أسئلة وزارية

مادة الرياضيات

الفرع الادبي

المستوى الرابع

- مصنفة حسب كل درس
- توزيع العلامات على خطوات الحل
- من 2007 الى الان

اعداد الاستاذ

عامر الصبح

0790141631

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

التكامل غير المحدود

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

جد التكامل $\int (6س - 9)\, دس$ (٣ علامات)

الحل: $\int (6س - 9)\, دس = \frac{6س^2}{2} - 9س + جـ$ (١) (١) (١)

شتوي ٢٠٠٨

اذا كان $ق(س) = \int (2س^2 - 3)\, دس$ ، فإن $ق'(2)$ تساوي:

أ) $-\frac{2}{3}$ ب) -5 جـ) 5 د) 8

جد $\int (3س^2 - 2س)\, دس$ (٣ علامات)

الحل: $\int (3س^2 - 2س)\, دس = \frac{3س^3}{3} - \frac{2س^2}{2} + جـ = س^3 - س^2 + جـ$ (١) (١) (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة:
$ع(ن) = 3ن^2 - 2ن$ ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثوانٍ
علماً بأن موقعه الابتدائي $ف(0) = 5$ م (٤ علامات)

الحل: المسافة $ف(ن) = \int ع(ن)\, دن$ (١)

$ف(ن) = \int (3ن^2 - 2ن)\, دن$

$ف(ن) = ن^3 - ن^2 + جـ$ (١)

وحيث أن $ف(0) = 5 \Leftarrow (0)^3 - (0)^2 + جـ = 5 \Leftarrow جـ = 5$ (١)

$\therefore ف(ن) = ن^3 - ن^2 + 5$

$ف(3) = (3)^3 - (3)^2 + 5 = 23$ م (١) وهي المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثوانٍ.

صيفي ٢٠٠٨

$\int (جتا س - 3)\, دس$ يساوي

أ) $جا س - 3س + جـ$ ب) $\frac{1}{2} جا 2س - 3س + جـ$

جـ) $جا س + 3س + جـ$ د) $-جا س - 3س + جـ$

جد $\int (٦س^٢ - ٢س) \, دس$ (٣ علامات)

الحل: $\int (٦س^٢ - ٢س) \, دس = \frac{٦س^٣}{٣} - \frac{٢س^٢}{٢} + جـ = ٢س^٣ - س^٢ + جـ$

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) هو (٦ - ٢س) جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(١) = ٢ (٥ علامات)

الحل: ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) = ق'(س)

ق'(س) = ٦ - ٢س

وبالتالي ق(س) = $\int$ ق'(س) . دس

$= \int (٦ - ٢س) \, دس = ٦س - \frac{٢س^٢}{٢} + جـ$

$= ٦س - س^٢ + جـ$

وحيث أن ق(١) = ٢ ⟸ ٦×١ - (١)^٢ + جـ = ٢ ⟸ ٦ - ١ + جـ = ٢

٥ + جـ = ٢ ⟸ جـ = -٣

∴ ق(س) = ٦س - س^٢ - ٣ .

تحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن) = ١٢ م/ث^٢ . جد سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هي ع(٠) = ٧ م/ث (٤ علامات)

الحل: سرعة الجسيم ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن

ع(ن) = $\int$ ١٢ دن

ع(ن) = ١٢ن + جـ

وحيث ع(٠) = ٧ ⟸ ١٢×٠ + جـ = ٧ ⟸ جـ = ٧

ع(ن) = ١٢ن + ٧

السرعة بعد مرور ثانية واحدة ع(١) = ١٢×١ + ٧ = ١٩ م/ث

شتوي ٢٠٠٩

اذا كان $\text{ص} = \int \text{هـ}^{\text{٢س}}\, \text{دس}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تساوي:

أ) $\text{٢هـ}^{\text{٢س}}$ ب) $\text{هـ}^{\text{٢س}}$ ج) $\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{جـ}$ د) $\text{٢هـ} + \text{جـ}$

جد $\int (\text{٣} - \text{٢س})\, \text{دس}$ (٣ علامات)

الحل: $\int (\text{٣} - \text{٢س})\, \text{دس} = \int \text{٣ دس} - \int \text{٢س دس} = \text{٣س} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ}$ (١) (١) (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = \text{٣}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من البدء، علماً أن موقعه الابتدائي $\text{ف}(\text{٠}) = \text{١ م}$ (٥ علامات)

الحل: المسافة التي يقطعها الجسيم $\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{دن}$

$= \int \text{٣}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}\, \text{دن}$ } إما كتب ناتج (١)

$= \frac{\cancel{\text{٣}}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٣}}}{\cancel{\text{٣}}} + \text{جـ}$ (١)

$\therefore \text{ف}(\text{ن}) = (\text{ن}+\text{١})^{\text{٣}} + \text{جـ}$

لكن $\text{ف}(\text{٠}) = \text{١} \Leftarrow (\text{٠}+\text{١})^{\text{٣}} + \text{جـ} = \text{١} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٠}$ (١)

$\therefore \text{ف}(\text{ن}) = (\text{ن}+\text{١})^{\text{٣}}$ (١)

$\text{ف}(\text{٢}) = (\text{٢}+\text{١})^{\text{٣}} = \text{٣}^{\text{٣}} = \text{٢٧ م}$ (١)

**ملاحظة: اذا طلب الطالب $(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}$ واجرى التكامل وأوجد $\text{ف}(\text{ن})$ بأخذ الطلاب كاملة مع ملاحظة أن فيه $\text{جـ} = \text{١}$ في هذه الحالة

حيث $(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}} = \text{ن}^{\text{٢}} + \text{٢ن} + \text{١} \Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \int (\text{ن}^{\text{٢}} + \text{٢ن} + \text{١})\, \text{دن}$

$= \text{ن}^{\text{٣}} + \text{٢ن}^{\text{٢}} + \text{٣ن} + \text{جـ}$

$\text{ف}(\text{٠}) = \text{١} \Leftarrow \text{٠} + \text{٠} + \text{٠} + \text{جـ} = \text{١} \Leftarrow \text{جـ} = \text{١}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{\text{٣}} + \text{٢ن}^{\text{٢}} + \text{٢ن} + \text{١}$

$\text{ف}(\text{٢}) = \text{٢}^{\text{٣}} + \text{٢}(\text{٢})^{\text{٢}} + \text{٢}(\text{٢}) + \text{١}$

$= \text{٢٧ م}$

صيف ٢٠٠٩

اذا علمت أن ل ثابت فإن ∫ ل دس يساوي:

أ) س + جـ (ب) ل س + جـ جـ) $\frac{ل^2}{2}$ + جـ د) $\frac{ل س^2}{2}$ + جـ

∫ (١ − جتا س) دس هو:

أ) س + جا س + جـ (ب) س − جا س + جـ

جـ) جا س + جـ د) − جا س + جـ

∫ س² (٨ س + ٣) دس (٤ علامات)

الحل: ∫ س² (٨ س + ٣) دس = ∫ (٨ س³ + ٣ س²) دس (١) (١) (١)

= $\frac{٨ س^4}{4}$ + $\frac{٣ س^3}{3}$ + جـ = ٢ س⁴ + س³ + جـ

اذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع س ثلاجة من إنتاج مصنع هو (٤ علامات)
د(س) = ٣ س² − ٨ س + ٢٠٠ دينار، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٢٠ ثلاجة.

شتوي ٢٠١٠

اذا كان ص = ∫ ق(س) دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ يساوي:

أ) صفر ب) ق(س) (جـ) ق′(س) د) ق″(س)

∫ $\frac{1}{س}$ دس يساوي:

(أ) لو$_{هـ}$ |س| + جـ ب) $\frac{-1}{س^2}$ + جـ جـ) $\frac{س^2}{2}$ + جـ د) هـ^س + جـ

صيف ٢٠١٠

∫ جاس دس يساوي:

أ) جا²س/٢ + جـ ب) جتاس + جـ ج) −جاس + جـ د) −جتاس + جـ

اذا كانت ص = ∫ 1/س² دس ، س ≠ ٠ ، فإن دص/دس تساوي:

أ) لو₂|س| + جـ ب) −1/س² ج) 1/س د) صفر

∫ (س+١)(س−٣) دس (٥ علامات)

الحل: ∫ (س+١)(س−٣) دس = ∫ (س² − ٢س − ٣) دس (١)

= س³/٣ − ٢س²/٢ − ٣س + جـ (١) (١) (١) (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي

ع(ن) = (٦ن + ٣) م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوانٍ

علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٢م (٥ علامات)

الحل: المسافة التي يقطعها الجسيم ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ (٦ن + ٣) دن

= ٦ن²/٢ + ٣ن + جـ = ٣ن² + ٣ن + جـ

وحيث أن ف(٠) = ٢ ⟸ ٣(٠)² + ٣(٠) + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٢

∴ ف(ن) = ٣ن² + ٣ن + ٢

المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثوانٍ ف(٣) = ٣(٣)² + ٣(٣) + ٢

= ٢٧ + ٩ + ٢ = ٣٨م

شتوي ٢٠١١

$\int س^3 \, دس$ يساوي:

أ) $\frac{3س^2}{2} + جـ$ ب) $س + جـ$ ج) $3س^2 + جـ$ د) $\frac{س^4}{4} + جـ$

اذا كان $ق(س) = \int س^2 \, دس$ ، فإن $ق'(س)$ تساوي:

أ) $2س$ ب) $\frac{س^3}{3}$ ج) $3س^3$ د) $س^2$

صيف ٢٠١١

اذا كان $ق(س) = \int (4س^3 + 2س) \, دس$ ، فإن $ق'(1)$ تساوي:

أ) ٢ ب) ٦ ج) ١٢ د) ١٤

جـ $\int (قا^2 س + \frac{3}{س}) \, دس$ ، $س \neq 0$ (٣ علامات)

الحل: $\int (قا^2 س + \frac{3}{س}) \, دس = \int قا^2 س \, دس + \int \frac{3}{س} \, دس$ (١) (١) (١)

$= ظا س + 3 لو_هـ |س| + جـ$

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(4س^3 - 6س)$ فجد قاعدة الاقتران $ق$ علماً بأن منحنى الاقتران $ق$ يمر بالنقطة $(2، 5)$ (٤ علامات).

الحل: $ق'(س) = 4س^3 - 6س$ (١)

$\therefore ق(س) = \int ق'(س) \, دس$ (١)

$= \int (4س^3 - 6س) \, دس = \frac{4س^4}{4} - \frac{6س^2}{2} + جـ$

$= س^4 - 3س^2 + جـ$ (١)

وحيث أن $ق(س)$ يمر بالنقطة $(2، 5)$ $\Leftarrow ق(2) = 5 \Leftarrow 2^4 - 3 \times 2^2 + جـ = 5$ (١)

$\Leftarrow جـ = 1$

$\therefore ق(س) = س^4 - 3س^2 + 1$

محتوى ٢٠١٢

١) $\int \sqrt{س^{٣}}\, دس$ ، س > ٠ يساوي:

أ) $\frac{٥}{٢} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$ ب) $\frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$ ج) $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + جـ$ د) $\frac{٢}{٣} س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

٢) $\int (-جتا س + ١)\, دس$ يساوي:

أ) $جتا س - س + جـ$ ب) $-جتا س + س + جـ$

ج) $-جتا س - س + جـ$ د) $جتا س + س + جـ$

جـ) $\int \left(س^{-٥} + \frac{٢}{س} + هـ^{س}\right) دس$ ، س ≠ ٠ (٤ علامات)

الحل: $\int \left(س^{-٥} + \frac{٢}{س} + هـ^{س}\right) دس = \int س^{-٥}\, دس + \int \frac{٢}{س}\, دس + \int هـ^{س}\, دس$

$= \frac{س^{-٤}}{-٤} + ٢ لو|س| + هـ^{س} + جـ$

١ ١ ١ ١

اذا كان تسارع جسيم ت بعد مرور ن من الثواني يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٨ن م/ث²
جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٣ م/ث. (٥ علامات)

الحل: السرعة ع(ن) = $\int$ ت(ن) . دن ١

ع(ن) = $\int ٨ن\, دن = \frac{٨ن^{٢}}{٢} + جـ = ٤ن^{٢} + جـ$ ١

وحيث ان ع(٠) = ٣ ⟸ ٣ = ٤(٠)² + جـ ⟸ جـ = ٣ ١

∴ ع(ن) = ٤ن² + ٣ ١

صيف ٢٠١٢

اذا كان ق(س) = ∫ ٣ دس ، فإن ق'(س) تساوي:

أ) ٣س ب) ٣ ج) $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} د) صفر

∫ $\frac{١}{س}$ دس ، س ≠ ٠ تساوي:

أ) س$^{-١}$ + جـ ب) لو$_{هـ}$|س| + جـ ج) $\frac{-١}{س^{٢}}$ + جـ د) $\frac{-١}{س}$ + جـ

جـ) ∫ ($\frac{قا^{٢}س}{٢}$ − ٢س + ١٢) دس (٤ علامات)

الحل: ∫ ($\frac{قا^{٢}س}{٢}$ − ٢س + ١٢) دس = ∫ $\frac{قا^{٢}س}{٢}$ دس − ∫ ٢س دس + ∫ ١٢ دس

= $\frac{١}{٢}$ ظاس − س^{٢} + ١٢س + جـ

(١) (١) (١) (١)

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع(ن) معطاه بالعلاقة ع(ن) = (٦ن + ٨) م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة، علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ٣م . (٣ علامات).

الحل: ف(ن) = ∫ ع(ن) دن (١)

= ∫ (٦ن + ٨) دن = ٣ن^{٢} + ٨ن + جـ (١)

وحيث أن ف(٠) = ٣ ⟸ ٣(٠)^{٢} + ٨(٠) + جـ = ٣ ⟸ جـ = ٣ (١)

∴ ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٨ن + ٣ .

شتوي ٢٠١٣

∫ ٤ قا² س دس يساوي :

(أ) ٤ ظا س + جـ ب) ظا س + جـ ج) ٤ قا² س + جـ د) ٤ ظا² س + جـ

جد ∫ (٦ س² + ٣ هـ^س − جا س) دس (٣ علامات)

الحل : ∫ (٦ س² + ٣ هـ^س − جا س) دس = ∫ ٦ س² دس + ∫ ٣ هـ^س دس − ∫ جا س دس

= ٣ س³ + ٣ هـ^س + جتا س + جـ

(١) (١) (١)

يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ثابتة (ن) فتكون ع(ن) = ٨ م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هـ(٠) = ٢ م/ث وموضعه الابتدائي ف(٠) = ١٠ م (٥ علامات)

الحل : هـ(ن) = ∫ ع(ن) دن (١)

= ∫ ٨ دن = ٨ ن + جـ₁ (١)

وحيث أن هـ(٠) = ٢ ⟸ ٨(٠) + جـ₁ = ٢ ⟸ جـ₁ = ٢ (١)

∴ هـ(ن) = ٨ ن + ٢

ف(ن) = ∫ هـ(ن) دن (١)

= ∫ (٨ ن + ٢) دن = ٤ ن² + ٢ ن + جـ₂

وحيث أن ف(٠) = ١٠ ⟸ ٤(٠)² + ٢(٠) + جـ₂ = ١٠ ⟸ جـ₂ = ١٠ (١)

∴ ف(ن) = ٤ ن² + ٢ ن + ١٠

صيفي ٢٠١٣

اذا كان ق(س) = ∫ (س² + ٥ س) دس ، فإن ق′(−١) تساوي :

الحل : ق′(س) = س² + ٥ س

ق′(−١) = ١ − ٥ = −٤

$\int \frac{٣}{س^٢}$ دس يساوي :

الحل: $\int \frac{٣}{س^٢}$ دس $= \int ٣س^{-٢}$ دس $= س^{-٣} + جـ$.

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $(٣س^٢ - ١)$ فجد قاعدة الاقتران ق ، علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٤). (٥ علامات)

الحل: ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) = قَ(س)

قَ(س) = $٣س^٢ - ١$ ①

ق(س) = $\int (٣س^٢ - ١)$ دس $= س^٣ - س + جـ$ ①

لكن ق(س) يمر بالنقطة (٢، ٤) أي أن ق(٢) = ٤ ⟸ $٢^٣ - ٢ + جـ = ٤$ ①

⟸ $٦ + جـ = ٤$ ⟸ $جـ = -٢$

∴ ق(س) = $س^٣ - س - ٢$ ①

شتوي ٢٠١٤

تتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاه بالعلاقة ع(ن) = (٤ن + ٦) م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني منذ بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ١٠م (٤ علامات).

الحل: ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن

$= \int (٤ن + ٦)$ دن $= ٢ن^٢ + ٦ن + جـ$

وحيث ان ف(٠) = ١٠ ⟸ $٢(٠)^٢ + ٦(٠) + جـ = ١٠$ ⟸ جـ = ١٠

∴ ف(ن) = $٢ن^٢ + ٦ن + ١٠$

ف(٣) = $٢(٣)^٢ + ٦ \times ٣ + ١٠ = ٤٦$ م .

تتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت ت(ن) = ٦ م/ث^٢ ، إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٨ م/ث ، فإن سرعة الجسيم بعد ن ثانية تقع بالعلاقة:

أ) ع(ن) = ٨ن − ٦ ب) ع(ن) = ٨ن + ٦ جـ) ع(ن) = ٦ن − ٨ د) ع(ن) = ٦ن + ٨

صيف ٢٠١٤

جد $\int \left(3\,\text{قا}^2 س + \frac{5}{س} - \text{جا}\, س\right) دس$

الحل: $\int \left(3\,\text{قا}^2 س + \frac{5}{س} - \text{جا}\, س\right) دس = \int 3\,\text{قا}^2 س\, دس + \int \frac{5}{س}\, دس - \int \text{جا}\, س\, دس$

$= 3\,\text{ظا}\, س + 5\,\text{لو}_{هـ}|س| + \text{جتا}\, س + جـ$

(١) (١) (١)

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\left(2 - \frac{1}{س^2}\right)$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$، فجد قاعدة الاقتران ق. (٤ علامات)

الحل: ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) = ق'(س) (١)

$ق(س) = \int ق'(س)\, دس$ (١)

$= \int \left(2 - \frac{1}{س^2}\right) دس = 2س + \frac{1}{س} + جـ$ (١)

وحيث ان ق(س) يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ⟸ $ق\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ⟸ $2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + جـ = 1$ (١)

$1 + 2 + جـ = 1$

$جـ = -2$

$\therefore ق(س) = 2س + \frac{1}{س} - 2$. (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة $ع(ن) = 6(ن+2)^2$ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علماً ان موقعه ابتدائياً ف(٠) = ٥م (٥ علامات).

الحل: $ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int 6(ن+2)^2\, دن$

$= 6\int (ن^2 + 4ن + 4)\, دن$ (١)

$= 6\left(\frac{1}{3}ن^3 + 2ن^2 + 4ن + جـ_1\right)$ (١)

$= 2ن^3 + 12ن^2 + 24ن + جـ$ (١)

$ف(0) = 5 \Leftarrow جـ = 5$ (١)

$ف(ن) = 2ن^3 + 12ن^2 + 24ن + 5$ (١)

$ف(2) = 2(2)^3 + 12(2)^2 + 24 \times 2 + 5 = 117$ م (١)

شتوي ٢٠١٥

جد $\int \left(\text{قا}^2 س - 2\,\text{جتا}\,س + \frac{1}{س}\right) دس$

الحل: $\int \left(\text{قا}^2 س - 2\,\text{جتا}\,س + \frac{1}{س}\right) دس = \int \text{قا}^2 س\, دس - 2\int \text{جتا}\,س\, دس + \int \frac{1}{س}\, دس$

$= \text{ظا}\,س - 2\,\text{جا}\,س + \text{لو}_{هـ}|س| + جـ$ (١) (١) (١)

اذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يُعطى بالعلاقة $ت(ن) = ٦ن$ م/ث^2 جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم $ع(٠) = ٢$ م/ث وموقعه الابتدائي $ف(٠) = ١٢$ م (٥ علامات)

الحل: $ع(ن) = \int ت(ن)\, دن = \int ٦ن\, دن = ٣ن^2 + جـ_1$ (١)

$ع(٠) = ٢ \Leftarrow ٣(٠)^2 + جـ_1 = ٢ \Leftarrow جـ_1 = ٢$ (١)

$\therefore ع(ن) = ٣ن^2 + ٢$

$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int (٣ن^2 + ٢)\, دن = ن^3 + ٢ن + جـ_2$ (١)

$ف(٠) = ١٢ \Leftarrow (٠)^3 + ٢(٠) + جـ_2 = ١٢ \Leftarrow جـ_2 = ١٢$ (١)

$ف(ن) = ن^3 + ٢ن + ١٢$ (١)

صيفي ٢٠١٥

جد $\int \frac{س^2 - \sqrt{س}\,\text{جا}\,س}{\sqrt{س}}\, دس$

الحل: $\int \frac{س^2 - \sqrt{س}\,\text{جا}\,س}{\sqrt{س}}\, دس = \int \left(\frac{س^2}{\sqrt{س}} - \frac{\cancel{\sqrt{س}}\,\text{جا}\,س}{\cancel{\sqrt{س}}}\right) دس$

$= \int \frac{س^2}{س^{\frac{1}{2}}}\, دس - \int \text{جا}\,س\, دس$

$= \int س^{\frac{3}{2}}\, دس - \int \text{جا}\,س\, دس$

$= \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + \text{جتا}\,س + جـ$ (١) (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت يعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ م/ث² ، ن ≥ صفر
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية
للجسيم ع(٠) = ٤ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٠ م (٥ علامات).

الحل: ع(ن) = ∫ ت(ن) دن = ∫ ٦ دن = ٦ن + جـ ①

ع(٠) = ٤ ⟸ ٦(٠) + جـ = ٤ ⟸ جـ = ٤ ①

∴ ع(ن) = ٦ن + ٤

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫ (٦ن + ٤) دن = ٣ن² + ٤ن + جـ ①

ف(٠) = ١٠ ⟸ ٣(٠)² + ٤(٠) + جـ = ١٠ ⟸ جـ = ١٠ ①

∴ ف(ن) = ٣ن² + ٤ن + ١٠

ف(٢) = ٣(٢)² + ٤(٢) + ١٠ = ٣٠ م ①

شتوي ٢٠١٦

جد ∫ (قا²س/٤ + ٥/س − هـ^س) دس

الحل: ∫ (قا²س/٤ + ٥/س − هـ^س) دس = ١/٤ ∫ قا²س دس + ٥ ∫ ١/س دس − ∫ هـ^س دس

= ١/٤ ظاس + ٥ لوا|س| − هـ^س + جـ

① ① ①

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة
ع(ن) = ٦(ن + ١)² م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة
علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٨ م (٤ علامات).

الحل: ف(ن) = ∫ ع(ن) دن = ∫ ٦(ن + ١)² دن = ٢(ن + ١)³ + جـ ①

ف(٠) = ٨ ⟸ ٢(٠ + ١)³ + جـ = ٨ ⟸ جـ = ٦ ①

① ①

ف(ن) = ٢(ن + ١)³ + ٦

ف(٢) = ٢(٢ + ١)³ + ٦ = ٦٠ م ①

صيف ٢٠١٦م

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{3س - س^3}{س^2}$

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١، ٦). (٤ علامات).

الحل: ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) = قَ(س)

$قَ(س) = \frac{3س - س^3}{س^2} = \frac{3}{س^2} - 1$ (١)

$ق(س) = \int قَ(س) \cdot دس = \int \left(\frac{3}{س^2} - 1\right) دس = \frac{-3}{س} - س + جـ$ (١) (١)

وحيث أن ق(س) يمر بالنقطة (-١، ٦) ⇐ ق(-١) = ٦

$\Leftarrow \frac{-3}{-1} - (-1) + جـ = 6 \Leftarrow جـ = 2$ (١)

∴ $ق(س) = \frac{-3}{س} - س + 2$

تتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته (ت) بعد (ن) ثانية تعطى بالقاعدة ت(ن) = ١٢ م/ث، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية منذ بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٤ م/ث، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٦ م (٤ علامات).

الحل: $ع(ن) = \int ت(ن)\, دن = \int ١٢\, دن = ١٢ن + جـ_1$ (١)

$ع(٠) = ١٢ \times ٠ + جـ_1 = ٤ \Leftarrow جـ_1 = ٤$

$ع(ن) = ١٢ن + ٤$ (١)

$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int (١٢ن + ٤)\, دن = ٦ن^2 + ٤ن + جـ_2$ (١)

$ف(٠) = ٦ \times ٠ + ٤ \times ٠ + جـ_2 = ٦ \Leftarrow جـ_2 = ٦$

$ف(ن) = ٦ن^2 + ٤ن + ٦$ (١)

شتاء ٢٠١٧م

تتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة ع(ن) = ٦(ن+١)^٢ م/ث

جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين منذ بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٩ م. (٥ علامات).

الحل: $ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int ٦(ن+١)^2\, دن = 2(ن+١)^3 + جـ$

$ف(٠) = ٩ \Leftarrow 2(٠+١)^3 + جـ = ٩ \Leftarrow جـ = ٧$

∴ $ف(ن) = 2(ن+١)^3 + ٧$

$ف(2) = 2(2+١)^3 + ٧ = ١٦١$ م

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

التكامل المحدود

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

اذا علمت ان $\int_{٠}^{هـ} ٣س^٢ دس = ٨$ ، فجد قيمة هـ . (٤ علامات)

الحل: $\int_{٠}^{هـ} ٣س^٢ دس = \left[\frac{\cancel{٣}س^٣}{\cancel{٣}}\right]_{٠}^{هـ} = ٨$ (ج) $\Leftarrow$ $هـ^٣ - ٠ = ٨$ (أ)

$\Leftarrow$ $هـ = ٢$ (أ)

صيفي ٢٠٠٧

اذا كان $\int_{٢}^{جـ} ٧ دس = ٢٤$ ، فإن قيمة جـ تساوي :

(أ) ٤ ب) ٦ جـ) ٧ د) ٨

اذا كان ق(س) = ٣س هي مشتقة الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [٢، ٤] فإن قيمة ق(٤) − ق(٢) تساوي :

أ) ٢٤ ب) ٢٠ جـ) ١٦ (د) ١٨

شتوي ٢٠٠٨

اذا كان ق(١) = ١٠ ، ق(٣) = ٦ ، فجد $\int_{١}^{٣} ق'(س) دس$.

أ) ٢ (ب) −٤ جـ) ٤ د) ١٦

شتوي ٢٠١١

اذا كان $\int_{٠}^{أ} ٧ دس = ٢١$ ، فجد قيمة الثابت أ (٤ علامات)

الحل: $\int_{٠}^{أ} ٧ دس = ٧(أ - ٠) = ٢١$ (أ) $\Leftarrow$ $٧أ - ٠ = ٢١$ (أ)

$\Leftarrow$ $أ = ٣$ (أ)

شتوي ٢٠١٢

اذا علمت أن ق'(س) متصل وكان ق(١) = −٣ ، ق(٢) = ١ ، فإن $\int_{١}^{٢} ق'(س) دس$ يساوي :

أ) −٢ ب) ٢ (جـ) ٤ د) −٢

صيفي ٢٠١٢

قيمة $\int_{١}^{هـ} هـ^{س} دس$ تساوي :

أ) هـ ب) ١ − هـ (جـ) هـ − ١ د) ١

شتوي ٢٠١٣

اذا كانت ق(١) = -٦ ، ق(٣) = ٨ ، فإن $\int_{١}^{٣}$ ق'(س) دس تساوي :

أ) صفر ب) ٢ ج) -١٤ د) ١٤

$\int_{١}^{٠}$ √س دس تساوي :

أ) ١ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) ٢

صيفي ٢٠١٣

اذا كانت $\int_{١}^{جـ}$ ٣ دس = -٦ فإن قيمة الثابت جـ تساوي :

أ) -٣ ب) ٣ ج) -١ د) ١

شتوي ٢٠١٤

(٤ علامات)

جد $\int_{١}^{٠}$ (√س + ٣س²) . دس

الحل: $\int_{١}^{٠}$ (√س + ٣س²) دس = $\frac{٢}{٣}$ س^$\frac{٣}{٢}$ + س^٣]_١^٠ = $\frac{٢}{٣}$ × ١ + ١ − صفر = $\frac{٢}{٣}$ + ١

صيفي ٢٠١٤

اذا كانت جـ عدداً ثابتاً وكانت ق(جـ) = ١٢ ، ق(٠) = ٨ ، $\int_{٠}^{جـ}$ (ق'(س) − هـ^س) . دس = ٠

فجد قيمة هـ^جـ

(٤ علامات)

الحل: $\int_{٠}^{جـ}$ (ق'(س) − هـ^س) دس = (ق(س) − هـ^س)]_٠^جـ = ٠

(ق(جـ) − هـ^جـ) − (ق(٠) − ١) = ٠

١٢ − هـ^جـ − ٨ + ١ = ٠ ⇐ هـ^جـ = ٥

شتوي ٢٠١٥

اذا كان ق(س) متصلاً وكانت ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ١٢ ، $\int_{١}^{٢}$ أ ق'(س) . دس = ١٦ ،

أ ثابت ، فجد قيمة أ

(٤ علامات)

الحل: $\int_{١}^{٢}$ أ ق'(س) . دس = أ $\int_{١}^{٢}$ ق'(س)] = أ ق(س)

⇐ أ (ق(٢) − ق(١)) = ١٦

أ (١٢ − ٤) = ١٦

أ (٨) = ١٦ ⇐ أ = ٢

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

تمرين ٢٠١٧

اذا كان ق اقترانا متصلا وكان ق(١) = ٣ ، ق(جـ) = ٨ ، $\int_{١}^{جـ} (ق'(س) - ٢س) \, دس = جـ$

فجد قيم الثابت جـ (٤ علامات).

الحل: $\int_{١}^{جـ} (ق'(س) - ٢س) \, دس = ق(س) - س^٢ \Big|_{١}^{جـ} = (ق(جـ) - جـ^٢) - (ق(١) - ١) = جـ$ (١) (١)

$= ٨ - جـ^٢ - ٣ + ١ = جـ$

$\Leftarrow -جـ^٢ + ٦ - جـ = ٠$ (١)

$\Leftarrow جـ^٢ + جـ - ٦ = ٠$

$(جـ + ٣)(جـ - ٢) = ٠$ (١)

$جـ = -٣ \ ، \ جـ = ٢$

الوحدة:

الدرس:

الصفحة: ( )

عامر الصبح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

خواص التكامل المحدود

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

اذا علمت أن $\int_{٢}^{٢} (٦س - ٥)\, دس$ فإن $ق'(١)$ تساوي :

أ) -٢ ب) صفر ج) ١ د) ٦

اذا علمت أن $\int_{٢}^{٢} (ق(س) + ٥)\, دس = ١٦$ ، فإن $\int_{٢}^{٢} ق(س)\, دس$ يساوي :

أ) ١٧ ب) ١١ ج) -٦ د) ٦

اذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس = ١$ ، فإن $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$ يساوي :

أ) ٥ ب) ٤ ج) ٣ د) -٣

صيفي ٢٠٠٧

اذا كان $ق(س) = \int_{٢}^{٢} (٣س^٢ - ١)\, دس$ ، فإن $ق'(١)$ تساوي :

أ) صفر ب) ٢ ج) ٦ د) ١٢

اذا علمت أن $\int_{٣}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ ، فإن $\int_{١}^{٣} (٦ - ق(س))\, دس$ يساوي :

أ) ١٠ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٢

جد $\int_{١}^{٣} (٣س^٢ + ٥)\, دس$ (٤ علامات).

الحل : $\int_{١}^{٣} (٣س^٢ + ٥)\, دس = \left. \frac{٣س^٣}{٣} + ٥س \right|_{١}^{٣} = ((٣)^٣ + ٥(٣)) - ((١)^٣ + ٥(١))$

$= ٤٢ - ٦ = ٣٦$

شتوي ٢٠٠٨

اذا كان $\int_{١}^{ك} ٢س\, دس =$ صفر فإن قيمة ك تساوي :

أ) -١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

اذا علمت أن $\int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} ٦ق(س)\, دس = ١٢$ ، فإن $\int_{٣}^{٢} ق(س)\, دس$ يساوي :

أ) -١٦ ب) ١٦ ج) ٦ د) -٦

(٤ علامات)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^3 - 4 & ، 0 \le س \le 2 \\ 2س & ، 2 < س \le 4 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^4 ق(س)\,دس$

الحل: $\int_0^4 ق(س)\,دس = \int_0^2 ق(س)\,دس + \int_2^4 ق(س)\,دس$

$= \int_0^2 (س^3 - 4)\,دس + \int_2^4 2س\,دس$ (١)

$= \left[\frac{س^4}{4} - 4س\right]_0^2 + \left[س^2\right]_2^4 = (4-8) + (16-4) = 8$ (١) (١) (١)

صيف ٢٠٠٨

إذا كان $\int_1^2 3\,ق(س)\,دس = 12$ ، فإن قيمة $\int_2^1 ق(س)\,دس$ تساوي:

(أ) -4 ب) 4 جـ) 3 د) -3

شتوي ٢٠٠٩

$\int_2^0 (3س^2 - 2س + 5)\,دس$ يساوي:

أ) 22 ب) 14 جـ) 10 (د) صفر

إذا علمت أن $\int_{-2}^{0} ق(س)\,دس = 8$ فإن $\int_{0}^{-2} 2ق(س)\,دس$ يساوي:

(أ) -16 ب) -8 جـ) 8 د) 16

صيف $\int_1^{جـ} (2س + 3)\,دس = 6$ ، فجد قيمة جـ (٥ علامات).

الحل: $\int_1^{جـ} (2س + 3)\,دس = \left[\frac{2س^2}{2} + 3س\right]_1^{جـ} = (جـ^2 + 3جـ) - (1+3) = 6$ (١)

$\Leftarrow جـ^2 + 3جـ - 4 = 6$

$جـ^2 + 3جـ - 10 = 0$ (١)

$(جـ + 5)(جـ - 2) = 0$

$جـ = -5 ، جـ = 2$ (٢)

صيفي ٢٠٠٩

قيمة $\int_{٤}^{٢} (س^٣ + ٦س - ٢)\, دس$ تساوي:

(أ) صفر ب) ٤ ج) ٨ د) ١٤

اذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٦$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس = ٢$ فإن قيمة $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$ تساوي:

أ) -٤ ب) ٨ ج) ١٢ (د) ٤

شتوي ٢٠١٠

اذا علمت أن $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \frac{٣}{٤}$ ، فإن $\int_{ب}^{أ} ق(س)\, دس$ يساوي:

أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $\frac{-٤}{٣}$

اذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٥$ ، فإن $\int_{١}^{٣} (ق(س) - ٢)\, دس$ يساوي:

أ) ٩ ب) ٣ ج) ١ (د) -١

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٢ & ، ١ \le س \le ٢ \\ ٢س + ٦ & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$ فاحسب $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس$ (٦ علامات)

الحل: $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{١}^{٢} (٣س^٢ - ٢)\, دس + \int_{٢}^{٤} (٢س + ٦)\, دس$ (١) (١)

$= \left(س^٣ - ٢س\right)\Big|_{١}^{٢} + \left(س^٢ + ٦س\right)\Big|_{٢}^{٤}$ (١) (١)

$= (٨ - ٤) - (١ - ٢) + (١٦ + ٢٤) - (٤ + ١٢) = ٢٩$ (١) (١)

صيفي ٢٠١٠

اذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -٣$ ، $\int_{ب}^{ج} ق(س)\, دس = ٤$ ، فإن $\int_{أ}^{ج} ق(س)\, دس$ يساوي:

أ) ١ (ب) -٧ ج) -١ د) ٧

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} هـ^{س} & ، ١ \le س \le ٣ \\ س & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$ ، جد $\int_{١}^{٥} ق(س) . دس$ (٥ علامات).

الحل: $\int_{١}^{٥} ق(س) . دس = \int_{١}^{٣} هـ^{س} . دس + \int_{٣}^{٥} س . دس$ (١)

$= هـ^{س} \Big|_{١}^{٣} + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{٣}^{٥} = هـ^{٣} - هـ^{١} + \frac{٢٥}{٢} - \frac{٩}{٢}$ (١) (١) (١)

شتوي ٢٠١١

إذا كانت $\int_{٢}^{٤} ق(س) . دس = ٦$ ، فإن $\int_{٤}^{٢} ق(س) دس$ يساوي:

أ) صفر ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) -٦ د) $\frac{-١}{٦}$

$\int \frac{١}{س^٢} دس$ يساوي:

(أ) صفر ب) $\frac{-١}{س^٢}$ ج) لو|س| + جـ د) $س^{-١}$ + جـ

جد $\int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + س) دس$ (٥ علامات)

الحل: $\int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + س) دس = \int_{١}^{٤} س^{\frac{١}{٢}} دس + \int_{١}^{٤} س دس$

$= \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \Big|_{١}^{٤} + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤} = (\frac{٢}{٣} - ٠) + (\frac{١٦}{٢} - \frac{١}{٢}) = \frac{٧}{٣}$ (١) (١) (١) (١)

اذا كانت $\int_{٠}^{أ} ٧ . دس = ٢١$ ، فجد قيمة الثابت أ (٤ علامات).

الحل: $\int_{٠}^{أ} ٧ . دس = ٧ (أ - ٠) = ٢١ \Leftarrow ٧أ - ٠ = ٢١$ (١) (١) (١)

$\Leftarrow أ = ٣$ (١)

صيفي ٢٠١١

اذا كانت $\int_{٢}^{٤} \frac{ق(س)}{٢} دس = ٦$ ، فجد $\int_{٢}^{٤} (٣س^٢ + ٣ق(س)) دس$ (٥ علامات)

الحل: $\int_{٢}^{٤} \frac{ق(س)}{٢} دس = ٦ \Leftarrow \frac{١}{٢} \int_{٢}^{٤} ق(س) . دس = ٦ \Leftarrow \int_{٢}^{٤} ق(س) دس = ١٢$ (١)

$\int_{٢}^{٤} (٣س^٢ + ٣ق(س)) دس = \int_{٢}^{٤} ٣س^٢ . دس + ٣ \int_{٢}^{٤} ق(س) . دس$ (١)

$= س^٣ \Big|_{٢}^{٤} + ٣ \times ١٢ = (٨ - ٠) + ٣٦ = ٤٤$ (١) (١) (١)

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

إذا كان $\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس = ٥$ ، $\int_{٢}^{٣} ٣ق(س)\,دس = ٩$ ، فإن $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس$ يساوي:

أ) ٤ ب) ٢ ج) -٢ د) -٤

شتوي ٢٠١٢

إذا علمت أن ق(س) متصل وكان ق(١) = -٣ ، ق(٢) = ١ ، فإن $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس$ يساوي:

أ) -٤ ب) ٢ ج) ٤ د) -٢

إذا كان $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس = ١٠$ ، فإن $\int_{٠}^{٣} (٢س + ق(س))\,دس$ يساوي:

أ) ١٦ ب) ١٩ ج) ١٢ د) ٩

إذا كان $\int_{-١}^{١} ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{٣}^{١} ق(س)\,دس = -٢$ ، فجد $\int_{-١}^{٣} (ق(س) + ٥)\,دس$ (٥ علامات)

$\int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{-١}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس$ (١)

$= ٦ + ٢$ (١) $= ٨$

$\int_{-١}^{٣} (ق(س) + ٥)\,دس = \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{٣} ٥\,دس$ (١)

$= ٨ + ٥س \Big|_{-١}^{٣}$ (١)

$= ٨ + (٥ \times ٣ - ٥ \times -١)$ (١) $= ٢٨$

صيفي ٢٠١٢

إذا كان $\int_{٦}^{٧} ٢ق(س)\,دس = ١٠$ ، فإن $\int_{٧}^{٦} ق(س)\,دس$ يساوي:

أ) -١٠ ب) ٥ ج) ١٠ د) -٥

إذا كان $\int_{٣}^{٩} \frac{ق(س)}{٢}\,دس = ٤$ ، $\int_{٩}^{٥} ق(س)\,دس = ١٢$ ، فجد قيمة $\int_{٣}^{٩} (ق(س) - ٧)\,دس$ (٥ علامات)

$\int_{٣}^{٩} (ق(س) - ٧)\,دس = \int_{٣}^{٩} ق(س)\,دس - \int_{٣}^{٩} ٧\,دس$ (١)

$\int_{٣}^{٩} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٥}^{٩} ق(س)\,دس = ٨ + -١٢ = -٤$ (١) (١)

$\int_{٣}^{٩} (ق(س) - ٧)\,دس = -٤ - ٧(٩ - ٣) = -٤ - ٢٤ = -٢٨$ (١) (١)

شتوي ٢٠١٣ (٦ علامات)

اذا كان $\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6$ ، $\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ق(س)\,دس = 4$ ، فجد $\int_{-2}^{5} (3ق(س) + ق(س) - س)\,دس$

الحل: $\int_{-2}^{5} (3ق(س) + ق(س) - س)\,دس = 3\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس + \int_{-2}^{5} ق(س)\,دس - \int_{-2}^{5} س\,دس$ (١)

$\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6 \Leftarrow 3\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 3 \times 6 = 18$ (١)

$\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ق(س)\,دس = 4 \Leftarrow \frac{1}{2}\int_{5}^{-2} ق(س)\,دس = 4 \Leftarrow \int_{5}^{-2} ق(س)\,دس = 8 \Leftarrow \int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = -8$ (١)

$\int_{-2}^{5} س\,دس = \frac{س^2}{2}\Big|_{-2}^{5} = \frac{5^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}$ (١)

$\therefore \int_{-2}^{5} (2ق(س) + ق(س) - س)\,دس = 3 \times 18 + 8 - \frac{21}{2} = 10 - \left(\frac{21}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ (١) (١)

صيفي ٢٠١٣ (٦ علامات)

اذا كان $\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = 8$ ، $\int_{-1}^{3} 2ق(س)\,دس = 10$ فجد $\int_{3}^{6} (ق(س) + 2س)\,دس$

الحل: $\int_{-1}^{3} 2ق(س)\,دس = 10 \Leftarrow 2\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = 10 \Leftarrow \int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = 5 \Leftarrow \int_{3}^{-1} ق(س)\,دس = -5$ (١)

$\int_{3}^{6} (ق(س) + 2س)\,دس = \int_{3}^{6} ق(س)\,دس + \int_{3}^{6} 2س\,دس$ (١)

$\int_{3}^{6} ق(س)\,دس = \int_{3}^{-1} ق(س)\,دس + \int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = -5 + 8 = 3$ (١)

$\therefore \int_{3}^{6} (ق(س) + 2س)\,دس = 3 + س^2\Big|_{3}^{6} = 3 + (36 - 9) = 3 + 27 = 30$ (١) (١)

شتوي ٢٠١٢ (٤ علامات)

$\int_{-1}^{6} (3ق(س) - 2)\,دس = 10$ ، $\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = 14$ ، فجد $\int_{6}^{-1} ق(س)\,دس$.

الحل: $\int_{-1}^{6} (3ق(س) - 2)\,دس = 3\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس - \int_{-1}^{6} 2\,دس = 3\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس - 2س\Big|_{-1}^{6} = 10$ (١) (١)

$\Leftarrow 3\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس - (2 \times 6 - 2 \times -1) = 10 \Leftarrow 3\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = 10 + (12 + 2) = 24$

$\Leftarrow \int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = \frac{24}{3} = 8$ (١)

$\int_{-1}^{-1} ق(س)\,دس = \int_{-1}^{6} ق(س)\,دس + \int_{6}^{-1} ق(س)\,دس = 8 - 14 = -6$ (١) (١)

صيغ ٢٠١٤ (٥ علامات)

$\int_{3}^{5}\left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{2}-1\right)\text{دس}=6$ ، $\int_{8}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=10$ ، فجد $\int_{3}^{8}(\text{ق}(\text{س})+2\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{3}^{5}\left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{2}-1\right)\text{دس}=6 \Leftarrow \frac{1}{2}\int_{3}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}-1\times(5-3)=6$ (١)

$\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=8 \Leftarrow \int_{3}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=16$ (١)

$\int_{3}^{8}(\text{ق}(\text{س})+2\text{س})\,\text{دس}=\int_{3}^{8}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+\text{س}^2\Big|_{3}^{8}$ (١)

$=\int_{3}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+\int_{5}^{8}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+(64-9)=16-10+55=61$ (١)

شتوي ٢٠١٥ (٤ علامات)

اذا كان $\text{ق}(\text{س})=\begin{cases}\text{س}^2+1 & ، -1\le\text{س}<3\\ 4\text{س}-2 & ، 3\le\text{س}\le4\end{cases}$ فجد $\int_{-1}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{-1}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=\int_{-1}^{3}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+\int_{3}^{4}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ (١)

$=\int_{-1}^{3}(\text{س}^2+1)\,\text{دس}+\int_{3}^{4}(4\text{س}-2)\,\text{دس}$ (١)

$=\left(\frac{1}{3}\text{س}^3+\text{س}\right)\Big|_{-1}^{3}+\left(2\text{س}^2-2\text{س}\right)\Big|_{3}^{4}=(9+3)-\left(-1\frac{1}{3}\right)+(32-8)-(18-6)$ (١) (١)

$=12+1\frac{1}{3}+24-12=25\frac{1}{3}$ (١)

صيف ٢٠١٥ (٤ علامات)

اذا كان $\int_{1}^{7}4\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=8$ ، $\int_{5}^{7}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=-9$ ، فجد $\int_{1}^{5}\left(3\,\text{ق}(\text{س})-\frac{3}{2}\text{س}^2\right)\text{دس}$

الحل: $\int_{1}^{7}4\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=8 \Leftarrow \int_{1}^{7}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=2$ (١)

$\int_{1}^{5}\left(3\,\text{ق}(\text{س})-\frac{3}{2}\text{س}^2\right)\text{دس}=3\int_{1}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}-\frac{1}{2}\text{س}^3\Big|_{1}^{5}$

$=3\left(\int_{1}^{7}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+\int_{7}^{5}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right)-\frac{1}{2}\text{س}^3\Big|_{1}^{5}=3(2+9)-\frac{1}{2}(125-1)$ (١)

$=33-62=-29$ (١)

تمرين ٢٠١٦

(٤ علامات)

اذا كان $\int_{٢}^{٥} (\text{ق}(\text{س}) - ٤)\,\text{دس} = ٦$ ، $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -١$ ، فجد $\int_{٢}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{س}^٢)\,\text{دس}$

الحل: $\int_{٢}^{٥} (\text{ق}(\text{س}) - ٤)\,\text{دس} = ٦ \Leftarrow \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - ٤(٥-٢) = ٦$ (١)

$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٤$ (١)

$\int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٤ - ١ = ١٥$ (١)

$\int_{٢}^{٣} (\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{س}^٢)\,\text{دس} = \int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \text{س}^٣ \Big|_{٢}^{٣} = ١٥ + ١٩ = ٤$ (١)

صيف ٢٠١٦

(٤ علامات)

اذا كان $\int_{١}^{٦} (٣ - \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = ٧$ ، $\int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٥$ ، فجد $\int_{١}^{٢} (\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س}) - ٤\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{١}^{٦} (٣ - \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = \int_{١}^{٦} ٣\,\text{دس} - \int_{١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧$ (١)

$= ٣ \times ٥ - \int_{١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧ \Leftarrow \int_{١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٥ - ٧ = ٨$

$\int_{٦}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٥$ ، $\int_{١}^{٢} (\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س}) - ٤\text{س})\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\left(\int_{١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٦}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right) - \int_{١}^{٢} ٤\text{س}\,\text{دس}$ (١)

$= \frac{١}{٢}(٨ + ٥) - ٢\text{س}^٢ \Big|_{١}^{٢}$ (١)

$= \frac{١٣}{٢} - (٨ - ٢) = \frac{١٣}{٢} - ٦ = \frac{١}{٢}$ (١)

شتوي ٢٠١٧

(٥ علامات)

اذا كان $\int_{-١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$ ، $\int_{٢}^{٥} (١ - \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = ٧$ ، فجد $\int_{-١}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) - ٦\text{س}^٢)\,\text{دس}$

الحل: $\int_{٢}^{٥} (١ - \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = \int_{٢}^{٥} ١\,\text{دس} - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧ \Leftarrow ١(٥-٢) - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧$

ومنه $-\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧ - ٣ \Leftarrow -\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ \Leftarrow \int_{٥}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٤$

$\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢ + ٤ = ٦$

$\int_{-١}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) - ٦\text{س}^٢)\,\text{دس} = \int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-١}^{٢} ٦\text{س}^٢\,\text{دس} = ٦ - \left(\frac{٦\text{س}^٣}{٣}\right)\Big|_{-١}^{٢} = ٦ - (٢\text{س}^٣)\Big|_{-١}^{٢}$

$= ٦ - (٢ \times ٨ - ٢ \times -١)$

$= ٦ - (١٦ + ٢) = ٦ - ١٨ = -١٢$

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

التكامل بالتعويض

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

$\int (س-٢)(س^٢-٤س+١)^٧ \, .دس$ (٦ علامات)

الحل: نفرض $ص = س^٢-٤س+١$ (١)

$\frac{دص}{دس} = ٢س-٤ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س-٤}$ (١)

$\int \cancel{(س-٢)} ص^٧ \cdot \frac{دص}{٢\cancel{(س-٢)}} = \frac{١}{٢}\int ص^٧ \cdot دص = \frac{١}{٢} \times \frac{ص^٨}{٨} + جـ = \frac{١}{١٦}(س^٢-٤س+١)^٨ + جـ$ (١) (١) (١) (١)

صيفي ٢٠٠٧

جـ $\int (س+٣)(س^٢+٦س-٥)^٤ \, .دس$ (٦ علامات)

نفرض أن $ص = س^٢+٦س-٥$ (١)

$\frac{دص}{دس} = ٢س+٦ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س+٦}$ (١)

$\int \cancel{(س+٣)} ص^٤ \cdot \frac{دص}{٢\cancel{(س+٣)}} = \frac{١}{٢}\int ص^٤ \cdot دص = \frac{١}{٢} \times \frac{ص^٥}{٥} + جـ$ (١) (١) (١)

$= \frac{١}{١٠}(س^٢+٦س-٥)^٥ + جـ$ (١)

شتوي ٢٠٠٨

جـ $\int س \, جا(س^٢-٣) \, .دس$ (٤ علامات)

الحل: نفرض أن $ص = س^٢-٣$ (١)

$\frac{دص}{دس} = ٢س \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$ (١)

$\int \cancel{س} \, جا ص \cdot \frac{دص}{٢\cancel{س}} = \frac{١}{٢}\int جا ص \, .دص = \frac{-١}{٢} جتا ص + جـ$ (١)

$= \frac{-١}{٢} جتا(س^٢-٣) + جـ$ (١)

صيف ٢٠٠٨

جد $\int \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^2}\, \text{دس}$ (٦ علامات)

حدود التكامل: عندما س = ٠ ⇐ ص = ٠ ، س = ١ ⇐ ص = ١

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^2$ ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$ ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$ (١)

$\int \cancel{\text{س}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص} = \frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{ص}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\text{هـ}^1 - \text{هـ}^0)$ (١)

(١) (١) (١)

$= \frac{1}{2}\text{هـ} - \frac{1}{2}$

شتوي ٢٠٠٩

جد $\int \text{س}\, \text{جا}(\text{س}^2 + 1) \cdot \text{دس}$ (٤ علامات)

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$ ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$ (١)

$\int \cancel{\text{س}}\, \text{جا ص} \cdot \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{2} \int \text{جا ص} \cdot \text{دص} = -\frac{1}{2}\, \text{جتا ص} + \text{جـ}$ (١)

(١) (١)

$= -\frac{1}{2}\, \text{جتا}(\text{س}^2 + 1) + \text{جـ}$

صيف ٢٠٠٩

جد $\int (\text{هـ}^{2-\text{س}} + \text{قا}^2\text{س}) \cdot \text{دس}$ (٣ علامات)

$= \int \text{هـ}^{2-\text{س}} \cdot \text{دس} + \int \text{قا}^2\text{س}$

نفرض $\text{ص} = 2 - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$ ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-1}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{-1} = -\int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = -\text{هـ}^{2-\text{س}} + \text{جـ}$

وعليه $\int \text{هـ}^{2-\text{س}} \cdot \text{دس} + \int \text{قا}^2\text{س} = -\text{هـ}^{2-\text{س}} + \text{ظا س} + \text{جـ}$

(١) (١) (١)

$\int$ ٦س جا س^2 دس (٥ علامات)

الحل: نفرض ص = س^2 − ٣ (١)

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{دص}{٢س}$ (١)

$\int$ ٦س جا ص . $\frac{دص}{٢س}$ = ٣ $\int$ جا ص . دص = −٣ جتا ص + جـ (١)

(١) (١) = −٣ جتا س^2 + جـ

شتوي ٢٠١٠

ب) $\int$ (هـ^{س} + قا^2(٤س)) دس (٤ علامات)

الحل: $\int$ هـ^{س} . دس + $\int$ قا^{2}٤س . دس

$\int$ هـ^{س} . دس = هـ^{س} + جـ

$\int$ قا^{2}٤س . دس نفرض ص = ٤س ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ ⟸ دس = $\frac{دص}{٤}$

$\int$ قا^{2}ص . $\frac{دص}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ $\int$ قا^{2}ص . دص = $\frac{١}{٤}$ ظا ص + جـ = $\frac{١}{٤}$ ظا ٤س + جـ

∴ $\int$ (هـ^{س} + قا^2(٤س)) دس = هـ^{س} + $\frac{١}{٤}$ ظا ٤س + جـ (١) (٢) (١)

جـ) $\int$ $\frac{٢س+١}{\sqrt{س^2+س-١}}$. دس (٦ علامات)

الحل: نفرض ص = س^2 + س − ١ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ١ ⟸ دس = $\frac{دص}{٢س+١}$

$\int$ $\frac{٢س+١}{\sqrt{ص}}$. $\frac{دص}{٢س+١}$ = $\int$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$. دص = $\frac{ص^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١}$ + جـ = ٢ص$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

= ٢ $\sqrt{س^2+س-١}$ + جـ

صيف ٢٠١٠

جد $\int (س+1)\, هـ^{س^2+2س} \, دس$ (٥ علامات)

الحل: نفرض $ص = س^2+2س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2س+2 \Leftarrow دس = \frac{دص}{2(س+1)}$

$\int \cancel{(س+1)}\, هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{2\cancel{(س+1)}} = \frac{1}{2}\int هـ^{ص} \cdot دص = \frac{1}{2} هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{1}{2} هـ^{س^2+2س} + جـ$

شتوي ٢٠١١

جد $\int \frac{3س^2+1}{(س^3+س+7)^5} \, دس$ (٥ علامات)

الحل: نفرض $ص = س^3+س+7 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3س^2+1 \Leftarrow دس = \frac{دص}{3س^2+1}$

$\int \frac{\cancel{3س^2+1}}{ص^5} \cdot \frac{دص}{\cancel{3س^2+1}} = \int ص^{-5} \cdot دص = \frac{ص^{-4}}{-4} + جـ = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{ص^4} + جـ$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(س^3+س+7)^4}\right) + جـ$

صيف ٢٠١١

جد $\int \sqrt[3]{6س-س^2}\,(6-2س) \cdot دس$ (٥ علامات)

الحل: نفرض $ص = 6س-س^2 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 6-2س \Leftarrow دس = \frac{دص}{6-2س}$

$\int \sqrt[3]{ص}\,\cancel{(6-2س)} \cdot \frac{دص}{\cancel{(6-2س)}} = \int ص^{\frac{1}{3}} \cdot دص = \frac{ص^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + جـ$

$= \frac{(6س-س^2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + جـ$

شتوي ٢٠١٢

جد $\int \frac{٢س + ٣}{جتا^٢(س^٢ + ٣س)} \cdot دس$ (٥ علامات)

(١)

الحل: نفرض $ص = س^٢ + ٣س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س + ٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س + ٣}$ (١)

$\int \frac{\cancel{٢س + ٣}}{جتا^٢ ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٢س + ٣}} = \int \frac{١}{جتا^٢ ص} \cdot دص = \int قا^٢ ص \cdot دص = ظا ص + جـ$ (١)

(١)

$= ظا(س^٢ + ٣س) + جـ$ (١)

صيفي ٢٠١٢

جد $\int \frac{٣س^٢ - ٦}{\sqrt[٥]{س^٣ - ٦س + ٩}} \cdot دس$ (٥ علامات)

(١)

الحل: نفرض $ص = س^٣ - ٦س + ٩ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^٢ - ٦ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^٢ - ٦}$ (١)

ومنه $\int \frac{\cancel{٣س^٢ - ٦}}{\sqrt[٥]{ص}} \cdot \frac{دص}{\cancel{٣س^٢ - ٦}} = \int ص^{-\frac{١}{٥}} \cdot دص = \frac{ص^{-\frac{١}{٥} + ١}}{-\frac{١}{٥} + ١} + جـ$ (١) (١)

$= \frac{(س^٣ - ٦س + ٩)^{\frac{٤}{٥}}}{\frac{٤}{٥}} + جـ$ (١)

شتوي ٢٠١٣

$\int \frac{٦س - ٤}{٣س^٢ - ٤س + ١} \cdot دس$ (٥ علامات)

(١)

الحل: نفرض $ص = ٣س^٢ - ٤س + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٦س - ٤ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٦س - ٤}$ (١)

ومنه $\int \frac{\cancel{٦س - ٤}}{ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٦س - ٤}} = \int \frac{١}{ص} \cdot دص = لو_هـ |ص| + جـ$ (١)

$= لو_هـ |٣س^٢ - ٤س + ١| + جـ$ (١)

صيف ٢٠١٣

(٥ علامات)

$\int \text{س}\,\sqrt{\text{س}^2+3}\;.\;\text{دس}$ (١)

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^2+3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$ (١)

ومنه $\int \cancel{\text{س}}\,\sqrt{\text{ص}}\;.\;\frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\;.\;\text{دص} = \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{جـ}$ (١) (١)

$= \frac{2}{3}\left(\text{س}^2+3\right)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$ (١)

شتوي ٢٠١٤

(٥ علامات)

$\int \text{س}^2\,\text{جا}\left(\text{س}^3-1\right)\;.\;\text{دس}$ (١)

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3-1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$ (١)

ومنه $\int \cancel{\text{س}^2}\,\text{جا ص}\;.\;\frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}} = \frac{1}{3}\int \text{جا ص}\;.\;\text{دص} = -\frac{1}{3}\,\text{جتا ص} + \text{جـ}$ (١) (١)

$= -\frac{1}{3}\,\text{جتا}\left(\text{س}^3-1\right) + \text{جـ}$ (١)

صيف ٢٠١٤

٥ علامات

$\int \frac{10\text{س}-1}{\sqrt{5\text{س}^2-\text{س}+1}}\;.\;\text{دس}$ (١)

الحل: نفرض $\text{ص} = 5\text{س}^2-\text{س}+1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10\text{س}-1 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{10\text{س}-1}$ (١)

ومنه $\int \frac{\cancel{10\text{س}-1}}{\sqrt{\text{ص}}}\;.\;\frac{\text{دص}}{\cancel{10\text{س}-1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}}\;.\;\text{دص} = \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\;.\;\text{دص}$ (١) (١)

$= \frac{\text{ص}^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \text{جـ}$

$= 2\left(5\text{س}^2-\text{س}+1\right)^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$ (١)

تمرين ٢٠١٥

$$\text{جـ} = \int_{-1}^{1} \text{س}^2 (\text{س}^3 - 1)^2 \, \text{دس}$$

عندما س = ٠ ، ص = -١
س = ١ ، ص = ٠

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 - 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

ومنه $\int_{-1}^{1} \cancel{\text{س}^2} \, \text{ص}^2 \cdot \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}} = \frac{1}{3} \int_{-1}^{0} \text{ص}^2 \, \text{دص} = \frac{1}{3} \left[\frac{\text{ص}^3}{3} \right]_{-1}^{0}$

$$= \frac{1}{9} \left(0 - (-1) \right) = \frac{1}{9}$$

تمرين ٢٠١٥

إذا كان $\text{ق}(8) = 14$ ، $\text{ق}(-1) = -5$ ، فجد قيمة $\int_{-1}^{2} 3\text{س}^2 \, \text{ق}'(\text{س}^3) \, \text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

عندما س = -١ فإن ص = -١
عندما س = ٢ فإن ص = ٨

$$\int_{-1}^{2} \cancel{3\text{س}^2} \, \text{ق}'(\text{س}^3) \, \text{دس} = \int_{-1}^{8} \cancel{3\text{س}^2} \, \text{ق}'(\text{ص}) \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2}} = \int_{-1}^{8} \text{ق}'(\text{ص}) \, \text{دص} = \text{ق}(8) - \text{ق}(-1)$$

$$= 14 - (-5) = 19$$

تمرين ٢٠١٦

$$\text{جـ} = \int \frac{6\text{س} - 8}{\sqrt[3]{3\text{س}^2 - 8\text{س} + 9}} \cdot \text{دس}$$

الحل: نفرض $\text{ص} = 3\text{س}^2 - 8\text{س} + 9 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س} - 8 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{6\text{س} - 8}$

ومنه $\int \frac{\cancel{6\text{س} - 8}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{6\text{س} - 8}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\text{ص}}} \cdot \text{دص} = \int \text{ص}^{-\frac{1}{3}} \cdot \text{دص} = \frac{\text{ص}^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \text{جـ}$

$$= \frac{2}{2} \left(3\text{س}^2 - 8\text{س} + 9 \right)^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

س١٦: ٢٠١٦

(٥ علامات)

جد $\int \frac{٦س + ٤}{جتا^٢(٣س^٢ + ٤س)} \cdot دس$

الحل: نفرض $ص = ٣س^٢ + ٤س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٦س + ٤ \Leftarrow دص = (٦س + ٤) دس$ (١)

ومنه $\int \frac{\cancel{٦س + ٤}}{جتا^٢ ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٦س + ٤}} = \int \frac{١}{جتا^٢ ص} \cdot دص = \int قا^٢ ص \cdot دص$ (١) (١)

$= ظا ص + جـ$ (١)

$= ظا(٣س^٢ + ٤س) + جـ$ (١)

شتوي ٢٠١٧

(٥ علامات)

جد $\int \frac{٨س + ٤}{(س^٢ + س - ١)^٣} \cdot دس$

الحل: نفرض $ص = س^٢ + س - ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س + ١ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س + ١}$ (١)

ومنه $\int \frac{٨س + ٤}{ص^٣} \cdot \frac{دص}{٢س + ١} = \int \frac{٤\cancel{(٢س + ١)}}{ص^٣} \cdot \frac{دص}{\cancel{٢س + ١}} = ٤ \int ص^{-٣} \cdot دص$ (١) (١)

$= ٤ \frac{ص^{-٢}}{-٢} + جـ$ (١)

$= -٢(س^٢ + س - ١)^{-٢} + جـ$ (١)

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

تطبيقات التكامل المحدود

(ايجاد المساحات)

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

(٧ علامات)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ س² والمستقيم ص = ٦ س

الحل: ٣ س² = ٦ س (١)

٣ س² − ٦ س = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٢ (١) (١)

م = | ∫ₐᵇ (ق(س) − هـ(س)) . دس | (١)

= ∫₀² (٦ س − ٣ س²) . دس = ٣ س² − س³]₀² = (٣(٢)² − (٢)³) − (٠) = ٤ وحدات مربعة (١) (١) (١)

صيفي ٢٠٠٧

(٨ علامات)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² والمستقيم ص = ٢س + ٣

الحل: س² = ٢س + ٣ (١)

س² − ٢س − ٣ = ٠ (١)

(س − ٣)(س + ١) = ٠ ⟸ س = ٣ ، س = −١ (١)

م = ∫ₐᵇ | ق(س) − هـ(س) | . دس (١)

= ∫₋₁³ ((٢س + ٣) − س²) . دس = س² + ٣س − س³/٣]₋₁³ (١) (١)

= (٩ + ٩ − ٩) − (١ − ٣ + ١/٣) = ٩ − (−٢ + ١/٣) = ٩ + ٥/٣ = ٣٢/٣ (١) (١)

شتوي ٢٠٠٨

(٨ علامات)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٤ س والمستقيم ص = ٥

الحل: س² − ٤ س = ٥ (١)

س² − ٤ س − ٥ = ٠ (١)

(س − ٥)(س + ١) = ٠ ⟸ س = ٥ ، س = −١ (١)

م = ∫ₐᵇ | ق(س) − هـ(س) | . دس (١)

$$م = \int_{-1}^{5} \left(5 - (س^2 - 4س)\right) . دس$$ (1)

$$= \int_{-1}^{5} (5 - س^2 + 4س) . دس = 5س - \frac{س^3}{3} + \frac{4س^2}{2} \Big|_{-1}^{5}$$ (1)

$$= \left(25 - \frac{125}{3} + 50\right) - \left(-5 - \frac{-1}{3} + 2\right) = 36$$ (1) (1)

تمرين ٢٠٠٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^2 - 2س$ ومحور السينات. (٨ علامات).

الحل: $ق(س) = صفر \Leftarrow س^2 - 2س = 0$ (1) (1) (1)

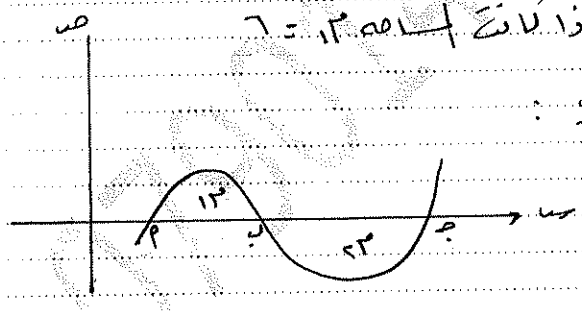
$س(س - 2) = 0 \Leftarrow س = 0 ، س = 2$

المساحة $م = \int_{0}^{2} |ق(س)| . دس = \left|\int_{0}^{2} (س^2 - 2س) . دس\right|$ (1) (1)

$$= \frac{س^3}{3} - س^2 \Big|_{0}^{2} = \left|\left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0)\right| = \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$ وحدة مربعة (1) (1) (1)

شتوي ٢٠٠٩

بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى $ق(س)$، إذا كانت المساحة $م_1 = 6$ والمساحة $م_2 = 10$ فإن $\int_{أ}^{ج} ق(س) . دس$ يساوي:



(أ) -4 (ب) 4

(ج) 16 (د) 60

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$ق(س) = 6س - س^2$ ، $هـ(س) = 2س$ (٨ علامات).

يتبع

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$ ، $2\text{س} = 6\text{س} - \text{س}^3$ } بطرح من الطرفين

$\text{س}^2 + 2\text{س} - 6\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س}^2 - 4\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 4) = 0 \Leftarrow \text{س} = 0 \ ، \ \text{س} = 4$

المساحة (م) $= \int_0^4 (\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})) \, \text{دس}$

$= \int_0^4 (6\text{س} - \text{س}^2 - 2\text{س}) \, \text{دس} = \int_0^4 4\text{س} - \text{س}^2 \, \text{دس}$

$= 2\text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{3} \Big]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

صيف ٢٠٠٩

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: (٧ علامات)

$\text{ق}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2 \ ، \ \text{هـ}(\text{س}) = 2\text{س}$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$3 - \text{س}^2 = 2\text{س}$

$\Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$

$(\text{س} + 3)(\text{س} - 1) = 0 \Leftarrow \text{س} = -3 \ ، \ 1$

$\text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})) \, \text{دس} \right| \Leftarrow \int_{-3}^{1} (3 - \text{س}^2 - 2\text{س}) \, \text{دس}$

$\Leftarrow 3\text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س}^2 \Big]_{-3}^{1}$

$= \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - \left(-9 + 9 - 9\right) = 10\frac{2}{3}$

شتوي ٢٠١٠

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = 6 - 2\text{س}$ ومحور السينات في الفترة $[0 ، 4]$. (٥ علامات)

الحل: $6 - 2\text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = 3$

يقطع ق(س) محور السينات في الفترة $[0 ، 4]$ عندما $\text{س} = 3$

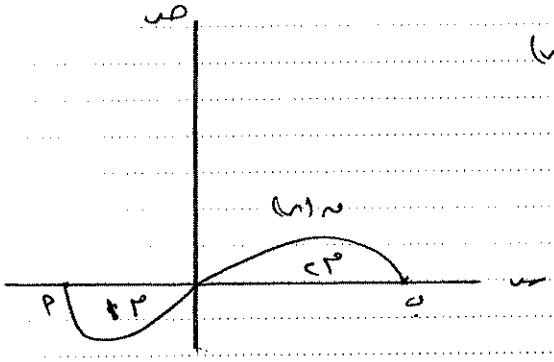
المساحة = $\left|\int_{1}^{3} (6-2س)\,.\,دس\right| + \left|\int_{3}^{4} (6-2س)\,.\,دس\right|$ (1)

$م_1 = \left|\int_{1}^{3} (6-2س)\,.\,دس\right| = \left|6س - س^2\Big|_{1}^{3}\right| = \left|(18-9) - 0\right| = 9$ وحدات مربعة (1)

$م_2 = \left|\int_{3}^{4} (6-2س)\,.\,دس\right| = \left|6س - س^2\Big|_{3}^{4}\right| = \left|(24-16) - (18-9)\right| = |-1| = 1$ وحدة مربعة (1)

$م_{الكلية} = م_1 + م_2 = 9 + 1 = 10$ وحدات مربعة . (1)

صيغي ١٠-٢



يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ، ب]، اذا علمت أن مساحة (م١) تساوي (٥) وحدات مربعة ومساحة (م٢) تساوي ٣ وحدات مربعة، فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,.\,دس$ يساوي:

أ) ٨ ب) ٢ ج) -٨ د) -٢

جـ مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ - س² ومحور السينات (٧ علامات)

الحل: نقوم بإيجاد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات (1)

ق(س) = ٠ ⟸ ١ - س² = ٠ ⟸ س = ١ ، س = -١ (1) (1)

المساحة = $\int_{-1}^{1} (1-س^2)\,.\,دس = س - \frac{س^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3}) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ وحدة مربعة (1) (1) (1) (1)

شتوي ١١-٢

جـ مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢ (٥ علامات).

الحل: $م = \int_{0}^{2} (2س+1)\,.\,دس = \frac{2س^2}{2} + س\Big]_{0}^{2} = 4 + 2 - 0 = 6$ وحدات مربعة (1) (1) (1) (1)

صيفي ٢٠١١

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ١ والمستقيم ص = ٣ (٧ علامات)

الحل: نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين ق(س) = ص (١)

⇐ س² − ١ = ٣ ⇐ س² = ٤ ⇐ س = ± ٢ (٢)

∴ م = ∫ من −٢ إلى ٢ [٣ − (س² − ١)] دس

= ∫ من −٢ إلى ٢ (٣ − س² + ١) دس = ∫ من −٢ إلى ٢ (٤ − س²) دس (١)

⇐ [٤س − س³/٣] من −٢ إلى ٢ = (٨ − ٨/٣) − (−٨ + ٨/٣) = ١٦ − ١٦/٣ = ٣٢/٣ وحدة مربعة (١) (١)

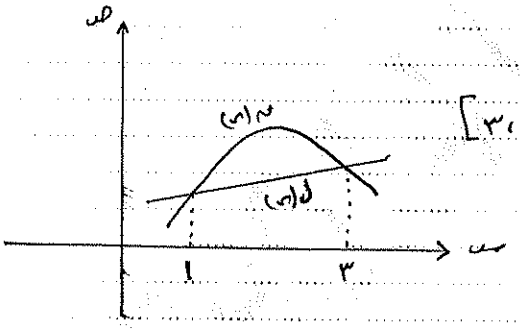
شتوي ٢٠١٢

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)، ل(س)

إذا علمت أن ∫ من ١ إلى ٣ ٢ق(س) دس = ١٢ ، ∫ من ٣ إلى ١ ل(س) دس = −٤

فما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة [١، ٣]

بالوحدات المربعة؟

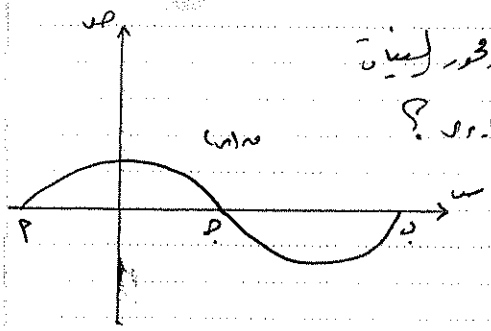


(أ) ٢ ب) ٨ ج) ١٠ د) ١٦

صيفي ٢٠١٢

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف في الفترة [أ، ب]

إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة مربعة وكان ∫ من أ إلى ج ق(س) دس = ٦، فما قيمة ∫ من ج إلى ب ق(س) دس؟



أ) ٨ ب) ٢ ج) −٨ د) −٢

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣س + ٦ ومحور السينات في الفترة [٠، ٣] (٤ علامات)

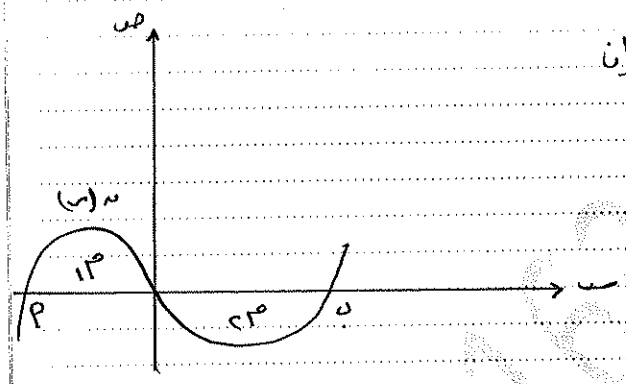
الحل: نجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

٣س + ٦ = ٠ ⟸ س = -٢ لا تنتمي للفترة [٠، ٣] (١)

م = ∫₀³ (٣س + ٦) . دس (١)

= [٣س²/٢ + ٦س]₀³ = ٢٧/٢ + ١٨ − ٠ (١) = ٣١,٥ وحدة مربعة. (١)

شتوي ٢٠١٣



يبين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ، ب]، اذا علمت أن م١ = ٩ وحدات مربعة، م٢ = ٤ وحدات مربعة فإن ∫₀ᵇ ق(س) . دس =

أ) -١٣ ب) ٥ ج) ٥ د) ١٣

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين (٦ علامات)

ق(س) = س² − س ، هـ(س) = ٢س .

الحل: نجد نقاط التقاطع بين الاقترانين ق(س)، هـ(س) (١)

ق(س) = هـ(س) ⟸ س² − س = ٢س ⟸ س² − ٣س = ٠ ⟸ س = ٠، ٣ (١)

م = |∫₀³ (٢س − (س² − س)) . دس| (١) = |∫₀³ (٣س − س²) . دس|

= [٣/٢ س² − ١/٣ س³]₀³ (١) = ٢٧/٢ − ٩ (١) = ٤½ وحدة مربعة

صيف ٢٠١٣ (٦ علامات)

احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٤س ومحور السينات

الحل: لإيجاد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات نجد أصفار الاقتران

ق(س) = صفر

س² − ٤س = ٠ ⟸ س(س − ٤) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٤ (١) (١)

$$م = \left| \int_{٠}^{٤} (س^{٢} - ٤س) \, دس \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} \right]_{٠}^{٤} \right| = \left| \frac{٦٤}{٣} - ٣٢ \right| = \left| \frac{٦٤}{٣} - \frac{٩٦}{٣} \right| = \left| \frac{-٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة

(١) (١) (١) (١)

شتوي ٢٠١٤ (٧ علامات)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

ق(س) = س² ، هـ(س) = ٢س + ٣

الحل: نجد نقاط التقاطع بين الاقترانين ق(س)، هـ(س)

ق(س) = هـ(س) (١)

س² = ٢س + ٣ ⟸ س² − ٢س − ٣ = ٠ ⟸ (س − ٣)(س + ١) = ٠ ⟸ س = −١ ، ٣ (١) (١)

$$م = \int_{-١}^{٣} (٢س + ٣ - س^{٢}) \, دس = \left[س^{٢} + ٣س - \frac{١}{٣}س^{٣} \right]_{-١}^{٣}$$ (١)

$$= (٩ + ٩ - ٩) - \left(١ - ٣ + \frac{١}{٣}\right) = ٩ - \frac{٥}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$$ وحدة مربعة (١)

صيف ٢٠١٤ (٦ علامات)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = ١ − س² والمستقيم ص = −٣

الحل: نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران والمستقيم

١ − س² = −٣ ⟸ س² = ٤ ⟸ س = ±٢ (١) (١)

$$م = \left| \int_{-٢}^{٢} (١ - س^{٢} - (-٣)) \, دس \right| = \left| \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢}) \, دس \right| = \left| \left[٤س - \frac{١}{٣}س^{٣} \right]_{-٢}^{٢} \right| = \left| \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) \right|$$ (١) (١)

$$= \left| ١٦ - \frac{١٦}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة (١)

هاشم الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

شتوي ٢٠١٥

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين (٦ علامات)

$ق(س) = ٢ - س^٢$ ، $هـ(س) = س$

الحل: نجد نقاط التقاطع بين $ق(س)$ ، $هـ(س)$

$ق(س) = هـ(س) \Leftarrow ٢ - س^٢ = س$ (١)

$\Leftarrow س^٢ + س - ٢ = ٠$ (١)

$\Leftarrow (س+٢)(س-١) = ٠ \Leftarrow س = -٢ ، ١$

$م = \left| \int_{-٢}^{١} (ق(س) - هـ(س))\, دس \right| = \left| \int_{-٢}^{١} (٢ - س^٢ - س)\, دس \right|$ (١)

$= \left[٢س - \frac{١}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ \right]_{-٢}^{١} = (٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٨}{٣} - ٢) = ٤\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

(١) (١)

صيفي ٢٠١٥

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - ٦س$ ومحور السينات في الفترة $[-٢ ، ١]$. (٦ علامات)

الحل: نجد نقاط تقاطع $ق(س)$ مع محور السينات

ومنه $ق(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^٢ - ٦س = ٠$ (١)

$\Leftarrow ٣س(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، ٢$ (١) حل

$م_١ = \int_{-٢}^{٠} (٣س^٢ - ٦س)\, دس = \left[س^٣ - ٣س^٢ \right]_{-٢}^{٠} = ٠ - (-٨ - ١٢) = ٢٠$ وحدة مربعة (١)

$م_٢ = \left| \int_{٠}^{١} (٣س^٢ - ٦س)\, دس \right| = \left| \left[س^٣ - ٣س^٢ \right]_{٠}^{١} \right|$ (١)

$= \left| ١ - ٣ - ٠ \right| = ٢$ وحدة مربعة (١)

(١)

$م = م_١ + م_٢ = ٢٠ + ٢ = ٢٢$ وحدة مربعة

شتوي ٢٠١٦

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين (٦ علامات)

$ق(س) = س^2 - 2$ ، $هـ(س) = 1 - 2س$

الحل: نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين $ق(س)$ ، $هـ(س)$

$ق(س) = هـ(س) \Leftarrow س^2 - 2 = 1 - 2س$ (1)

$س^2 + 2س - 3 = 0$

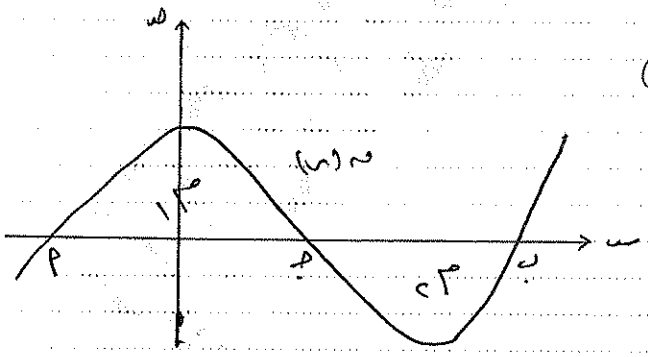
$(س+3)(س-1) = 0 \Leftarrow س = -3 ، 1$ (1) (1)

$م = \left| \int_{-3}^{1} \left((1 - 2س) - (س^2 - 2) \right) . دس \right| = \left| \int_{-3}^{1} (3 - 2س - س^2) . دس \right|$ (1)

$= \left| \left[3س - س^2 - \frac{1}{3} س^3 \right]_{-3}^{1} \right| = \left| \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - (-9 - 9 + 9) \right| = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة (1) (1)

يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أن مساحة $(م_1)$ تساوي ٦ وحدات مربعة

$\int_{أ}^{ب} ق(س) . دس = -4$ ، فجد مساحة $(م_2)$ (٤ علامات)



الحل: $\int_{أ}^{ب} ق(س) . دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س) . دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س) . دس$ (1)

$-4 = 6 + \int_{جـ}^{ب} ق(س) . دس$ (1)

ومنه $\int_{جـ}^{ب} ق(س) . دس = -10$ (1)

$م_2 = \left| \int_{جـ}^{ب} ق(س) . دس \right| = |-10| = 10$ وحدات مربعة (1)

صيفي ٢٠١٦

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: (٦ علامات)

$ق(س) = ٢س^٢$ ، $ل(س) = ٢س + ٤$

الحل: $ق(س) = ل(س)$ (١)

$٢س^٢ = ٢س + ٤ \Leftarrow ٢س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$

$\Leftarrow س^٢ - س - ٢ = ٠ \Leftarrow (س - ٢)(س + ١) = ٠$ ، $س = ٢ ، -١$ (١) (١)

$م = \int_{أ}^{ب} (ل(س) - ق(س)) \, دس = \int_{-١}^{٢} (٢س + ٤ - ٢س^٢) \, دس$ (١)

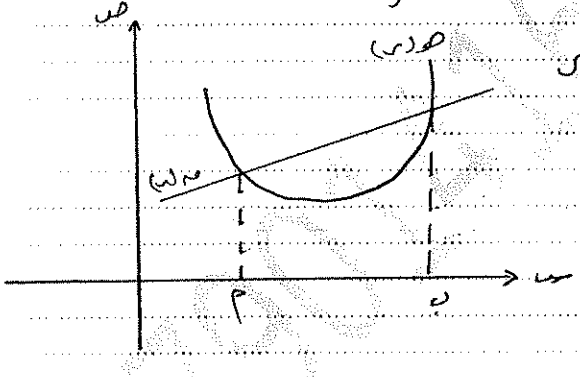
$= \left[س^٢ + ٤س - \frac{٢}{٣}س^٣ \right]_{-١}^{٢} = (٤ + ٨ - \frac{٢}{٣} \times ٨) - (١ - ٤ + \frac{٢}{٣})$ (١)

$= \frac{١٠}{٣} + \frac{٧}{٣} = ٩$ وحدات مربعة (١)

يمثل الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $ق(س)$، $هـ(س)$ (٤ علامات)

إذا علمت أن المساحة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين (٣) وحدات مربعة

وكان: $\int_{أ}^{ب} ٢ق(س) \, دس = ٢٤$ ، فجد $\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$



الحل: $\int_{أ}^{ب} ٢ق(س) \, دس = ٢٤ \Leftarrow \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = ١٢$ (١)

$٣ = \int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س)) \, دس$ (١)

$٣ = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس - \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس \Leftarrow ٣ = ١٢ - \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$ (١)

$\Leftarrow \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس = ١٢ - ٣ = ٩$ (١)

سؤال (٢٠٠٧) (٦ علامات)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س − س² والمستقيم ص = −٢

الحل:

س − س² = −٢ ⟸ −س² + س + ٢ = ٠ ⟸ س² − س − ٢ = ٠

⟸ (س − ٢)(س + ١) = ٠ ⟸ س = ٢ ، س = −١

وعليه ∫₋₁² (س² − س − ٢) دس = [س³/٣ − س²/٢ − ٢س]₋₁²

= (٨/٣ − ٤/٢ − ٤) − (−١/٣ − ١/٢ + ٢) = −٩/٢ .

المساحة = |−٩/٢| = ٩/٢ .

عامر الصبيح
عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

اسئلة وزارية لدرس:

تطبيقات التكامل المحدود

(تطبيقات اقتصادية)

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) قطعة من انتاج مصنع معين هو د(س) = ٣س² - ١ فان الايراد الكلي عندما س = ٢ هو :

(أ) ٦ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ٢٢

اذا كان منحنى اقتران السعر - العرض يعطى بالعلاقة ع = ٦س + ١٨ حيث ع السعر بالدينار، س عدد القطع المنتجة، وكان السعر ثابت عندما ع₁ = ٧٨ فجد فائض المنتج. (٧ علامات)

الحل: ع₁ = ٦س₁ + ١٨

٧٨ = ٦س₁ + ١٨ (١)

س₁ = ١٠ (١)

فائض المنتج = ع₁ س₁ - ∫₀^{س₁} هـ(س) دس (١)

= (٧٨ × ١٠) - ∫₀^{١٠} (٦س + ١٨) دس (١)

= ٧٨٠ - (٣س² + ١٨س) |₀^{١٠} (١)

= ٧٨٠ - (٣(١٠)² + ١٨(١٠)) - (٠) = ٧٨٠ - (٣٠٠ + ١٨٠) (١)

= ٣٠٠

صيفي ٢٠٠٧

اذا كان منحنى السعر - الطلب لمنتج معين معطى بالعلاقة ع = ق(س) = ١٠٠ - ٨س ومنحنى السعر - العرض معطى بالعلاقة ع = هـ(س) = ٤٠ + ٢س اوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن. (٨ علامات)

الحل: ق(س) = هـ(س) (١)

١٠٠ - ٨س = ٤٠ + ٢س

٦٠ = ١٠س ⇐ س₁ = ٦ (١)

ع₁ = ١٠٠ - (٨ × ٦) = ١٠٠ - ٤٨ = ٥٢ (١)

ف_ك = ∫₀^{٦} ق(س) - ع₁ س₁ = ∫₀^{٦} (١٠٠ - ٨س) دس - (٥٢ × ٦) (١) (١)

= ∫₀^{٦} (١٠٠ - ٨س) دس - ٣١٢ = [١٠٠س - ٨س²/٢] - ٣١٢ (١) (١)

= (٦٠٠ - ١٤٤) - ٣١٢ = ١٤٤ (١)

شتوي ٢٠٠٨

اذا كانت منحنى السعر - العرض لمنتج معين معطى بالعلاقة $ع = هـ(س) = ٥ + ٢س^{\frac{1}{2}}$ حيث (ع) السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عندما $ع_1 = ٢١$

أوجد فائض المنتج (٥ علامات)

الحل: عندما $ع_1 = ٢١$ فإن سعر التوازن يكون

$ع_1 = هـ(س_1) = ٥ + ٢س_1^{\frac{1}{2}} \Leftarrow ٢١ = ٥ + ٢س_1^{\frac{1}{2}}$ (١)

$٢س_1^{\frac{1}{2}} = ١٦$

$س_1^{\frac{1}{2}} = ٨$ (١)

$ف.ع = \int_{٠}^{س_1} (ع_1 - هـ(س))\,دس = ع_1 س_1 - \int_{٠}^{س_1} هـ(س)\,دس$ (١)

$= ٢١ \times ٨ - \int_{٠}^{٨} (٥ + ٢س^{\frac{1}{2}})\,دس$ (١)

$= ٢١ \times ٨ - \left[٥س + س^{\frac{3}{2}}\right]_{٠}^{٨} = ١٦٨ - (٤٠ + ٦٤) = ٦٤$ (١)

صيفي ٢٠٠٨ (٦ علامات)

اذا كانت اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين معطى بالعلاقة $ع = د(س) = ٤٠ - ٢س$ وكان اقتران (السعر - العرض) معطى بالعلاقة: $ع = هـ(س) = ٦س$، أوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن.

الحل: $د(س) = هـ(س)$ } أيضاً يأخذ علامة (١)

$٤٠ - ٢س = ٦س$

$٤٠ = ٨س$

$س = ٥$ (١)

سعر التوازن $ع_1 = ٤٠ - (٢ \times ٥) = ٣٠$ دينار (١)

فائض المستهلك $ف.ك = \int_{٠}^{س_1} (د(س) - ع_1)\,دس = \int_{٠}^{٥} (٤٠ - ٢س - ٣٠)\,دس$ (١)

$= \int_{٠}^{٥} (١٠ - ٢س)\,دس = \left[١٠س - س^2\right]_{٠}^{٥}$ (١)

$= (٥٠ - ٢٥) - ٠ = ٢٥$ دينار (١)

شتوي ٢٠٠٩

اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب الاطفال الذي ينتجها مصنع هو د(س) = ٣س² − ٨س + ٢، فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٥) العب. (٤ علامات)

الحل: الايراد الكلي د(س) = ∫ د'(س) . دس

د(س) = ∫ (٣س² − ٨س + ٢) دس ← إن هما يأخذ علامة (١)

= س³ − ٤س² + ٢س + جـ (١)

ثابت التكامل (جـ) في اقتران الايراد الكلي يساوي صفر لأنه د(٠) = صفر (١)

د(س) = س³ − ٤س² + ٢س

د(٥) = (٥)³ − ٤(٥)² + (٢×٥) (١)

= ١٢٥ − ١٠٠ + ١٠ = ٣٥

صيفي ٢٠٠٩

اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) كتاب من انتاج مصنع د'(س) = ٣س² − ٨س + ٢٠ دينارا، فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٢٠) كتاب. (٤ علامات)

الحل: د(س) = ∫ د'(س) . دس (١)

د(٢٠) = ∫₀²⁰ (٣س² − ٨س + ٢٠) . دس (١)

= س³ − ٤س² + ٢٠س |₀²⁰ (١)

= (٢٠)³ − ٤(٢٠)² + ٢٠(٢٠) − صفر (١) = ٦٨٠٠ دينار.

شتوي ٢٠١٠

اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) قطعة من منتج ما يعطى بالاقتران د'(س) = ٣س² − ٤س + ٣ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع من هذا المنتج (٤ علامات)

الحل: د(س) = ∫₀^س د'(س) . دس (١)

= ∫₀⁵ (٣س² − ٤س + ٣) دس = س³ − ٢س² + ٣س |₀⁵ (١) (١)

= ١٢٥ − ٥٠ + ١٥ = ٩٠ دينارا (١)

صيف ٢٠١٠

إذا كانت $ق = ق(س) = ٦٠ - ٢س$ تمثل اقتران (السعر - الطلب) حيث (ق) السعر بالدينار (س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند $ق = ١٠$، جد فائض المستهلك (٧ علامات)

الحل: عندما $ق = ١٠$، نجد قيمة س التي تقابل ق من الاقتران

$ق = ق(س) \Leftarrow ١٠ = ٦٠ - ٢س \Leftarrow س = ٢٥$

فائض المستهلك $= \int_{٠}^{٢٥} ق(س) \cdot دس - س \times ق$

$= \int_{٠}^{٢٥} (٦٠ - ٢س) \cdot دس - ٢٥ \times ١٠$

$= ٦٠س - س^٢ \Big|_{٠}^{٢٥} - ٢٥٠ = ٨٧٥ - ٢٥٠ = ٦٢٥$ دينار

شتوي ٢٠١١

إذا كانت اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو $ق = ق(س) = ١١ + ٢س$، حيث (ق) السعر بالدينار، (س) عدد القطع المنتجة وكانت السعر ثابتة عند $ق = ٢١$ دينارًا

جد فائض المنتج. (٧ علامات).

الحل: عندما $ق = ٢١$ نجد قيمة س التي تقابل ق من العلاقة

$٢١ = ١١ + ٢س \Leftarrow ١٠ = ٢س \Leftarrow س = ٥$

فج $= \int_{٠}^{٥} (ق - ق(س)) \cdot دس = ق \cdot س - \int_{٠}^{٥} ق(س) \cdot دس$

$= ٢١ \times ٥ - \int_{٠}^{٥} (١١ + ٢س) \cdot دس = ١٠٥ - (١١س + س^٢) \Big|_{٠}^{٥}$

$= ١٠٥ - ٨٠ = ٢٥$ دينار

صيف ٢٠١١

إذا كانت اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ق = ق(س) = ١٢ - س$، وكانت اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو $ق = هـ(س) = س + ٢$، فإن كمية التوازن (س) هي:

أ) -٧ ب) -٥ ج) ٥ د) ٧

شتوي ٢٠١٢

اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ق = ط(س) = ٧٠ - ٤س$

وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو $ق = هـ(س) = ١٠ + ٦س$

فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن. (٧ علامات)

الحل: $ط(س_1) = هـ(س_1)$ (١)

$٧٠ - ٤س_1 = ١٠ + ٦س_1$ (١)

$٦٠ = ١٠س_1 \Leftarrow س_1 = ٦$ (١)

$\therefore$ سعر التوازن $ق_1 = ط(س_1) = هـ(س_1) = ٧٠ - ٤\times٦ = ١٠ + ٦\times٦ = ٤٦$

$ف_ك = \int_{٠}^{س_1} ط(س).دس - س_1 ق_1$ (١)

$= \int_{٠}^{٦} (٧٠ - ٤س).دس - ٦\times٤٦$ (١)

$= ٧٠س - \frac{٤س^2}{2} \Big|_{٠}^{٦} - ٢٧٦ = ٤٢٨ - ٢٧٦ = ١٥٢$ وحدة نقدية (١)

صيفي ٢٠١٢

اذا كان الإيراد الكلي لبيع (س) لعبة من لعب الأطفال ينتج عن الصانع هو $د(س) = ٣س^2 - ٨س + ٥$ دينارا، فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعب (٥ علامات)

الحل: $د(س) = \int د'(س).دس$ (١)

$= \int (٣س^2 - ٨س + ٥).دس$ (١)

$= \frac{٣س^3}{3} + \frac{٨س^2}{2} + ٥س$ (١) (١) (١)

شتوي ٢٠١٣

اذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو $ق = هـ(س) = ١٢ + ٤س$، حيث ق السعر بالدنانير (س) عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتا عند $ق = ٣٢$ دينارا، فجد فائض المنتج. (٥ علامات)

الحل: نجد قيمة س عند $ق = ٣٢ \Leftarrow ١٢ + ٤س_1 = ٣٢ \Leftarrow ٤س_1 = ٢٠ \Leftarrow س_1 = ٥$ (١)

$ف_ج = ق_1 س_1 - \int_{٠}^{س_1} هـ(س).دس = ٣٢\times٥ - \int_{٠}^{٥} (١٢ + ٤س).دس$

$= ١٦٠ - (١٢س + ٢س^2)\Big|_{٠}^{٥} = ١٦٠ - (٦٠ + ٥٠) = ٥٠$ دينارا. (١) (١) (١)

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

صيف ٢٠١٣

اذا كان ع = ق(س) = ٤٢ − ٣س يمثل اقتران (السعر - الطلب) حيث ع السعر بالدنانير، س عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند ع₁ = ٣٠، جد فائض المستهلك. (٥ علامات).

الحل: عندما ع₁ = ٣٠ نجد قيمة س₁ التي تقابل ع₁ من الاقتران ع = ق(س)

٣٠ = ٤٢ − ٣س₁ ⇐ س₁ = (٤٢ − ٣٠)/٣ = ١٢/٣ = ٤ (١)

فائض المستهلك ف = ∫ من ٠ إلى س₁ [ق(س) − س₁ع₁] (١)

= ∫ من ٠ إلى ٤ (٤٢ − ٣س) دس − ٤ × ٣٠ (١)

= [٤٢س − ٣/٢ س²] من ٠ إلى ٤ − ١٢٠ = ١٦٨ − ٢٤ − ١٢٠ = ٢٤ ديناراً. (١) (١)

شتوي ٢٠١٢

اذا كان الايراد الكلي لبيع (س) من الثلاجات يعطى بالاقتران د(س) = ٦٠س² − ٣٠س + ٦ ديناراً فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٤) ثلاجات. (٤ علامات).

الحل: د(س) = ∫ د'(س) دس = ∫ (٦٠س² − ٣٠س + ٦) دس (١)

= ٢٠س³ − ١٥س² + ٦س (١)

⇐ د(٤) = ٢٠(٤)³ − ١٥(٤)² + ٦ × ٤ = ١٢٨٠ − ٢٤٠ + ٢٤ = ١٠٦٤ ديناراً. (١) (١)

اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٨ − ٣س، وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٥س، فجد فائض المنتج عند سعر التوازن. (٦ علامات)

الحل: نفرض كمية التوازن س₁

٤٨ − ٣س₁ = ٥س₁ (١)

٨س₁ = ٤٨ ⇐ س₁ = ٦ وحدات (١)

سعر التوازن ع₁ = ٥س₁ ⇐ ٥ × ٦ = ٣٠ وحدة نقد

ف ع = ع₁س₁ − ∫ من ٠ إلى س₁ هـ(س) دس = ٣٠ × ٦ − ∫ من ٠ إلى ٦ ٥س دس = ١٨٠ − ٥/٢ س² | من ٠ إلى ٦ (١) (١) (١)

= ١٨٠ − ٥/٢ × ٣٦ = ٩٠ وحدة نقد (١)

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

صيف ٢٠١٤

اذا كان اقتران (السعر-الطلب) لمنتج معين هو $ع = ق(س) = ١٦ - ٢س$ ، حيث ع السعر بالدنانير، س عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $ع_١ = ١٠$ دنانير، فجد فائض المستهلك (٤ علامات)

الحل: نجد قيمة $س_١$ التي تقابل $ع_١$ من اقتران $ع = ق(س)$.

$١٠ = ١٦ - ٢س_١ \Leftarrow س_١ = ٣$ (١)

$ف_ك = \int_{٠}^{س_١} ق(س)\,دس - ع_١ س_١ = \int_{٠}^{٣} (١٦ - ٢س)\,دس - ١٠ \times ٣ = ١٦س - س^٢ \Big|_{٠}^{٣} - ٣٠$ (١) (١)

$= ٤٨ - ٩ - ٣٠ = ٩$ دنانير. (١)

اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب الاطفال هو $د'(س) = ٦س^٢ - ٤س + ٢$ دينارا، فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) لعب (٤ علامات)

الحل: $د(س) = \int د'(س)\,دس$ (١)

$= \int (٦س^٢ - ٤س + ٢)\,دس$ (١)

$= ٢س^٣ - ٢س^٢ + ٢س$ (١)

$د(١٠) = ٢(١٠)^٣ - ٢(١٠)^٢ + ٢ \times ١٠ = ٢٠٢٠$ دينار (١)

شتوي ٢٠١٥

اذا كان اقتران (السعر-العرض) لمنتج معين هو $ع = هـ(س) = ١٠ + ٢س$ حيث ع السعر بالدينار، س عدد القطع المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند $ع_١ = ٢٤$ دينارا، فجد فائض المنتج (٦ علامات)

الحل: نفرض كمية التوازن $س_١$، نجد قيمة $س_١$ التي تقابل $ع_١$

$ع_١ = هـ(س_١)$ ، $٢٤ = ١٠ + ٢س_١ \Leftarrow س_١ = ٧$ (١)

$ف_ع = ع_١ س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$ (١)

$= ٢٤ \times ٧ - \int_{٠}^{٧} (١٠ + ٢س)\,دس = ١٦٨ - (١٠س + س^٢)\Big|_{٠}^{٧}$ (١) (١)

$= ١٦٨ - (٧٠ + ٤٩) = ٤٩$ دينار (١)

اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س) من القطع من منتج معين هو ق'(س) = ٦٠س² − ١٨س + ٢٠
فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع . (٣ علامات)

الحل: ق(س) = ∫ ق'(س) . دس = ∫ (٦٠س² − ١٨س + ٢٠) . دس ①

= ٢٠س³ − ٩س² + ٢٠س ①

ق(٥) = ٢٠×١٢٥ − ٩×٢٥ + ٢٠×٥ = ٢٣٧٥ دينارا ①

صيف ٢٠١٥

إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = م(س) = ٣٦ − ٢س
وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو ع = هـ(س) = ٣س + ١٦
فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن (٦ علامات).

الحل: نفرض أن كمية التوازن = س₁

٣٦ − ٢س₁ = ٣س₁ + ١٦ ⇐ س₁ = ٤ وحدات ①

سعر التوازن ع₁ = م(س₁) = ٣٦ − ٢×٤ = ٢٨ وحدة نقدية ①

ف ك = ∫₀^{س₁} م(س) . دس − ع₁ س₁ ①

= ∫₀^{٤} (٣٦ − ٢س) . دس − ٢٨×٤ ①

= ٣٦س − س² |₀^{٤} − ١١٢ = ١٤٤ − ١٦ − ١١٢ = ١٦ وحدة نقدية ① ①

شتوي ٢٠١٦

اذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو ع = هـ(س) = ١٥ + ٥س حيث ع السعر بالدينار
س عدد القطع المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ع = ٤٥ دينارا فجد فائض المنتج (٦ علامات)

نفرض كمية التوازن = س₁ ، نجد قيمة س₁ التي تقابل ع₁

ع₁ = هـ(س₁) ، ⇐ ٤٥ = ١٥ + ٥س₁ ⇐ س₁ = ٦ ①

ف ع = ع₁ س₁ − ∫₀^{س₁} هـ(س) . دس ① اذا عكس القانون يعتبر علامة واحدة.

= ٤٥×٦ − ∫₀^{٦} (١٥ + ٥س) . دس ①

= ٢٧٠ − (١٥س + ٥/٢ س²) |₀^{٦} = ٢٧٠ − (٩٠ + ٩٠) = ٩٠ دينارا ① ① ①

صيف ٢٠١٦

اذا كان اقتران (السعر-الطلب) لمنتج معين هو $ق(س) = ٤٨ - ٤س$ ، حيث ق السعر بالدنانير س عدد القطع المنتجة ، وكان السعر ثابتاً عند ق = ٢٨ دينارا ، فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن. (٦ علامات)

الحل: $٤٨ - ٤س = ٢٨$

$٤س = ٢٠ \Leftarrow س = ٥$

$ف_{ك} = \int_{٠}^{٥} ق(س) . دس - ق_{ت} . دس = \int_{٠}^{٥} (٤٨ - ٤س) . دس - ٥ \times ٢٨$

$= ٤٨س - ٢س^{٢} \Big|_{٠}^{٥} - ١٤٠$

$= ٢٤٠ - ٥٠ - ١٤٠ = ٢٤٠ - ١٩٠ = ٥٠$ دينارا

شتوي ٢٠١٧

اذا كان اقتران (السعر-الطلب) لمنتج معين هو $ق(س) = ٦٠ - ٨س$ وكان اقتران (السعر-العرض) لهذا المنتج هو $ق_{ع} = ع(س) = ١٠ + ٢س$ فجد فائض المنتج عند سعر التوازن. (٥ علامات)

الحل: $ق(س) = ع(س)$

$٦٠ - ٨س = ١٠ + ٢س \Leftarrow ١٠س = ٥٠ \Leftarrow س = ٥$

$ق_{ت} = ق(٥) = ٦٠ - ٨ \times ٥ = ٢٠$ أو $ع(٥) = ١٠ + ٢ \times ٥ = ٢٠$

$ف_{ج} = \int_{٠}^{٥} (٢٠ - ١٠ - ٢س) . دس = \int_{٠}^{٥} (١٠ - ٢س) . دس = ١٠س - س^{٢} \Big|_{٠}^{٥}$

$= ١٠ \times ٥ - ٥^{٢} = ٢٥$ دينار

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

مبدأ العد

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار لجنة مكونة من مدير ونائب له وأمين سر من بين (٥) مرشحين؟

أ) ٦ ب) ١٠ ج) ٦٠ د) ١٢٠

إذا كان ٣×ن! = ٧٢ ، فإن قيمة (ن) تساوي :

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٣ د) ٢

شتوي ٢٠١٠

في احد المطاعم يباع (٤) أنواع من الخضار هي (بندورة، خس، ملفوف، فاصوليا) و (٣) أنواع من اللحوم هي (لحم خاروف، عجل، دجاج) أراد أحد أن يشتري نوعاً واحداً من الخضار ونوعاً واحداً من اللحم، فإن عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها اختيار ذلك هي :

أ) ٤×٢ ب) ٤×٣ ج) ٤!×٣! د) ل(٤،٣)

صيفي ٢٠١١

إذا كان ٣(ن!) + ١٣ = ٣٦٦ جد قيمة ن. (٥ علامات)

٣ن! + ٦ = ٣٦٦ (١)

٣ن! = ٣٦٠ (١) ⇐ ن! = ١٢٠ (١)

ن! = ٥×٤×٣×٢×١ (١)

ن = ٥ (١)

شتوي ٢٠١٢

إذا كان ن! = ٢٤ ، فإن قيمة ن تساوي :

أ) ٢٤! ب) ٢٤ ج) ٤! د) ٤

صيفي ٢٠١٢

قيمة ٢! + ٣! تساوي :

أ) ٨ ب) ٨! ج) ٥ د) ٥!

تبيع إحدى المكتبات (٣) أنواع من الأقلام و (٤) أنواع من الدفاتر، بكم طريقة ممكنة لأحد الطلاب شراء قلم ودفتر من هذه المكتبة؟

أ) $\frac{٤!}{(٤-٣)!}$ ب) ٤×٣ ج) $\frac{٤!}{(٤-٣)!\,٣!}$ د) $٣! \times ٤!$

صفحة ٢٠١٣

بكم طريقة ممكنة اختيار كتابين من بين سبع كتب مختلف؟

أ) ٤٢ ب) ٢١ ج) ١٤ د) ٧

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

التباديل والتوافيق

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٧

اذا علمت أن ل(٥، ر) = ٢٠ ، فإن قيمة ر تساوي :

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) ٥

عدد الطرق الممكنة لاختيار (٣) طلاب للقيام برحلة من بين (٥) طلاب تساوي :

أ) $\binom{٥}{٣}$ ب) ٥! ج) ل(٥، ٣) د) ٣!

جد قيمة $\frac{ل(٥، ٣)}{٣!} \times \binom{٥}{٢}$ (٤ علامات)

الحل: $\frac{ل(٥، ٣)}{٣!} \times \binom{٥}{٢} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{(٥ \times ٤)}{٢}$ (١) (١) $= \frac{٦٠ \times ١٠}{٦} = ١٠٠$ (١)

صيفي ٢٠٠٧

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار (٤) أسئلة للاجابة عنها من بين (٦) أسئلة :

أ) ل(٦، ٤) ب) $\binom{٦}{٤}$ ج) ٦! د) ٤!

ان قيمة المقدار $\frac{ل(٦، ١)}{٣!}$ تساوي :

أ) ٢ ب) ١ ج) ٥ د) ٩

اذا كان $\binom{ن}{٢} = ٢٨$ ، فأوجد قيمة ن. (٤ علامات)

الحل: $\binom{ن}{٢} = ٢٨ \Leftarrow \frac{ن!}{٢!(ن-٢)!} = ٢٨$ (١)

$\Leftarrow \frac{ن \times (ن-١) \cancel{(ن-٢)!}}{٢! \cancel{(ن-٢)!}} = ٢٨$ (١)

$\Leftarrow ن(ن-١) = ٥٦ \Leftarrow ن^٢ - ن - ٥٦ = ٠$

$(ن-٨)(ن+٧) = ٠$ (١)

$ن = ٨ ، ن = -٧$ مرفوض (١)

شتوي ٢٠٠٨

كم طريقة مختلفة يمكن اختيار لجنة مكونة من مدير ونائب مدير له وأمين سر من بين (٥) مرشحين؟

أ) ٦ ب) ١٠ ج) ٦٠ د) ١٢٠

اذا كان ٣×ن! = ٧٢ ، فإن قيمة (ن) تساوي:

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٣ د) ٢

جد قيمة $\frac{ل(٨،٣)}{٣!}$ (٣ علامات)

الحل: $\frac{ل(٨،٣)}{٣!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} = ٥٦$ (١) (١) (١)

صيفي ٢٠٠٨

اذا كان $\binom{ن}{٣} = \binom{ن}{٥}$ ، فإن قيمة (ن) تساوي:

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٨ د) ١٥

كم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة في إحدى المدارس من بين (٥) معلمين، (٨) طلاب؟ (٦ علامات)

الحل: عدد طرق اختيار (٣) معلمين من بين (٥) معلمين = $\binom{٥}{٣} = \frac{٥!}{٣! \times ٢!} = ١٠$ طرق (١) (١)

عدد طرق اختيار طالبين من بين (٨) طلاب = $\binom{٨}{٢} = \frac{٨!}{٦! \times ٢!} = ٢٨$ طريقة (١) (١)

عدد طرق اختيار اللجنة = $\binom{٥}{٣}\binom{٨}{٢} = ١٠ \times ٢٨ = ٢٨٠$ طريقة. (١) (١)

جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة ل(ن،٣) = ٤ ل(ن،٢) (٣ علامات)

الحل: ل(ن،٣) = ٤ ل(ن،٢)

$\cancel{ن}(ن-١)(ن-٢) = ٤ \times \cancel{ن} \times (ن-١)$ (١) (١)

ن − ٢ = ٤ (١)

ن = ٦

شتوي ٢٠٠٩

مثال (٧) تساوي:

أ) ١٧! ب) ٧ ج) ١٦ د) ٦

جد قيمة (ن) إذا علمت أن: (٤ علامات)

ن! = ل(٥، ٢) + (٤ ، ١)

الحل: ن! = ٥×٤ + ٤ (١)

ن! = ٢٤ (١)

ن! = ٤×٣×٢×١ (١)

ن = ٤ (١)

جد قيمة س التي تحقق المعادلة (٨ ، س) = (٨ ، ٦) (علامتان)

الحل: إما س = ٦ (١)

أو س + ٦ = ٨ ⇐ س = ٢ (١)

صيفي ٢٠٠٩

ل(٧، ٢) تساوي:

أ) ٧! / ٢! ب) ٧! / (٥! ٢!) ج) ٧! / ٥! د) ٧! ٢!

في إحدى الكليات الجامعية (٣١) مدرساً أرادوا أن يختار منهم ممثلاً للكلية ونائباً للعميد فإن عدد الطرق الممكنة لذلك هو:

أ) ٣١! ب) (٣١ ، ٢) ج) ٢! د) ل(٣١، ٢)

إذا علمت أن (٨ ، س٢) = (٨ ، ٦) فجد قيمة س (علامتان)

الحل: إما س٢ = ٦ ⇐ س = ٣ (١)

أو س٢ + ٦ = ٨ ⇐ س٢ = ٢ ⇐ س = ١ (١)

شتوي ٢٠١٠

إذا علمت أن (ن − ١)! = ٢٤ ، فإن قيمة ن تساوي:

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٢٥

عدد التباديل الثلاثية المأخوذة من مجموعة مكونة من ٦ هو:

أ) ٦ × ٣! ب) ٦! × ٣! ج) $\binom{٦}{٣}$ د) ل(٦، ٣)

صيفي ٢٠١٠

كم طريقة ممكنة اختيار ثلاثة طلاب من بين (١٠) طلاب لتشكيل لجنة للمشاركة في إحدى المؤتمرات؟

أ) ل(١٠، ٣) ب) ٣! ج) $\binom{١٠}{٣}$ د) ١٠!

كم طريقة ممكنة اختيار رئيس ونائب من بين (٨) موظفين في إحدى الشركات؟

أ) $\binom{٨}{٢}$ ب) ٢! ج) ٨ × ٧! د) ل(٨، ٢)

حل المعادلة الآتية: $\binom{٩}{٢} = \binom{٩}{س}$ (علامتان)

الحل: إما س = ٢ (١)

أو ٢ + س = ٩ ⇐ س = ٧ (١)

شتوي ٢٠١١

كم عدد تباديل مجموعة من سبعة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة؟

أ) ٧! × ٣! ب) ل(٧، ٣) ج) $\binom{٧}{٣}$ د) ٧ × ٣

$\binom{٦}{٢}$ تساوي:

أ) $\frac{ل(٦، ٢)}{٦!}$ ب) $\frac{٦!}{٤!}$ ج) $\frac{ل(٦، ٢)}{٢!}$ د) $\frac{٦!}{٢!}$

إذا كانت ٢ل(٦، ر) = ٦٠ ، فجد قيمة ر (٣ علامات)

الحل: ٢ل(٦، ر) = ٦٠ ⇐ ل(٦، ر) = ٣٠ (١)

ومنه $\frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{\cancel{٤!}}$ = ٣٠ ⇐ ل(٦، ٢) = ٣٠ (١)

∴ ر = ٢ (١)

جد قيمة $\binom{٧}{٥} \times ٣!$ (٤ علامات)

الحل: $\frac{٧!}{(٧-٥)! \times ٥!} \times ٣! = \frac{٧ \times ٦ \times \cancel{٥!}}{٢! \times \cancel{٥!}} \times ٣ \times ٢$ (١) (١) (١)

$= ٢١ \times ٦ = ١٢٦$ (١)

صيفي ٢٠١١

كم طريقة يمكن اختيار (٤) طلاب و (٣) طالبات لتشكيل لجنة في احدى الكليات من بين (١٠) طلاب و (٥) طالبات ؟

أ) $\binom{١٠}{٤}\binom{٥}{٣}$ ب) $\binom{١٠}{٣}\binom{٥}{٤}$ ج) $ل(١٠،٤) \times ل(٥،٣)$ د) $ل(١٠،٢) \times ل(٥،٤)$

اذا كان $\binom{س}{٤} = \binom{س}{٥}$ ، فان قيمة س تساوي ..

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٩ د) ٢٠

اذا كان $٣(ن!) + ٣! = ٣٦٦$ ، فجد قيمة ن (٥ علامات)

الحل: $٣(ن!) + ٦ = ٣٦٦$ (١)

$٣(ن!) = ٣٦٠$ (١)

$ن! = ١٢٠ \Leftarrow ن! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ (١) (١)

$\Leftarrow ن = ٥$ (١)

شتوي ٢٠١٢

اذا كان $ن! = ٢٤$ فان قيمة ن تساوي:

أ) ٢٤! ب) ٢٤ ج) ٤! د) ٤

ما عدد تباديل مجموعة عدد عناصرها (٥) مأخوذة (٣) من العناصر في كل مرة ؟

أ) $\frac{٥!}{٢!}$ ب) $\frac{٥!}{٣! \, ٢!}$ ج) $\frac{٥!}{٣!}$ د) ٥×٣

مجموعة مكونة من (٨) مطلية و(٤) إيرانية، جد عدد الطرق التي يمكن فيها تكوين لجنة ثلاثية بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل. (٦ علامات)

الحل: $\binom{٨}{١} \times \binom{٤}{٢} + \binom{٨}{٢} \times \binom{٤}{١} + \binom{٨}{٣} \times \binom{٤}{٠}$

$= \frac{٨!}{٧! \times ١!} \times \frac{٤!}{٢! \times ٢!} + \frac{٨!}{٦! \times ٢!} \times \frac{٤!}{٣! \times ١!} + \frac{٨!}{٥! \times ٣!} \times \frac{٤!}{٤! \times ٠!}$

$= ٤٨ + ١١٢ + ٥٦ = ٢١٦$

صيغة ٢١٢

عدد توافيق (٦) عناصر مأخوذة (٣) عناصر في كل مرة يساوي:

أ) ل(٦، ٣) ب) ٦ × ٣ ج) ٣! × ٦! د) $\binom{٦}{٣}$

قيمة ٢! + ٣! تساوي:

أ) ٨ ب) ٨! ج) ٥ د) ٥!

تبيع إحدى المكتبات (٣) أنواع من الأقلام و(٤) أنواع من الدفاتر، بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة شراء قلم ودفتر من هذه المكتبة؟

أ) $\frac{٤!}{(٤-٣)!}$ ب) ٣ × ٤ ج) $\frac{٤!}{(٤-٣)! \times ٣!}$ د) ٣! × ٤!

إذا كانت $\frac{١}{٣}$ ل(ن، ٣) = ل(ن، ٢)، فما قيمة ن؟ (٥ علامات)

الحل: $\frac{١}{٣}$ ل(ن، ٣) = ل(ن، ٢)

⇐ ل(ن، ٣) = ٣ ل(ن، ٢)

$\frac{\cancel{ن!}}{(ن-٣)!} = ٣ \frac{\cancel{ن!}}{(ن-٢)!}$

ن − ٢ = ٣

ن = ٥

شتوي ٢٠١٣

إذا كان ل(ن،٣) = ٦٠ ، فإن $\binom{ن}{٣}$ يساوي:

أ) ٣٦٠ ب) ١٨٠ ج) ٤٠ د) ١٠

قيمة س التي تحقق المعادلة $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٥}$ هي:

أ) ٢ ب) ٥ ج) ٨ د) ٣

كم طريقة ممكنة اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة من بين (٥) معلمين و (٩) طلاب؟ (٣ علامات)

عدد طرق اختيار المعلمين = $\binom{٥}{٣}$ (١)

" " " الطلاب = $\binom{٩}{٢}$ (١)

عدد طرق اختيار اللجنة = $\binom{٥}{٣} \times \binom{٩}{٢}$ (١)

$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} = ٣٦$ طريقة.

جد قيمة (ر) التي تحقق المعادلة ٣ ل(٦، ر) = ٣٦٠ (٣ علامات)

الحل: ل(٦، ر) = ١٢٠ (١)

٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ (١) ، ر = ٣ (١)

صيفي ٢٠١٣

كم طريقة ممكنة اختيار كتابين من بين سبعة كتب مختلفة؟

أ) ٤٢ ب) ٢١ ج) ١٤ د) ٧

مجموعة كل قيم (س) التي تحقق المعادلة $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٨}$ هي:

أ) {٤} ب) {٨} ج) {٤، ٨} د) {٤، ٨، ١٢}

جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة $ن! = ٢ \times \binom{١٠}{٢} + ل(٦، ٢)$ (٥ علامات)

الحل: $ل(٦، ٢) = ٦ \times ٥ = ٣٠$ ①

$\binom{١٠}{٢} = \frac{ل(١٠، ٢)}{٢!} = \frac{١٠ \times ٩}{٢} = \frac{٩٠}{٢} = ٤٥$ ①

$٢ \times \binom{١٠}{٢} = ٢ \times ٤٥ = ٩٠$ ①

$ن! = ٣٠ + ٩٠ = ١٢٠$ ①

$ن! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠ \Leftarrow ن = ٥$ ①

شتوي ٢٠١٤

جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة: $ل(ن، ٣) = ٦ \times \binom{ن}{٢}$ (٥ علامات)

الحل: $ل(ن، ٣) = ٦ \times \binom{ن}{٢}$

$ل(ن، ٣) = ٦ \times \frac{ل(ن، ٢)}{٢!}$ ①

$\cancel{ن}(\cancel{ن}-١)(ن-٢) = ٣ \times \cancel{ن}(\cancel{ن}-١)$ ① ①

$ن - ٢ = ٣$ ومنه $ن = ٥$ ① ①

مجموعة مكونة من (٦) معلمين و (٨) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة تدريبية تتكون من معلمين اثنين على الأقل (٤ علامات)

الحل: عدد طرق تكوين اللجنة $= \binom{٦}{٢} \times \binom{٨}{١} + \binom{٦}{٣}\binom{٨}{٠}$ ①

$= \frac{٦!}{٤! \times ٢!} \times ٨ + \frac{٦!}{٣! \times ٣!} \times ١$ ① $= \frac{٦ \times ٥}{٢} \times ٨ + \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢}$ ①

$= ١٢٠ + ٢٠ = ١٤٠$ ①

صفي ٢٠١٤

اذا كان $\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن،٢)}{٣!}$ ، فما قيمة ن ؟ (٦ علامات)

$\frac{ن!}{٣!(ن-٣)!} = \frac{ن!}{٣!(ن-٢)!}$

$(ن-٣)! = (ن-٢)!$

$\cancel{(ن-٣)!} = (ن-٢)\cancel{(ن-٣)!}$

$١ = ن-٢ \Leftarrow ن = ٣$

اذا كان $ن! = ل(٥،٣) + \frac{٤}{٣} \times \binom{١٠}{٢}$ ، فجد قيمة ن (٥ علامات)

الحل: $ن! = ٥ \times ٤ \times ٣ + \frac{٤}{٣} \times \frac{١٠!}{٢! \times ٨!}$

$= ٦٠ + \frac{٤}{٣} \times \frac{٩ \times ١٠}{٢} = ٦٠ + ٦٠ = ١٢٠$

$ن! = ١٢٠ \Leftarrow ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

إذن $ن = ٥$

شتوي ٢٠١٥

اذا كان $ل(ن،٣) = \binom{ن}{٤}$ فما قيمة ن ؟ (٦ علامات)

الحل: $\frac{ن!}{(ن-٣)!} = \frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$

$= \frac{\cancel{ن!}}{(ن-٣)\cancel{(ن-٤)!}} = \frac{\cancel{ن!}}{٢٤ \times \cancel{(ن-٤)!}}$

$\frac{١}{ن-٣} = \frac{١}{٢٤} \Leftarrow ن - ٣ = ٢٤ \Leftarrow ن = ٢٧$

مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٧) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية من هم بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل (٥ علامات)

الحل: عدد طرق تكوين اللجنة $= \binom{٤}{١} \times \binom{٧}{٢} + \binom{٤}{٢} \times \binom{٧}{١} + \binom{٤}{٣}\binom{٧}{٠}$

$= ٤ \times \frac{٧ \times ٦}{٢} + \frac{٤ \times ٣}{٢} \times ٧ + ٤ \times ١$

$= ٨٤ + ٤٢ + ٤ = ١٣٠$ طريقة

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣١

جد قيمة (قيم) ن في المعادلة $\binom{٩}{٣ن} = \binom{٩}{٦}$ (٤ علامات)

الحل: $٣ن = ٦ \Leftarrow ن = ٢$

أو $٣ن + ٦ = ٩ \Leftarrow ٣ن = ٣ \Leftarrow ن = ١$

صيف ٢٠١٥

مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٦) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة منهم مكونة من رئيس ونائب للرئيس وثلاثة أعضاء بحيث يكون الرئيس معلماً ونائبه طالباً. (٤ علامات)

الحل: عدد طرق تكوين اللجنة $= \binom{٤}{١}\binom{٦}{١}\binom{٨}{٣}$

$= ٤ \times ٦ \times \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣} = ٢٤ \times ٥٦ = ١٣٤٤$ طريقة

جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة:

$(ن-١)! = ل(٦،٣) \times \binom{٤}{٢}$ (٥ علامات)

الحل: $ل(٦،٣) = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$

$\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢} = ٦$

$(ن-١)! = ١٢٠ \times ٦ = ٧٢٠$

$٦! = ٧٢٠ \Leftarrow ن - ١ = ٦ \Leftarrow ن = ٧$

شتوي ٢٠١٦

جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة $(ن+١)! = \binom{١٠}{٣} \times ل(٦،١)$ (٥ علامات)

الحل: $\binom{١٠}{٣} = \frac{ل(١٠،٣)}{٣!} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٦} = ١٢٠$

$ل(٦،١) = ٦$

$(ن+١)! = ١٢٠ \times ٦ = ٧٢٠$

$٦! = ٧٢٠$

$(ن+١) = ٦ \Leftarrow ن = ٥$

مجموعة مكونة من (٤) طلاب من كلية العلوم و (٦) طلاب من كلية الآداب في احدى الجامعات جد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب للرئيس واربعة اعضاء من المجموعة بحيث يكون الرئيس ونائبه من كلية الآداب. (٥ علامات)

الحل: عدد طرق تكوين اللجنة = $\binom{٤}{٢} \times ٦ \times ٥$ (١) (١)

$= \frac{٤!}{٢!(٤-٢)!} \times ٦ \times ٥$ (١)

$= \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} \times ٦ \times ٥$ (١)

$= ٦ \times ٥ \times \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٠٠$ ق (١)

صيغ ٢٠١٦

جد قيمة ن التي تحقق المعادلة:

$ل(ن، ٢) = ١٥ + \binom{٩}{٢}$ (٥ علامات)

الحل: $١٥ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$ (١)

$\binom{٩}{٢} = \frac{ل(٩، ٢)}{٢!} = \frac{٩ \times ٨}{٢} = ٣٦$ (١) (١)

$ل(ن، ٢) = ١٢٠ + ٣٦ = ١٥٦ = ١٣ \times ١٢$ (١)

$\therefore ن = ١٣$ (١)

مجموعة كتب مكونة من (٨) كتب علمية و (٦) كتب ادبية، يرغب طالب في اختيار ثلاثة كتب منها، بكم طريقة يمكنه اختيار الكتب الثلاثة، بحيث يكون بينها كتاب علمي واحد على الأقل؟ (٥ علامات)

الحل: عدد الطرق = $\binom{٨}{١} \times \binom{٦}{٢} + \binom{٨}{٢} \times \binom{٦}{١} + \binom{٨}{٣}\binom{٦}{٠}$ (١) (١) (١)

$= ٨ \times \frac{٦!}{٢! \times ٤!} + \frac{٨!}{٢! \times ٦!} \times ٦ + \frac{٨!}{٣! \times ٥!} \times ١$ (١)

$= ١٢٠ + ١٦٨ + ٥٦ = ٣٤٤$ طريقة (١)

شتوي ٢٠١٧

جد قيمة ن التي تحقق المعادلة الآتية. (٦ علامات)

$(ن-١)! = \frac{٢}{٣} \times ل(٤،٦) - (\frac{١٦}{٢})$

الحل: $(ن-١)! = \frac{٢}{٣} \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ - \frac{١٦ \times ١٥}{٢}$

$= ٢٤٠ - ١٢٠ = ١٢٠$

لكن $٥! = ١٢٠ \Leftarrow ن-١ = ٥ \Leftarrow ن = ٦$

مجموعة مكونة من (٦) معلمين و (٥) إداريين، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية منهم بحيث يكون رئيس اللجنة إداريًا ونائبه معلمًا (٤ علامات)

الحل: عدد الطرق = عدد طرق الرئيس × عدد طرق النائب × عدد طرق اختيار

$= ٥ \times ٦ \times (\frac{٩}{٢})$

$= ٣٠ \times \frac{٩ \times ٨}{٢} = ٣٠ \times ٣٦ = ١٠٨$

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٢ر٠	جـ	٣ر٠	ا ر٠

فإن قيمة (جـ) تساوي:

أ) ١ر٠ ب) ٢ر٠ ج) ٣ر٠ د) ٤ر٠

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذو حدين، معلماته ن = ٤ ، أ = ٣ر٠

أوجد كلاً مما يلي:

١) ل(س = ٢) (٣ علامات)

٢) ل(س ≤ ٣) (٥ علامات)

الحل: ① ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ $(أ)^{ر}$ $(١-أ)^{ن-ر}$ ①

ل(س = ٢) = $\binom{٤}{٢}$ $(٣ر٠)^{٢}$ $(٧ر٠)^{٢}$ ①

= $\frac{٤!}{٢! \times ٢!}$ × ٠٩ر٠ × ٤٩ر٠ = ٢٦٤٦ر٠ ①

② ل(س ≤ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) ① ①

= $\binom{٤}{٣}$ $(٣ر٠)^{٣}$ $(٧ر٠)^{١}$ + $\binom{٤}{٤}$ $(٣ر٠)^{٤}$ $(٧ر٠)^{٠}$ ①

= ٤ × ٠٢٧ر٠ × ٧ر٠ + ١ × ٠٠٨١ر٠ × ١ = ٠٨٣٧ر٠ ① ①

سجلت إحدى القابلات في أحد المستشفيات ولادة ثلاثة أطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة، فإذا علمت أن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات وأن احتمال ولادة الطفل ذكراً يساوي احتمال ولادته أنثى:

١) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور المسجلين في ذلك اليوم في المستشفى فاكتب قيم س الممكنة. (٤ علامات)

٢) ما احتمال أن يكون جميع المواليد من الإناث؟ (٣ علامات)

الحل: س: المتغير العشوائي الدال على عدد الأطفال الذكور

س = {٠، ١، ٢، ٣} ④

٢) احتمال أن يكون جميع المواليد من الإناث ؟

$ل(س = ٠) = (٣)(\frac{1}{2})^{0} \times (\frac{1}{2})^{3}$ (١)

(١)

$= ١ \times ١ \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ (١)

ملاحظة: حل آخر

$\{$ (و،و،و)، (و،و،ب)، (و،ب،و)، (و،ب،ب)، (ب،و،و)، (ب،و،ب)، (ب،ب،و)، (ب،ب،ب) $\}$

١) س = $\{٠، ١، ٢، ٣\}$

٢) احتمال أن يكون جميع المواليد إناث = ل(ب،ب،ب) = $\frac{1}{8}$

صيف ٢٠٠٨

إذا كان احتمال نجاح زراعة التفاح في منطقة جرش (٠,٨)، زرع شخص (٣) شجرات تفاح في حديقة بيته، ما احتمال نجاح زراعتها جميعًا ؟

أ) ٠,٢ ب) $(٠,٢)^{3}$ (٠,٤) $(٠,٨)^{3}$ د) ٠,٤

إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ٥٪، أخذت (٤) قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية، ما احتمال أن يكون عدد القطع المعيبة ثلاثة قطع على الأقل ؟ (٦ علامات)

الحل: نفرض أن س: المتغير العشوائي المنفصل الدال على عدد القطع المعيبة

∴ س = $\{٠، ١، ٢، ٣، ٤\}$ (١)

احتمال أن يكون عدد القطع المعيبة ثلاثة قطع على الأقل = ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) (١) (١) (١)

$= \binom{4}{3}(٠,٠٥)^{3}(٠,٩٥)^{1} + \binom{4}{4}(٠,٠٥)^{4}(٠,٩٥)^{0}$ (١)

$= ٤ \times ٠,٠٠١٢٥ \times ٠,٩٥ + ١ \times ٠,٠٠٠٠٦٢٥$ (١)

$= ٠,٠٠٤٨١٢٥$

شتوي ٢٠٠٩

اجريت ثلاث عمليات جراحية في احد المستشفيات الاردنية وكان احتمال نجاح العملية الواحدة يساوي ٨٠٪.

١) اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العمليات الجراحية الناجحة فاكتب قيم س الممكنة. (٤ علامات)

٢) ما احتمال نجاح عملية جراحية واحدة فقط؟ (علامتان)

الحل: ١) قيم س الممكنة هي ٠، ١، ٢، ٣ (٤)

٢) احتمال نجاح عملية واحدة فقط = ل(س = ١) (١)

$= \binom{3}{1}(0.8)(0.2)^2 = 3 \times 0.8 \times 0.04 = 0.96$ (١)

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين حيث ن = ٣، ل(س ≥ ١) = $\frac{7}{8}$، فجد قيمة م. (٥ علامات)

الحل: ل(س ≥ ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣)

ل(س = ٠) + ل(س ≥ ١) = ١ (١)

ل(س = ٠) = ١ − ل(س ≥ ١) (١)

$= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

ل(س = ٠) = $\binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3 = \frac{1}{8}$ (١)

$1 \times 1 \times (1-p)^3 = \frac{1}{8}$ (١)

$(1-p)^3 = \frac{1}{8}$ (١)

$(1-p) = \frac{1}{2} \Leftarrow p = \frac{1}{2}$.

صيفي ٢٠٠٩

إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ١٠٪، فإذا أخذت (٤) قطع عشوائياً من إنتاج المصنع فما احتمال أن تكون بينها قطعة واحدة على الأكثر معيبة؟ (٤ علامات)

الحل: ل(س ≤ ١) = ل(س = ٠) + ل(س = ١) (١) (١)

$= \binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4 + \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3$ (١) (١)

يحتوي صندوق (٤) كرات حمراء و(٣) كرات بيضاء، سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). (٦ علامات)

الحل:

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{٩}{٤٩}$	$\frac{٢٤}{٤٩}$	$\frac{١٦}{٤٩}$

(٣) (٣)

$ل(٠) = ل(ب، ب) = \frac{٣}{٧} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٩}{٤٩}$

$ل(١) = ل(ب، ح) + ل(ح، ب) = \frac{٣}{٧} \times \frac{٤}{٧} + \frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٢٤}{٤٩}$

$ل(٢) = ل(ح، ح) = \frac{٤}{٧} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٦}{٤٩}$

شتوي ٢٠١٠

في تجربة رمي قطعة نقد مرتين إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة

١) اكتب الفضاء العينة لهذه التجربة (علامتان)

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) (علامتان)

١) ع = { ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك }

٢)

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

(١) (١)

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذي حدين معلماه ن = ٣ ، م = ٠,٣ (٥ علامات)

فجد ل(س < ٢).

(١) (١) (١)

الحل: ل(س < ٢) = ل(س = ٠) + ل(س = ١)

$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (م)^{ر} (١-م)^{ن-ر}$ (١)

$ل(س < ٢) = \binom{٣}{٠} (٠,٣)^{٠} (٠,٧)^{٣} + \binom{٣}{١} (٠,٣)^{١} (٠,٧)^{٢}$

$= ١ \times ١ \times ٠,٣٤٣ + ٣ \times ٠,٣ \times ٠,٤٩$

$= ٠,٣٤٣ + ٠,٤٤١ = ٠,٧٨٤$

(١) (١)

صيفي ٢٠١٠

إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة، فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) هي:

أ) ١، ٢، ٣ ب) ٠، ١، ٢، ٣ ج) ١، ٢ د) ٠، ١، ٢

إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠,٦)، فإذا أطلق (٤) طلقات على الهدف، فما احتمال أن يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل؟ (٥ علامات)

الحل: احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل = ل(س ≥ ١) ١

ل(س ≥ ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) + ل(س = ٤) ١

= ١ − ل(س = ٠) ١

= ١ − (٤)(٠,٦)(٠,٤)^٣ ١

= ١ − (٠,٤)^٤ = ١ − ٠,٠٢٥٦ = ٠,٩٧٤٤ ١

شتوي ٢٠١١

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معلماه ن = ٢، م = ٠,١، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). (٦ علامات)

الحل: ل(س = ٠) = (٢)(٠,١)^٠(٠,٩)^٢ = ٠,٨١ ١

ل(س = ١) = (٢)(٠,١)^١(٠,٩)^١ = ٠,١٨ ١

ل(س = ٢) = (٢)(٠,١)^٢(٠,٩)^٠ = ٠,٠١ ١

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٨١	٠,١٨	٠,٠١

صيف ٢٠١١

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة:

{(١، ٠,٢)، (٢، ٠,١)، (٣، ٠,٤)، (٤، ك)}، فإن قيمة ك تساوي:

أ) ٠,٢ ب) ٠,٣ ج) ٠,٥ د) ٠,١

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معالمه ن = ٣، أ = ٠,٦، فجد ل(س ≥ ٢). (٥ علامات)

ل(س = ر) = (ن ر) (أ)^ر (١ − أ)^(ن − ر) ج١

الحل: ل(س ≥ ٢) = ل(س = ٢) + ل(س = ٣) ج١

= (٣ ٢) (٠,٦)^٢ (٠,٤)^١ + (٣ ٣) (٠,٦)^٣ (٠,٤)^٠ ج١

شتوي ٢٠١٢

في تجربة رمي قطعة نقد (٣) مرات متتالية، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الكتابة اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). (٥ علامات)

الحل: ل(س = ٠) = (٣ ٠) (١/٢)^٠ (١/٢)^٣ = ١/٨ ج١

ل(س = ١) = (٣ ١) (١/٢)^١ (١/٢)^٢ = ٣/٨ ج١

ل(س = ٢) = (٣ ٢) (١/٢)^٢ (١/٢)^١ = ٣/٨ ج١

ل(س = ٣) = (٣ ٣) (١/٢)^٣ (١/٢)^٠ = ١/٨ ج١

ج١

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	١/٨	٣/٨	٣/٨	١/٨

صيف ٢٠١٢

صندوق يحتوي على (٣) كرات بيضاء و(٧) كرات حمراء، سحبت منه الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س. (٦ علامات)

الحل: ل(س = ٠) = (٢ ٠) (٧/١٠)^٠ (٣/١٠)^٢ = ٩/١٠٠

ل(س = ١) = (٢ ١) (٧/١٠)^١ (٣/١٠)^١ = ٤٢/١٠٠

ل(س = ٢) = (٢ ٢) (٧/١٠)^٢ (٣/١٠)^٠ = ٤٩/١٠٠

س	٠	١	٢
ل(س)	٩/١٠٠	٤٢/١٠٠	٤٩/١٠٠

شتوي ٢٠١٣

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة
{(١، ٠,٤)، (٢، ٠,٥)، (٣، ب)} فما قيمة ب ؟

أ) ١ ب) ٠,٩ ج) ٠,١ د) ٠,٠١

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معلماه ن = ٢ ، أ = ٠,٣ فجد:

(٥ علامات)

١) قيم س

٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل: (س) تأخذ القيم {٠، ١، ٢} ج١

ل(٠) = $(^{2}_{0})$ (٠,٣)^{0} (٠,٧)^{2} = ٠,٤٩ ج١

ل(١) = $(^{2}_{1})$ (٠,٣)^{1} (٠,٧)^{1} = ٠,٤٢ ج١

ل(٢) = $(^{2}_{2})$ (٠,٣)^{2} (٠,٧)^{0} = ٠,٠٩ ج١

جدول التوزيع الاحتمالي هو

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٤٩	٠,٤٢	٠,٠٩

صيفي ٢٠١٣

زرع شخص شجرتين في حديقة منزله، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأشجار الناجحة وكان احتمال نجاح زراعة الشجرة الواحدة (٠,٨)، فأجب عما يأتي:

(٥ علامات)

١) اكتب قيم س

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل: (س) تأخذ القيم {٠، ١، ٢} ج١

ل(٠) = $(^{2}_{0})$ (٠,٨)^{0} (٠,٢)^{2} = ٠,٠٤ ج١

ل(١) = $(^{2}_{1})$ (٠,٨)^{1} (٠,٢)^{1} = ٠,٣٢ ج١

ل(٢) = $(^{2}_{2})$ (٠,٨)^{2} (٠,٢)^{0} = ٠,٦٤ ج١

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٠٤	٠,٣٢	٠,٦٤

شتوي ٢٠١٤

إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة وأن احتمال ولادة الطفل ذكراً يساوي احتمال ولادته أنثى. اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). (٥ علامات)

الحل: (س) تأخذ القيم {٠، ١، ٢، ٣}

$$ل(س=ر) = \binom{ن}{ر}(م)^{ر}(1-م)^{ن-ر}$$

حيث ن = ٣ ، م = $\frac{1}{2}$

$$ل(٠) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$$ (١)

$$ل(١) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{3}{8}$$ (١)

$$ل(٢) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{3}{8}$$ (١)

$$ل(٣) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{8}$$ (١)

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

صيفي ٢٠١٤

إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين، معلماه ن = ٤ ، م وكان ل(س ≥ ١) = $\frac{15}{16}$ فجد: (٦ علامات)

١) قيمة م

٢) ل(س = ٣)

الحل ① ل(س ≥ ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) + ل(س = ٤) = $\frac{15}{16}$

ومنه ١ − ل(س = ٠) = $\frac{15}{16}$ ⇐ ل(س = ٠) = $\frac{1}{16}$ (١) (١)

لكن ل(س = ٠) = $\binom{4}{0}(م)^{0}(1-م)^{4}$ = $\frac{1}{16}$ ⇐ $(1-م)^{4} = \frac{1}{16}$ ⇐ $1-م = \frac{1}{2}$ ⇐ $م = \frac{1}{2}$ (١) (١)

② ل(س = ٣) = $\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (١)

شتوي ٢٠١٥

قررت احدى شركات الاستيراد رفض مستورداتها من الشركة المصنعة اذا وُجدت وحدتان معيبتان او اكثر في عينة عشوائية مكونة من ٦ وحدات، فاذا كانت نسبة المعيب في انتاج الشركة المصنعة ١٠٪ فما احتمال قبول الشركة المستوردة للشحنة؟ (٦ علامات)

الحل: احتمال قبول الشحنة = ل(س ≤ ١) ①

= ل(س = ٠) + ل(س = ١) ①

ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ $(أ)^{ر}$ $(١-أ)^{ن-ر}$

أ = ٠,١ ، ن = ٦ ① ①

ومنه ل(س = ٠) + ل(س = ١) = $(٦)^{٠}(٠,١)^{٠}(٠,٩)^{٦} + (٦)^{١}(٠,١)^{١}(٠,٩)^{٥}$ ①

= ١ × ١ × ٠,٥٣ + ٦ × ٠,١ × ٠,٥٩ ①

= ٠,٥٣ + ٠,٣٥ = ٠,٨٨

صيفي ٢٠١٥

اجريت ثلاث عمليات جراحية في احد المستشفيات الاردنية وكان احتمال نجاح العملية الواحدة ٨٠٪ إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العمليات الناجحة، كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س). (٦ علامات)

الحل: س يأخذ القيم {٠، ١، ٢، ٣} ①

ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ $(أ)^{ر}$ $(١-أ)^{ن-ر}$ حيث ن = ٣ ، أ = ٠,٨

ل(٠) = $(٣)^{٠}(٠,٨)^{٠}(٠,٢)^{٣}$ = ٠,٠٠٨ ①

ل(١) = $\binom{٣}{١}(٠,٨)^{١}(٠,٢)^{٢}$ = ٠,٠٩٦ ①

ل(٢) = $\binom{٣}{٢}(٠,٨)^{٢}(٠,٢)^{١}$ = ٠,٣٨٤ ①

ل(٣) = $\binom{٣}{٣}(٠,٨)^{٣}(٠,٢)^{٠}$ = ٠,٥١٢ ①

جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٠٠٨	٠,٠٩٦	٠,٣٨٤	٠,٥١٢

شتوي ٢٠١٦

يحتوي صندوق على (٤) كرات حمراء، (٦) كرات بيضاء سُحبت من الصندوق (٣) كرات على التوالي مع الإرجاع، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س. (٦ علامات)

الحل: س تأخذ القيم {٠، ١، ٢، ٣}

$ل(س=ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١-أ)^{ن-ر}$ حيث ن = ٣ ، $أ = \frac{٤}{١٠}$

$ل(٠) = \binom{٣}{٠} (٠,٤)^{٠} (٠,٦)^{٣} = ٠,٢١٦$ (١)

$ل(١) = \binom{٣}{١} (٠,٤)^{١} (٠,٦)^{٢} = ٠,٤٣٢$ (١)

$ل(٢) = \binom{٣}{٢} (٠,٤)^{٢} (٠,٦)^{١} = ٠,٢٨٨$ (١)

$ل(٣) = \binom{٣}{٣} (٠,٤)^{٣} (٠,٦)^{٠} = ٠,٠٦٤$ (١)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢١٦	٠,٤٣٢	٠,٢٨٨	٠,٠٦٤

صيفي ٢٠١٦

مرت إحدى شركات استيراد مصابيح كهربائية رفضاً أي شحنة من مستوردها إذا وجدت وحدتان معيبتان أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٨) وحدات. إذا كانت نسبة المعيب في إنتاج الشركة المورد ١٠٪، فما احتمال قبول الشركة للشحنة؟ (٦ علامات)

الحل: احتمال قبول الشحنة = احتمال وجود أقل من وحدتين معيبتين

$= ل(س < ٢) = ل(س=٠) + ل(س=١)$ (١)

$ل(س=ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١-أ)^{ن-ر}$

ن = ٨ ، أ = ٠,١ (١) (١)

ومنه $ل(س<٢) = \binom{٨}{٠} (٠,١)^{٠} (٠,٩)^{٨} + \binom{٨}{١} (٠,١)^{١} (٠,٩)^{٧}$

$= (1)\times(1)\times(0,9)^{8} + 8\times 0,1\times(0,9)^{7} = 0,81$ (١) (١)

شتوي ٢٠١٧

صندوق يحتوي على (٥) بطاقات مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٥، سحبت من الصندوق بطاقتان على التوالي مع الإرجاع بطريقة عشوائية، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد البطاقات المسحوبة التي تحمل رقماً زوجياً، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

٦ علامات

الحل: س تأخذ القيم {٠، ١، ٢} ①

$ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (م)^{ر} (١-م)^{ن-ر}$ ①

$ن = ٢ \qquad م = \frac{٢}{٥}$

$ل(٠) = \binom{٢}{٠} (\frac{٢}{٥})^{٠} (\frac{٣}{٥})^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$ ①

$ل(١) = \binom{٢}{١} (\frac{٢}{٥})^{١} (\frac{٣}{٥})^{١} = \frac{١٢}{٢٥}$ ①

$ل(٢) = \binom{٢}{٢} (\frac{٢}{٥})^{٢} (\frac{٣}{٥})^{٠} = \frac{٤}{٢٥}$ ①

جدول التوزيع الاحتمالي ①

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{١٢}{٢٥}$	$\frac{٤}{٢٥}$

عامر الصبيح ٠٧٩٠١٤١٦٣٩

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

العلامة المعيارية

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

في توزيع تكراري إذا كانت العلامة الخام (٦٠) تقابل العلامة المعيارية (٣)، وكان الوسط الحسابي (٥٤) فإن الانحراف المعياري لهذا التوزيع يساوي:

أ) -٢ ب) ٢ ج) ٦ د) -٦

صيفي ٢٠٠٨

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠)، والانحراف المعياري لها يساوي (٤) فإن القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي تساوي:

أ) ٥٠ ب) ٥٢ ج) ٥٦ د) ٥٨

شتوي ٢٠٠٩

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) تساوي:

أ) ٢ ب) ٠,٤ ج) -٠,٤ د) -٢

صيفي ٢٠١٠

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة أحد الصفوف في مبحث الرياضيات (٧٠) والانحراف المعياري (٥) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٦٠) هي:

أ) -٢ ب) ١ ج) ٢ د) -١٠

شتوي ٢٠١١

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٥) والانحراف المعياري لها (٦) فجد العلامة التي تنحرف قيمة الوسط انحرافين معياريين. (٥ علامات)

الحل: ز = ٢ (١)

لكن ز = (س - س̄) / ع (١)

٢ = (س - ٦٥) / ٦ (١) ⇐ س = ٦٥ + ١٢ (١)

⇐ س = ٧٧ (١)

صيفي ٢٠١١

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤) وكانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد كساري (-٣)، فجد علامته الفعلية التي حصل عليها (٥ علامات)

الحل: $\bar{س} = ٦٠$ ، $ع = ٤$ ، $ز = -٣$

المطلوب $س = ؟!$

الحل: $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow -٣ = \frac{س - ٦٠}{٤}$

$\Leftarrow -١٢ = ٦٠ + س$

$\Leftarrow س = ٤٨$

شتوي ٢٠١٢

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠) والانحراف المعياري لها (٣) فجد العلامة التي تنحرف عنه لوسط انحرافين معياريين (٣ علامات)

الحل: $\bar{س} = ٦٠$ ، $ع = ٣$ ، $ز = ٢$

المطلوب $س = ؟!$

الحل: $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ٢ = \frac{س - ٦٠}{٣}$

$\Leftarrow ٦ = س - ٦٠$

$\Leftarrow ٦ + ٦٠ = س \Leftarrow س = ٦٦$

صيفي ٢٠١٢

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة الرياضيات (٦٠)، والانحراف المعياري لها (٤) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٦) هي:

أ) -١ ب) ٤ ج) ١ د) -٤

شتوي ٢٠١٣

إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص (٤٢) سنة والانحراف المعياري لها (٤) فإن العمر الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي هو:

أ) ٣٤ ب) ٥٠ ج) ٤٠ د) ٣٨

صيف ٢٠١٣

في توزيع تكراري إذا كانت العلامة الخام (٧٨) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان الوسط الحسابي للتوزيع (٦٠)، فإن الانحراف المعياري للتوزيع يساوي:

أ) ١٨ ب) ١٢ ج) ٩ د) ٦

شتوي ٢٠١٤

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلب في أحد الصفوف في مادة العلوم (٦٠) والانحراف المعياري لها (٦) أجب عما يأتي: (٤ علامات)

١) جد العلامة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي.

٢) إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في مادة العلوم ٩، فما الفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهاتين العلامتين؟

الحل: ١) $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ⇐ $٢ = \frac{س - ٦٠}{٦}$ (١)

⇐ $س = ٦٠ + ٦ \times ٢$

$س = ٧٢$ (١)

٢) $ز_١ - ز_٢ = \left(\frac{س_١ - \bar{س}}{ع}\right) - \left(\frac{س_٢ - \bar{س}}{ع}\right)$

$= \left(\frac{س_١ - ٦٠}{٦}\right) - \left(\frac{س_٢ - ٦٠}{٦}\right) = \frac{س_١ - \cancel{٦٠} - س_٢ + \cancel{٦٠}}{٦}$

$= \frac{س_١ - س_٢}{٦} = \frac{٩}{٦} = ١,٥$

ملاحظة: يمكن حل الفرع (٢) عن طريق $\Delta ز = \frac{\Delta س}{ع}$ ، $\Delta س$: الفرق بين العلامتين، $\Delta ز$: الفرق بين العلامتين المعياريتين

شتوي ٢٠١٦

إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص (٤٥) عاماً والانحراف المعياري لها (٤) أعوام أجب عما يأتي: (٥ علامات)

١) جد العمر الذي ينحرف انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي

٢) إذا كان الفرق بين عمري شخصين من المجموعة نفسها ١٠ سنوات، فما الفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهذين العمرين؟

الحل: ① $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ⇐ $٢ = \frac{س - ٤٥}{٤}$ (١)

⇐ $س = ٢ \times ٤ + ٤٥$ (١)

⇐ $س = ٥٣$ عاماً

② $س_١ - س_٢ = ١٠$ سنوات

جـ $ز_١ - ز_٢$

وعليه $ز_١ - ز_٢ = \left(\frac{س_١ - \bar{س}}{ع}\right) - \left(\frac{س_٢ - \bar{س}}{ع}\right)$ (١)

$= \left(\frac{س_١ - ٤٥}{٤}\right) - \left(\frac{س_٢ - ٤٥}{٤}\right) = \frac{س_١ - \cancel{٤٥} + س_٢ + \cancel{٤٥}}{٤}$ (١)

$= \frac{س_١ - س_٢}{٤} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥$ (١)

شتوي ٢٠١٧

اذا كانت علامتا طالبين من الصف نفسه في مبحث اللغة العربية ٩٠، ٧٥، والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما ٢، -١ على الترتيب، فجد الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في مبحث اللغة العربية في هذا الصف (٤ علامات)

الحل: $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ $ز_١ = ٢$ ، $س_١ = ٩٠$

$ز_٢ = -١$ ، $س_٢ = ٧٥$

وعليه $٢ = \frac{٩٠ - \bar{س}}{ع}$ ... ① ⇐ $\bar{س} = ٩٠ - ٢ع$ (١)

$-١ = \frac{٧٥ - \bar{س}}{ع}$ ... ② ⇐ $\bar{س} = ٧٥ + ع$ (١)

وعليه $٩٠ - ٢ع = ٧٥ + ع$ ⇐ $٣ع = ٩٠ - ٧٥$ (١)

$\frac{٣ع}{٣} = \frac{١٥}{٣}$ ⇐ $ع = ٥$

وبتعويض قيمة $ع = ٥$ ⇐ $\bar{س} = ٩٠ - ٢ \times ٥$

$\bar{س} = ٩٠ - ١٠$ (١)

$\therefore \bar{س} = ٨٠$

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

التوزيع الطبيعي

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

(٦ علامات)

إذا كانت أوزان طلب إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً وسط حسابي (٤٥) كغم وانحراف معياري (٤) كغم، اختير أحد الطلب عشوائياً، ما احتمال أن يكون من الطلب الذين تنحصر أوزانهم بين (٤٣) كغم، (٤٩) كغم؟

* ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل: احتمال أن يكون وزن الطالب محصور بين ٤٣ كغم و ٤٩ كغم = ل(٤٣ ≤ س ≤ ٤٩)

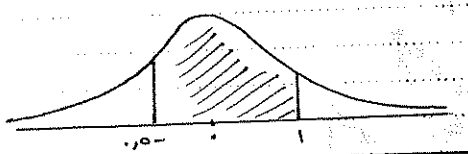
وعليه ل(٤٣ ≤ س ≤ ٤٩) = ل$\left(\frac{٤٣-٤٥}{٤} \le ز \le \frac{٤٩-٤٥}{٤}\right)$ (١)

= ل(-٠,٥ ≤ ز ≤ ١) (١)

= ل(ز ≤ ١) - ل(ز ≤ -٠,٥) (١)

= ل(ز ≤ ١) - (١ - ل(ز ≤ ٠,٥)) (١)

= ٠,٨٤١٣ - (١ - ٠,٦٩١٥) = ٠,٥٣٢٨ (١)



صيفي ٢٠٠٨

تقدم (٥٠٠٠) طالب لامتحان ما، وكان توزيع نتائجهم يتخذ شكل التوزيع الطبيعي المعياري بوسط حسابي (٧٠) وانحراف معياري (٥)، وكانت علامة النجاح (٦٠)، اختير أحد الطلب عشوائياً:

١) ما احتمال أن يكون الطالب من بين الناجحين؟ (٥ علامات)

٢) ما عدد الطلب الناجحين في هذا الامتحان؟ (علامتان)

* ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل: ١) احتمال أن يكون الطالب ناجحاً = ل (س ≥ ٦٠)

وعليه ل (س ≥ ٦٠) = ل (ز ≥ (٦٠ − ٧٠) / ٥)

= ل (ز ≥ −٢) = ل (ز ≤ ٢) = ٠,٩٧٧٢

٢) عدد الطلبة الناجحين = احتمال النجاح × عدد الطلبة

= ٠,٩٧٧٢ × ٥٠٠٠ = ٤٨٨٦ طالب

شتوي ٢٠٠٩ (٥ علامات)

اذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (٣,٢) كغم وانحرافه المعياري (٠,٤) كغم، اختير أحد الأطفال عشوائياً عند الولادة ما احتمال أن يكون وزنه أكثر من (٤) كغم؟

* ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل: نفرض س: وزن الطفل الذي تم اختياره عشوائياً

احتمال أن يكون وزن الطفل أكثر من ٤ كغم = ل (س ≥ ٤)

ل (س ≥ ٤) = ل (ز ≥ (٤ − ٣,٢) / ٠,٤) = ل (ز ≥ ٠,٨ / ٠,٤)

= ل (ز ≥ ٢) = ١ − ل (ز ≤ ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

صيفي ٢٠٠٩

(٧ علامات).

تقدم في امتحان عام (٥٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١) وانحراف معياري (٦)، جد عدد الطلب الناجحين في الامتحان علماً بأن علامة النجاح (٥٠).

* ملاحظة: (يمكن الاستفادة من الجدول الآتي)

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل: احتمال أن يكون الطالب ناجحاً = ل(س ≥ ٥٠) (١)

= ل(ز ≥ (٥٠ − ٤١)/٦) (١)

= ل(ز ≥ ١,٥) (١)

= ١ − ل(ز ≤ ١,٥) (١) = ١ − ٠,٩٣٣٢ = ٠,٦٦٨ (١)

وعليه فإن عدد الطلب الناجحين = عدد الطلاب الكلي × احتمال النجاح (١)

= ٥٠٠٠ × ٠,٦٦٨ = ٣٣٤ طالب (١)

شتوي ٢٠١٠

تقدم في امتحان الثانوية العامة في احدى السنوات (٢٠٠٠) طالب من طلبة احد الفروع المهنية، وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧) وانحراف معياري (١٦) اذا علمت أنه لا يسمح للطالب الذي معدله أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية جد عدد الطلب الذين الذين لهم الحق بتقديم طلبات. (٧ علامات)

* ملاحظة: (يمكن الاستفادة من الجدول الآتي).

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

(١)

الحل: عدد الطلب الذين لهم الحق بتقديم طلبات = عدد الطلب المتقدمين من الفرع المهني × احتمال النجاح

لكن احتمال النجاح = ل(س ≥ ٦٥) (١) = ل(ز ≥ (٦٥ − ٥٧)/١٦) (١)

= ل(ز ≥ ٨/١٦) = ل(ز ≥ ٠,٥) (١)

= ١ − ل(ز ≤ ٠,٥) (١)

= ١ − ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥ (١)

وعليه فإن عدد الطلب الذين لهم الحق بتقديم طلبات

= ٢٠٠٠ × ٠,٣٠٨٥ = ٦١٧ طالباً (١)

عامر الصبح 0790141631

صيف ٢٠١٠

إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي للعلامات (٥٥) بانحراف المعياري (١٠)، وكان عدد الناجحين (٥٣٩٨) طالباً، فما علامة النجاح؟

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي: (٧ علامات)

ز	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥
ل(ز)	٠,٥٣٩٨	٠,٥٧٩٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٥٥٤	٠,٦٩١٥

الحل: عدد الطلاب الناجحين = عدد الطلاب الكلي × احتمال النجاح

٥٣٩٨ = ١٠٠٠٠ × احتمال النجاح

احتمال النجاح = $\frac{٥٣٩٨}{١٠٠٠٠}$ = ٠,٥٣٩٨ (١)

بفرض أن القيمة المعيارية لعلامة النجاح هي (م)

وعليه ل(ز > م) = ٠,٥٣٩٨ (١) ⟸ م = -٠,١ (٢)

ومنه -٠,١ = $\frac{س - ٥٥}{١٠}$ (١) ⟸ -١ = س - ٥٥ (١)

⟸ س = ٥٥ - ١ (١)

⟸ س = ٥٤

شتوي ٢٠١١

من خصائص التوزيع الطبيعي المعياري أن وسطه الحسابي يساوي:

أ) ١ ب) صفر ج) -١ د) $\frac{١}{٢}$

تتخذ أعمار ١٠٠٠٠ شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٢) سنة وانحراف معياري (٨) سنوات، ما عدد الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن ٦٠ سنة؟ (٥ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي:

ز	٠,٨	٠,٩	١,٠	١,١	١,٢	١,٣
ل(ز)	٠,٧٨٨١	٠,٨١٥٩	٠,٨٤١٣	٠,٨٦٤٣	٠,٨٨٤٩	٠,٩٠٣٢

الحل: ل(س > ٦٠) = ل(ز > $\frac{٦٠ - ٥٢}{٨}$) (١) = ل(ز > ١) (١) = ١ - ل(ز ≤ ١) (١)

= ١ - ٠,٨٤١٣ = ٠,١٥٨٧ (١)

وعليه عدد الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن ٦٠ سنة

٠,١٥٨٧ × ١٠٠٠٠ = ١٥٨٧ شخصاً (١)

صيفي ٢٠١١

إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣,٥) كغم وانحراف معياري (٠,٥) كغم، إذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة، ما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٣) كغم؟ (٥ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي:

ز	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	١
ل(ز)	٠,٦٩١٥	٠,٧٢٥٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٨٨١	٠,٨١٥٩	٠,٨٤١٣

الحل: ل(س > ٣) = ل(ز > $\frac{٣ - ٣,٥}{٠,٥}$) = ل(ز > $\frac{-٠,٥}{٠,٥}$) ١

= ل(ز > -١) ١

= ل(ز ≤ ١) = ٠,٨٤١٣ ١ ١

شتوي ٢٠١٢

إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً وكان ل(ز ≤ أ) = ٠,٦ ، فإن قيمة ل(ز > -أ) تساوي:

أ) ٠,٦ ب) ٠,٤ ج) -٠,٤ د) ٠,٦

إذا كانت أوزان ١٠٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤٥) كغم وانحراف معياري (٤) كغم، ما عدد الطلب الذين تزيد أوزانهم عن (٥٠) كغم؟ (٧ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي:

ز	٠,٢٥	٢,٥	١,٢	١,٢٥	١,٥٢	٠,٨
ل(ز)	٠,٥٩٨٧	٠,٩٩٣٨	٠,٨٨٤٩	٠,٨٩٤٤	٠,٩٣٥٧	٠,٧٨٨١

الحل: ل(س > ٥٠) = ل(ز > $\frac{٥٠ - ٤٥}{٤}$) ١

= ل(ز > $\frac{٥}{٤}$) = ل(ز > ١,٢٥) ١

= ١ - ل(ز ≤ ١,٢٥) ١

= ١ - ٠,٨٩٤٤ = ٠,١٠٥٦ ١

عدد الطلب الذين تزيد أوزانهم عن ٥٠ كغم

= عدد الطلب الكلي × الاحتمال

= ١٠٠٠٠ × ٠,١٠٥٦ = ١٠٥٦ طالباً ١

صيفي ٢٠١٢

إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في إحدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهرياً، وانحراف معياري (١٠) دنانير، فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٢٨٠ ديناراً و ٣٢٠ ديناراً ؟

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالجدول المجاور (٩ علامات)

ز	٣	٢,٥	٢	١,٥	٠,٢
ل(ز)	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٣٨	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٥٧٩٣

الحل: ل(٢٨٠ ≤ س ≤ ٣٢٠) (١)

= ل((٢٨٠ − ٣٠٠)/١٠ ≤ ز ≤ (٣٢٠ − ٣٠٠)/١٠) (١)

= ل(−٢ ≤ ز ≤ ٢) (١)

= ل(ز ≤ ٢) − ل(ز ≤ −٢) (١)

= ل(ز ≤ ٢) − (١ − ل(ز ≤ ٢)) (١)

= ٠,٩٧٧٢ − (١ − ٠,٩٧٧٢) (١) = ٠,٩٥٤٤ (١)

∴ عدد الموظفين = ٠,٩٥٤٤ × ١٠٠٠٠ = ٩٥٤٤ موظفاً (١)

شتوي ٢٠١٣

تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان عام وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٤) وانحراف معياري (٨)، جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان إذا كانت علامة النجاح (٥٠)

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالجدول الآتي: (٦ علامات)

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل: ل(س ≥ ٥٠) = ل(ز ≥ (٥٠ − ٥٤)/٨) (١) (١)

= ل(ز ≥ −٠,٥) (١)

= ل(ز ≤ ٠,٥) = ٠,٦٩١٥ (١)

∴ عدد الطلبة الناجحين = العدد الكلي × الاحتمال

= ١٠٠٠٠ × ٠,٦٩١٥ = ٦٩١٥ طالباً (١) (١)

صيف ٢٠١٣

الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي المعياري هو:

أ) ١- ب) صفر ج) ٠,٥ د) ١

تتخذ أوزان (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٧٥) كغم، وانحراف معياري (٥) كغم جد عدد الأشخاص الذين تقل أوزانهم عن (٧٢) كغم (٦ علامات)

* ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ز	٠	٠,٦	١,٦	٢	٢,٦	٣
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٧٢٥٧	٠,٩٤٥٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٨٧

الحل: ل(س < ٧٢) = ل(ز < (٧٢ - ٧٥)/٥) (١)

= ل(ز < -٣/٥) = ل(ز < -٠,٦) (١)

= ١ - ل(ز < ٠,٦) (١)

= ١ - ٠,٧٢٥٧ = ٠,٢٧٤٣ (١)

∴ عدد الأشخاص الذين تقل أوزانهم عن ٧٢ كغم (١)

= ٢٠٠٠٠ × ٠,٢٧٤٣ = ٥٤٨٦ شخصاً

شتوي ٢٠١٤

اذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي للعلامات (٦٢) والانحراف المعياري هو (١٠)، وكان عدد الطلبة الناجحين (٥٧٩٣) طالباً فما علامة النجاح؟ (٧ علامات)

* ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ز	٠	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٥٣٩٨	٠,٥٧٩٣	٠,٦٥٥٤	٠,٦٩١٥

الحل: عدد الطلبة الناجحين = عدد الطلبة × الاحتمال (١) (١)

٥٧٩٣ = ١٠٠٠٠ × ل(ز > جـ) ⟸ ل(ز > جـ) = ٠,٥٧٩٣

ومنه جـ = ٠,٢ وعليه ز = (س - س̄)/ع (١)

٠,٢ = (س - ٦٢)/١٠ ⟸ س = ٢ + ٦٢ = ٦٠ (١) (١) (١)

صيفي ٢٠١٤

إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي لرواتبهم (٣٥٠) دينار، والانحراف المعياري لها (٢٥) ديناراً، فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين (٣٢٥) ديناراً و (٤٠٠) ديناراً؟ (٧ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز ≤ م)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل: ل(٣٢٥ ≤ س ≤ ٤٠٠) = ل((٣٢٥ − ٣٥٠)/٢٥ ≤ ز ≤ (٤٠٠ − ٣٥٠)/٢٥) (١)

= ل(−١ ≤ ز ≤ ٢) (١)

= ل(ز ≤ ٢) − ل(ز ≤ −١) (١)

= ل(ز ≤ ٢) − (١ − ل(ز ≤ ١)) (١)

= ٠,٩٧٧٢ − (١ − ٠,٨٤١٣) = ٠,٨١٨٥ (١)

عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٣٢٥ و ٤٠٠ دينار

١٠٠٠٠ × ٠,٨١٨٥ = ٨١٨٥ موظفاً (١) (١)

شتوي ٢٠١٥

تقدم (١٥٠٠٠) طالباً لامتحان ما، وكانت نتائجهم تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٥) والانحراف المعياري (٥) وعلامة النجاح (٦٠)، جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان.

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. (٧ علامات)

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز ≤ م)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل: ل(س ≥ ٦٠) = ل(ز ≥ (٦٠ − ٦٥)/٥) (١) (١)

= ل(ز ≥ −١) (١) (١)

ل(ز ≥ −١) = ل(ز ≤ ١) = ٠,٨٤١٣ (١)

عدد الطلبة الناجحين = العدد الكلي × الاحتمال

= ١٥٠٠٠ × ٠,٨٤١٣ (١)

= ١٢٦١٩,٥ ≈ ١٢٦٢٠ طالباً (١)

صيف ٢٠١٥

يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات وعددهم (٦٠٠٠) طالباً للتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (١٠٨) وانحرافه المعياري (١٠)، ما عدد الطلبة الذين ينحصر معامل ذكائهم بين (١٠٣) و (١١٨)؟ (٧ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز≤م)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل: $ل(١٠٣ \le س \le ١١٨) = ل\left(\frac{١٠٣-١٠٨}{١٠} \le ز \le \frac{١١٨-١٠٨}{١٠}\right)$ (١)

$= ل(-٠,٥ \le ز \le ١)$ (١)

$= ل(ز \le ١) - ل(ز \le -٠,٥)$ (١)

$= ل(ز \le ١) - (١ - ل(ز \le ٠,٥))$ (١)

$= ٠,٨٤١٣ - (١ - ٠,٦٩١٥) = ٠,٥٣٢٨$ (١)

وعليه فإن عدد الطلبة الذين ينحصر معاملات ذكائهم بين ١٠٣، ١١٨

$= ٦٠٠٠ \times ٠,٥٣٢٨ = ٣١٩٧$ طالباً (١)

شتوي ٢٠١٦

إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي للعلامات (٥٨) والانحراف المعياري لها (١٠) وكان عدد الطلبة الناجحين (٦١٧٩) طالباً فجد علامة النجاح. (٧ علامات)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	٠	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥
ل(ز≤م)	٠,٥٠٠٠	٠,٥٣٩٨	٠,٥٧٩٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٥٥٤	٠,٦٩١٥

الحل: نفرض أن القيمة المعيارية لعلامة النجاح (ج) وأن علامة النجاح س (١)

نسبة الناجحين $= \frac{٦١٧٩}{١٠٠٠٠} = ٠,٦١٧٩ = ل(ز \ge ج)$ (١)

وحيث أن $ل(ز \le ٠,٣) = ٠,٦١٧٩$ فإن $ل(ز \le ٠,٣) = ل(ز \ge -٠,٣)$ (١)

وعليه فإن $ج = -٠,٣$ ومنه $-٠,٣ = \frac{س - ٥٨}{١٠}$ (١) $\Leftarrow$ $س - ٥٨ = -٣$ (١)

$\Leftarrow$ $س = ٥٥$ (١)

صيف ٢٠١٦

تتبع أوزان (٢٠٠٠) صندوق تفاح عند التعبئة توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي (٦) كغم، وانحرافه المعياري (٠,٣) كغم، جد عدد الصناديق التي تقل وزنها عن (٥,٧) كغم. (٧ علامات)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	٠	٠,٣	٠,٥	١	١,٥
ل(ز ≤ م)	٠,٥٠٠٠	٠,٦١٧٩	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢

الحل: ل(س ≤ ٥,٧) = ل(ز ≤ (٥,٧ − ٦) / ٠,٣) ✓

= ل(ز ≤ −١) = ل(ز ≥ ١) = ١ − ل(ز ≤ ١) ✓

✓ = ١ − ٠,٨٤١٣

✓ = ٠,١٥٨٧

∴ عدد الصناديق = ٢٠٠٠ × ٠,١٥٨٧ = ٣١٧,٤٠٠ ≈ ٣١٧ صندوقاً ✓

شتوي ٢٠١٧

اذا كانت أوزان (١٠٠٠٠) طالب تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (٤٨) كغ، وانحرافه المعياري (٣) كغ ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٤٢) كغ و (٥١) كغ؟ (٨ علامات)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز ≤ م)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل: ل(٤٢ ≤ س ≤ ٥١) = ل((٤٢ − ٤٨) / ٣ ≤ ز ≤ (٥١ − ٤٨) / ٣) ✓

= ل(−٢ ≤ ز ≤ ١) ✓

= ل(ز ≤ ١) − ل(ز ≤ −٢) ✓

= ل(ز ≤ ١) − (١ − ل(ز ≤ ٢)) ✓

= ٠,٨٤١٣ − (١ − ٠,٩٧٧٢) = ٠,٨١٨٥ ✓

عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين ٤٢ كغ و ٥١ كغ

✓ ١٠٠٠٠ × ٠,٨١٨٥ = ٨١٨٥ طالباً

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

الارتباط ومعامل الارتباط

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

إذا كان س، ص متغيرين وعدد قيم كل منهما (٨) وكان:

$\sum_{i=1}^{8} (س_i - \bar{س})^2 = ٢٠٠$ ، $\sum_{i=1}^{8} (ص_i - \bar{ص})^2 = ١٢٨$ ، $\sum_{i=1}^{8} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص}) = ١٢٠$

أوجد معامل ارتباط بيرسون لخطي لبيانات المتغيرين س، ص. (٤ علامات)

الحل: ل (بيرسون) = $\frac{\sum_{i=1}^{8} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8} (س_i - \bar{س})^2 \times \sum_{i=1}^{8} (ص_i - \bar{ص})^2}}$ (١)

$= \frac{١٢٠}{\sqrt{٢٠٠ \times ١٢٨}} = \frac{١٢٠}{\sqrt{٢٥٦٠٠}} = \frac{١٢٠}{١٦٠} = ٠٫٧٥$ (١) (١)

صيفي ٢٠٠٨

إذا كان معامل ارتباط بيرسون لبيانات المتغيرين س، ص يساوي ٠٫٨ ، عُدلت قيم كل من المتغيرين س، ص حسب العلاقة $س^* = ٢س - ١$ ، $ص^* = ١ - ٤ص$ ، فإن معامل ارتباط بيرسون لبيانات $س^*$، $ص^*$ يساوي:

أ) −٠٫٢ ب) ٠٫٢ ج) ٠٫٨ د) −٠٫٨

شتوي ٢٠٠٩

لبيانات الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والعلوم (ص) في امتحان قصير خلال الفصل (١٠).

س	ص	(س − $\bar{س}$)	(ص − $\bar{ص}$)	(س − $\bar{س}$)(ص − $\bar{ص}$)	(س − $\bar{س}$)^2	(ص − $\bar{ص}$)^2
٦	٥					
٧	٦					
٥	٤					
٣	١					
٤	٤					

١) انقل الجدول إلى دفتر إجاباتك ثم املأ الأعمدة الواردة فيه

٢) معتمداً على الجدول احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي لبيانات المتغيرين س، ص.

(١٠ علامات)

عامر الصبح 0790141631

الحل:

س	ص	(س − س̄)	(ص − ص̄)	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٦	٥	١	١	١	١	١
٧	٦	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	٠	٠	٠	٠	٠
٣	١	−٢	−٣	٦	٤	٩
٤	٤	−١	٠	٠	١	٠
٢٥	٢٠			١١	١٠	١٤

س̄ = ٢٥ / ٥ = ٥

ص̄ = ٢٠ / ٥ = ٤

معامل ارتباط بيرسون (ر) = $\frac{\sum_{i=1}^{5}(س_i - س̄)(ص_i - ص̄)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(س_i - س̄)^2 \times \sum_{i=1}^{5}(ص_i - ص̄)^2}}$

$= \frac{١١}{\sqrt{١٠ \times ١٤}} = ٠,٩٣$

صيف ٢٠٠٩

في محاضرة ألقاها خبير زراعي أوضح أنه في معظم الأحيان كلما ارتفعت أجور عمال الزراعة (س) فإن ذلك يؤدي إلى ارتفاع أسعار البندورة (ص) فإذا كان معامل ارتباط بين س، ص حسب قول الخبير: (٦ علامات)

أ) −٠,٩٨ ب) ١,٢ ج) ٠,١٣ د) ٠,٢

معتمداً المعلومات الواردة في الجدول الآتي جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص

س	ص	(س − س̄)	(ص − ص̄)	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٣	١٠	−٢	٢	−٤	٤	٤
٤	٩	−١	١	−١	١	١
٥	٧	٠	−١	٠	٠	١
٦	٨	١	٠	٠	١	٠
٧	٦	٢	−٢	−٤	٤	٤

الحل: س̄ = Σس / ن = ٣٥ / ٥ = ٥

ص̄ = Σص / ن = ٤٠ / ٥ = ٨

(٦ علامات)

$ر = \frac{\Sigma(س - س̄)(ص - ص̄)}{\sqrt{\Sigma(س - س̄)^2 \times \Sigma(ص - ص̄)^2}} = \frac{-٩}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = -٠,٩$

سؤال ٢٠١٠

إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠)، وكان $\sum_{i=1}^{10} (س - \bar{س})^2 = ٨١$

$\sum_{i=1}^{10} (ص - \bar{ص})^2 = ٤٠٠$ ، $\sum_{i=1}^{10} (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٣٥$

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص (٤ علامات).

الحل:

$$ر = \frac{\sum_{i=1}^{10} (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (س - \bar{س})^2 \times \sum_{i=1}^{10} (ص - \bar{ص})^2}} = \frac{١٣٥}{\sqrt{٨١ \times ٤٠٠}} = \frac{١٣٥}{٩ \times ٢٠} = ٠,٧٥$$

(١) (١) (١)

صيفي ٢٠١٠

يبين الجدول المجاور علامات (٥) طلاب في مبحث الفيزياء والجغرافيا في امتحان قصير، الدرجة القصوى (١٠). احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الفيزياء (س)	٢	٥	٣	٦	٤
الجغرافيا (ص)	٥	٦	٣	٧	٩

(١٠ علامات)

مراجعة: $ر = \frac{\sum_{i=1}^{n} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (س_i - \bar{س})^2 \times \sum_{i=1}^{n} (ص_i - \bar{ص})^2}}$

الحل:

رقم الطالب	س	ص	$(س - \bar{س})$ (١)	$(ص - \bar{ص})$ (١)	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$ (١)	$(س - \bar{س})^2$ (١)	$(ص - \bar{ص})^2$ (١)
١	٢	٥	-٢	-١	٢	٤	١
٢	٥	٦	١	٠	٠	١	٠
٣	٣	٣	-١	-٣	٣	١	٩
٤	٦	٧	٢	١	٢	٤	١
٥	٤	٩	٠	٣	٠	٠	٩
	٢٠	٣٠			٧	١٠	٢٠

$\bar{س} = \frac{٢ + ٥ + ٣ + ٦ + ٤}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ (١)

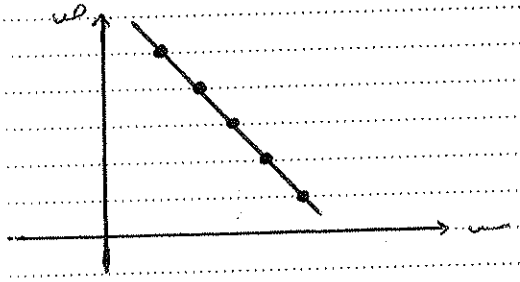
$\bar{ص} = \frac{٥ + ٦ + ٣ + ٧ + ٩}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ (١)

$ر = \frac{٧}{\sqrt{١٠ \times ٢٠}} = \frac{٧}{\sqrt{٢٠٠}}$ (١) (١)

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠١١

معتمداً شكل الانتشار المجاور والذي يبين العلاقة بين المتغير (س) والمتغير (ص)، ما قيمة معامل الارتباط (ر) بينهما؟



(أ) -١ ب) ١٠

ج) ١ د) -١٠

يبين الجدول الآتي علامات ثلاثة طلاب في مبحثي الرياضيات والعلوم في اختبار قصير. أكمل الجدول لحساب معامل ارتباط بيرسون (ر) لقياس العلاقة بين س، ص. (٥ علامات)

رقم الطالب	س علامة الرياضيات	ص علامة العلوم	س - س̄	ص - ص̄			
١	٢	٤	٠	١			
٢	١	٢	-١	-١			
٣	٣	٣	١	٠			
المجموع	٦	٩	٠	٠			

ملاحظة: $ر = \dfrac{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - س̄)(ص_ي - ص̄)}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - س̄)^2 \sum_{ي=١}^{ن} (ص_ي - ص̄)^2}}$

الحل:

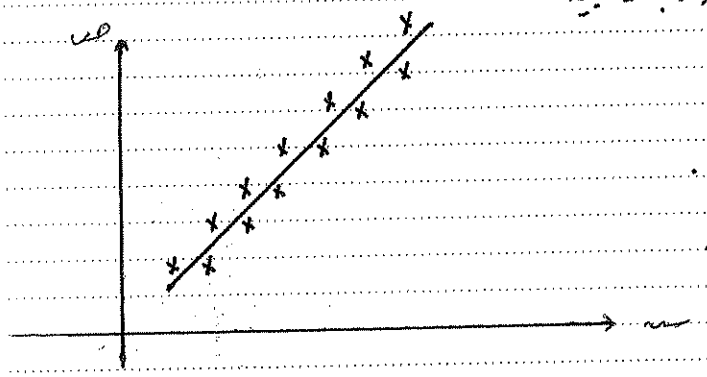
رقم الطالب	س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
١	٢	٤	٠	١	٠	٠	١
٢	١	٢	-١	-١	١	١	١
٣	٣	٣	١	٠	٠	١	٠
المجموع	٦	٩	٠	٠	١	٢	٢

$ر = \dfrac{١}{\sqrt{٢ \times ٢}} = \dfrac{١}{\sqrt{٤}} = \dfrac{١}{٢}$

عامر الصبح 0790141631

صفي ١١ ع

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص، ما القيمة التقديرية لمعامل الارتباط بين المتغيرين س، ص؟



أ) -٠,٨٥ ب) -٠,١٥

ج) ٠,١٥ د) ٠,٨٥

الجدول الآتي يبين علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والكيمياء (ص) في امتحان قصير النزاهة الفصل له (١٠)، احسب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص.

(٩ علامات)

الرياضيات (س)	٨	٦	٤	٦	٦
الكيمياء (ص)	٤	٥	٥	٧	٤

ملاحظة: $ر = \dfrac{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=١}^{ن} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$

الحل:

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٨	٤	٢	-١	-٢	٤	١
٦	٥	٠	٠	٠	٠	٠
٤	٥	-٢	٠	٠	٤	٠
٦	٧	٠	٢	٠	٠	٤
٦	٤	٠	-١	٠	٠	١
المجموع ٣٠	٢٥			-٢	٨	٦

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ $\bar{ص} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$ر = \frac{-٢}{\sqrt{٨ \times ٦}} = \frac{-٢}{\sqrt{٤٨}}$

عامر الصبح0790141631

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠١٢

اذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي ٠,٩٤ فإن الارتباط بين س، ص هو:

أ) طردي تام ب) عكسي ج) طردي د) عكسي تام

الحل: الجدول الآتي لحساب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص: (٧ علامات)

س	ص	س − س̄	ص − ص̄				
٣	٦	−٢	−١				
٥	٥	٠	−٢				
٦	٩	١	٢				
٧	٨	٢	١				
٤	٧	−١	٠				

علماً بأن

$$ر = \frac{\sum_{i=1}^{n} (س_i - س̄)(ص_i - ص̄)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (س_i - س̄)^2 \sum_{i=1}^{n} (ص_i - ص̄)^2}}$$

الحل:

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٣	٦	−٢	−١	٢	٤	١
٥	٥	٠	−٢	٠	٠	٤
٦	٩	١	٢	٢	١	٤
٧	٨	٢	١	٢	٤	١
٤	٧	−١	٠	٠	١	٠
المجموع ٢٥	٣٥			٦	١٠	١٠

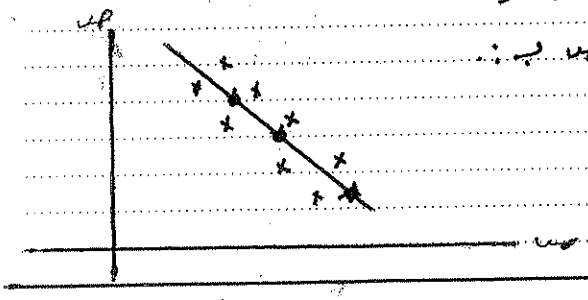
$$ر = \frac{٦}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{٦}{\sqrt{١٠٠}} = ٠,٦$$

عامر الصبح 0790141631

صيف ٢٠١٢

يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار لتوزيع ما بين المتغيرين س، ص

عليه تقدير معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص ب:



أ) ٠,٨ ب) -١

ج) ١ د) -٠,٨

(لا علامات)

أكمل الجدول المجاور لحساب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص

س	ص	س - س̄	ص - ص̄		
٨	٦	١	٠		
٧	٥	٠	-١		
٦	٧	-١	١		
٩	٨	٢	٢		
٥	٤	-٢	-٢		

علماً بأن

$$ر = \frac{\sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - س̄)(ص_ي - ص̄)}{\sqrt{\sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - س̄)^2 \sum_{ي=1}^{ن} (ص_ي - ص̄)^2}}$$

الحل:

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄) $ق_ء$	(س - س̄)² $ق_ب$	(ص - ص̄)² $ق_ج$
٨	٦	١	٠	٠	١	٠
٧	٥	٠	-١	٠	٠	١
٦	٧	-١	١	-١	١	١
٩	٨	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	-٢	-٢	٤	٤	٤
المجموع ٣٥	٣٠			٧	١٠	١٠

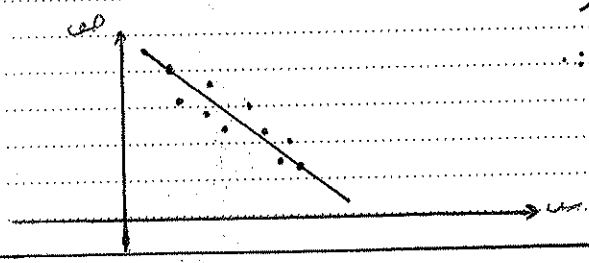
$$ر = \frac{ق_ء}{\sqrt{ق_ب \times ق_ج}} = \frac{٧}{١٠} = ٠,٧$$

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠١٣

يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار لتوزيع بيانات متغيرين س، ص

عليه الحكم على العلاقة بين المتغيرين س، ص بأنها:



أ) تامة ب) عكسية

ج) طردية د) لا يوجد علاقة

اذا كان معامل الارتباط بين س، ص هو (٠,٦)، فما هو معامل الارتباط بين $س^*$، $ص^*$ حيث $س^* = ٥ - س$ ، $ص^* = ص + ٨$ يساوي:

أ) -٠,٦ ب) ٠,٦ ج) ٠,٤ د) -٠,٤

جد معامل ارتباط بيرسون (ر) بين المتغيرين س، ص في الجدول الآتي:

س	٧	٦	٩	١٠	٨
ص	٨	٧	١٠	٨	١٢

(٨ علامات)

ملاحظة:

$$ر = \frac{\sum_{i=1}^{n} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (س_i - \bar{س})^2 \sum_{i=1}^{n} (ص_i - \bar{ص})^2}}$$

الحل:

س	ص	$س - \bar{س}$ (١)	$ص - \bar{ص}$ (١)	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$ (١)	$(س - \bar{س})^2$ (١)	$(ص - \bar{ص})^2$ (١)
٧	٨	-١	-١	١	١	١
٦	٧	-٢	-٢	٤	٤	٤
٩	١٠	١	١	١	١	١
١٠	٨	٢	-١	-٢	٤	١
٨	١٢	٠	٣	٠	٠	٩
المجموع ٤٠	٤٥			٤	١٠	١٦

$\bar{س} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ (١) $\bar{ص} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$ (١)

$ر = \frac{٤}{\sqrt{١٠ \times ١٦}} = ٠,٣٢$ (١)

عامر الصبح 0790141631

صيف ٢٠١٣

اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص هو (٠,٨) ، فإن معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س*، ص* حيث س* = ١٢ − ٣س ، ص* = −٤ص هو:

(أ) ٠,٨ ب) −٠,٨ ج) ٠,٣ د) −٠,٣

اذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٩) فإن الارتباط بين س، ص:

(أ) طردي قوي ب) عكسي قوي ج) طردي تام د) عكسي تام

يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات والعلوم، حيث الزيادة الفضل للعلامة (٢٠) ، احسب معامل ارتباط بيرسون لفظ بين علامات الطلب في المبحثين. (٨ علامات)

علامة الرياضيات (س)	١٠	١٦	١٢	١٤	٨
علامة العلوم (ص)	١٢	١٤	١٦	١٨	١٠

علماً بأن

$$ر = \frac{\sum_{i=1}^{ن} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{ن} (س_i - \bar{س})^2 \times \sum_{i=1}^{ن} (ص_i - \bar{ص})^2}}$$

الحل:

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
١٠	١٢	−٢	−٢	٤	٤	٤
١٦	١٤	٤	٠	٠	١٦	٠
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠	٤
١٤	١٨	٢	٤	٨	٤	١٦
٨	١٠	−٤	−٤	١٦	١٦	١٦
المجموع ٦٠	٧٠			٢٨	٤٠	٤٠

$\bar{س} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$ $\bar{ص} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

* ليس شرطاً ان يكتب مجاميع الجدول

$$ر = \frac{٢٨}{\sqrt{٤٠ \times ٤٠}} = \frac{٢٨}{٤٠} = ٠,٧$$

0790141631 عامر الصبح

شتوي ٢٠١٤

اذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠)، وكان $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})^2 = ٦٤$

$\sum_{ر=١}^{١٠} (ص_ر - \bar{ص})^2 = ١٠٠$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = -٤٨$ ، فجد معامل ارتباط

بيرسون (ر) بين المتغيرين س، ص (٤ علامات)

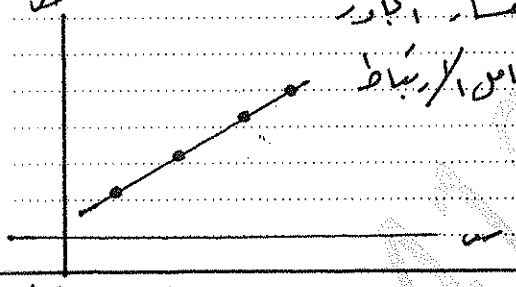
الحل:

$$ر = \frac{\sum_{ي=١}^{١٠} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{١٠} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=١}^{١٠} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$$

$$ر = \frac{-٤٨}{\sqrt{٦٤ \times ١٠٠}} = \frac{-٤٨}{٨ \times ١٠} = -٠.٦$$

(٢ علامة)

اذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س، ص في شكل الانتشار المجاور حيث وقعت جميع النقاط على خط مستقيم، اكتب قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص.



الحل: معامل الارتباط = ١

صيفي ٢٠١٤ (٨ علامات)

يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحث الرياضيات (س)، والعلوم (ص) في امتحان قصير طبقت الطلبة (٢٠). جد معامل ارتباط بيرسون (ر) بين المتغيرين س، ص

الرياضيات (س)	٦	١٥	٩	١٨	١٢
العلوم (ص)	١٢	١٤	٨	١٧	١٩

علما بأن

$$ر = \frac{\sum_{ي=١}^{٥} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{٥} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=١}^{٥} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$$

عامر الصبح 0790141631

الحل:

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٦	١٢	−٦	−٢	١٢	٣٦	٤
١٥	١٤	٣	صفر	صفر	٩	صفر
٩	٨	−٣	−٦	١٨	٩	٣٦
١٨	١٧	٦	٣	١٨	٣٦	٩
١٢	١٩	صفر	٥	صفر	صفر	٢٥
المجموع ٦٠	٧٠			٤٨	٩٠	٧٤

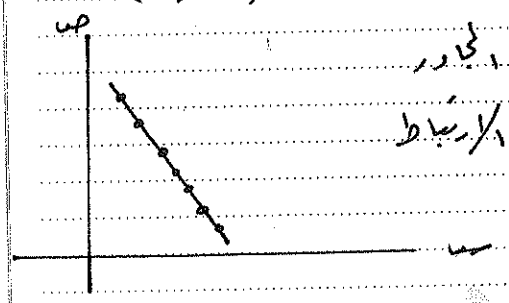
س̄ = ٦٠ / ٥ = ١٢

ص̄ = ٧٠ / ٥ = ١٤

ر = ٤٨ / √(٩٠ × ٧٤)

شتوي ٢٠١٥ (٤ علامات)

اذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س، ص في شكل الانتشار المجاور حيث وقعت النقاط جميعها على خط مستقيم، اكتب قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص



الحل: معامل الارتباط = −١

اذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٥) وكان:

$\sum_{ر=1}^{15} (س_ر - س̄)^2 = ٤$ ، $\sum_{ر=1}^{15} (ص_ر - ص̄)^2 = ٩٠$ ، $\sum_{ر=1}^{15} (س_ر - س̄)(ص_ر - ص̄) = ٢٤$

جد معامل ارتباط بيرسون لخطيا بين المتغيرين س، ص. (٤ علامات)

الحل:

$$ر = \frac{\sum_{ر=1}^{15} (س_ر - س̄)(ص_ر - ص̄)}{\sqrt{\sum_{ر=1}^{15} (س_ر - س̄)^2 \times \sum_{ر=1}^{15} (ص_ر - ص̄)^2}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٤٠ \times ٩٠}} = \frac{٢٤}{٦٠} = ٠.٤$$

عامر الصبح 0790141631

صيفي ٢٠١٥

إذا كان معامل الارتباط بين س، ص يساوي ٠,٤ ، جد قيمة معامل الارتباط بين س*، ص* حيث س* = ٥ + س ، ص* = -٢ ص (٣ علامات)

الحل: معامل الارتباط بين س*، ص* = -٠,٤

جد معامل الارتباط بيرسون الخطي (ر) بين المتغيرين س، ص في الجدول الآتي: (٨ علامات)

س	٢	٤	٦	٨	٩	٧
ص	٣	١	٧	٥	٦	٨

علماً بأن

$$ر = \frac{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=١}^{ن} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$$

الحل:

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$)^2	(ص - $\bar{ص}$)^2
٢	٣	-٤	-٢	٨	١٦	٤
٤	١	-٢	-٤	٨	٤	١٦
٦	٧	٠	٢	٠	٠	٤
٨	٥	٢	٠	٠	٤	٠
٩	٦	٣	١	٣	٩	١
٧	٨	١	٣	٣	١	٩
المجموع	٣٦	٣٠			٣٤	٣٤

$\bar{س} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$ ١ $\bar{ص} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$ ١

$ر = \frac{٢٢}{\sqrt{٣٤ \times ٣٤}} = \frac{٢٢}{٣٤}$ ١

عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠١٦

إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠)، وكان $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})^2 = ٨٠$

$\sum_{ر=١}^{١٠} (ص_ر - \bar{ص})^2 = ٢٠$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = ٢٤$، فجد معامل ارتباط بيرسون لخطأ بين المتغيرين س، ص.

(٤ علامات).

الحل:

$$ر = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \bar{س})^2 \times \sum_{ر=١}^{١٠} (ص_ر - \bar{ص})^2}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٨٠ \times ٢٠}} = \frac{٢٤}{٤٠} = ٠.٦$$

(١) (١) (١)

صيفي ٢٠١٦

(٨ علامات)

احسب معامل ارتباط بيرسون لخطأ (ر) بين المتغيرين س، ص في الجدول الآتي:

س	٧	٨	٥	٤	٦
ص	١٠	٩	٧	٦	٨

علماً بأن

$$ر = \frac{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{ن} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=١}^{ن} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$$

الحل:

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$)^2	(ص - $\bar{ص}$)^2
٧	١٠	١	٢	٢	١	٤
٨	٩	٢	١	٢	٤	١
٥	٧	-١	-١	١	١	١
٤	٦	-٢	-٢	٤	٤	٤
٦	٨	٠	٠	٠	٠	٠
المجموع ٣٠	٤٠			٩	١٠	١٠

(١) (١) (١) (١) (١)

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ (١) $\bar{ص} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ (١)

$$ر = \frac{٩}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{٩}{١٠} = ٠.٩$$ (١)

0790141631 عامر الصبح

شتوي ٢٠١٧

إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٢) وكان $\sum_{ر=١}^{١٢} (س_ر - \bar{س})^2 = ٣٦$

$\sum_{ر=١}^{١٢} (ص_ر - \bar{ص})^2 = ٦٤$ ، $\sum_{ر=١}^{١٢} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = ١٦$

جد معامل ارتباط بيرسون لخطأ بسيط لمتغيرين س، ص (٤ علامات)

الحل:

$$ر = \frac{\sum_{ر=١}^{١٢} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{١٢} (س_ر - \bar{س})^2 \times \sum_{ر=١}^{١٢} (ص_ر - \bar{ص})^2}} = \frac{١٦}{\sqrt{٣٦ \times ٦٤}} = \frac{١٦}{٤٨} = ٠.\overline{٣}$$

عامر الصبح 0790141631

الوحدة الخامسة : الاحصاء والاحتمالات

اسئلة وزارية لدرس:

الانحدار

الفرع الادبي

(2007- الان)

اعداد الاستاذ
عامر الصبح 0790141631

شتوي ٢٠٠٨

توصل باحث تربوي الى معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت ص̂ = ٣س + ٦٥.

١) ما قيمة كل من أ، ب ؟ (علامتان)

٢) درست طالبة (٨) ساعات يومياً وحصلت على معدل (٨٦). احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه الطالبة معتمداً على معادلة خط الانحدار المعطاة. (علامتان)

الحل: ١) أ = ٣ ، ب = ٦٥ ١

٢) ص̂ = ٣س + ٦٥ ⇐ ٣×(٨) + ٦٥ = ٨٩ ١

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

= ٨٦ - ٨٩ = -٣ ١

صيفي ٢٠٠٨

اذا كان س، ص متغيران متصلان عدد قيم كل منهما (٥) وكان:

س̄ = ٥ ، ص̄ = ٧٥ ، أ = ٣

١) جد معادلة خط الانحدار البسيط للتنبؤ بقيم ص اذا علمت س. (٤ علامات)

٢) جد الخطأ في التنبؤ اذا كانت س = ٨ وقيمة ص الحقيقية المناظرة لها (٨٢). (علامتان)

الحل: ١) الصورة العامة لمعادلة خط الانحدار هي:

ص̂ = أس + ب ١

ب = ص̄ - أ س̄ = ٧٥ - ٣×٥ = ٦٠ ١ ١

اذن ص̂ = ٣س + ٦٠ ١

٢) القيمة المتنبأ بها عندما س = ٨ هي ص̂ = ٣×٨ + ٦٠ = ٨٤ ١

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

= ٨٢ - ٨٤ = -٢ ١

صيف ٢٠٠٩

لتكن $\hat{ص} = ٠.٣ س + ١٠$ هي معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س) إذا كانت إحدى قيم (س) تساوي (٩٠) وقيمة (ص) المقابلة لها (٣٦) فإن الخطأ في التنبؤ بقيم ص يساوي:

(أ) ٣٦ ب) ١ ج) -٤ د) ٣٦

يبين الجدول الآتي علامات (٦) طلاب في امتحاني العلوم (س) والرياضيات (ص). جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س) (١٠ علامات)

العلوم (س)	٦	٤	٨	٧	٢	٣
الرياضيات (ص)	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

الحل:

س	ص	س-س̄	ص-ص̄	(س-س̄)(ص-ص̄)	(س-س̄)²
٦	٩	١	٢	٢	١
٤	٨	-١	١	-١	١
٨	١٠	٣	٣	٩	٩
٧	٨	٢	١	٢	٤
٢	٥	-٣	-٢	٦	٩
٣	٢	-٢	-٥	١٠	٤
المجموع	٣٠	٤٢		٢٨ (١)	٢٨ (١)

$س̄ = \frac{٣٠}{٦} = ٥$ (١) $ص̄ = \frac{٤٢}{٦} = ٧$ (١)

$أ = \frac{\sum (س-س̄)(ص-ص̄)}{\sum (س-س̄)^2} = \frac{٢٨}{٢٨} = ١$ (١) (١)

$ب = ص̄ - أ س̄$ (١) $\Leftarrow ب = ٧ - ١ \times ٥ = ٢$ (١)

وعليه $\hat{ص} = أ س + ب \Leftarrow \hat{ص} = س + ٢$ (١) (١)

شتوي ٢٠١٠

معتمداً الجدول التالي جسّ (س) عدد ساعات الدراسة اليومية لخمسة طلاب (ص) علامة كل منهم في امتحان ما. (١١ علامة)

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد ساعات الدراسة (س)	٣	٤	٧	٥	١
العلامة (ص)	١٤	١٦	٢٠	١١	٩

احسب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س)

الحل:

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٣	١٤	−١	٠	٠	١
٤	١٦	٠	٢	٠	٠
٧	٢٠	٣	٦	١٨	٩
٥	١١	١	−٣	−٣	١
١	٩	−٣	−٥	١٥	٩
المجموع ٢٠	٧٠			٣٠	٢٠

س̄ = Σس / ن = ٢٠ / ٥ = ٤ (١) ص̄ = Σص / ن = ٧٠ / ٥ = ١٤ (١)

أ = Σ(س − س̄)(ص − ص̄) / Σ(س − س̄)² = ٣٠ / ٢٠ = ١٫٥ (١)

ب = ص̄ − أ س̄ ⟸ ب = ١٤ − ١٫٥ × ٤ = ٨ (١)

وعليه ص̂ = أ س + ب

ص̂ = ١٫٥ س + ٨ (١)

صيفي ٢٠١٠

في دراسة اجراها احد طلبة الدراسات العليا توصل الى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين ساعات الدراسة (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة احدى الجامعات كانت: ص̂ = ٥٣ + ٥س

معتمداً معادلة خط الانحدار اجب عن الاسئلة الآتية:

١) جد قيم أ، ب (علامتان)

٢) قدّر معدل طالب اذا كانت ساعات الدراسة اليومية له (٥) ساعات (علامة)

٣) اذا كان معدل طالب درس (٨) ساعات يومياً هو (٩٥)، جد الخطأ في التنبؤ (٣ علامات)

الحل: ١) أ = ٥ (١) ب = ٥٣ (١)

٢) ص̂ = ٥٣ + ٥ س

= ٥٣ + ٥×٥ = ٧٨ (١)

٣) الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة التنبؤية (١)

القيمة التنبؤية ص̂ = ٥٣ + ٥×٨ = ٩٣ (١)

إذن الخطأ في التنبؤ = ٩٥ − ٩٣ = ٢ (١)

شتوي ٢٠١١

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) وعدد الأخطاء (ص) الذي يرتكبها موظف في اليوم الواحد هي: ص̂ = ٠.٦ س + ١، مقدراً ناتج المعادلة إلى أقرب عدد صحيح:

١) تنبأ بعدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٠ ساعات في اليوم. (علامتان)

٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (١٥) ساعة في اليوم هي (٦) أخطاء نجد الخطأ في التنبؤ. (٣ علامات)

الحل: ١) ص̂ = ٠.٦ × ١٠ + ١ = ٧ أخطاء (١) (١)

٢) الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة التنبؤية (١)

القيمة التنبؤية = ٠.٦ × ١٥ + ١ = ١٠ أخطاء (١)

⇐ الخطأ في التنبؤ = ٦ − ١٠ = −٤ (١)

صيفي ٢٠١١

إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥)، وكان $\sum_{i=1}^{5}$ (س_i − س̄)(ص_i − ص̄) = ٨٠، $\sum_{i=1}^{5}$ (س_i − س̄)² = ٤٠، س̄ = ٦، ص̄ = ١٣، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س). (٦ علامات)

الحل: أ = $\frac{\sum (س_i - س̄)(ص_i - ص̄)}{\sum (س_i - س̄)^2}$ = $\frac{٨٠}{٤٠}$ = ٢ (١) ، ب = ص̄ − أ س̄ = ١٣ − ٢×٦ = ١ (١)

المعادلة ص̂ = أ س + ب (١)

= ٢ س + ١ (١)

شتوي ٢٠١٢

استخدم المعلومات في الجدول الآتي لإيجاد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط بين المتغيرين س، ص: (٦ علامات)

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٥	٦	−٣	−٢	٦	٩
٦	٧	−٢	−١	٢	٤
٧	٨	−١	٠	٠	١
٨	٩	٠	١	٠	٠
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦
المجموع ٤٠	٤٠	٠	٠	٢٠	٥٠

الحل: ص̂ = أ س + ب

$$\text{أ} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٤٠}{٥} = ٨ \qquad \bar{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

ب = ص̄ − أ س̄ ⟸ ب = ٨ − ٠,٤ × ٨ = ٤,٨

∴ ص̂ = ٠,٤ س + ٤,٨

صيفي ٢٠١٢

إذا كان س، ص يمثلان علامات ستة طلاب في مبحث العلوم والرياضيات وكان س̄ = ٧ ، ص̄ = ٩

$\sum_{\text{ر}=1}^{6} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}}) = ١٦$ ، $\sum_{\text{ر}=1}^{6} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2 = ٢٨$ ، فجد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س. (٧ علامات)

الحل: ص̂ = أ س + ب

$$\text{أ} = \frac{\sum (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}})}{\sum (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2} = \frac{١٦}{٢٨} = \frac{٤}{٧}$$

ب = ص̄ − أ س̄ ⟸ ب = ٩ − $\frac{٤}{٧}$ × ٧ = ٥

∴ المعادلة هي ص̂ = $\frac{٤}{٧}$ س + ٥

شتوي ٢٠١٣

إذا علمت أن معادلة الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين راتب العامل (س) والإنتاج السنوي (ص) معطاة بالآلاف الدنانير لمجموعة شركات هي: $\hat{ص} = ٠,٣ س + ١٠$، معتمداً على هذه المعادلة جد الخطأ في التنبؤ لإنتاج شركة راتب عاملها (٦٠) ألف دينار وإنتاجها السنوي (٢٧,٤) ألف دينار. (٥ علامات)

الحل: الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة التنبؤية (١)

القيمة التنبؤية = ٠,٣ × ٦٠ + ١٠ = ٢٨ ألف دينار (١)

وعليه الخطأ في التنبؤ = ٢٧,٤ − ٢٨ = −٠,٦ ألف دينار (١)

صيفي ٢٠١٣

إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٢) وكانت $\bar{س} = ١٠$، $\bar{ص} = ١٥$

$\sum_{i=1}^{12} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص}) = ١٦$ ، $\sum_{i=1}^{12} (س_i - \bar{س})^2 = ٢٠$

جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س. (٥ علامات)

الحل: $\hat{ص} = أ س + ب$ (١)

$أ = \frac{\sum (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sum (س_i - \bar{س})^2} = \frac{١٦}{٢٠} = ٠,٨$ (١)

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} \Leftarrow ب = ١٥ - ٠,٨ \times ١٠ = ٧$ (١)

وعليه فإن: $\hat{ص} = ٠,٨ س + ٧$ (١)

شتوي ٢٠١٤

يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) والأجر اليومي (ص) بالدينار لخمسة عمال في إحدى الشركات الصناعية (٩ علامات)

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٩	٧	٣
الأجر اليومي بالدينار (ص)	١٦	١٨	٢٢	١٣	١١

جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم س.

الحل:

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٥	١٦	−١	٠	٠	١
٦	١٨	٠	٢	٠	٠
٩	٢٢	٣	٦	١٨	٩
٧	١٣	١	−٣	−٣	١
٣	١١	−٣	−٥	١٥	٩
المجموع ٣٠	٨٠	٠		٣٠	٢٠

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ ، $\bar{ص} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$

$\hat{ص} = أ س + ب$

$أ = \frac{\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})^٢} = \frac{٣٠}{٢٠} = ١,٥$

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} \Leftarrow ب = ١٦ - ١,٥ \times ٦ = ٧$

وعليه $\hat{ص} = ١,٥ س + ٧$

صيفي ٢٠١٤

إذا كانت معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومية (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطالب إحدى الجامعات هي $\hat{ص} = ٤س + ٥٢$ ، معتمداً على هذه المعادلة جد الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصل عليه طالب درس (٦) ساعات يومياً وحصل على معدل (٧٨) (٤ علامات).

الحل: نجد $\hat{ص}$ عند س = ٦ حيث $\hat{ص}|_{س=٦} = ٤ \times ٦ + ٥٢ = ٧٦$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

$= ٧٨ - ٧٦ = ٢$

عامر الصبح 0790141631

السؤال ١٥:

يبين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في مبحثي الرياضيات (س) واللغة العربية (ص) حيث الخط المستقيم للعلاقة تساوي (١). جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س). (٨ علامات)

الرياضيات (س)	٦	٩	٧	٨	١٠
اللغة العربية (ص)	٨	١٠	٩	١٠	٨

الحل:

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٦	٨	−٢	−١	٢	٤
٩	١٠	١	١	١	١
٧	٩	−١	٠	٠	١
٨	١٠	٠	١	٠	٠
١٠	٨	٢	−١	−٢	٤
المجموع ٤٠	٤٥			١	١٠

(١) (١) (١) (١)

$\bar{س} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ ، $\bar{ص} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$ (١)

$أ = \frac{\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})^٢} = \frac{١}{١٠} = ٠.١$ (١)

$ب = \bar{ص} - أ\bar{س} \Leftarrow ب = ٩ - ٠.١ \times ٨ = ٨.٢$ (١)

وعليه فإن $\hat{ص} = أس + ب \Leftarrow \hat{ص} = ٠.١س + ٨.٢$ (١)

صيف ٢٠١٥ (٦ علامات)

اذا كانت (س) تمثل عدد ساعات العمل اليومي في مصنع ما، (ص) كمية الاستهلاك اليومي من الكهرباء في المصنع نفسه بالكيلو واط/ساعة، فجدت البيانات الآتية لستة مصانع:

$\bar{س} = ٨$ ، $\bar{ص} = ٤٠٠$ ، $\sum_{i=1}^{6} (س_i - \bar{س})^2 = ١٠٠$ ، $\sum_{i=1}^{6} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص}) = ٢٠٠$

جد:

١) معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س.

٢) الخطأ في التنبؤ لكمية استهلاك الكهرباء لمصنع عمل ٩ ساعات في اليوم (٧ أيام) وكان استهلاكه الفعلي من الكهرباء في ذلك اليوم ٤١٠ كيلو واط/ساعة.

الحل: ١) $ص = أ س + ب$

$$أ = \frac{\sum_{i=1}^{6} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sum_{i=1}^{6} (س_i - \bar{س})^2} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$$

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} = ٤٠٠ - ٢ \times ٨ = ٣٨٤$

وعليه فإن $ص = ٢ س + ٣٨٤$

٢) $ص_{س=٩} = ٢ \times ٩ + ٣٨٤ = ٤٠٢$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

$= ٤١٠ - ٤٠٢ = ٨$ كيلو واط/ساعة.

شتوي ٢٠١٦

يبين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والعلوم (ص)، حسب الخطي الخطي للعلامة (١٠)، جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س)

(٨ علامات)

الرياضيات (س)	٨	٥	٩	٦	٧
العلوم (ص)	٦	٧	٨	٤	٥

الحل:

س	ص	(س − س̄)	(ص − ص̄)	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٨	٦	١	٠	٠	١
٥	٧	−٢	١	−٢	٤
٩	٨	٢	٢	٤	٤
٦	٤	−١	−٢	٢	١
٧	٥	٠	−١	٠	٠
المجموع ٣٥	٣٠			٤	١٠

س̄ = ٣٥/٥ = ٧ ، ص̄ = ٣٠/٥ = ٦

أ = Σ (س − س̄)(ص − ص̄) / Σ (س − س̄)² = ٤/١٠ = ٠,٤

ب = ص̄ − أ س̄ = ٦ − ٠,٤ × ٧ = ٣,٢

ص̂ = أ س + ب ⟸ ص̂ = ٠,٤ س + ٣,٢

صيغة ٢٠١٦

إذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٨) وكان Σ (س_ي − س̄)(ص_ي − ص̄) = ٦٠

Σ (س_ي − س̄)² = ١٥ ، س̄ = ١٢ ، ص̄ = ٥٠ ، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ

بقيم ص إذا علمت قيم س. (٥ علامات)

الحل: ص̂ = أ س + ب

أ = Σ (س_ي − س̄)(ص_ي − ص̄) / Σ (س_ي − س̄)² = ٦٠/١٥ = ٤

ب = ص̄ − أ س̄ ⟸ ب = ٥٠ − ٤ × ١٢ = ٢

المعادلة ص̂ = ٤ س + ٢

شتوي ٢٠١٧

يبين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في امتحاني العلوم (س) والرياضيات (ص) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم س. (٨ علامات)

العلوم (س)	٦	٧	٨	٥	٤
الرياضيات (ص)	٨	١٠	٥	٧	٥

الحل:

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²
٦	٨	٠	١	٠	٠
٧	١٠	١	٣	٣	١
٨	٥	٢	-٢	-٤	٤
٥	٧	-١	٠	٠	١
٤	٥	-٢	-٢	٤	٤
المجموع ٣٠	٣٥			٣	١٠

(١) (١) (١) (١)

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ ، $\bar{ص} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$ (١)

$\hat{ص} = أ س + ب$

$أ = \frac{\sum_{ي=١}^{٥} (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sum_{ي=١}^{٥} (س_ي - \bar{س})^٢} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣$ (١)

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} \Leftarrow ب = ٧ - ٠,٣ \times ٦ = ٥,٢$ (١)

وعليه $\hat{ص} = ٠,٣ س + ٥,٢$ (١)

0790141631 عامر الصبح