الكمية القياسية والكمية المتجهة

تقسم الكميات الفيزيائية إلى قسمين:

أولاً: كميات قياسية Scalar Quantities

وهي الكميات التي تعرف تعريفاً كاملاً بالمقدار فقط، مثلاً:

الزمن، درجة الحرارة، الشغل، الكتلة.

ثانياً: كميات متجهة Vector Quantities

وهي الكميات التي تعرف بمقدار واتجاه، مثل: السرعة، التسارع، القوة، الزخم، ..... الخ.

يعبر عن الكميات المتجهة باستخدام رمز أو حرف وفوقه سهم، بينما يعبر عن الكميات القياسية برمز أو حرف فقط.

مثال

الزمن (كمية قياسية) يعبر عنه بالرمز (ز)، والكتلة بالرمز (ك)، بينما نرمز للقوة (كمية متجهة) بالرمز ($\overleftarrow{ق}$) والسرعة ($\overleftarrow{ع}$) ..... وهكذا.

يحدد مقدار الكمية المتجهة بعدد ووحدة قياس، بينما يحدد الاتجاه بزاوية يصنعها المتجه مع محور نختاره بعكس عقارب الساعة يسمى محور الاسناد أو المحور المرجعي، وفي الغالب يكون هذا المحور هو المحور السيني الموجب.

يعبر عن الكمية المتجهة رياضياً هكذا:

$\overleftarrow{ق} = ق \angle \theta$ حيث أن

$|\overleftarrow{ق}| = ق$ مقدار المتجهة ويكتب اختصاراً ق

θ = اتجاه المتجه

تمثيل الكمية المتجهة بالرسم

لتمثيل المتجه بيانيا نرسم سهماً يتناسب طوله مع مقدار الكمية المتجهة باختيار مقياس رسم مناسب واتجاهه يشير إلى اتجاهها، كما في الشكل المجاور:

* الشكل يمثل المتجه $\overleftarrow{ق}$

مثال

تسير سيارة بسرعة ٣٠كم / س نحو الجنوب،
مثل متجه السرعة بالرسم.

الحل

نختار أولاً مقياس رسم مناسب، وليكن ١سم لكل (١٠كم/س)، ثم نحسب طول السهم الممثل لمتجه السرعة ($\overleftarrow{ع}$).

$$|\overleftarrow{ع}| = \frac{\text{١سم}}{\text{١٠كم/س}} \times \text{٣٠كم/س} = \text{٣ سم}.$$

إذاً نرسم باستخدام المسطرة سهماً طوله ٣ سم، باتجاه الجنوب (محور الصادات السالب)، كما في الشكل المجاور،

ويمكن التعبير عن المتجه رياضيًا على الشكل:

$\overleftarrow{ع}$ = ٣٠ كم/س ، جنوباً.

حل سؤال الكتاب ص (١٢):

ف = ٨٠٠ م نحو الغرب، المتجه ف يعبر عن المسافة.

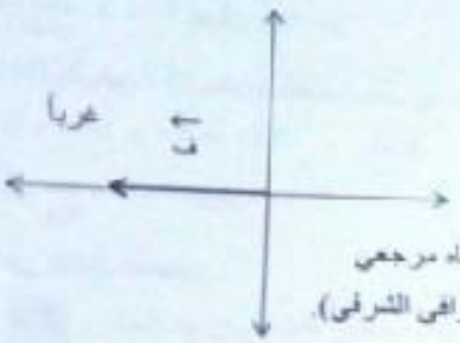
مقدار المسافة ٨٠٠ م واتجاهها غرباً، أي أن اتجاهها يصنع زاوية مقدارها ١٨٠° مع محور السينات الموجب، لذلك نكتب المسافة هكذا:

ف = ٨٠٠ م، ١٨٠°

ولتمثيل المسافة بيانيا نستخدم مقياس رسم مناسب وليكن ١ سم لكل ٢٠٠ م، ثم نحسب طول رسم السهم كما يأتي.

$$|\overleftarrow{ف}| = \frac{\text{١سم}}{\text{٢٠٠م}} \times \text{٨٠٠م} = \text{٤ سم}$$

* الشكل المجاور يمثل المسافة ف



ف = ٨٠٠ م باتجاه الغرب.

يوجه علم، يمكن تحديد اتجاه المتجه نسبة إلى اتجاه مرجعي (محور السينات الموجب) مثلاً، أو (الاتجاه الجغرافي الشرقي).

مثال

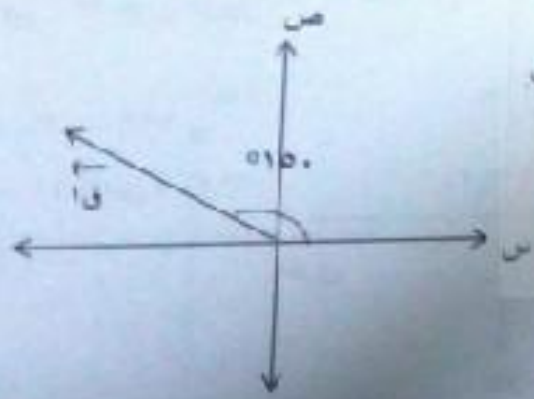
مثل بالرسم القوى الآتية:

١. $\overleftarrow{ق_1}$ = ٥ نيوتن، ١٥٠°

٢. $\overleftarrow{ق_2}$ = ١٠٠ نيوتن، ٦٠ جنوب الغرب.

الحل

١. مقياس الرسم هو ١ سم لكل ١ نيوتن، لذا يكون طول السهم الممثل للقوة ق١ = ٥ سم، فنرسم سهماً طوله (٥ سم) ويصنع زاوية ١٥٠° مع محور السينات الموجب كما في الشكل.



أي أن الشكل يمثل

$\overleftarrow{ق_1}$ = ٥ نيوتن، ٣٠° شمال الغرب

أو نقول:

$\overleftarrow{ق_1}$ = ٥ نيوتن، ١٥٠°

٢- يمكن أن نختار مقياس رسم ١ سم لكل ٢٠ نيوتن، لذا يكون طول السهم الممثل للقوة ← ق٢ يساوي:

$$\frac{\text{١ سم}}{\text{٢٠ نيوتن}} \times \text{١٠٠ نيوتن} = \text{٥ سم}$$

أما الاتجاه فهو ٦٠° جنوب الغرب

أو $\theta = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°$ شرق

أي أن ← ق٢ = ١٠٠ نيوتن، ٢٤٠°

كما في الشكل المجاور.

مثال

مثل الكميات المتجهة التالية رياضيًا وبيانيًا:

١- سيارة سرعتها ٤٠كم/س باتجاه يصنع زاوية مقدارها ٣٠° غرب الشمال.

٢- جسم يتحرك بتسارع ٣م/ث شرقًا.

الحل

١- نختار مقياس رسم ١ سم لكل ١٠ كم/س، لذا يكون طول السهم الممثل للسرعة ← يساوي:

ع

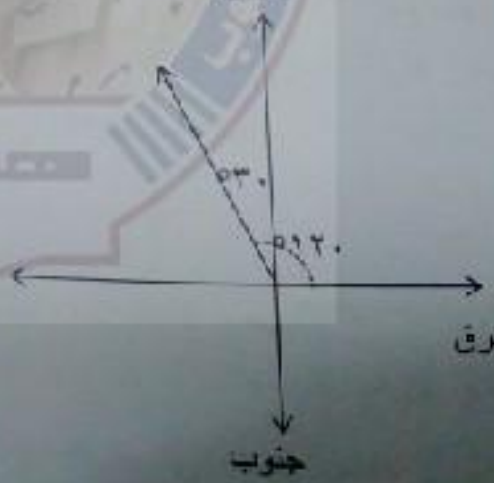
$$= \frac{\text{١ سم}}{\text{١٠ كم/س}} \times \text{٤٠كم/س} = \text{٤ سم}$$

أما الاتجاه فهو ٣٠° غرب الشمال

أو

$\theta = ٩٠ + ٣٠ = ١٢٠°$

أي أن ← ع = ٤٠ كم/س، ١٢٠°



٢- هنا مقياس الرسم المناسب هو ١ سم لكل ١م/ث²، لذا يكون طول السهم الممثل للتسارع = ٣سم، فنرسم سهمًا طوله (٣سم) ويصنع زاوية صفر مع محور السينات.

أي أن:

ت = ٣ م/ث ، صفر

أو: ت = ٣م/ث شرقًا

كما في الشكل المجاور.

حل أسئلة المراجعة صفحة (١٤):

١) أ- الكمية الفيزيائية القياسية: هي الكمية التي تحدد بمقدار فقط وليس لها اتجاه.

ب- الكمية الفيزيائية المتجهة: هي الكمية التي تحدد بمقدار واتجاه معًا.

٢-

الكميات القياسية	الكميات المتجهة
عسرك	الوزن
ارتفاع	الثقل
معدل الانكسار	موقع منزلك بالنسبة إلى المدرسة
المقاومة الكهربائية	

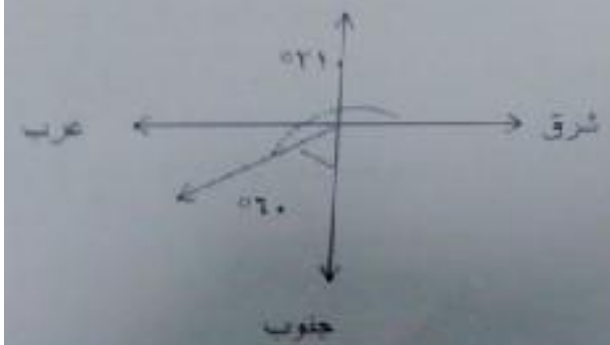
٣- أ- ع = ← ٨٠ كم/س باتجاه ٦٠° غرب الجنوب، لنفرض مثلًا أن ١سم لكل ٢٠كم/س

ع

$$\left|\leftarrow\right| = \frac{\text{١ سم}}{\text{٢٠ كم/س}} \times \text{٨٠كم/س} = \text{٤ سم}$$

$\theta = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°$ أي أن:

ع = ← ٨٠ كم/س، ٢١٠°



ب ← = ٣ وحدات باتجاه الشمال

١ سم لكل ١ وحدة

أ ← = ٣ سم

ب

ب ← = ٣ وحدات ، ٢٠ ، ٠٩٠

ب

أ ← = ٣ وحدات ٢ شمالاً.

ب

جـ ← = ٧٠ نيوتن ، ٢٢٠°

ق

١ سم لكل ٢٠ نيوتن

أ ← = ٧٠ نيوتن = ٣٫٥ سم

ق ٢٠ نيوتن

ب ← = ٧٠ نيوتن ، ٢٢٠°

ق

٤- أ ← = ٣ سم ، ١ سم / ١٠٠ م

ق

أ ← = ٣ سم × ١ سم / ١٠٠ م = ٣ ← = ٣٠٠ م

ق ق

وعليه فإن ← = ٣٠٠ م

ق

ب = ٩٠ + ٦٥ = ١٥٥°

ب أ ← = ٣٠٠ م ، ١٥٥°

ق

أ ← = ٣٠٠ م شمال الغرب

ق

بعض خصائص المتجهات

أ- تساوي متجهين:

يتساوى متجهين إذا كان لهما المقدار والاتجاه نفسهما، فنقول مثلاً:

أ ← = ب ← إذا كان أ = ب وكل منهما يشير إلى الاتجاه نفسه.

فمثلاً في حالة المتجهات الأربع التالية:

أ ← = ٥ سم، ٣٠° ، ب ← = ١٠ سم، ٣٠°

١م ٣م

جـ ← = ٥ سم، ٤٥° ، د ← = ٥ سم، ٣٠ شمال الشرق

٢م ٤م

هنا يكون أ ← = ب ← ، لأنه يمثل كذلك د ← = ٥سم، ٣٠° حيث يتساوى المقدار للمتجهين

١م ٣م ٤م

وكذلك لهما نفس الاتجاه.

أ ← ≠ جـ ← لأنهما متساويان مقداراً لكن ليس لهما نفس الاتجاه.

١م ٢م

ب ← ≠ جـ ← لأنهما لهما نفس الاتجاه لكن غير متساويان بالمقدار.

١م ٣م

إذا فقط يكون أ ← = ب ← ، لأن لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه.

١م ٤م

ب- سالب المتجه

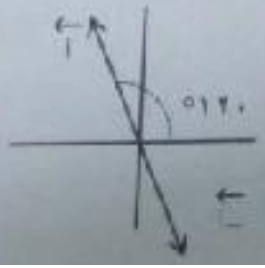
يعرف سالب المتجه ← بأنه متجه إذا أضيف إلى المتجه أ ← كان الناتج للجمع يساوي صفراً.

هذا يعني أن: أ ← + ـ أ ← = صفراً.

أي أنهما متساويان في المقدار ومتعاكسان في الاتجاه.

حل سؤال الكتاب صفحة (١٥).

أ ← = ٥ وحدة، ١٢٠°



جـ- ضرب متجه بكمية قياسية:

• عند ضرب المتجه $\overrightarrow{أ}$ بمقدار موجب (ن) ينتج متجه جديد $\overrightarrow{ب} = ن \overrightarrow{أ}$ له اتجاه ($\overrightarrow{أ}$) ومقداره يساوي (ن أ).

• ضرب المتجه $\overrightarrow{أ}$ بمقدار سالب (- ن) يكون الناتج $\overrightarrow{جـ} = - ن \overrightarrow{أ}$ ، مقداره يساوي (ن أ) واتجاهه معاكس لاتجاه ($\overrightarrow{أ}$).

مثال

إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٥$ وحدة، صفر . جد المتجهين: $\overrightarrow{ب} = \frac{٢}{٥} \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{جـ} = -٢ \overrightarrow{أ}$

الحل

$\overrightarrow{ب} = \frac{٢}{٥} \overrightarrow{أ} = \frac{٢}{٥} \times ٥$ صر ٢ وحدة

واتجاه $\overrightarrow{ب}$ يكون باتجاه $\overrightarrow{أ}$ ، أي أن: $\overrightarrow{ب} = \frac{٢}{٥} \overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{جـ} = -٢$ صر وحدة صفر.

$\overrightarrow{جـ} = -٢ \overrightarrow{أ} = -٢ \times ٥ = -١٠$ وحدة.

واتجاه $\overrightarrow{جـ}$ يكون بعكس $\overrightarrow{أ}$ ، أي أن:

$\overrightarrow{جـ} = ١٠$ وحدة، ٠١٨٠°

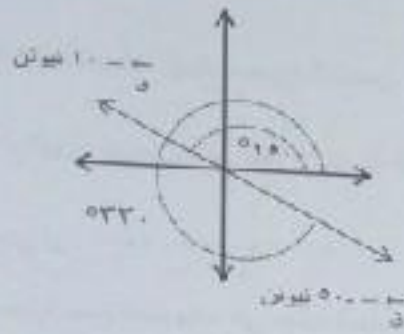
مثال

$\overrightarrow{ق} = ١٠$ نيوتن، ١٥٠° أوجد $\overrightarrow{ق}$ ؟

الحل

إذا كانت $\overrightarrow{ق} = -١٠ \times ٥ = -٥٠$ نيوتن

$\overrightarrow{ق} = -٥٠$ نيوتن، ٣٣٠°



حل سؤال الكتاب صفحة (١٠٦)

نعم، لو ضربنا المتجه $\overrightarrow{أ}$ بـ (-١) سوف يكون الناتج (- أ).

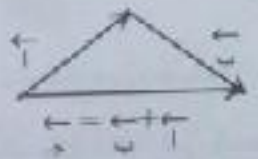
د- جمع (تركيب) متجهات:

عند جمع المتجهات لا نخضع لقواعد الجمع الجبرية مثل: (٣+٢) فإن الناتج يكون (٥)، ولا نحتمل الإجابة غير ذلك. لأن الكمية المتجهة مقدار واتجاه حيث يجب أخذ ذلك بعين الاعتبار.

فمثلاً لجمع المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ نتبع الخطوات التالية:

بين الشكل المجاور المتجهين $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$

حيث يمثل كل منهما قطعة مستقيمة تتناسب مع مقدار المتجه والسهم يشير إلى اتجاهه وهما في مستوى الصفحة.



أولاً: نضع المتجه $\overrightarrow{ب}$ بحيث يكون ذيله عند رأس المتجه ($\overrightarrow{أ}$).

ثانياً: نصل نقط مستقيم بين ذيل $\overrightarrow{أ}$ ورأس المتجه ($\overrightarrow{ب}$).

يمثل هذا الخط متجه حاصل $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ كما في الشكل المجاور. ويكون متجه ثالث ناتج عن حاصل جمعهما أي أن: $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

الحل

المسافة كمية قياسية، لا نأخذ فى الاعتبار اتجاه حركة السيارة، بل نجمع المسافات جمعًا عدديًا.

(١) ف = ف١ + ف٢ + ف٣ .....

ف = ف١ + ف٢ = ١٥ + ٢٠ = ٣٥ كم.

(٢) $\overleftarrow{أ}$ = ١٥ كم، صفر، $\overleftarrow{ب}$ = ٢٠ كم، ٦٠°

نأخذ مقياس رسم مناسب ١ سم / ٥ كم

$|\overleftarrow{أ}| = \frac{١ \text{ سم}}{٥ \text{ كم}} \times ١٥ \text{ كم} = ٣ \text{ سم}$

$|\overleftarrow{ب}| = \frac{١ \text{ سم}}{٥ \text{ كم}} \times ٢٠ \text{ كم} = ٤ \text{ سم}$

- نرسم سهماً طوله ٣ سم باتجاه الشرق (صفر مع محور السينات الموجب) ليمثل $\overleftarrow{أ}$

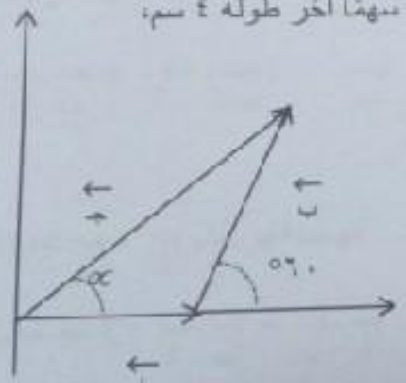
- باستخدام المنقلة والمسطرة نرسم من رأس المتجه ($\overleftarrow{أ}$) سهمًا آخر طوله ٤ سم،

ويصنع ٦٠° محور السينات الموجب ليمثل $\overleftarrow{ب}$.

- من بداية المتجه $\overleftarrow{أ}$ نرسم سهمًا يصل إلى

رأس المتجه $\overleftarrow{ب}$ ليمثل المحصلة $\overleftarrow{ح}$

(حاصل الجمع $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$) كما فى الشكل المجاور.



- نقيس طول السهم الممثل للمتجه $\overrightarrow{ب ا}$ باستخدام المسطرة ثم نقسم هذا الطول على مقياس الرسم المستخدم، ليمثل الناتج مقدار الإزاحة المتحصلة $\overrightarrow{ب ا}$.

طول السهم في الشكل = ٦ سم، ٦ × $\frac{١٠ كم}{٢ سم}$ = ٣٠ كم.

منه $|\overrightarrow{ب ا}|$ = ٣٠ كم.

- نقيس باستخدام المنقلة الزاوية (α) التي تصنعها الإزاحة المتحصلة مع محور السينات الموجب لتحديد اتجاه هذه الإزاحة. فتكون من الشكل α = ٤٠°.

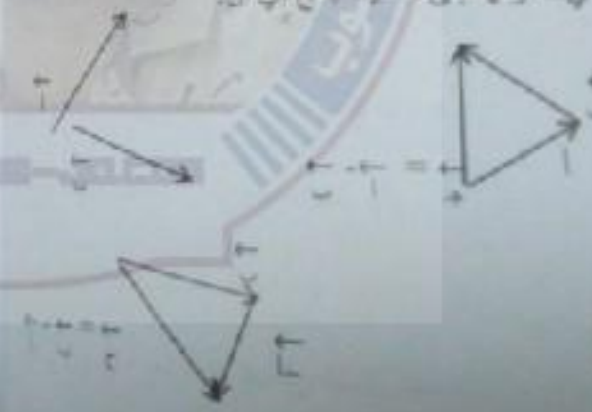
إذاً: $\overrightarrow{ب ا}$ = ٣٠ كم، ٤٠°.

يطلق على هذه الطريقة اسم تركيب المتجهات.

طرح المتجهات:

لإجراء عملية طرح متجهين مثل $\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا}$ نستخدم تعريف سالب المتجه لنصبح عملية الطرح على الصورة $\overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ج ا})$ أي نحولها إلى عملية جمع إي أن:

$\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا} = \overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ج ا})$



ولإيجاد $\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا}$ بالطريقة نفسها:

نلاحظ هنا أن: $\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا} \neq \overrightarrow{ج ا} - \overrightarrow{ب ا}$

وهذا يعني أن عملية طرح المتجهات لا تمتاز بخاصية التبديل.

حل أسئلة المراجعة صفحة (٢٠):

١) - المتجه المحصل: المتجه الذي يمثل حاصل جمع متجهين أو أكثر.

- سالب المتجه: هو المتجه الذي له نفس قيمة المتجه الآخر ويعاكسه في الاتجاه.

٢) $\overrightarrow{ب ا} + \overrightarrow{ج ا}$ هي حاصل جمع المتجهين مقداراً واتجاهاً.

- $\overrightarrow{ب ا} + \overrightarrow{ج ا}$ تعبيس جمع كمية قياسية.

٣) $\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا} = \overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ج ا})$

عند جمع متجهين $\overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ب ا})$ فإن الناتج يكون مقداره (صفر) ويسمى المتجه الصفري

$\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ب ا}$ = صفر.

وعليه يمكن تعريف حاصل طرح المتجهين السابقين $\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا}$ بأنه حاصل جمع

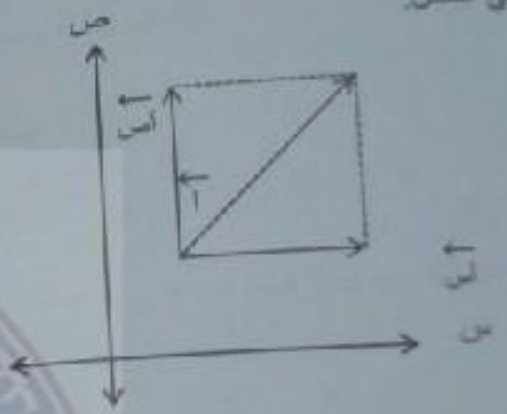
$\overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ج ا})$.

٤) $|\overrightarrow{ب ا} + \overrightarrow{ج ا}| = |\overrightarrow{ب ا} - (-\overrightarrow{ج ا})|$

إذا كان المتجه ($\overrightarrow{ب ا}$) سالب أي أن:

$|\overrightarrow{ب ا} + (-\overrightarrow{ج ا})| = |\overrightarrow{ب ا} - \overrightarrow{ج ا}|$

يمكن فصل متجه معين ← أ إلى متجهين متعامدين وذلك بإسقاط المتجه ← أ طرس
السينات حيث نحصل على ← أس وإسقاط المتجه ← أ على محور الصادات حيث نحصل ع
← أص كما في الشكل:



تسمى هذه العملية تحليل المتجه.

يوضح الشكل أن: ← أ = ← أس + ← أص حيث أنه:

- يسمى المتجه ← أس بالمركبة السينية للمتجه ← أ

ويسمى المتجه ← أص بالمركبة الصادية للمتجه ← أ

بما أن المتجهين (← أس + ← أص) يمثلان ضلعي مثلث قائم الزاوية، ويمثل المتجه ← أ
هذا المثلث فإن مقاديرها ترتبط معا حسب مبرهنة فيثاغورس.

أي أن:

أ = $\sqrt{(\overleftarrow{أس})^2 + (\overleftarrow{أص})^2}$

والمتجه ← أ تحدد الزاوية θ حيث:

ظا θ = $\frac{أص}{أس}$ ⇐ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{أص}{أس}$)

من هاتين المعادلتين ستطيع إيجاد مقدار واتجاه أي متجه إذا عرفت مركبته السينية والصادية.

تستطيع معرفة المركبتين السينية والصادية إذا عرف مقدار واتجاه المتجه ← أ حيث:

$\frac{أس}{أ}$ = جتا θ، أي أن:

أس = أ جتا θ

كذلك فإن: $\frac{أص}{أ}$ = جا θ ومنه:

أص = أ جا θ

مثال

إذا كان ← أ = ٨ وحدة، ١٢٠° جد مركبتي المتجه ← أ .

الحل

أس = أ جتا θ = ٨ × جتا ١٢٠° = -٤ وحدة.

أص = أ جا θ = ٨ × جا ١٢٠° = $4\sqrt{3}$ ≈ ٧ وحدة.

حل سؤال الكتاب صفحة (٢٢):

أس = ٢ وحدة، أص = ٣ وحدة، ب س = -٢ وحدة، ب ص = -٢ وحدة.

أ = $\sqrt{(\overleftarrow{أس})^2 + (\overleftarrow{أص})^2}$ = $\sqrt{(2)^2 + (3)^2}$ = ٣٫٦ وحدة.

ظا θ = $\frac{أص}{أس}$ ⇐ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{3}{2}$) = ٥٦°

ب ب = $\sqrt{(\overrightarrow{ب س})^2 + (\overrightarrow{ب ص})^2}$ = $\sqrt{(-٢)^2 + (-٢)^2}$ = ٢٫٨ وحدة

ظا θ = $\frac{\overrightarrow{ب ص}}{\overrightarrow{ب س}}$ ⟸ θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{-٢}{-٢})$ = ٤٥°

$\overrightarrow{ب}$ = ٢٫٨ وحدة، ٤٥°.

مثال

متجهان $\overrightarrow{جـ١}$ ، $\overrightarrow{جـ٢}$ مركبتاهما هي:

جـ١ س = ١٢ ، جـ٢ س = -٣

جـ١ ص = ٥ ، جـ٢ ص = ٤

أوجد:

١- مقدار واتجاه كل من $\overrightarrow{جـ١}$ ، $\overrightarrow{جـ٢}$

٢- الزاوية المحصورة بينهما.

الحل

١- جـ١ = $\sqrt{(\overrightarrow{جـ١ س})^2 + (\overrightarrow{جـ١ ص})^2}$ = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

الاتجاه ⟸ ظاθ = $\frac{\overrightarrow{جـ١ ص}}{\overrightarrow{جـ١ س}}$ ⟸ θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{٥}{١٢})$ = ٢٢٫٦°

جـ = $\sqrt{(\overrightarrow{جـ س})^2 + (\overrightarrow{جـ ص})^2}$ = $\sqrt{(-٣)^2 + (٤)^2}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

الاتجاه ⟸ ظاθ = $\frac{\overrightarrow{جـ ص}}{\overrightarrow{جـ س}}$ ⟸ θ = ظا$^{-١}$ $(\frac{-٤}{-٣})$ = ١٢٧°

٢- نلاحظ من الشكل المجاور

أن الزاوية بين المتجهين θ حيث:

θ = $\theta_٢$ - $\theta_١$

= ١٢٧ - ٢٢٫٦

= ١٠٤٫٤°

حساب المتجه المحصل لمتجهات عدة بطريقة التحليل:

لحساب المتجه المحصل لمتجهات عدة بطريقة التحليل، نحلل كل متجه إلى مركبته ثم نجمع المركبات السينية معًا والمركبات الصادية معًا ثم نجد المتجه المحصل بالعلاقة التالية:

أ. $\sqrt{(\text{أ س})^2 + (\text{أ ص})^2}$ ، واتجاهه ظاθ = $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ س}}$.

مثال

احسب المتجه المحصل للمتجهات

$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ المرسومة في الشكل المجاور

علمًا بأن: $\overrightarrow{أ}$ = ٤ وحدة، $\overrightarrow{ب}$ = ٥ وحدة، $\overrightarrow{جـ}$ = ٣ وحدة.

الحل

- نحدد الزاوية التي يصنعها كل متجه مع محور السينات الموجب:

$\theta_١$ = ٤٥° ، $\theta_٢$ = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠° ، $\theta_٣$ = ٢٧٠°

- نحلل المتجهات إلى مركباتها السينية والصادية كما يأتي:

• أ س = أ جتا $\theta_١$ = ٤ × جتا٤٥ = ٢٫٨٢ وحدة.

ل س = ١ × ٩ جتا ٤٥ = ٦٣ر٦ وحدة.

ب س = ب جتا ل = ٥ × جتا ١٥٠ = − ٣٣ر٤ وحدة.

ب ص = ب جا ل = ٥ جا ١٥٠ = ٥ر٢ وحدة.

ج س = جـ جتا ل = ٣ × جتا ٢٧٠ = صفر وحدة.

ج ص = جـ جا ل = ٣ جا ٢٧٠ = − ٣ وحدة.

∴ مح ل ← = ل ← + ب ← + جـ ←.

∴ س = ل س + ب س + جـ س = ٦٣ر٦ + − ٣٣ر٤ + صفر = ٣٠ر٢ وحدة.

∴ ص = ل ص + ب ص + جـ ص = ٦٣ر٦ + ٥ر٢ + − ٣ = ٣٣ر٥ وحدة.

∴ ∴ ل = $\sqrt{(\text{ل س})^2 + (\text{ل ص})^2}$ = $\sqrt{(٣٠ر٢)^2 + (٣٣ر٥)^2}$ = ٧٦ر٢ وحدة

الاتجاه:

ظا θ = $\frac{\text{ل ص}}{\text{ل س}}$ ⇐ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{٣٣ر٥}{٣٠ر٢}$) ≅ ٥٧°.

∴ ل ← = ٧٦ر٢ وحدة ∠ ٥٧°.

* نلاحظ هنا ∆ ص موجبة لكل ∆ س سالبة هذا يعني أن θ تقع في الربع الثاني للمستوى الإحداثي.

مثال

إذا كانت مركبتي إزاحة جسم هما ← = ١٢م، ← = − ٥ م، جد مقدار واتجاه ∆س ∆ص

الحل

ف = $\sqrt{(\text{ف س})^2 + (\text{ف ص})^2}$ = $\sqrt{(١٢)^2 + (-٥)^2}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣م

الاتجاه:

θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$) = ظا$^{-1}$ ($\frac{٥}{١٢}$) = ٢٢ر٦°.

مثال

جد مركبتي متجه سارع جسم (٩م/ث^2) إذا كان يصنع زاوية مقدارها ١٥٠° مع محور السينات.

الحل

ت س = ت جتا θ

= ٩ × جتا ١٥٠ = − ٧ر٧ م/ث^2

ت ص = ت جا θ

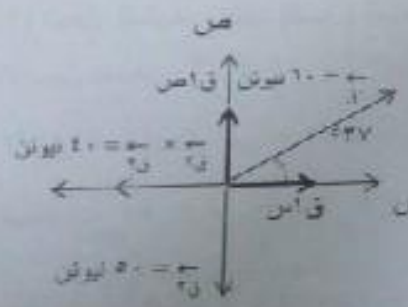
= ٩ × جا ١٥٠ = ٤ر٤ م/ث^2

<u>حل سؤال الكتاب صفحة (٢٤):</u>

نحلل ← ق$_1$ إلى مركبتين سينية وصادية كما في الشكل:

ق$_1$ س = ق$_1$ جتا θ = ٦٠ × جتا ٣٧ = ٤٨ نيوتن

ق$_1$ ص = ق$_1$ جا θ = ٦٠ × جا ٣٧ = ٣٦ نيوتن



ق$_2$ س = ق$_2$ جتا θ = ٤٠ × جتا ١٨٠ = − ٤٠ نيوتن

ق$_2$ ص = ق$_2$ جا θ = ٤٠ × جا ١٨٠ = صفر

ضرب المتجهات

هناك نوعين من الضرب يمكن اجراؤهما على المتجهات، الأول يسمى بالضرب القياسي والآخر بالضرب المتجهي.

أولاً: الضرب القياسي (النقطي) للمتجهات:

ينتج هذا النوع من الضرب عن كمية قياسية

إذا كان لدينا متجهان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ مرسومان من النقطة نفسها،

وبينهما زاوية محصورة θ، فإن حاصل الضرب القياسي للمتجهين: $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ ب$ جتا θ

حيث هنا ينطبق أحد المتجهين على إحدى مركبتي المتجه الآخر

يطلق على نوع الضرب هذا اسم الضرب النقطي لأنه يعبر عنه رياضياً بنقطة (.) بين المتجهات. تطبيقات الفيزيائية على الضرب القياسي للمتجهات حساب الشغل الناتج لقوة والمغناطيسي وفرق الجهد الكهروستاتي.

مثال

جسم موضوع على سطح أفقي أثرت فيه قوة مقدارها ١٥ نيوتن باتجاه ٣٧° مع المحور الأفقي فحركته باتجاهها مسافة ٤م.

احسب الشغل الذي تبذله القوة.

الحل

ش = ق ف جتا θ

= ١٥ × ٤ × جتا ٣٧

= ٤٨ جول.

حل سؤال فكر صفحة (٢٥):

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$

نعم، لأن الضرب هنا حاصل عن ضرب مقدار أحد المتجهين في مقدار مسقط المتجه الآخر عن الأول.

• نعتمد قيمة وإشارة حاصل الضرب النقطي لمتجهين على مقدار الزاوية المحصورة بينهما.

- إذا كان المتجه $\vec{أ}$ باتجاه $\vec{ب}$ ← فإن θ = صفر، ومنه:

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ ب$ جتا صفر = أ ب

- إذا كان المتجه $\vec{أ}$ عمودي على المتجه $\vec{ب}$ ← فإن θ = ٩٠°، ومنه:

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ ب$ جتا ٩٠° = صفر.

- - إذا كان المتجه $\vec{أ}$ بعكس المتجه $\vec{ب}$ ← فإن θ = ١٨٠°، ومنه:

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ ب$ جتا ١٨٠° = أ ب(-١) = - أ ب.

حل سؤال الكتاب صفحة (٢٩):

١- حاصل الضرب النقطي (القياسي) للمتجه نفسه ($\vec{أ}$)² (مثل أ.أ = أ×أ×جتا صفر = أ²)

٢- يكون حاصل الضرب القياسي لمتجهين يساوي صفرًا إذا كانا متعامدين θ = ٩٠°.

٣- يكون حاصل الضرب القياسي لمتجهين موجبًا إذا كانت الزاوية أقل من ٩٠°.

ويكون حاصل الضرب القياسي لمتجهين سالبًا إذا كانت الزاوية ١٨٠° أي متعاكسين.

ثانيًا: الضرب المتجهي (التقاطعي) للمتجهات:

ناتج هذا النوع من الضرب هو كمية متجهة.

إذا كان حاصل ضرب المتجهين ($\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$) والزاوية بينهما θ يعرف بالصورة:

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{جـ}$ ، فإن مقدار المتجه الناتج يعطى على الصورة:

$|\vec{جـ}| = أ ب \sin\theta$

واتجاه الاتجاه نستخدم قاعدة اليد اليمنى كما يلي:

- نشير الأبهام إلى اتجاه المتجه الأول ($\vec{أ}$)
- نشير بقية الأصابع إلى اتجاه المتجه الثاني ($\vec{ب}$)
- يكون اتجاه المتجهة الناتجة $\vec{جـ}$ عموديًا، على راحة اليد وخارجًا منها.

ومن ذلك نستنتج بأن:

- $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$ ، أي أنهما متساويان في المقدار ومتعاكسان في الاتجاه.
- المتجه الناتج من عملية ضرب ($\vec{أ} \times \vec{ب}$) يكون دائمًا متعامدًا مع كل من المتجهين:

$\vec{جـ} \perp \vec{أ}$ ، $\vec{جـ} \perp \vec{ب}$

- نستخدم زوج المتجهات المستوى الديكارتي (مستوى الصفحة) فيكون المتجه الناتج ($\vec{جـ}$)

عمودياً مع مستوى الصفحة، فإما يكون متجهًا نحو الداخل (بعيدًا عن عين الناظر) ونرمز له

بالرمز ⊗ أو نحو الخارج (باتجاه الناظر) ونرمز له بالرمز ⊙

خلاصة:

الضرب التقاطعي ناتج عن حاصل ضرب المتجه الأول $\vec{أ}$ في مركبة المتجه الثاني

العمودية عليه ($\vec{ب}$ جاθ).

من التطبيقات الفيزيائية على الضرب التقاطعي:

إيجاد عزم القوة: القوة المغناطيسية المؤثرة في شحنة تتحرك في مجال مغناطيسي.

مثال

إذا كان كل من المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ١ وحدات، صفر و ٣ وحدات، ٦٠° يقعان في

مستوى الورقة.

أوجد حاصل الضرب التقاطعي.

الحل

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{جـ}$

$|\vec{أ} \times \vec{ب}| = أ ب \sin\theta = ٤ \times ٣ \times$ جا٦٠ = ٣٫٤ وحدة.

حسب قاعدة كف اليد اليمنى فإن اتجاه $\vec{جـ}$ يكون عموديًا على مستوى الصفحة خارجًا منها

باتجاه الناظر ⊙

حل سؤال الكتاب صفحة (٢٨):

$-\vec{أ} \times \vec{أ} = \vec{جـ}$

$-\vec{أ} \times \vec{أ}$ جا صفر = صفر.