Grade 11

Unit 13

التناسب والتشابه ١٣

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

1–3 النسب والتناسب

1 كتابة النسب واستخدامها

النسبة هي عبارة عن مقارنة كميتين باستخدام القسمة.

يُمكن التعبير عن نسبة الكميتين a و b في صورة a إلى b أو $a:b$ أو $\frac{a}{b}$، حيث $b \neq 0$. وعادة ما يتم التعبير عن النسب في أبسط صورة.

نسبة البعدين 32:18 و16:9 متساوية.

$$\frac{\text{عرض الشاشة}}{\text{طول الشاشة}} = \frac{32 \text{ in.}}{18 \text{ in.}}$$ قسمة الوحدات.

$$= \frac{32 \div 2}{18 \div 2} \text{ أو } \frac{16}{9}$$ القسمة على العوامل المشتركة.

مثال 1 من الحياة اليومية كتابة النسب وتحويلها لأبسط صورة

الألعاب الرياضية متوسط عدد ضربات لاعب البيسبول يساوي نسبة عدد ضربات القاعدة إلى عدد ضربات المضرب، ولا يتضمن ذلك السير بالكرة. وقد حقّق جو ماور، لاعب فريق مينيسوتا توينز أعلى متوسط للضربات في بطولة البيسبول الكبرى عام 2006. إذا أحرز جو 521 ضربة رسمية بالمضرب و 181 ضربة عادية، أحسب متوسط ضربات جو.

.....

.....

1. **المدرسة** في مدرسة لوجان الثانوية، يوجد 190 معلمًا و 2650 طالبًا. ما النسبة التقريبية للطلاب إلى المعلمين في هذه المدرسة؟

.....

.....

يُمكن استخدام **النسب الموسّعة** للمقارنة بين ثلاث كميات أو أكثر. التعبير $a:b:c$ يعني أن نسبة أول كميتين هي $a:b$، ونسبة آخر كميتين هي $b:c$. ونسبة الكمية الأولى إلى الأخيرة هي $a:c$.

مثال 2 استخدام النسب الموسعة

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا في مثلث هي 3:4:5، فأوجد قياسات هذه الزوايا.

.....

.....

.....

.....

2. في مثلث، تبلغ نسبة قياسات أضلاعه 3:3:8، ويبلغ قياس محيطه 392 سنتيمترًا. أوجد طول الضلع الأطول في المثلث.

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

2 استخدام خواص التناسبات

يُطلق على المعادلة التي توضح أن النسبتين متساويتان **التناسب**. في التناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. يُطلق على العددين a و d **طرفا** التناسب، بينما يُطلق على العددين b و c **وسطا** التناسب.

$$\frac{a}{b} \text{ طرف} \rightarrow \quad \leftarrow \text{وسط} \quad \frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b} \text{ وسط} \rightarrow \quad \leftarrow \text{طرف} \quad \frac{c}{d}$$

يُطلق على ناتج ضرب طرفي التناسب ad وناتج ضرب وسطي التناسب bc **الضرب التبادلي**.

المفهوم الرئيسي خاصية الضرب التبادلي

الشرح في التناسب، ناتج ضرب الطرفين يساوي ناتج ضرب الوسطين.

الرموز إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ عند $b \neq 0$ و $d \neq 0$، فإن $ad = bc$.

مثال إذا كان $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$، فإن $6 \cdot 10 = 15 \cdot 4$.

مثال 3 استخدام الضرب التبادلي لحل التناسبات

حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.

a. $\frac{6}{x} = \frac{21}{31.5}$

b. $\frac{x+3}{2} = \frac{4x}{5}$

.....

.....

.....

.....

3A. $\frac{x}{4} = \frac{11}{-6}$

3B. $\frac{-4}{7} = \frac{6}{2y+5}$

3C. $\frac{7}{z-1} = \frac{9}{z+4}$

.....

.....

.....

.....

المفهوم الرئيسي التناسبات المتكافئة

الرموز التناسبات التالية متكافئة.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

أمثلة $\frac{28}{50} = \frac{x}{755}, \frac{50}{28} = \frac{755}{x}, \frac{28}{x} = \frac{50}{755}, \frac{x}{28} = \frac{755}{50}$

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

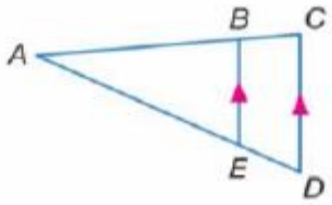
13-2 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

1 الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات

عندما يحتوي مثلث على مستقيم يوازي أحد أضلاعه. فيمكن باستخدام مسلمة تشابه الزوايا إثبات تشابه المثلثين المتكونين. بما أن المثلثين متشابهان، فإن أضلاعهما متناسبة.

النظرية 13.1 نظرية تناسب المثلثات

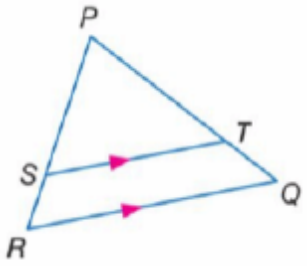
إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع المثلث وكان ينصف الضلعين الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.



مثال إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.

مثال 1 إيجاد طول الضلع

في $\triangle PQR$، $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$. إذا كان $PT = 7.5,\ TQ = 3$، و $SR = 2.5$، فأوجد PS.



……

……

……

……

تمرين موجّه

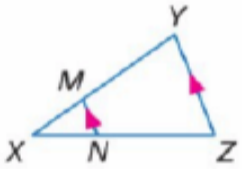
1. إذا كان $PS = 12.5$، و $SR = 5$، و $PT = 15$، فأوجد TQ.

……

……

……

……



1. إذا كان $XM = 4$، و $XN = 6$، و $NZ = 9$، فأوجد XY.
2. إذا كان $XN = 6$، و $XM = 2$، و $XY = 10$، فأوجد NZ.

……

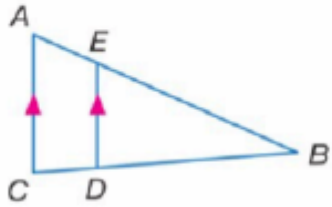
……

……

……

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

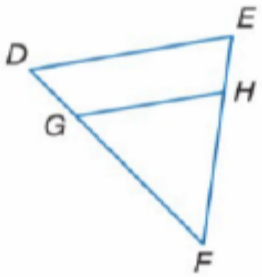
النظرية 13.2 عكس نظرية تناسب المثلثات



إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسم الضلعين إلى قطع مستقيمة متناظرة متناسبة، فإن هذا المستقيم يكون موازيًا للضلع الثالث في المثلث.

مثال إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$.

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا



في $\triangle DEF$، $EH = 3$، و $HF = 9$، و DG تمثل ثلث طول $\overline{GF}$. هل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$؟

باستخدام عكس نظرية تناسب المثلثات.
ولإثبات أن $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$، يجب أن نثبت أن $\frac{DG}{GF} = \frac{EH}{HF}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين موجّه

2. DG يمثل نصف طول $\overline{GF}$، و $EH = 6$، و $HF = 10$. هل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$؟

.....

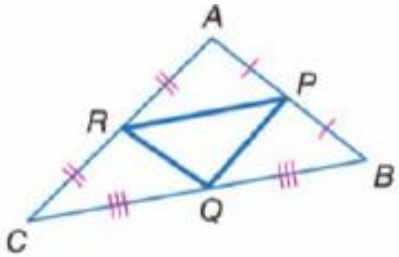
.....

.....

.....

.....

.....



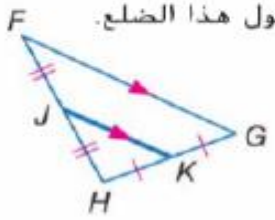
منصف ساقي المثلث هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على نقطتي منتصف ساقي المثلث. يوجد في كل مثلث ثلاثة منصفات للسيقان. منصفات السيقان في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}$، و $\overline{PQ}$، و $\overline{RQ}$.

نظرية تناسب منصفات سيقان المثلثات هي حالة خاصة من نظرية تناسب المثلثات.

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

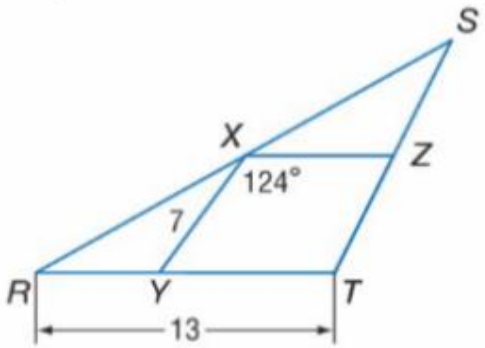
النظرية 13.3 نظرية منصفات سيقان المثلثات

يكون منصف ساقي المثلث موازيًا لأحد أضلاع المثلث، ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.



مثال إذا كان ل و K نقطتا المنتصف للضلعين $\overline{FH}$ و $\overline{HG}$.
على الترتيب، فإن $\overline{JK} \parallel \overline{FG}$ و $JK = \frac{1}{2}FG$.

مثال في الشكل، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ هما منصفان لسيقان $\triangle RST$. أوجد كل قياس مما يلي.

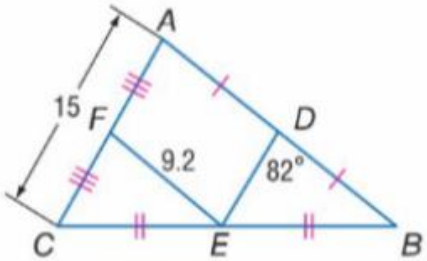


a. XZ

b. ST

c. $m\angle RYX$

أوجد قياس كل مما يلي.



3A. DE

3B. DB

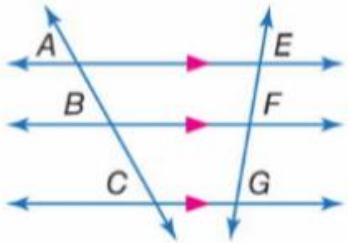
3C. $m\angle FED$

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

7 الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية

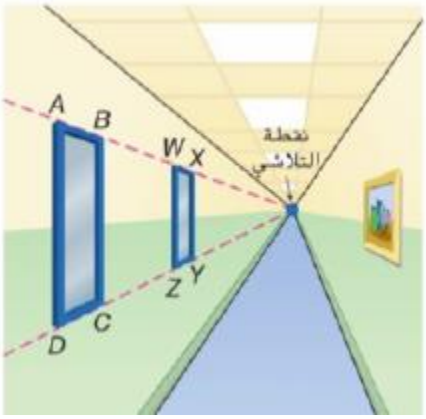
النتيجة 13.1 الأجزاء المتناسبة للمستقيمات المتوازية

عند تقاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع قاطعين فإنها تقسّم القاطعين إلى أجزاء متناسبة.



مثال إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتناسبة للقاطعين



الفن **ترسم غاية رواقًا بمنظور النقطة الواحدة. وتستخدم الخطوط التوجيهية الموضحة لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة $\overline{AD}$، و $\overline{BC}$، و $\overline{WZ}$ و $\overline{XY}$ جميعًا متوازية، و $AB = 8$ سنتيمترات، و $DC = 9$ سنتيمترات، و $ZY = 5$ سنتيمترات، فأوجد WX.**

.....

.....

.....

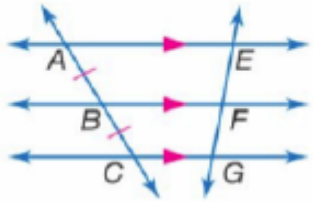
.....

.....

إذا كان معامل القياس للقطع المستقيمة المتناسبة هو 1، فإنها تقسم القاطعين إلى أجزاء متطابقة.

النتيجة 13.2 الأجزاء المتطابقة للمستقيمات المتوازية

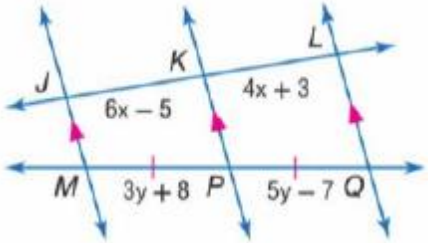
إذا أحدثت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع ما، فإنها تحدث قطعًا مستقيمة متطابقة على كل القواطع.



مثال إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$ وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.

مثال 5 من الحياة اليومية

الجبر **أوجد قيمة x و y.**



.....

.....

.....

.....

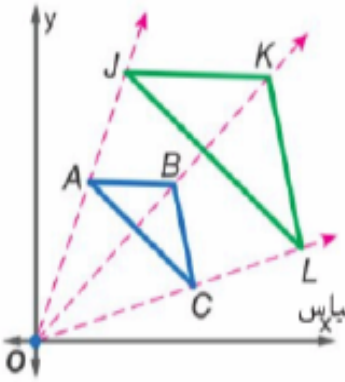
.....

.....

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

13-3 تحويلات التشابه

1 تحديد تحويلات التشابه تذكر من الدرس 7-4 أن *التحويل* هو عملية رسم الشكل الأصلي، *الصورة الأصلية*، إلى شكل جديد يُسمى *الصورة*.



تغيير الأبعاد أو التمدد عبارة عن تحويل يؤدي إلى تكبير الشكل الأصلي أو تصغيره نسبيًا. وحيث إن تغيير الأبعاد ينتج عنه شكل مماثل، فإنه يعد أحد أنواع **تحويلات التشابه**.

يحدث تغيير الأبعاد حول نقطة ثابتة تُسمى **مركز تغيير الأبعاد**.

ويوضح **معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد)** مدى هذا التغير. فمعامل المقياس هو النسبة بين أحد الأطوال بالصورة والطول الموافق له بالصورة الأصلية.

عادة ما يمثل الحرف k معامل مقياس تغيير الأبعاد. وتحدد قيمة k ما إذا كان التغيير في الأبعاد تكبيرًا أم تصغيرًا.

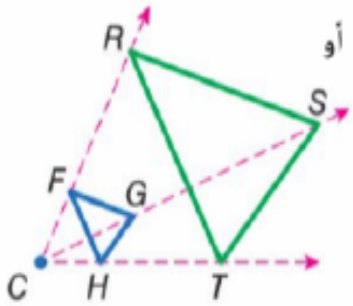
$\triangle JKL$ عبارة عن تغيير في أبعاد $\triangle ABC$. مركز تغيير الأبعاد: $(0, 0)$
معامل المقياس: $\frac{JK}{AB}$

ملخص المفهوم أنواع تغييرات الأبعاد(التمدد)

يكون تغيير الأبعاد (التمدّد) الذي له معامل مقياس أكبر من 1 **تكبيرًا**، أو صورة أكبر من الشكل الأصلي.

الرموز إذا كان $k > 1$، فإن التغيير في الأبعاد تكبير.

مثال تم تغيير $\triangle FGH$ بمعامل مقياس يساوي 3. فنتج عنه $\triangle RST$. وبما أن $3 > 1$، فإن $\triangle RST$ تكبير لـ $\triangle FGH$.

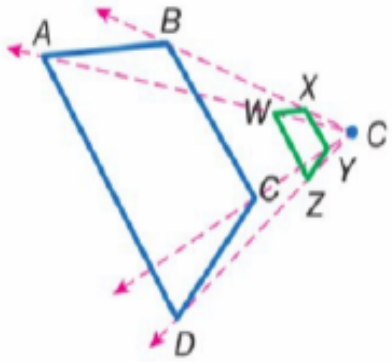


$k < 1$

يكون تغيير الأبعاد (التمدّد) الذي له معامل مقياس بين 0 و 1 **تصغيرًا**، أي صورة أصغر من الشكل الأصلي.

الرموز إذا كان $0 < k < 1$، فإن تغيير الأبعاد تصغير.

مثال تم تغيير أبعاد $ABCD$ بمعامل مقياس يساوي $\frac{1}{4}$. فنتج عنه $WXYZ$. وبما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$، فإن $WXYZ$ هو تصغير $ABCD$.



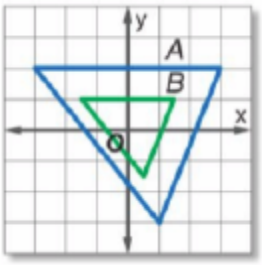
$0 < k < 1$

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

مثال 1 تحديد تغيير الأبعاد وإيجاد معامل المقياس له

حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد من A إلى B عبارة عن تكبير أم تصغير. ثم أوجد معامل مقياس تغيير الأبعاد.

.a



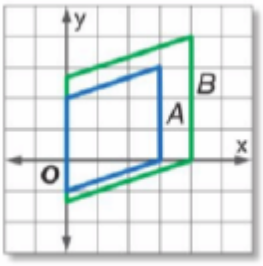
……

……

……

……

.b



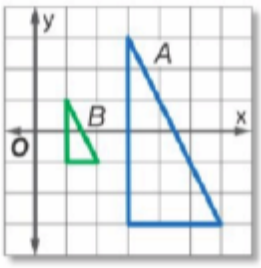
……

……

……

……

1B.



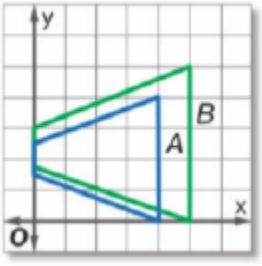
……

……

……

……

1A.



……

……

……

……

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

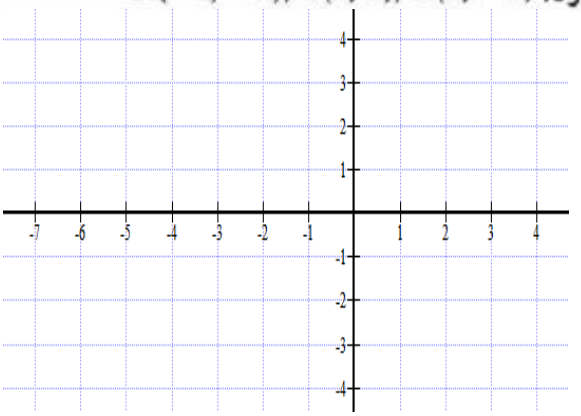
2 التحقق من التشابه

يمكنك التحقق من أن التغيير في الأبعاد نتج عنه شكلاً مماثلاً بمقارنة الأضلاع والزوايا المتناظرة. بالنسبة للمثلثات، يمكنك أيضًا استخدام التشابه بين ضلعين وزاوية محصورة.

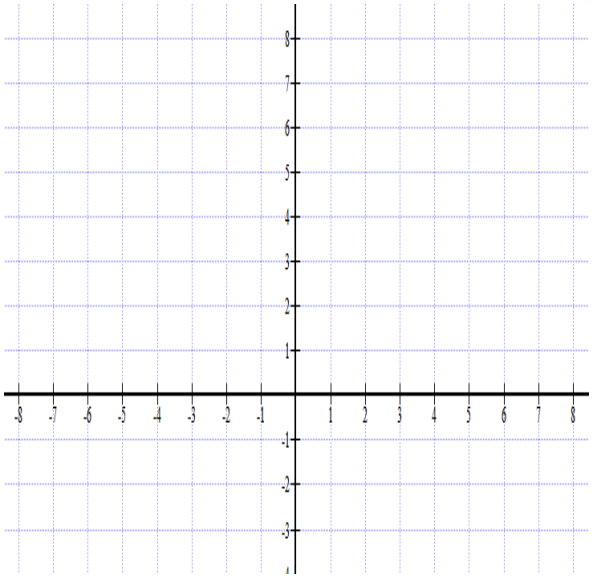
مثال 3 التحقق من التشابه بعد تغيير الأبعاد

مثّل بيانيًا الشكل الأصلي وصورته بعد تغيير الأبعاد.
ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد عبارة عن تحويل تشابه.

a. **الشكل الأصلي:** $A(-6, -3), B(3, 3), C(3, -3)$؛ **الصورة:** $X(-4, -2), Y(2, 2), Z(2, -2)$



b. **الشكل الأصلي:** $J(-6, 4), K(6, 8), L(8, 2), M(-4, -2)$
الصورة: $P(-3, 2), Q(3, 4), R(4, 1), S(-2, -1)$



أوجد النسب بين الأضلاع المتناظرة وقارن بينها.

$\frac{PQ}{JK} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}$ أو $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{QR}{KL} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ أو $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{RS}{LM} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}$ أو $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{SP}{MJ} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ أو $\frac{1}{2}$

$PQRS$ و $JKLM$ مستطيلان. ويمكن برهنة ذلك بإثبات أن الأقطار $\overline{JL} \cong \overline{KM}$ و $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$ متطابقة باستخدام قانون المسافة. وبما أنهما مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

بما أن $\frac{PQ}{JK} = \frac{QR}{KL} = \frac{RS}{LM} = \frac{SP}{MJ}$ والزوايا المتناظرة متطابقة. فإن $PQRS \sim JKLM$.

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

13-4 مقياس الرسم والنماذج المقياسية

1 النماذج المقياسية

النموذج المقياسي أو **رسم مقياسي** عبارة عن جسم أو رسم له أطوال متناسبة مع الجسم الذي يمثله. و **مقياس الرسم** أو النموذج هو النسبة بين طول النموذج أو الرسم والطول الفعلي للجسم المرسوم أو الذي تم تمثيله بنموذج.

مثال 1 استخدام مقياس رسم نسبي

الخرائط مقياس الخريطة الموضحة هو 0.1 سنتيمتر = 60 كيلومترًا. أوجد المسافة الفعلية بين ناشفيل وممفيس.

استخدم المسطرة. المسافة بين ناشفيل وممفيس 4 سنتيمترات.

الطريقة 1 كتابة تناسب وحله.

افترض أن x يمثل المسافة بين ناشفيل وممفيس.

المقياس	ناشفيل إلى ممفيس	
الخريطة ← $\frac{1\text{ cm}}{60\text{ km}}$	$= \frac{4\text{ cm}}{x\text{ km}}$	← الخريطة ← الفعلية
	$1 \cdot x = 60 \cdot 4$	خاصية الضرب التبادلي
	$x = 240$	بالتبسيط.

تمرين موجّه

1. **خرائط** أوجد المسافة الفعلية بين ناشفيل وتشاتانوغا.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....

2 استخدام مقياس الرسم

يُكتب مقياس الرسم أو النموذج المقياسي على هيئة نسبة غير محددة الوحدات في أبسط صورة. ودائمًا ما تُكتب عوامل المقياس بحيث يأتي طول النموذج أولاً في المقياس.

مثال 2 إيجاد مقياس الرسم

نموذج مقياسي هذه نسخة مطابقة مصغرة من سيارة أجرة لشركة تشيكر عام 1923. يبلغ طول النموذج 16 سنتيمترًا. وكان الطول الفعلي للسيارة 4 أمتار.

a. ما مقياس النموذج؟

……

……

……

b. كم يبلغ طول النموذج مقارنة بطول السيارة الفعلية؟

……

……

تمرين موجّه

2. **نموذج مقياسي** صنع صف الأستاذة مها لمادة التاريخ نموذجًا مقياسيًا لمبنى يبلغ ارتفاعه 100 سنتيمترًا. يبلغ الطول الفعلي للمبنى 10 أمتار.

A. ما مقياس رسم النموذج؟

B. كم يبلغ ارتفاع النموذج مقارنة بالمبنى الفعلي؟ وكم يبلغ ارتفاع المبنى الفعلي مقارنة بالنموذج؟

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

ملاحظات ولي الأمر : ..... التوقيع : .....