الوحدة السابعة :- الاحصاء والاحتمالات

الإحصاء :-

مراجعة : مقاييس النزعة المركزية

(المتوسط الحسابي ، المنوال ، الوسيط)

سبب التسمية : لأنها تصف البيانات الإحصائية عن طريق قيمة عددية تتجمع حولها باقي القيم أو المشاهدات

أنواع البيانات :- مفردة ، جدول تكراري ، جدول تكراري ذي فئات

وهناك مقاييس أخرى تسمى (مقاييس التشتت) مثل (المدى ، الانحراف المعياري ، التباين) ، وسميت بهذا الاسم ، لأنها تصف مدى تباعد القيم عن بعضها أو تقاربها

مراجعة في القوانين (للمشاهدات)

١) المتوسط الحسابي :- هو مجموع القيم مقسوما على عددها

$$\text{المتوسط الحسابي} = \bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

حيث $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، ن عدد المشاهدات (القيم)

$\sum س$ مجموع المشاهدات (القيم)

٢) المدى :- هو الفرق بين أكبر مشاهدة وأصغر مشاهدة .

المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣) الانحراف المعياري :- هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

الانحراف المعياري للمشاهدات $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$ يساوي

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن - ١}}$$

ويفضل استخدام هذا القانون إذا كان الوسط الحسابي عدد صحيح .

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س^٢ - ن(\bar{س})^٢}{ن - ١}}$$

ويفضل استخدام هذا القانون إذا كان الوسط الحسابي عدد غير صحيح .

حيث ن هو عدد المشاهدات ، $\bar{س}$ هو المتوسط الحسابي لهذه المشاهدات .

٤) التباين = مربع الانحراف المعياري $= ع^٢$

قال الإمام مالك رحمه الله :-

إذا رأيت الرجل يدافع عن الحق ، فيشتم ويسب ويغضب فأعلم أنه مغلول النية ، لأن الحق لا يحتاج إلى هذا .

سليمان دلدوم أبو هيه

حل نشاط (٧ ـ ١) ص٨٥

أ) موظفي الشركة أ :-

١) المتوسط الحسابي $= \bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$

$\bar{س} = \frac{٣٣٢}{١٠} = ٣٣و٢$

٢) المدى = أكبر مشاهدة ـ أصغر مشاهدة

= ٤٠ ـ ٢٤ = ١٦

٣) الانحراف المعياري :-

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢} - ن(\bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$

س	٢٤	٢٧	٢٨	٣٢	٣٢
$س^{٢}$	٥٧٦	٧٢٩	٧٨٤	١٠٢٤	١٠٢٤
س	٣٥	٣٦	٣٨	٤٠	٤٠
$س^{٢}$	١٢٢٥	١٢٩٦	١٤٤٤	١٦٠٠	١٦٠٠

$\sum (س)^{٢} = ١١٣٠٢$

$ن = ١٠$ ، $(\bar{س})^{٢} = (٣٣و٢)^{٢} = ١١٠٢و٢٤$

وبالتعويض في القانون

$ع = \sqrt{\frac{١١٣٠٢ - ١٠(١١٠٢و٢٤)}{١٠ - ١}} = ٥٧و٥$

ب) موظفي الشركة ب :-

١) المتوسط الحسابي $= \bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$

$\bar{س} = \frac{٣٣٢}{١٠} = ٣٣و٢$

١) المدى = أكبر مشاهدة ـ أصغر مشاهدة

= ٤٠ ـ ٢٤ = ١٦

٢) الانحراف المعياري :-

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢} - ن(\bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$

تذكر :- كلما زادت قيمة التباين زاد تباعد (تشتت) القيم عن متوسطها الحسابي

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

البيانات في جدول تكراري ذي فئات

١) المتوسط الحسابي (Mean)

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموع نواتج ضرب القيم في تكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

المتوسط الحسابي لجدول تكراري دون فئات ٠

المتوسط الحسابي لجدول تكراري ذي فئات هو :-

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموع نواتج ضرب مراكز الفئات في تكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

أي أنه إذا كانت المشاهدات $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$ تمثل مشاهدات في جدول تكراري أو مراكز فئات التوزيع التكراري للبيانات ، وكانت التكرارات المقابلة لها هي $ت_١ ، ت_٢ ، ت_٣ ، ... ، ت_ن$ على التوالي فإن :-

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (ت_ر)}$$

س	٢٤	٢٥	٣٢	٢٥	٣٢
$س^٢$	٥٧٦	٦٢٥	١٠٢٤	٦٢٥	١٠٢٤
س	٣٥	٣٩	٤٠	٤٠	٤٠
$س^٢$	١٢٢٥	١٥٢١	١٦٠٠	١٦٠٠	١٦٠٠

$\sum (س)^٢ = ١١٤٢٠$

$ن = ١٠$ ، $(\overline{س})^٢ = (٣٣و٢)^٢ = ١١٠٢و٢٤$

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{١١٤٢٠ - ١٠(١١٠٢و٢٤)}{١٠ - ١}} = ٦و٦٥$$

نلاحظ مما سبق أن القيم لا تتوزع حول متوسطهما الحسابي بالطريقة نفسها ٠

معلومة :

بالنسبة للقوانين في الإحصاء ليست ثابتة في كل المراجع فمنها من يعتمد في قانون الانحراف المعياري القسمة على (ن) (وهذا ما درسناه في المرحلة الثانوية) ومنها من يعتمد القسمة على (ن – ١)

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

مثال : للجدول التالي // جد المتوسط الحسابي

الفئات	٥ ـ ٩	١٠ ـ ١٤	١٥ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٤
التكرار	٣	٤	٧	٦

الحل :

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (س)	س x ت
٥ ـ ٩	٣	٧	٢١
١٠ ـ ١٤	٤	١٢	٤٨
١٥ ـ ١٩	٧	١٧	١١٩
٢٠ ـ ٢٤	٦	٢٢	١٣٢
المجموع	٢٠		٣٢٠

من الجدول نلاحظ أن :-

$\sum(ت) = ٢٠$ ، $\sum(س \times ت) = ٣٢٠$ وبالتعويض في القانون

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن}(ت_ر)} = \frac{٣٢٠}{٢٠} = ١٦$$

٢) الانحراف المعياري (Standard Deviation)

يحسب الانحراف المعياري في حالة الجداول التكرارية باستخدام

أي من القانونين التاليين

إذا كانت المشاهدات $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$ تمثل مشاهدات في جدول تكراري أو مراكز فئات التوزيع التكراري للبيانات ، وكانت التكرارات المقابلة لها هي $ت_١ ، ت_٢ ، ت_٣ ، ... ، ت_ن$

على التوالي فإن :-

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢ \times ت_ر}{ن - ١}}$$ حيث ن مجموع التكرارات

ويفضل استخدام هذا القانون ، إذا كان الوسط الحسابي عدد صحيح

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر^٢ \times ت) - ن(\bar{س})^٢}{ن - ١}}$$ حيث ن مجموع التكرارات

ويفضل استخدام هذا القانون ، إذا كان الوسط الحسابي عدد غير صحيح

تذكر :- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر دائماً

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣) المدى

يحسب المدى في حالة الجداول التكرارية كما يلي :-

المدى = الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا - الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا

تذكر للفئة ٥ ــ ٩ ، الفئة الفعلية لها هي ٥و٤ ــ ٥و٩

حيث ٥و٤ الحد الفعلي الأدنى للفئة

٥و٩ الحد الفعلي الأعلى للفئة

٤) التباين

التباين هو مربع الانحراف المعياري $= ع^{٢}$

((كلما زادت قيمة التباين زاد تباعد (تشتت) القيم عن متوسطها الحسابي))

مثال :- للجدول التالي // جد المتوسط الحسابي

الفئات	٥ ـ ٩	١٠ ــ ١٤	١٥ ــ ١٩	٢٠ ــ ٢٤
التكرار	٣	٤	٧	٦

احسب :

١) المدى ٢) الانحراف المعياري ٣) التباين

الحل :-

المدى = الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا - الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا

الحد الفعلي الأعلى للفئة العليا = ٥و٢٤

الحد الفعلي الأدنى للفئة الدنيا = ٥و٤

المدى = ٢٠

٢) الانحراف المعياري

نجد الوسط الحسابي (من المثال السابق) $\bar{س} = ١٦$ وبما أن الوسط الحسابي عدد صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}}$$

من الجدول في الأسفل (الصفحة التالية) نلاحظ أن

$ن = \sum (ت) = ٢٠$ ،، $\sum (س - \bar{س})^{٢} \times ت = ٥١٤$

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٥١٤}{١٩}} = ٢و٥$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

الفئات	ت	س	س x ت	س − $\bar{س}$	$(س-\bar{س})$	$(س-\bar{س})^2$ x ت
٥ ـ ٩	٣	٧	٢١	٩ ـ	٨١	٢٤٣
١٠ ـ ١٤	٤	١٢	٤٨	٤ ـ	١٦	٤٨
١٥ ـ ١٩	٧	١٧	١١٩	١	١	٧
٢٠ ـ ٢٤	٦	٢٢	١٣٢	٦	٣٦	٢١٦
المجموع	٢٠		٣٢٠			٥١٤

٣) التباين = ٥ ، ٢٧ = $ع^2$

حل تدريب (٧ ـ ٢) ص٩٥

١) الشركة (ب) الرواتب فيها الأكثر تشتتاً لأن معظم الرواتب تتركز في الأطراف ، بينما الشركة (أ) الرواتب معظمها يتركز في الوسط

٢) في الشكل الأول توزيع طبيعي معتدل (الوسط = الوسيط = المنوال) ((مقاييس النزعة المركزية متساوية) ، بينما في الشكل الثاني نلاحظ أن القيم فيها تشتت كثير

حل سؤال (٢) ص٩٨

نحول التوزيعين (أ) ، (ب) إلى جداول كما يلي

التوزيع (أ) :-

س	١	٢	٣	٤	٥
ت	١	٢	٤	٢	٤

التوزيع (ب) :-

س	١	٢	٣	٤	٥
ت	٢	٢	٤	٢,٥	٢,٥

أ) المدى

للتوزيع (أ) = ٥ ـ ١ = ٤

للتوزيع (ب) = ٥ ـ ١ = ٤

المتوسط الحسابي للتوزيع (أ)

$$\bar{س} = \frac{(١\times١)+(٢\times٢)+(٤\times٣)+(٢\times٤)+(٤\times٥)}{١+٢+٤+٢+٤}$$

$$\bar{س} = \frac{٤٥}{١٣} = ٣,٥$$

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

المتوسط الحسابي للتوزيع (ب)

$$\overline{س} = \frac{(1\times1)+(2\times2)+(3\times4)+(4\times2و5)+(5\times2و5)}{2+2+4+2و5+2و5}$$

$$\overline{س} = \frac{40و5}{13} = 3و1$$

الانحراف المعياري للتوزيع (أ)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر^2 \times ت) - ن(\overline{س})^2}{ن-1}}$$

س	1	2	3	4	5	المجموع
ت	1	2	4	2	4	13
$س^2$	1	4	9	16	25	
$س^2 \times ت$	1	8	36	32	100	177

$\overline{س} = 3و5$ ،،، $\sum(س^2 \times ت) = 177$ ،، $ن = \sum(ت) = 13$

وبالتعويض في القانون أعلاه

$$ع = \sqrt{\frac{177 - 13(3و5)^2}{13-1}} = \sqrt{\frac{177 - 159و25}{12}} = 2و1$$

الانحراف المعياري للتوزيع (ب)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر^2 \times ت) - ن(\overline{س})^2}{ن-1}}$$

س	1	2	3	4	5	المجموع
ت	2	2	4	2و5	2و5	13
$س^2$	1	4	9	16	25	
$س^2 \times ت$	2	8	36	40	62و5	148و5

$\overline{س} = 3و1$ ،،، $\sum(س^2 \times ت) = 148و5$ ،، $ن = \sum(ت) = 13$

وبالتعويض في القانون أعلاه

$$ع = \sqrt{\frac{148و5 - 13(3و1)^2}{13-1}} = \sqrt{\frac{148و5 - 124و9}{12}} = 1و4$$

ب) التوزيع (أ) الأكثر تجانساً

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٣

سليمان دلدوم أبو هبه

أثر تعديل البيانات على مقاييس التشتت

المقصود بتعديل البيانات :- هو إحداث تغيير على البيانات باستخدام العمليات الحسابية (الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة)

هل التعديل على البيانات يؤثر على المقاييس الإحصائية

(النزعة المركزية ، التشتت)

تذكر أن تعديل البيانات يؤثر على مقاييس النزعة المركزية

مثال مراجعة :-

إذا كانت علامات (٧) طلاب في أحد الاختبارات كالآتي :

٩ ، ٦ ، ٨ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، وعدلت العلامات بضرب كل علامة في العدد (٢) وإضافة ثلاث علامات على ناتج الضرب لكل منها

احسب المتوسط الحسابي قبل التعديل وبعده .

الحل :-

١) قبل التعديل

$$\text{المتوسط الحسابي} = \overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$\overline{س} = \frac{٩+٦+٨+٤+٦+٤+٥}{٧} = \frac{٤٢}{٧} = ٦$$

٢) بعد التعديل

التعديل تم كما يلي ((س بعد = ٢ س قبل + ٣))

س/قبل	٩	٦	٨	٤	٦	٤	٥
س/بعد	٢١	١٥	١٩	١١	١٥	١١	١٣

$$\overline{س}_{\text{بعد}} = \frac{٢١+١٥+١٩+١١+١٥+١١+١٣}{٧} = \frac{١٠٥}{٧} = ١٥$$

لاحظ أن الوسط الحسابي تأثر بتعديل العلامات ، ويمكن استخدام العلاقة التالية في إيجاد قيمة المتوسط الحسابي أو المشاهدة بشكل سريع

$$ص = أ س + ب$$

حيث س (المشاهدة ، المتوسط الحسابي) قبل التعديل

ص (المشاهدة ، المتوسط الحسابي) بعد التعديل

ملاحظة : تم تعديل مثال (٧ – ٥) ص١٠٠ ، لأنه يوجد خطأ في الطباعة حيث أن مجموع القيم في الكتاب (٣٩) وليس (٤٢) كما هو مكتوب في الحل (الفرع الثاني) (التعديل تم على القيم فقط ليتناسب مع حل الكتاب)

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

حل نشاط (٧ ـ ٣) ص١٠١

الحل :

١) القيم قبل ٣٨ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٥

$$\overline{س} = \frac{٣٨+٤٠+٤٥+٥٢+٥٥}{٥} = \frac{٢٣٠}{٥} = ٤٦ \text{ قبل}$$

القيم بعد ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٥٧ ، ٦٠

$$\overline{س} = \frac{٤٣+٤٥+٥٠+٥٧+٦٠}{٥} = \frac{٢٥٥}{٥} = ٥١ \text{ بعد}$$

٢) المدى قبل = ٥٥ ـ ٣٨ = ١٧

المدى بعد = ٦٠ ـ ٤٣ = ١٧

٣) الانحراف المعياري

بما أن المتوسط الحسابي في الحالتين (قبل ، بعد) عدد صحيح سوف نستخدم القانون التالي

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن - ١}}$$

$\overline{س}_{(قبل)} = ٤٦$ ،،،، $\overline{س}_{(بعد)} = ٥١$

الانحراف المعياري /// قبل التعديل ($\overline{س}_{(قبل)} = ٤٦$)

س	٣٨	٤٠	٤٥	٥٢	٥٥	المجموع
$س - \overline{س}$	٨-	٦-	١-	٦	٩	صفر؟؟
$(س - \overline{س})^٢$	٦٤	٣٦	١	٣٦	٨١	٢١٨

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٢١٨}{٥-١}} = ٧و٣٨$$

الانحراف المعياري /// بعد التعديل ($\overline{س}_{(بعد)} = ٥١$)

س	٤٣	٤٥	٥٠	٥٧	٦٠	المجموع
$س - \overline{س}$	٨-	٦-	١-	٦	٩	صفر؟؟
$(س - \overline{س})^٢$	٦٤	٣٦	١	٣٦	٨١	٢١٨

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٢١٨}{٥-١}} = ٧و٣٨$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

لاحظ مما سبق أن مقاييس التشتت لم تتأثر في عملية الجمع

المدى (قبل) = المدى (بعد)

الانحراف المعياري (قبل) = الانحراف المعياري (بعد)

حل تدريب (٧ – ٤) ص١٠١

القيم قبل (١٠ ، ١٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠)

القيم بعد زيادة التوفير (٥) قروش

القيم قبل (١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥)

بعد الحل نجد أن

$\bar{س}$ (قبل) = ١٤,٣ ،،،، $\bar{س}$ (بعد) = ١٩,٣

١) المدى (قبل) = ٣٠ – ١٠ = ٢٠

٢) الانحراف المعياري (قبل)

بما أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^{٢} - ن(\bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

حيث ن = ٧ ،،،، $\bar{س}$ (قبل) = ١٤,٣

س	١٠	١٥	٢٠	١٠	٣٠	١٥	٢٠	المجموع
س٢	١٠٠	٢٢٥	٤٠٠	١٠٠	٩٠٠	٢٢٥	٤٠٠	١٥٥٠

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{(١٥٥٠) - ٧(١٤و٣)^{٢}}{٧ - ١}} = ٤و٤٥$$

٣) / ٤) من التدريب السابق مقاييس التشتت لا تتأثر بعملي الجمع لذلك

المدى بعد التعديل = المدى قبل التعديل = ١٠

الانحراف المعياري قبل = الانحراف المعياري بعد = ٤,٤٥

حل نشاط (٧ – ٤) ص١٠٢

العلامات قبل التعديل

١١ ، ١٠ ، ٤١ ، ٦١ ، ٩١ ، ١٠ ، ٢٢ ، ٢٤

العلامات بعد التعديل (تم ضرب كل علامة في (٤))

٤٤ ، ٤٠ ، ٥٦ ، ٦٤ ، ٧٦ ، ٨٠ ، ٨٨ ، ٩٦

نجد المتوسط الحسابي ($\bar{س}$ (قبل) = ١٧ ،،،، $\bar{س}$ (بعد) = ٦٨)

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

١) المدى قبل = ٢٤ ـ ١٠ = ١٤

المدى بعد = ٩٦ ـ ٤٠ = ٥٦

٢) الانحراف المعياري

أ) الانحراف المعياري (قبل) ($\overline{س}_{(قبل)} = ١٧$)

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$
١١	٦-	٣٦
١٠	٧-	٤٩
١٤	٣-	٩
١٦	١-	١
١٩	٢	٤
٢٠	٣	٩
٢٢	٥	٢٥
٢٤	٧	٤٩
المجموع	صفر ؟؟؟؟	١٨٢

بما أن الوسط الحسابي (قبل ، بعد) عدد صحيح نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{١٨٢}{٨ - ١}} = ٥و١$$ ((قبل))

ب) الانحراف المعياري (بعد) ($\overline{س}_{(بعد)} = ٦٨$)

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$
٤٤	٢٤-	٥٧٦
٤٠	٢٨-	٧٨٤
٥٦	١٢-	١٤٤
٦٤	٤-	١٦
٧٦	٨	٦٤
٨٠	١٢	١٤٤
٨٨	٢٠	٤٠٠
٩٦	٢٨	٧٨٤
المجموع	صفر ؟؟؟؟	٢٩١٢

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

(($\overline{س}_{(بعد)}$ = ٦٨))

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن - 1}} = \sqrt{\frac{٢٩١٢}{٨ - 1}} = ٢٠و٤ \text{ ((بعد))}$$

٣) التباين قبل = ٢٦ /// التباين بعد (الضرب في ٤) = ٤١٦

ماذا تستنتج .....

حل تدريب (٧ – ٥) ص١٠٢

القيم قبل التعديل (٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ٥)

القيم بعد التعديل (الضرب في العدد (- ٢))

((-١٢ ، - ٨ ، -٦ ، -٤ ، -١٠))

باستخدام قانون المتوسط الحسابي ، نجد أن

$\overline{س}_{(قبل)}$ = ٤ ،،،، $\overline{س}_{(بعد)}$ = -٨

١) المدى (قبل) = ٦ – ٢ = ٤

المدى (بعد) = -٤ - - ١٢ = ٨

ماذا تلاحظ .....

ماذا تستنتج .....

٢) الانحراف المعياري

أ) قبل التعديل ،،،،،،، $\overline{س}_{(قبل)}$ = ٤ ((عدد صحيح))

س	٦	٤	٣	٢	٥	المجموع
$س - \overline{س}$	٢	٠	١-	٢-	١	صفر؟؟
$(س - \overline{س})^2$	٤	٠	١	٤	١	١٠

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن - 1}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥ - 1}} = ١و٥٨ \text{ (قبل التعديل)}$$

ب) بعد التعديل ،،،،،،، $\overline{س}_{(بعد)}$ = -٨ ((عدد صحيح))

س	-١٢	-٨	-٦	-٤	-١٠	المجموع
$س - \overline{س}$	-٤	٠	٢	٤	-٢	صفر؟؟
$(س - \overline{س})^2$	١٦	٠	٤	١٦	٤	٤٠

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن - 1}} = \sqrt{\frac{٤٠}{٥ - 1}} = ٣و١٦ \text{ (بعد التعديل)}$$

ماذا تلاحظ .....

ماذا تستنتج .....

٣) التباين (قبل) = ٢.٥ // التباين (بعد) = ٤٠

ماذا تلاحظ .....

ماذا تستنتج .....

نلاحظ مما سبق ما يلي :-

١) أن المتوسط الحسابي (مقاييس النزعة المركزية بشكل عام) يتأثر بالعمليات الحسابية الأربع .

٢) مقاييس التشتت لا تتأثر في حالتي الجمع والطرح

٣) مقاييس التشتت (المدى ، والانحراف المعياري) تتأثر في حالة الضرب في عدد (موجب أو سالب) لكن بالنسبة للعدد السالب بعد أخذ القيمة المطلقة له

٤) التباين يتأثر بالضرب كما يلي :- (مربع العدد) x التباين

ويمكن التعبير عن كل ما سبق كما يلي

لتكن ص القيمة بعد التعديل ، س القيمة قبل التعديل

وكانت العلاقة بينهما كما يلي :-

$$ص = أ س + ب$$

١) الانحراف بعد التعديل = $|أ|$ × ع قبل

٢) المدى بعد التعديل = $|أ|$ × المدى قبل

٣) التباين بعد التعديل = $(أ)^2$ × التباين قبل

حل تدريب (٧ – ٦) ص١٠٣

$\overline{س} = ٣$ ،،،،، المدى = ٦ ،،،،، $ع^2 = ١و٦٩$ ،،، $ع = ١و٣$

التعديل تم حسب العلاقة :- $ص = ٥ س - ٣$

١) $\overline{س}_{بعد} = ٥ (٣) - ٣ = ١٢$ (المتوسط الحسابي)

٢) المدى $_{بعد} = ٥ (٦) = ٣٠$ (المدى)

٣) ع $_{بعد} = ٥ (١.٣) = ٦.٥$ (الانحراف المعياري)

٤) $ع^2_{بعد} = (٥)^2 \times (١.٦٩) = ٤٢.٢٥$ (التباين)

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تدريب (٧ – ٧) ص١٠٣

المدى = ٧ ،،،،، الانحراف المعياري (ع) = ٢.٥٢

العلاقة المستخدمة في التحويل من سلسيوس إلى فهرنهايت

$$ف = \frac{٩}{٥} س + ٣٢$$

١) المدى بعد $= \frac{٩}{٥}(٧) = \frac{٦٣}{٥} = ١٢و٦$

٢) ع بعد $= \frac{٩}{٥}(٢و٥٢) = \frac{٢٢و٦٨}{٥} = ٤و٥٤$

دمج البيانات

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات كما في الجدول التالي

المجموعة	عدد القيم	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الأولى	$ن_١$	$\overline{س}_١$	$ع_١$
الثانية	$ن_٢$	$\overline{س}_٢$	$ع_٢$

سليمان دلدوم أبو هيبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

كيف نجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري بعد دمج المجموعتين

١) المتوسط الحسابي بعد الدمج

$$\overline{س}_{\text{بعد الدمج}} = \frac{ن_١ \times \overline{س}_١ + ن_٢ \times \overline{س}_٢}{ن_١ + ن_٢}$$

لإيجاد الانحراف المعياري بعد الدمج يجب علينا إيجاد مجموع مربعات القيم لكل مجموعة، وذلك عن طريق قانون الانحراف المعياري للقيم والقانون هو

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢ - ن(\overline{س})^٢}{ن - ١}}$$

بتربيع الطرفين لإيجاد قانون التباين

$$ع^٢ = \frac{\sum س^٢ - ن(\overline{س})^٢}{ن - ١}$$ بالضرب التبادلي

$ع^٢(ن - ١) = \sum س^٢ - ن(\overline{س})^٢$ نجعل $\sum س^٢$ موضع للقانون

$$\sum س^٢ = ع^٢(ن - ١) + ن(\overline{س})^٢$$

وباستخدام هذا القانون نتمكن من إيجاد مجموع مربعات

القيم لأي مجموعة

لنفرض أن م = مجموع مربعات القيم لأي مجموعة

$$م_1 = \sum س^2 = ع_1^2 (ن_1 - 1) + ن_1 (\overline{س}_1)^2$$

$$م_2 = \sum س^2 = ع_2^2 (ن_2 - 1) + ن_2 (\overline{س}_2)^2$$

مما سبق يكون التباين بعد الدمج كما يلي :-

$$ع^2 = \frac{(م_1 + م_2) - (ن_1 + ن_2)(\overline{س})^2}{1 - (ن_1 + ن_2)}$$

حل تدريب (٧ – ٨) ص١٠٦

الفرع	عدد الموظفين	المتوسط الحسابي للرواتب	الانحراف المعياري للرواتب
الفرع أ	$ن_1 = 8$	$\overline{س}_1 = 400$	$ع_1 = 4$
الفرع ب	$ن_2 = 11$	$\overline{س}_2 = 480$	$ع_2 = 6$

١) $\overline{س}$ بعد الدمج $= \frac{ن_1 \times \overline{س}_1 + ن_2 \times \overline{س}_2}{ن_1 + ن_2}$

$$= \frac{8 \times 400 + 11 \times 480}{8 + 11} = 446.3$$

٢) مجموع مربعات القيم

$$م_1 = \sum س^2 = ع_1^2 (ن_1 - 1) + ن_1 (\overline{س}_1)^2$$

$$م_1 = \sum س^2 = (4)^2 (8 - 1) + 8 (400)^2$$

$$م_1 = 112 + 1280000 = 1280112$$

$$م_2 = \sum س^2 = ع_2^2 (ن_2 - 1) + ن_2 (\overline{س}_2)^2$$

$$م_2 = \sum س^2 = (6)^2 (11 - 1) - 11 (480)^2$$

$$م_2 = 360 + 2534400 = 2534760$$

الآن نعوض بقانون التباين بعد الدمج

$$ع^2 = \frac{(م_1 + م_2) - (ن_1 + ن_2)(\overline{س})^2}{1 - (ن_1 + ن_2)}$$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

$$ع^{٢} = \frac{١٢٨٠١١٢ + ٢٥٣٤٧٦٠ - (١٩)(٣و٤٤٦)^{٢}}{١٨}$$

$$ع^{٢} = \frac{٣٠٣٨١و٨٩}{١٨} = ١٦٨٧و٩$$

منها الانحراف المعياري ع

$$ع = \sqrt{١٦٨٧و٩} = ٤١و٠٨$$

الحذف أو الإضافة للقيم

هل يتأثر الانحراف المعياري إذا حذفت بعض القيم ، أو إضافة قيم جديدة

حل تدريب (٧ – ٩) ص١٠٩

القيم قبل الحذف

٩٢ ، ١٠٠ ، ٩٥ ، ٩٧ ، ٨٨ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ٩٥

القيم بعد الحذف

٩٢ ، ٩٥ ، ٩٧ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ٩٥

$\overline{س}_{(قبل)} = ٩٣.٧٥$ ،،،، $\overline{س}_{(بعد)} = ٩٣.٦٧$

التباين قبل الحذف (($\overline{س}_{(قبل)} = ٩٣.٧٥$)) ((عدد غير صحيح))

نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ت=١}^{ن} س^{٢} - ن(\overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

س	٩٢	١٠٠	٩٥	٩٧	٨٨
$س^{٢}$	٨٤٦٤	١٠٠٠٠	٩٠٢٥	٩٤٠٩	٧٧٤٤
س	٩٣	٩٠	٩٥	قبل الحذف مجموع $س^{٢}$	
$س^{٢}$	٨٦٤٩	٨١٠٠	٩٠٢٥	٧٠٤١٦	

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{٧٠٤١٦ - ٨(٩٣و٧٥)^{٢}}{٨ - ١}} = ٣و٨٥$$

التباين $= ع^{٢} = ١٤و٧٩$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

التباين بعد الحذف (($\bar{س}_{(بعد)}$ = ٩٣.٦٧)) ((عدد غير صحيح))

نستخدم القانون

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - ن(\bar{س})^2}{ن-1}}$$

س	٩٢	١٠٠	٩٥	٩٧	٨٨
$س^2$	٨٤٦٤	١٠٠٠٠	٩٠٢٥	٩٤٠٩	٧٧٤٤
س	٩٣	٩٠	٩٥	بعد الحذف مجموع $س^2$	
$س^2$	٨٦٤٩	٨١٠٠	٩٠٢٥	٥٢٦٧٢	

وبالتعويض في القانون

$$ع = \sqrt{\frac{٥٢٦٧٢ - ٦(٩٣و٦٧)^2}{٦-١}} = ٢و٢٧$$

التباين $= ع^2 = ٦و٢٦$

لاحظ أن قيمة الانحراف المعياري تتغير إذا حذفت أي من القيم ، وكذلك إذا أضيف إليها قيم أخرى ، أو أجري تغيير على هذه القيم ، والسبب في ذلك هو أن قيمة الانحراف المعياري تعتمد على القيم جميعها

حل الأسئلة / ص ١١٠

س١ :- $\bar{س} = ٢٥$ ، $ع = ٤$ ،،، المدى = ١٠

تم التعديل وفق العلاقة $ص = ٤س - ١٠$

المطلوب ١) س قبل : س بعد = ٢٢

بالتعويض في العلاقة ٢٢ = ٤س – ١٠ ،، س قبل = ٨

٢) أ) $\bar{س}$ بعد $= ٤(٢٥) - ١٠ \leftarrow \bar{س} = ١١٠$

ب) المدى بعد = ٤ (١٠) = ٤٠

ج) ع بعد $= ٤(٤) \leftarrow ع = ١٦$

د) التباين قبل = ١٦ ،،،، التباين بعد = (٤)٢ (١٦) = ٢٥٦

س٢ :- التباين قبل = ٣٦ ،، إذا الانحراف المعياري قبل = ٦ ،، ونعلم أن الانحراف المعياري يتأثر فقط بالضرب في القيمة المطلقة للعدد لذلك الانحراف المعياري بعد الضرب

ع بعد $= ٢(٦) \leftarrow ع = ١٢$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

س٣ :- عدد الطلاب (ن) = ٢٥

المتوسط الحسابي $(\overline{س})$ = ٤٥

الانحراف المعياري (ع) = ٨

انتقل أحد الطلاب من الصف كتلته (س = ٥٣)

المطلوب :- ١) المتوسط الحسابي لكتل الطلاب بعد انتقال الطالب

٢) التباين لكتل الطلاب بعد انتقال الطالب

الحل :- ١) نجد مجموع كتل الطلاب قبل انتقال الطالب

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} \leftarrow \frac{\sum س}{٢٥} = ٤٥$$

$\sum س = ١٢٢٥$ ، نحذف كتلة الطالب الذي انتقل

$\sum س$ بعد انتقال الطالب = ١٢٢٥ ـ ٥٣ = ١٠٧٢

(ن) بعد انتقال الطالب = ٢٤

إذا المتوسط الحسابي بعد

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٠٧٢}{٢٤} = ٤٤و٦٧$$

٢) التباين بعد انتقال الطالب ((نجد $\sum س^{٢}$)) حسب العلاقة

$$\sum س^{٢} = ع^{٢}(ن-١) + ن(\overline{س})^{٢}$$

$$\sum س^{٢} = (٨)^{٢}(٢٥-١) + ٢٥(٤٥)^{٢} = ٥٢١٦١$$

الآن نحذف مربع كتلة الطالب الذي انتقل من مجموع مربعات كتل الطلاب

مجموع (الكتل)^{٢} بعد = مجموع (الكتل)^{٢} قبل – (ك الطالب)^{٢}

$$\sum س^{٢} = ٥٢١٦١ - (٥٣)^{٢} = ٤٩٣٥٢$$

وبتطبيق قانون التباين (أو الانحراف المعياري) على بعد

$$ع^{٢} = \frac{\sum س^{٢} - ن(\overline{س})^{٢}}{ن-١} = \frac{٤٩٣٥٢ - ٢٤(٤٤و٦٧)^{٢}}{٢٤-١}$$

$$= \frac{٤٩٣٥٢ - ٢٤(٤٤و٦٧)^{٢}}{٢٤-١} = ٦٤و٥$$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

س٤ :-

الشعب	عدد الطلاب	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
أ	٤٢	١٣	٦
ب	٤١	١٢	٤
جـ	٤٠	١٥	٥

المطلوب :-

حساب كل من (المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري) لعلامات الطلاب

الحل : نجد المتوسط الحسابي لكل الطلاب حسب القانون

$$\overline{س} = \frac{ن_1 \times \overline{س}_1 + ن_ب \times \overline{س}_ب + ن_جـ \times \overline{س}_جـ}{ن_1 + ن_ب + ن_جـ}$$

$$\overline{س} = \frac{٤٢ \times ١٣ + ٤١ \times ١٢ + ٤٠ \times ١٥}{٤٢ + ٤١ + ٤٠} = ١٣و٣$$

نجد الآن مجموع مربعات علامات كل شعبة حسب القانون

$$\sum س^2 = ع^2 (ن - 1) + ن (\overline{س})^2$$

م١ (أ) ،، م٢ (ب) ،، م٣ (جـ)

$$م_{1/أ} = \sum س^2 = (٦)^2 (٤٢ - 1) + ٤٢ (١٣)^2 = ٨٥٧٤$$

$$م_{2/ب} = \sum س^2 = (٤)^2 (٤١ - 1) + ٤١ (١٢)^2 = ٦٥٤٤$$

$$م_{3/جـ} = \sum س^2 = (٥)^2 (٤٠ - 1) + ٤٠ (١٢)^2 = ٩٩٧٥$$

إذا مجموع مربعات علامات الطلاب لكل الشعب

$$\sum س^2 = ٨٥٧٤ + ٦٥٤٤ + ٩٩٧٥ = ٢٥٠٩٣$$

عدد الطلاب لكل الشعب = ١٢٣

المتوسط الحسابي لكل الشعب $\overline{س}$ = ١٣و٣

وبالتعويض في القانون

$$ع^2 = \frac{\sum س^2 - ن (\overline{س})^2}{ن - 1} = \frac{٢٥٠٩٣ - ١٢٣ (١٣و٣)^2}{١٢٣ - 1}$$

$ع^2$ = ٢٧و٣ التباين لكل الشعب

ع = ٢ و٥ الانحراف المعياري لكل الشعب

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

الاحتمالات

أنواع التجارب

أ) تجارب مؤكدة مثل التجارب العلمية

ب) تجارب غير مؤكدة مثل التجارب العشوائية وهي التجارب موضع الدراسة في هذه الوحدة .

١) التجربة العشوائية

هي التجربة التي يمكن معرفة نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد أي من هذه سيتحقق فعلا إلا بعد إجراء التجربة : مثل إلقاء حجر النرد ، إلقاء قطعة نقد ..... الخ

والتجارب العشوائية مرتبطة بمفهوم يستخدم في معظم الحالات هو مفهوم الاحتمال

مراجعة في بعض المفاهيم

أ) الفضاء العيني :- هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (Ω)

ب) الحادث : هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني لتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز ($ع$)

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

ت) احتمال وقوع حادث ما : هو فرصة وقوع ذلك الحادث ، ويرمز له بالرمز ل ($ع$) وتكون قيمته محصورة بين الصفر والواحد صحيح $٠ \leq$ ل ($ع$) ≤ ١

٢) أنواع الحوادث :

أ) الحادث البسيط : هو الحادث الذي يحتوي عنصرا واحداً من عناصر الفضاء العيني (Ω)

ب) الحادث المركب : هو الحادث الذي يحتوي عنصرين أو أكثر من عناصر الفضاء العيني (Ω)

ت) الحادث المستحيل : هو الحادث الذي لا يحتوي أي عنصر من عناصر الفضاء العيني (Ω) ،ويساوي ($\varnothing$) ويكون احتماله = ٠

ث) الحادث الأكيد : هو الحادث الذي يحتوي جميع عناصر الفضاء العيني (Ω)ويساوي (Ω) ويكون احتماله يساوي ١ ٠

تذكر : إذا كان (Ω) الفضاء العيني لتجربة عشوائية ، وكان $ع \subset \Omega$ ٠ فإن احتمال وقوع الحادث ح هو

$$\text{ل}(ح) = \frac{\text{ن}(ع)}{\text{ن}(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } (\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث ح}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$$

مجموع احتمالات الحوادث البسيطة المكونة للفضاء العيني يساوي ١

حل تدريب (٧ – ١٠) ص ١١٤

١) {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك، ك ك ك}

٢) حسب مبدأ العد العام

$$ن(\Omega)\varepsilon = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

٣) احتمال ظهور ٣ صور

ع = {ص ص ص} ← ن(ع) = ١

$$ل(ع) = \frac{ن(ع)}{ن(\Omega)\varepsilon} = \frac{١}{٨}$$

٤) احتمال ظهور كتابتين على الأقل

المقصود هنا (ظهور كتابتين وصورة أو ظهور ٣ كتابات)

((على الأقل تكمل للأعلى ،، على الأكثر تكمل للأسفل))

ع = {ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك} ← ن(ع) = ٤

$$ل(ع) = \frac{ن(ع)}{ن(\Omega)\varepsilon} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

ملاحظة : بالنسبة للجواب النهائي ليس بالضرورة أن يختصر

جواب فكر ((لا يوجد فرق نهائياً))

حل تدريب (٧ – ١١) ص ١١٥

الحل:- ١٢٠٣٩٥٨٧٤٦

ن(Ω)ε = ١٠

١) ل (ظهور الرقم ٩) = $\frac{١}{١٠}$

٢) ل (عدم ظهور الرقم ٩) = $\frac{٩}{١٠}$

سليمان دلدوم أبو هبه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

حل نشاط (٧ – ٥) ص ١١٥

حل تدريب (٧ – ١٢) ص ١١٦

(١،١)	(٢،١)	(٣،١)	(٤،١)	(٥،١)	(٦،١)
(١،٢)	(٢،٢)	(٣،٢)	(٤،٢)	(٥،٢)	(٦،٢)
(١،٣)	(٢،٣)	(٣،٣)	(٤،٣)	(٥،٣)	(٦،٣)
(١،٤)	(٢،٤)	(٣،٤)	(٤،٤)	(٥،٤)	(٦،٤)
(١،٥)	(٢،٥)	(٣،٥)	(٤،٥)	(٥،٥)	(٦،٥)
(١،٦)	(٢،٦)	(٣،٦)	(٤،٦)	(٥،٦)	(٦،٦)

١) $ن(\Omega) = ٦ \times ٦ = ٣٦$

٢) نفرض ح مجموع العددين ٧

ح = { (١،٦)، (٢،٥)، (٣،٤)، (٤،٣)، (٥،٢)، (٦،١) }

$ن(ح) = ٦$

$$ل(ح) = \frac{ن(ح)}{ن(\Omega)} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

٣) نفرض ح عددين زوجيين

ح = { (٢،٢)، (٢،٤)، (٢،٦)، (٤،٢)، (٤،٤)، (٤،٦)، (٦،٢)، (٦،٤)، (٦،٦) }

$ن(ح) = ٩$

$$ل(ح) = \frac{ن(ح)}{ن(\Omega)} = \frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$$

٤) نفرض ح مجموع العددين أقل من أو يساوي ٥

ح = { (١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (٢،١)، (٢،٢)، (٢،٣)، (٣،١)، (٣،٢)، (٤،١) }

$ن(ح) = ١٠$

$$ل(ح) = \frac{ن(ح)}{ن(\Omega)} = \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٥}{١٨}$$

٥) صفر !!!!! مستحيل

٦) أكبر من ١ و أقل من ١٣

الجواب (١) !! أكيد

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تدريب (٧ – ١٣) ص ١١٦

١) حسب مبدأ العد العام

$$٣٢ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = (\Omega)\,ع$$

أو نستخدم القاعدة $$٣٢ = ^{٥}٢ = ^{ن}٢ = (\Omega)\,ع$$

استخدمنا الأساس ٢ لأن النواتج ثنائية

٢) $$١٢٩٦ = ٦ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = (\Omega)\,ع$$

أو $$٢٥٦ = ^{٤}٦ = ^{ن}٦ = (\Omega)\,ع$$

٣) $$٢٨٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٦ \times ٦ = (\Omega)\,ع$$

أو $$٢٨٨ = ^{٣}٢ \times ^{٤}٦ = ^{٢}٢ \times ^{ن}٦ = (\Omega)\,ع$$

تحدث !! ص١١٧

١) إرجاع ما تم سحبه ثم السحب من جديد وهكذا

٢) عدم إرجاع ما تم سحبه والاستمرار في السحب

٣) السحب دفعة واحدة حسب المطلوب وفي العادة الكمية أكبر من واحد ((التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم))

مثال توضيحي لحالات السحب

يحتوي صندوق على ٣ كرات سوداء ، ٢ بيضاء سحب من الصندوق كرتان

جد عدد عناصر الفضاء العيني ، ثم أكتب الفضاء العيني إذا كان السحب

١) على التوالي مع الإرجاع

٢) على التوالي دون إرجاع

٣) معاً

الحل :-

١) على التوالي مع الإرجاع

حسب مبدأ العد العام !! نسحب الكرة الأولى من ٥ ثم نعيدها ونسحب الكره الثانية من ٥ ، لذلك فإن عدد عناصر الفضاء العيني هو

$$٢٥ = ٥ \times ٥ = (\Omega)\,ع$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

$\Omega = \{$ س س ، س ب ، ب س ، ب ب $\}$

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني = ٢٥ ، لكن ما تم كتابته في الفضاء العيني ٤ فقط ؟؟؟؟

لنأخذ الحالة الأولى في الفضاء العيني س ، س

س الأولى تم سحبها من ٣ ثم تم إرجاعها وسحب س الثانية أيضاً

من ٣ لذلك فإن ع (س ، س) = ٣ x ٣ = ٩

وبنفس الطريقة الباقي

ع (س ، ب) = ٣ x ٢ = ٦

ع (ب ، س) = ٢ x ٣ = ٦

ع (ب ، ب) = ٢ x ٢ = ٤

وبجمع النواتج ٩ + ٦ + ٦ + ٤ = ٢٥ عدد عناصر

الفضاء العيني

تفسير أخر باستخدام الجدول

سليمان دلدوم أبو هبه

	س	س	س	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب

١) على التوالي دون إرجاع

حسب مبدأ العد العام \\ نسحب الكرة الأولى من ٥ ثم لا نعيدها ونسحب الكره الثانية من ٤ ، لذلك فإن عدد عناصر الفضاء العيني هو

$$\text{ع}(\Omega) = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$\Omega = \{$ س س ، س ب ، ب س ، ب ب $\}$

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني = ٢٠ ، لكن ما تم كتابته في الفضاء العيني ٤ فقط ؟؟؟؟

لنأخذ الحالة الأولى في الفضاء العيني س ، س

س الأولى تم سحبها من ٣ ثم لم يتم إرجاعها وسحب س الثانية

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

من ٢ لذلك فإن ع (س ، س) = ٣ x ٢ = ٦

وبنفس الطريقة الباقي

ع (س ، ب) = ٣ x ٢ = ٦

ع (ب ، س) = ٢ x ٣ = ٦

ع (ب ، ب) = ٢ x ١ = ٢

وبجمع النواتج ٦ + ٦ + ٦ + ٢ = ٢٠ عدد عناصر

الفضاء العيني

في الجدول نشطب عناصر القطر لأن الكرة التي تم سحبها

مستحيل أن تسحب مرة ثانية

	س	س	س	ب	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب

١) معاً

$$ع(\Omega) = \frac{٥ \times ٤}{٢} = ١٠$$

$$\Omega = \{ سس ، بس ، بب \}$$

لاحظ أن الكرة السوداء الأولى لا يمكن أن تظهر مع نفسها وكذلك الثانية والثالثة وأيضا البيضاء الأولى لا يمكن أن تظهر مع نفسها كذلك الثانية والسوداء الأولى تظهر مع البيضاء الأولى أو الثانية وليس هناك فرق بين (س ، ب) أو (ب ، س)

في الجدول نشطب عناصر القطر والعناصر التي أسفله أو أعلاه

	س	س	س	ب	ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
س	س ، س	س ، س	س ، س	س ، ب	س ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب
ب	ب ، س	ب ، س	ب ، س	ب ، ب	ب ، ب

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

حل مثال (٧ – ١٢) ص ١١٧

حل تدريب (٧ – ١٤) ص ١١٨

١) سحب بطاقتان على التوالي مع الإرجاع

أ) $ن(\Omega) = ٣ \times ٣ = ٩$

ب) $\Omega = \{(١،١)،(٢،١)،(٣،١)،(١،٢)،(٢،٢)،(٣،٢)،(١،٣)،(٢،٣)،(٣،٣)\}$

ج) نفرض $ع_١$: العددان فرديان

$ع_١ = \{(١،١)،(٣،١)،(١،٣)،(٣،٣)\}$

$ل(ع_١) = \frac{ن(ع_١)}{ن(\Omega)} = \frac{٤}{٩}$

د) نفرض $ع_٢$: المجموع أكبر من ٣

$ع_٢ = \{(٣،١)،(٢،٢)،(٣،٢)،(١،٣)،(٢،٣)،(٣،٣)\}$

$ل(ع_٢) = \frac{ن(ع_٢)}{ن(\Omega)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٢) سحب بطاقتان على التوالي دون إرجاع

أ) لاحظ هنا أننا نسحب البطاقة الأولى ولا نعيدها ثم نسحب البطاقة الثانية ، لذلك

$ن(\Omega) = ٣ \times ٢ = ٦$

ب) البطاقة لا تكرر نفسها أثناء عملية السحب لذلك

$\Omega = \{(١،٢)،(٣،١)،(٢،١)،$
$(٣،٢)،(١،٣)،(٢،٣)\}$

ج) نفرض $ع_١$: العددان فرديان

$ع_١ = \{(٣،١)،(١،٣)\}$

$ل(ع_١) = \frac{ن(ع_١)}{ن(\Omega)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

د) نفرض $ع_٢$: المجموع أكبر من ٣

$ع_٢ = \{(٣،١)،(٣،٢)،(١،٣)،(٢،٣)\}$

$ل(ع_٢) = \frac{ن(ع_٢)}{ن(\Omega)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

١) سحب بطاقتان على التوالي مع الإرجاع

	١	٢	٣
١	(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢	(١ ، ٢)	(٢ ، ٢)	(٣ ، ٢)
٣	(١ ، ٣)	(٢ ، ٣)	(٣ ، ٣)

٢) سحب بطاقتان على التوالي دون إرجاع

	١	٢	٣
١		(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢	(١ ، ٢)		(٣ ، ٢)
٣	(١ ، ٣)	(٢ ، ٣)	

٣) السحب للبطاقتين معاً

	١	٢	٣
١		(٢ ، ١)	(٣ ، ١)
٢			(٣ ، ٢)
٣			

سليمان دلدوم أبو هيه

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

٣) السحب للبطاقتين معاً

التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم

أ) لاحظ هنا أن العدد لا يمكن أن يظهر مع نفسه وسحب بطاقتين تحملان الرقمان ١ ، ٢ هو نفسه ٢ ، ١ وهكذا ، لذلك

$$ن(\Omega) = ٣$$

ب) $\Omega = \{(١،٢)، (١،٣)، (٢،٣)\}$

ج) نفرض $ع_١$: العددان فرديان

$$ع_١ = \{(١،٣)\}$$

$$ل(ع_١) = \frac{ن(ع_١)}{ن(\Omega)} = \frac{١}{٣}$$

د) نفرض $ع_٢$: المجموع أكبر من ٣

$$ع_٢ = \{(١،٣)، (٢،٣)\}$$

$$ل(ع_٢) = \frac{ن(ع_٢)}{ن(\Omega)} = \frac{٢}{٣}$$

توضيح لما سبق باستخدام الجداول ((الفضاء العيني)

تعريف

ليكن ل اقترانا يربط كل حادث ح في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية ما بعدد حقيقي ، فإن ل يسمى اقتران احتمال ، إذا حقق الفرضيات التالية :

١) لكل حادث ع ⊂ Ω يكون ٠ ≤ ل(ع) ≤ ١

٢) ل(Ω) = ١

مراجعة

١) الرمز ∪ ← اتحاد

٢) الرمز ∩ ← تقاطع

٣) الرمز $\overline{ع}$ ← متممة ح

٤) الرمز ⊂ ← محتواه

٥) الرمز − ← الفرق (طرح)

٦) الرمز $ع_١ \cup ع_٢$ ← وقوع أحد الحادثين $ع_١ ، ع_٢$ على الأقل

٧) الرمز $ع_١ \cap ع_٢$ ← وقوع الحادثين $ع_١ ، ع_٢$ معاً

٨) الرمز $ع_١ - ع_٢$ ← وقوع الحادث $ع_١$ وعدم وقوع الحادث $ع_٢$

ويمكن التعبير عنها بالرمز $ع_١ \cap \overline{ع_٢}$

ويعبر عنها لفظاً أيضاً بالصورة (وقوع الحادث $ع_١$ فقط)

٩) **قانونا ديمورغان**

$$\overline{ع_١ \cup ع_٢} = \overline{ع_١} \cap \overline{ع_٢}$$
$$\overline{ع_١ \cap ع_٢} = \overline{ع_١} \cup \overline{ع_٢}$$

١٠)

$$ع_١ \cup ع_٢ = ع_٢ \cup ع_١$$
$$ع_١ \cap ع_٢ = ع_٢ \cap ع_١$$
$$ع_١ - ع_٢ \neq ع_٢ - ع_١$$

ملاحظة :

لكل ما سبق $ع_١ ، ع_٢ \subset Ω$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

قوانين الاحتمالات

سوف نعرض هنا بعض القوانين وإن شاء الله في الدروس القادمة نعرض القسم الآخر

إذا كان $ع_1 ، ع_2 \subset \Omega$ ((حادثين في فضاء عيني))

١) احتمال الحادث الأكيد $ل(\Omega) = ١$

٢) احتمال الحادث المستحيل $ل(\varnothing) = ٠$

٣) إذا كان $ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ في هذه الحالة يسمى $ع_1 ، ع_2$ حادثين منفصلين وعليه فإن

$$ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(\varnothing) = ٠$$

٤) قانون الاتحاد

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

وإذا كان $ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ فإن

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2)$$

٥) قانون المتممة

أ) $ل(\overline{ع_1}) + ل(ع_1) = ١$

ب) $ل(\overline{ع_1 \cap ع_2}) = ١ - ل(ع_1 \cap ع_2)$

ت) $ل(\overline{ع_1 \cup ع_2}) = ١ - ل(ع_1 \cup ع_2)$

ث) $ل(\overline{ع_1} \cap \overline{ع_2}) = ل(\overline{ع_1 \cup ع_2}) = ١ - ل(ع_1 \cup ع_2)$

ج) $ل(\overline{ع_1} \cup \overline{ع_2}) = ل(\overline{ع_1 \cap ع_2}) = ١ - ل(ع_1 \cap ع_2)$

٦) قانون الطرح (الفرق)

أ) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

ب) $ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

ت) $ل(ع_1 \cap \overline{ع_2}) = ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

ث) $ل(\overline{ع_2} \cap ع_1) = ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

ج) وإذا كان $ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ فإن

$$ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) \text{ ،،،} ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2)$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

٧) قانون الاحتواء

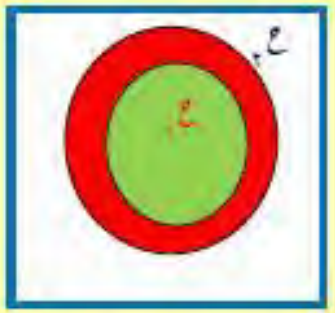
إذا كان $ع_1 \subset ع_2$ فإن

أ) $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(ع_1)$

ب) $ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_2)$

ت) $ل(ع_2 - ع_1) = ل(\varnothing) = 0$

ث) $ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1)$



$ع_1 \subset ع_2$

وبهذا نكون قد أنهينا القسم الأول من قوانين الاحتمالات

مع الاعتذار عن عدم رسم أشكال فن

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

٣٠

في المسائل والتدريبات الواردة في الكتاب المدرسي إن شاء الله سوف أعمل على زيادة المطلوب (حسب السؤال أو التدريب)

حل تدريب (٧ – ١٥) ص ١١٩

(١،١)	(٢،١)	(٣،١)	(٤،١)	(٥،١)	(٦،١)
(١،٢)	(٢،٢)	(٣،٢)	(٤،٢)	(٥،٢)	(٦،٢)
(١،٣)	(٢،٣)	(٣،٣)	(٤،٣)	(٥،٣)	(٦،٣)
(١،٤)	(٢،٤)	(٣،٤)	(٤،٤)	(٥،٤)	(٦،٤)
(١،٥)	(٢،٥)	(٣،٥)	(٤،٥)	(٥،٥)	(٦،٥)
(١،٦)	(٢،٦)	(٣،٦)	(٤،٦)	(٥،٦)	(٦،٦)

$ع_1 = \{(١،١)، (٢،١)، (٣،١)، (٤،١)، (٥،١)، (١،٢)، (٢،٢)، (٣،٢)، (٤،٢)، (١،٣)، (٢،٣)، (٣،٣)، (١،٤)، (٢،٤)، (١،٥)\}$

$ل(ع_1) = \frac{ن(ع_1)}{ن(\Omega)} = \frac{١٥}{٣٦}$

$ع_2 = \{(٣،٦)، (٤،٦)، (٥،٦)، (٦،٦)، (٤،٥)، (٥،٥)، (٦،٥)، (٥،٤)، (٦،٤)، (٦،٣)\}$

$ل(ع_2) = \frac{ن(ع_2)}{ن(\Omega)} = \frac{١٠}{٣٦}$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

لاحظ أن $ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ وهذا ما يجب الانتباه إليه عند حل المسائل
وهو إيجاد التقاطع ، سواء طلب السؤال ذلك أم لا

إذاً $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(\varnothing) = ٠$ حادثان منفصلان ((متباعدان))

١) $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(\varnothing) = ٠$

٢) $ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2)$ حادثان منفصلان

$ل(ع_1 \cup ع_2) = \frac{١٥}{٣٦} + \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٢٥}{٣٦}$

٣) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1)$ حادثان منفصلان

$ل(ع_1 - ع_2) = \frac{١٥}{٣٦}$

حل تدريب (٧ – ١٦) ص ١٢٠

$ع_1 \supset ع_2$ ، $ل(ع_1) = ٠,٣٥$ ، $ل(ع_2) = ٠,٩$

١) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(\varnothing) = ٠,٣٥$ من قانون الاحتواء

٢) $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_2)$

$ل(ع_1 - ع_2) = ٠,٣٥ - ٠,٩ = ٠,٦$

حل تدريب (٧ – ١٧) ص ١٢١

$ل(ع) = \frac{٢}{٣} ل(ع)$

١) حسب قانون المتممة $ل(ع) + ل(\overline{ع}) = ١$

$ل(ع) + \frac{٣}{٢} ل(ع) = ١ \leftarrow ل(ع) + \frac{٥}{٣} ل(ع) = ١ \leftarrow ل(ع) = \frac{٣}{٥}$

٢) $ل(ع) + ل(\overline{ع}) = ١ \leftarrow ل(\overline{ع}) + \frac{٣}{٥} = ١$

$ل(\overline{ع}) = ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

٣) $ل(ع \cap \overline{ع}) = ٠$ لماذا ؟؟؟؟

٤) $ل(ع \cup \overline{ع}) = ١$ لماذا ؟؟؟؟

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تدريب (٧ – ١٨) ص ١٢٣

يحل هذا التدريب بأكثر من طريقة وسوف أقوم هنا بترجمة السؤال إلى رموز

$$ن(\Omega) = ٥٠$$

$ع_١$:يفضلون شرب الشاي ← $ن(ع_١) = ٢٥$

$$ل(ع_١) = \frac{٢٥}{٥٠} \leftarrow$$

$ع_٢$:يفضلون شرب القهوة ← $ن(ع_٢) = ٣٠$

$$ل(ع_٢) = \frac{٣٠}{٥٠} \leftarrow$$

يفضلون شرب الشاي والقهوة معاً $(ع_١ \cap ع_٢)$

$$ن(ع_١ \cap ع_٢) = ١٥ \leftarrow ل(ع_١ \cap ع_٢) = \frac{١٥}{٥٠}$$

١) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب القهوة فقط ؟

الترجمة : يشرب قهوة ولا يشرب الشاي

$ع_٢ - ع_١$ نستخدم قانون الفرق

$$ل(ع_٢ - ع_١) = ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

$$ل(ع_٢ - ع_١) = \frac{٣٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١٥}{٣٠}$$

٢) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب الشاي فقط ؟

الترجمة : يشرب شاي ولا يشرب القهوة

$ع_١ - ع_٢$ نستخدم قانون الفرق

$$ل(ع_١ - ع_٢) = ل(ع_١) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

$$ل(ع_١ - ع_٢) = \frac{٢٥}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١٠}{٣٠}$$

٣) احتمال أن يكون ممن يفضلون شرب أحد المشروبين على الأقل ؟

الترجمة : يشرب قهوة أو يشرب الشاي ((الاتحاد)

$ع_١ \cup ع_٢$ نستخدم قانون الاتحاد

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

$$= \frac{٢٥}{٥٠} + \frac{٣٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٣٠} = \frac{٤٠}{٣٠}$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيبه

حل تدريب (٧ – ١٩) ص ١٢٣

نفرض القلم الأزرق ز ، نفرض القلم الأخضر خ

أزرق (ز)	أخضر (خ)
٢	٣

المجموع ٥

نوع السحب : قلمان على التوالي دون إرجاع

القلم الأول يسحب من ٥ والقلم الثاني يسحب من ٤

$$ن(\Omega) = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

$$\Omega = \{ خ خ ، ز خ ، خ ز ، ز ز \}$$

أحمد : $ل(خ خ) = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} = \frac{٦}{٢٠}$

حامد : $ل(ز ز) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٢٠}$

سارة : $ل(خ ز) + ل(ز خ) = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{٢٠}$

لسارة الفرصة الأكبر

حل الأسئلة // ص١٢٤

س١ :-

١) صحيحة ، لأنه لا يمكن أن يكون ناتج عد كميات سالب

٢) خطأ ، لأن احتمال الفضاء العيني دائماً = ١

٣) صحيحة ،

٤) خطأ ، لأن الاحتمال محصور بين العددين ٠ ، ١

٥) خطأ ، والصواب

$$ل(ع_١ \cup ع_٢) = ل(ع_١) + ل(ع_٢) - ل(ع_١ \cap ع_٢)$$

٦) خطأ ، والصواب $ل(ع_١ \cap \overline{ع_١}) = ٠$

٧) صحيحة

س٢ :

في هذا السؤال من الصعوبة كتابة الفضاء العيني حيث أن عدد عناصره ١٦ عنصر

$$ن(\Omega) = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

لذلك في الحل سوف يتم التفسير

أ) $ع_1$: لدى العائلة ولد واحد فقط من الذكور

$ع_1 = \{$وببب، ب وبب، ببوب، بببو$\}$

$ع(ع_1) = ٤ \leftarrow ل(ع_1) = \frac{٤}{١٦}$

ب) $ع_2$: لدى العائلة أربع بنات فقط

$ع_2 = \{$ بببب $\}$

$ع(ع_2) = ١ \leftarrow ل(ع_2) = \frac{١}{١٦}$

ت) $ع_3$: لدى العائلة ثلاثة أولاد من الذكور على الأقل

يوجد لدينا حالتان

٣ أولاد ذكور وبنت واحدة أو ٤ أولاد ذكور

$ع_3 = \{$ووو ب، ووب وب، وبوب، بووب، ووو و$\}$

$ع(ع_3) = ٥ \leftarrow ل(ع_3) = \frac{٥}{١٦}$

د) $ع_4$: لدى العائلة بنتان على الأكثر

يوجد لدينا ٣ حالات

بنتان وولدان أو بنت و٣ أولاد أو ٤ أولاد

$ع_4 = \{$ووبب، وبوب، وبب وو، وبوبو، وبوو ب، بووبو، بوبوب، بوبب و، بووو$\}$

$ع(ع_4) = ٩ \leftarrow ل(ع_4) = \frac{١١}{١٦}$

ملاحظة : بالنسبة لفرع (د)

لدى العائلة بنتان على الأكثر متممة لعبارة لدى العائلة ثلاثة أولاد من الذكور على الأقل ١١١ أي أن

$ع_4 \cup ع_3 = \Omega$

$ل(ع_4) = ل(\Omega) - ل(ع_3) = ١ - \frac{٥}{١٦} = \frac{١١}{١٦}$

سليمان دلدوم أبو هبه

س٣ : -

ناجح في الرياضيات $ع_1$ ← ل($ع_1$) = ٠٫٨٥

ناجح في الفيزياء $ع_2$ ← ل($ع_2$) = ٠٫٧

ناجح في المادتين $ع_1 \cap ع_2$ ← ل($ع_1 \cap ع_2$) = ٠٫٦

١) احتمال نجاح الطالب في الفيزياء فقط

ناجح فيزياء وغير ناجح رياضيات (الفرق)

ل($ع_2 - ع_1$) = ل($ع_2$) − ل($ع_1 \cap ع_2$)

ل($ع_2 - ع_1$) = ٠٫٧ − ٠٫٦ = ٠٫١

٢) نجاحه في إحدى المادتين على الأقل (الاتحاد)

ل($ع_1 \cup ع_2$) = ل($ع_1$) + ل($ع_2$) − ل($ع_1 \cap ع_2$)

ل($ع_1 \cup ع_2$) = ٠٫٨٥ + ٠٫٧ − ٠٫٦ = ٠٫٩٥

٣) نجاحه في أي من المادتين (يوجد حالتان)

(ناجح رياضيات وراسب فيزياء أو ناجح فيزياء وراسب رياضيات)

يمكن استخدام طريقتين في الحل

الأولى : الاتحاد ـ التقاطع

ل($ع_1 \cup ع_2$) − ل($ع_1 \cap ع_2$) = ٠٫٩٥ − ٠٫٦٠ = ٠٫٣٥

الثانية : نستخدم قانون الفرق ل($ع_1 - ع_2$) + ل($ع_2 - ع_1$)

ل($ع_1 - ع_2$) + ل($ع_2 - ع_1$) =

ل($ع_1$) − ل($ع_1 \cap ع_2$) + ل($ع_2 - ع_1$) =

٠٫٨٥ − ٠٫٦٠ + ٠٫١٠ = ٠٫٣٥

٤) احتمال عدم نجاحه في أي من المادتين

٥) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء

٦) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء ونجاحه في الرياضيات

٧) احتمال عدم نجاحه في الفيزياء ورسوبه في الرياضيات

س٤ : نعم يتفق ١١ بتطبيق قانون الاتحاد على معطيات السؤال نجد أن الناتج في النهاية = ١

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

$ل(ف_1 \cup ف_2) = ل(ف_1) + ل(ف_2) - ل(ف_1 \cap ف_2)$

$ل(ف_1 \cup ف_2) = ٠٫٩٠ + ٠٫٦٥ - ٠٫٥٥ = ١$

س٥ :

ناجح نظري $ع_1 \leftarrow ل(ع_1) = ٠٫٨٨$

ناجح عملي $ع_2 \leftarrow ل(ع_2) = ٠٫٧٢$

ناجح فيهما معاً $ع_1 \cap ع_2 \leftarrow ل(ع_1 \cap ع_2) = ٠٫٧٠$

أ) احتمال نجاحه في الاختبار النظري فقط ؟

((ناجح نظري وغير ناجح عملي)) ((الفرق)) $ع_1 - ع_2$

$ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

$ل(ع_1 - ع_2) = ٠٫٨٨ - ٠٫٧٠ = ٠٫١٨$

حل عمر خطأ

ب) احتمال نجاحه في أحدهما على الأقل ((الاتحاد)

$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

$ل(ع_1 \cup ع_2) = ٠٫٨٨ + ٠٫٧٢ - ٠٫٧٠ = ٠٫٩٠$

س٦ : عدد طالبات الصف ((٤٠)) = $ع(\Omega)$

تلعب كرة الطاولة $ع_1 \leftarrow ل(ع_1) = \frac{٢٤}{٤٠}$

تلعب كرة الطائرة $ع_2 \leftarrow ل(ع_2) =$ ؟؟؟؟؟

يلعبن الكرة الطائرة ولا يلعبن كرة الطاولة $ع_2 - ع_1$

$ل(ع_2 - ع_1) = \frac{١٢}{٤٠}$

يلعبن كرة الطاولة ولا يلعبن كرة الطائرة $ع_1 - ع_2$

$ل(ع_1 - ع_2) = \frac{١٤}{٤٠}$

المطلوب :- احتمال أن تكون الطالبة ممن يلعبن إحدى اللعبتين على الأقل ((الاتحاد))

الحل :- لا حظ هنا عدم وجود احتمال التقاطع وكذلك احتمال الحادث الثاني ((ل$(ع_2)$))

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

لذلك نستخدم المعطيات في إيجادهما

- $ل(ع_1 - ع_2) = ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

$$ل(ع_1 \cap ع_2) - \frac{١٤}{٤٠} = \frac{١٤}{٢٠}$$

$$ل(ع_1 \cap ع_2) = \frac{٢٤}{٤٠} - \frac{١٤}{٤٠} = ل(ع_1 \cap ع_2) = \frac{١٠}{٤٠}$$

- $ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$

$$\frac{١٠}{٤٠} - ل(ع_2) = \frac{١٢}{٤٠}$$

$$\frac{١٠}{٤٠} + \frac{١٢}{٤٠} = ل(ع_2) \leftarrow ل(ع_2) = \frac{٢٢}{٤٠}$$

- احتمال أن تكون الطالبة ممن يلعبن إحدى اللعبتين على الأقل ((الاتحاد))

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = \frac{٢٤}{٤٠} + \frac{٢٢}{٤٠} - \frac{١٠}{٤٠} = \frac{٣٦}{٤٠}$$

حل أخر ⇐ ⇐

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$$

لكن $ل(ع_2 - ع_1) = ل(ع_2) - ل(ع_1 \cap ع_2)$ وبالتعويض في قانون الاتحاد نجد أن

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = ل(ع_1) + ل(ع_2 - ع_1)$$

$$ل(ع_1 \cup ع_2) = \frac{١٤}{٤٠} + \frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣٦}{٤٠}$$

س٧ :- الحوادث منفصلة (($ع(\Omega) = ٣٦٠^\circ$))

أ) $ل(F) = \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$ ب) $ل(B) = \frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$

جـ) $ل(C) = \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$

د) $ل(D) = ل(A) + ل(F) = \frac{١٠٥^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{١٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

د) $ل(F) = ل(E) + ل(F) = \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٧٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

و) ل (B) + ل (C) + ل (D) + ل (E) + ل (F) =

$$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٢٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$$

حل أخر باستخدام المتممة

$$= \frac{٣٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} - \frac{١٠٥^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{٢٥٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$$

ز) ل (B) + ل (C) + ل (D)

$$\frac{٩٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٤٠^\circ}{٣٦٠^\circ} + \frac{٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ} = \frac{١٨٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$$

أسئلة إضافية

السؤال الأول :-

حجر نرد كتب عليه الأرقام ((٠ ، ٠ ، ١ ، ١ ، ٤ ، ٥))

إذا رمي الحجر مرتين ، وتسجيل الأرقام الظاهرة على الوجه العلوي في كل رمية

١) ما عدد عناصر الفضاء العيني ؟

٢) مثل الفضاء العيني باستخدام الشبكة .

٣) احسب احتمال الحصول على عددين مجموعهما ٥ .

٤) احسب احتمال ظهور عددين متساويين .

السؤال الثاني :-

تم سؤال (٦٠) رجل متزوج السؤال التالي :

((في أخر عيد ميلاد لزوجتك ، هل أهديتها وردة أم شوكولاته))

فكانت الإجابات كما يلي :-

(٢٦) رجل أهدى زوجته شوكولاته ، (٢١) رجل أهدى زوجته وردة
(٥) رجال كل منهم أهدى زوجته شوكولاته ووردة .

إذا اختير رجل عشوائياً احسب احتمال أن يكون ممن أهدى زوجته

١) وردة فقط .

٢) شوكولاته أو وردة

٣) لا وردة ولا شوكولاته .

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

السؤال الثالث :-

في صف ما (٣٠) طالب ، (١٩) منهم يلعبون كرة القدم ، (٨) منهم يلعبون الكرة الطائرة ، (٣) منهم يلعبون اللعبتين معاً ٠

١) مثل البيانات المعطاة في السؤال باستخدام أشكال فن ٠

٢) إذا اختير طالب من هذا الصف بشكل عشوائي احسب احتمال:-

أ) أن يكون ممن يلعبون إحدى اللعبتين على الأقل ٠

ب) أن يكون ممن يلعب الكرة الطائرة فقط ٠

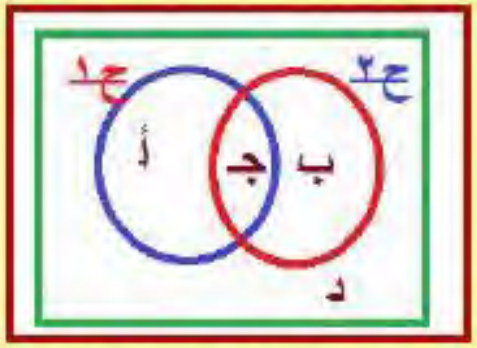
ت) أن يكون ممن يلعب لعبة واحدة فقط ٠

ث) أن يكون لا يلعب الكرة الطائرة ولا يلعب كرة القدم ٠

السؤال الرابع :-

في الشكل المجاور أذا كان

$$ل(ع_{١}) = \frac{أ+جـ}{د+ب+جـ+أ}$$



جد :- ١) $ل(ع_{١})$ ٢) $ل(ع_{١} \cup ع_{٢})$ ٣) $ل(ع_{١} \cap ع_{٢})$

٤) $ل(ع_{١} \cap \overline{ع_{٢}})$ ٥) $ل(ع_{١} - ع_{٢})$ ٦) $ل(\overline{ع_{١} \cup ع_{٢}})$

السؤال الخامس :-

سجلت إحدى القابلات في أحد المستشفيات ولادة ثلاثة أطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة ، فإذا علمت أن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات ٠

١) ما عدد عناصر الفضاء العيني ٠

٢) أكتب الفضاء العيني (Ω)

٣) احسب احتمال :-

أ) أن يكون جميع المواليد من الإناث ٠

ب) أن يكون المواليد ذكور وإناث ٠

ت) أن يكون من المواليد أنثى واحدة على الأقل ٠

ث) أن يكون من المواليد ذكر واحد على الأكثر ٠

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هيه

الاحتمال المشروط والحوادث المستقلة

الاحتمال المشروط :- هو احتمال وقوع حادث ما ، مع توافر معلومات جزئية عن نتيجة التجربة العشوائية .

إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ حادثين في فضاء عيني فإن جملة وقوع ح، بشرط وقوع ح، يعبر عنها كما يلي $(ع_1 / ع_2)$

والاحتمال $ل(ع_1 / ع_2)$

$$ل(ع_1 / ع_2) = \frac{\text{عدد النواتج الممكنة التي تحقق كلا من ح١ ، ح٢ معاً}}{\text{عدد النواتج الممكنة التي تحقق ح٢}}$$

$$ل(ع_1 / ع_2) = \frac{ل(ع_1 \cap ع_2)}{ل(ع_2)}$$

ونستنتج مما سبق أن $ل(ع_1 \cap ع_2) = ل(ع_2) \times ل(ع_1 / ع_2)$

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

معلمو و معلمات رياضيات ٢٠١٦

حل تدريب (٧ – ٢٠) ص ١٢٨

$ل(ع_1) = \frac{1}{3}$ ، $ل(ع_2) = \frac{5}{12}$ ، $ل(ع_1 \cap ع_2) = \frac{1}{9}$

المطلوب : -

١) $ل(ع_2 / ع_1)$ ٢) $ل(\overline{ع_2} / ع_1)$

الحل :-

١) $ل(ع_2 / ع_1) = \frac{ل(ع_1 \cap ع_2)}{ل(ع_1)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

٢) $ل(\overline{ع_2} / ع_1) = \frac{ل(ع_1 \cap \overline{ع_2})}{ل(\overline{ع_2})} = \frac{ل(ع_1 - ع_2)}{1 - ل(ع_2)}$

$= \frac{ل(ع_1) - ل(ع_1 \cap ع_2)}{1 - ل(ع_2)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{8}{21}$

سليمان دلدوم أبو هيه

دمج مثال (٧ – ١٩) ص ١٢٨

و تدريب (٧ – ٢٠) ص ١٢٨

==========

إن شاء الله سوف يتم النقاش بأكثر من طريقة

نرمز للكرة البيضاء (ب) ، للكرة الحمراء (ح)

ع(ب) = ٧ ، ع(ح) = ٥

العدد الكلي في الصندوق (١٢)

١)سحب كرتان عشوائياً دون إرجاع

ع(Ω) = ١٢ × ١١ = ١٣٢ (الطريقة الأولى)

(Ω)	ب، ب	ب، ح	ح، ب	ح، ح	ع(Ω)
	٦x٧	٥x٧	٧x٥	٤x٥	١٣٢

أ) احتمال الحصول على كرتين حمراوين

الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء

$$ل(ح_1 \cap ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$

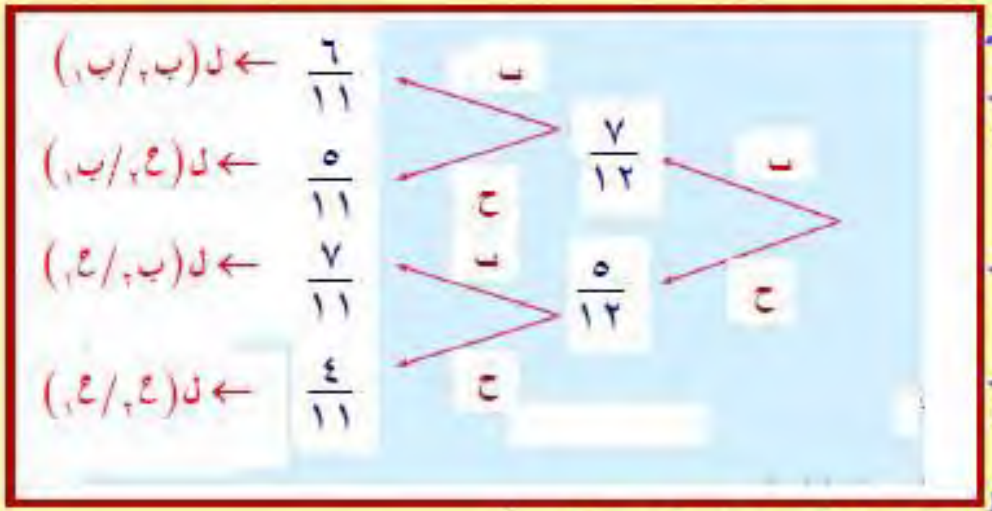
(الطريقة الثانية) لاحظ هنا أن الشرط ///

الكرة الثانية حمراء بشرط الأولى حمراء $ل(ح_2/ح_1) = \frac{٤}{١١}$

وبتطبيق القانون $ل(ح_1 \cap ح_2) = ل(ح_1) \times ل(ح_2/ح_1)$

$$ل(ح_2 \cap ح_1) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$ ((نفس الجواب))

(الطريقة الثالثة) ويمكن استخدام طريقة الشجرة في الحل كما يلي :



وبتتبع المطلوب على الشجرة نجد أن

$$ل(ح_1 و ح_2) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$$

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠

ب) احتمال الحصول على كرتين مختلفتي اللون

يوجد حالتان :-

الأولى حمراء والثانية بيضاء أو الأولى بيضاء والثانية حمراء

$$ل(ع_1 وب_2)+ل(ب_1 وع_2)=\frac{٥}{١٢}\times\frac{٧}{١١}+\frac{٧}{١٢}\times\frac{٥}{١١}=\frac{٣٥}{٦٦}$$

ونفس الطريقة باستخدام طريقة الشجرة أعلاه

الحل باستخدام القانون (الحل السابق مختصر عن حل القانون)

$$ل(ع_1 وب_2)=ل(ع_1)\times ل(ب_2/ع_1)=\frac{٧}{١١}\times\frac{٥}{١٢}=\frac{٣٥}{١٣٢}$$

$$ل(ب_1 وع_2)=ل(ب_1)\times ل(ع_2/ب_1)=\frac{٥}{١١}\times\frac{٧}{١٢}=\frac{٣٥}{١٣٢}$$

$$ل(ع_1 وب_2)+ل(ب_1 وع_2)=\frac{٣٥}{١٣٢}+\frac{٣٥}{١٣٢}=\frac{٣٥}{٦٦}$$

التدريب //

٢) سحب كرتان عشوائياً مع الإرجاع

نسحب الكرة الأولى ثم نعيدها ثم نسحب الكرة الثانية ،

(الطريقة الأولى) $ن(\Omega)=١٢\times١٢=١٤٤$

(Ω)	ب، ب	ب، ح	ح، ب	ح، ح	$ن(\Omega)$
	٧x٧	٥x٧	٧x٥	٥x٥	١٤٤

أ) احتمال الحصول على كرتين حمراوين

الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء

$$ل(ع_1 وع_2)=\frac{٥}{١٢}\times\frac{٥}{١٢}=\frac{٢٥}{١٤٤}$$

(الطريقة الثانية) /// لاحظ هنا أن الشرط ///

الكرة الثانية حمراء بشرط الأولى حمراء $ل(ع_2/ع_1)=\frac{٥}{١٢}$

وبتطبيق القانون $ل(ع_1\cap ع_2)=ل(ع_1)\times ل(ع_2/ع_1)$

$$ل(ع_1\cap ع_2)=\frac{٥}{١٢}\times\frac{٥}{١٢}=\frac{٢٥}{١٤٤}$$ ((نفس الجواب))

معلمو ومعلمات رياضيات ٢٠١٦

سليمان دلدوم أبو هبه

www.jnoe-jo.com
www.jnoe-jo.com
www.jnoe-jo.com
صقر الجنوب
المملكة الاردنية الهاشمية