحور المرافق 8.

34) البؤرتان $(0, -5)$، $(0, 5)$، والرأسان $(0, -3)$، $(0, 3)$.

35) البؤرتان $(1, -5)$، $(1, 15)$، وطول المحور القاطع 16.

36) الرأسان $(-2, 0)$، $(2, 0)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: رأسي

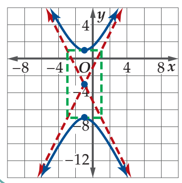
المركز: $(-1, -3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(-1, -3 + 2\sqrt{5})$ $(h, k \pm c)$
$(-1, -3 - 2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y + 3 = 2(x+1)$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
وَ $y + 3 = -2(x+1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها (الصفحات 198 - 204)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

37) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$ قطع زائد

38) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$ قطع مكافئ

39) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$ قطع ناقص

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. **40–43)** انظر ملحق الإجابات.

40) $x^2 + y^2 = 4;\ \theta = \frac{\pi}{4}$

41) $x^2 - 2x + y = 5;\ \theta = \frac{\pi}{3}$

42) $x^2 - 4y^2 = 4;\ \theta = \frac{\pi}{2}$

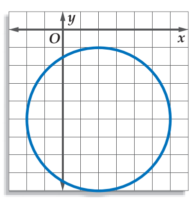
43) $9x^2 + 4y^2 = 36;\ \theta = 90°$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$
$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$
$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$
$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

في هذه المعادلة $A = 3, C = 3$.
وحيث إن كلًّا من A, C كمية موجبة،
$A = C$ ، فإن المنحنى يمثِّل دائرة
المركز = $(2, -5)$
وطول نصف القطر = 4 .



الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-5 المعادلات الوسيطية (الصفحات 213 - 207)

مثّل المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي بيانيًا. 44–45 انظر الهامش.

44) $x = \sqrt{t}, y = 1 - t; 0 \le t \le 9$

45) $x = t + 2, y = t^2 - 4; -4 \le t \le 4$

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية ثم مثّل المنحنى بيانيًا. 46–49 انظر الهامش.

46) $x = t + 5, y = 2t - 6$

47) $x = 2t, y = t^2 - 2$

48) $x = t^2 + 3, y = t^2 - 4$

49) $x = t^2 - 1, y = 2t + 1$

مثال 5

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 5\cos t, y = 9\sin t$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا.

$$x = 5\cos t \qquad y = 9\sin t$$

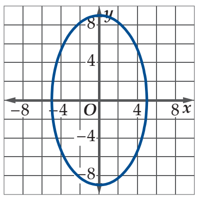
$$\cos t = \frac{x}{5} \qquad \sin t = \frac{y}{9}$$ الحل بالنسبة لـ $\sin t$ و $\cos t$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$$

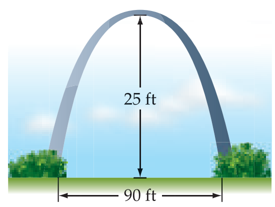
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$$

تمثّل المعادلتان الوسيطيتان منحنى قطع ناقص.



تطبيقات ومسائل

50) **أقواس:** يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 4-1)



a) إجابة ممكنة: $x^2 = -81y + 2025$

a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ. 4.75 ft أقدام فوق سطح الأرض

51) **حركة الماء:** أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل. $x^2 + y^2 = 900$

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$. بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

5 ثوانٍ

52) **طاقة:** تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 4-3) a–b انظر ملحق الإجابات

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

53) **مجمّع شمسي:** صمّم مجموعة من الطلاب مجمعًا شمسيًا على شكل قطع مكافئ يعمل على تركيز الطاقة الشمسية عند بؤرته، ويمكن تدوير المجمع الشمسي بسهولة بحيث يتم الحصول على أكبر كمية من الطاقة الشمسية، وذلك عند توجيهه نحو أشعة الشمس مباشرة. بعد دوران القطع المكافئ °30 باتجاه أشعة الشمس، فإن معادلة القطع المكافئ الذي يمثّل المجمع الشمسي في المستوى $x'y'$ هي $y' = 0.25(x')^2$. أوجد معادلة القطع المكافئ في المستوى xy. (الدرس 4-4) انظر ملحق الإجابات.

54) **هندسة:** افترض أن: $x_1(t) = 4\cos t, y_1(t) = 4\sin t$ و $x_2(t) = 4\cos 2t, y_2(t) = 4\sin 2t$. (الدرس 4-5)

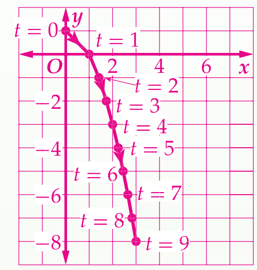
a) قارن بين منحنيي مجموعتي المعادلات x_1, y_1 و x_2, y_2. (a–b) انظر ملحق الإجابات.

b) اكتب معادلتين وسيطيتين للدائرة التي نصف قطرها 6 وحدات، وتحتاج إلى نصف زمن $x_1(t), y_1(t)$ لاكتمال منحناها.

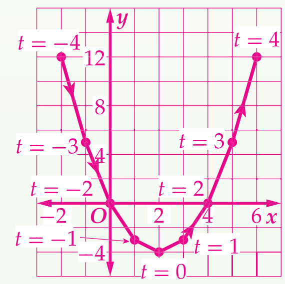
c) اكتب المعادلتين في الفرع b بالصورة الديكارتية. $x^2 + y^2 = 36$

إجابات:

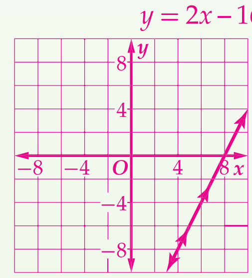
44)



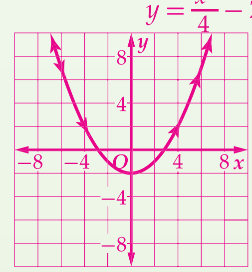
45)



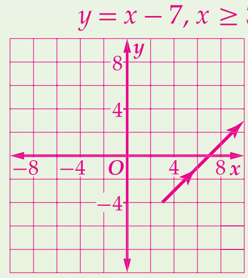
46) $y = 2x - 16$



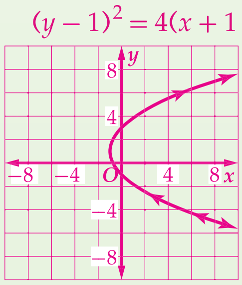
47) $y = \frac{x^2}{4} - 2$



48) $y = x - 7, x \ge 3$



49) $(y - 1)^2 = 4(x + 1)$



الفصل 4 اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين: **1–2) انظر الهامش**

1) الرأسان $(-3,-4)$ ، $(7,-4)$ ، والبؤرتان $(-2,-4)$ ، $(6,-4)$.

2) البؤرتان $(-2,-9)$ ، $(-2,1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2+cy^2+2x-2y-18=0$ دائرة؟ **C**

A -8 C 4

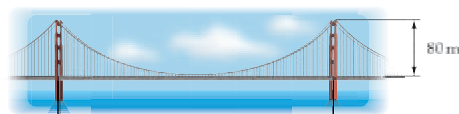
B -4 D 8

اكتب كل معادلتين وسيطيتين في السؤالين 4, 5 بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا. **4–5) انظر الهامش**

4) $x=t-5,\ y=3t-4$

5) $x=t^2-1,\ y=2t+1$

6) **جسور:** يمثّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة.



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ. **$x^2=1492\,(y-5)$**

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

7) الرأسان $(-3,0)$ ، $(3,0)$ ، وخطا التقارب $y=\pm\frac{2}{3}x$. **$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$**

8) البؤرتان $(8,8)$ ، $(8,0)$ ، والرأسان $(8,6)$ ، $(8,2)$. **انظر الهامش.**

اكتب معادلة كل قطع مخروطي في مستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ: **9–10) انظر الهامش.**

9) $7(x'-3)=(y')^2,\ \theta=60°$

10) $\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{10}=1,\ \theta=\frac{\pi}{6}$

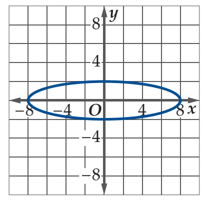
مثّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 11 و 12: **11–12) انظر ملحق الإجابات.**

11) $\frac{x^2}{64}-\frac{(y-4)^2}{25}=1$

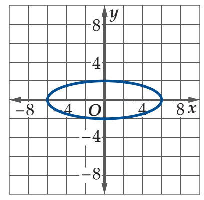
12) $\frac{(y+3)^2}{4}-\frac{(x+6)^2}{36}=1$

13) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟ **C**

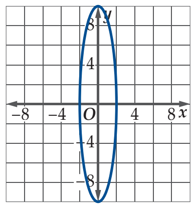
A



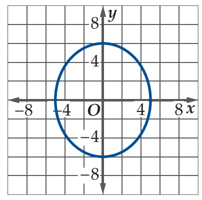
B



C



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا. **14–17) انظر ملحق الإجابات.**

14) $F(2,8),\ V(2,10)$

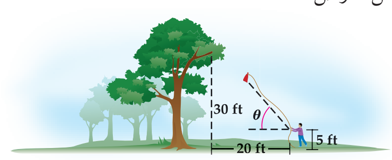
15) $F(2,5),\ V(-1,5)$

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

16) $\frac{(x-5)^2}{49}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

17) $(x+3)^2+\frac{(y+6)^2}{81}=1$

18) **تخييم:** يقوم المشاركون في المخيمات الكشفية أحيانًا بإجراءات لحماية الطعام والمؤن من الحيوانات الضالة. وإحدى طرق الحماية هي ربط حقيبة الطعام والمؤن بحبل ثم رميها فوق غصن شجرة عالية وربط الحبل بالشجرة. افترض أن ارتفاع غصن شجرة 30 ft عن الأرض، وأن شخصًا يبعد عن الشجرة 20 ft قد رمى حقيبة من ارتفاع 5 ft عن الأرض.



a) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft في الثانية، فصنعت زاوية قياسها 60° مع الأفق، فهل ستستقر فوق الغصن؟ **لا**

b) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 45 ft في الثانية، وصنعت مع الأفق زاوية قياسها 75°، فهل ستستقر فوق الغصن؟ **نعم**

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

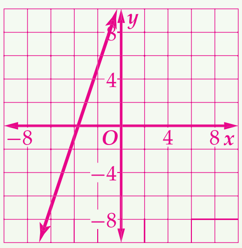
اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72–80).

إجابات:

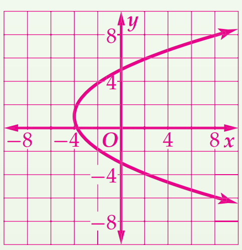
1) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

2) $\frac{(x+2)^2}{11}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

4) $y=3x+11$



5) $(y-1)^2=4(x+1)$



8) $\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-8)^2}{12}=1$

9) $3x^2-14x-2\sqrt{3}xy+y^2-14\sqrt{3}y+84=0$

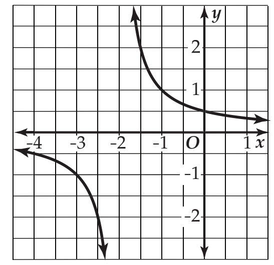
10) $4x^2+2\sqrt{3}xy+2y^2-10=0$

مخطط المعالجة

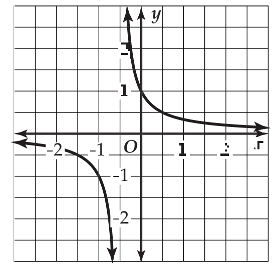
المستوى 1: ضمن المتوسط	المستوى 2: دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	فاختر المصدر الآتي:
كتاب الطالب: الدروس 5-4، 4-4، 3-4، 2-4، 1-4	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
دليل المعلم: مشروع الفصل، ص (170)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

التهيئة ، ص (171) :

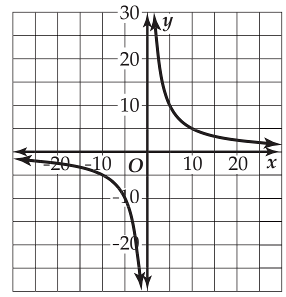
16)



17)



18) $f(x) = \frac{50}{x}$؛



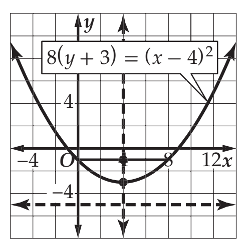
الدرس 1-4 ، ص (174-179) :

1A)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(4, -3)$ ؛ البؤرة: $(4, -1)$ ؛

الدليل: $y = -5$

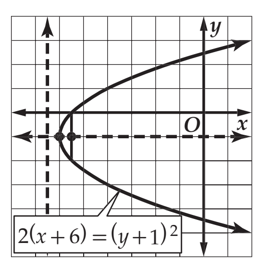


1B)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

الرأس: $(-6, -1)$؛ البؤرة: $(-5.5,$

$-1)$ ؛ الدليل: $x = -6.5$



1)

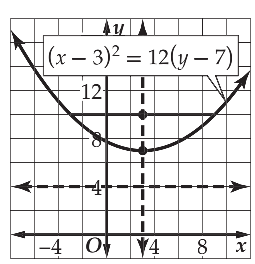
المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(3, 7)$، البؤرة: $(3, 10)$،

الدليل: $y = 4$

ومحور التماثل: $x = 3$

طول الوتر البؤري 12



2)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

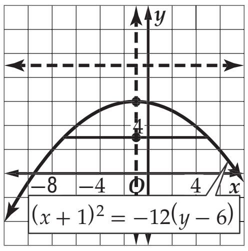
الرأس: $(-1, 6)$، البؤرة:

$(-1, 3)$،

الدليل: $y = 9$،

ومحور التماثل: $x = -1$

طول الوتر البؤري 12



3)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

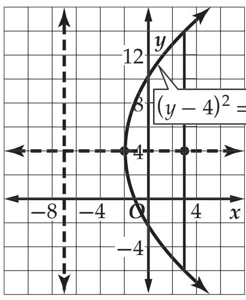
اليمين

الرأس: $(-2, 4)$، البؤرة:

$(3, 4)$، الدليل: $x = -7$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 20



4)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

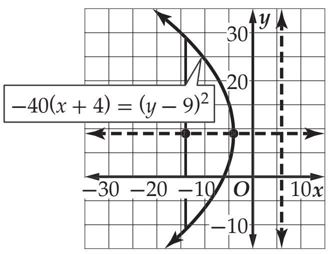
اليسار

الرأس: $(-4, 9)$، البؤرة:

$(-14, 9)$، الدليل: $x = 6$

ومحور التماثل: $y = 9$

طول الوتر البؤري 40



5)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

اليمين

الرأس: $(1, -5)$

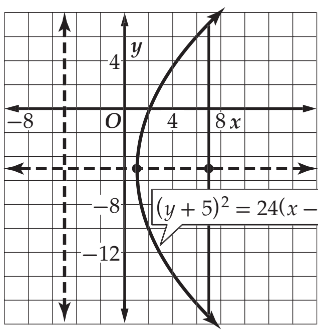
البؤرة: $(7, -5)$

الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل:

$y = -5$

طول الوتر البؤري 24



6)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

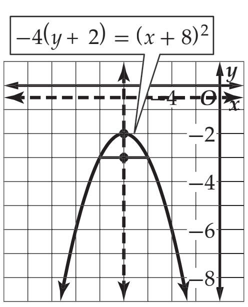
الرأس: $(-8, -2)$

البؤرة: $(-8, -3)$

الدليل: $y = -1$

ومحور التماثل: $x = -8$

طول الوتر البؤري 4



9)

$x^2 = 8(y+7)$ ؛

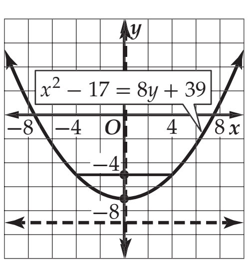
المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(0, -7)$، البؤرة: $(0, -5)$؛

الدليل: $y = -9$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 8



10)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار

$y^2 = -8(x + 7)$

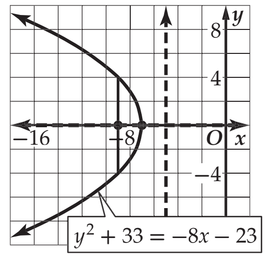
الرأس: $(-7, 0)$

البؤرة: $(-9, 0)$

الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 8



11)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

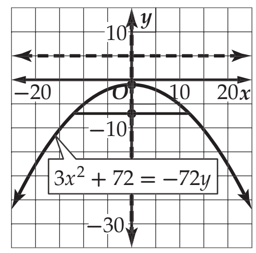
$x^2 = -24(y + 1)$

الرأس: $(0, -1)$ البؤرة: $(0, -7)$؛

الدليل: $y = 5$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 24



12)

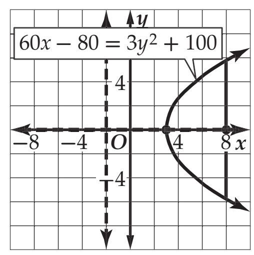
المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

$y^2 = 20(x - 3)$ ، الرأس: $(3, 0)$

البؤرة: $(8, 0)$، الدليل: $x = -2$؛

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 20



13)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

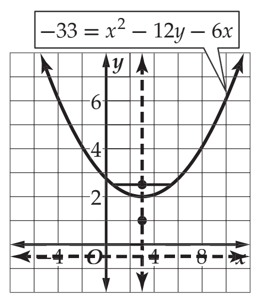
$(x - 3)^2 = 12(y - 2)$

الرأس: $(3, 2)$، البؤرة: $(3, 5)$

الدليل: $y = -1$

ومحور التماثل: $x = 3$

طول الوتر البؤري 12



14)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

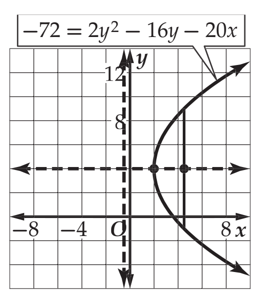
$(y - 4)^2 = 10(x - 2)$

الرأس: $(2, 4)$، البؤرة: $(4.5, 4)$

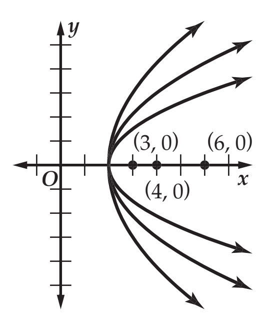
الدليل: $x = -0.5$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 10



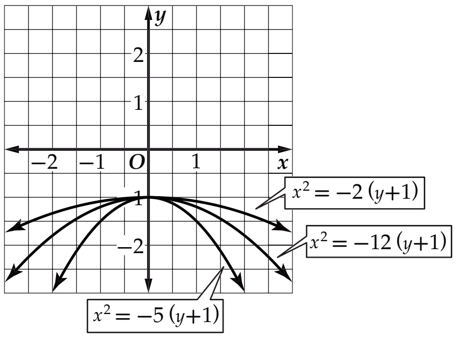
35b)



35c)

عندما تتحرك البؤرة بعيدًا عن الرأس، يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيًّا.

35e) إجابة ممكنة: جميع القطوع المكافئة لها الرأس $(0, -1)$، ومنحنياتها مفتوحة إلى الأسفل. منحنى المعادلة $x^2 = -2(y+1)$ هو الأضيق، في حين أن منحنى المعادلة $x^2 = -12\ (y+1)$ هو الأوسع.



36) ميمونة، بما أنّ $p = 1$، فإن منحنى القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

37) إجابة ممكنة: كل نقطة على منحنى القطع المكافئ بُعدها عن البؤرة يساوي بُعدها عن الدليل. وبما أنّ الرأس يقع مباشرة بين البؤرة والدليل على محور التماثل، فإنها الأقرب إلى البؤرة.

38) الربعان الأول والرابع؛ الرأس $(-2, 5)$ و $p = -2$ ، وبما أنّ الرأس على يسار محور y ، والمنحنى مفتوح إلى اليسار، فإنه لا توجد نقاط للمنحنى على يمين محور y ، أيْ في الربعين الأول والرابع.

40) إذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي x نفسه، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أعلى أو إلى أسفل. وإذا كان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أعلى. أمّا إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أسفل.

وإذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي y نفسه، فإنّ اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليمين أو إلى اليسار. وإذا كان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليمين. أمّا إذا كان الإحداثي x للرأس أكبر من الإحداثي x للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليسار .

الدرس 2-4 ، ص (186, 187) :

1)

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2, 0)$

البؤرتان: $(-2, \mp 2\sqrt{10})$

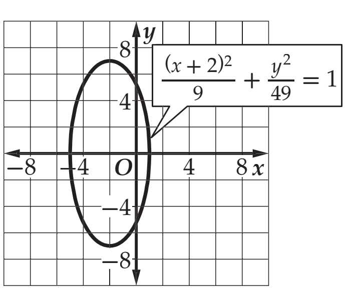
الرأسان: $(-2, \mp 7)$

الرأسان المرافقان:

$(1, 0)$ ،$(-5, 0)$

المحور الأكبر: $x = -2$

المحور الأصغر: $y = 0$



(2

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, -3)$

البؤرتان: $(-4 \mp \sqrt{5}, -3)$

الرأسان:

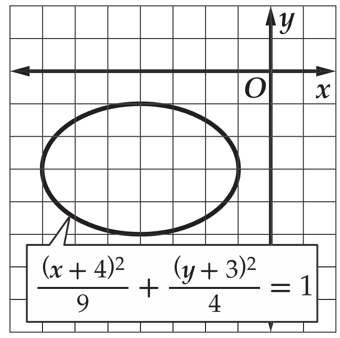
$(-1, -3)$ $(-7, -3)$

الرأسان المرافقان:

$(-4, -5)$ ،$(-4, -1)$

المحور الأكبر: $y = -3$

المحور الأصغر: $x = -4$



(3

الاتجاه: أفقي

المركز: $(7, -2)$

البؤرتان: $(7 \mp 4\sqrt{2}, -2)$

الرأسان:

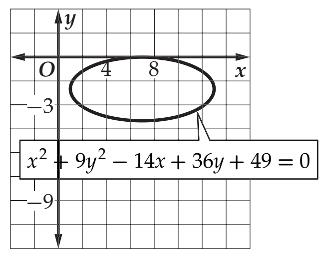
$(13, -2)$ ،$(1, -2)$

الرأسان المرافقان:

$(7, -4)$ ،$(7, 0)$

المحور الأكبر: $y = -2$

المحور الأصغر: $x = 7$



(4

الاتجاه: رأسي

المركز: $(8, 6)$

البؤرتان: $(8, 6 \mp 2\sqrt{3})$

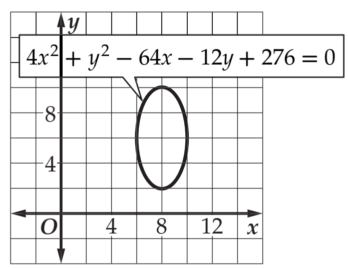
الرأسان: $(8, 10)$ ،$(8, 2)$

الرأسان المرافقان:

$(6, 6)$ ،$(10, 6)$

المحور الأكبر: $x = 8$

المحور الأصغر: $y = 6$



(5 $\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

(6 $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

(7 $\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

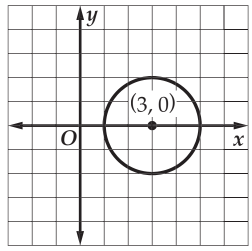
(8 $\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$

(9 $\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

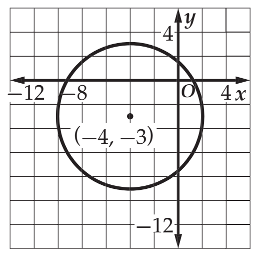
(14a العرض $= 661.44$ ft

(14b $\frac{x^2}{250000} + \frac{y^2}{109375} = 1$

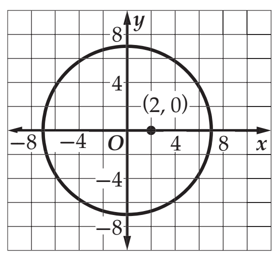
(15 $(x-3)^2 + y^2 = 4$



(16 $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 36$



(17 $x^2 + y^2 = 49$



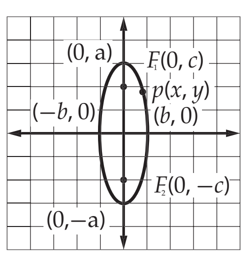
(18 $(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$

(19 $x^2 + (y+10)^2 = 16$

(20 $(x-\frac{3}{2})^2 + (y+8)^2 = \frac{53}{4}$

(21 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 29$

(22 افترض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $c(0, 0)$ ، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور باستعمال تعريف القطع الناقص فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن:



$pF_1 + pF_2 = 2a$ تعريف القطع

$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$ صيغة المسافة

$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$ بالطرح

$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2$ بتربيع الطرفين

$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4a^2+4cy$ بالقسمة على 4

$a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=a^2+cy$ بتربيع الطرفين

$a^2(x^2+y^2+2cy+c^2)=a^4+2a^2cy+c^2y^2$ بالتبسيط

$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2=a^4+2a^2cy+c^2y^2$ خاصية التوزيع

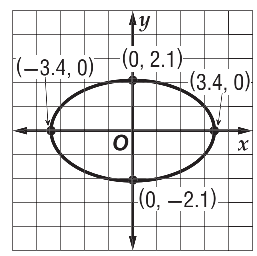
$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$ بالتبسيط

$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$ بطرح $c^2y^2+a^2c^2$ من الطرفين

$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$ $\qquad a^2-c^2=b^2$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ بقسمة الطرفين على a^2b^2

27a) إجابة ممكنة:



27b) $\frac{x^2}{11.56}+\frac{y^2}{4.41}=1$

33) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

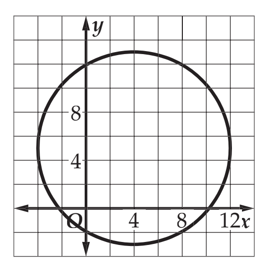
34) $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

35) $x^2+(y-6)^2=9$

36) $(x+1)^2+(y-4)^2=64$

41) المجال $[h-r, h+r]$

إجابة ممكنة: مجال الدائرة $(x-4)^2+(y-5)^2=8^2$ هو $[4-8, 4+8]$ أو $[-4, 12]$



43)

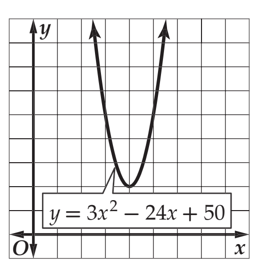
القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى

الرأس: $(4, 2)$

البؤرة: $(4, 2\frac{1}{12})$

الدليل: $y=\frac{23}{12}$

محور التناظر: $x=4$



44)

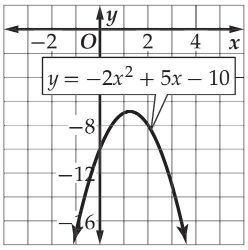
القطع مفتوح إلى أسفل

الرأس: $(\frac{5}{4}, \frac{-55}{8})$

البؤرة: $(\frac{5}{4}, \frac{-56}{8})$

الدليل: $y=\frac{-27}{4}$

محور التناظر: $x=\frac{5}{4}$



45)

القطع مفتوح إلى اليمين

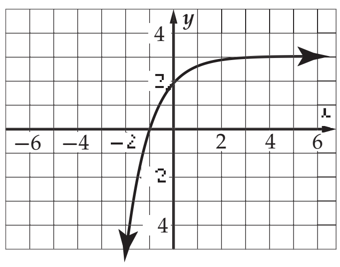
الرأس: $(4, 1)$

البؤرة: $(4.05, 1)$

الدليل: $x=3.95$

محور التناظر: $y=1$

52)



المدى: $(-\infty, 3)$

الدرس 3-4، ص (194-198):

1)

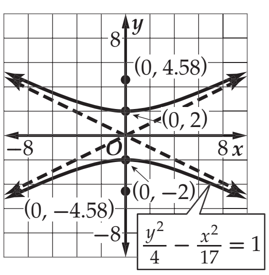
الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0, \mp 2)$

البؤرتان: $(0, \mp\sqrt{21})$

خطا التقارب: $y=\mp 2\frac{\sqrt{17}}{17}x$



2)

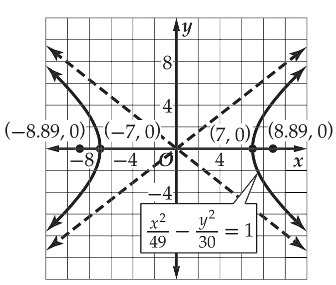
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$؛

الرأسان: $(\mp 7, 0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{79}, 0)$

خطا التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{30}}{7}x$



(3

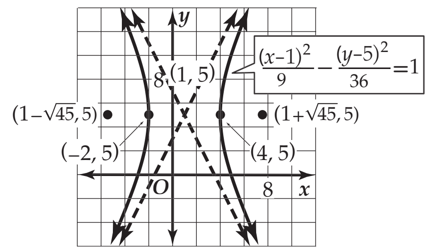
الاتجاه: أفقي

المركز: $(1,5)$

الرأسان: $(4, 5), (-2, 5)$

البؤرتان: $(1+\sqrt{45}, 5), (1-\sqrt{45}, 5)$

خطا التقارب: $y-5 = \mp 2\,(x-1)$



(4

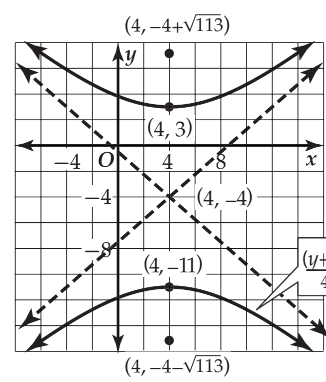
الاتجاه: رأسي

المركز: $(4,-4)$

الرأسان: $(4, 3), (4, -11)$

البؤرتان: $(4, -4+\sqrt{113}), (4, -4-\sqrt{113})$

خطا التقارب: $y+4 = \mp \frac{8}{7}(x-4)$



(5

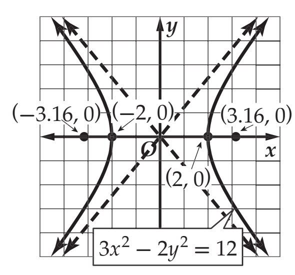
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\mp 2, 0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10}, 0)$

خطا التقارب: $y = \mp \frac{\sqrt{6}}{2}x$



(6

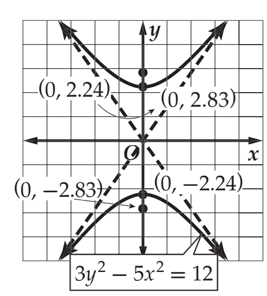
الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

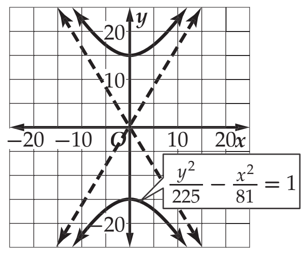
الرأسان: $(0, \mp\sqrt{5})$

البؤرتان: $(0, \mp 2\sqrt{2})$

خطا التقارب: $y = \mp \frac{\sqrt{15}}{3}$



(7



(8 $\frac{(x-3)^2}{32} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

الاتجاه: أفقي

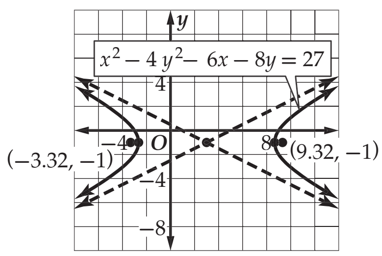
المركز: $(3, -1)$

الرأسان: $(3 \mp 4\sqrt{2}, -1)$

البؤرتان: $(3, \mp 2\sqrt{10}, -1)$

خطا التقارب:

$y+1 = \mp \frac{1}{2}(x-3)$



(9 $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{27} = 1$

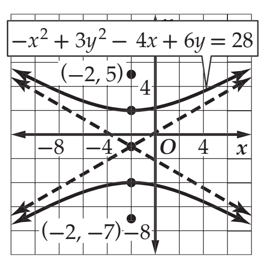
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2, 2)$, $(-2, -4)$

البؤرتان: $(-2, 5)$, $(-2, -7)$

خطا التقارب: $y+1 = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$



(10 $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+7)^2}{10} = 1$

الاتجاه: رأسي

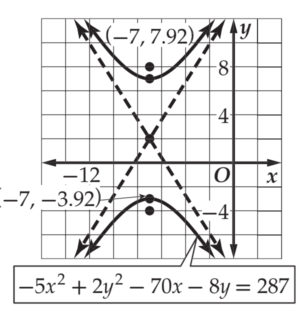
المركز: $(-7, 2)$

الرأسان: $(-7, -3)$, $(-7, 7)$

البؤرتان: $(-7, 2 \mp \sqrt{35})$

خطا التقارب:

$y-2 = \mp \frac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$



13) $\dfrac{(y-1)^2}{15} - \dfrac{(x+1)^2}{49} = 1$

14) $\dfrac{(x-1)^2}{36} - \dfrac{(y-5)^2}{64} = 1$

15) $\dfrac{(y-6)^2}{9} - \dfrac{(x+1)^2}{49} = 1$

16) $\dfrac{(x+4)^2}{144} - \dfrac{(y-7)^2}{25} = 1$

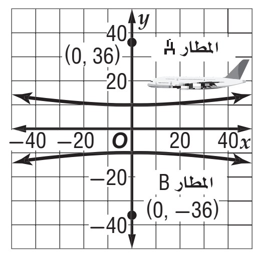
17) $\dfrac{(x+7)^2}{25} - \dfrac{(y-2)^2}{49} = 1$

18) $\dfrac{(y-4)^2}{36} - \dfrac{(x-2)^2}{64} = 1$

19) $\dfrac{(x-6)^2}{36} - \dfrac{(y+2)^2}{13} = 1$

27a) $\dfrac{y^2}{81} - \dfrac{x^2}{1215} = 1$

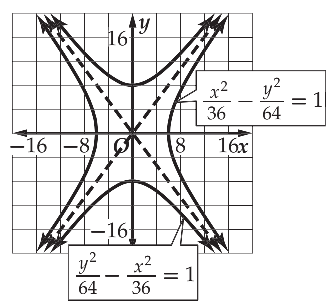
27b)



28a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{5760} = 1$

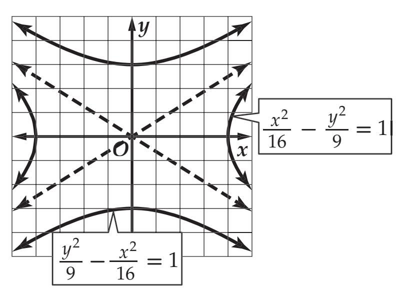
28b) نصف قطر القمة 4.3 م تقريبًا
نصف قطر القاعدة 5.7 م تقريبًا

33a)



33b) البؤرتان للمنحنى الأول هما:
$(-10, 0)$ و $(10, 0)$. والبؤرتان للمنحنى الثاني هما $(0, -10)$ و $(0, 10)$. والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6, 0)$ و $(6, 0)$. والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0, -8)$ و $(0, 8)$. والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

33d)



35a) قطع مكافئ؛ إذا كان $r\,s = 0$ ، فإنّ $r = 0$ أو $s = 0$. لذا فإمّا أن الحد x^2 يساوي صفرًا ، أو أن الحد y^2 يساوي صفرًا. وبما أنّ المعادلة لها فقط حد مربع وحيد، فإنها ستكون معادلة قطع مكافئ.

35b) قطع ناقص؛ إذا كان $r\,s > 0$ ، فإنّ r و s كلاهما أكبر من صفر أو كلاهما أقل من صفر. وفي كلتا الحالتين فإنّ الحدين المربعين لهما الإشارة نفسها. لذا فستكون معادلة قطع ناقص.

35c) دائرة؛ إذا كان $r = s$ ، فإن معاملي الحدين التربيعيين المضافين متساويان، ويمكن إعادة كتابة المعادلة بحيث يصبح معامل كل منهما هو 1 ، لذا فالمعادلة تمثل دائرة.

35d) قطع زائد؛ إذا كان $r\,s < 0$ ، فإن r و s مختلفان في الإشارة. أي أن الحدين التربيعيين مختلفان في الإشارة، لذا فالمعادلة تمثّل قطعًا زائدًا.

36) أحيانًا، ومثال ذلك عندما تكون إحداثيات الرأسين والبؤرتين معلومة فإنه يمكن كتابة معادلة القطع الزائد. وعندما يكون كل من الرأسين والمحور القاطع معلومًا فقط، فإنه من غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

37) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{72} = 1$

38) بما أن القطع الزائد متساوي الساقين فإن $a = b$
وَبما أن $c^2 = a^2 + b^2$.

$$a = b \qquad c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = a\sqrt{2}$$

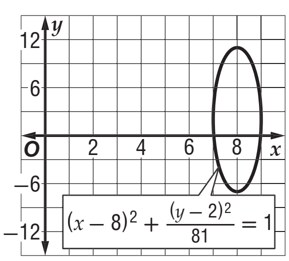
وبما أنّ $e = \frac{c}{a}$، فإنّ

$$e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

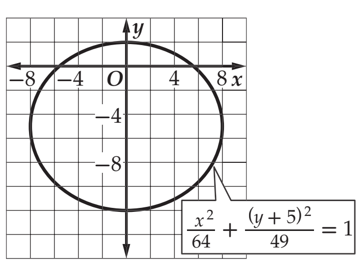
لذا فإن الاختلاف المركزي للقطع الزائد المتساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) إجابة ممكنة: أولًا حدِّد إن كان اتجاه القطع الزائد، رأسيًا أو أفقيًا. ثم استعمل البؤرتين لتعيين مركز القطع الزائد وتحديد قيم h ، k. واستعمل طول المحور القاطع لإيجاد a^2 ، ثم أوجد c المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين، ثم استعمل المعادلة $b^2 = c^2 - a^2$ لتجد b^2. وأخيرًا استعمل الصيغة القياسية لكتابة المعادلة بالاعتماد على المحور القاطع إن كان موازيًا للمحور x أو للمحور y .

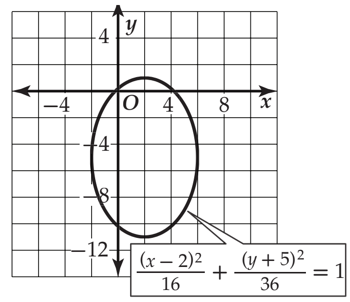
40)



41)

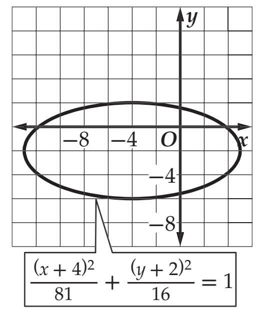


(42

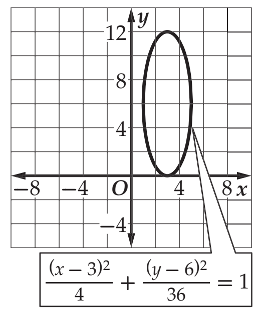


اختبار منتصف الفصل، ص (197) :

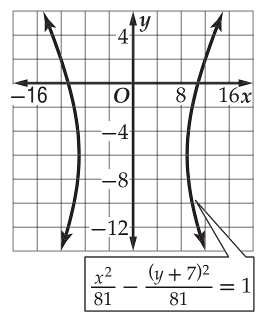
(5



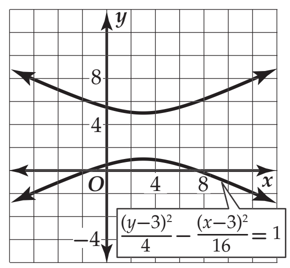
(6



(13



(14



(15 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

(16 $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{60} = 1$

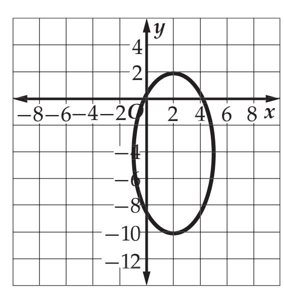
(17 $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{75} = 1$

(18 $\frac{(y+1)^2}{25} - \frac{(x-5)^2}{39} = 1$

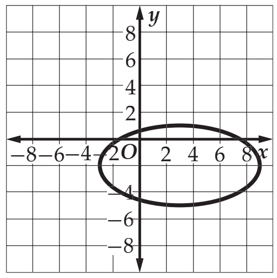
الدرس 4-4، ص (198-204) :

1) تحقق من فهمك

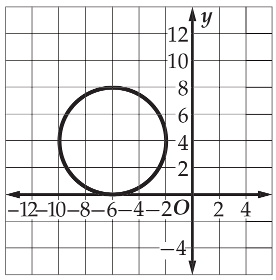
$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$ قطع ناقص



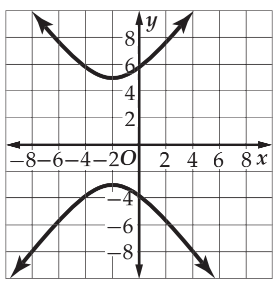
1) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ قطع ناقص



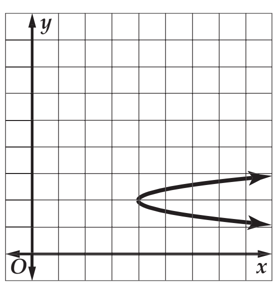
2) $(x+6)^2 + (y-4)^2 = 16$ دائرة



3) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$ قطع زائد



4) $x = 6(y-2)^2 + 4$ ، قطع مكافئ



(13 $-(x')^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + (y')^2 - 18 = 0$ ، قطع زائد

(14 $(x')^2 - (y')^2 + 16 = 0$ ، قطع زائد

(15 $(y')^2 - 8x' = 0$ ، قطع مكافئ

(16 $(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$ ، دائرة

(17 $(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2 + 16\sqrt{3}x' - 16y' = 0$ ، قطع مكافئ

(18 $21(x')^2 + 10\sqrt{3}x'y' + 31(y')^2 - 144 = 0$ ، قطع ناقص

36) افترض أن $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ ، $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ ،

فإن $r^2 = x^2 + y^2$

$$= (x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + (x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2$$

$$= (x')^2 \cos^2 \theta - 2x'y' \cos \theta \sin \theta + (y')^2 \sin^2 \theta + (x')^2 \sin^2 \theta + 2x'y' \cos \theta \sin \theta + (y')^2 \cos^2 \theta$$

$$= [(x')^2 + (y')^2]\cos^2 \theta + [(x')^2 + (y')^2]\sin^2 \theta$$

$$= [(x')^2 + (y')^2](\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= [(x')^2 + (y')^2](1)$$

$$= (x')^2 + (y')^2$$

37) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان القطع رأسيًا، فإن $B = 0$، وبذلك تصبح المعادلة معادلة دائرة؛ لأن $A = C$.

39) هندسيًّا: القطع الناقص عبارة عن دائرة مضغوطة طوليًّا أو عرضيًّا، وكلاهما منحنيان مغلقان بعكس القطعين المكافئ والزائد، فهما منحنيان مفتوحان وممتدان، لكن الفرق بينهما أن القطع المكافئ يتكون من فرع واحد، بينما القطع الزائد يتكون من فرعين كل منهما تماثل للآخر.

أما جبريًّا:

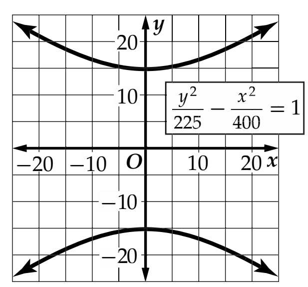
فإذا كتبت المعادلة في الصورة القياسية بشرط $B = 0$ ،
فمعادلة القطع المكافئ تحوي حدًّا تربيعيًّا واحدًا (إما Ax^2 أو Cy^2)،
أما معادلة الدائرة فتتصف بأن $A = C$
أما بالنسبة للقطع الناقص، فإن لكلٍّ من C و A الإشارة نفسها

$(A \neq 0, C \neq 0)$

أما في حالة القطع الزائد، فإن إشارتي C و A متعاكستان

و $(A \neq 0, C \neq 0)$.

40) $(0, \pm 15); (0, \pm 25); y = \pm \frac{3}{4} x$



41)

الاتجاه: رأسي

المركز: $(0, 0)$

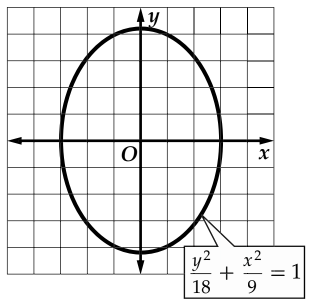
الرأسان: $(0, \mp 3\sqrt{2})$

البؤرتان: $(0, \mp 3)$

الرأسان المرافقان: $(\mp 3, 0)$

طول المحور الأكبر $6\sqrt{2}$

طول المحور الأصغر 6



42)

الاتجاه: أفقي

المركز: $(0, 0)$

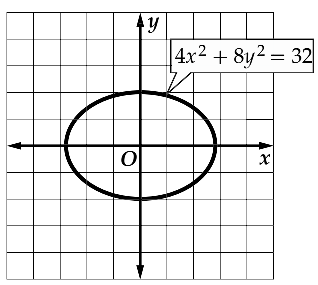
الرأسان: $(\mp 2\sqrt{2}, 0)$

البؤرتان: $(\mp 2, 0)$

الرأسان المرافقان: $(0 , \mp 2)$

طول المحور الأكبر $4\sqrt{2}$

طول المحور الأصغر 4



43)

الاتجاه: أفقي

المركز: $(4, -2)$

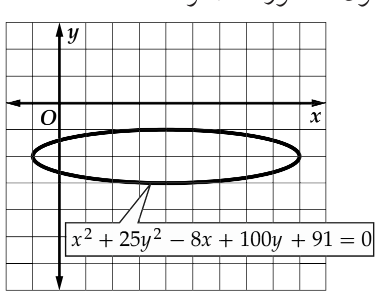
الرأسان: $(-1, -2)$، $(9, -2)$

البؤرتان: $(4 \mp 2\sqrt{6}, -2)$

الرأسان المرافقان: $(4, -1)$،$(4, -3)$

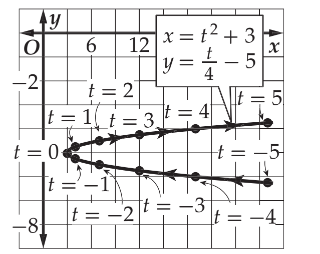
طول المحور الأكبر 10

طول المحور الأصغر 2

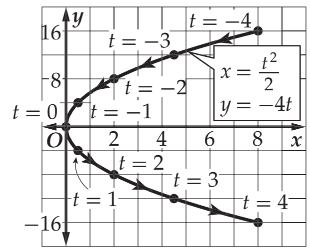


الدرس 5-4، ص (212, 213):

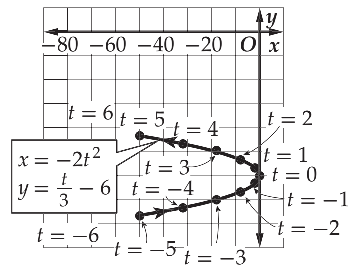
(1



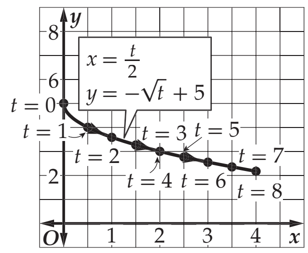
(2



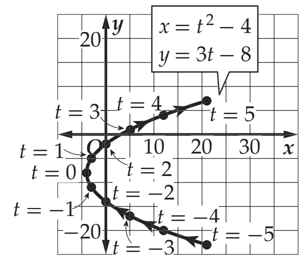
(3



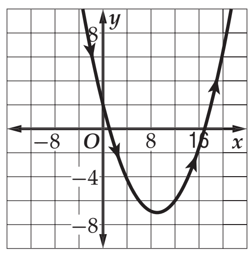
(4



(5

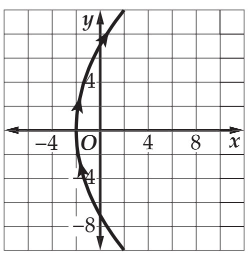


(6



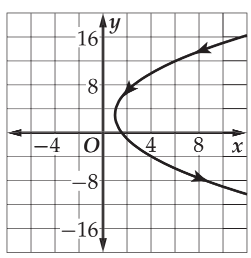
$D = \{x \mid x \in R\}$

(7



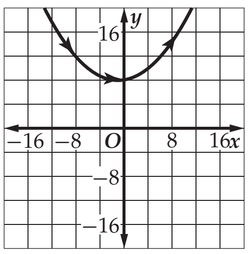
$D = \{x \mid x \geq -2, x \in R\}$

(8



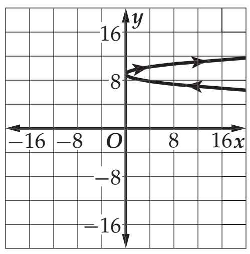
$D = \{x \mid x \geq 1, x \in R\}$

(9



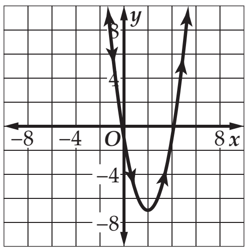
$D = \{x \mid x \in R\}$

(10



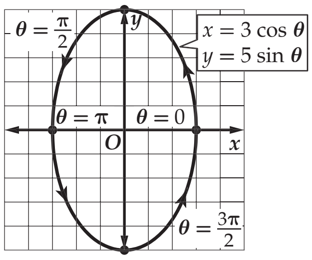
$D = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

(11

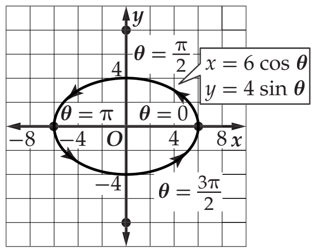


$D = \{x \mid x \in R\}$

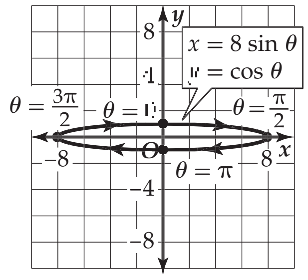
(13 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$



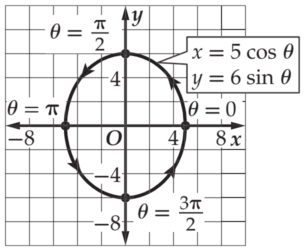
(14 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{36} = 1$



(15 $y^2 + \frac{x^2}{64} = 1$



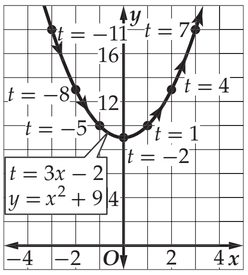
(16 $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$



(17

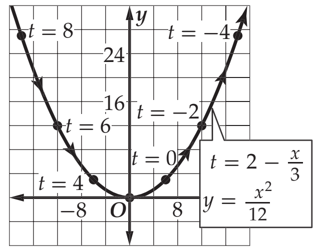
$x = \frac{t+2}{3}$,

$y = \frac{t^2}{9} + \frac{4t}{9} + \frac{85}{9}$



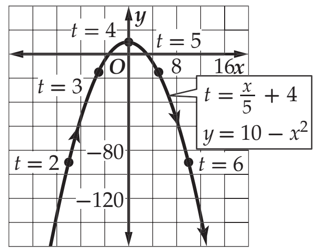
18)

$x = 6 - 3t\,,$
$y = \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3$



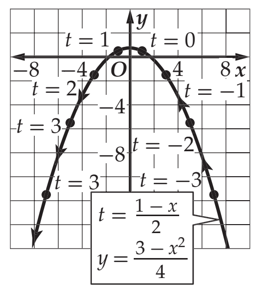
19)

$x = 5t - 20\,,$
$y = -25t^2 + 200t - 390$

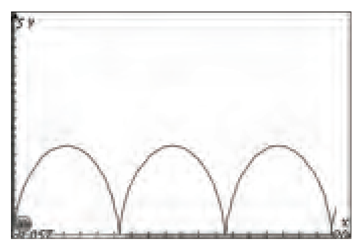


20)

$x = 1 - 2t\,,$
$y = -t^2 + t + \frac{1}{2}$



29a)



29b) 2π؛ إجابة ممكنة: تمثِّل مقاطع x الحالات التي تمس فيها نقطة على الدائرة المحور x عند تدحرجها. وبما أنّ جميع نقاط محيط الدائرة تمسّ المحور x عند تدحرجها، فإن المسافات بين مقاطع x تساوي محيط الدائرة 2π.

29c) إجابة ممكنة: تمثّل هذه القيمة أعلى ارتفاع تصله النقطة عند تدحرج الدائرة على المحور x، والذي يساوي قطر الدائرة. أكبر قيمة لِـ y تساوي $2r$ لدائرة نصف قطرها r.

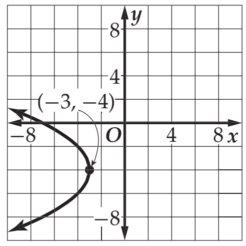
31) إجابة ممكنة: تكتب المعادلات الوسيطية باستعمال نقطة على المستقيم ومتجه موازٍ له. ويمكن كتابة عدد لا نهائي من المعادلات باستعمال عدد لا نهائي من النقاط على المستقيم.

32) إجابة ممكنة: يكون التعبير عن المسافة الأفقية بدالة جيب التمام cosine، وقيمتها صفر عند °90. وهذا يعني أن المقذوفات ليس لها حركة أفقية. وتكون المعادلة الوسيطية المناظرة $x = 0$.

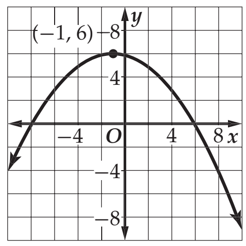
33) إجابة ممكنة: توضح المعادلات الوسيطية موقع الجسم الرأسي والأفقي بالنسبة إلى الزمن، في حين توضح المعادلات بالصيغة الديكارتية أحد الموقعين الرأسي أو الأفقي فقط للجسم.

دليل الدراسة والمراجعة ، ص (218 ,217):

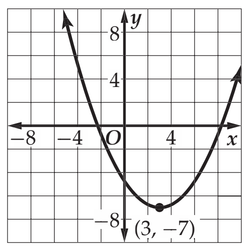
18) $(y + 4)^2 = -4(x + 3)$



19) $(x + 1)^2 = -8(y - 6)$



20) $(x - 3)^2 = 4(y + 7)$



29)

الاتجاه: رأسي

المركز: $(6, -3)$

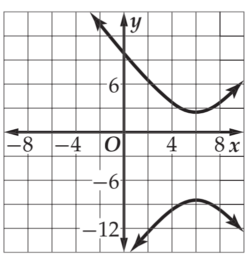
الرأس: $(6, -3 \mp \sqrt{30})$

البؤرتان: $(6, -3 \mp \sqrt{38})$

محور التماثل: $x = 6$

خطا التقارب:

$$y + 3 = \mp \frac{2\sqrt{15}}{15}(x - 6)$$



30)

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-7, 6)$

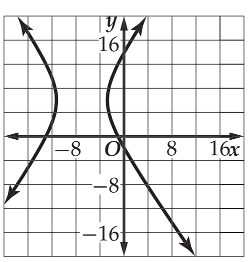
الرأس: $(-7 \mp 3\sqrt{2}, 6)$

البؤرتان: $(-7 \mp 3\sqrt{6}, 6)$

محور التماثل: $y = 6$

خطا التقارب:

$$y - 6 = \mp \sqrt{2}\,(x + 7)$$



31)

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-1, 1)$

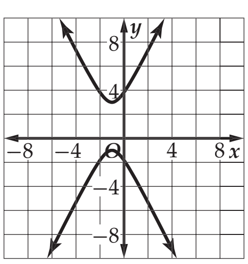
الرأسان: $(-1, 3)$، $(-1, -1)$

البؤرتان: $(-1\,,\, 1 \mp \sqrt{5})$

محور التماثل: $x = -1$

خطا التقارب:

$$(y - 1) = \mp 2(x + 1)$$



32) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(1, 2)$

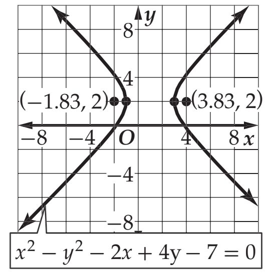
الرأسان: $(3, 2)$، $(-1, 2)$

البؤرتان: $(1 \mp 2\sqrt{2}, 2)$

محور التماثل: $y = 2$

خطا التقارب:

$(y-2) = \mp(x-1)$



33) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{16}=1$

34) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

35) $\dfrac{(y-5)^2}{64}-\dfrac{(x-1)^2}{36}=1$

36) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

40) $(x')^2+(y')^2=4$؛ دائرة

41) $(x')^2-2\sqrt{3}\,x'y'+(3y')^2+(2\sqrt{3}-4)x'+(4\sqrt{3}+2)y'=20$

42) $(y')^2-4(x')^2=4$ ؛ قطع زائد

43) $9(y')^2+4(x')^2=36$ ؛ قطع ناقص

52a) $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{625}=1$

52b) إجابة ممكنة: ستزداد نسبة المقام المرتبط بـ y إلى المقام المرتبط بـ x.

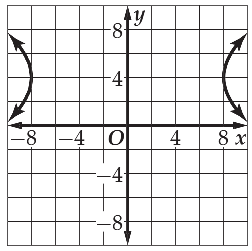
53) $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+8x-8\sqrt{3}y=0$

54a) إجابة ممكنة: كلاهما منحنى دائرة نصف قطرها 4 وحدات، وسرعة الجسم على المعادلة $x_2(t)$ و $y_2(t)$ مِثْلا سرعته على المعادلة $x_1(t)$ ، $y_1(t)$.

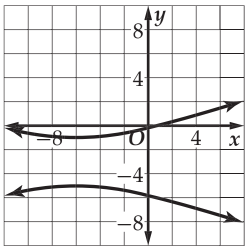
54b) $x(t)=6\cos\left(\frac{1}{2}t\right),\ y(t)=6\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

اختبار الفصل ، ص (219) :

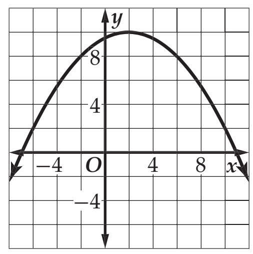
11)



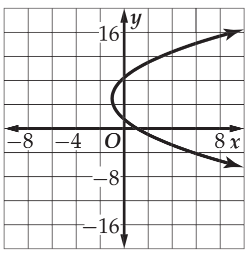
12)



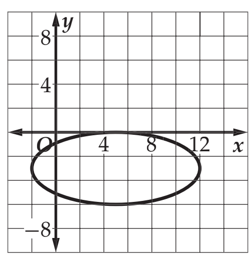
14) $(x-2)^2=-8(y-10)$



15) $(y-5)^2=12(x+1)$



16)



17)