* إذا كانت $ق(س) = هـ^{-س} + P$ لو$_{هـ}$ س ، وكان $ق(1) = هـ$ ، فجد قيمة الثابت P ؟؟

الحل :-

$$ق(س) = \frac{-1}{س^2} هـ^{-س} + \frac{P}{س}$$

$$= \frac{-1}{س^2} هـ^{-س} + \frac{P}{س^2}$$

$ق(1) = هـ \Leftarrow هـ = -هـ + \frac{P}{2}$

$\Leftarrow \boxed{P = 4هـ}$

* إذا كانت $ص = هـ^{ظاس} + P$ لو$_{هـ}$ جتاس

$$+ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{د س}{1 + ظاس}$$

حيث P ثابت وكانت $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = 2هـ + 1$

فجد قيمة P ؟؟

$$\frac{د ص}{د س} = قا^2 س \, هـ^{ظاس} + P \times \frac{-جاس}{جتاس}$$

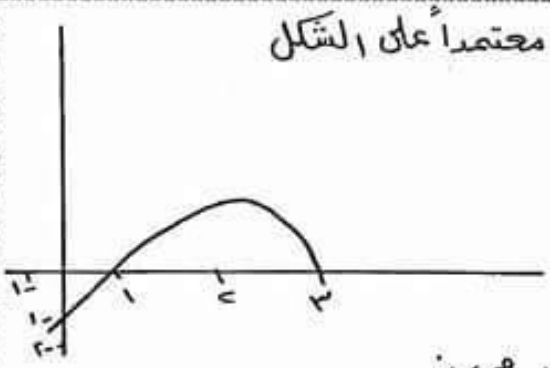
$$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = قا^2 \frac{\pi}{4} \, هـ^{ظا\frac{\pi}{4}} - \frac{P \, جا\frac{\pi}{4}}{جتا\frac{\pi}{4}}$$

$2هـ + 1 = 2هـ - P$

$\Leftarrow P = -1$

مكتبة أنزال
طريقك للنجاح

* معتمداً على الشكل



جد م ، ن

حيث $م \geq \int_{-1}^{3} (3 + 2و'(س)) \, دس \geq ن$

الحل :- $-2 \leq و(س) \leq 1$

$0 \leq و^2(س) \leq 4$

$3 \leq 3 + 2و^2(س) \leq 11$

$\int_{-1}^{3} 3 \, دس \leq \int_{-1}^{3} (3 + 2و^2(س)) \, دس \leq \int_{-1}^{3} 11 \, دس$

$م = 12$ ، $ن = 44$

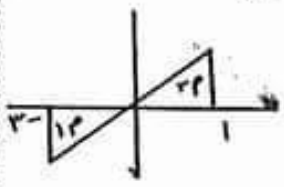
* جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $ص = |س|$ ، $ص = 2 - س^2$

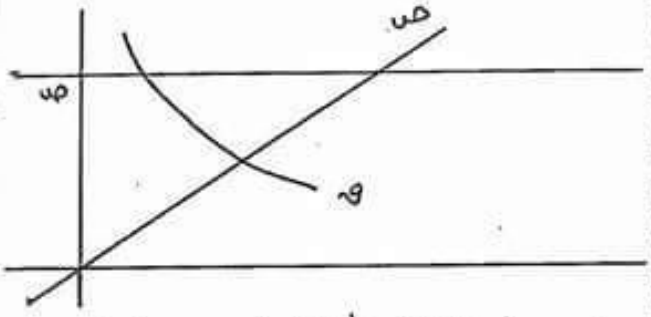
الشكل يمثل منحنى $و'(س)$

جد قيمة $\int_{-3}^{1} س \, و'(1 - س^2) \, دس$

حيث $م_1 = 4$

$م_2 = 6$



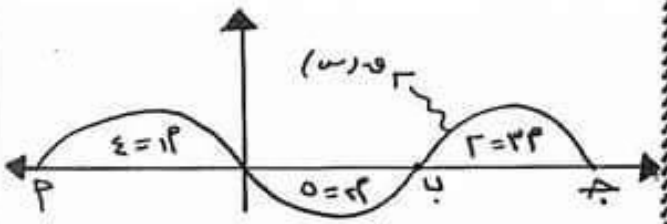


جد مساحة المنطقة المرسومة في الشكل والمحصورة بين المستقيم $ص_1 = س$ و المستقيم $ص_2 = ص$ و الاقتران $و(س) = \frac{1}{\sqrt{س}}$

* احسب مساحة المنطقة المحصورة بين $و(س) = س^2 - 4س$

$و(س) = س^2 - س$

ومحور السينات في الربع الرابع



يمثل الشكل المساحة المحصورة بين منحنى $و(س)$ ومحور السينات جد كلا مما يلي :-

① $\int_{أ}^{ب} و(س) \, دس$ ② $\int_{ب}^{جـ} و(س) \, دس$

③ $\int_{أ}^{جـ} و(س) \, دس$ ④ المساحة الكلية

⑤ $\int_{أ}^{جـ} |و(س)| \, دس$ ⑥ $|\int_{أ}^{جـ} و(س) \, دس|$

* جد المساحة المحصورة بين
$و(س) = |جاس|$ ، حد = 1 في
الفترة $[\frac{\pi}{2}- ، \frac{\pi}{2}]$

الحل :- جاس = 0

جاس	0	− جاس
$-\frac{\pi}{2}$	س = 0	$\frac{\pi}{2}$

$م = م_1 + م_2$

وهنه التماثل $م_1 = م_2$

$م = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - جاس)\, دس$

$= 2 [س - جتاس]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ وحدة مساحة

---

* $\int (قـ(س) + 2س)\, دس = س^3 + ب س^2 + 1$

وكذلك $قـ(1) = 5$ ، $و(2) = 7$ ، فجد :-

① قيمة ب

② $و(0)$

③ $قـ(4)$

الحل :- نشتق الطرفين

$قـ(س) + 2س = 3س^2 + 2ب س$

$قـ(س) = 3س^2 + 2ب س - 2س$

$\therefore قـ(1) = 5 \Leftarrow 3 + 2ب - 2 = 5$

$2ب = 4 \Leftarrow ب = 2$

$\therefore قـ(س) = 3س^2 + 2س$

$\Leftarrow \boxed{قـ(4) = 56}$

$و(س) = \int قـ(س)\, دس = \int (3س^2 + 2س)\, دس$

$= \frac{3س^3}{3} + \frac{2س^2}{2} + جـ$

$= س^3 + س^2 + جـ$

$\therefore و(2) = 7 \Leftarrow 8 + 4 + جـ = 7$

$\Leftarrow جـ = -5$

$\therefore و(س) = س^3 + س^2 - 5$

$\Leftarrow \boxed{و(0) = -5}$

* $و(2) = 5$ ، $و(3) = 1$ ، $م(2) = 1$ ، $م(3) = 7$

المطلوب $\int_2^3 \underbrace{س}_{و} \underbrace{قـ(س)\, دس}_{دو}$ ، م بدائي لـ و

$و = س \longrightarrow دو = 1\, دس$

$دو = قـ(س)\, دس \longrightarrow و = و(س)$

$= س\, و(س)]_2^3 - \int_2^3 و(س)\, دس$

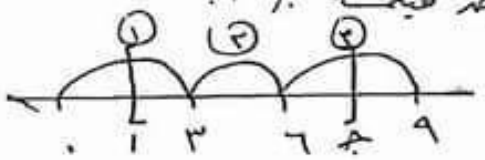
$= (3\, و(3) - 2\, و(2)) - م(س)]_2^3$

$= (1 \times 3 - 2 \times 5) - (1 - 7)$

$= -13 = -6 + 7$

$\int_1^{ج} \left[\frac{1}{3}س + 1\right] دس = 12$ ، $ج > 1$

جد قيمة ج ؟؟



بالتعويض $\int_1^3 1 \, دس = 1 \times 2 = 2$

$\int_2^6 2س \, دس = 3^2 - 2^2 = 6 \Leftarrow 6 + 2 = 8$

$\int_3^9 3س^2 \, دس = 3^3 - 3^2 = 9 \Leftarrow 9 + 6 + 2 = 17$

$\therefore \int_1^3 1 \, دس + \int_2^6 2س \, دس + \int_6^ج 3س^2 \, دس = 12$

$\Leftarrow 2 + 6 + 3(ج - 6) = 12$

$\Leftarrow 3(ج - 6) = 4$

$\Leftarrow 3ج - 18 = 4$

$\Leftarrow 3ج = 22 \Leftarrow ج = \frac{22}{3}$

* إذا كان $\int_1^{ص} س \, و(س) \, دس = ع$

فإن قيمة $\int_2^{هـ} هـ^{س} \, و(هـ^{س}) \, دس$

الحل :-

$\int_1^2 هـ^{س} \, و(هـ^{س}) \, دس$

* نفرض $ص = هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}}$

$س = 2 \leftarrow ص = هـ$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$= \int_1^{هـ} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} \times و(ص) \times \frac{دص}{هـ^{س}}$

بالرجوع للفرض

$\int_1^{هـ} 2ص \, و(ص) \, دص$

$= \int_1^{ص} ص \, و(ص) \, دص = 2 \times 4 = 8$

مكتبة أنزال
طريقك للنجاح

* يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ع × ت = ١ حيث ع > ٠ حيث أن الجسيم تحرك من السكون وف (٠) = ع م ، جد المسافة بعد ٩ ثوان ؟

* بينه أنه
$\int_{-٢}^{٥} (س^٢ + ٤) \, د س \geq \int_{-٢}^{٥} ٣ س \, د س$
دون حساب قيمة التكاملين

* إذا علمت أنه م (س) ، هـ (س) اقترانين بدائيين للاقتران المتصل و (س) وأنه م (٢) - هـ (س) = س^٢ جد قـ (١) حيث و (٢) = ٢

* دون حساب التكامل
$\int_{-١}^{٣} \frac{٢}{|س-١|+٥} \, د س$
جد قيمة كل من م ، ن
$م \geq \int_{-١}^{٣} \frac{٢}{|س-١|+٥} \, د س \geq ن$

* إذا كان م (س) اقتران بدائي للاقتران و (س) المتصل على [٠ ، π] وكان و (س) = ظا س - $\frac{م(س)}{جتا س}$ = صفر
تأنه م ($\frac{π}{٤}$) = ٢
اوجد و ($\frac{π}{٣}$)

$\int_{١}^{١٥} (٢س + \frac{و(س)}{٢}) \, د س = ١٥$
$\int_{٥}^{٠} (١ - ٣ و(س)) \, د س = \frac{٨}{٣}$
جد $\int_{٥}^{١} (س - ٦ و(س)) \, د س$

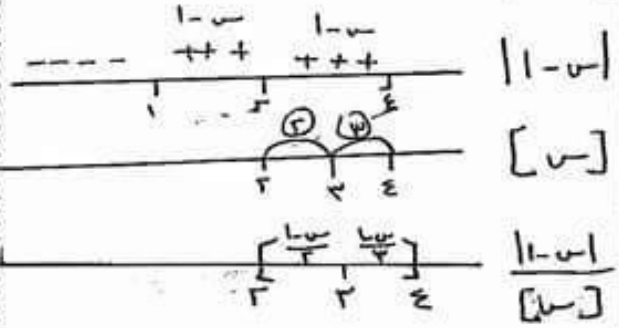
* إذا علمت أنه
$م \geq \frac{س}{١ + س^٢} \, د س \geq ك$ جد م ، ك
* دون حساب التكامل

* بينه أنه $\int_{٠}^{π/٢} (٣ + جتا س) \, د س$
ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

مكتبة أحزال
طريقك للنجاح

* $\int_{2}^{4} \frac{|س-1|}{[س]}$ د س

التكامل لا يوزع على القسمة وبالتالي نعيد تعريف الاقترانين معاً



$\therefore \int_{2}^{3} \frac{س-1}{2}$ د س $+ \int_{3}^{4} \frac{س-1}{3}$ د س

$= \frac{1}{2}\left[\frac{س^2}{2} - س\right]_{2}^{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{س^2}{2} - س\right]_{3}^{4}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$

$= \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{18+20}{24}$

$= \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$

* حل المعادلة التفاضلية

$\frac{س}{س^2-1} \frac{د ص}{د س} = هـ^{ص} (س+2)$

* إذا كانت ص = P هـ$^{س^3}$ + جا(لو$_{هـ}$ س)

حيث P ثابت وكان $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=1} = هـ^3 + 1$

جد قيمة P ؟؟

* يتحرك جسم وفق العلاقة $ت = \frac{1}{ع^2 - 2}$ ، ع > 1

(ع : السرعة)
(ت : تسارع)

إذا كانت سرعته الابتدائية 3 م/ث وكانت المسافة المقطوعة بعد 3 ثوانٍ 20 متر، جد المسافة المقطوعة بعد ثانية واحدة ؟؟

* يتحرك جسيم حسب العلاقة

$ت = \frac{1}{ع^P}$ حيث ع و P > 0

جد P حيث أن الجسم تحرك من السكون مبتدأ من نقطة الأصل وأن الجسم قطع مسافة مقدارها $\frac{8}{3}$ وحدة بعد ثانيتين

* إذا كانت ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(س، ص) = \frac{٢ ص^{٣}}{(٣س+٥)^{\frac{٤}{٣}}}$

جد قاعدة الاقتران للعلاقة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(١، ٥)$

* إذا كانت ميل المماس لمنحنى علاقة $(ص)$ عند $(س، ص)$ يساوي $س\sqrt{٣ + لو_{٣} س}$ ، جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بـ $(٥، ٤)$

* إذا كانت ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند $(س، ص)$ يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{ص^{٢}+١}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بـ $(١، ١٠)$

مكتبة نزال
طريقك للنجاح

* إذا كان $و(س)$ اقتران متصل على $[1، 3]$ وكان $م(س)$ اقتران بدائي لـ $و(س)$ ، حيث

$م(س) = 3س^2 - 10س + جـ$ ، جد

$$\int_3^5 (2و(س-2) - 3س + 1)\, د س$$

* إذا كان

$$\int_{-3}^{2} \left(\frac{و(س)}{4} - ب س\right) د س = 3$$

$$\int_5^2 و(س)\, د س = 6$$

$$\int_5^{-3} (2س + 3و(س))\, د س = 8$$ ، جد ب ؟؟

* خزان فارغ سعته $5و10$ م^3 يصب فيه ماء بمعدل $(ن + 3)$ م^3/د

اوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان ؟!

* إذا كان $ح$ تكامل $هـ^{و(س)}$ $د س$ + لو$(س+1)$

$$= \int \left(هـ^{م(س)} - 4س\right) د س$$

وكان $ق(0) = 6$ ، جد م ؟؟

* إذا كان $ص = جتاس$ ، أثبت أن $ص'' + ص' + 1 = 0$

إذا كان $ق(س) = 4 جتاس - 2 م'(س)$

حيث $م(س)$ بدائي لـ $و(س)$ ، جد

$و(س)$ حيث $و(\pi) = 2$

* إذا كان

$$ق(س) = \frac{-2}{س^4} + جا\pi س + هـ^{س-1}$$

وكان $ق(\frac{1}{2}) = 4$ ، $و(1) = هـ^{\frac{1}{2}}$

جد قاعدة الاقتران

$$هـ(س) = \begin{cases} و(س) + 9 & ، -2 < س < 1 \\ 3س & ، س = 1 \\ و(س) + 3س & ، 1 < س < 4 \end{cases}$$

جد قيمة $ب$

إذا كان $\int_{-2}^{4} هـ(س)\, د س = 9$

$$\int_{-2}^{4} و(س)\, د س = 2$$

* جد قيمة كل من التكاملات التالية:

① $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\text{جتا}س}{1+\text{جا}س}$ د س

② $\int \frac{٥\,\text{جا}^{٢}س + ٥\,\text{جتا}^{٢}س}{٣ + ٣\,\text{جتا}^{٢}س}$ د س

③ $\int \sqrt{٤ - هـ^{س}}$ د س

④ $\int \text{جتا}^{٣}س \; \log_{هـ} \text{جا}س$ د س

⑤ $\int \text{قا}^{٢}س \; \log_{هـ} \text{جا}س$ د س

⑥ $\int هـ^{٥س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤}$ د س

⑦ $\int \frac{١}{(٢\,\text{جا}س + \text{جتا}س)^{٢}}$ د س

⑧ $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٣س} - ٣هـ^{س} - ٤}$ د س

مكتبة أجيال
طريقك للنجاح

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\text{جا}س} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\text{جا}س} \times \frac{1+\text{جا}س}{1+\text{جا}س}\, د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\text{جتا}س|}{\sqrt{1+\text{جا}س}}\, د س$

$|\text{جتا}س| = \text{جتا}س$ لكل $س \in [0, \frac{\pi}{2}]$

* نفرض $ص = 1+\text{جا}س$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = 2$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}س (1+\text{جا}س)^{-\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int_1^2 \text{جتا}س \times ص^{-\frac{1}{2}} \times \frac{د ص}{\text{جتا}س}$

$= \int_1^2 ص^{-\frac{1}{2}}\, د ص$

$= 2 ص^{\frac{1}{2}} \Big]_1^2 = 2\sqrt{ص} \Big]_1^2$

$= 2\sqrt{2} - 2$

(12) $\int \frac{\text{جتا}^2 س (1+\text{ظا}س)}{1-\text{ظا}س}\, د س$

$= \int \text{جتا}^2 س \times \frac{1+\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}}{1-\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}}\, د س$

$= \int (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س)^2 \times \frac{\text{جتا}س + \text{جا}س}{\text{جتا}س - \text{جا}س}\, د س$

$= \int (\text{جتا}س + \text{جا}س)^2 (\text{جتا}س - \text{جا}س)^2 \times \frac{\text{جتا}س + \text{جا}س}{\text{جتا}س - \text{جا}س}\, د س$

$= \int (\text{جتا}س - \text{جا}س) (\text{جتا}س + \text{جا}س)^3\, د س$

* نفرض $ص = \text{جتا}س + \text{جا}س$

$\frac{د ص}{د س} = -\text{جا}س + \text{جتا}س$

$د س = \frac{د ص}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$

$= \int (\text{جتا}س - \text{جا}س) \times ص^3 \times \frac{د ص}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$

$= \int ص^3\, د ص$

$= \frac{ص^4}{4} + ج$

$= \frac{1}{4} (\text{جتا}س + \text{جا}س)^4 + ج$

(13) $\int (\text{جا}س + \text{جتا}س)^5 \text{جتا}2س\, د س$

$= \int ص^5 \text{جتا}2س \times \frac{د ص}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$ | نفرض $ص = \text{جا}س + \text{جتا}س$

$= \int ص^5 (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س) \times \frac{د ص}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$

$= \int ص^5 (\text{جتا}س - \text{جا}س)(\text{جتا}س + \text{جا}س) \times \frac{د ص}{\text{جتا}س - \text{جا}س}$

بالرجوع للفرض $ص = \text{جا}س + \text{جتا}س$

$= \int ص^5 \times ص\, د ص = \int ص^6\, د ص$

$= \frac{ص^7}{7} + ج = \frac{1}{7} (\text{جا}س + \text{جتا}س)^7 + ج$

(١١) $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{١ + ٣ جا س - جتا ٢ س}}\ \text{د س}$

الحل :- $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{١ + ٣ جا س - (١ - ٢ جا}^2\text{ س)}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جتا س}}{\text{٢ + ٣ جا س - ١ + ٢ جا}^2\text{ س}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س (٣ + ٢ جا س)}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{جا س} \Longrightarrow \text{د ص} = \text{جتا س د س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$\int \frac{\text{جتا س}}{\text{ص (٣ + ٢ ص}^2)} \times \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$\int \frac{1}{\text{ص (٣ + ٢ ص}^2)}\ \text{د ص}$

$\Longleftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣ + ٢ ص}^2}$

$\Longleftarrow \frac{\text{أ (٣ + ٢ ص}^2) + \text{ب ص}}{\text{ص (٣ + ٢ ص}^2)}$

$1 = \text{أ}(3 + 2\text{ص}^2) + \text{ب ص}$

ص = ٠ ⇐ $1 = 3\text{أ}$ ⇐ ص = ٠,٥ − ⇐ $0 = 2\text{أ} + \text{ب}$

$\text{أ} = \frac{1}{3}$ ، $\text{ب} = \frac{-2}{3}$

$= \frac{1}{3} \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} - \frac{2}{3} \int \frac{\text{د ص}}{3 + 2\text{ص}^2}$

$= \frac{1}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| - \frac{2}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |3 + 2\text{ص}^2| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جا س}| - \frac{2}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |3 + 2\text{جا}^2\text{ س}| + \text{جـ}$

كسور جزئية

مكتبة أنزال
طريقك للنجاح

٨ $\int جا^{ن}س \, قا^{ن+٣}س \, دس$ ، $ن \neq -١$

$= \int \frac{جا^{ن}س}{جا^{ن}س \times قا^{ن}س} \times قا^{٢}س \, دس$

$= \int ظا^{ن}س \, قا^{٢}س \, دس$

* نفرض $ص = ظاس$

$= \int ص^{ن} \, ق^{٢}س \times \frac{دص}{ق^{٢}س}$

$= \int ص^{ن} \, دص$

$= \frac{ص^{ن+١}}{ن+١} + ج$

$= \frac{١}{ن+١} ظا^{ن+١}س + ج$

---

٩ $\int \frac{١}{(٢جاس + جتاس)^{٢}} \, دس$

١٠ $\int \frac{ظاس + ظتاس}{لو_{هـ} ظاس} \, دس$

$ص = لو_{هـ} ظاس$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{قا^{٢}س}{ظاس} \Leftarrow دس = \frac{ظاس}{قا^{٢}س}$

$\int \frac{ظاس + ظتاس}{ص} \times \frac{ظاس}{قا^{٢}س} \, دص$

$\int \frac{ظاس + \frac{١}{ظاس}}{ص} \times \frac{ظاس}{١ + ظا^{٢}س} \, دص$

$\int \frac{ظا^{٢}س + ١}{ظاس \times ص} \times \frac{ظاس}{١ + ظا^{٢}س} \, دص$

$= \int \frac{١}{ص} \, دص$

$= لو_{هـ} |ص| + ج$

$= لو_{هـ} |لو_{هـ} ظاس| + ج$

٥) $\int \frac{\text{قا}^2 س}{5 \text{ظا}^2 س - 3 \text{ظا} س - 2} \, د س$

* نفرض ص = ظا س

$\frac{د ص}{د س} = \text{قا}^2 س \Leftarrow \boxed{د س = \frac{د ص}{\text{قا}^2 س}}$

$\int \frac{\text{قا}^2 س}{5 ص^2 - 3 ص - 2} \times \frac{د ص}{\text{قا}^2 س}$

$= \int \frac{1}{5 ص^2 - 3 ص - 2} \, د ص$

الحل بالكسور الجزئية

٦) $\int (س^9 \text{قا}^2 س + 9 س^8 \text{ظا} س) \, د س$

$= \int س^9 \text{قا}^2 س \, د س + \int 9 س^8 \text{ظا} س \, د س$

و = $س^9$ ← د و = $9 س^8 د س$

د ه = $\text{قا}^2 س$ د س ← ه = ظا س

$= و ه - \int ه \times د و$

$= س^9 \text{ظا} س - \int \text{ظا} س \times 9 س^8 د س$

$= س^9 \text{ظا} س + ج$

٧) $\int_{\text{ه}} \text{لو} (3 س - س^2 - س) \, د س$

و = $\text{لو}_{\text{ه}} (3 س - س^2 - س)$ ← $د و = \frac{6 س - 1}{3 س - س^2} د س$

د ه = د س ← ه = س

$= و ه - \int ه \times د و$

$= س \text{لو}_{\text{ه}} (3 س - س^2 - س) - \int \frac{6 س - 1}{3 س - 1} \, د س$

$6 س - 1 \overline{)\, 3 س - 1}$ ، $\frac{6 س - 2}{1}$ ، 2

$= س \text{لو}_{\text{ه}} (3 س - س^2 - س) - \int (2 + \frac{1}{3 س - 1}) \, د س$

$= س \text{لو}_{\text{ه}} (3 س - س^2 - س) - (2 س + \frac{1}{3} \text{لو}_{\text{ه}} |3 س - 1|) + ج$

* حل آخر: $\int \text{لو}_{\text{ه}} (س (3 - س)) \, د س$

$= \int \text{لو}_{\text{ه}} س \, د س + \int \text{لو}_{\text{ه}} (3 - س) \, د س$

(أجزاء) (أجزاء)

مكتبة نزال — طريقك للنجاح

* التكامل *

أسئلة مقترحة

١ $\int \frac{1}{\sqrt[3]{س^2} - \sqrt{س}}\, د س$

* نفرض $ص = \sqrt[6]{س}$

حيث (٦) هو المضاعف المشترك الأصغر لرتب الجذور ٢، ٣

$ص^6 = س \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{6 ص^5}$

$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{س^2} - \sqrt{س}} \times \frac{د ص}{\frac{1}{6 ص^5}}$

$= \int \frac{6 ص^5}{ص^4 - ص^3}\, د ص$

$= \int \frac{6 ص^2}{ص - 1}\, د ص$ ، أكمل قسمة طويلة

٢ $\int \frac{س^2}{\sqrt{2س + 3} - \sqrt{س + 3}}\, د س$

* الجذور مختلفة نضرب بالمرافق (للمقام)

$= \int \frac{س^2 (\sqrt{2س + 3} + \sqrt{س + 3})}{(2س + 3) - (س + 3)}\, د س$

$= \int \frac{س^2 (\sqrt{2س + 3} + \sqrt{س + 3})}{س}\, د س$

$= \int س \sqrt{2س + 3}\, د س + \int س \sqrt{س + 3}\, د س$

أجزاء — أجزاء

٣ $\int \sqrt{1 + هـ^س}\, د س$

* نفرض $ص = \sqrt{1 + هـ^س}$

$\int ص \times \frac{د ص}{\frac{هـ^س}{2\sqrt{1 + هـ^س}}}$

بالرجوع للفرض: $ص = \sqrt{1 + هـ^س} \Leftarrow ص^2 = 1 + هـ^س \Leftarrow ص^2 - 1 = هـ^س$

$= \int \frac{2 ص^2}{ص^2 - 1}\, د ص$

أكمل قسمة طويلة ثم كسور جزئية

٤ $\int \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1} + (\sqrt{س^2 + 1})^3}\, د س$

* نفرض $ص = \sqrt{س^2 + 1}$

$\int \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1} + ص^3} \times \frac{د ص}{\frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}}}$

بالرجوع للفرض $ص = \sqrt{س^2 + 1}$

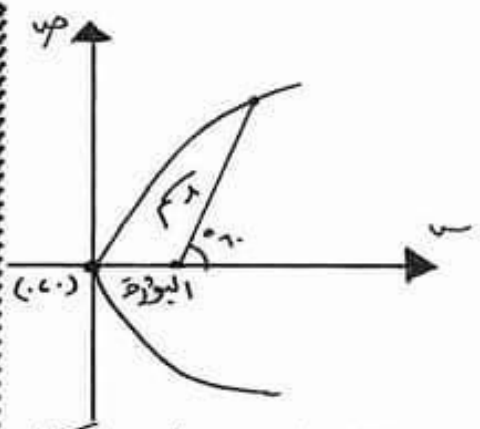
$ص^2 = س^2 + 1$

$\int \frac{ص}{\sqrt{ص^2 + ص^3}}\, د ص$

$\int \frac{ص}{ص \sqrt{1 + ص}}\, د ص = \int \frac{ص}{ص^{\frac{1}{2}} (1 + ص)}\, د ص$

$\int (1 + ص)^{-\frac{1}{2}}\, د ص = 2 (1 + ص)^{\frac{1}{2}} + ج$

$2 \sqrt{1 + \sqrt{س^2 + 1}} + ج$



❁ القطع المكافئ المرسوم في الشكل حيث رأسه نقطة الأصل

الجواب :- $ص^{٢} = ٨س$

❁ إذا كانت $\frac{(س-١)^{٢}}{٦٤} + \frac{(ص+٣)^{٢}}{٣٦} = ١$

تمثل معادلة قطع ناقص فجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه مركز القطع الناقص السيني

الجواب :- $(ص+٣)^{٢} = ٣٢(س-١)$

❁ $أ ب ج$ مثلث فيه الرأسين $أ ، ب$ هما $أ (٥،٠)$ ، $ب (-٥،٠)$ ومحيط المثلث ٣٠ سم والرأس $ج$ يتحرك في المستوى الديكارتي أوجد معادلة المنحنى لحركة الرأس $ج$

1996

الجواب : $\frac{ص^{٢}}{١٠٠} + \frac{س^{٢}}{٧٥} = ١$

* جد معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه (٠،٠) اختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$ و المسافة بينه طرفي محوره الأكبر و الأصغر تساوي ١٤ وحدة

* الجواب : $\frac{س^{٢}}{٨} + \frac{ص^{٢}}{٦} = ١$

* تمر بنقطة الأصل وتقطع من محوري السينات والصادات الموجبين ٨ وحدات ، ٦ وحدات على الترتيب

* الجواب : $(س-٤)^{٢} + (ص-٣)^{٢} = ٢٥$

* مركزها (٣،-١) وتقطع من المستقيم الذي معادلته $٣س - ٥ص + ١٨ = ٠$ وتر طوله ٦ وحدات

الجواب :- $(س-٣)^{٢} + (ص+١)^{٢} = ٣٨$

* تمس المستقيم $ص = \frac{١}{٣٧} س$ في النقطة $(٣٧، ٣)$ ويقع مركزها على محور السينات

* الجواب :- $(س-٤)^{٢} + (ص)^{٢} = ٤$

* إذا كانت نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} + ل س - ١٠ ص - ١٥ = ٠$ يساوي ٧ وحدات فما قيمة الثابت ل ؟؟

الجواب : $ل = \pm ٦$

* جد الاختلاف المركزي لقطع زائد بعد أحد رأسيه عن البؤرة البعيدة عنه يساوي أربعة أمثال بعده عن البؤرة القريبة منه .

المطلوب $\frac{جـ}{ا}$ = ؟؟

$ا+جـ = ٤(جـ-ا) \Leftarrow ا+جـ = ٤جـ-٤ا$

$\Leftarrow ٥ا = ٣جـ \Leftarrow \frac{جـ}{ا} = \frac{٥}{٣}$

* جد معادلة القطع الزائد الذي البعد بينه بؤرتاه (٤) وحدات ورأساه هما بؤرة ورأس القطع المخروطي $(س-٢)^٢ = ٨(ص-١)$.

نجد أولاً بؤرة ورأس القطع المكافئ الذي معادلته $(س-٢)^٢ = ٨(ص-١)$

مفتوح للأعلى ، الرأس (٢،١)

$٤جـ = ٨ \Leftarrow جـ = ٢$

والآن نجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٢،١) (٢،٣) كما أنه $٢جـ = ٤$

صادي ، المركز $(٢ + \frac{٣+١}{٢}) = (٢،٢)$

$ا = ١ \Leftarrow جـ = ٢$

$\therefore جـ^٢ = ا^٢ + ب^٢ \Leftarrow ٤ = ١ + ب^٢ \Leftarrow ب = \sqrt{٣}$

المعادلة هي $\frac{(ص-٢)^٢}{١} - \frac{(س-٢)^٢}{٣} = ١$

* إذا كانت $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ٣٦$ تمثل معادلة قطع ناقص فأوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأسا الناقص ورأساه بؤرتا الناقص .

نجد أولاً بؤرتا ورأسا القطع الناقص الذي معادلته $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ٣٦$

$\Leftarrow \frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

صادي المركز (٠،٠)

$ا = ٣ ، ب = ٢$

$جـ^٢ = ا^٢ - ب^٢ \Leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

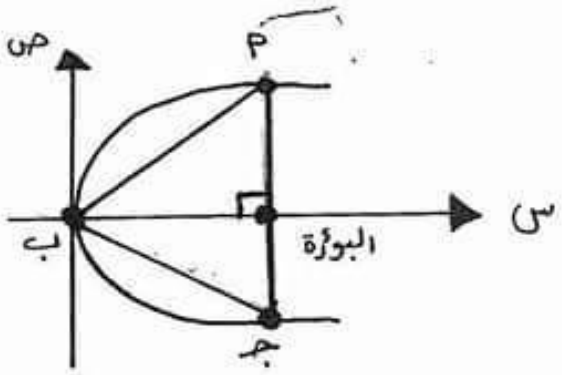
الآن نجد معادلة القطع الزائد

صادي المركز (٠،٠)

$ا = \sqrt{٥} ، جـ = ٣ \Leftarrow جـ^٢ = ا^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب = ٢$

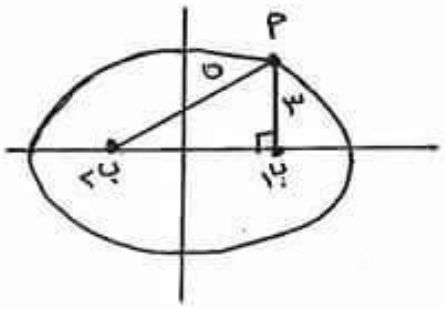
$\therefore$ المعادلة هي : $\frac{ص^٢}{٥} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

مكتبة نزال
طريقك للنجاح

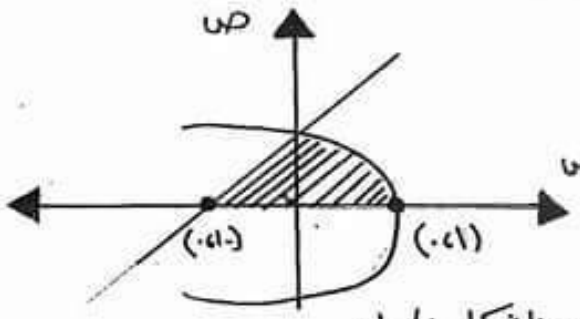


* جد معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل المجاور، علماً بأنه مساحة المثلث Pبجـ تساوي (١٨) وحدة مربعة ؟؟

الجواب :- $ص^2 = ١٢س$



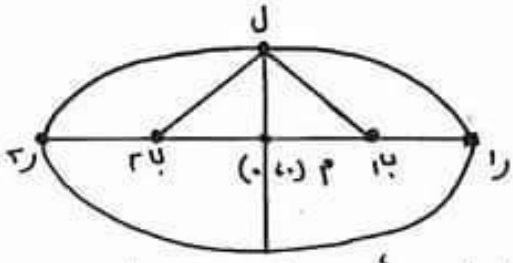
في الشكل المجاور قطع ناقص بؤرتاه ب١، ب٢ ، ب١P = ٣سم ، ب٢P = ٥ جد الاختلاف المركزي لهذا القطع .



في الشكل المجاور يمثل قطعاً مكافئاً و مستقيم يقطعه، جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل

(في الشكل محور السينات يمثل محور التماثل للقطع المكافئ)

الجواب :- $\frac{٧}{٦}$



إذا علمت أن محيط المثلث ل ب١ ب٢ = ١٦ وأن مساحة المثلث ل م ر١ = ١٠
جد معادلة القطع ؟؟

مكتبة نزال
طريقك للنجاح

(٤) $س = نـ + \frac{1}{نـ}$ ، $ص = نـ - \frac{1}{نـ}$

$س^2 = نـ^2 + 2 + \frac{1}{نـ^2}$ ... (١)

$ص^2 = نـ^2 - 2 + \frac{1}{نـ^2}$ ... (٢)

معادلة (١) - معادلة (٢)

$\Leftarrow س^2 - ص^2 = 4$ (قطع زائد)

(٥) $س = 1 - حـ^{نـ}$ ، نـ = اللوحـ ص

$\Leftarrow س^2 = 1 - حـ^{نـ}$ ولكن نـ = لوحـ ص

$\Leftarrow س^2 = 1 - حـ^{لوحـ ص^2}$

$\Leftarrow س^2 = 1 - ص^2 \Leftarrow س^2 + ص^2 = 1$

(دائرة)

(٣٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س، ص) في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره وحدتان عن المستقيم ٦س + ٨ص = ٢ وتمر في أثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها $(س-1)^2 + (ص-2)^2 = 16$

بعد (س، ص) عن ٦س + ٨ص - ٢ = ٠

تابع

مكتبة أنزال
طريقك للنجاح

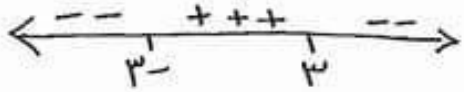
دائرة $\Leftarrow$ $م^2+3م = 6-م^2 \Leftarrow م^2+3م = 3$

$\Leftarrow \boxed{م = 1}$

مكافئ $\Leftarrow$ $م^2+3م = 0$ أو $م^2+3م = 6$

∴ إما $\boxed{م = 0}$ أو $\boxed{م = -3}$

ناقص $\Leftarrow (م^2+3م)(6-م^2) < 0$



(ب) $س = 2+3$ قتاه ، $ص = 5+4$ ظتاه

$\Leftarrow \frac{(س-2)}{3} =$ قتاه $\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{9} =$ قتا^{2}ه

$\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{9} = 1+$ ظتا^{2}ه ولكن $\frac{ص-5}{4} =$ ظتاه

$\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{9} = 1 + \frac{(ص-5)^2}{16}$

$\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{9} - \frac{(ص-5)^2}{16} = 1$

(قطع زائد)

(ج) $س = م$ (جتانه - جانه) ، $ص = ب$ (جتانه + جانه)

$\Leftarrow \frac{س^2}{م^2} = (جتانه - جانه)^2$

$= جتا^2نه - 2$ جانه جتانه $+ جا^2نه$

$\Leftarrow \frac{س^2}{م^2} = 1 - جا2نه$ ..... ①

$\Leftarrow \frac{ص^2}{ب^2} = (جتانه + جانه)^2$

$= جتا^2نه + 2$ جانه جتانه $+ جا^2نه$

$\Leftarrow \frac{ص^2}{ب^2} = 1 + جا2نه$ ----- ②

معادلة ① + ② $\Leftarrow \frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 2$

$\Leftarrow \frac{س^2}{م^2ب^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ (قطع ناقص)

٣٤

النقطة نـ (س، ص) تتحرك في المستوى
فجد معادلة الحركة للنقطة نـ وما نوع
القطع المخروطي فيما يلي :-

(أ) $س =$ جتاه ، $ص =$ جتا2ه

(ب) $س = 2+3$ قتاه ، $ص = 5+4$ ظتاه

(ج) $س = م$ (جتانه - جانه) ، $ص = ب$ (جتانه + جانه)

(د) $س = نـ + \frac{1}{نـ}$ ، $ص = نـ - \frac{1}{نـ}$

(هـ) $س = \sqrt{1-هـ^2}$ ، $نـ = $ اللوهـ ص

الحل :- (أ) $س =$ جتاه ، $ص =$ جتا2ه

$\Leftarrow ص = 2$ جتا^{2}ه $- 1$ لكنه $س =$ جتاه

$\Leftarrow ص = 2س^2 - 1$ (قطع مكافئ)

$٧ = \sqrt{(\frac{ل}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٢ - -١٥}$

$٧ = \sqrt{\frac{ل^٢}{٤} + ٤٠}$

$٤٩ = \frac{ل^٢}{٤} + ٤٠ \Leftarrow \frac{ل^٢}{٤} = ٩$

$\Leftarrow ل^٢ = ٣٦ \Longrightarrow ل = \pm ٦$

---

٣١ ما طول الوتر العمودي على محور السينات المار بالنقطة (٤، ٠) في الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ؟؟

$س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

المركز $\Leftarrow$ (٠، ٠) ، ر = ٥

العمود النازل من مركز الدائرة ينصف الوتر

$٢٥ = ١٦ + ل^٢ \Leftarrow ل^٢ = ٩ \Leftarrow ل = ٣$

∴ الوتر = $٦ = ٢ل$

---

٣٢ إذا كان $هـ_١$ ، $هـ_٢$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين :-

$\frac{س^٢}{ل^٢} - \frac{ص^٢}{ك^٢} = ١$ ، $\frac{ص^٢}{ك^٢} - \frac{س^٢}{ل^٢} = ١$

أثبت أنه : $\frac{١}{(هـ_١)^٢} + \frac{١}{(هـ_٢)^٢} = ١$

$\frac{س^٢}{ل^٢} - \frac{ص^٢}{ك^٢} = ١ \Leftarrow$ $P^٢ = ل^٢$ ، $ب^٢ = ك^٢$

$\Leftarrow ج^٢ = ل^٢ + ك^٢$

$هـ_١ = \frac{ج}{P} \Leftarrow (هـ_١)^٢ = \frac{ج^٢}{P^٢} = \frac{ل^٢ + ك^٢}{ل^٢}$

$\frac{ص^٢}{ك^٢} - \frac{س^٢}{ل^٢} = ١ \Leftarrow P^٢ = ك^٢$ ، $ب^٢ = ل^٢$

$\Leftarrow ج^٢ = ك^٢ + ل^٢$

$هـ_٢ = \frac{ج}{P} \Leftarrow (هـ_٢)^٢ = \frac{ج^٢}{P^٢} = \frac{ك^٢ + ل^٢}{ك^٢}$

$\therefore \frac{١}{(هـ_١)^٢} + \frac{١}{(هـ_٢)^٢} = \frac{ل^٢}{ل^٢ + ك^٢} + \frac{ك^٢}{ك^٢ + ل^٢}$

$= \frac{ل^٢ + ك^٢}{ل^٢ + ك^٢} = ١$ وهو المطلوب #

---

٣٣ ما قيمة (قيم) P التي تجعل القطع المخروطي الذي معادلته :

$(P + ٣)س^٢ + (٦ - P٢)ص^٢ - ٤ص + ١ = ٠$

تمثل : ⓐ دائرة .

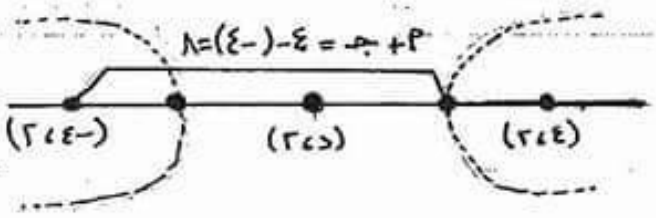
ⓑ قطع مكافئ .

ⓒ قطع ناقص .

$2ب = 8 \Leftarrow$ $\boxed{ب = 4}$ ، سيني

$ا + ج = 8$

$\Leftarrow ج = 8 - ا$ ..... ①



$ج^2 = ا^2 + ب^2 \Leftarrow ج^2 = ا^2 + 16$ ..... ②

وبتعويض (1) في (2) $\Leftarrow (8 - ا)^2 = ا^2 + 16$

$\Leftarrow 64 - 16ا + ا^2 = ا^2 + 16 \Leftarrow \boxed{ا = 3}$

ومن الرسمة المجاورة

المركز (1، 2) $\Leftarrow$ المعادلة هي: $\frac{(س-1)^2}{9} - \frac{(ص-2)^2}{16} = 1$

---

28 قطع مخروطي مركزه (0، 0) والمسافة بين بؤرتيه تزيد عن المسافة بين رأسيه (6) وحدات واختلافه المركزي $(\frac{4}{3})$ جد معادلته.

$2ج = 6 + 2ا \Leftarrow ج = 3 + ا$ ..... ①

$\frac{ج}{ا} = \frac{ع}{3} \Leftarrow 3ج = 4ا$ ..... ②

بتعويض ① في ② $\Leftarrow 3(3 + ا) = 4ا$

$\Leftarrow 9 + 3ا = 4ا \Leftarrow \boxed{ا = 9} \Leftarrow \boxed{ج = 12}$

$\therefore ج^2 = ا^2 + ب^2 \Leftarrow 144 = 81 + ب^2 \Leftarrow ب^2 = 63$

$\therefore$ المعادلة هي :- سيني

$\Leftarrow \frac{س^2}{81} - \frac{ص^2}{63} = 1$

حيادي

$\Leftarrow \frac{ص^2}{81} - \frac{س^2}{63} = 1$

---

29 قطع مخروطي بؤرتاه (2، 2)، (2، 8) إذا كان البعد بينه أحد رأسيه والبؤرة القريبة من الرأس وحدة واحدة

الجواب : بفرض القطع زائد

$\Leftarrow \frac{(ص-5)^2}{4} - \frac{(س-2)^2}{5} = 1$

و بفرض القطع ناقص

$\Leftarrow \frac{(ص-5)^2}{16} + \frac{(س-2)^2}{7} = 1$

---

30 إذا كان نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 + ل س - 10 ص - 15 = 0$ يساوي 7 وحدات فما قيمة الثابت ل ؟؟

تابع الحل ←

$(ص-٢٠)^٢ = -٨(ص-٥٠)$

$ص^٢ - ٤٠ص + ٤٠٠ = -٨ص + ٤٠٠$

$ص^٢ - ٣٢ص = ٠$

$ص(ص-٣٢) = ٠$

$ص = ٠$ ، $ص = ٣٢$

المركز $(٣+ر ، ١+ر)$

$(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = ر^٢$

$(س-٣-ر)^٢ + (ص-١-ر)^٢ = ر^٢$

$(٥،٢)$ تحقق المعادلة

$\Leftarrow (٢-ر)^٢ + (١-ر)^٢ = ر^٢$

$٤ - ٤ر + ر^٢ + ١ - ٢ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ٦ر + ٥ = ٠$

$(ر-٥)(ر-١)$

$ر = ٥$ ، $ر = ١$

الحالة (١)

$ر = ٥ \Leftarrow$ المركز $(٣+٥، ١+٥) = (٨، ٦)$

$(س-٨)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٢٥$

الحالة (٢) :-

$ر = ١ \Leftarrow$ المركز $(٣+١، ١+١) = (٤، ٢)$

$(س-٤)^٢ + (ص-٢)^٢ = ١$

٢٤ جد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الرابع وتمس محوري السينات والصادات والمستقيم $٣س - ٤ص = ١٢$.

المركز $(٠+ر، ٠-ر) = (ر، -ر)$

$ر = \frac{|٣ر + ٤ر - ١٢|}{\sqrt{٩+١٦}} = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

$\Leftarrow ر = \frac{|٧ر - ١٢|}{٥} \Leftarrow ٥ر = |٧ر - ١٢|$

إما $٥ر = ٧ر - ١٢$ | أو $-٥ر = ٧ر - ١٢$

$\leftarrow ٢ر = ١٢$ | $\leftarrow ١٢ر = ١٢$

$\leftarrow ر = ٦$ | $\leftarrow ر = ١$

المركز $(٦، -٦)$ | المركز $(١، -١)$

$(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = ر^٢$ | $(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = ر^٢$

$(س-٦)^٢ + (ص+٦)^٢ = ٣٦$ | $(س-١)^٢ + (ص+١)^٢ = ١$

٢٥ جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين $س = ٣$ ، $ص = ١$ وتمر بالنقطة $(٥،٢)$.

٢٦ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(٢،٣)$ $(-١،١)$ ويقع مركزها على الخط المستقيم $س - ٣ص - ١١ = ٠$.

٢٧ جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق (٨) وحدات واحداثيات أحد رأسيه $(٤،٢)$ واحداثيات البؤرة البعيدة $(-٤،٢)$.

تابع الحل

٢١ جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص = س ويمر بالنقطتين (٤،٣) ، (٠،٣) .

اتجاه الفتحة للأعلى

الرأس (د،د) لأنه يقع على المستقيم

ص = هـ ⇐ وبالتالي د = هـ

معادلته : $(س - د)^2 = 4جـ (ص - هـ)$

$(س - د)^2 = 4جـ (ص - د)$

(٠،٣) تحقق المعادلة ⇐ $د^2 = 4جـ (3 - د)$

(٤،٣) تحقق المعادلة ⇐ $(4 - د)^2 = 4جـ (3 - د)$

$\frac{(4-د)^2}{د^2} = \frac{4جـ(3-د)}{4جـ(3-د)}$

$\Leftarrow \frac{(4-د)^2}{د^2} = 1 \Leftarrow (4-د)^2 = د^2$

$\Leftarrow 16 - 8د + د^2 = د^2 \Leftarrow 16 - 8د = 0$

$\Leftarrow 16 = 8د \Leftarrow د = 2$

$د^2 = 4جـ (3 - د) \Leftarrow 4 = 4جـ(3-2)$

$\Leftarrow جـ = 1$

∴ معادلته : $(س - 2)^2 = 4(ص - 2)$

٢٢ جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر بالنقاط (٠،٠) ، (١،١) ، (٤،٢) .

٢٣ أطلقت قذيفة من مستوى سطح أرض أفقية إلى أعلى وعادت إلى نفس المستوى وكان مسارها على منحنى قطع مكافئ فإذا كان أعلى ارتفاع وصلته القذيفة (٥،٠ متراً) وأقصى مدى أفقي لها هو (٤٠ متراً) معتبراً نقطة انطلاق القذيفة النقطة (٠،٠) ، جد ما يلي :

① معادلة القطع المكافئ

② ارتفاع القذيفة عن سطح الأرض عندما يكون هذا الارتفاع مساوياً للمسافة بين نقطة انطلاق القذيفة ومسقطها على الأرض.

اتجاه الفتحة للأسفل

الرأس (٢٠، ٥،٠)

معادلته : $(س - د)^2 = -4جـ (ص - هـ)$

$(س - 20)^2 = -4جـ (ص - 50)$

(٤٠،٠) أو (٠،٠) تحقق المعادلة

(٠،٠) تحقق المعادلة ⇐ $400 = -4جـ \times -50$

$\Leftarrow 400 = 200جـ \Leftarrow جـ = 2$

∴ معادلته $(س - 20)^2 = -8(ص - 10)$

② المطلوب الارتفاع ص عندما س = ص

لذلك نعوض في المعادلة بدل س و ص

لذلك نعوض في المعادلة بدل س بـ ص

∴ ل ∈ $(-\infty، -٥) \cup (٢، \infty)$
لكن في هذه الحالة نختبر الحلول لأننا
نريد ل-٢ > ٠ و ل+٥ > ٠
∴ ل ∈ $(٢، \infty)$ فقط

١٧ جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ ويمر بالنقطة (-٤،٣) ومركزه يقع على المستقيم ص = ٣.

١٨ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) وبؤرتاه على محور السينات و يمس المستقيم ص = $\sqrt{٣}$ س - ٢ عند النقطة $(٢\sqrt{٣}، ٤)$.

١٩ اوجد احداثيات الرأس والبؤرة و معادلة كل من المحور و الدليل للقطع المكافئ التالي :-

$٨س - ٩ص^٢ + ١٨ص - ٣٣ = ٠$

$-٩ص^٢ + ١٨ص = -٨س + ٣٣$

$-٩(ص^٢ - ٢ص) = -٨س + ٣٣$

$-٩(ص^٢ - ٢ص + ١) = -٨س + ٣٣ - ٩$

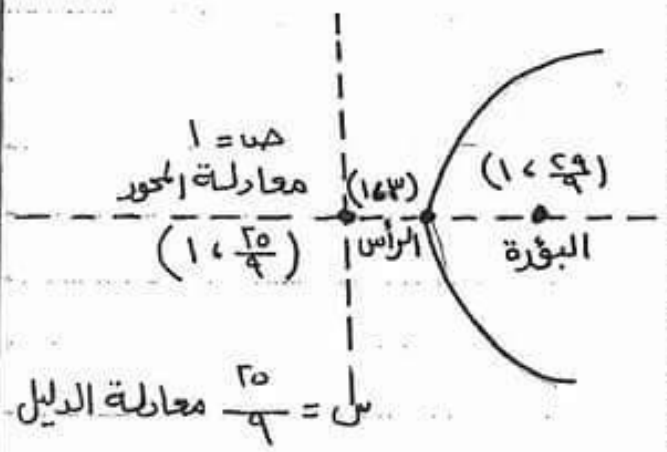
$\frac{-٩(ص-١)^٢}{-٩} = \frac{-٨س + ٢٤}{-٩}$

$(ص-١)^٢ = \frac{٨س - ٢٤}{٩}$

$(ص-١)^٢ = \frac{٨}{٩}(س-٣)$

اتجاه الفتحة لليمين
الرأس (٣،١)

$٤جـ = \frac{٨}{٩} \Leftarrow جـ = \frac{٢}{٩}$



٢٠ جد معادلة القطع المكافئ الذي فيه المحور يوازي المستقيم ص = ٥ ورأسه (٢،٢) ويمر بالنقطة (٣،٥).

اتجاه الفتحة لليمين الرأس (٢،٢)

معادلته : $(ص-هـ)^٢ = ٤جـ(س-د)$

$(ص-٢)^٢ = ٤جـ(س-٢)$

(٣،٥) تحقق المعادلة $\Leftarrow ١ = ٤جـ \times ٣$

$\Leftarrow ١ = ١٢جـ \Leftarrow جـ = \frac{١}{١٢}$

∴ معادلته $(ص-٢)^٢ = \frac{١}{٣}(س-٢)$

هـ $= \frac{جـ}{م} = \frac{\sqrt{٣٧}}{٦} \Leftarrow$ جـ $= ٢\sqrt{٣٧}$

$\Leftarrow$ جـ^{٢} $= ٤م^{٢}$

(-٤،٣) تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{٢٥}{م^{٢}} - \frac{٩}{ب^{٢}} = ١$

ولكن جـ^{٢} $= م^{٢} + ب^{٢} \Leftarrow ٤م^{٢} = م^{٢} + ب^{٢} \Leftarrow ٣م^{٢} = ب^{٢}$

$\therefore \frac{٢٥}{م^{٢}} - \frac{٩}{٣م^{٢}} = ١ \Leftarrow \frac{١٦}{م^{٢}} = ١ \Leftarrow م^{٢} = ١٦$

م^{٢} $= ب^{٢} \Leftarrow ١٦ = ب^{٢}$

$\therefore$ معادلته $\frac{(س-٢)^{٢}}{١٦} - \frac{(ص-١)^{٢}}{١٦} = ١$

$\frac{٢ب^{٢}}{٢م^{٢}} = \frac{١٢}{٢٧} \Leftarrow \frac{١}{٥} = \frac{جـ - م}{٣جـ} \Leftarrow$

$\Leftarrow ٥(جـ - م) = ٣جـ \Leftarrow ٥جـ - ٥م = ٣جـ$

$\Leftarrow ٣جـ = ٥م \Leftarrow \frac{٣جـ}{٣م} = \frac{٥م}{٣م} \Leftarrow$ هـ $= \frac{٥}{٣}$

١٦ إذا كانت $\frac{س^{٢}}{ل-٢} + \frac{ص^{٢}}{ل+٥} = ١$

نجد قيمة الثابت (ل) التي تجعل المعادلة تمثل قطعاً :-

① زائداً ② ناقصاً

① زائداً $\Leftarrow$ (ل-٢)(ل+٥) > ٠

ل-٢ : ---------- | +++ ، ٢

ل+٥ : --- | +++++++ ، -٥

(ل-٢)(ل+٥) : +++ | --- | +++ ، -٥ ، ٢

$\therefore$ ل $\in$ (-٥، ٢)

② ناقصاً $\Leftarrow$ (ل-٢)(ل+٥) < ٠

والاختبار الحلول ل-٢ < ٠ و ل+٥ > ٠

(ل-٢)(ل+٥) < ٠.

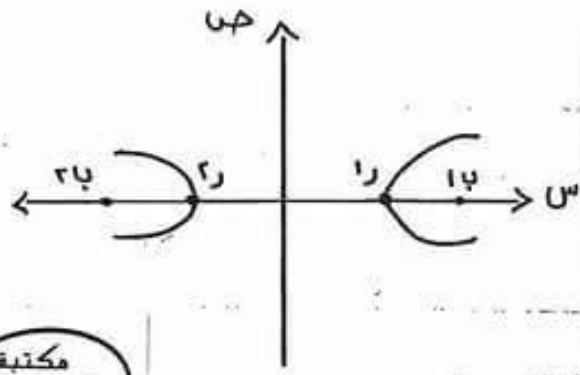
ل-٢ : ---------- | ++ ، ٢

ل+٥ : --- | +++++ ، -٥

(ل-٢)(ل+٥) : +++ | --- | +++ ، -٥ ، ٢

١٥ يمثل الشكل المجاور المنحنى البياني لقطع مخروطي إذا كانت $\frac{ب^{٢}}{٢م^{٢}} = \frac{١٢}{٢٧} = \frac{١}{٥}$

(حيث ب: بؤرة ، ر: رأس) نجد الاختلاف المركزي لهذا القطع .



مكتبة أنزال
طريقك للنجاح

١٢ اوجد عناصر القطع الزائد المتمثلة بالمركز ، الرأسين ، البؤرتين ، طول كل من المحور القاطع والمرافق ومعادلاتهم الاختلاف المركزي لكل مما يلي :-

$س + ٢ص = \frac{٤}{س - ٢ص}$

$(س + ٢ص)(س - ٢ص) = ٤$

$\frac{س^٢}{٤} - \frac{٤ص^٢}{٤} = \frac{٤}{٤}$

$\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{١} = ١$

سيني (لأن الحد الأكبر تحت السينات)

المركز (٠،٠)

$أ^٢ = ٤ \Leftarrow أ = ٢$

$ب^٢ = ١ \Leftarrow ب = ١$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٤ + ١ = ٥ \Leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

البؤرتان $(\sqrt{٥}، ٠)، (-\sqrt{٥}، ٠)$

الرأسان $(٢، ٠)، (-٢، ٠)$

طرفي المحور المرافق $(٠، ١)، (٠، -١)$

طول المحور القاطع $٢أ = ٢ \times ٢ = ٤$ معادلته ص = ٠

طول المحور المرافق $٢ب = ٢ \times ١ = ٢$ معادلته س = ٠

البعد البؤري $٢جـ = ٢\sqrt{٥}$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٥}}{٢} > ١$

١٣ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (١،٢) ويقع أحد رأسيه على محور السينات (١،-٨)

حادي

المركز $(١، هـ) = (١، ٢-٥) = (١، -٣)$

يقع أحد رأسيه على محور السينات

$\Leftarrow$ الاحداثي الصادي للرأس = ٠

الرأس (١،٠)

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ٢٥ = ٩ + ب^٢ \Leftarrow ١٦ = ب^٢$

معادلته $\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١$

$\frac{(ص + ٣)^٢}{٩} - \frac{(س - ١)^٢}{١٦} = ١$

١٤ جد معادلة القطع الزائد السيني الذي مركزه (٢،١) ويمر بالنقطة (٤،-٣) واختلافه المركزي = $\sqrt{٣}$.

سيني ، المركز (٢،١)

معادلته $\frac{(س - د)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

$\Leftarrow \frac{(س - ٢)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - ١)^٢}{ب^٢} = ١$

تابع

١٠ إذا كان البعد بين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر و الأصغر، فجد قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع.

$٢جـ = \frac{١}{٢}$ ف $\Leftarrow$ ٢جـ $= \frac{١}{٢}\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

$\Leftarrow$ ٤جـ $= \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow$ ١٦جـ$^٢ = أ^٢ + ب^٢$

ملاحظة : ف :- البعد بين محوريه الأكبر والأصغر سواء كان سيني أو صادي

ف$^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow$ ف $= \sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

ولكن جـ$^٢ = أ^٢ - ب^٢$ .... ①

١٦جـ$^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ... ②

بالجمع ——— جـ$^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$\frac{١٧جـ^٢}{أ^٢ ١٧} = \frac{٢أ^٢}{أ^٢ ١٧} \Leftarrow \frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{٢}{١٧}$

$\Leftarrow \frac{جـ}{أ} = \sqrt{\frac{٢}{١٧}} =$ هـ

١١ جد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر يوازي محور السينات وإحدى بؤرتيه النقطة (١،٣) وأقرب مسافة بين النقطة الواقعة عليه والبؤرة المعطاة ٢ وحدة واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$.

سيني

هـ $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٣جـ = ٢أ$

٣جـ $= ٢أ \Leftarrow ٣جـ = ٢(٢+جـ)$

$\Leftarrow ٣جـ = ٤ + ٢جـ \Leftarrow جـ = ٤$

أ $= ٢ + جـ = ٢ + ٤ = ٦ \Leftarrow أ = ٦$

جـ$^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ١٦ = ٣٦ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٢٠$

المركز = (د،١) = (٥-٦،١) = (-١،١)

معادلته : $\frac{(س-د)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

$\therefore \frac{(س+١)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٠} = ١$

ملاحظة، قد يكون المركز في الإتجاه الآخر للبؤرة

جـ $= ٤ \Leftarrow$ أ $= (١+٦،١) = (٧،١)$

حيث الرأس القريب من البؤرة (٣-٦،١) = (١،١)

$\therefore$ معادلته الأخرى :

$\frac{(س-٧)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٠} = ١$

* اوجد عناصر القطوع الناقصة المتمثلة بالمركز، الرأسين، البؤرتين، طول كل من المحور الأكبر، الأصغر، الاختلاف المركزي مساحته، لكل مما يلي :

1) $٢٥س^{٢}-١٠٠س+١٦ص^{٢}-٣٢ص-٢٨٤=٠$

$٢٥س^{٢}-١٠٠س+١٦ص^{٢}-٣٢ص=٢٨٤$

$٢٥(س^{٢}-٤س)+١٦(ص^{٢}-٢ص)=٢٨٤$

$٢٥(س^{٢}-٤س+٤)+١٦(ص^{٢}-٢ص+١)=٢٨٤+١٠٠+١٦$

$\frac{٢٥(س-٢)^{٢}}{٤٠٠}+\frac{١٦(ص-١)^{٢}}{٤٠٠}=\frac{٤٠٠}{٤٠٠}$

$\frac{(س-٢)^{٢}}{١٦}+\frac{(ص-١)^{٢}}{٢٥}=١$

صادي (لأن العدد الأكبر تحت الصادات)

المركز (٢، ١)

$ب^{٢}=١٦ \Leftarrow ب=٤$

$ب^{٢}=٢٥ \Leftarrow ٥=ب$

$جـ^{٢}=ب^{٢}-ب^{٢}=٢٥-١٦=٩ \Leftarrow جـ=٣$

البؤرتان (٢، ٤)، (٢، -٣)

الرأسان (٢، ٦)، (٢، -٤)

طرفي المحور الأصغر (٦، ١)، (-٢، ١)

طول المحور الأكبر $٢ب=٢\times٥=١٠$ ومعادلته س=٢

طول المحور الأصغر $٢ب=٢\times٤=٨$ ومعادلته ص=١

البعد البؤري $٢جـ=٢\times٣=٦$

الاختلاف المركزي $هـ=\frac{جـ}{ب}=\frac{٣}{٥}<١$

مساحة القطع الناقص $ط ب ب=ط\times٥\times٤=٢٠ط$

٢) جد معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأصغر $(\pm ٣، ٠)$ ويمر بالنقطة $(٢، ٣)$.

صادي

المركز $=(\frac{٣+(-٣)}{٢}، \frac{٠+٠}{٢})=(٠، ٠)$

طرف المحور الأصغر $-$ ب $=٣-(-٣)=٦ \Leftarrow$ طرف المحور الأصغر

$ب=٣$

معادلته: $\frac{ص^{٢}}{ب^{٢}}+\frac{س^{٢}}{ب^{٢}}=١$

$\Leftarrow \frac{ص^{٢}}{٩}+\frac{س^{٢}}{ب^{٢}}=١$

$(٢، ٣)$ تحقق المعادلة $\Leftarrow (\frac{٩}{ب^{٢}}+\frac{٤}{٩}=١)\times ٩ب^{٢}$

$\Leftarrow ٨١+٤ب^{٢}=٩ب^{٢} \Leftarrow ٥ب^{٢}=٨١ \Leftarrow ب^{٢}=٨١$

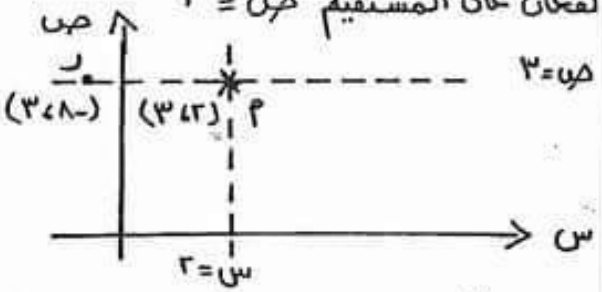
$\Leftarrow ب^{٢}=\frac{٨١}{٥}$

$\therefore \frac{ص^{٢}}{٨١}+\frac{س^{٢}}{٩}=١$

$\Leftarrow \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}}+\frac{س^{٢}}{٩}=١$

٧ جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلاً من المستقيمات س = ٣ ، س = ١٣ ، ص = -١ ، ص = ٧ .

٨ جد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي (٠,٦) ويمر بالنقطة (-٨,٣) ومركزه يقع على المستقيم س = ٢ وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص = ٣



لاحظ أنه (-٨,٣) رأس لأنها تحمل نفس المسقط الصادي للمركز حيث تقع على المحور الأكبر

$\leftarrow$ ١ - م = ٢ - (-٨) = ١٠

$\therefore$ م = ١٠

$\because$ هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{م}}$ = $\frac{٦}{١٠}$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{جـ}}{١٠}$ = $\frac{٦}{١٠}$ $\Leftarrow$ جـ = ٦

$\because$ جـ^{٢} = م^{٢} - ب^{٢} $\Leftarrow$ ٣٦ = ١٠٠ - ب^{٢} $\Leftarrow$ ب^{٢} = ٦٤

معادلته : $\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{م}^{٢}} + \frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$\therefore$ $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{١٠٠} + \frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{٦٤} = ١$

٩ قطع ناقص بؤرتاه ف (٤,٠) ، فَ (-٤,٠) والنقطة ن (س ، ص) واقعة عليه بحيث أن محيط المثلث ن ف فَ يساوي ٢٤ وحدة جد معادلة القطع الناقص .

سيني

المركز = $\left(\frac{٤+(-٤)}{٢}\ ،\ \frac{٠+٠}{٢}\right)$ = (٠,٠)

محيط المثلث ن ف فَ = ٢٤

$\Leftarrow$ ن ف + ن فَ + ف فَ = ٢٤

$\frac{\text{م}٢}{٢} + \frac{٢\text{جـ}}{٢} = \frac{٢٤}{٢}$

م + جـ = ١٢ $\Leftarrow$ م + ٤ = ١٢ $\Leftarrow$ م = ٨

جـ^{٢} = م^{٢} - ب^{٢} $\Leftarrow$ ١٦ = ٦٤ - ب^{٢} $\Leftarrow$ ب^{٢} = ٤٨

معادلته : $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$\therefore$ $\frac{\text{س}^{٢}}{٦٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤٨} = ١$

مكتبة نزال طريقك للنجاح

٣ جد معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه (٠،٠) ويمر بالنقطتين (٢،٦) ، (٤،٣) .

سيني ، المركز (٠،٠)

معادلته : $\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

(٢،٦) تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{٣٦}{م^2} + \frac{٤}{ب^2} = ١$

(٤،٣) تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{١٦}{م^2} + \frac{٩}{ب^2} = ١$

$٩ \times \left(\frac{٣٦}{م^2} + \frac{٤}{ب^2} = ١ \right)$

$-٤ \times \left(\frac{١٦}{م^2} + \frac{٩}{ب^2} = ١ \right)$

$\frac{٣٢٤}{م^2} + \frac{٣٦}{ب^2} = ٩$

$\frac{-٦٤}{م^2} - \frac{٣٦}{ب^2} = -٤$

بالجمع

$\frac{٦٠}{م^2} = ٥ \Leftarrow م^2 = ٥٢$

$\frac{١٦}{م^2} + \frac{٩}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{١٦}{٥٢} + \frac{٩}{ب^2} = ١$

$\Leftarrow \frac{٤}{١٣} + \frac{٩}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{٩}{ب^2} = ١ - \frac{٤}{١٣}$

$\Leftarrow \frac{٩}{ب^2} = \frac{٩}{١٣} \Leftarrow ب^2 = ١٣$

∴ معادلته $\frac{س^2}{٥٢} + \frac{ص^2}{١٣} = ١$

٤ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠،٠) ومحوره الأكبر على محور الصادات و اختلافه المركزي يساوي $(\frac{٣}{٥})$ وطول محوره الأكبر يزيد عن المسافة بين بؤرتيه بمقدار ٨ .

٥ جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأصغر (٦) واحداثيات أحد رأسيه (٢،٤) واحداثيات البؤرة البعيدة عن هذا الرأس (-٢،٥) .

٦ إذا كانت المعادلة $ك س^2 + ٥ ص^2 = ١٧$ تمثل معادلة القطع الناقص السيني فأثبت أنه : $ك = \frac{١٧}{ب^2 + جـ^2}$

$\frac{ك س^2}{١٧} + \frac{٥ ص^2}{١٧} = \frac{١٧}{١٧} \Leftarrow \frac{س^2}{\frac{١٧}{ك}} + \frac{ص^2}{\frac{١٧}{٥}} = ١$

سيني $\Leftarrow م^2 = \frac{١٧}{ك} \Leftarrow \frac{م^2 ك}{م^2} = \frac{١٧}{م^2} \Leftarrow ك = \frac{١٧}{م^2}$

لكن $جـ^2 = م^2 - ب^2 \Leftarrow م^2 = جـ^2 + ب^2$

$ك = \frac{١٧}{م^2} \Leftarrow ك = \frac{١٧}{جـ^2 + ب^2}$

مكتبة أجيال
طريقك للنجاح