



الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

إبراهيم عقله القادري

نور محمد حسان

يوسف سليمان جرادات

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسرك المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العنوانين الآتية:



06-5376262 / 237



06-5376266



P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor



feedback@nccd.gov.jo



www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (7/2020)، تاريخ 12/12/2020 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (175/2020)، تاريخ 17/12/2020 م، بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 382 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية:
(2022/4/2079)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: الصف العاشر: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الثاني) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛ مزيدة
ومنقحة. - عمان: المركز، 2022

(150) ص.

ر.إ.: 2022/4/2079

الوصفات: تطوير المناهج / المقررات الدراسية / مستويات التعليم / المناهج /
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنفه، ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

م 2020 هـ / 1441

م 2021 - م 2024

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيناً للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي ، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تبني لدى الطلبة مهارات التفكير وحل المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عناية كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المتبعة عالمياً على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمعلمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلم، ووظفت فيها التكنولوجيا لتسهيّم في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المقدّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدريب المكثّف على حل المسائل يُعدُّ إحدى أهم طرائق ترسیخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلُّ بوصفها واجباً متزلياً، أو داخل الغرفة الصفيّة إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا ندرك جيداً حرص المعلم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً توفرُ عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مهمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً مناً على ألا يفوّت أبناءنا الطلبة أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهُوَّة بين طلبنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدِّم هذه الطبعة من الكتاب، نأمل أنْ تناول إعجاب أبنائنا الطلبة ومُعلّميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

قائمة المحتويات

الوحدة 5 الاقترانات	6
مشروع الوحدة: نمذجة علاقاتِ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ	7
الدرس 1 اقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ	8
الدرس 2 قسمةِ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةُ	18
الدرس 3 تركيبِ الاقتراناتِ	25
الدرس 4 الاقترانُ العكسيُّ	32
الدرس 5 المتالياتُ	42
اختبار نهاية الوحدة	50
الوحدة 6 المشتقات	52
مشروع الوحدة: عمل صندوقٍ حجمهُ أكبرُ ما يُمكنُ	53
معمل برمجية جيوجبرا: استكشافُ ميلِ مماسِ المنحنى	54
الدرس 1 تقديرُ ميلِ المنحنى	56
الدرس 2 الاشتتقاقُ	63
الدرس 3 القيمةُ العظمى والقيمةُ الصغرى	70
اختبار نهاية الوحدة	76

قائمة المحتويات

78	الوحدة 7 المتوجهات
79	مشروع الوحدة: المتوجهات في الجغرافيا
80	الدرس 1 المتوجهات في المستوى الإحداثي
88	الدرس 2 جمع المتوجهات وطرحها
96	الدرس 3 الضرب القياسي
102	اختبار نهاية الوحدة
104	الوحدة 8 الإحصاء والاحتمالات
105	مشروع الوحدة: مستوى الأقارب التعليمي
106	الدرس 1 أشكال الانتشار
115	معلم برمجية جيوجبرا: رسم المستقيم الأفضل مطابقة
117	الدرس 2 المنحني التكراري التراكمي
124	الدرس 3 مقاييس التشتيت للجدوار التكرارية ذات الفئات
131	الدرس 4 احتمالات الحوادث المتنافية
139	الدرس 5 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
148	اختبار نهاية الوحدة

الوحدة 5

الاقتراناتُ Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُسْعَمِلُ الاقتراناتُ لنَمْذِجَةِ التَّطْبِيقَاتِ الْحَيَاتِيَّةِ بِصُورَةٍ رِياضِيَّةٍ تُسْهِلُ فَهْمَهَا. فَمِثْلًا، تُسْعَمِلُ بَعْضُ أَنْوَاعِ الاقتراناتِ لِوَصْفِ الْعَلَاقَةِ بَيْنَ اسْعَارِ السُّلْعِ وَالْكَمِيَّاتِ الْمَبَيعَةِ مِنْهَا. سَأَتَعَرَّفُ فِي هَذِهِ الْوَحْدَةِ أَنْوَاعًا عَدِيدًاً مِنَ الاقتراناتِ وَالْمُتَتَالِيَّاتِ ذَاتِ الْاسْتِعْمَالِ الْحَيَاتِيَّةِ الْكَثِيرَةِ.

سَأَتَعَلَّمُ فِي هَذِهِ الْوَحْدَةِ:

- ◀ الاقتراناتِ كثیراتِ الْحَدُودِ، وَخَصَائِصَهَا، وَتَمْثِيلُهَا بِيَانِيَّاً.
- ◀ جَمْعُ كثیراتِ الْحَدُودِ، وَطَرَحَهَا، وَضَرَبَهَا، وَقَسَّمَهَا.
- ◀ الاقتراناتِ النَّسْبِيَّةِ، وَمَجَالُهَا، وَمَدَاهَا.
- ◀ تَرْكِيبُ الاقتراناتِ، وَالاقترانُ العَكْسِيُّ، وَالاقترانُ الْجُذْرِيُّ.
- ◀ اسْتِنْتَاجُ قَاعِدَةِ الْحَدِّ الْعَامَّ لِمُتَتَالِيَّاتِ تَرْبِيعِيَّةٍ، وَتَكْعِيَّةٍ.

تَعَلَّمْتُ سَابِقًا:

- ✓ الاقتراناتِ الْخَطِّيَّةِ، وَالْتَّرْبِيعِيَّةِ، وَتَمْثِيلُهَا بِيَانِيَّاً.
- ✓ إِيجادُ القيمةِ الْعَظِيمَى أَوِ القيمةِ الصَّغِيرَى لِلْاقترانِ التَّرْبِيعِيِّ.
- ✓ تَكْوينُ مَعَادِلَاتِ تَرْبِيعِيَّةٍ، وَحْلَهَا.
- ✓ جَمْعُ مَقَادِيرَ جَبَرِيَّةٍ، وَطَرَحَهَا، وَضَرَبَهَا.
- ✓ الْمُتَتَالِيَّاتِ الْخَطِّيَّةِ، وَكَتَابَةُ حَدُودِهَا.

مشروع الوحدة

نموذج علاقات باستعمال كثارات الحدود

جمع بيانات عن العلاقة بين متغيرين في أحد المجالات الحياتية، ونمذجتها باستعمال اقترانٍ كثير الحدود.

جهاز حاسوب، شبكة إنترنت، برمجية إكسل (Microsoft Excel).

فكرة المشروع



المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أختار أنا وأفراد مجموعتي متغيرين لجمع بيانات حولهما، مثل: تكلفة إنتاج سلعة معينة، وعدد الوحدات المُتَبَّجة، أو عدد ساعات النهار في إحدى المدن في أيام مختلفة من العام، أو أي متغيرين آخرين.

2 أجمع البيانات، ثم أدوّنها في جدولٍ من عمودين، بحيث يحوي العمود الأول قيم المتغير x ، ويحوي العمود الثاني القيم المُناظرة للمتغير y (يجب جمع ما لا يقل عن 15 زوجاً).

3 أستعمل برمجية إكسل لتمثيل الأزواج المرتبة بيانياً، وإيجاد اقترانٍ كثير الحدود الأفضل تمثيلاً لها باتباع الخطوات الآتية:

• أدخل البيانات في عمودين متلاقيين ضمن صفحة إكسل، وأظلل العمودين، ثم أختار (مخططات) من تبويبة (إدراج)، وأنقر (مُبعثر)، ثم أختار المخطط الذي يبيّن مجموعة نقاط منفصلة، فيظهر مخطط بياني.

• أنقر بزر الفأرة الأيمن إحدى النقاط، ثم أختار أيقونة (إضافة خط اتجاه) من القائمة المنسدلة، فيظهر مستقيم يتواصط النقاط، وتظهر خيارات التنسيق جانبًا، فأنقر المربع أمام أيقونة (عرض المعادلة في المخطط)، لظهور معادلة المستقيم التي هي قاعدة الاقتران كثير الحدود المطلوب.

• إذا لاحظت أن المستقيم أو المنحنى الظاهر لا يناسب النقاط، فإنني أستطيع تغيير نوعه؛ إذ يمكنني مثلا اختيار متعدد الحدود (أي كثير الحدود)، واختيار الترتيب (أي درجة كثير الحدود) المناسب.

• عندما أحصل على المستقيم أو المنحنى الأنسب للنقاط أكتب قاعدة الاقتران.

4 أجد مجال الاقتران، ومداه، وأصفاره، ونقاط القييم القصوى المحلي له.

5 أجد الاقتران العكسي (إن وجد)، وأجد مجاله، ومداه، وأحدد فائدته، ودلاليته في سياق موضوع البحث.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديميًّا (بوربوينت) تبيّن فيه خطوات العمل في المشروع والنتائج التي توصلنا إليها موضحة بالصور والرسوم، ثم نعرضه أمام الزملاء في مختبر الحاسوب.

الدرس

1

اقتراناتٌ كثيراتٌ الحدود

Polynomial Functions

تعُرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمع والطرح والضرب عليها، وحلُّ مسائلَ عنها.

وحيدُ الحدّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيُّسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيَّةُ لكثيرُ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفرِيُّ، المجالُ، المدى.



يُتَجَّعُ مصنعٌ ثُرِيَّاتٍ عدُدهَا x ثُرِيًّا أسبوعيًّا، حيثُ $x \leq 350$ ، ويبيعُ الواحدةَ منها بسعر $(0.3x - 150)$ دينارًا. إذا كانتْ تكلفةُ إنتاجِ x منَ الثُرِيَّاتِ هي $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فاجدُ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُرِيًّا أسبوعيًّا وبيعها.

فكرةُ الدرس



المصطلحات



مسألةُ اليوم



الاقترانُ **وحيدُ الحدّ** (monomial) بمتغِيرٍ واحدٍ هو اقترانٌ قاعدتهُ ناتجٌ ضربٌ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمَّى المعاملُ، في متغِيرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرٌ سالبٌ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدّ، وأُسَّهِ، ومعاملِهِ:

وحيـدُ الحـدّ	الـأـسـُّ	المعـاملـُ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9		

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمتغِيرٍ واحدٍ هو اقترانٌ يتكونُ منْ وحيدٍ حدٍ واحدٍ، أوْ مجموعٍ عِدَّةٍ اقتراناتٍ وحيدةٍ الحدّ بمتغِيرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلَتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$$f(x)=2 \quad f(x)=3x-4 \quad f(x)=x^2+4x-5 \quad g(x)=-3x^2+1.5x^4-3$$

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ

مفهومٌ أساسِيٌّ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n : عددٌ صحيحٌ غيرٌ سالبٌ.

أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمَّى معاملاتٍ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

الوحدة 5

إذا كان $a_n \neq 0$ ، فإنَّه يسمى المعامل الرئيسي (leading coefficient) ، ودرجة (degree)

كثير الحدود (n) هي أكبر أُس للمتغير في جميع حدوده، ويُسمى a_0 الحد الثابت.

يكون كثير الحدود مكتوبًا بالصورة القياسية (standard form) إذا كانت حدوٰده مكتوبةً

ترتيب تنازليٌ من أكبرها درجة إلى أصغر درجة.

كثير الحدود الذي جميع معاملاته أصفارٌ يُسمى كثير الحدود الصفرى (zero polynomial)،

وهو $f(x) = 0$ وليس له درجة، ويمثله المحوِر x في المستوى الإحداثي.

مثال 1

أُحدِّد إذا كان كُل ممَا يأتي كثيرٌ حدوٰد أم لا. وفي حالٍ كان كثيرٌ حدوٰد أُكتبه بالصورة القياسية، ثم أُحدِّد المعامل الرئيسي، والدرجة، والحد الثابت:

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرٌ حدوٰد، درجهٌ 3، وصوريٌة القياسية هي:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معامله الرئيسي 2، وحدهٌ الثابت -4

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليس كثيرٌ حدوٰد؛ لأنَّ أُسَّ المتغير في الحد الثاني هو -1

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليس كثيرٌ حدوٰد؛ لأنَّ أُسَّ المتغير في الحد الأول هو $\frac{1}{2}$

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرٌ حدوٰد، درجهٌ 2، وصوريٌة القياسية هي:

معامله الرئيسي $\frac{3}{4}$ ، وحدهٌ الثابت - $\frac{5}{4}$

أتذكر

لأي عدد حقيقي a ، فإنَّ:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وإذا كان a مرفوعًا

للقوة السالبة في المقام،

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

أتحقق من فهمي

أُحدِّد إذا كان كُل ممَا يأتي كثيرٌ حدوٰد أم لا. وفي حالٍ كان كثيرٌ حدوٰد أُكتبه بالصورة القياسية، ثم أُحدِّد المعامل الرئيسي، والدرجة، والحد الثابت:

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}x^5$

b) $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 + 2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

أتعلّم

مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقة، أو مجموعة جزئية منها تحدّد في نصّ السؤال، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقة، أو مجموعة جزئية منها تحدّد من جدول قيم الاقتران، أو من دراسة التمثيل البياني للاقتران.

مجال (domain) أي اقتران هو مجموعة القيم التي يأخذُها المتغير x ، ومداه (range) هو مجموعة القيم التي يأخذُها المتغير y .

لتمثيل الاقتران كثير الحدود $f(x)$ بيانياً، أكونُ جدولَ قيمٍ أحدهُ فيه قيمة المتغير x ، وأحسبُ قيمة $f(x)$ ، وأعيّن النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصلُ بينها بمنحنى متصلٍ.

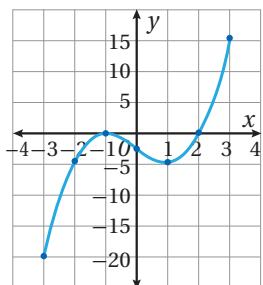
مثال 2

أمثل بيانياً كلّ اقترانٍ مما يأتي، محدّداً مجاله ومداه:

$$1 \quad f(x) = x^3 - 3x - 2, \quad -3 \leq x \leq 3$$

الخطوة 1: أنشئ جدولَ قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	(-3, -20)	(-2, -4)	(-1, 0)	(0, -2)	(1, -4)	(2, 0)	(3, 16)



الخطوة 2: أعيّن النقاط التي تمثل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصلُ بينها بمنحنى متصلٍ كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقة، حيث: $-3 \leq x \leq 3$ ، أو الفترة $[-3, 3]$ ، ومداه: $-20 \leq y \leq 16$ ، أو الفترة $[-20, 16]$.

يُظهرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقتران هي: $-1, 2$.

$$2 \quad f(x) = x^2 - 4x, \quad -1 \leq x \leq 4$$

هذا اقترانٌ تربيعٌ على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a = 1, b = -4, c = 0$ ، ومنحنى $f(x)$ قطعٌ مكافئٌ يمكن تمثيله بيانياً كما يأتي:

• بما أنَّ $a > 0$ ، فمنحنى القطع المكافئ مفتوح للأعلى، ويُمثل الرأس نقطته الصغرى.

أتعلّم

أجِدُّ أصفارَ الاقتران من التمثيل البياني يايجاد مقاطعه من محور x .

الوحدة 5

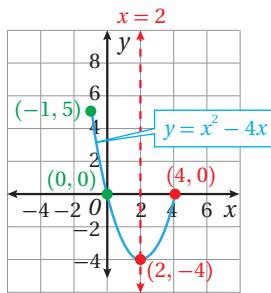
معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

إحداثياً الرأس هما: (2, -4)

نقطة تقاطع منحني الاقتران مع المحور z , هي: (0, 0)

النقطة (-1, 5) هي نقطة بداية منحني الاقتران، وتقع في الجانب نفسه الذي يقع فيه المقطع لا من محور التماثل (يسار محور التماثل)، أما النقطة (4, 0) فهي نقطة نهاية منحني الاقتران وتقع يمين محور التماثل.



أمثل الرأس والنقاط الثلاث في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية حيث: $-4 \leq x \leq 4$ أي الفترة [-4, 5].

يظهر في الشكل أن أصفار هذا الاقتران هي: 0, 4

أمثل بيانياً كل اقترانٍ مما يأتي، محدداً مجاله ومداه:

أتحقق من فهمي

a) $f(x) = 2x^3 - 16$, $-3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$, $-3 \leq x \leq 9$

إرشاد: أستعمل أوراق المربعات الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتذكر

معادلة محور التماثل

لمنحني الاقتران التربيعي

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

حيث $a \neq 0$ هي:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

وإحداثياً رأسه هما:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

أفكّر

ما الفرق بين الفترة

[−4, 5] والفترة

?(−4, 5)

جمع كثيرات الحدود

لجمع كثيرات الحدود، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها، وأجمع معاملاتها.

مثال 3

إذا كان $f(x) + g(x)$, فأجد $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$, $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$

$$f(x) + g(x) = (2x^2 - 5x^3 + 4x - 9) + (7x^3 + 6x + 4)$$

بتعويض $f(x)$ و $g(x)$

$$= 2x^2 + (-5x^3 + 7x^3) + (4x + 6x) + (-9 + 4)$$

بتجميع الحدود المتشابهة

$$= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5$$

بجمع المعاملات

$$= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$$

بكتابية الناتج بالصورة القياسية

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) + g(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$, $g(x) = -4x^3 + 6x^2$, فأجد $f(x)$.

أتعلم

النظير الجمعي للاقتران $f(x)$ هو $-f(x)$, وينتج من عكس إشارات معاملات حدود $f(x)$.

طرح كثيرات الحدود

لإيجاد ناتج طرح اقترانين، أحول عملية الطرح إلى جمع النظير الجمعي للمطروح، ثم أجمع كما في المثال السابق.

يمكّنني أن أجّد ناتج جمع اقترانين باستعمال الطريقة العمودية، وذلك بترتيب الحدود المتتشابهة بعضها تحت بعض، ثم جمّع المعاملات.

مثال 4

إذا كان $f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3$, $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$, فأجد $f(x)$.

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (6x - 7x^2 - 8)$$

بتعويض $f(x)$ و $g(x)$

$$= 2x^2 - 5x - 3 + (-6x + 7x^2 + 8)$$

بتغيير الطرح إلى جمع، وتغيير إشارات المطروح

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x - 3 \\ + 7x^2 - 6x + 8 \\ \hline 9x^2 - 11x + 5 \end{array}$$

بترتيب الحدود المتتشابهة بعضها تحت بعض
بجمع المعاملات

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) - g(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$, $g(x) = x^3 + 6x^2$, فأجد $f(x)$.

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود، أستعمل خاصية توزيع الضرب على الجمع. يمكّنني أيضًا استعمال الطريقة العمودية.

الوحدة 5

مثال 5

أَجِدْ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كُلِّ ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3x^3, g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= 3x^3(2x^2 - 5x - 4) && \text{بتعويض } (x, f(x), \text{ و } g(x)) \\ &= 3x^3(2x^2) + 3x^3(-5x) + 3x^3(-4) && \text{بتوزيع الضرب على الجمع} \\ &= (3 \times 2)(x^3 \cdot x^2) + (3 \times -5)(x^3 \cdot x) + (3 \times -4)x^3 && \text{خاصية التجميع} \\ &= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتذكر

أُطْبِقْ قاعدةَ ضربِ
القوى عَنْدَ ضربِ
الحدودِ الجبريةِ:
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^2 + x - 5 \\ \times 4x^2 - 7 \\ \hline 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 \\ (+) \quad -21x^4 \qquad + 35x^2 - 7x + 35 \\ \hline 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35 \end{array}$$

بترتيب الاقترانين عمودياً
بضرب $4x^2$ في حدود f
بضرب -7 في حدود g
بجمع الحدود المتشابهة

أتحقق من فهمي

أَجِدْ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كُلِّ ممّا يأتي:

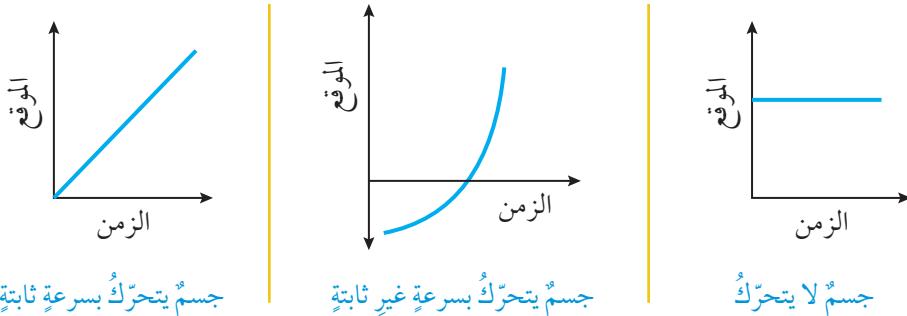
a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تطبيقٌ فيزيائيٌّ: اقترانُ الموضع

إذا تحرّكَ جسمٌ في مسارٍ مستقيمٍ وعبرنا عن موقعِه المتغيّر على ذلك المسار بالإحداثيّ (s) للنقطةِ التي يكونُ عندها الجسمُ، فإنّنا نحصلُ على اقترانٍ يربطُ موقعَ الجسم (t) بالزمن (s) يُسمى اقتران الموضع (position function).

إذا كانت سرعة الجسم ثابتة فإن اقتران الموضع يكون خطياً (منحنى مستقيم)، أما إذا كانت سرعته ليست ثابتة فإن اقتران الموضع لا يكون خطياً، فقد يكون كثير حدوداً مثلاً أو اقتراناً دائرياً. يعني وجود قيمة سالبة لاقتران الموضع عند لحظة ما أنَّ الجسم يقع في الجهة السالبة من نقطة الأصل عند تلك اللحظة.



أتعلّم

إذا كانَ منحنى اقترانِ الموضع-الزمنِ ليسَ مستقيماً فإنَّ ذلكَ لا ينفي أنَّ الجسمَ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، ذلكَ لأنَّ المنحنى لا يمثلُ المسارَ الذي يتحرّكُ عليهِ الجسمُ، بلْ إزاحتَهُ عنْ نقطةِ الأصلِ التي تتغيّرُ بمرورِ الزمنِ.

مثال 6

يمثلُ الاقتران $s(t) = 3t^2 - 24t + 36$ موقعَ جسمٍ يتحرّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسم بالآمتارِ بعدَ t ثانيةً.

أحدُّ موقعَ الجسمِ لحظةً بدءِ الحركةِ.

بدأَ الجسمُ الحركةَ عندَ $t = 0$ ، ولتحديدِ موقعِهِ عندَ تلكَ اللحظةِ أعوّضُ 0 في اقترانِ الموضعِ كما يأتي:

$$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

$$s(0) = 3(0)^2 - 24(0) + 36$$

$$= 36$$

اقترانُ الموضع

بتعويضِ $t = 0$

بالتبسيط

إذنُ، موقعُ الجسمِ لحظةً بدءِ الحركةِ يساوي 36 m في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

1

أحدُّ موقعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ.

2

لتحديدِ موقعِ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ أعوّضُ 5 في اقترانِ الموضعِ كما يأتي:

$$s(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

اقترانُ الموضع

$$s(5) = 3(5)^2 - 24(5) + 36$$

بتعويضِ $t = 5$

$$= -9$$

بالتبسيط

إذنُ، موقعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بدءِ الحركةِ يساوي 9 m في الجهةِ السالبةِ منْ نقطةِ الأصلِ.

الوحدة 5

متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

3

يكون الجسم عند نقطة الأصل عندما تكون قيمة اقتران الموضع صفرًا. أحـل المعادلة $s(t) = 0$ لأحد قيم t

$$3t^2 - 24t + 36 = 0$$

أكتب المعادلة

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

بقسمة طرف المعادلة على 3

$$(t-2)(t-6) = 0$$

بتحليل إلى العوامل

$$t-2 = 0 \quad \text{or} \quad t-6 = 0$$

خاصية الضرب الصفر

$$t = 2 \quad \text{or} \quad t = 6$$

بحل كل معادلة

إذن، يكون الجسم عند نقطة الأصل في لحظتين زمنيتين هما: بعد ثانية و بعد 6 ثوانٍ من بدء حركته.

هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

4

حتى يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها وهي 36 m في الجهة الموجبة من نقطة الأصل (كما أوجدنا في الفرع الأول) يجب أن يكون للمعادلة $36 = s(t)$ حل واحد (أو أكثر).

$$3t^2 - 24t + 36 = 36$$

أكتب المعادلة

$$3t^2 - 24t = 0$$

طرح 36 من كلا الطرفين

$$t^2 - 8t = 0$$

بقسمة الطرفين على 3

$$t(t-8) = 0$$

بخرج t عاملًا مشتركاً

$$t = 0 \quad \text{or} \quad t - 8 = 0$$

خاصية الضرب الصفر

$$t = 0 \quad \text{or} \quad t = 8$$

بحل كل معادلة

الزمن $t = 0$ يعني لحظة بدء حركة الجسم، لذلك فإن الجسم يعود إلى النقطة التي بدأ منها الحركة مرة واحدة فقط، وذلك بعد 8 ثوانٍ من بدء حركته.

أتحقق من فهمي

يمثل اقتران $s(t) = t^3 - 7t^2 + 10t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية.

(a) أحـدد موقع الجسم لحظة بدء الحركة.

(b) أحـدد موقع الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

(c) متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

(d) هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟



أحدد إذا كان كل ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثم أحدد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

1) $f(x) = 4 - x$

2) $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3) $h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$

4) $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5) $j(t) = \sqrt{7}t - 16t^2$

6) $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7) $f(x) = 13(2)^x + 6$

8) $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أمثل كل اقتران ممّا يأتي بيانياً، محدداً مجاله ومداه:

9) $f(x) = x^2 - 3x - 4, -1 \leq x \leq 5$

10) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3, 0 \leq x \leq 3$

11) $y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \leq x \leq 3$

12) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \leq x \leq 4$

إرشاد: استعمل أوراق المربعات الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

إذا كان $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ موقعاً جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقعة الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

13) $h(x) + g(x)$

14) $g(x) - h(x)$

15) $f(x) \cdot h(x)$

16) $x(f(x)) + h(x)$

17) $(f(x))^2 - g(x)$

18) $h(x) - x(g(x))$

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$ موقعاً جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقعة الجسم بالأمتار بعد t ثانية.

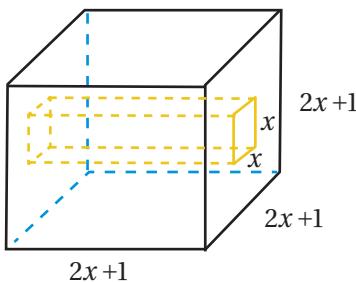
أحدد موقعاً جسم لحظة بدء الحركة.

أحدد موقعاً جسم بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة.

متى يكون الجسم عند نقطة الأصل؟

هل يعود الجسم إلى النقطة التي بدأ الحركة منها؟

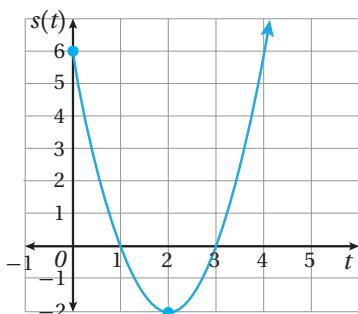
الوحدة 5



23 هندسة: مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِه $(2x + 1)$ cm، حُفرَ فيه تجويفٌ مقطعيٌّ مُرَبَّعٌ، طولُ ضلعِه x cm، وهو يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيَّةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقيِّ منَ المكعبِ.

24 أَحْلُّ المسأَلةَ الواردةَ في بدايَةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا



تبرير: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ منحنى اقترانِ الموضعِ لجسمٍ يتحرَّكُ في مساري مستقيمٍ، حيثُ s الموضعُ بالأمتارِ و t الزمنُ بالثواني. أستعملُ الشكلَ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ مُبِّراً إجابتيِّ:

25 ما الفترَةُ (الفتراتُ الزمنيَّةُ التي يكونُ فيها الجسمُ في الجهةِ الموجبةِ منْ نقطةِ الأصلِ؟

26 أَحدِّدُ الموضعَ الابتدائيَّ للجسمِ.

27 ما أبعُدُ موضعِ للجسمِ عنِ نقطةِ الأصلِ وهو في الجهةِ السالبةِ منها؟

28 مسأَلةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ كثيريُّ حدودٍ، أحدهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثالثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

29 تحدِّ: أَحدِّدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

30 تبرير: إذا كانَ g , f كثيريُّ حدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةَ كُلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحدودِ h الناتجِ منْ جمعِهما، وطرحِهما، وضربِهما، مُبِّراً إجابتيِّ.

الدرس

2

قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية

Dividing Polynomials and Rational Functions

إيجاد ناتج قسمة اقترانٍ كثير الحدود على آخر، وتعريفُ الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها، ومداها، وتمثيلها بيانياً.



الاقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسى.

بركة سباحة على شكل متوازي مستطيلات، حجمها $3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x$ وحدة مكعب، ومساحة قاعدتها $3x^2 - 6x$ ؛ أجدُ ارتفاعها.

إنَّ قسمةَ كثيرٍ حدودٍ على آخرٍ تُشَبِّهُ كثيراً عمليةً قسمةً عددٍ كليٍّ على آخرٍ؛ إذْ تَشَعُّ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتينِ. يُمْكِنُ قسمةً كثيرٍ الحدود $f(x)$ على كثيرٍ الحدود $h(x) \neq 0$ إذا كانت درجة $f(x)$ أكبرَ منْ أو تساوي درجة $h(x)$. لقسمةَ كثيرٍ حدودٍ على آخرٍ، أكتبُ المقسمَ والمقسومَ عليه بالصورة القياسية. وإذا كانت إحدى قوى المُتغيَّر في المقسوم مفقودةً، فإنَّ أُضيِفُها في موقعها، وأكتبُ معاملها 0، ثمَّ أُنْفَذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثال الآتى.

مثال 1

$$\begin{array}{r} \text{أَجِدُ ناتجَ قسمةَ } 15 - 2x^3 + 24x - 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 \\ \text{على } f(x) = x + 5 \text{ ، وباقيتها .} \\ \hline \end{array}$$

بقسمة $2x^3$ على x ، وكتابة النتيجة $2x^2$ فوق الحد المشابه

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 10x + 74 \\ x + 5 \overline{)2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} \\ (-) 2x^3 + 10x^2 \\ \hline -10x^2 + 24x \\ (-) -10x^2 - 50x \\ \hline 74x - 15 \\ (-) 74x + 370 \\ \hline -385 \end{array}$$

بضربِ المقسم عليه $(x + 5)$ في $2x^2$
بالطرح، وإضافة الحد $(24x)$

بقسمة $-10x^2$ على x ، وكتابة النتيجة $-10x$ فوق الحد المشابه، ثم
ضربِ المقسم عليه $(x + 5)$ في $-10x$

بالطرح، وإضافة الحد (-15)

بقسمة $74x$ على x ، وكتابة النتيجة 74 فوق الحد الثابت، وضربِ
المقسم عليه $(x + 5)$ في 74

بالطرح

إرشاد

توقفُ عملية قسمة كثيراتِ الحدود عندما تصبُّ درجةُ باقيِ القسمة أقلَّ منْ درجةِ المقسم عليه.



المصطلحات



مسألةُ اليوم



الوحدة 5

إذن، ناتج القسمة هو: $2x^2 - 10x + 74 - \frac{385}{x+5}$ ، والباقي -385 ، ويمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x+5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5}, \quad x \neq -5$$

أتحقق من صحة الحل:

$$\begin{aligned} (x+5)(2x^2 - 10x + 74) + (-385) &= 2x^3 - 10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385 \\ &= 2x^3 + (-10 + 10)x^2 + (74 - 50)x - 15 \\ &= 2x^3 + 24x - 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج قسمة $x-4$ على $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ وباقيتها.

أتذكر

يمكن التحقق من صحة القسمة بضرب الناتج في المقسم علىه، وإضافة الباقي. فإذا كانت النتيجة مساوية للمقسم كان الحل صحيحًا.

الاحظ في المثال السابق أنَّ درجة ناتج القسمة $(2x^2 - 10x + 74)$ مساوية للفرق بين درجتي المقسم $(2x^3 - 15 + 2x^3)$ والمقسم عليه $(x+5)$ ، وهذا يقود إلى النتيجة الآتية.

نتيجة

عند قسمة كثيرٍ حدودٍ على كثيرٍ حدودٍ آخر تكونُ درجة ناتج القسمة مساوية للفرق بين درجتي المقسم والمقسم عليه.

الاقترانات النسبية (rational functions) هي اقتراناتٌ يمكن كتابتها بصورة نسبة بين كثيري

حدودٍ، مثل $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرط أن: $g(x) \neq 0$. ومن الأمثلة عليها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}, \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مجال الاقتران النسبي هو مجموعة الأعداد الحقيقة باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفرًا (أصفار المقام).

مثال 2

أجد مجال كل اقترانٍ نسبيٍ مما يأتي:

$$1 \quad q(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}$$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقة باستثناء قيم x التي تجعل

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = \pm 3$$

بإضافة 9 إلى الطرفين

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

أتذكر

يمكن استعمال قاعدة تحليل الفرق بين مربعين لتحليل $x^2 - 9 = 0$.

إذن، مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقة باستثناء 3، -3، ويكتب كمجموع على الصورة الآتية: $\{x | x \neq \pm 3\}$

2) $y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقة باستثناء قيم x التي تجعل $0 = 2x^3 - 5x^2 - 3x$

$$x(2x^2 - 5x - 3) = 0$$

بإخراج x عامل مشترك

$$x(2x + 1)(x - 3) = 0$$

تحليل العبارة التربيعية

$$x = 0, 2x + 1 = 0, x - 3 = 0$$

خاصية الضرب الصفرية

$$x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = 3$$

بحل المعادلات

إذن، مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقة باستثناء $0, 3, -\frac{1}{2}$ ، أو

$$\{x | x \neq 0, x \neq 3, x \neq -\frac{1}{2}\}$$

أفتر

هل مجال الاقتران

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

يساوي مجال الاقتران

$$?g(x) = x - 3$$

أتحقق من فهمي

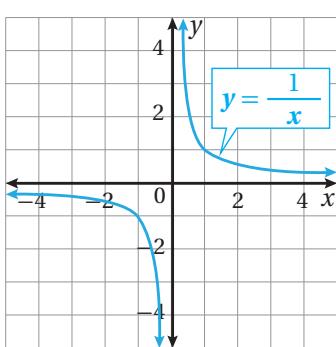
أجد مجال كل اقتران نسبيٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 5x + 6}$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{6x - 3x^2}$

معظم الاقترانات النسبية منحنياتها غير متصلة، بمعنى: أنها تحتوي قفزاتٍ أو انقطاعاتٍ أو ثقوبٍ، ويحدث ذلك عند أصفار المقام.

أحد الواقع التي لا يكون عندها منحنى الاقتران متصلًا هو خط التقارب (asymptote)، وهو مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران كلما ازدادت القيمة المطلقة لأحد المتغيرين x أو y .

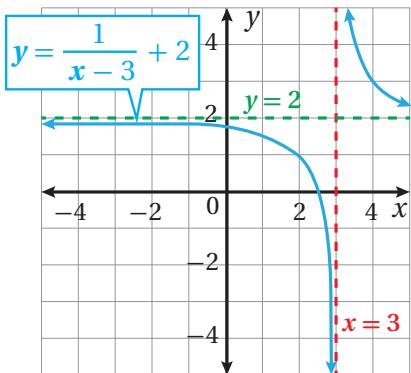


في الشكل المجاور كل من المحور x والمحور y هو خط تقارب لمنحنى الاقتران $y = \frac{1}{x}$ ، وألاحظ أنَّ منحنى الاقتران يقترب كثيراً من خطٍ تقارب، لكنه لا يلمسهُما.

أتعلم

يسمى الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ اقتران المقلوب وهو أبسط الاقترانات النسبية، ومنه تتولَّ اقتراناتٍ نسبية كثيرة.

الوحدة 5



بالنظر إلى مُنحني الاقتران $y = \frac{1}{(x-3)} + 2$ في الشكل المجاورلاحظ وجود خط تقارب رأسى عند صفر المقام $x=3$ وخط تقارب أفقي عند $y=2$ ، ويؤدى ذلك إلى القاعدة الآتية لتحديد خطوط التقارب الرأسية والأفقية.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مفهوم أساسى

خط التقارب الرأسى: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب رأسى عند صفر المقام هو المستقيم $x=b$

خط التقارب الأفقي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب أفقي هو المستقيم $y=c$

مثال 3

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي:

$$1 \quad f(x) = \frac{2}{x-3} + 5$$

بمقارنة هذا الاقتران مع الصيغة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ ،لاحظ أن $b=3, c=5$

إذن، خط التقارب الرأسى هو المستقيم $x=3$ ، وخط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=5$

$$2 \quad g(x) = \frac{7x}{x+4}$$

قاعدة هذا الاقتران تختلف ظاهريًا عن الصيغة $f(x) = \frac{1}{(x-b)} + c$ ، لكنهما متشابهان،

ويمكن تحويل قاعدة الاقتران إلى الصيغة الأخرى بقسمة البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة كما يظهر جانباً.

$$\begin{array}{r} 7 \\ x+4 \) 7x \\ \underline{-} 7x \\ -28 \end{array}$$

$$\text{إذن، } g(x) = 7 - \frac{28}{x+4}$$

بمقارنة هذا الاقتران مع الصيغة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ ،لاحظ أن $b=-4, c=7$

إذن، خط التقارب الرأسى هو المستقيم $x=-4$ ، وخط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=7$

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب لـ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ مما يأتي:

a) $f(x) = 2 + \frac{9}{x+1}$

b) $h(x) = \frac{1}{x} - 3$

c) $j(x) = \frac{4x+11}{x-5}$

لتمثيل الاقترانات النسبية بيانياً، أجد خطوط التقارب، وأرسمها أولًا، ثم أكون جدول قيم باختيار قيم x على يمين خط التقارب الرأسى وعلى يساره، وأعين النقاط في المستوى الإحداثي.

مثال 4

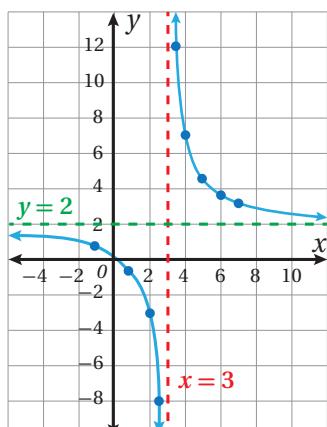
أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3}$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله، ومداه.

الخطوة 1: أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران.

خط التقارب الرأسى هو المستقيم $x=3$ ، وخط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=2$.

الخطوة 2: أنشئ جدول قيم باختيار بعض القيم حول $x=3$ ؛ لأن الاقتران غير معروف عند $x=3$:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$f(x)$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25



الخطوة 3: أرسم خط التقارب، ثم أعين النقاط (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط إلى يمين المستقيم $x=3$ بمنحنى أمده بمحاذاة خط التقارب، ثم أصل بين النقاط إلى يسار المستقيم $x=3$ بمنحنى أمده بمحاذاة خط التقارب، فيتتج الشكل المجاور.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3، أو $\{x | x \neq 3\}$.

المدى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 2، أو $\{y | y \neq 2\}$.

أتعلم

إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسط الاقتران النسبي ومقameه، فإنه توجد خطوط تقارب رأسية عند أصفار مقameه جميعها.

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{3}{x+2}$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله، ومداه.

الوحدة 5

تحتوي منحنيات بعض الاقترانات النسبية فجواتٍ (ثقوب) تُعبر عن القيم التي لا يكون الاقتران مُعرّفًا عندَها.

فجوات منحنى الاقتران النسبي

مفهوم أساسٍ

إذا كان $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, حيث $p(x) \neq 0$, وكان $c - x$ عاملًا مشتركًا لكُل من $p(x)$ و $q(x)$, فإنَّ منحنى $f(x)$ يحتوي فجوةً عند $x = c$.

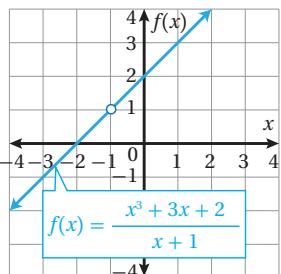
مثال 5

أمثلُ الاقتران $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ بيانياً.

أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x+2 \end{aligned}$$

أختصر العامل المشترك $(x+1)$



إذن، التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ هو ذاته التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x + 2$ مع وجود فجوة (دائرة صغيرة مُفرغة) في المنحنى عند $x = -1$ كما يظهر في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي

إرشاد

استعمل أوراق المربعات الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^2}$

أتدرِّب وأحل المسائل

أجدُ ناتجَ القسمةِ والباقي في كُل ممّا يأتي:

1) $(x^2 + 5x - 1) \div (x - 1)$

2) $(3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$

3) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$

4) $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$

5) $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$

6) $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$

أَجِدْ مَجَالَ كُلِّ مِنَ الاقتراناتِ الآتية:

7) $f(x) = \frac{3x - 6}{2x}$

8) $h(x) = \frac{2x - 8}{2x^2 - 3x + 1}$

9) $g(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 9}$

أَجِدْ خطوطَ التقاربِ لـكُلِّ اقترانٍ ممّا يأتِي، وَأَمْثُلُهُ بِيانِيًّا، وَأَجِدْ مَجَالَهُ، وَمَدَاهُ:

10) $f(x) = \frac{2}{x - 3}$

11) $h(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$

12) $g(x) = \frac{4}{x + 2} - 1$

أَمْثُلُ كُلَّا مِنَ الاقتراناتِ الآتية بِيانِيًّا:

13) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

14) $f(x) = \frac{-x^2 + x^3}{x^3}$

15) $f(x) = \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

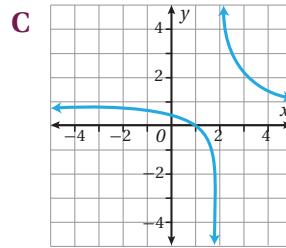
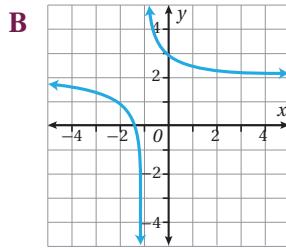
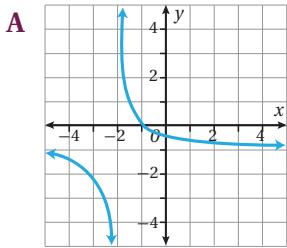
إرشاد: أَسْعَمْ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أَعِينُ لـكُلِّ مِنَ الاقتراناتِ النسبيةِ الآتيةِ رمزَ التمثيلِ البيانيِّ المناسبِ لـهُ:

16) $f(x) = \frac{1}{x + 1} + 2$

17) $h(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$

18) $g(x) = \frac{1}{x + 2} - 1$



مهارات التفكير العلية



(19) تبرير: مساحة ورقة مستطيلة تساوي $(3x^3 + 14x^2 + ax + 8)$ وحدات مربعة، وطولها يساوي $(x + 2)$ وحدة. أجِدْ قيمةَ a مُبِرّراً إجابتي.

(20) أيها لا ينتهي: أحِدُدْ فيما يأتِي الاقترانَ المُخْتَلَفُ عنِ الاقتراناتِ الثلَاثَةِ الأخْرى، مُبِرّراً إجابتي:

$f(x) = \frac{3}{x + 5}$

$g(x) = \frac{5}{x + 2}$

$h(x) = \frac{9}{x^2 + 1}$

$l(x) = \frac{7}{x^2 - 9}$

(21) مسألة مفتوحة: أكتب قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطٌّ تقاربٌ أفقِيٌّ هو: $y = 3$ ، وخطٌّ تقاربٌ رأسِيٌّ

هما: $x = -2, x = 7$

الدرس

3

تركيب الاقترانات

Composition of Functions

تعرّف مفهوم الاقتران المركب، وشرط تركيب اقترانين، وإيجاد قيمة لعدد معطى، وإيجاد قاعدة اقتران مركب إذا علمت قاعدتاً مركبتها.

تركيب الاقترانات، الاقتران المركب، المركبات.

عندما تسقط قطرة ماء المطر على بحيرة تكون موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بالنسبة إلى الزمن وفق الاقتران: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$ حيث r نصف القطر بالستيمترات، و t الزمن بالدقيقة. أجد مساحة الموجة عندما $t=2$.



تعلّمت سابقاً أنه يمكن استعمال أي اقترانين، مثل $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ ، لتكونين اقترانات جديدة، وذلك بإجراهما عملياتٍ جمِعٍ، أو طرحٍ، أو ضربٍ، أو قسمةٍ عليهما كما في الأمثلة الآتية:

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$$

ويمكن أيضاً تكوين اقتران جديد من اقترانين f ، و g عن طريق دمجهما، بحيث تكون مخرج أحدهما مدخلةً للآخر.

وُسمى عملية الدمج هذه **تركيب الاقترانات** (functions composition)، ويُسمى الاقتران الناتج **الاقتران المركب** (composite function).

يمكن تركيب اقترانين $f(x)$, $g(x)$ بطريقتين، هما:

(1) تطبيق g أولاً، ثم تطبيق f على نتيجة g ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(f \circ g)$.

(2) تطبيق f أولاً، ثم تطبيق g على نتيجة f ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(g \circ f)$.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



لغة الرياضيات

يقرأ $(f \circ g)$ كما يلي:

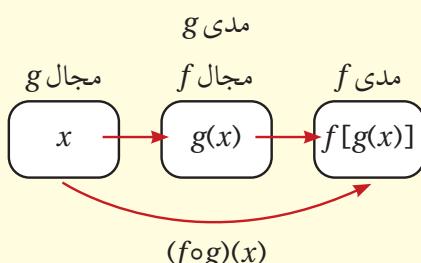
بعد f

يقرأ $(g \circ f)$ كما يلي:

بعد g

تركيب الاقترانات

مفهوم أساسي



إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان مدى $g(x)$ يقع ضمن مجال $f(x)$ فإنَّ الاقتران المركب $(f \circ g)(x)$ يعطي كما يأتي:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$, فأجد :

1 $(g \circ f)(3)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(3) &= g(f(3)) && \text{تعني } g \circ f \text{، أي } f \text{، ثم } g \\ &= g(3^2) && \text{بتعويض } 3 \text{ في معادلة } f \\ &= g(9) && \text{بالتبسيط} \\ &= 9 + 4 = 13 && \text{بتعويض } 9 \text{ في معادلة } g, \text{ والتتبسيط} \end{aligned}$$

2 $(g \circ f)(-2)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) && \text{تعني } g \circ f \text{، أي } f \text{، ثم } g \\ &= g((-2)^2) && \text{بتعويض } -2 \text{ في معادلة } f \\ &= g(4) && \text{بالتبسيط} \\ &= 4 + 4 = 8 && \text{بتعويض } 4 \text{ في معادلة } g, \text{ والتتبسيط} \end{aligned}$$

3 $(f \circ g)(5)$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(5) &= f(g(5)) && \text{تعني } f \circ g \text{، أي } g \text{، ثم } f \\ &= f(5+4) && \text{بتعويض } 5 \text{ في معادلة } g \\ &= f(9) && \text{بالتبسيط} \\ &= 9^2 = 81 && \text{بتعويض } 9 \text{ في معادلة } f, \text{ والتتبسيط} \end{aligned}$$

تحقق من فهمي

إذا كان $h(x) = \sqrt{x}$, $j(x) = 2x + 1$, فأجد كلاً ممّا يأتي :

- a) $(h \circ j)(4)$ b) $(j \circ h)(4)$ c) $(h \circ h)(16)$ d) $(j \circ j)(-8)$

يمكن إيجاد قاعدة الاقتران المركب بدلالة المتغير x , ثم حساب قيمة الاقتران المركب عند أي قيمة عدديّة معطاة.

مثال 2

إذا كان $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 6$, فأجد قاعدة كل من : $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$, و $(g \circ f)(0)$, و $(f \circ g)(-2)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعرّيف الاقتران المركب

الوحدة 5

$$\begin{aligned}
 &= f(2x^2 - 6) && \text{بتعويض } 6 \text{ في معادلة } f \\
 &= 3(2x^2 - 6) + 5 && \text{بتعويض } (2x^2 - 6) \text{ في معادلة } f \\
 (f \circ g)(x) &= 6x^2 - 13 && \text{بالتبسيط} \\
 (f \circ g)(-2) &= 6(-2)^2 - 13 = 11 && \text{بتعويض } -2 = x, \text{ والتبسيط}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{تعريف الاقتران المركب} \\
 &= g(3x+5) && \text{بتعويض } f(x) = 3x+5 \\
 &= 2(3x+5)^2 - 6 && \text{بتعويض } (3x+5) \text{ في معادلة } g \\
 &= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6 && \text{بتربيع } (3x+5) \\
 (g \circ f)(x) &= 18x^2 + 60x + 44 && \text{بالتبسيط} \\
 (g \circ f)(0) &= 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44 && \text{بتعويض } 0 = x, \text{ والتبسيط}
 \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

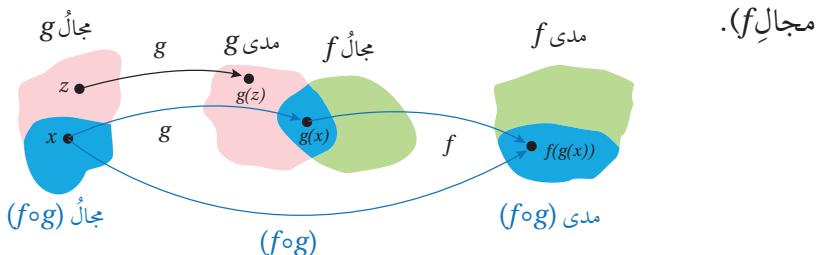
إذا كان $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = 2 - 3x$, فأجد قاعدة كل من: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(-1)$, $(g \circ f)(3)$.

أفكّر

هل تحقق عملية تركيب الاقترانات الخاصة التبديلية؟

مجال الاقتران المركب

يتكون مجال $(f \circ g)(x)$ من مجموعة قيم x من مجال g التي تكون قيم $g(x)$ لها موجودة في مجال f . ولذلك تُستثنى من مجال $(f \circ g)(x)$ قيم x التي لا يكون الاقتران g معرفاً عندها (ليست ضمن مجال g), وقيم x التي لا يكون $f(g(x))$ معرفاً عندها ($f(g(x))$ ليس ضمن مجال f).



مثال 3

إذا كان $f(x) = \frac{6}{x-2}$, $g(x) = \frac{9}{x-3}$. إذا كان مجال الاقتران $(f \circ g)(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء قيمة x التي يجعل المقام صفرًا.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

بمساواة المقام مع الصفر

بجمع 3 إلى الطرفين

مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء قيم x التي تجعل $x - 2 = 0$ ، أي $x = 2$ ، ولذلك تُستثنى قيمة x التي تجعل $x - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{9}{x-3} &= 2 && \text{بمساواة } g(x) \text{ مع } 2 \\ 9 &= 2(x-3) && \text{بضرب طرفي في } (x-3) \\ 9 &= 2x - 6 && \text{بالتوزيع} \\ 15 &= 2x && \text{بإضافة 6 للطرفين} \\ 7.5 &= x && \text{بقسمة طرفي على 2} \end{aligned}$$

إذن، مجال $(f \circ g)(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء $3, 7.5$ ، أي: $\{x: x \neq 3, x \neq 7.5\}$.

أتحقق من فهمي

أجد مجال $(g \circ f)(x)$ للاقترانين في المثال 3 أعلاه.

يمكن النظر إلى كثير من الاقترانات بوصفها اقترانات مركبة، وإيجاد اقترانين بسيطين يكافيء تركيبيهما الاقتران المركب، عندئذ يكون الاقتران البسيطان مركبتي الاقتران المركب .(components of the composite function)

فمثلاً، يمكن اعتبار الاقتران $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقتراناً مركباً، ومركباته هما: $f(x) = (h \circ g)(x)$, $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4x^2 + 9$

مثال 4

أجد الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$, بحيث يمكن التعبير عن كل من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

$$1 \quad h(x) = \frac{1}{x+3}$$

افتراض أن $g(x) = x + 3$, $f(x) = \frac{1}{x}$. وبذلك، فإن:

$$f(g(x)) = f(x + 3)$$

$$= \frac{1}{x+3} = h(x)$$

$$g(x) = x + 3$$

$$\text{بتعويض } x+3 \text{ مكان } x \text{ في معادلة } f$$

إرشاد

قد لا تكون القيود على مجال الاقترانات واضحةً بعد إجراء عملية تركيب الاقترانات وتبسيطها؛ لذا من المهم الانتباه إلى مجال الاقترانين قبل تركيبيهما.

الوحدة 5

2) $h(x) = (2 + x^2)^{10}$

أفترض أن $g(x) = 2 + x^2$, $f(x) = x^{10}$. وبذلك، فإن:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(2 + x^2) \\ &= (2 + x^2)^{10} = h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 + x^2 \\ f(g(x)) &\text{ في معادلة } 2 + x^2 \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أجد الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيث يمكن التعبير عن كلٌ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يمكن استعمال فكرة الاقترانات المركبة في مواقف حياتية كثيرة، مثل: التجارة، والصناعة، وغيرهما.

مثال 5: من الحياة



صناعة: وجد مدير مصنع للأثاث أن تكلفة إنتاج q من خزانات الكتب في فترة العمل الصباحية بالدينار هي: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كان عدد خزانات الكتب التي يمكن إنتاجها في t ساعة في الفترة الصباحية هي: $q(t) = 20t$, $0 \leq t \leq 5$ ديناراً تكلفة الإنتاج بدلالة t ؟ كم

لإيجاد تكلفة الإنتاج بدلالة t ، أعرض قيمته $(C \circ q)(t)$ في معادلة التكلفة، فأكمل اقتراناً مركباً هو $(C \circ q)(t)$

$$(C \circ q)(t) = C(20t)$$

تعريف الاقتران المركب

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800 \quad \text{بتعریض } 20t \text{ مكان } q \text{ في معادلة التكلفة}$$

$$= 400t^2 + 40t + 800 \quad \text{بالتبسيط}$$

تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة هي: $(C \circ q)(4)$

$$(C \circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذن، تكلفة الإنتاج في نهاية ساعة العمل الرابعة هي: 7360 ديناراً.

أتحقق من فهمي

قياسٌ: يُحولُ الاقتران $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ درجات الحرارة من المقياس الفهرنهايتى F إلى مقياس سيلسيوس C . ويُحولُ الاقتران $C = F + 273$ درجات الحرارة من مقياس سيلسيوس إلى مقياس كلفن K . أكتب الاقتران الذي يُحول درجة الحرارة من المقياس الفهرنهايتى إلى مقياس كلفن، ثم أجد درجة الحرارة على مقياس كلفن التي تُقابل 86 درجة فهرنهايتية.

معلومات

الكلفن وحدة لقياس درجة الحرارة، اعتمدت في النظام الدولي، ورمز إليها بالرمز (K) ، وقد سميت بهذا الاسم نسبة إلى الفيزيائى اللورد كلفن.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كان $f(x) = x + 7$, $g(x) = \frac{x}{2}$ فأجد كلاً مما يأتي:

1 $(f \circ g)(4)$

2 $(g \circ f)(4)$

3 $(g \circ g)(-2)$

4 $(f \circ f)(3)$

إذا كان $c(x) = x^3$, $d(x) = 2x - 3$ فأجد كلاً مما يأتي:

5 $(c \circ d)(3)$

6 $(d \circ c)(5)$

7 $(c \circ d)(x)$

8 $(d \circ c)(x)$

أجد مجال $(f \circ g)(x)$ في كلٍ مما يأتي:

9 $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{x-5}$

10 $f(x) = \frac{1}{2x-2}$, $g(x) = \frac{5}{x+7}$

إذا كان $a(x) = x + 4$, $b(x) = x - 7$. $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$, فأثبت أنَّ

11

إذا كان $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3x + 4$, فأجد قيمة $(f \circ g)(-3)$.

12

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x-4}$, $g(x) = 2x - 10$. $(g \circ f)(x)$ بصورة كسرٍ واحدٍ، ثم أعينُ مجاله.

13

إذا كان $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 7$. فأعبر عن كلٍ مما يأتي بصورة اقترانٍ مركبٍ، معمتمداً الاقترانين f , g :

14 $x^2 - 6$

15 $x^2 + 2x - 6$

أجد اقترانين $f(x)$, $g(x)$, بحيث يمكن التعبير عن كلٍ من الاقترانين الآتيين بالصورة $h(x) = f(g(x))$

16 $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$

17 $h(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

الوحدة 5

إذا كان $x > 3$ ، فهل يمكن تكوين $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-2}$ ، $x \geq 2$ ، $g(x) = \frac{2}{3-x}$ ؟ أبّرر إجابتي . 18

أَحْلُّ الْمَسَأَلَةِ الْوَارَدَةَ فِي بِداِيَّةِ الدَّرْسِ . 19



يُعطى عدُّ خلايا البكتيريا في أحد الأطعمة المُبَرَّدة في الثلاجة بالاقتران:

$N(T) = 23T^2 - 56T + 1$ ، حيث T درجة حرارة الطعام . عند

إخراج الطعام من الثلاجة تُعطى درجة حرارته بالاقتران: $T(t) = 5t + 1.5$ ، حيث t الزمن بالساعات:

أكتب الاقتران: $(N \circ T)(t)$. 20

أَجِدُّ الزَّمْنَ الَّذِي يَصْلُّ عَنْهُ عدُّ خلايا البكتيريا إِلَى 6752 خليةً، مُقْرَبًا إِجَابَتِي إِلَى مِنْزَلَتِينِ عَشْرِيَّتِينِ . 21

إذا كان $0 < a < 15$ ، $f(x) = ax + b$ ، فأَجِدُّ قيمة كل من a و b . 22

$f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $h(x) = x + 3$ في أبْسِطِ صُورَةٍ، علَمًا بِأَنَّ $(f \circ g \circ h)(x)$ أَجِدُّ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبْسِطِ صُورَةٍ، علَمًا بِأَنَّ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. 23

مهارات التفكير العليا

أَكْتَشِفُ الْخَطَاً: وَجَدَتْ كُلُّ مِنْ هَذِي وَوَفَاءَ نَاتِجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيث $f(x) = x^2 - 6x - 5$ ، $g(x) = x^2 + 5$. أَحَدُّ

إِذَا كَانَتْ إِجَابَةُ أَيِّ مِنْهُمَا صَحِيحةً، مُبَرَّرًا إِجَابَتِي .

هدى
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $= (x^2 + 5)^2 - 6(x^2 + 5) - 5$ $= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5$ $= x^4 + 4x^2 - 10$

وفاء
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $= (x^2 - 6x - 5)^2 - 6x^2 - 5$ $= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5$ $= x^4 + 4x^2 + 20$

مسَأَلَةٌ مَفْتَوِحَةٌ: أَكْتُبُ اقْتَرَانِيْنِ f و g بِحِيثُ يَكُونُ $7 = (f \circ g)(x)$.

تحدد: إذا كان $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ، فما قاعدة $(f \circ g)(x) = ?$ ما مجاله؟ 26

تحدد: إذا كان $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، $g(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ ، فأَحْلُّ المعادلة $-4 = (f \circ g)(x)$. 27

الدرس

4

الاقتران العكسي

Inverse Function

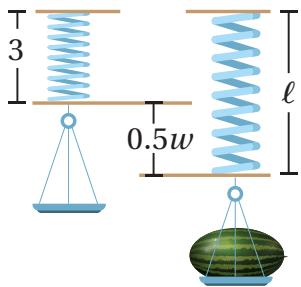
فكرة الدرس



المصطلحات

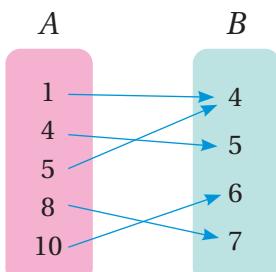


مسألة اليوم



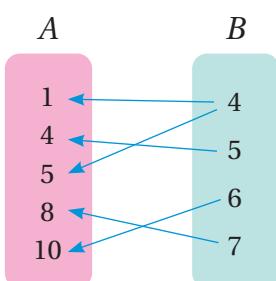
تعُرُّفُ الاقتران العكسي، وإيجاده، وتحديد مجاله ومداه. العلاقة العكسيّة، الاقتران العكسيّ، اقتران واحدٍ لواحدٍ، اختبار الخط الأفقيّ، الاقتران المحايد، الاقتران الجدريّ.

يُسْتَعْمَلُ الاقتران $3 + 0.5w = l$ لإيجاد طول الزنبرك l بالستيمترات في الميزان الزنبركي عند قياس كتلة جسم w بالكيلوغرام. هل يمكن إيجاد اقتران آخر يُسْتَعْمَلُ لإيجاد كتلة الجسم إذا علم طول الزنبرك؟



تعلّمْتُ سابقاً أنَّ العلاقة تربطُ بينَ مجموعتين من العناصرِ، وأنَّ إحداهما تُسمّى المجال، والأخرى تُسمّى المدى. وبالنظر إلى العلاقة المُمثلة في المُخطط السهميِّ المجاور، الاحظ أنَّ المجال هو: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ ، والمدى هو:

$$B = \{4, 5, 6, 7\}$$



عند عكس اتجاه الأسهم لترتبط عناصر B بعناصر A تنتُج علاقَةُ عكسيَّة (inverse relation).

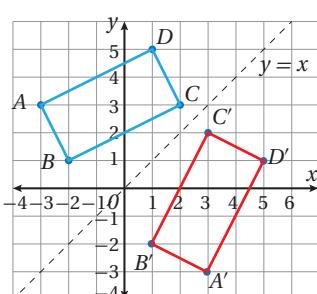
مثال 1

نُمثّلُ الأزواج المُربَّبة للعلاقة: $\{(1, 5), (-2, 1), (2, 3), (1, 3), (-3, 3)\}$ إحداثيات رؤوس المستطيل $ABCD$. أَجِدُ العلاقة العكسيّة، ثم أُمثّلُ بيانياً العلاقة والعلاقَة العكسيَّة على المستوى الإحداثي نفسه.

لإيجاد العلاقة العكسيّة، أبْدَلُ إحداثي كل زوج مرتب، فتكونُ العلاقة العكسيّة هي:

$$\{(3, 1), (5, -3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}.$$

عند تمثيل هذه الأزواج المُربَّبة بيانياً تنتُج إحداثيات رؤوس المستطيل $A'B'C'D'$ الذي يُمثّل انعكاساً للمستطيل $ABCD$ حول المستقيم $x = y$.



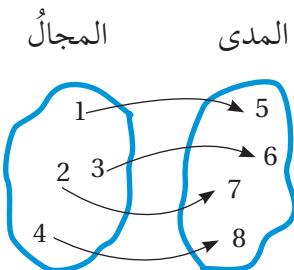
أتحقق من فهمي

يُمثل الأزواج المُرتبة للعلاقة: $\{(1, 4), (3, -4), (-1, 4)\}$ إحداثيات رؤوس المثلث ABC . أجد العلاقة العكسيّة، ثم أُمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسيّة على المستوى الإحداثي نفسه.

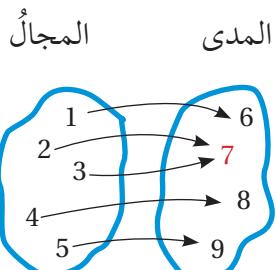
رموز رياضية

يُقرأ الرمز $f^{-1}(x)$
الاقتران العكسي
للاقتران $f(x)$.

الاقترانات هي نوع خاص من العلاقات؛ لأن لها خاصية لا تتحققها جميع العلاقات؛ فهي تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى. وبما أن كل اقتران هو علاقة فإنه يمكن إيجاد علاقة عكسيّة للاقتران (معكوس الاقتران)، فإذا كان المعكوس اقتراناً أيضاً سُميَ اقتراناً عكسيّاً (inverse function). ويرمز إلى الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.
يمكن تحديد إذا كان معكوس الاقتران $f(x)$ يُمثل اقتراناً أم لا بالنظر إلى $f(f(x))$ ؛ فإذا ارتبط كل عنصر في المدى بعنصر واحد فقط في المجال كان المعكوس اقتراناً، عندئذ يُسمى اقتران واحد لواحد (one to one function).

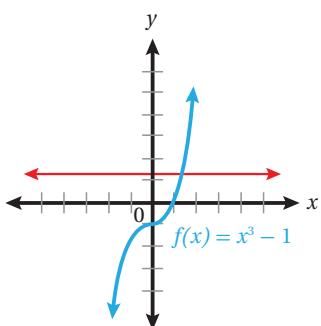


اقتران واحد لواحد.

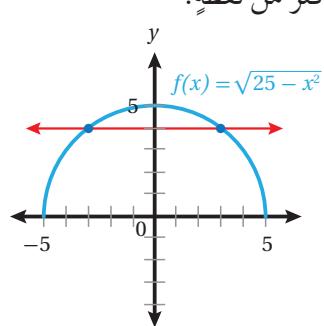


اقتران ليس واحداً لواحد.

يمكن أيضاً استعمال طريقة تُسمى اختبار الخط الأفقي (horizontal line test)، للتحقق من أن الاقتران هو واحد لواحد، وذلك برسم أي خط أفقي، والتأكد أنه لا يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة.



اقتران واحد لواحد.

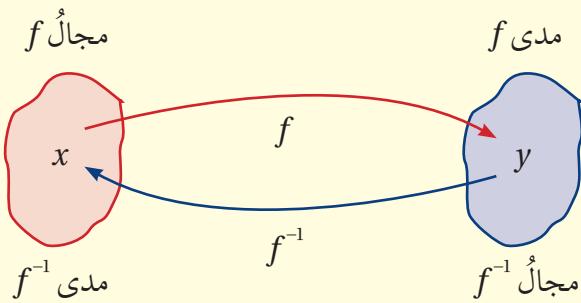


اقتران ليس واحداً لواحد.

مفهوم أساسٍ

الاقتران العكسي

لأي اقتران $f(x)$ يوجد اقتران عكسي $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ اقتران واحدٍ لواحدٍ، عندئذ يكون مجال $f(x)$ مدي f ، ومدى $f(x)$ هو مجال $f^{-1}(x)$.



يمكن إيجاد الاقتران العكسي للاقتران المكتوب بصورة معادلة بالتبديل بين x و y في قاعدة الاقتران.

مثال 2

أجد الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ لكل اقتران مما يأتي:

$$1 \quad f(x) = 4(x-5)$$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $y = f(x)$

$$y = 4(x-5)$$

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

$$y = 4(x-5)$$

المعادلة الأصلية

بتوزيع الضرب في 4 على الحدين

بإضافة 20 إلى طرف المعادلة

بقسمة طرف المعادلة على 4

$$y + 20 = 4x$$

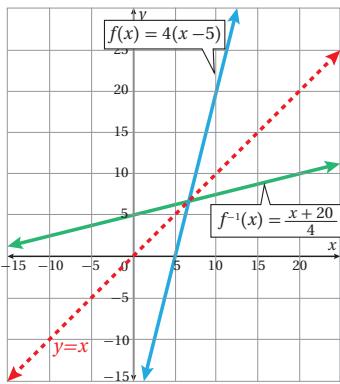
$$\frac{y + 20}{4} = x$$

الخطوة 3: أبدل x بـ y ، وأبدل y بـ x في الصيغة التي توصلت إليها في الخطوة 2، فينتج:

$$\frac{x + 20}{4} = y$$

الوحدة 5

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y , فيكون الناتج قاعدة الاقتران العكسي $(x)(f^{-1})$.

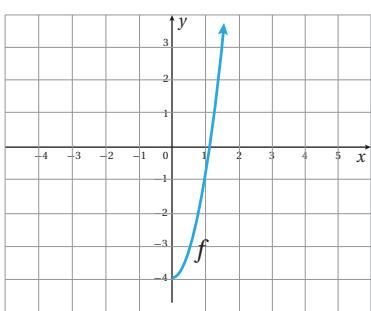


أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y , فينتج:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$

عند تمثيل كل من $(x)f$ و $(f^{-1}x)$ في المستوى الإحداثي نفسه, لا يلاحظ أن تمثيل البياني للاقتران f^{-1} هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران f حول المستقيم $y = x$.

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



$$y = 3x^2 - 4$$

$$y + 4 = 3x^2$$

$$\frac{y+4}{3} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$$

باستعمال اختبار الخط الأفقي, أجد أن $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$; لذا فإن له اقتران عكسي.

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $-4 - 3x^2$

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1:

بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية

إضافة 4 إلى طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 3

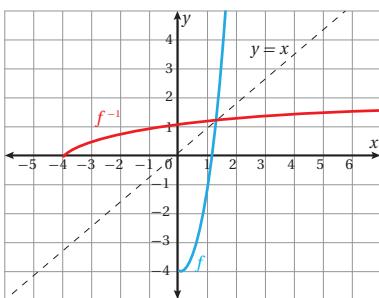
$$x > 0$$

الخطوة 3: أبدل x بـ y , وأبدل y بـ x , فينتج: $y = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$$

عند تمثيل كل من $(x)f$ و $(f^{-1}x)$ في المستوى الإحداثي نفسه, لا يلاحظ أن تمثيل البياني للاقتران f^{-1} هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران f حول المستقيم $y = x$.



معلومة

بوجه عام, لا يوجد للاقتران التربيعي اقتران عكسي؛ لأنّه ليس اقتران واحد لواحد. ولكن إذا اخترز مجاله بالفترة التي يكون فيها اقتران واحد لواحد, كان له عندئذ اقتران عكسي.

رموز رياضية

يدل الرمز $f^{-1}(x)$ على الاقتران العكسي للاقتران f , أما الرمز $\frac{1}{f(x)}$ فيدل على مقلوب الاقتران f .

أتحقق من فهمي

أَبْحِدُ الاقتران العكسي لـ كُلٌّ مِنَ الاقترانين الآتَيْنِ:

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

مِنْ خَصَائِصِ أَيِّ اقْتَرَانٍ مُتَعَاكِسٍ أَنَّ كَلَّا مِنْهُمَا يَعْكُسُ أَثْرَ الْآخِرِ؛ لِذَلِكَ يَتَجُّزُ مِنْ تَرْكِيَّبِهِمَا الاقترانُ الَّذِي يُوَقِّي كَلَّا عَنْصِرٍ فِي مَجَالِهِمَا عَلَى حَالِهِ، وَهُوَ الاقترانُ الْمُحَايدُ $f(x) = x$ (identity function)

نتيجة

يَكُونُ $(x)^{-1}$ الاقتران العكسي للاقتران $(x)f$ ، إِذَا وَفَقْطُ إِذَا كَانَ
 $(f \circ f^{-1})(x) = x$ لِجَمِيعِ قِيمِ x فِي مَجَالِ $(x)f$ وَ $f^{-1}(x) = x$ لِجَمِيعِ
 قِيمِ x فِي مَجَالِ $f(x)$.

إرشاد

تعني جملةً (إِذَا وَفَقْطُ إِذَا) أَنَّ العبارةَ صحيحةً في الاتجاهِيْنِ.

تُسْعَمِلُ التَّيِّجَةُ السَّابِقَةُ لِإِثْبَاتِ أَنَّ كَلَّا مِنَ اقْتَرَانِيْنِ مُعْلَمَيْنِ هُوَ اقْتَرَانُ عَكْسِيٍّ لِلآخِرِ،
 وَلِلتَّحْقِيقِ مِنْ صَحَّةِ الْحَلِّ عِنْدَ إِيْجَادِ الاقتران العكسيّ.

مثال 3

أُبَيَّثُ أَنَّ كَلَّا مِنَ الاقْتَرَانِيْنِ $g(x) = 3x - 5$ وَ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ هُوَ اقْتَرَانُ عَكْسِيٍّ لِلآخِرِ
 بِإِيْجَادِ $(f \circ g)(x)$ ، وَ $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

تعريفُ الاقترانِ المُرْكَبِ

$= f(3x - 5)$

$g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x - 5) + 5}{3}$

بِتَعْويِضِ $3x - 5$ مَكَانَ x فِي مَعَادِلَةِ $f(x)$

$= \frac{3x + (-5 + 5)}{3}$

بِالتَّجْمِيعِ

$(f \circ g)(x) = x$

بِالتَّبْسيِطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

تعريفُ الاقترانِ المُرْكَبِ

الوحدة 5

$$= g\left(\frac{x+5}{3}\right) \quad f(x) = \frac{x+5}{3} \quad \text{بتعويض } \frac{x+5}{3}$$

$$= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5 \quad g(x) \text{ في معادلة } \frac{x+5}{3} \quad \text{بتعويض } x$$

$$= x + 5 - 5 \quad \text{باختصار العامل } 3 \text{ من البسط والمقام}$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، كل من الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ هو اقترانٌ عكسيٌّ لآخر؛ لأن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$.

أتحقق من فهمي

أثبت أن كلاً من الاقترانين $g(x) = 4x + 2$ و $f(x) = 8 - \frac{x}{4}$ هو اقترانٌ عكسيٌّ لآخر.

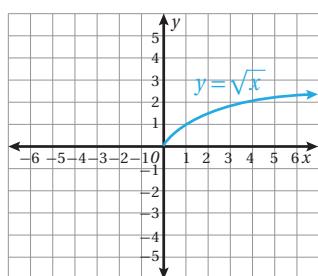
أتعلم

يمكنني أن أمثل الاقتران الجذری ببياناً يإنشاء جدولٍ قيمٍ لأفتقضها للمتغير x من مجال الاقتران، وأعوّضها في قاعدة الاقتران لأجد قيم y ، وأعيّن النقاط في المستوى الإحداثي، وأرسم المنحنى الذي يمرُّ بها.

نَتَجَ في المثال الثاني الاقتران العكسي $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعياً لمقدار جبريٍّ، وهو نوعٌ خاصٌ من الاقترانات يُسمى **الاقتران الجذری** (radical function)، مثل:

$$f(x) = \sqrt{5+x^2} \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+12}{8}} \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-x^3}{1-x}}$$

إذا كان دليلاً الجذر فردياً مثل: $\sqrt[5]{\cdot}$ ، $\sqrt[3]{\cdot}$ كان مجال الاقتران الجذری جميع الأعداد الحقيقية. ومداه جميع الأعداد الحقيقية. أما إذا كان دليلاً زوجياً مثل: $\sqrt[4]{\cdot}$ ، $\sqrt[2]{\cdot}$ ، فإن مجاله يكون مجموعه الأعداد التي يجعل المقدار تحت رمز الجذر عددًا غير سالب؛ لأن الجذور الزوجية للأعداد السالبة ليست حقيقة، ويكون مداه مجموعه من الأعداد الحقيقة غير السالبة. فمثلاً، $f(x) = \sqrt{x}$ مجاله $x \geq 0$ ، ومداه $y \geq 0$ ، وتمثيله البياني كما في الشكل الآتي:



مثال 4

أَجِدُّ مَجَالَ الاقْتَرَانِ $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ وَمَدَاهُ، ثُمَّ أَجِدُّ الاقْتَرَانَ الْعَكْسِيَّ لَهُ.

مَجَالُ هَذَا الاقْتَرَانِ هُوَ قِيمَةُ x الَّتِي تَجْعَلُ $2x - 6 \geq 0$:

$$2x - 6 \geq 0$$

أَكْتُبُ الْمُتَبَايِنَةَ

$$2x - 6 + 6 \geq 0 + 6$$

بِإِضَافَةِ 6 إِلَى الْطَّرْفَيْنِ

$$2x \geq 6$$

بِالْبَيْسِطِ

$$x \geq 3$$

بِقِسْمَةِ الْطَّرْفَيْنِ عَلَى 2

إِذْنُ، مَجَالُ $f(x)$ هُوَ $x \geq 3$ ، أَوِ الْفَتْرَةُ $(3, \infty]$ ، وَمَدَاهُ جَمِيعُ الْأَعْدَادِ الْحَقِيقِيَّةِ مِنْ قِيمَتِهِ عِنْدَ 3 فَصَاعِدًا؛ لَأَنَّ الْمَقْصُودَ بِالْجُذُرِ هُوَ الْجُذُرُ الْمُوْجَبُ. فَالْمَدَى هُوَ $y \geq 0$ ، أَوِ الْفَتْرَةُ $[0, \infty)$.

لِإِيجَادِ الاقْتَرَانِ الْعَكْسِيِّ، أَكْتُبُ الاقْتَرَانَ بِصُورَةِ $y = \sqrt{2x - 6}$ ، ثُمَّ أَحْلُّ الْمُعَادَلَةَ لِإِيجَادِ x بِدَلَالَةِ y :

$$y = \sqrt{2x - 6}$$

الْمُعَادَلَةُ الْأَصْلِيَّةُ

$$y^2 = 2x - 6$$

بِتَرْبِيعِ الْطَّرْفَيْنِ

$$y^2 + 6 = 2x$$

بِإِضَافَةِ 6 إِلَى الْطَّرْفَيْنِ

$$\frac{y^2 + 6}{2} = x$$

بِقِسْمَةِ الْطَّرْفَيْنِ عَلَى 2

بِإِبَدَالِ $y \leftrightarrow x$ ، وَ $x \leftrightarrow y$ فِي الْمُعَادَلَةِ النَّاتِجَةِ، فَإِنَّهُ يَتَجَزَّ: $y = \frac{x^2 + 6}{2}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6}{2}$$

أَذْكُرُ

مَجَالُ الاقْتَرَانِ الْعَكْسِيِّ $f^{-1}(x)$ هُوَ مَدَى الاقْتَرَانِ f .

يَكُونُ مَجَالُ $f^{-1}(x)$ هُوَ مَدَى $f(x)$ ؛ أَيْ مَجَالُ الْفَتْرَةِ $(\infty, 0]$ ، وَمَدَاهُ هُوَ مَجَالُ $f(x)$ ؛ أَيْ الْفَتْرَةُ $[3, \infty)$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَجِدُّ مَجَالَ $g(x) = \sqrt{3x + 12}$ وَمَدَاهُ، ثُمَّ أَجِدُّ الاقْتَرَانَ الْعَكْسِيِّ لَهُ.

تَنْتَلَبُ بَعْضُ الْمَسَائِلِ الْحَيَاتِيَّةِ اسْتِعْمَالَ مَفْهُومِ الاقْتَرَانِ الْعَكْسِيِّ لِحَلِّهَا. فَإِذَا عُلِمَ طُولُ نَصْفِ قُطْرِ كُرْةٍ أَمْكَنَ إِيجَادُ حَجْمِهَا بِالْتَّعْوِيْضِ الْمُباشِرِ فِي قَانُونِ حَسَابِ حَجْمِ الْكُرْةِ: $\frac{4}{3}\pi r^3 = V(r)$. وَلَكِنْ إِذَا عُلِمَ الْحَجْمُ، وَطُلِبَ إِيجَادُ طُولِ نَصْفِ القُطْرِ، فَيَجُبُ تَغْيِيرُ الصِّيَغَةِ الْخَاصَّةِ بِإِيجَادِ الْحَجْمِ V إِلَى صِيَغَةٍ أُخْرَى لِإِيجَادِ r ، وَهُنَا يَبْرُزُ مَفْهُومُ الاقْتَرَانِ الْعَكْسِيِّ.

إِرْشَادٌ

لَا يُسْتَعْمَلُ رَمْزُ الاقْتَرَانِ الْعَكْسِيِّ $f^{-1}(x)$ فِي الْمَسَائِلِ الْعَمَلِيَّةِ، وَإِنَّمَا يُسْتَعْمَلُ رَمْزُ مُثَلُ $r = r(V)$ الَّذِي يُعَبِّرُ عَنْ نَصْفِ القُطْرِ بِدَلَالَةِ الْحَجْمِ.

مثال 5: من الحياة



فيزياء: سقطَ جسمٌ ساكنٌ من ارتفاع $m = 200$ عن سطح الأرض، فكانَ موقعُه s بالنسبة إلى الأرضِ بالأمتارِ بعد t ثانيةً من سقوطِه يعطى بالاقتران $s(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبرَ عن الزمن t بصورَةِ اقترانٍ بدلالةِ الموقعِ s ، ثم أجدُ الزمنَ الذي يكونُ عنده موقعُ الجسمِ 50 m فقط. إنَّ التعبيرَ عن t بدلالةِ s يعني إيجادَ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ (t) . ولأنَّ الزمنَ t لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ (t) هو $t \geq 0$ ، وفيه يكونُ (t) اقترانًا واحدًا لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

الخطوة 1: أكتبُ الاقترانَ بصورَةِ $s = 200 - 4.9t^2$

الخطوة 2: أجعلُ t موضوعَ القانونِ.

$$s = 200 - 4.9t^2$$

المعادلةُ الأصليةُ

$$s - 200 = -4.9t^2$$

بطريح 200 من طرفِي المعادلةِ

$$\frac{s - 200}{-4.9} = t^2$$

بقسمةِ طرفِي المعادلةِ على -4.9

$$\frac{200-s}{4.9} = t^2$$

بضربِ البسطِ والمقامِ في -1

$$\sqrt{\frac{200-s}{4.9}} = t$$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفينِ

إذنُ، الاقترانُ الذي يعبرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الموقعِ هو:

$$t(s) = \sqrt{\frac{200-s}{4.9}}$$

بتعریضِ $s = 50$

$$\approx 5.53$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنُ، يكونُ موقعُ الجسمِ 50 m بعدَ مُضيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِه.

أتحقق من فهمي

يرتبطُ محيطُ الرأسِ C للطفلِ بطولِه H (كلا القياسينِ بالستيمتر) عن طريقِ الاقترانِ:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$

(a) أكتبُ اقترانًا يعبرُ عنْ محيطِ الرأسِ C بدلالةِ طولِ الطفلِ H .

(b) أجدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُه 66 cm .



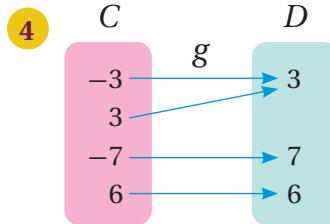
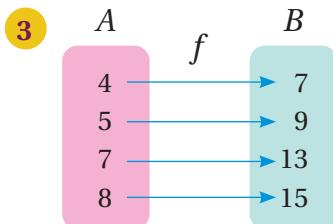
كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِه تقريبًا.



أحدّد الاقتران الذي له اقترانٌ عكسيٌ في كلٌ مما يأتي، مبرراً إجابتي، ثمَّ أكتب الاقتران العكسيَّ (إنْ وجدَ):

1) $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2) $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$



إذا كان $(4, f(x))$ فأجد قيمة كلٌ مما يأتي:

5) $f(-2)$

6) $f(4)$

7) $f^{-1}(9)$

8) $f^{-1}(18)$

أجدُ الاقتران العكسيَّ لكلٍ منَ الاقتراناتِ الآتية:

9) $f(x) = x + 7$

10) $f(x) = 8x$

11) $f(x) = \frac{x}{2} + 6$

12) $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$

13) $f(x) = 4x^3$

14) $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$

15) $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$

16) $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$

أثبُتْ أنَّ كلاً منَ الاقترانين $f(x)$, $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌ للآخرِ:

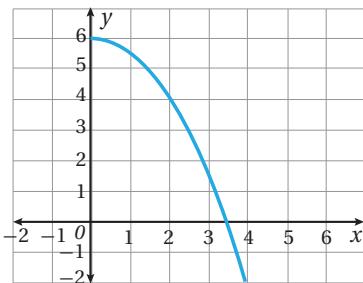
$$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x-2}, x \geq 2$$

أثبُتْ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌ لنفسِه.



صناعة: إذا كان $C(x)$ يُمثّل التكلفةَ C بالدنانير لانتاج x وحدةً منْ مصابيح الإنارة، فماذا يُمثّل المقدار $C^{-1}(23000)$ ؟

الوحدة 5



أرسم منحنى الاقتران العكسي للاقتران f المجاور في المستوى الإحداثي نفسه، معيناً المجال والمدى لكلاً من f و f^{-1} . 20

أجد الاقتران العكسي للاقتران: 21

$f(x) = x^2 - 2x + 5$, $-3 \leq x \leq 1$ ، ثم أمثل $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه.

(إرشاد: أكتب $f(x)$ بصورة $c(x+b)^2 + c$ باستعمال إكمال المربع).



كيمياء: في دورق 100 mL من أحد المحاليل، منها 25 mL من حامض الهيدروكلوريك. إذا أضيف إلى الدورق $n\text{ mL}$ من محلول مسايه، تركيز الحامض فيه 60% ، فإن تركيز الحامض في الدورق يعطى بالاقتران: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أعتبر عن n بصورة اقتران بدلالة التركيز C ، ثم أجد عدد المليترات n التي يجب إضافتها ليصبح تركيز الحامض في الدورق 50% .

أحل المسألة الواردة في بداية الدرس. 23

تُعطى مساحة السطح الكلية A للأسطوانة التي نصف قطع قاعدتها r ، وارتفاعها 40 cm بالاقتران:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\pi r$. أعتبر عن نصف القطر r بصورة اقتران بدلالة المساحة A ، ثم أجد طول نصف قطر قاعدة أسطوانة مساحتها سطحها الكلية 2000 cm^2 .

أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، ثم أمثل $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه. 25

مهارات التفكير العليا



تبرير: إذا كان للاقتران $f(x)$ اقتران عكسي، وكان له صفر عندما $x = 4$ ، فما الذي يمكن استنتاجه عن منحنى

$$f^{-1}(x)$$

مسألة مفتوحة: أكتب قاعدة اقتران واحد لواحد والاقتران العكسي له، ثم أثبت أن كلاً منهما اقتران عكسي للأخر. 27

تحدد: إذا كان $f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = 5x - 1$ ، $x > 0$ ، فأحل المعادلة: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$. 28

الدرس

5

المتتاليات

Sequences

فكرة الدرس



المصطلحات



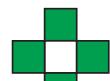
مسألة اليوم



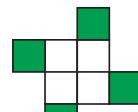
استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليةٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ.

المتتالية، الحد، الحد العام.

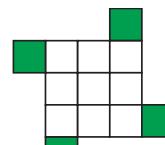
تبين النماذج الآتية أول 3 حدود من نمطٍ هندسيٍّ. أستعمل النمط لأكمل الجدول أدناه:



النموذج (1)



النموذج (2)



النموذج (3)

النموذج	1	2	3	4	n
عدد المربعات البيضاء	1	4	9		
عدد المربعات الخضراء	4	4	4		

تُعدُّ المتتالية (sequence) اقترانًا مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقة.

المتتالية

مراجعة مفهوم

المتتالية هي مجموعة من الأعداد تتبع ترتيباً معيناً، ويُسمى كل عدد فيها حدّاً (term).

مثال 1

أذكر

قد تنتَجُ المتتالية من إضافة عدد ثابتٍ لحدودها، أو من ضرب حدوتها في عدد ثابتٍ، أو من كلتا العمليتين معاً.

أجدُ الحدود الثلاثة التالية لكل متتاليةٍ مما يأتي:

1 2 , 5 , 8 , 11 , ...

بطرح أي حدَّيْن متتالييْن، أجدُ أنَّ كلَّ حدٍ يزيدُ على الحد السابق بمقدار 3، إذن تزايدُ المتتالية بمقدار 3، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$$

+3 +3 +3 +3 +3 +3

الوحدة 5

- 2 3 , 6 , 12 , 24 , ...

بقسمة أي حدين متتاليين، أجد أن الحصول على أي حد يكون بضرب الحد السابق له في 2، إذن تضاعف المتالية بمقدار 2، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$3, 6, 12, 24, \underline{48}, \underline{96}, \underline{192}, \dots$$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

- 3 80 , 73 , 66 , 59 , ...

بطرح أي حدين متتاليين، أجد أن كل حد ينقص عن الحد السابق بمقدار 7، إذن تتناقص المتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$80, 73, 66, 59, \underline{52}, \underline{45}, \underline{38}, \dots$$

-7 -7 -7 -7 -7 -7

- 4 $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

بقسمة أي حدين متتاليين، أجد أن كل حد يساوي $\frac{1}{3}$ مضروباً في الحد السابق له، إذن تضاءل المتالية بمقدار $\frac{1}{3}$ ، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2187}, \dots$$

$\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$

أتذكر

يمكن التعبير عن المتالية:
 $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$
 في صورة:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متالية مما يأتي:

- a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$ b) $5, 10, 20, 40, \dots$
 c) $150, 141, 132, 123, \dots$ d) $400, 200, 100, 50, \dots$

أتذكر

رتبة الحد هي ترتيب
موقعه بالنسبة إلى
الحدود الأخرى في
المتالية.

تعلّمتُ في صفوفٍ سابقةِ **الحد العام** (n^{th} term) لمتالية، الذي يُمثل العلاقة بين أي حد ورتبته (n)، ويُرمزُ إليه بالرمز ($T(n)$). يُسهلُ الحدُ العامُ إيجادَ أي حدٍ في المتالية باستعمالِ رتبته، مثل الحدُ الذي رتبته خمسونَ مثلاً. ويمكنُ تصنيفُ المتالية اعتماداً على حدُها العام إلى خطيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وغير ذلك.

مثال 2

أُبّين إذا كان المقدارُ الجبريُ المُعطى بجانبِ كل متاليةٍ مما يأتي يُمثل حدًّا عامًّا لها أم لا، ثم أصنفُ المتاليات إلى خطيةٍ، أو تربيعيةٍ، أو تكعيبيةٍ، ثم أجدُ الحدُ الخامس والسبعينَ في كل منها:

1 $4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$

أُعوّضُ رُتب بعضِ الحدود في المقدارِ الجبريِ المُعطى للتأكدِ أنّها تنتُجُ من الحدُ العام:

رتبةُ الحد	الحد
$n=1$	$\times 3 \rightarrow 3 \rightarrow +1 \rightarrow 4$
$n=2$	$\times 3 \rightarrow 6 \rightarrow +1 \rightarrow 7$
$n=3$	$\times 3 \rightarrow 9 \rightarrow +1 \rightarrow 10$
$n=4$	$\times 3 \rightarrow 12 \rightarrow +1 \rightarrow 13$

أتذكر

ناتجُ تعويضِ رتبةِ أي حدٍ في صيغةِ الحدُ العام يُساوي الحدَ نفسهُ.

$n=1$	$\times 3$	3	$+ 1$	4
$n=2$	$\times 3$	6	$+ 1$	7
$n=3$	$\times 3$	9	$+ 1$	10
$n=4$	$\times 3$	12	$+ 1$	13

إذن، المقدارُ الجبريُ المُعطى يُمثلُ الحدُ العامَ للمتالية، وهي خطية؛ لأنَّ الحدُ العامَ خطٌّ.
لإيجادِ الحدُ الخامس والسبعينَ، أُعوّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدُ العامَ:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \dots, n^2 + 3$

أُعوّضُ للتأكدِ أنَّ الحدودَ تنتُجُ من الحدُ العامَ:

رتبةُ الحد	الحد
$n=1$	$(1)^2 \rightarrow 1 \rightarrow +3 \rightarrow 4$
$n=2$	$(2)^2 \rightarrow 4 \rightarrow +3 \rightarrow 7$
$n=3$	$(3)^2 \rightarrow 9 \rightarrow +3 \rightarrow 12$
$n=4$	$(4)^2 \rightarrow 16 \rightarrow +3 \rightarrow 19$

الوحدة 5

إذن، المقدار الجبري المعطى يمثل الحد العام للمتتالية، وهي تربيعية؛ لأن الحد العام تربيع.

أعوّض $n = 75$ في الحد العام لإيجاد الحد الخامس والسبعين:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

- 3) $2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1$

أعوّض للتأكد أن جميع الحدود تنتهي من الحد العام:

رتبة الحد	الحد		
$n=1$	$(1)^3$	1	$+ 1$
$n=2$	$(2)^3$	8	$+ 1$
$n=3$	$(3)^3$	27	$+ 1$
$n=4$	$(4)^3$	64	$+ 1$

إذن، المقدار الجبري المعطى يمثل الحد العام للمتتالية، وهي تكعيبية؛ لأن الحد العام

تكعيبية. أعوّض $n = 75$ في الحد العام لإيجاد الحد الخامس والسبعين:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

اتحقق من فهمي

أبّين إذا كان المقدار الجبري المعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يمثل حداً عاماً لها أم لا، ثم أصنف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها:

- a) $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$
- b) $0, 3, 8, 15, \dots, n^2 - 1$
- c) $1.5, 8.5, 27.5, 64.5, \dots, n^3 + 0.5$

يمكن إيجاد الحد العام للمتتاليات الخطية والترباعية والتكعيبية بلاحظ العلاقة بين الحدود ورتبتها.

مثال 3

أَجِدُ الْحَدَّ الْعَامَ لِكُلِّ مُتَتَالِيَّةٍ مِمَّا يَأْتِي:

- 1 5 , 12 , 19 , 26 , 33 , ...

الْأَلِحْظُ أَنَّ حَدَوْدَ الْمُتَتَالِيَّةِ تَزَايِدُ بِمَقْدَارِ 7 :

$$5 , 12 , 19 , 26 , 33 , \dots$$

يُمْكِنُ مُبَدِئًا التَّعْبِيرُ عَنِ الْمُتَتَالِيَّةِ بِالْحَدَّ $7n$ ؛ لِأَنَّ تَزَايِدَ حَدَوْدَ الْمُتَتَالِيَّةِ بِمَقْدَارِ 7 فِي كُلِّ مَرَّةٍ يُذَكِّرُنِي بِحَقْقَانِي ضَرِبِ الْعَدَدِ 7، وَلَكِنْ عِنْدَ تَعْوِيْضِ $n = 1$ يَتَّسِعُ الْعَدَدُ 7، وَهُوَ أَكْبَرُ مِنَ الْحَدَّ الْأَوَّلِ بِ2؛ لِذَلِكَ أَطْرُوحُ الْعَدَدَ 2 مِنْ $7n$ ، وَبِذَلِكَ يَصْبُحُ الْحَدُّ الْعَامُ:

$$T(n) = 7n - 2$$

- 2 5 , 8 , 13 , 20 , 29 , ...

الْأَلِحْظُ أَنَّ الْفَرْقَ بَيْنَ كُلِّ حَدَّيْنِ مُتَتَالِيَّيْنِ غَيْرُ ثَابِتٍ. إِذْنُ، الْمُتَتَالِيَّةُ غَيْرُ نَاتِجَةٍ مِنْ جَمْعٍ (أَوْ طَرِحٍ) عَدَدٍ ثَابِتٍ لِحَدَوْدِهَا. الْأَلِحْظُ أَيْضًا أَنَّ الْمُتَتَالِيَّةَ غَيْرُ نَاتِجَةٍ مِنْ ضَرِبِ حَدَوْدِهَا فِي عَدَدٍ ثَابِتٍ.

أَفْسَرُ الْمُتَتَالِيَّةَ عَنْ طَرِيقِ تَرْبِيعِ رُتْبَةِ كُلِّ حَدٌّ:

1	4	9	16	25	$\dots n^2$	مَرْبِعَاتُ رُتْبِ الْحَدَوْدِ
5	8	13	20	29	$\dots ?$	الْحَدَوْدُ

بِالنَّظَرِ إِلَى نَاتِجِ تَرْبِيعِ رُتْبَةِ كُلِّ حَدٌّ، الْأَلِحْظُ أَنَّهُ إِذَا أُضِيفَ 4 إِلَى مُرْبَعِ رُتْبَةِ الْحَدٌّ تَنْتَجُ الْمُتَتَالِيَّةُ المطلوبةُ. وَبِذَلِكَ، فَإِنَّ الْحَدَّ الْعَامَ هُوَ:

$$T(n) = n^2 + 4$$

- 3 0 , 7 , 26 , 63 , 124 , ...

الْأَلِحْظُ أَنَّ الْفَرْقَ بَيْنَ كُلِّ حَدَّيْنِ مُتَتَالِيَّيْنِ غَيْرُ ثَابِتٍ. إِذْنُ، الْمُتَتَالِيَّةُ غَيْرُ نَاتِجَةٍ مِنْ جَمْعٍ (أَوْ طَرِحٍ) عَدَدٍ ثَابِتٍ لِحَدَوْدِهَا. الْأَلِحْظُ أَيْضًا أَنَّ الْمُتَتَالِيَّةَ غَيْرُ نَاتِجَةٍ مِنْ ضَرِبِ حَدَوْدِهَا فِي عَدَدٍ ثَابِتٍ، وَأَنَّهَا غَيْرُ نَاتِجَةٍ مِنْ تَرْبِيعٍ كُلِّ حَدٌّ. أَفْسَرُ الْمُتَتَالِيَّةَ عَنْ طَرِيقِ تَكْعِيبِ رُتْبَةِ كُلِّ حَدٌّ:

1	8	27	64	125	$\dots n^3$	مَرْبِعَاتُ رُتْبِ الْحَدَوْدِ
0	7	26	63	124	$\dots ?$	الْحَدَوْدُ

الوحدة 5

الاحظ أنه عند طرح 1 من مكعب رتبة كل حدد تتجزء المتالية المطلوبة.

$$T(n) = n^3 - 1$$

أتحقق من فهمي

أجد الحد العام لكل متالية مما يأتي:

- a) 8, 15, 22, 29, 36, ...
- b) 4, 7, 12, 19, 28, ...
- c) -1, 6, 25, 62, 123, ...

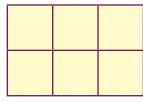
تظهر المتاليات أيضا في كثير من الأنماط الهندسية.

مثال 4

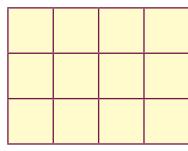
في ما يأتي نمط هندسي يمثل عدد المربعات في نماذجه متالية. أجد الحد العام لهذه المتالية.



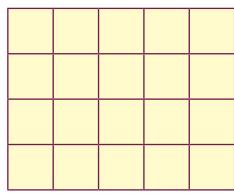
النموذج (1).



النموذج (2).



النموذج (3).



النموذج (4).

بالنظر إلى النمط، الاحظ أن عدد المربعات يشكل المتالية الآتية: ... 2, 6, 12, 20, ...

بالنظر إلى الحدود الأولى من المتالية، الاحظ أن كل حد فيها يساوي حاصل ضرب عرض المستطيل في طوله:

$$2, 6, 12, 20, \dots$$

1×2 2×3 3×4 4×5

$$\text{إذن، الحد العام هو: } T(n) = n(n + 1) = n^2 + n$$

أتحقق من فهمي

في ما يأتي نمط هندسي يمثل أعواد الثقب في نماذجه متالية. أجد الحد العام لهذه المتالية.



النموذج (1).



النموذج (2).



النموذج (3).



النموذج (4).



أَجِدُ الْحَدُودَ الْثَلَاثَةَ التَّالِيَّةَ لِلْمُتَتَالِيَّاتِ الْآتِيَّةِ:

1) $6, 11, 16, 21, \dots$

2) $-1, 6, 13, 20, \dots$

3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$

4) $-8, -7, -6, -5, \dots$

5) $-2, 1, 6, 13, \dots$

6) $4, 16, 36, 64, \dots$

7) $3, 9, 27, 81, \dots$

8) $3, 8, 18, 38, \dots$

9) $128, 64, 32, 16, \dots$

أَجِدُ أَوَّلَ خَمْسَةَ حَدَوِيدَ لِكُلِّ مُتَتَالِيَّةٍ مُعَطَى حَدُودَهَا الْعَامُ فِي مَا يَأْتِي، ثُمَّ أَصْنِفُهَا إِلَى مُتَتَالِيَّةٍ خَطِّيَّةٍ، أَوْ تَرِيَعِيَّةٍ، أَوْ تَكَعِيبِيَّةٍ:

10) $n + 3$

11) $3n - 1$

12) $4n + 5$

13) $n^2 - 1$

14) $n^2 + 2$

15) $200 - n^2$

16) $n^3 + 1$

17) $\frac{n^3}{2}$

18) $3n^3 - 1$

أَجِدُ الْحَدَّ الْعَامَ لِكُلِّ مُتَتَالِيَّةٍ مِمَّا يَأْتِي:

19) $21, 24, 27, 30, 33, \dots$

20) $1, 9, 17, 25, 33, \dots$

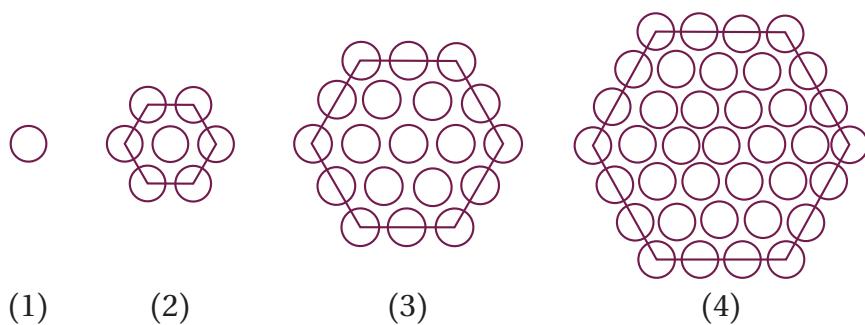
21) $10, 13, 18, 25, 34, \dots$

22) $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \dots$

23) $6, 13, 32, 69, 130, \dots$

24) $1, 15, 53, 127, 249, \dots$

أَجِدُ عَدَدَ الدَّوَائِرِ فِي النَّمَوْذِجِ الْخَامِسِ مِنَ النَّمَطِ الْهَنْدَسِيِّ الْآتِيِّ: 25)



(1)

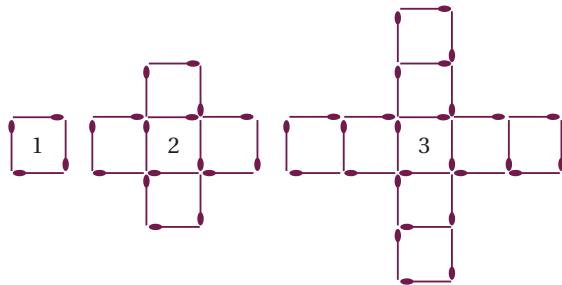
(2)

(3)

(4)

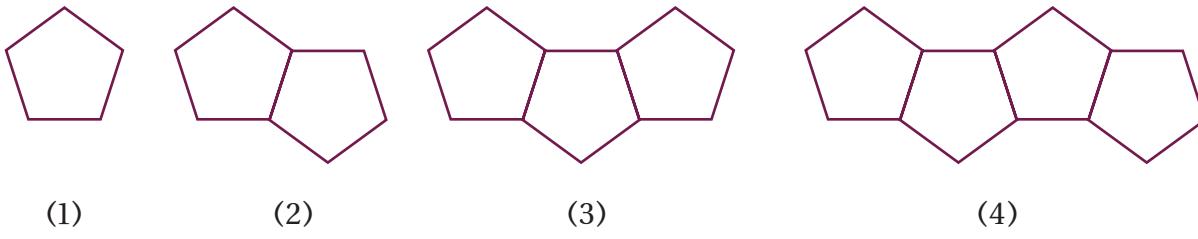
الوحدة 5

في ما يأتي نمط هندسي يمثل عدد أعداد الشعاب في نماذجه متتالية، أجد الحد العام لهذه المتتالية. 26



أكمل الجدول الآتي بالاعتماد على نماذج النمط الهندسي أدناه: 27

النموذج	(1)	(2)	(3)	(4)
المحيط	5	8		



أجد محيط نموذج يحتوي n من الأشكال الخمسية. 28

أجد محيط نموذج يحتوي 50 شكلاً خماسياً. 29

ما أكبر عدد من الأشكال الخمسية التي يمكن استعمالها لعمل نموذج محيطه أقل من 1000cm؟ 30

مهارات التفكير العليا



تحدد: إذا كان الحد العام للمتتالية: ... 6, 16, 30, 48, 70، حيث a, b عدادان حقيقيان، 31

فأجد قيم a, b .

تحدد: أجد أول ثلاثة حدود لمتتالية خطية، إذا كان مجموع هذه الحدود 12، وحاصل ضربها 28

مسألة مفتوحة: أجد ثلاثة متتاليات تبدأ بـ 1، بحيث تكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية. 33

اختبار نهاية الوحدة

7) خط التقارب الأفقي للاقتران $y = \frac{3}{4-3x}$

هو:

- a) $y = 0$
- b) $y = 7$
- c) $y = 4$
- d) $y = -1$

8) الحد العاشر في المتالية ... 0, 2, 6, 12, 20, ... هو:

- a) 90
- b) 95
- c) 97
- d) 99

9) مجال الاقتران $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$

- a) $\{x | x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$
- b) $\{x | x \neq -5, x \neq 2\}$
- c) $\{x | x \neq 5\}$
- d) $\{x | x \neq -2, x \neq 5\}$

10) إذا كان $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 6x^3 - 7x + 3$

فأحد $x^2f(x) + g(x)$

11) إذا كان $h(x) = 3x^2 - 4x$, $j(x) = 4x^3 + 2x + 5$

فأحد $h(x) \cdot j(x)$

12) أقسّم $(2x+3)(8x^3+12x-5)$ على

13) أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{4}{2-x}$, ثم أمثله بيانياً، محدداً مجاله، ومداه.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1) الحد العام (T_n) للمتالية: ..., 11, 20, 35, 56, ... هو:

- a) $T_n = n^2 + 6n + 4$
- b) $T_n = 3n^2 + 8$
- c) $T_n = 2n^2 + 9$
- d) $T_n = n^2 + 4n + 6$

2) إذا كان $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$, فإن قيمة $f(-2)$ هي:

- a) -22
- b) -15
- c) 9
- d) 29

3) إذا كان $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6$, $g(x) = 5x^2 - 7x + 4$

فإن ناتج $f(x) - g(x)$ هو:

- a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
- b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$
- c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$
- d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4) إذا كان $g(x)$ كثير حدود من الدرجة السادسة، و $h(x)$

كثير حدود من الدرجة الثانية، فإن درجة ناتج قسمة

$h(x)$ على $g(x)$ هي:

- (a) الثالثة.
- (b) الأولى.
- (c) الثامنة.
- (d) الرابعة.

5) إذا كان $f(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2 - 2$, فإن قيمة

$(h \circ f)(3)$ هي:

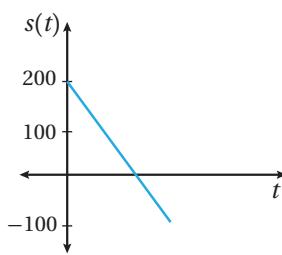
- a) 4
- b) 7
- c) 14
- d) 16

6) إذا كان $f(x) = 8 - 2x$, فإن قيمة $f^{-1}(4)$ هي:

- a) 0
- b) -6
- c) -2
- d) 2

اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية

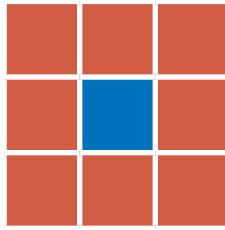


يظهر في الشكل المجاور منحنى اقتران الموضع $s(t)$ لجسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموضع بالمتر و t الزمن بالثانية.

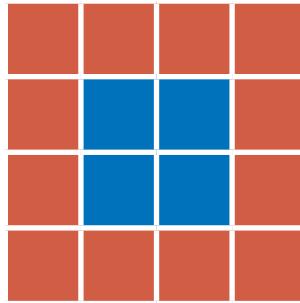
- 22** إذا وصل الجسم إلى الموضع $-100 = s$ بعد 6 ثوانٍ من بدء حركته، فأكتب قاعدة الاقتران $s(t)$.

- 23** ما الزمن الذي استغرقه الجسم منذ بدء حركته حتى وصل إلى نقطة الأصل؟

رتبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءً وزرقاءً كما في الشكلين الآتيين:



الشكل (1).



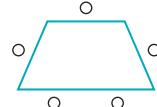
الشكل (2).

- 24** إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراء في الشكل n ؟

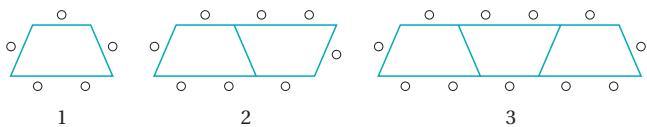
- 25** ما عددُ البطاقاتِ الزرقاء فيه؟

- 26** استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحد أشكالِ هذا النمط. كم عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراء والزرقاء المستعملة؟

يوجُدُ في قاعةِ طعامٍ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلٍ شبيهٍ بحرفِ \square . وكل طاولةٍ تسعُ لخمسةٍ طلبةٍ كما في الشكل الآتي:



لاحظُ مشرِفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبة يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ الملاصِقِ بعضُها البعضٍ كما في الشكل الآتي:



- 14** أملأ الفراغَ بما هو مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

عددُ الطاولاتِ الملاصِقة*					عددُ الطلبة
5	4	3	2	1	

- 15** أجدُ الحدَّ العامَ.

- 16** ما عددُ الطلبةِ الذين يُمكِنُهمُ الجلوسُ حولَ 13 طاولةً مُلاصِقةً؟

- 17** تنوَّي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلَ لـ 200 طالبٍ. كم طاولةً مُلاصِقةً تلزمُ لذلك؟

- إذا كانَ $-1 = f(x) = 4x - 3$, $g(x) = \frac{1}{x+1} + 2$, $x \neq -1$, فاجِدُ:

18 $g^{-1}(x)$

19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

- 21** أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$, مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ من: $(f(x), f^{-1}(x))$, و $(f^{-1}(x), f(x))$.

الوحدة 6

المشتقات

Derivatives

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُستعمل الاشتتقاق لإيجاد الميل عند أي نقطة على المنحنى؛ ما يُسهل الحسابات في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي يمكن نمذجتها باستعمال الاقترانات. ومن ذلك، حساب سرعة سيارة عند لحظة ما، وحساب أعلى ارتفاع تبلغه كرة عند ركلها إلى الأعلى.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- ◀ إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- ◀ إيجاد القيم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ◀ حل مسائل حياتية عن القيم العظمى والصغرى.

تعلّمت سابقاً:

- ✓ تعريف المماس، والقاطع، ونقطة التماس.
- ✓ حساب ميل المستقيم.
- ✓ معادلة الخط المستقيم.
- ✓ منحنى المسافة - الزمن، ومنحنى السرعة - الزمن.

مشروع الوحدة

عمل صندوق حجم أكبر مما يمكن

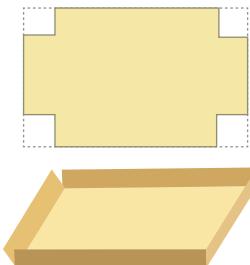
حساب أكبر حجم ممكن لصندوق باستعمال المشتقة.
ورقان من الكرتون المقوى مستطيلات الشكل من المقاس نفسيه، مسطرة، مقص،
برمجية جيوجبرا.

فكرة المشروع

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:



- 1 أقصى أربعة مربعات متطابقة.
- 2 أطبق الأطراف بعضها على بعض، فينتج صندوق على شكل متوازي مستطيلات، مفتوح من الأعلى.
- 3 أحسب حجم الصندوق، بقياس كل من الطول، والعرض، والارتفاع باستعمال المسطرة. هل يمكن عمل صندوق أكبر حجماً باستعمال ورقة من المقاس نفسه؟
- 4 أعيد الخطوات السابقة، ولكن بطريقة جبرية، وافتراض أن طول ضلع المربع المقصوص من كل زاوية يساوي x ، وأكتب ثلاثة مقادير جبرية تمثل الطول والعرض والارتفاع، ثم استعملها لإيجاد حجم الصندوق بدالة x .
- 5 أكتب اقتراناً يمثل حجم الصندوق $V(x)$.
- 6 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي يكون عندها الحجم أكبر مما يمكن.
- 7 أمثل اقتراناً الحجم بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا.
- 8 أتحقق من النقطة التي يكون عندها الحجم أكبر مما يمكن باستعمال برمجية جيوجبرا، وذلك بالضغط على أيقونة من شريط الأدوات، ثم نقر المنحنى، فتظهر إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.



عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجتمعي عرضاً تقديمياً أبين فيه:

- 1 النتائج التي توصل إليها كل فرد في المجموعة.
- 2 بعض الصعوبات التي واجهتها المجموعة في أثناء العمل بالمشروع، وكيف تجاوزتها.
- 3 مقترحاً لتطبيق حيatic أو علميًّا تستعمل فيه فكرة المشروع.

استكشاف ميل مماس المنحنى Exploring the Slope of The Tangent

يمكنني استعمال برمجية جيوجبرا لوصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير حدود.

نشاط

أمثل الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أرسم مماساً عند نقطة متحركة على منحناء، واصفًا التغير في قيمة ميل المماس.

الخطوة 1: أمثل منحنى الاقتران بيانيًا باتباع الآتي:

- أكتب $f(x)$ في شريط الإدخال، ثم أكتب قاعدة الاقتران بنقر المفاتيح الآتية:

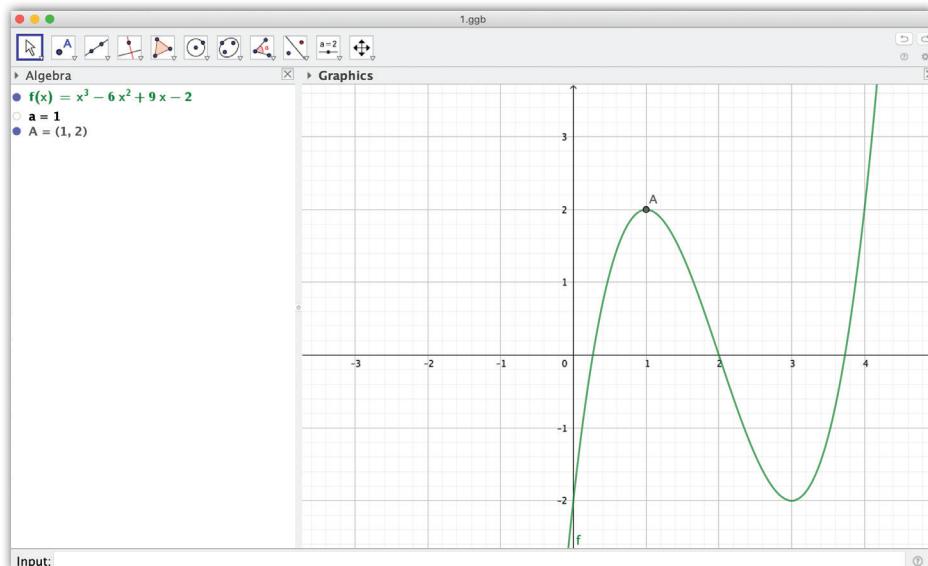


الخطوة 2: أحدد نقطة متحركة A على منحنى الاقتران باتباع الآتي:

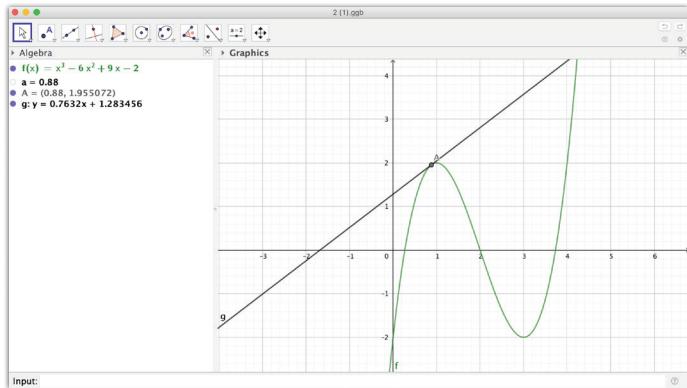
- أكتب $a = 1$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زر \leftarrow .

- أكتب $(a, f(a)) = (a, a^3 - 6a^2 + 9a - 2)$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زر \leftarrow .

يمكنني تغيير موقع النقطة A على منحنى الاقتران بنقرها باستمرار، ثم تحريكها.



الوحدة ٦



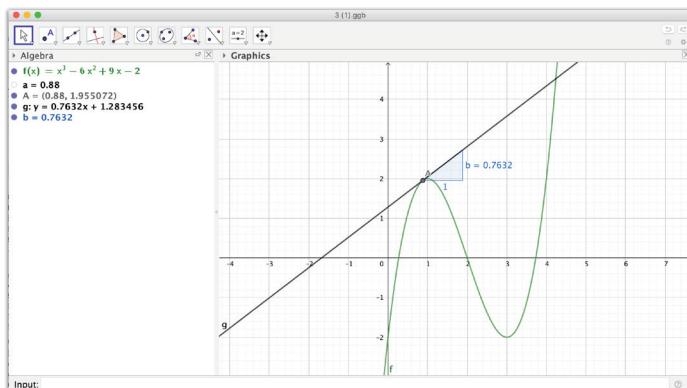
الخطوة ٣: أرسم مماساً للمنحنى عند النقطة A .

- أكتب $\text{Tangent}(A, f)$ في شريط الإدخال، ثم انقر زر

الإدخال، ثم انقر زر

- الاحظ أنَّ برمجية جيوجبرا تسمى

المماس g بصورةٍ تلقائية.



الخطوة ٤: أجد ميل المماس عند النقطة A .

- أكتب $\text{Slope}(g)$ في شريط الإدخال،

ثم انقر زر

الخطوة ٥: أحرِّك النقطة A ، ملاحظاً التغيير في قيمة

الميل، ثم أجيب عن الأسئلة الآتية:

- متى يكون ميل المماس موجباً؟
- متى يكون ميل المماس سالباً؟
- متى يكون ميل المماس صفرًا؟

أتدرب

أمثل كلاً من الاقترانات الآتية بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أرسم مماساً لكُل منها عند نقطة متحرّكة، واصفاً التغيير في قيمة ميل المماس:

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2) $h(x) = 3-2x-x^2$

3) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

الدرس

1

تقدير ميل المنحنى Estimating Slope

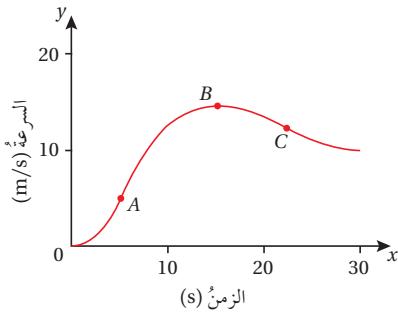
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم

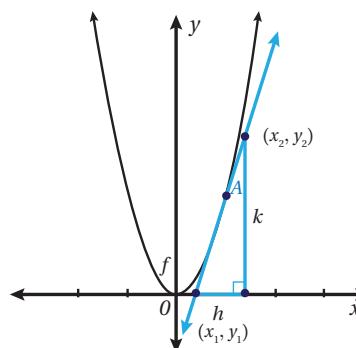


تقدير ميل المنحنى.

السرعة المتجهة للحظية، التسارع اللحظي.

يُمثل الشكل المجاور سرعة سيارة في 30 ثانية.

- هل يمكن إيجاد تسارع السيارة عند النقاط A, B, C ؟
- عند أي النقاط يكون التسارع موجباً؟
- عند أي النقاط يكون التسارع سالباً؟
- عند أي النقاط يكون التسارع صفراء؟



تعلمت سابقاً كيفية حساب ميل المستقيم، فهل يمكن إيجاد ميل منحنى ليس مستقيماً؟

إن ميل المنحنى عند نقطة واقعه عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإن ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه كما في الشاط المذكور آنفاً قبل الدرس.

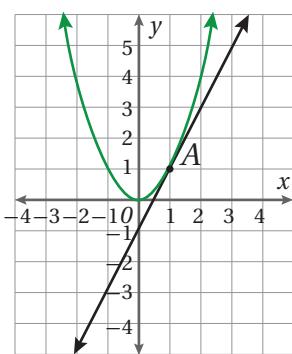
أفكار

لماذا يكون ميل المستقيم ثابتاً عند أي نقطة عليه؟

لإيجاد ميل منحنى عند نقطة ما، أرسم مماساً عند تلك النقطة، ثم أجد ميل المماس باستعمال إحداثيات نقطتين تقعان عليه: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ، وذلك بالتعويض في صيغة ميل المستقيم.

$$x_2 - x_1 \neq 0, m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{h}$$

مثال 1



يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $y = x^2$ عند النقطة $A(1, 1)$.
أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .

الوحدة ٦

أُحدِّد نقطيْن على المماس من الرسِّم: $(-1, 0)$, $(0, 3)$ و $(2, -5)$, ثُمَّ أحسب الميل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

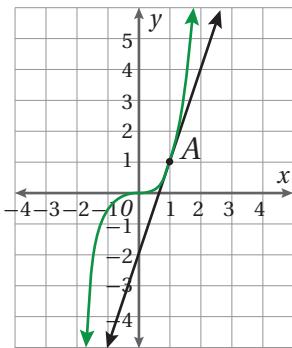
صيغة الميل

$$= \frac{3 - (-1)}{2 - 0}$$

بالتعمير

$$= 2$$

بالتبيين



إذن، ميل منحني الاقتران عند النقطة A هو 2

أتحقق من فهمي

يُمثِّل المستقيم في الشكل المجاور مماساً لمنحنى

الاقتران $y = x^3$ عند النقطة $A(1, 1)$.

أُحدِّد ميل منحني الاقتران عند النقطة A .

إذا لم يكن المماس مرسوماً عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها، فإنه يُرسَّم باستعمال المسطرة. وبما أنَّ الرسم اليدوي ليس دقيقاً، فإنَّ ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلاً عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى، عندئذ يكون الناتج قيمةً تقريريةً لميل المنحنى.

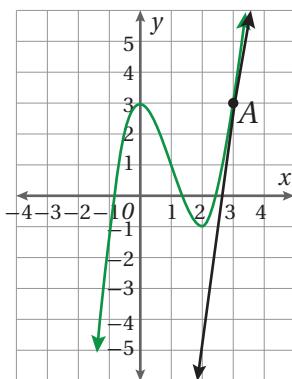
إرشاد

استعمل شبكة المربعات لتمثيل المنحنيات بيانياً بدقة.

مثال 2

أُقدِّر ميل منحني الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ عند كل نقطة مما يأتي:

النقطة 1 $A(3, 3)$



الخطوة 1: أرسم مماساً لمنحنى عند النقطة $A(3, 3)$ باستعمال المسطرة.

الخطوة 2: أُحدِّد نقطيْن على المماس $A(3, 3)$, $C(2, -5)$, ثُمَّ أُحدِّد الميل.

أتعلم

يكون ميل المنحنى عند نقطة عليه موجباً إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية حادة مع اتجاه محور x الموجب.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{-5 - 3}{2 - 3}$$

بالتعمير

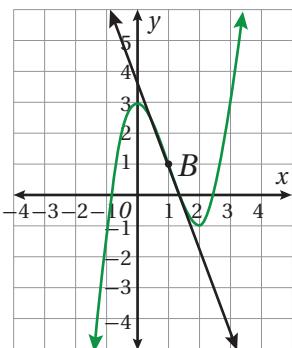
$$= 8$$

بالتبيين

إذن، ميل منحني الاقتران عند النقطة A هو 8 تقريرياً.

أتعلم

يكون ميل المنحنى عند نقطة على سالب إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية منفرجة مع اتجاه محور x الموجب.



.B(1, 1) النقطة (2)

أرسم مماساً للمنحنى عند النقطة B , ثم أحدد نقطتين عليه $(0, 3.8), B(1, 1), E(0, 3.8)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{1 - 3.8}{1 - 0}$$

بالتعويض

$$= -2.8$$

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة B هو -2.8 .

متى يكون ميل المنحنى صفرًا؟

3 أكتب معادلة المماس المار بالنقطة $B(1, 1)$

$$y - b = m(x - a)$$

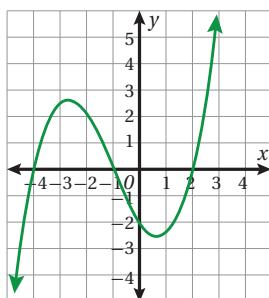
معادلة المماس

$$y - 1 = -2.8(x - 1)$$

بت夷سيض النقطة $B(1, 1)$ و $m = -2.8$

$$y = 3.8 - 2.8x$$

بالتبسيط

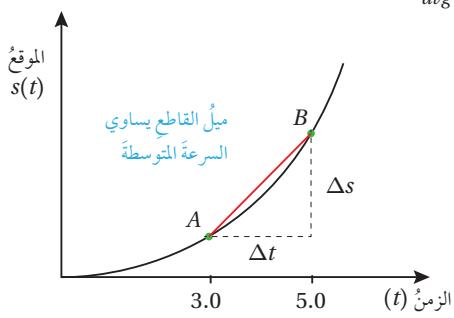


أتحقق من فهمي

أقدر ميل منحنى الاقتران الممثل بيانياً في الشكل المجاور عند كل من نقطتين: $A(-4, 0), B(0, -2)$.

تعرفت سابقاً أنَّ منحنى الموقع – الزمن يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة ثابتة، وأنَّه لا يكون مستقيماً عند الحركة بسرعة متغيرة. ويمكن حساب السرعة المتجهة المتوسطة \bar{v} لجسم متحرك في فترة زمنية، وذلك بقسمة التغيير في الموقع Δs على التغيير في الزمن Δt :

$$\bar{v}_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



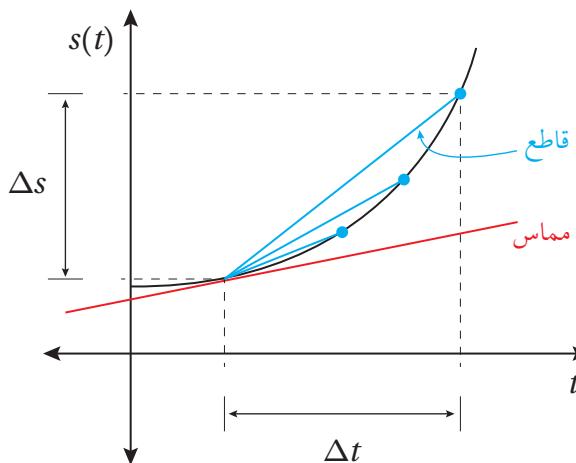
بالنظر إلى منحنى الموقع – الزمن المجاور لجسم يتحرك في مسار مستقيم يتبيَّن أنَّ السرعة المتجهة المتوسطة من اللحظة $t = 3$ إلى اللحظة $t = 5$ تساوي ميل القاطع الذي يمرُّ بالنقطتين A و B على المنحنى.

رموز رياضية

- يُرمز إلى التغيير في قيمة s بالرمز Δs
- يشير الرمز \bar{v} إلى سرعة الجسم المتوسطة في فترة زمنية ما، مثل $[t_1, t_2]$.

الوحدة 6

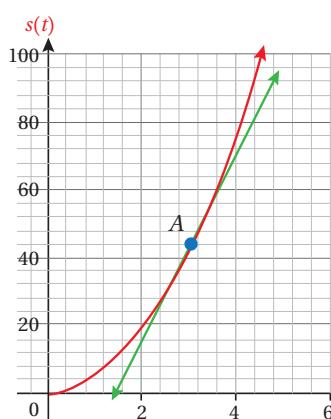
لكنَّ السرعة المتجهة المتوسطة لا تقدِّم معلوماتٍ كافيةً في كثيرٍ من المواقف، مثل تحديد السرعة المتجهة لسيارةٍ لحظةً مرورها أمام الرادار؛ فتلزمُ عندئذ السرعة المتجهة اللحظية (instantaneous velocity) التي يمكن إيجادُها بتقليلِ الفترة الزمنية للسرعة المتجهة المتوسطة حتى تصبح نقطةً (لحظةً) كما في الشكل الآتي، فيصبح القاطع الذي يمرُّ ب نقطتين على المنحنى مماساً له عند نقطةٍ واحدةٍ.



بما أنَّ ميل المماس يساوي ميل المنحنى عند نقطة التماس، فإنَّ السرعة المتجهة اللحظية عند لحظةٍ ما تساوي ميل منحنى اقتران الموضع - الزمن عند تلك اللحظة.

مثال 3

يُمثلُ الاقتران $s(t) = 4.9t^2$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أقدر سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.



الخطوة 1: أُعوّض $t = 3$ بالاقتران لتحديد موقع الجسم بعد 3 ثوانٍ، فتتّجُّ النقطة $A(3, 44.1)$ التي تمثلُ نقطة التماس.

الخطوة 2: أُمثّل منحنى الاقتران $s(t) = 4.9t^2$ بيانياً، ثم أرسمُ المماس عند النقطة $A(3, 44.1)$.

رموز رياضية

يشير الرمز v إلى السرعة المتجهة، التي تسمى اختصاراً في هذا الكتاب (السرعة).

الخطوة 3: أُحدِّد النقطتين $A(3, 44.1)$ و $B(2, 16)$ على المماس، ثم أستعملهما لحساب الميل.

$$m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$$

بالتعويض

$$= 28.1$$

بالتبسيط

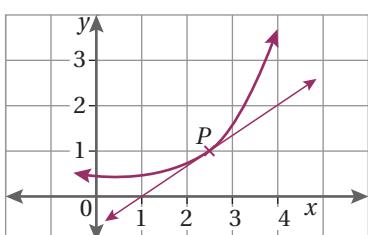
إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة $A(3, 44.1)$ هو 28.1 تقريرًا. ومنه، فإن سرعة الجسم اللحظية بعد 3 ثوانٍ هي 28.1 m/s

أتحقق من فهمي

يُمثل الاقتران $s(t) = t^2 + t$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أقدر السرعة اللحظية بعد 5 ثوانٍ.

أفكّر

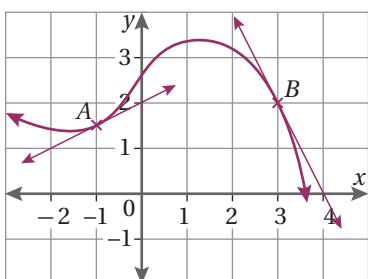
إن حساب السرعة اللحظية برسم المماس وتحديد نقطتين عليه أمر صعب، فهل تجد طريقةً أسهل وأدقًّا لحساب الميل؟



أتدرب وأحل المسائل

1 يُمثّل المستقيم في الشكل المجاور مماسًا لمنحنى اقتران عند النقطة $P(2.5, 1)$.

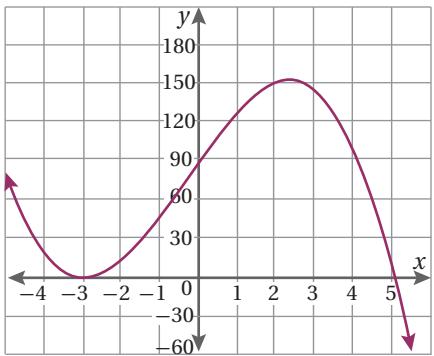
أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة P .



2 في الشكل المجاور، رسم مماسان لمنحنى اقتران عند النقطتين $B(3, 2)$ و $A(-1, 1.5)$.

أجد ميل منحنى الاقتران عند كل من A و B .

الوحدة
٦



أَفَدُرْ مِيلَ مِنْحَنِي الْاقْتَرَانِ الْمُبَيِّنِ جَانِبًا
عِنْدَ النَّقْطَةِ (2, 150)، وَالنَّقْطَةِ (4.5, 60).

أستعمل جدول القيم الآتي للإجابة عن الأسئلة (4-7) :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

أمثل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانياً في الفترة $0 \leq x \leq 4$

أرسُمْ مماسًا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. 5

أقدر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(3, 3.5)$.

7 ما إحدايات النقطة التي يكون ميل المنحنى عندَها صفرًا؟

: أكمل جدول قيم الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ الآتي، ثم استعمله لحل المسائل (8-10).

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$		0.01	0.1		0.8		

8 أرسم منحني الاقتران $f(x)=0.1x^3$ في الفترة $0 \leq x \leq 3$

أرسُم ممَّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ (2, 0.8).

أقدر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(2, 0.8)$.

$$\therefore (-1, 5) \text{ عند النقطة } y = 3 + 2x^2 \quad 12$$

$$\text{.(1, 5) عند النقطة } y = 4x^2 + 1 \quad 11$$

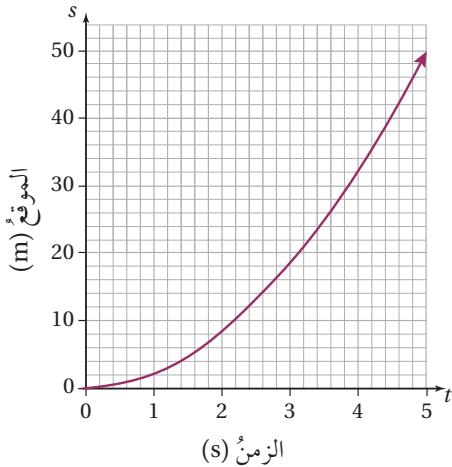
.(0, 1) عند النقطة $y = 5x^3 + 1$ 14

$$\therefore (-1, 0) \text{ عند النقطة } y = 1 - x^2 \quad 13$$

. (1, 6) عند النقطة $y = 8 - 2x$ 16

. (2, 5) عند النقطة $y = 9 - x^2$ 15

61



درجاتٌ ناريةٌ: بدأْت دراجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مساريِّ مستقيمٍ. وبيّنَ المنحنى المجاورُ موقعَ الدراجةِ خلالَ أولِ 5 ثوانٍ منْ بدءِ حركتها:

أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعيناً بالجدولِ الآتي: 17

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	0	2	8	18	32	50

أرسمُ مماساً للمنحنى عندما $t = 2$. 18

أقدرُ سرعةَ الدراجةِ بعدَ ثانيتينِ منْ بدءِ الحركة. 19

أقدرُ سرعةَ الدراجةِ بعدَ 4 ثوانٍ منْ بدءِ الحركة. 20

أحسبُ السرعةَ المتوسطةَ \bar{v} للدراجةِ في الفترةِ الزمنيةِ $[1, 3]$. 21

سياراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ سرعةَ سيارةٍ تحرُكُ في مسارِ مستقيمٍ وفي اتجاهٍ واحدٍ، فسجلَ موقعَ السيارةَ بالنسبةَ لنقطة انطلاقها في لحظاتٍ زمنيةٍ محددةٍ كما في الجدولِ الآتي، ثمَ استعملَ القوانينِ الفيزيائيةِ المتعلقةَ بالقوىِ المؤثرةَ على السيارةِ لكتابَةِ معادلةٍ جبريةٍ تمثلُ العلاقةَ بينَ موقعَ السيارةِ والزمنِ على النحوِ الآتي: $s(t) = at + bt^2$ ، حيثُ a و b عدَدانِ ثابتانِ:

الزمنُ t (ثانية)	0	1	2	3	4
الموقعُ s (متر)	0	5	12	21	32

أرسمُ منحنى اقترانِ الموقعِ - الزمنِ $s(t)$. 22

أحدُ قيمةَ كُلِّ مِنْ: a و b . 23

فيزياءٌ: يمثلُ الاقترانُ $s(t) = 3t - t^2$ موقعَ جسمٍ يتحرُكُ في مسارِ مستقيمٍ، حيثُ s الموضعُ بالمترِ، و t الزمانُ بالثانية. أقدرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

تبيرٌ: أقدرُ ميلَ منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كُلِّ منَ النقاطِ الآتية، مبرّراً إيجابيًّا: 26

- نقطتاً تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x .

- نقطةً تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y .

مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانية، ثمَ أمثلُهُ بياناً، مقدّراً ميلَهُ عندَ نقطتينِ مُتعاكستينِ عليهِ: 27

$$(a,b), (-a, b)$$

الدرس

2

الاشتقاق

Differentiation



إيجاد مشتقه كثيرات الحدود.



المشتقة.



مسألة اليوم



يُمثّل الاقتران $s = 80t - 5t^2$ موقع منطاد بالنسبة إلى سطح الأرض
بالمتر بعد t ثانية من إطلاقه. ما سرعة المنطاد بعد 10 ثوانٍ من إطلاقه؟

تعرّفت في الدرس السابق كيفية إيجاد الميل أو تقديره، وهي طريقة ليس سهلةً، وتحتاج إلى دقة عند رسم المماس. سأعرّف في هذا الدرس طريقة جبرية أسهل لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه من دون حاجة إلى رسم المماس.

عند إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند نقاط مختلفة عليه باستعمال طريقة ميل المماس التي تعرّفتها سابقاً، وتنظيم القيم في الجدول الآتي، سلاحوظ أن ميل المنحنى عند أي نقطة (x, y) يساوي قيمة x مضروبة في العدد 2؛ أي إن الميل m يساوي $2x$.

(x, y)	(-2, 4)	(-1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(3, 9)	(4, 16)	(5, 25)
m	$-4 = -2 \times 2$	$-2 = -1 \times 2$	$0 = 0 \times 2$	$2 = 1 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

وبالمثل، سأجد أن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ عند أي نقطة (x, y) على منحناه هو $3x^2$.
بوجه عام، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^n$ عند أي نقطة (x, y) عليه هو nx^{n-1} .
مشتقه (derivative) الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعه على منحناه هي ميل المنحنى عند تلك النقطة، ويرمز إليها بالرمز $f'(x)$.

رموز رياضية

تُستعمل الرموز $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ للتعبير عن مشتقه
 $y = f(x)$ الاقتران

مشتقه اقتران القوة

مفهوم أساسي

- بالكلمات:** عند اشتقاق الاقتران $f(x) = x^n$ ، فإن أس x في المشتقه يكون أقل بواحد من أس x في الاقتران الأصلي، وإن معامل x في المشتقه يساوي أس x في الاقتران الأصلي.

- بالرموز:** إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 1

أَجِدْ مشتقةَ كُلّ اقترانٍ ممّا يأتِي:

1) $f(x) = x^8$

$$f'(x) = 8x^{8-1}$$

$$f'(x) = 8x^7$$

قانونُ مشتقةِ القوة

بالتبيين

2) $f(x) = x^5$

$$f'(x) = 5x^{5-1}$$

$$f'(x) = 5x^4$$

قانونُ مشتقةِ القوة

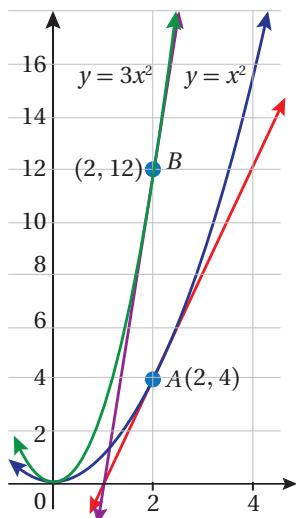
بالتبيين

أتحقق من فهمي

أَجِدْ مشتقةَ كُلّ اقترانٍ ممّا يأتِي:

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = x^{11}$



من المعلوم أنَّ قيمَ y للاقتران $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالَ قيمِ y التي تُناظِرُها للاقتران $y = x^2$. وعليه، فإنَّ ميلَ منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطة $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقتران $y = x^2$ عندَ النقطة $(2, 4)$. وهذا يعني أنَّ مشتقة $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقة (x^2) ; أيْ $(3 \times 2x)$.

بوجهٍ عامًّ، فإنَّ مشتقةَ الاقتران $f(x) = ax^n$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌ، هي $f'(x) = a \times nx^{n-1}$.

مشتقةُ مضاعفاتِ القوَّةِ ومشتقةُ الثابتِ

مفهومٌ أساسيٌّ

- مشتقةُ مضاعفاتِ القوَّةِ: إذا كانَ $f(x) = ax^n$ ، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالِبٍ، فإنَّ

$$f'(x) = anx^{n-1}$$

- مشتقةُ الثابتِ: إذا كانَ $f(x) = c$ ، حيثُ c عددٌ حقيقيٌ، فإنَّ $f'(x) = 0$; أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

أفكُرْ

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةِ لمشتقةِ الاقترانِ الخططيِّ؟

الوحدة ٦

مثال 2

أَجِدُّ مشتقةَ كُلِّ اقتراٍنِ ممّا يأتِي:

١) $f(x) = 2x^4$

$$f'(x) = 2(4x^{4-1})$$

$$f'(x) = 8x^3$$

قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

بالتبسيط

٢) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$$

قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

بالتبسيط

٣) $f(x) = -2x$

$$f'(x) = -2(x^{1-1})$$

$$f'(x) = -2$$

قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوة

بالتبسيط

٤) $f(x) = 4$

$$f'(x) = 0$$

قانونُ مشتقةِ الثابت

أتحققُ من فهمي

أتذكرُ

ميلُ الاقترانِ الثابت
يساوي صفرًا.

أَجِدُّ مشتقةَ كُلِّ اقتراٍنِ في ما يأتِي:

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

مفهومٌ أساسيٌّ

• بالكلماتِ: مشتقةُ مجموعِ كثيرٍ الحدوٍد تساوي مجموعَ مشتقتيهما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرٍ الحدوٍد تساوي الفرقَ بينَ مشتقتيهما.

• بالرموزِ: إذا كانَ $(g(x) \pm h(x))'$, حيثُ $f(x) = g(x) \pm h(x)$ كثيراً حدوٍد، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مثال 3

أَجِدُ مشتقةَ كُلِّ اقْتَرَانٍ مَمَّا يَأْتِي:

1) $f(x) = x^2 - 6x$

$$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

بالتَّبَسيطِ

إرشاد

أَسْتَعْمَلُ قواعدَ
الاشتقاقِ الْمُنَاسِبَةَ
لِإِيجادِ المشتقَةِ.

2) $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$$

$$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$$

قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

بالتَّبَسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كُلِّ مِنَ الاقْتَرَانِيْنِ الْأَتِيِّيْنِ:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$

أُلْاحِظُ مِنَ الْأَمْثَلَةِ السَّابِقَةِ أَنَّ مشتقَةَ الاقْتَرَانِ هِيَ اقْتَرَانٌ جَدِيدٌ يُمَثِّلُ قِيمَةً مِيلٍ مِنْحَنِيَ الاقْتَرَانِ الأَصْلِيِّ عَنْدَ قِيمَاتٍ مُخْلِفَةٍ؛ لَذَا يُمْكِنُ إِيجادُ مِيلٍ مِنْحَنِيَ الاقْتَرَانِ عَنْدَ أَيِّ نَقْطَةٍ عَلَيْهِ، بِتَعْوِيضِ الإِحْدَاثِيِّ x لِتَلْكَ النَّقْطَةِ فِي اقْتَرَانِ المشتقَةِ.

مثال 4

إِذَا كَانَ $5x^2 - 18x + 5 = f(x)$ ، فَأَسْتَعْمَلُ المشتقَةَ لِإِيجادِ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

1) مِيلُ مِنْحَنِي $f(x)$ عَنْدَ النَّقْطَةِ $(1, -10)$.

$$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$$

الاقْتَرَانُ الأَصْلِيُّ

$$f'(x) = 6x - 18$$

بَاشْتِقَاقِ الاقْتَرَانِ

$$f'(1) = 6(1) - 18$$

بِتَعْوِيضِ قِيمَةِ $x = 1$

$$= -12$$

بِالتَّبَسيطِ

إِذْنُ، مِيلُ مِنْحَنِيَ الاقْتَرَانِ $f(x)$ عَنْدَ النَّقْطَةِ $(1, -10)$ هُوَ -12

أتَعْلَمُ

يُسْتَعْمَلُ الرَّمْزُ $f'(a)$
لِتَعْبِيرِ عَنْ مشتقَةِ $f(x)$
عِنْدَما $x = a$.

الوحدة 6

قيمة x التي يكونُ عندها ميل منحنى الاقترانٍ صفرًا. ②

$$\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & \text{بمساواة المشتقة بالصفر} \\ 6x - 18 = 0 & \text{بتعميّض قيمة المشتقة} \\ 6x = 18 & \text{بجمع 18 للطرفين} \\ x = 3 & \text{بقسمة الطرفين على 6} \end{array}$$

إذن، قيمة x التي يكونُ عندها ميل منحنى الاقترانٍ صفرًا هي $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كان $9 - 25x^2 + 5x^3 = f(x)$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كُلّ ممّا يأتي:

(a) ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

(b) قيمة x التي يكونُ عندها ميل منحنى الاقترانٍ صفرًا.

معلومة

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةً اقترانِ الموقِع عندَ لحظةٍ ما.
التسارُعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةً اقترانِ السرعة عندَ لحظةٍ ما.

تعَرَّفْتُ سابقاً أنَّ ميل منحنى الموقِع - الزمِن في لحظةٍ ما (عندَ نقطَةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةُ اللحظيةُ عندَ تلك النقطَة، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميل منحنى السرعة - الزمِن في لحظةٍ ما يساوي التسارُعُ اللحظي.

أُسْتَطِيعُ الآنَ إيجاد كُلّ من السرعةُ اللحظية، والتسارُعُ اللحظيُّ باستعمالِ المشتقة بسهولةٍ من دونِ حاجةٍ إلى تقديرٍ ميل المنحنى باستعمالِ المماسٍ كما في الدرسِ السابق.

مثال 5: من الحياة



يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t^2 - 0.9$ موقعَ جسمٍ يتحرَّكُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

أَجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِه. ①

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ الموقِع. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هو $v(t)$.
إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوبُ هو $v(3)$ ، التي تُمثِّلُ السرعةُ اللحظيةُ عندما $t = 3$.

$$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5 \quad \text{مشتقَةُ اقترانِ الموقِع}$$

$$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5 \quad \text{تعريفُ اقترانِ السرعة}$$

$$\begin{aligned} v(3) &= s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5 & t = 3 \\ &= 14.7 \text{ m/s} & \text{بتعميّض 3} \\ & & \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بدءِ حركتِه هي 14.7 m/s .

أتذكر

يرمزُ للثوانِي بالرمزِ s
وهو الحرفُ الأولُ منْ
كلمةِ second وتعني
ثانيةً.

2 أَجِدُ تسارعَ الجَسْمِ بَعْدَ 5 ثوانيٍ مِنْ بَدْءِ حَرْكَتِهِ.
التسارعُ هُوَ مشتقةُ اقْتِرَانِ السرعةِ. أَفْتَرُضُ أَنَّ اقْتِرَانَ التسارعِ هُوَ $a(t)$.
إِذْنُ، $a(t) = v'(t)$

المطلوبُ هُوَ $a(5) = v'(5)$ ، الَّتِي تُمثِّلُ التسارعَ عِنْدَما $t = 5$.

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) = 3.6t \\ a(5) &= 3.6(5) \\ &= 18 \end{aligned}$$

مشتقةُ اقتِرَانِ السرعة
بِتَعْويِضِ $t = 5$
بِالتبسيط

أَتَعْلَمُ

تَكُونُ قِيمَةُ التسارعِ
صَفْرًا إِذَا كَانَتِ
السرعَةُ ثَابِتَةً.

إِذْنُ، تسارعُ الجَسْمِ بَعْدَ 5 ثوانيٍ مِنْ بَدْءِ حَرْكَتِهِ هُوَ 18 m/s^2

أَتَحْقَقُ مِنْ فَهْمِي

يُمثِّلُ الاقْتِرَانُ $s = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقَعَ جَسْمٍ يَتَحْرُكُ فِي مسَارٍ مُسْتَقِيمٍ، حِيثُ
موقَعُ الْجَسْمِ بِالْأَمْتَارِ بَعْدَ t ثانيةً. أَجِدُ سرعةَ الْجَسْمِ وَتَسَارُعَهُ عِنْدَما $t = 3$.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلِيَ الْمَسَائِلَ

أَجِدُ مشتقةَ كُلِّ مِنْ الاقْتِرَانَاتِ الآتِيةِ:

1 $f(x) = -7$

2 $g(x) = 3x^9$

3 $r(x) = -5x^2$

4 $i(x) = x^4 - 3x$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}x$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$

10 أَجِدُ النَّقطَةَ الَّتِي يَكُونَ عَنْدَهَا مِيلُ مَنْحَنِيُّ الاقْتِرَانِ $10 - 2x^2$ هُوَ 12

يُمثِّلُ الاقْتِرَانُ $s = t^3 - 6t^2 + 3$ موقَعَ جَسْمٍ يَتَحْرُكُ فِي مسَارٍ مُسْتَقِيمٍ، حِيثُ s موقَعُ الْجَسْمِ بِالْأَمْتَارِ بَعْدَ t ثانيةً:

11 أَجِدُ الاقْتِرَانَ $v(t)$ الَّذِي يُمثِّلُ سرعةَ الْجَسْمِ فِي أيِّ لَحْظَةٍ t (ثانيةً).

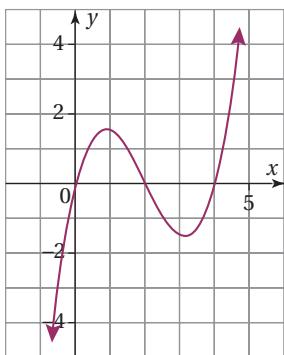
12 أَجِدُ سرعةَ الْجَسْمِ عِنْدَما $t = 3$.

13 أَجِدُ الزَّمْنَ t عِنْدَما تَكُونُ السرعةُ 6 m/s

14 أَجِدُ الاقْتِرَانَ $a(t)$ الَّذِي يُمثِّلُ تسارعَ الْجَسْمِ، حِيثُ t الزَّمْنُ بِالثَّانِيَةِ.

15 أَجِدُ تسارعَ الْجَسْمِ عِنْدَما $t = 5$.

الوحدة ٦



يُمثّل الشكل المجاور منحني الاقتران $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$ 16

أَجِد $f'(x)$.

أَجِد ميل منحني الاقتران عند نقاط تقاطعه مع محور x . 17

أَحِدُ على المنحنى النقطة التي يساوي عندها الميل -0.5 . 18

أَجِد معادلة مماس منحني الاقتران $f(x) = 3x^3 + 2$ عند النقطة التي يكون إحداثي x لها 1 19

تقع النقطة (P, b) على منحني الاقتران $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$.

أَجِد قيمة x التي يكون عندها ميل منحني الاقتران صفرًا. 20

أَجِد قيمة b .

إذا كانت قيمة الميل عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلة $y = x^3 - 2ax$ ، حيث a عدد ثابت، هي -12

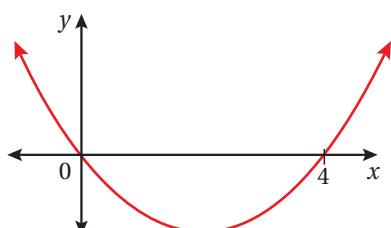
أَجِد قيمة ميل المنحنى عندما $x = 4$. 22

أَجِد $f'(x)$ في كل ممّا يأتي:

24 $f(x) = 2x(x+1)$

25 $f(x) = (x+2)(x+5)$

26 $f(x) = (x+3)(x-3)$



يُبَيِّنُ الشكل المجاور التمثيل البياني للاقتران $f(x) = kx(x-4)$ 27 حيث k عدد حقيقي. أَجِد قيمة k إذا كان ميل المنحنى عند النقطة $(4, 0)$ هو 2

مهارات التفكير العليا

تَبَرِيرُ: أُثِبْتْ وجود نقطتين على منحني الاقتران $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$ ، تكون عندهما مشقة الاقتران تساوي 4 ، ثم أَجِد إحداثي هاتين النقطتين، مُبِرِّراً إجابتي.

تَحدِّ: أَجِد قيم a و b إذا كان ميل منحني الاقتران $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عند النقطة $(-3, 2)$ هو صفرًا. 29

تَحدِّ: أَطْلَقْتْ قذيفة من سطح الأرض رأسياً إلى الأعلى، فكان موقعها بالنسبة لسطح الأرض s بالمتر بعد t ثانية من إطلاقها $s(t) = -4.9t^2 + 147t + 147$. ما سرعة القذيفة عندما يكون موقعها 980 m فوق سطح الأرض؟ 30

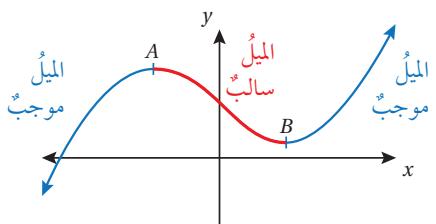
الدرس 3

القيمة العظمى والقيمة الصغرى Maximum and Minimum Values



إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكتيرات الحدود.
نقطة حرجة، قيمة عظمى، قيمة صغرى.

تمثيل المعادلة $2.5 + 75t - 16t^2 = s$ الموقع (بالقدم) الذي تصله كرة بعد ركلها رأسياً لأعلى، حيث t الزمن بالثانية. ما أعلى موقع تصله الكرة؟



تسمى النقطة التي يكون عندها ميل منحنى كثير الحدود صرفاً **نقطة حرجة** (critical point). في الشكل المجاور، A و B نقطتان حرجنات؛ لأنَّ ميل المنحنى عند كلِّ منهما صفر.

تسمى القيمة d في النقطة (c, d) التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها موجبة، وعن يمينها سالبة، **القيمة العظمى المحلية** (local maximum)، لأنَّها أكبر من القيم المجاورة لها. وتسمى القيمة h في النقطة (e, h) التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها سالبة، وعن يمينها موجبة، **القيمة الصغرى المحلية** (local minimum)، لأنَّها أصغر من القيم المجاورة لها.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



لغة الرياضيات

يشير مصطلح (نقطة حرجة) إلى النقطة (x, y) ، ويشير مصطلح (القيمة الحرجة) إلى الإحداثي x للنقطة الحرجة.

مثال 1

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجدت).

الخطوة 1: أجد القيم الحرجة؛ أي قيم x التي ميل المنحنى عندها صفر.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

مشتقة الاقتران

بمساواة المشتقة بالصفر

بجمع 12 للطرفين

بقسمة الطرفين على 3

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

أتعلم

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى، وذلك باختيار من شرطي الأدوات، ثم نقر المنحنى، فظهور إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.

إذن، توجد نقطتان حرجنات لمنحنى الاقتران عندما $-2 = x$ و $2 = x$ ؛ لأنَّ مشتقة الاقتران تساوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

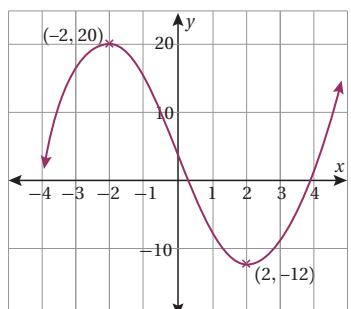
الوحدة 6

الخطوة 2: لتحديد أي النقاط الحرجة يوجد عنها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارة الميل	موجبة		سالبة

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارة الميل	سالبة		موجبة

تتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة محلية عظمى عندما $x = -2$ ، هي $f(-2) = 20$ ، وتتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلية صغرى عندما $x = 2$ ، هي $f(2) = -12$.



طريقة بديلة: يمكن أيضاً تحديد إذا كان يوجد عند النقطة الحرجة قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران بتمثيل منحنى الاقتران بيانياً. فعند تمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانياً في الشكل المجاور، فإن النقطة $(-2, 20)$ تبدو أعلى من النقاط المجاورة لها على المنحنى، وبذلك تساوي القيمة العظمى 20، وتبدو النقطة $(2, -12)$ أخفض من النقاط المجاورة لها، وبذلك تساوي القيمة الصغرى -12.

إرشاد

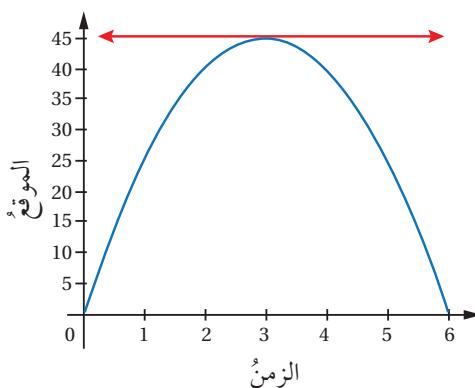
إذا لم تغيّر إشارة المشتقّة من موجبة إلى سالبة أو العكس حول النقطة الحرجة؛ فلا يكون للاقتران قيمة عظمى ولا صغرى عند تلك النقطة.

أفكار

لماذا لا توجد قيمة عظمى وقيمة صغرى للاقتران الثابت؟
لماذا لا توجد قيمة عظمى وقيمة صغرى للاقتران الخطّي الذي مجده مجموعة الأعداد الحقيقية؟

أتحقق من فهمي

أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المحلية للاقتران $g(x) = 2x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ (إن وجدت).



يمثل الإحداثي للنقطة التي يتغير عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمنحنى الموقع - الزمن؛ لأن مشتقّة المنحنى عند تلك النقطة تساوي صفرًا (المماسُ أفقى)؛ لذا يمكن استعمال المشتقّة لتحديد النقطة التي يبلغ عندها الجسم أعلى موقع.

مثال 2: من الحياة



يُمثلُ الاقتران $s(t) = 1 + 25t - 5t^2$ موقعَ كرةٍ بالنسبة لسطح الأرضِ بالمتيرِ بعدَ t ثانيةً منْ ركلِها رأسياً لأعلى:

أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثلُ الاقترانُ المُعطى $s(t)$ موقعَ الكرة، ومنَ المعلومِ أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ تساوي اقترانَ السرعة. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوّضُ $t = 3$ في $s'(t)$:

$$s(t) = 1 + 25t - 5t^2$$

اقترانُ الموقع

$$s'(t) = 25 - 10t$$

مشتقةُ اقترانِ الموقع

$$s'(3) = 25 - 10(3)$$

بتعيينِ 3 في $s'(t)$

$$= -5$$

بالتبسيط

إذن، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هي -5 m/s .

أَجِدُ أعلى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرة.

يُمثلُ أعلى ارتفاعٍ تصلُ إلَيْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقتراُنِ الموقع $s(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أحِدُدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلة $0 = s'(t)$:

$$s'(t) = 25 - 10t$$

مشتقةُ اقترانِ الموقع

$$25 - 10t = 0$$

بمساواةِ المشتقَةِ بالصفر

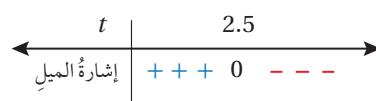
$$25 = 10t$$

بجمعِ $10t$ للطرفين

$$t = 2.5$$

بقسمةِ الطرفينِ على 10

تغيرُ إشارةِ ميل المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجُّدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$.



إذن، تصلُ الكرةُ أعلى ارتفاعٍ عندما $s = 2.5$ ، وقيمتُهُ هي $(s(2.5))$:

$$\begin{aligned} s(2.5) &= 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2 \\ &= 32.25 \end{aligned}$$

بتعيينِ 2.5 في $s(t)$
بالتبسيط

إذن، أعلى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هو 32.25 m .

أتحقق من فهمي

يُمثلُ الاقتران $s(t) = 20t - 5t^2$ موقعَ حجرٍ بالنسبة إلى سطح الأرضِ بالمتيرِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ رأسياً لأعلى:

(b) أَجِدُ أعلى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجر.

(a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتَينِ منْ قذفِه.

أتعلم

سرعةُ الكرةِ هي 5 m/s والإشارةُ السالبةُ تدلُّ على أنَّ الكرةَ غيرَت اتجاهَ حركتها، وأخذَت تهبطُ نحوَ الأرضِ.

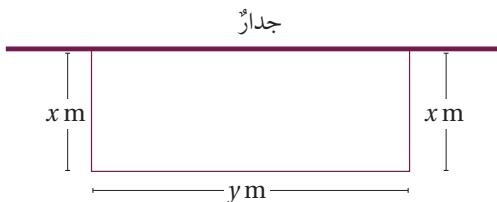
أتعلم

بما أنَّ مشتقةَ اقترانِ الموقعِ هيَ اقترانُ السرعة، فإنَّ القيمَ التي تساوي عندَها مشتقةُ اقترانِ الموقعِ صفرًا هيَ القيمُ التي تنتهيُ عندَها السرعةُ.

الوحدة ٦

إذا مثل الاقتران $f(x)$ مساحةً منطقه ما، فإنَّ القيمة الكبيرة للمساحة تساوي القيمة العظمى للاقتران، والقيمة الصغرى للمساحة تساوى القيمة الصغرى للاقتران.

مثال ٣: من الحياة



جدار: لدى مزارع 32 m من السياج، أراد أن يُسيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y متراً، وعرضها x متراً، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:

١ أُبَيِّنْ أنَّ الاقتران $A(x) = x(32 - 2x)$ يُمثل مساحة الحظيرة.

$$\text{طول السياج } 32; \text{ لذا، فإن } x + y + x = 32$$

إذن، طول الحظيرة $32 - 2x = y$ ، ومساحتها $(32 - 2x)x$ متراً مربعاً.

٢ أَجِدُ $A'(x)$.

$$A(x) = x(32 - 2x)$$

اقتران المساحة

$$A(x) = 32x - 2x^2$$

توزيع الضرب على الطرح

$$A'(x) = 32 - 4x$$

مشتقه اقتران المساحة

٣ أستعمل المشتقه لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر مما يمكن، ثم أجد تلك المساحة.

لإيجاد قيمة x ، أحل المعادله $0 = A'(x)$:

$$32 - 4x = 0$$

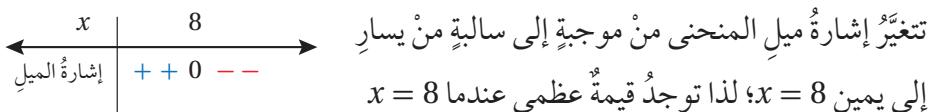
بمساوية المشتقه بالصفر

$$32 = 4x$$

بجمع $4x$ للطرفين

$$x = 8$$

بقسمة الطرفين على ٤



لإيجاد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة، أعرض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يمثل مساحة الحظيرة.

$$A(8) = 8(32 - 2(8))$$

بتعويض $x = 8$ في $A(x)$

$$= 128$$

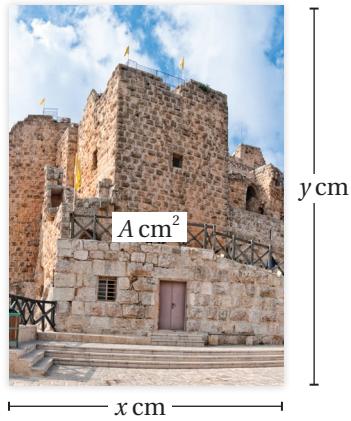
بالتبسيط

إذن، أكبر مساحة للحظيرة 128 m²، وهي تنتُج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m.

أتذكر

تُسمى قيمة x التي تتحقق
المعادلة $f'(x) = 0$
فيما حرجه لمنحنى
 $f(x)$ الاقتران

أتحقق من فهمي



بُيّن الشكل المجاور صورةً مستطيلةً الشكل لقلعة عجلون، محيطها 72 cm ، ومساحتها $A \text{ cm}^2$:

(a) أُبَيِّنْ أَنَّ الاقتران $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّل مساحة الصورة.

(b) أَجِدُ $A'(x)$.

(c) أَسْتَعْمِلُ المُشَتَّقَةَ لِإِيجَادِ قِيمَةِ x الَّتِي تَجْعَلُ مساحة الصورة أَكْبَرَ مَا يُمْكِنُ.

(d) أَجِدُ أَكْبَرَ مساحةً ممكِّنةً لِلصورة.

معلومات

بني عز الدين أسامة قلعة عجلون (أحد قادة صلاح الدين الأيوبي)، وذلك عام 580هـ / 1184م. تمتاز هذه القلعة بمتانة بنائها، وموقعها الاستراتيجي المُطلِّ.

أتدرب وأحل المسائل

أَسْتَعْمِلُ المُشَتَّقَةَ لِإِيجَادِ القيم العظمى والقيم المحلية الصغرى لِكُلِّ مِنَ الاقتراناتِ الآتِيةِ (إِنْ وُجِدَتْ):

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 2x^3 + 7$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقتران $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاع سهم عن سطح الأرض بالمتر بعد t ثانيةً من إطلاقه:

11) أَجِدُ سرعة السهم بعد 3 ثوانٍ.

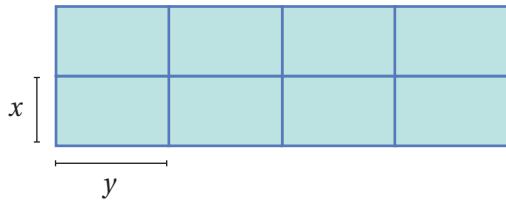
12) أَسْتَعْمِلُ المُشَتَّقَةَ لِإِيجَادِ أعلى ارتفاع يصلُه السهم.

13) يُمثِّلُ الاقتران $A(x) = x(50-x)$ مساحةً مستطيلٍ، حيث x الطول بالمتر. ما أكبر مساحةً ممكِّنةً للمستطيل؟

الوحدة 6

للاقتران $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاث نقاطٍ حرجةٍ. أجدُ إحداثياتِ هذه النقاطِ، مصنفًا إياها إلى عظمى، وصغرى محلية.

أجدُ قيمةَ الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةً حرجةً عندما $x = 3$.



لدي مزارع 180 m من الشباك، أراد أن يصنع منها حظائر لاغنامه، طول كل منها y متراً، وعرضها x متراً كما في الشكل المجاور:

$$y = 18 - 1.2x \quad (16)$$

أبين أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يمثل المساحة الكلية للحظائر.

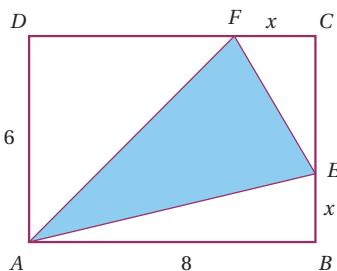
استعمل المشتقَة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن.

أجدُ أكبر مساحةٍ كليّة ممكنة للحظائر.

برهان: أثبت أن الاقتران $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليس له قيمٌ حرجة.

مهارات التفكير العليا

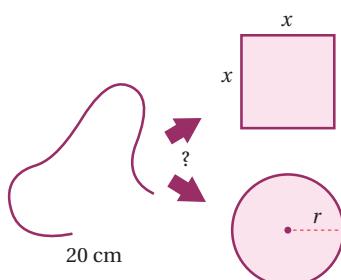
تبسيط: أجدُ قيمةَ الثابتين a ، b إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةً حرجةً عند النقطة $(3, 1)$ ، ثم أحدد نوع القيمة حرجة، مبررًا إجابتي.



يُبيّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُه على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:

اعتماداً على القياسات المعلنة في الشكل، أبين أن الاقتران $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يمثل مساحة المثلث AFE .

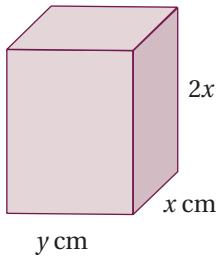
استعمل المشتقَة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة المثلث AFE أصغر ما يمكن.



تحدى: سلك طوله 20 cm ، يراد قصه لعمل مربع ودائرة. أحدد موقع القص بحيث يكون مجموع مساحتَي المربع والدائرة أصغر ما يمكن.

اختبار نهاية الوحدة

أَبْيَّنُ الشَّكْلُ الْمُجَاوِرُ قَالًا يُسْتَعْمَلُ لصُنْعِ لَبِنِ الْبَنَاءِ، وَتَبْلُغُ مِسَاحَةُ سَطْحِهِ الْكُلِّيَّةُ 600 cm^2 :



$$V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$$

أَبْيَّنُ أَنَّ الاقْتَرَانَ
يُمْثِلُ حَجْمَ الْقَالِبِ.

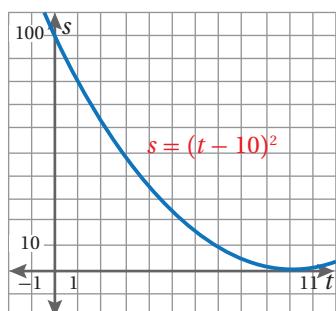
أَسْتَعْمَلُ الْمُشَتَّقَةَ لِإِيجَادِ

قيمةٌ x التي تجعلُ الْحَجْمَ أَكْبَرَ مَا يُمْكِنُ.

أَجِدُ أَكْبَرَ حَجْمٍ مُمْكِنٍ لِلْقَالِبِ.

يُمْثِلُ الاقْتَرَانُ $s(t) = t^2 + 1$ موقَعَ جَسَمٍ يَتَحَرَّكُ فِي مسَارٍ مُسْتَقِيمٍ، حِيثُ s موقَعُ الْجَسَمِ بِالْأَمْتَارِ بَعْدَ t ثانية. أَجِدُ السُّرْعَةَ بَعْدَ ثَانِيَتَيْنِ، ثُمَّ أَجِدُ الزَّمَنَ t عِنْدَمَا تَبْلُغُ السُّرْعَةُ 6 m/s

أَطْلَقَتْ سِيَارَةً سُمَيَّةً جَرَسَ إِنذَارٍ لِتَبَعَّيْهُ الْوَقْدُ، فَتَحَرَّكَتْ فِي مسَارٍ مُسْتَقِيمٍ نَحْوَ مَحَطةِ الْوَقْدِ.



يُمْثِلُ الْمُنْحَنِيُّ فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ الْعَلَاقَةَ بَيْنَ مَوْقِعِ السِّيَارَةِ بِالْأَمْتَارِ (s) بِالنَّسْبَةِ إِلَى الزَّمَنِ (t) بالثَّوَانِيَّةِ:

أَجِدُ سُرْعَةَ السِّيَارَةِ بَعْدَ ثَانِيَتَيْنِ مِنَ انْطَلَاقِ جَرَسِ تَبَعَّيْهِ الْوَقْدِ.

أَجِدُ سُرْعَةَ السِّيَارَةِ بَعْدَ 10 ثوَانِ.

أَضْعُ دَائِرَةً حَوْلَ رَمْزِ الإِجَابَةِ الصَّحِيحَةِ فِي مَا يَأْتِي:

مِيلُ مُنْحَنِيِ الْاقْتَرَانِ $f(x) = 3x - 1$ عِنْدَ النَّقْطَةِ $x = 5$ هُوَ:

- a) 3
- b) $\frac{1}{3}$
- c) -1
- d) 0

إِذَا كَانَ $f(x) = x(2x + 1)$ ، فَإِنَّ $f'(x)$ يَسَاوِي:

- a) x
- b) $2x + 1$
- c) $2x^2 + x$
- d) $4x + 1$

قِيمَةُ x الَّتِي عَنْدَهَا قِيمَةٌ عَظِيمَةٌ لِلْاقْتَرَانِ

$f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هِيَ:

- a) $-\frac{7}{3}$
- b) $-\frac{5}{2}$
- c) $\frac{7}{3}$
- d) $\frac{5}{2}$

إِذَا مَثَّلَ الاقْتَرَانُ $s(t) = t^2$ موقَعَ جَسَمٍ يَتَحَرَّكُ فِي مسَارٍ

مُسْتَقِيمٍ، حِيثُ s موقَعُ الْجَسَمِ بِالْأَمْتَارِ بَعْدَ t ثانية، فَإِنَّ

سُرْعَةَ الْجَسَمِ بِوَحدَةِ m/s عِنْدَمَا $t = 1$ هِيَ:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 4

إِذَا كَانَ x ، $h(x) = 2x^2 + 2$ ، فَأَجِدُ $h'(x)$ ، ثُمَّ أَبْيَّنُ أَنَّ

$$x(1 + h'(x)) = 2h(x)$$

إِذَا وَقَعَتِ النَّقْطَةُ $P(-1, c)$ عَلَى مُنْحَنِيِ الْاقْتَرَانِ

$f(x) = 5x^2 + 2$ ، فَأَجِدُ قِيمَةَ c ، ثُمَّ أَحِدِّدُ إِذَا كَانَ المِيلُ

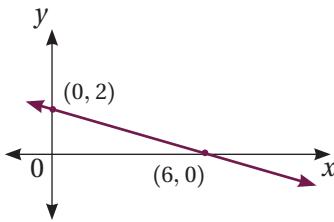
مُوجَبًاً أَوْ سَالِبًاً عِنْدَ النَّقْطَةِ P .

أَجِدُ مَعَادِلَةً مَمَّا سِبْلَى مُنْحَنِيِ الْاقْتَرَانِ $f(x) = 4x^3 + 2$

عِنْدَ النَّقْطَةِ الَّتِي إِحْدَاثَيُّ x لَهَا -1

اختبار نهاية الوحدة

أَجِدْ مشتقةَ كُلّ منَ الاقتراناتِ الآتية:



29 إذا كانَ المستقيمُ

في الشكلِ المجاورِ
هوَ منحنى الاقترانِ
 $f(x)$, فَأَجِدْ $f'(x)$.

14 $f(x) = 2\pi^3$

15 $f(x) = x^8$

16 $f(x) = -3x^4$

17 $f(x) = x$

18 $f(x) = 1 - 2x$

19 $f(x) = 4 - 5x^2 + x^3$

أَسْتَعْمِلُ المشتقةَ لِإِيجادِ القيمة العظمى والقيمة الصغرى لِكُلّ
منَ الاقتراناتِ الآتية (إِنْ وُجِدَتْ):

20 $f(x) = 17$

21 $f(x) = 5x + 4$

22 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

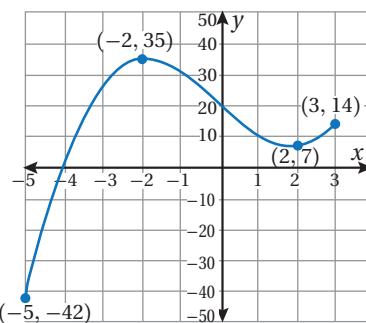
23 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$

24 تُمثِّلُ العلاقةُ $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موضعَ جسمٍ
يَتَحَرُّكُ فِي مسَارٍ مُسْتَقِيمٍ, حِيثُ s موضعُ الجسمِ بالأمتارِ بَعْدَ t
ثانيةً. ما الزَّمْنُ الَّذِي تساوي عَنْدَهُ السُّرْعَةُ 14.7 m/s ؟

25 أَجِدْ قيمةَ الثابتِ k إِذَا كانَ لِلاقترانِ $f(x) = kx - x^3$

نقطةُ حرجةٌ عَنْدَما $x = -1$

اعتماداً عَلَى التَّمَثِيلِ الْبَيَانِيِّ الآتِيِّ :



26 أَحدِدْ الفترةَ (الفتراتِ) التي يَكُونُ عَنْدَها مِيلُ المِنْحَنِيِّ
موجباً.

27 أَحدِدْ الفترةَ (الفتراتِ) التي يَكُونُ عَنْدَها مِيلُ المِنْحَنِيِّ
سالباً.

28 أَحدِدْ النَّقْطَةَ (النَّقَاطَ) التي يَكُونُ عَنْدَها مِيلُ المِنْحَنِيِّ
صفرًا.

32 أَجِدْ $f'(x)$.

33 أَجِدْ مِيلَ منْحَنِيِّ الاقترانِ $f(x)$ عَنْدَ النَّقْطَةِ B .

34 أَجِدْ إِحْدَاثِيًّا كُلّ منَ النَّقْطَتَيْنِ A وَ C .

المتجهات

Vectors

ما أهمية هذه الوحدة؟

لفهم تأثير قوةٍ ما في جسمٍ، يجب تحديد كلٌ من مقدارٍ هذه القوة، واتجاهها، في ما يُعرف بالتجهيز. في هذه الوحدة، سأتعلم كثيراً عن المتجهات وتطبيقاتها الحياتية، من مثل تحديد تأثير الرياح في حركة السفن الشراعية.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ المتجهات، وكيفية تمثيلها على المستوى الإحداثي.
- ◀ جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- ◀ التفسير الهندسي للمتجهات، وبعض التطبيقات الحياتية عليها.
- ◀ إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

تعلّمت سابقاً:

- ✓ حل المعادلات الخطية بمتغيرين.
- ✓ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- ✓ إيجاد إحداثي نقطة متصرف قطعة مستقيمة.
- ✓ النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.

مشروع الوحدة

المتجهات في الجغرافيا

أَسْتَعِدُ وَمَجْمُوعَتِي لِتَنْفِيذِ مَشْرُوْتِي بِاِكْتِشَافِ اِسْتِعْمَالِ لِلْمَتْجَهَاتِ فِي الْخَرَائِطِ

الجغرافية بناءً على ما سنتعلمه في هذه الوحدة.

شبكة إنترنت، برمجية جيوجبرا.

فكرة المشروع



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحث في شبكة الإنترت عن صورة لخريطة الوطن العربي أو الشرق الأوسط، ثم أحفظها في ملف بجهاز الكمبيوتر.

2 أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد إحداثيات بعض العواصم العربية باتباع الخطوات الآتية:

- أنقر أيقونة من شريط الأدوات، ثم اختار الصورة التي حفظتها.

● أظهر الشبكة فوق الصورة بنقر الزر الأيمن لفأرة الكمبيوتر، ثم اختيار (إعدادات) ، ومنها اختيار .

● أجد إحداثيات أي عاصمة عربية على الخريطة باختيار أيقونة من شريط الأدوات، ثم نقر موقع العاصمة على الصورة، فتظهر الإحداثيات على الشريط الجانبي.

3 أرسم متجهاً بين أي عاصمتين بنقر أيقونة المتجه من شريط الأدوات.

4 أجد المسافة على الخريطة بين مدينة عمان وأربع عواصم عربية باستعمال مقدار المتجه، ثم أقارنها بالمسافات الحقيقة، وأكتب مقياس الرسم، مظمنا النتائج في جدول.

5 أجد اتجاه أربع عواصم عربية بالنسبة إلى مدينة عمان باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) نبيان فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور، والحسابات التي أجريتها في خطوات المشروع.
- المعلومات الجديدة التي تعرّفتها في أثناء العمل بالمشروع، ومقترح توسيعة المشروع.

الدرس

1

المتجهات في المستوى الإحداثي

Vectors in the Coordinate Plane

فكرة الدرس



المصطلحات



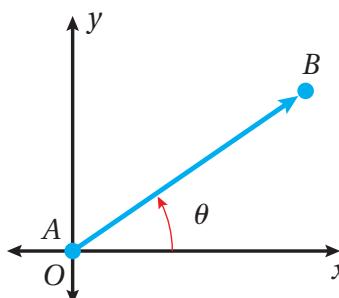
مسألة اليوم



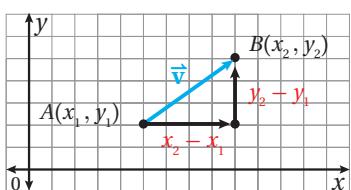
تعرّفُ المتجه، وتمثيله في المستوى الإحداثي، وإيجاد مقدار المتجه.

المُركبة الأفقية، المُركبة الرأسية، الصورة الإحداثية، الوضع القياسي، متّجّه الموضع، مقدار المتجه، السرعة المتجهة.

قطعَ يخت سياحيٍ مساراً مستقيماً في البحر الأحمر، مُنطلقًا من مدينة العقبة باتجاه الجنوب الغربي إلى مدينة طابا المصرية. هل يمكنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليخت، وتحديد المسافة التي قطعها باستعمال إحداثيَّ هاتين المدينتين فقط؟



درستُ في الفيزياء تمثيل المتجهات في صورة سهم ينطلق من نقطة إسناد، مثل نقطة الأصل، وبطولٍ يحدّدُه مقاييسٌ مناسبٌ، واتجاهٍ تحدّدهُ الزاوية θ التي يصنعها السهم مع محورٍ مرجعيٍّ، مثل محور x الموجب عكس عقاربِ الساعة. ولأنَّ استعمال مقاييس الرسم قد لا يكون دقيقاً في بعض الأحيان؛ فإنَّه يتّبعُ استعمال طريقةٍ أكثر دقةً لتمثيل المتجهات.



يمكنُ تمثيل المتجه (\vec{AB}) في المستوى الإحداثي في صورة قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُ من نقطةٍ بدايته $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةٍ نهايته $B(x_2, y_2)$ ، وفي اتجاهٍ يحدّدُه رمزُ السهم كما في الشكل المجاور.

رموز رياضية

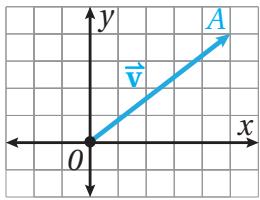
يرمزُ إلى المتجه الذي نقطته بدايته A ، ونقطةٍ نهاية B بالرمز \vec{AB} أو بالرمز \overrightarrow{v} مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ.

تُسمى الإزاحة الأفقية بين نقطة بداية المتجه ونقطة نهاية المركبة الأفقية (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$ ، وتُسمى الإزاحة الرأسية بينهما المركبة الرأسية (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.

الوحدة 7

يمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية (coordinate form) بدلالة مركبتيه الأفقي والرأسي (العمودي) كما يأتي:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$



إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل 0، كما في الشكل المجاور، فإنه يكون في الوضع القياسي (standard position) ويسمى أيضاً متجه الموضع للنقطة A التي تقع عند نهايته؛ لأنّه يحدّد موقعها بالنسبة إلى نقطة الأصل.

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $\langle a, b \rangle$ أو $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ لكتابته المتجه بصورته الإحداثية.

مثال 1

اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

1 \vec{AB}

نقطة بداية المتجه هي $B(3, 5) = (x_2, y_2)$ ، ونقطة نهايته هي $A(1, 2) = (x_1, y_1)$

$$x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

المركبة الأفقيّة

$$y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$$

المركبة الرأسيّة

$$\text{إذن، } \overrightarrow{AB} = \langle 2, 3 \rangle$$

2 \vec{BC}

نقطة بداية المتجه هي $C(5, 3) = (x_2, y_2)$ ، ونقطة نهايته هي $B(3, 5) = (x_1, y_1)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

المركبة الأفقيّة

$$y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$$

المركبة الرأسيّة

$$\text{إذن، } \overrightarrow{BC} = \langle 2, -2 \rangle$$

3 \vec{DC}

نقطة بداية المتجه هي $D(5, 1) = (x_2, y_2)$ ، ونقطة نهايته هي $C(5, 3) = (x_1, y_1)$

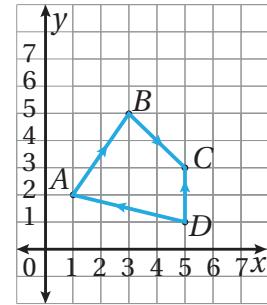
$$x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$$

المركبة الأفقيّة

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

المركبة الرأسيّة

$$\text{إذن، } \overrightarrow{DC} = \langle 0, 2 \rangle$$



طريقة بديلة

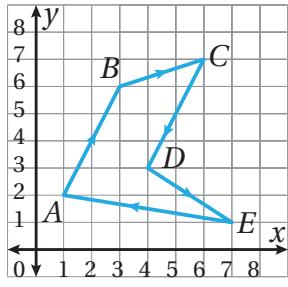
للانتقال من النقطة A إلى النقطة B، اتحرّك وحدتين إلى اليمين، وثلاث وحدات إلى الأعلى.

أتعلم

يعبر عن الانتقال إلى اتجاه اليسار أو اتجاه الأسفل باستعمال الأعداد السالبة.

أتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:



- a) \vec{EA}
- b) \vec{CD}
- c) \vec{AB}
- d) \vec{DE}
- e) \vec{BC}
- f) \vec{CB}

مقدار المتجه (magnitude) هو كمية قياسية تمثل طول القطعة المستقيمة الوالصلة بين نقطتي بداية المتجه ونهايته.

فإذا كانت $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2))$ هي نقطة بداية \vec{v} ، و (x_2, y_2) هي نقطة نهاية، فإنه يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الصيغة الآتية لمقدار المتجه $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أتعلم

يُرمز إلى مقدار المتجه \vec{v}
بالمرمز $|\vec{v}|$

مقدار المتجه

مفهوم أساسى

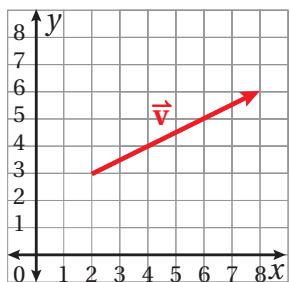
إذا كانت $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2))$ هي نقطة بداية المتجه \vec{v} ، و (x_2, y_2) هي نقطة نهاية، فإنه يمكن إيجاد مقداره $|\vec{v}|$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كان المتجه \vec{v} مكتوبًا بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2 \rangle = \vec{v}$ ، فإنه يمكن إيجاد مقداره باستعمال الصيغة الآتية:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

مثال 2



أَجِدْ مقدارَ المتجه \vec{v} في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أُحدِّدُ إحداثياتِ كُلٌّ منْ نقطَةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطَةِ نهايَتِه.

إِحدَايَا نقطَةِ بدايةِ المتجهِ (3, 2)، وَإِحدَايَا نقطَةِ نهايَتِه (8, 6).

الخطوة 2: أُعُوّضُ الإحداثياتِ في صيغَةِ مقدارِ المتجهِ.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغَةِ مقدارِ المتجهِ}$$

$$= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2} \quad \text{بالتعرِيضِ}$$

$$= \sqrt{36 + 9} \quad \text{بالتبيسيطِ}$$

$$= 3\sqrt{5} \quad \text{بالتبيسيطِ}$$

أَجِدْ مقدارَ المتجهِ $\vec{AB} = \langle 4, -3 \rangle$ (2)

المتجهُ مكتوبُ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad \text{صيغَةِ مقدارِ المتجهِ}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \quad \text{بالتعرِيضِ}$$

$$= 5 \quad \text{بالتبيسيطِ}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدْ مقدارَ كُلٍّ متجهٍ ممَّا يأتي:

a) $\vec{AB} = \langle -1, 4 \rangle$

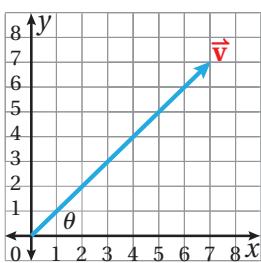
b) $\vec{CD} = \langle 5, -7 \rangle$

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثية لِإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائم الزاويةِ الذي يُمثلُ المتجهُ وترًا فيه.

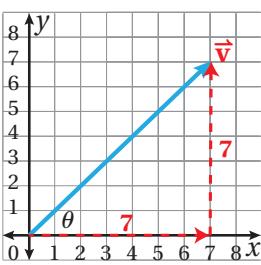
مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ \vec{v} في الشكِلِ المجاورِ.

الخطوة 1: أَجِدُ اتجاهَ \vec{v}



أَسْتَعْمَلُ نَسْبَةَ الظُّلُّ فِي الْمُثَلِّثِ قَائِمِ الزَّاوِيَةِ الَّذِي يُمَثِّلُ \vec{v} وَتَرَّا فِيهِ:



$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

استعمال نسبة الظل لـ إيجاد الزاوية

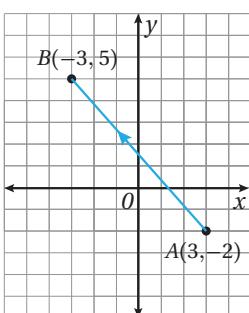
$$= \frac{7}{7} = 1$$

بالتعويض

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

باستعمال معكوس الظل

إذن، اتجاه \vec{v} هو 45° مع الأفقيِّ.



أتحقق من فهمي

أَجِدُ اتجاهَ \vec{AB} في الشكِلِ المجاورِ.

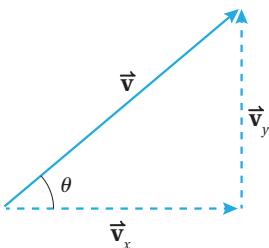
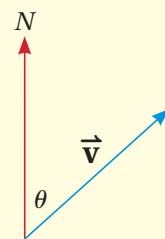
إرشاد

أَسْتَعْمَلُ الْآلَةَ الْحَاسِبَةَ
الْعَلْمِيَّةَ لِأَجِدَ $\tan^{-1}(1)$
كَمَا يَأْتِي:

SHIFT Tan 1

أتعلم

يُمْكِنُ أَيْضًا التَّعْبِيرُ عَنْ
اتِّجاهِ المَتَجْهِ بِدَلَالَةِ
اتِّجاهِهِ مِنَ الشَّمَالِ.



السرعة المتجهة (velocity) هي سرعة في اتجاهٍ مُحدَّدٍ

ويمكن تمثيلها بـ متجهٍ. في الشكِلِ المجاورِ، يُمَثِّلُ المَتَجْهُ \vec{v} السرعة المتجهة لجسم تحرَّكَ فِي مسارٍ مستقيمٍ، فصَنَعَ زَاوِيَةً قياسُهَا θ مَعَ محورِ x المُوجِبِ، وَقَدْ مَثَّلَ مَقْدَارَ المَتَجْهِ $|\vec{v}|$ سرعةً هذا الجسم.

تُمَثِّلُ \vec{v}_x المركبة الأفقيَّة للسرعة المتجهة، وتُمَثِّلُ \vec{v}_y المركبة الرأسية لهذِهِ السرعة،

$$\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$$

الوحدة 7

يمكن استعمال النسب المثلثية لكتابة المركبتين الأفقي والرأسي للسرعة المتجهة بدلالة الزاوية θ التي تصنّعها السرعة المتجهة مع محور x الموجب كما يأتي:

$$v_x = |\vec{v}| \cos\theta$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin\theta$$

أتعلم

قد يمثل المتجه أيضًا مسافةً متجهةً، أو قوةً متجهةً.

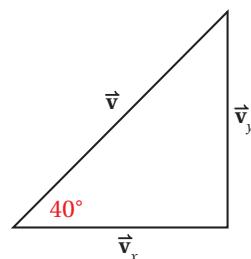
عندئذ، يمكن كتابة السرعة المتجهة بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\vec{v} = \langle |\vec{v}| \cos\theta, |\vec{v}| \sin\theta \rangle$$

مثال 4: من الحياة



كرة قدم: ركل ريان كرة بسرعة 25 m/s ، كما في الشكل المجاور، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي. أكتب المتجه الذي يمثل السرعة المتجهة للكرة بالصورة الإحداثية.



أرسم شكلاً مبسطاً يعبر عن المسألة، بحيث يكون فيه $|\vec{v}| = 25$ ، و $\theta = 40^\circ$

$$\vec{v} = \langle |\vec{v}| \cos\theta, |\vec{v}| \sin\theta \rangle$$

$$\vec{v}_y = |\vec{v}| \sin\theta, \vec{v}_x = |\vec{v}| \cos\theta$$

$$= \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle$$

بالتعويض

$$= \langle 25 \times 0.7660, 25 \times 0.6428 \rangle \quad 40^\circ$$

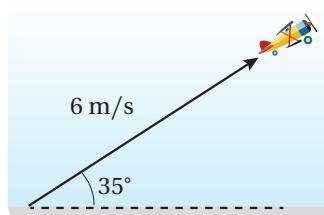
$$= \langle 19.15, 16.07 \rangle$$

بالتبسيط

إذن، $\langle 19.15, 16.07 \rangle = \vec{v}$ هو المتجه الذي يمثل سرعة الكرة.



أتحقق من فهمي



الألعاب: أقلعت طائرة تحكم فيها ميساء عن بُعد، بزاوية قياسها 35° عن سطح الأرض، وبسرعة 6 m/s كما في الشكل المجاور.

أكتب المتجه الذي يمثل السرعة المتجهة للطائرة.

ازداد الاعتماد على الطائرات المسيرة عن بُعد في كثير من المجالات، مثل: رصد الازدحامات المرورية، ومراقبة انتشار حرائق الغابات.



أكتب كل متجه علمت نقطتا بدايته ونهايته في ما يأتي بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره:

1 $(2, 5), (4, -1)$

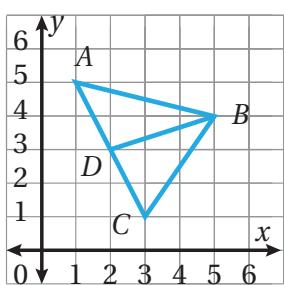
2 $(-4, 7), (-3, 0)$

3 $(6, -2), (8, 1)$

4 $(4, -9), (3, -5)$

5 $(-1.5, 3), (0.5, -4)$

6 $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$



اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلاً من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

7 \vec{AB}

8 \vec{DB}

9 \vec{CB}

10 \vec{CA}

11 \vec{AC}

12 \vec{DA}

في السؤال السابق، أيّن أن $|\vec{AC}| = |\vec{DC}| = |\vec{AD}|$. ماذا تستنتج من موقع النقطة D على القطعة المستقيمة \overline{AC} ? 13

أجد مقدار كل متجه مما يأتي:

14 $\langle 2, -6 \rangle$

15 $\langle 7, -8 \rangle$

16 $\langle -1, -1 \rangle$

17 $\langle 3, 5 \rangle$

18 $\langle 0, 0 \rangle$

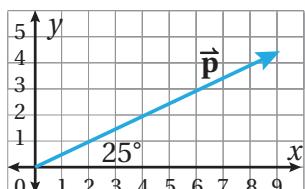
19 $\langle 2, 9 \rangle$

إذا كانت M هي نقطة متصرف \overline{FG} ، حيث $F(4, 2)$ و $G(2, 6)$ ، وكانت O هي نقطة الأصل، فأكتب كل متجه مما يأتي بالصورة الإحداثية:

20 \vec{FG}

21 \vec{GF}

22 \vec{OM}



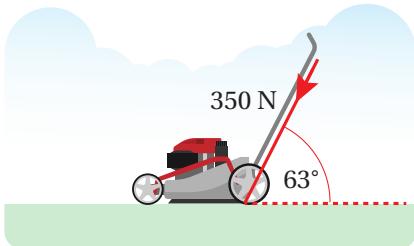
أعبر عن اتجاه المتجه \vec{p} في الشكل المجاور بطريقتين. 23



حيوانات: أكتب السرعة المتجهة لعلب يطارد أرنبًا على منحدر بالصورة الإحداثية إذا كانت سرعته الأفقية $v_x = 27 \text{ km/h}$,

وسرعته الرأسية $v_y = 25 \text{ km/h}$ 24

الوحدة 7



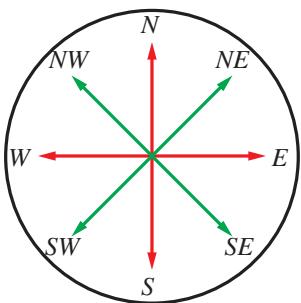
فيزياء: تدفع نور عربة بقوة مقدارها 350N،

وبزاوية قياسها 63° مع المحور الأفقيّ.

أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية.

26 أكتب المتجه \vec{v} بالصورة الإحداثية إذا كان $27 = |\vec{v}|$ ، وصنع زاوية مقدارها 90° مع محور x .

27 أكتب المتجه \vec{v} بالصورة الإحداثية إذا كان $10 = |\vec{v}|$ ، وصنع زاوية مقدارها 320° مع محور x .



28 خرج عبد الرحمن من منزله، وسار بخط مستقيم شرقاً إلى المسجد مسافة 248 m، ثم خرج منه مرة أخرى، وسار بخط مستقيم جنوباً نحو منزل صديقه يحيى مسافة 562 m. أُبَرِّ عن المسار بين منزل عبد الرحمن ومنزل صديقه على شكل متوجه بالصورة الإحداثية (إرشاد: البُعد بين نقطتين هو أقصر مسافة بينهما).

مهارات التفكير العليا

29 **تحدد:** إذا كان $|\vec{AB}| = \sqrt{13}$ حيث $A(1, 2)$ نقطة بدايته، والنقطة $B(3, y)$ نقطة نهايته، فأجد إحداثيّ النقطة B مُبرّراً إجابتي.

30 **تبين:** ما مجموعة قيم b التي يكون عندها مقدار المتجه $\langle b, 4 \rangle$ يساوي 5؟ أبُرِّرُ إجابتي.

31 **اكتشف الخطأ:** حسب كل من ناصر ولily مقدار المتجه $\langle -1, 6 \rangle = \vec{v}$ ، فكانت إجابة كل منهما كما يأتي:

لily

$$|\vec{v}| = \sqrt{35}$$

ناصر

$$|\vec{v}| = 37$$

هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة، مُبرّراً إجابتي؟

32 **مسألة مفتوحة:** أرسم متجهًا على المستوى الإحداثي، ثم أكتبُه بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

الدرس

2

جمع المتجهات وطرحها

Adding and Subtracting Vectors

فكرة الدرس



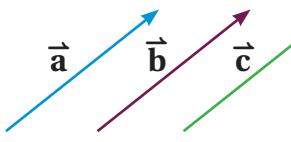
المتجهات المتساوية، المتجهات المتوازية، معكوس المتجه، المحصلة، المتجه الصفرى.



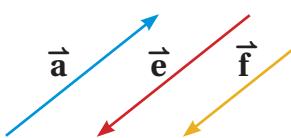
مسألة اليوم



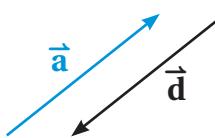
بدأت طائرة رحلتها نحو الشمال قطعت مسافة 400 km ثم اتجهت شرقاً وقطعت مسافة 250 km إذا مثل كل من المسارين اللذين سلكتهما الطائرة متجهاً في المستوى الإحداثي، فماذا يمكن أن يمثل جمع هذين المتجهين؟



المتجهان المتساويان (equal vectors) هما متجهان لهما نفس الاتجاه والمقدار. وفي الشكل المجاور، المتجهات \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} متساوية، وبالرموز:



المتجهان المتوازيان (parallel vectors) هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه. وفي الشكل المجاور، المتجهات \vec{a} , \vec{e} , \vec{f} متوازية، وبالرموز:



معكوس المتجه (opposite vectors) هو متجه له نفس مقدار متجه آخر، لكنه في اتجاه معاكس له. وفي الشكل المجاور، المتجه \vec{d} معكوس المتجه \vec{a} ، وبالرموز: $\vec{d} = -\vec{a}$.

أتعلم

لا يُشترط أن يكون للمتجهين المتساوين نقطتا البداية والنهاية ذاتهما.

في الشكل المجاور، $QRSP$ متوازي أضلاع، فيه $\vec{a} = \vec{PQ}$ ، $\vec{b} = \vec{QR}$. أُعبر عن كل مما يأتي باستعمال المتجهين \vec{a} و \vec{b} :

1 \vec{SR}

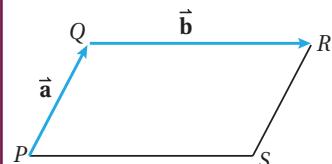
$$\vec{SR} = \vec{a}$$

متوجه موازٍ ومساوٍ للمتجه \vec{PQ}

2 \vec{SP}

$$\vec{SP} = -\vec{b}$$

متوجه موازٍ ومعكوس للمتجه \vec{QR}



مثال 1

الوحدة 7

3) \overrightarrow{QP}

$$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$$

متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجه \overrightarrow{PQ}

4) \overrightarrow{RQ}

$$\overrightarrow{RQ} = -\vec{b}$$

متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجه \overrightarrow{QR}

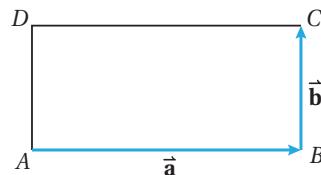
أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، $ABCD$ مستطيل، فيه $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ، و $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. أُعبر عن كلٌّ مما يأتي باستعمال المتجهين \vec{a} و \vec{b} :

a) \overrightarrow{AD}

b) \overrightarrow{DC}

c) \overrightarrow{CB}



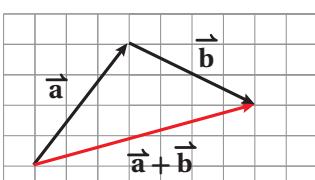
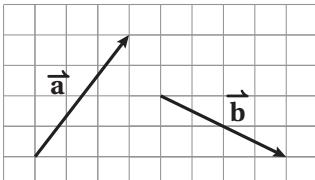
جمع المتجهات الهندسياً

يمكن إيجاد ناتج جمع متجهين أو أكثر هندسياً.

لإيجاد $\vec{a} + \vec{b}$ هندسياً، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أرسم المتجه \vec{a} .

الخطوة 2: أرسم المتجه \vec{b} بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه \vec{a} .



الخطوة 3: أصل بين نقطة بداية المتجه \vec{a} ونقطة نهاية المتجه \vec{b} ، فيكون المتجه الناتج هو المتجه $\vec{a} + \vec{b}$.

يُسمى المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر المحصلة (resultant)، وتسمى هذه الطريقة في جمع المتجهات هندسياً قاعدة المثلث.

أتعلم

لا يتأثر المتجه بتغيير موقعه ما دام أن اتجاهه ومقداره لم يتغيرا.

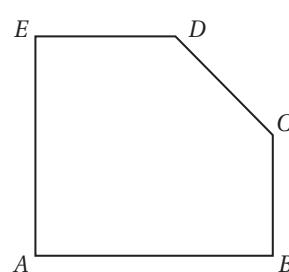
اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب المتجه الذي يمثل ناتج الجمع في كلٌّ مما يأتي:

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

أصل نقطة بداية \overrightarrow{BC} بنقطة نهاية \overrightarrow{CA} ، فيتُوج \overrightarrow{BA}

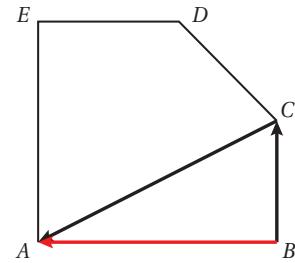
مثال 2



2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC}$$

أصل نقطة بداية \overrightarrow{BA} بنقطة نهاية \overrightarrow{EC}



3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

أصل نقطة بداية \overrightarrow{AB} بنقطة نهاية \overrightarrow{DE}

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}$$

أصل نقطة بداية \overrightarrow{AB} بنقطة نهاية \overrightarrow{CA}

اتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل في المثال 2، أكتب المتجه الذي يمثل ناتج الجمع في كلٍ مما يأتي:

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$

أتعلم

- يُسمى المتجه \overrightarrow{AA} المتجه الصفرى، وهو متجه ليس له مقدار واتجاه.
- لأى متجه \vec{a} ، فإن:

$$\vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$$

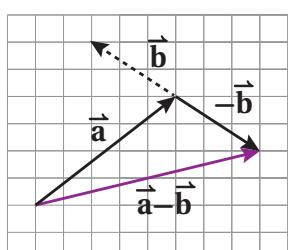
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = 0$$

طرح المتجهات هندسياً

يمكن إيجاد ناتج طرح متجهين أو أكثر هندسياً.

لإيجاد $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ ، أجمع المتجه \overrightarrow{a} مع معکوس المتجه \overrightarrow{b} ؛ أي:

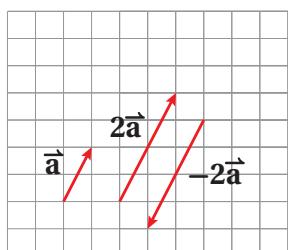
$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$



ولذلك يمكن إيجاد ناتج طرح $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ هندسياً بطريقة مشابهة لعملية الجمع. وذلك بإيجاد محصلة \overrightarrow{a} و $-\overrightarrow{b}$ كما في الشكل المجاور.

ضرب المتجه في عدد ثابت هندسياً

يتوجّز من ضرب المتجه \overrightarrow{a} في العدد الحقيقي k متجه موازٍ للمتجه \overrightarrow{a} ، ويكون للمتجهين $k\overrightarrow{a}$ ، و \overrightarrow{a} الاتجاه نفسه إذا كان k عدداً موجباً، واتجاهان متعاكسان إذا كان k عدداً سالباً.

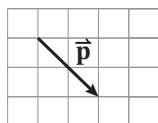
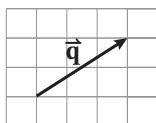


$$2\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}$$

$$-2\overrightarrow{a} = (-\overrightarrow{a}) + (-\overrightarrow{a})$$

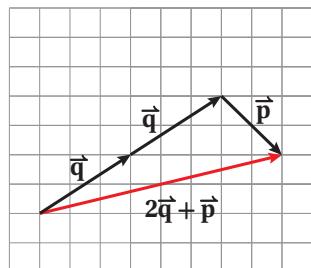
الوحدة 7

مثال 3



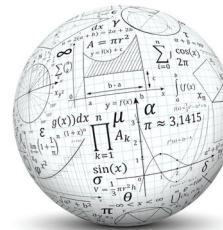
اعتماداً على الشكل المجاور، أجد هندسياً كلاً ممّا يأتي:

1) $2\vec{q} + \vec{p}$

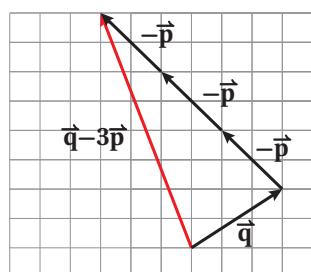


الخطوة 1: أرسم المتجه $2\vec{q}$

الخطوة 2: أجد محصلة المتجهين $2\vec{q}$ و \vec{p}



2) $\vec{q} - 3\vec{p}$



الخطوة 1: أرسم المتجه $3\vec{p}$ من رأس المتجه \vec{q}

الخطوة 2: أجد محصلة المتجهين \vec{q} و $-3\vec{p}$

أتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل في المثال 3، أجد هندسياً كلاً ممّا يأتي:

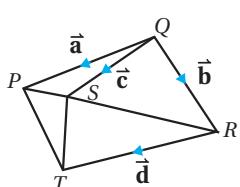
a) $\vec{p} + 3\vec{q}$

b) $3\vec{q} - 2\vec{p}$

c) $2\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}$

اكتشفت المتجهات قبل 200 عام تقريباً، وهي تُعد من الفروع الحديثة في علم الرياضيات مقارنة بعلم الجبر. وقد أسهم اكتشافها كثيراً في الرابط بين الهندسة والجبر، ما أدى إلى تطور علم الرياضيات.

يمكن استعمال قاعدة المثلث بطريقة عكسية؛ لكتابة متجه يمثل ضلعاً في شكل هندسي بدلالة متجهات تمثل أضلاعاً أخرى في الشكل.



اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلاً من المتجهات الآتية

بدلالة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

مثال 4

1) \vec{PS}

$$\begin{aligned}\vec{PS} &= \vec{PQ} + \vec{QS} \\ &= -\vec{a} + \vec{c} \\ &= \vec{c} - \vec{a}\end{aligned}$$

بجمع المتجهين هندسياً باستعمال ΔPQS
بالتعويض
بالتبسيط

2) \vec{RP}

$$\vec{RP} = \vec{RQ} + \vec{QP}$$

$$= -\vec{b} + \vec{a}$$

$$= \vec{a} - \vec{b}$$

بجمع المتجهين هندسياً باستعمال ΔRQP

بالتعويض

بالتبسيط

3) \vec{PT}

$$\vec{PT} = \vec{PR} + \vec{RT}$$

$$= (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{d}$$

$$= \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$$

بجمع المتجهين هندسياً باستعمال ΔPRT

$$\vec{PR} = -\vec{RP} = -(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$$

بالتبسيط

4) \vec{TS}

$$\vec{TS} = \vec{TR} + \vec{RS}$$

$$= \vec{TR} + (\vec{RQ} + \vec{QS})$$

$$= -\vec{d} + (-\vec{b} + \vec{c})$$

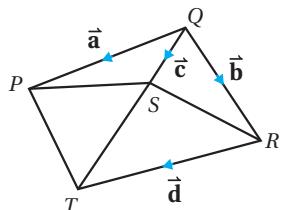
$$= \vec{c} - \vec{b} - \vec{d}$$

بجمع المتجهين هندسياً باستعمال $\Delta TRS, \Delta RQS$

$$\vec{RS} = \vec{RQ} + \vec{QS}$$

بالتعويض

بالتبسيط



أتحقق من فهمي

اعتماداً على الشكل المجاور، أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

a) \vec{SR}

b) \vec{QT}

c) \vec{PT}

c) \vec{ST}

جمع المتجهات وطرحها وضربها في ثابت جبرياً

يمكن إيجاد ناتج الجمع والطرح والضرب في ثابت للمتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية عن طريق جمع مركباتها الأفقيّة والرأسيّة، أو طرحها.

جمع المتجهات وطرحها وضربها في ثابت

مفهوم أساسى

إذا كان $\langle x_1, y_1 \rangle = \vec{a}$ ، $\langle x_2, y_2 \rangle = \vec{b}$ ، وكان k عدداً حقيقياً، فإنَّ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \quad \vec{a} - \vec{b} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \quad k\vec{a} = \langle kx_1, ky_1 \rangle$$

الوحدة 7

مثال 5

إذا كان $\langle 1, 3 \rangle$, $\langle -4, 6 \rangle$, و $\langle 3, 1 \rangle$, فأجد كلاً ممّا يأتي:

1) $\vec{a} + \vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \langle 3 + (-4), 1 + 6 \rangle \\ &= \langle -1, 7 \rangle\end{aligned}$$

2) $2\vec{a}$

$$2\vec{a} = \langle 2 \times 3, 2 \times 1 \rangle = \langle 6, 2 \rangle$$

3) $\vec{c} - \vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{c} - \vec{b} &= \langle -3 - (-4), -1 - 6 \rangle \\ &= \langle 1, -7 \rangle\end{aligned}$$

4) $\vec{a} + \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{c} &= \langle 3 + (-3), 1 + (-1) \rangle \\ &= \langle 0, 0 \rangle\end{aligned}$$

أفكّر

ما العلاقة بين المتجهين
 $\vec{v} - \vec{u}$, $\vec{u} - \vec{v}$

أتعلم

المتجه \vec{a} هو معكوس
 للمتجه \vec{c} ; لأنَّ مجموعهما
 يساوي المتجه الصفرِي؛
 أي إنَّ:
 $\vec{a} + \vec{c} = \mathbf{0}$

أتحقق من فهمي

إذا كان $\langle 3, 1 \rangle$, $\langle 7, -2 \rangle$, و $\langle 0, -5 \rangle$, فأجد كلاً ممّا يأتي:

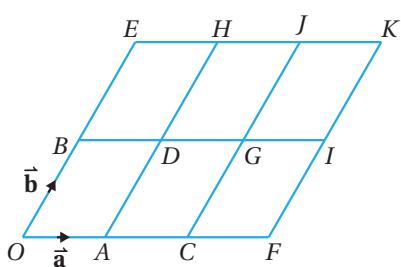
a) $-\vec{b}$

b) $4\vec{c}$

c) $\vec{b} - \vec{c}$

d) $4\vec{a} + 3\vec{c}$

أتدرب وأحل المسائل



أحدُد كلاً ممّا يأتي اعتماداً على الشكل المجاور الذي يتكونُ من متوازياتٍ أصلَعٌ صغيرٌ متطابقٌ:

1) ثلاثة متجهات متساوية للمتجه \vec{a}

2) ثلاثة متجهات موازية للمتجه \vec{b}

3) ثلاثة متجهات معاكسٍ للمتجه \vec{a}

4) ثلاثة متجهات متساوية للمتجه \overrightarrow{OD}

5) ثلاثة متجهات متساوية للمتجه \overrightarrow{OG}

باستعمال الشكل الوارد في السؤال السابق، أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b}

7 متوجه الموضع للنقطة E

6 المتوجه \vec{OC}

9 المتوجه \vec{OG}

8 متوجه الموضع للنقطة F

11 المتوجه \vec{OK}

10 المتوجه \vec{AG}

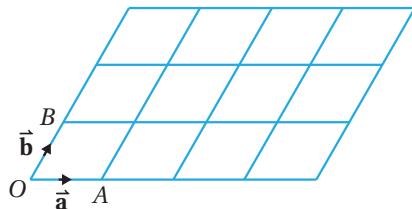
إذا كان $\langle \vec{a} = \langle 34, -86 \rangle, \vec{b} = \langle -65, 17 \rangle, \vec{c} = \langle 9, -1 \rangle \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

12 $\vec{a} + \vec{c}$

13 $\vec{b} - \vec{a}$

14 $3\vec{c} + \vec{b}$

15 $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$



أنسخ الشكل المجاور الذي يتكون من متوازيات أضلاع صغيرة متطابقة، ثم أحدد عليه موقع النقاط C, D, E, F بحيث تحقق كلاً مما يأتي:

16 $\vec{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

17 $\vec{OD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

18 $\vec{OE} = 4\vec{a}$

19 $\vec{OF} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$

إذا كان $\langle 7, -5 \rangle = \langle 3x - y, y - x^2 \rangle$ ، فما قيمة كل من x و y ؟ 20

إذا كان $\langle 2, 4 \rangle = \langle -3, -2 \rangle$ ، فأمثل كلاً من المتجهات الآتية على المستوى الإحداثي:

21 $\vec{e} + \vec{f}$

22 $3\vec{f}$

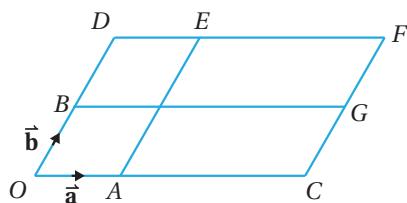
23 $\vec{e} - \vec{f}$

24 $\vec{f} - \vec{e}$

25 $4\vec{e}$

26 $2\vec{f} + \vec{e}$

إذا كان $\langle 5, 9 \rangle = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأجد $|\frac{1}{3}\vec{e}|$ ، $|4\vec{d} - 3\vec{e}|$ ، إذا كان $\vec{e} = \langle 5, 9 \rangle$ ، $\vec{d} = \langle 11, -8 \rangle$ 27



يتكون الشكل المجاور من مجموعتين من المستقيمات المتوازية، إذا كان $\vec{OC} = 3\vec{OA}$ ، $\vec{OD} = 2\vec{OB}$ فأكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b}

28 \vec{OF}

29 \vec{OG}

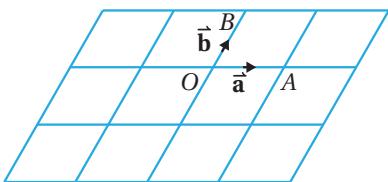
30 \vec{EG}

31 \vec{CE}

اعتتماداً على الشكل السابق أحدد متجهين كل منهما يساوي $(3\vec{a} - \vec{b})$ 32

الوحدة 7

33 نزهة بحرية: أبحر قارب سياحي مسافة 40 km جنوبًا، ثم تحرك مسافة 70 km في اتجاه الشرق. أستعمل جمع المتجهات لاكتب متجهاً يمثل محصلة رحلة القارب وأجد بعده عن نقطة انطلاقه.



أنسخ الشكل المجاور المكون من متوازيات أضلاع صغيرة متطابقة، ثم أحدد عليه موقع النقاط C, D, E, F, G, H, I, J بحيث تحقق كلاً مما يأتي:

34 $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - \vec{b}$

35 $\overrightarrow{OD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

36 $\overrightarrow{OE} = \vec{a} - 2\vec{b}$

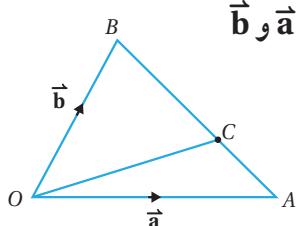
37 $\overrightarrow{OF} = \vec{b} - 2\vec{a}$

38 $\overrightarrow{OG} = -\vec{a}$

39 $\overrightarrow{OH} = -\vec{a} - 2\vec{b}$

40 $\overrightarrow{OI} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

41 $\overrightarrow{OJ} = -\vec{a} + \vec{b}$

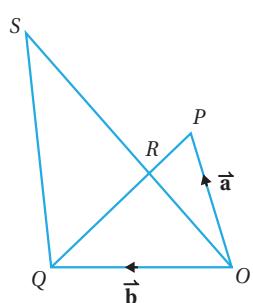


في الشكل المجاور إذا كانت C كانت تقسماً \overline{AB} بنسبة $2:5$ فأكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة \vec{a} و \vec{b}

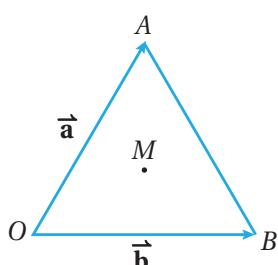
42 \overrightarrow{AB}

43 \overrightarrow{AC}

44 \overrightarrow{OC}



45 **برهان:** في الشكل المجاور، إذا كانت R تقسماً كلاً من \overline{PQ} ، \overline{OS} ، و \overline{PQ} بنسبة $2:1$ ، وكان $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ ، $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$ ، فأثبت أنَّ المتجهين \overrightarrow{OP} و \overrightarrow{QS} متوازيان.



تحدد: يظهر في الشكل المجاور المثلث متطابق الأضلاع OAB الذي مر كُره النقطة M ؛ ما يعني أنَّ المستقيم الواصل بين رأس المثلث والنقطة M عمودي على الضلع المقابل:

46 أكتب المتجهة \overrightarrow{AB} بدلالة \vec{a} و \vec{b}

47 أثبت أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

الدرس

3

الضرب القياسي

Scalar Product



ضرب المتجهات، واجاد قياس الزاوية بين متجهين.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



دفع محمد عربة طفلته بقوة مقدارها N 70، وبزاوية مقدارها 54° مسافة m 18. ما مقدار الشغل الذي بذله لدفع العربة بوحدة جول (J)، وبإهمال قوة الاحتكاك؟

تعرّفت سابقاً على العمليات على المتجهات، مثل ضرب متجه في عدد ثابت، وسائلنا في هذا الدرس كيفية إيجاد ناتج ضرب متجهين. **الضرب القياسي** (scalar product) هو عملية جبرية بين متجهين، تنتهي كمية قياسية يرمز إليها بالرموز $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ، وتقراً: \vec{v} dot \vec{w}

الضرب القياسي

مفهوم أساسى

$$\text{إذا كان } \langle v_1, v_2 \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2, \text{ و } \vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle, \text{ فإن: } \vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

مثال 1

أتعلم

يسمى الضرب القياسي أيضاً الضرب النقطي
Dot product

إذا كان $\langle 2, 8 \rangle = \vec{v}$ ، و $\langle -5, 4 \rangle = \vec{w}$ ، فأجد $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

$$= 2 \times -5 + 8 \times 4$$

$$= -10 + 32$$

$$= 22$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعمير

بالتبسيط

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$

أتحقق من فهمي

أتعلم

لأي متجه \vec{u} ، فإن:
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

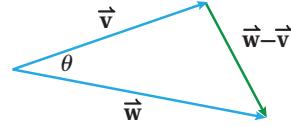
إذا كان $\langle -3, 2 \rangle = \vec{v}$ ، و $\langle 6, 9 \rangle = \vec{u}$ ، فأجد كل ما يأتي:

c) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

96

الوحدة 7

تعَرَّفْتُ سابقاً أَنَّهُ إِذَا كَانَ $\langle w_1, w_2 \rangle = \vec{w} = \langle v_1, v_2 \rangle = \vec{v}$ ، فَإِنَّ طُولَ المَتَجِهِ المَرْسُومِ بِاللُّوْنِ $\vec{w} - \vec{v} = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2 \rangle$ ، حِيثُ: وباستعمال قانون جيبِ التَّامِمِ، فَإِنَّ:



$$|\vec{w} - \vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 = w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$-2w_1v_1 - 2w_2v_2 = -2|\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta \quad \text{بالتَّبَسيطِ}$$

$$w_1v_1 + w_2v_2 = |\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta \quad \text{بالتَّبَسيطِ}$$

$$v_1w_1 + v_2w_2 = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta \quad \text{الخَاصِيَّةُ التَّبَدِيلِيَّةُ}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$$

ولذلك، فَإِنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

الزاوية بين متجهين

مفهوم أساسىٰ

يمكِّنُ إِيجادُ قِياسِ الزَّاوِيَّةِ θ بَيْنَ المَتَجِهِيْنِ \vec{a} وَ \vec{b} حِيثُ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

أَعْلَمُ

الزاوية بَيْنَ مَتَجِهِيْنِ هِيَ الزَّاوِيَّةُ الصُّغُرِيَّةُ المَحصُورَةُ بَيْنَهُمَا عَنْ رَسْمِهِمَا بَدْءاً بِالنَّقْطَةِ نَفْسَهَا؛ أَيْ إِنَّ $0^\circ \leq \theta \leq \pi$

مثال 2

أَجِدُّ قِياسَ الزَّاوِيَّةِ θ المَحصُورَةُ بَيْنَ المَتَجِهِيْنِ $\langle 8, 6 \rangle = \vec{a}$ ، وَ $\langle 4, 3 \rangle = \vec{b}$.

الخطوة 1: أَجِدُّ مَقْدَارَ المَتَجِهِ \vec{a} .

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

بالتَّعويضِ

$$= \sqrt{100} = 10$$

بالتَّبَسيطِ

الخطوة 2: أَجِدْ مقدارَ المتجهِ \vec{b} .

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

صيغةُ مقدارِ المتجهِ
بالتعميض
بالتبسيط



تُستخدمُ المتجهات في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونية؛ فهي تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكمُ فيها اللاعبونَ.

الخطوة 3: أَجِدْ الضربَ القياسيَّ للمتجهينِ \vec{a} و \vec{b} .

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \\ &= 6 \times 3 + 8 \times 4 \\ &= 18 + 32 \\ &= 50 \end{aligned}$$

صيغةُ الضربِ القياسيِّ
بالتعميض
بالتبسيط

الخطوة 4: أَعُوّضُ القيمةَ الناتجةَ من الخطوةِ السابقةِ في صيغةِ الزاويةِ بينَ متجهينِ.

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{50}{10 \times 5} = 1 \end{aligned}$$

بالتعميض

$$\theta = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

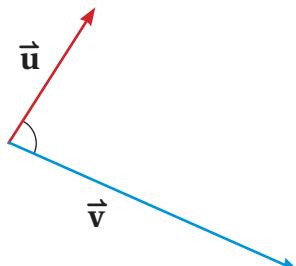
بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهينِ \vec{a} و \vec{b} صفرٌ، فهُمَا متوازيانِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدْ قياسَ الزاويةِ θ المحسورةَ بينَ المتجهينِ $\langle 2, 7 \rangle$ و $\langle 1, -1 \rangle$.

إرشاد

أرسمُ المتجهينِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوىِ الإحداثيِّ، مُلاحظًا وضعَ التوازيِ بينَهما.



إذا كانَ \vec{a} و \vec{b} متجهينِ غيرَ صفرائيِّينِ، وكانتِ الزاويةُ المحسورةُ بينَهما قائمةً، فإنَّ المتجهينِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ ضربِهما القياسيِّ صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90^\circ = 0$

الوحدة 7

مثال 3

أُحدِّد إذا كانَ المتجهان $\langle 4, -6 \rangle = \vec{v}$ ، و $\langle 2, 3 \rangle = \vec{u}$ متعامدين أم لا.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \\ &= 2 \times -6 + 3 \times 4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعمير

بالتبسيط

بما أن $0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ، فإنَّ المتجهين متعامدان.

أتحقق من فهمي

أُحدِّد إذا كانَ المتجهان $\langle 1, 0 \rangle = \vec{v}$ ، و $\langle 3, -5 \rangle = \vec{u}$ متعامدين أم لا.

أتعلم

وحدة قياسِ الشغل هي نيوتن - متر، وتُسمى الجول، ويُرمزُ إليها بالرمز J

توجد تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضرب القياسي للمتجهات، أهمُّها حسابُ الشغل W الناتج من تأثير قوة ثابتة F بزاوية مُحددة θ على جسم ما؛ لتحريكه من نقطةٍ إلى أخرى مسافةً مقدارُها d وحدةً. فالشغل هو كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجِ الضرب القياسي لمتجهِ القوة في متجهِ الإزاحة، ووحدة قياسه هي جول (J). يمكن إيجاد مقدارِ الشغل باستعمال الصيغة الآتية:

$$W = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos\theta$$

مثال 4: من الحياة



فيزياء: سحبَ عاملٌ صندوقاً بقوةٍ مقدارُها

$$W = \vec{F} = 13 \text{ N}$$

سحبِ الصندوق مسافةً أفقيةً مقدارُها

$$d = 18 \text{ m}$$

بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ

(بإهمالِ قوةِ الاحتكاك) لأقربِ جزءٍ من عشرة؟

$$W = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos\theta$$

قانونُ الشغل

بالتعمير

بالتبسيط

$$20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$$

$$20 = 234 \times \cos\theta$$

$$\frac{20}{234} = \cos\theta$$

بالتبسيط

$$\theta = \cos^{-1}(0.0855)$$

معكوس جيب التمام

$$\theta = 85.1^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة



أتحقق من فهمي

سحب منذر عربة، بذل شغلاً مقداره $J = 13$ ، بقوة مقدارها

$$d = 30 \text{ m}, 50 \text{ N}$$

ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة

المقطوعة (إهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟

أتدرب وأحل المسائل



أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

1 $\vec{a} = \langle 6, 8 \rangle, \vec{b} = \langle 4, -3 \rangle$

2 $\vec{u} = \langle -3, 11 \rangle, \vec{v} = \langle -9, 4 \rangle$

3 $\vec{c} = \langle -12, 43 \rangle, \vec{v} = \langle 22, 14 \rangle$

4 $\vec{d} = \langle 21, 32 \rangle, \vec{e} = \langle -21, 25 \rangle$

5 إذا كان $6 = |\vec{b}|$ ، و $9 = |\vec{a}|$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين \vec{a} و \vec{b} هو 42° ، فأجد ناتج $\vec{a} \bullet \vec{b}$

6 إذا كان $76 = |\vec{b}|$ ، و $34 = |\vec{a}|$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين \vec{a} و \vec{b} هو 120° ، فأجد ناتج $\vec{b} \bullet \vec{a}$

7 أجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{b} = \langle 7, 10 \rangle - \langle 4, -10 \rangle$ لأقرب جزء من عشرة.

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما:

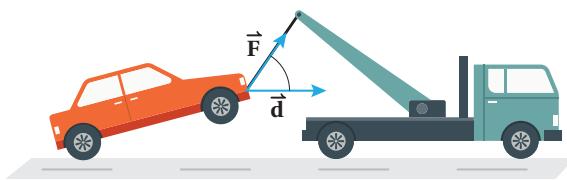
8 $\vec{c} = \langle 2, 4 \rangle, \vec{d} = \langle -24, 12 \rangle$

9 $\vec{a} = \langle 4, 16 \rangle, \vec{k} = \langle 8, -2 \rangle$

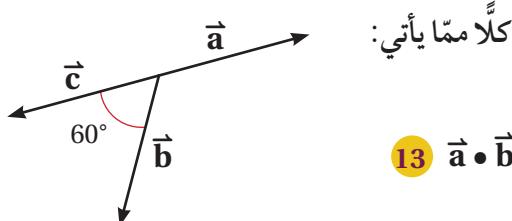
10 أحدد إذا كان المتجهان $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle, \vec{e} = \langle 11, -8 \rangle$ متعامدين أم لا، مبرراً إجابتي.

11 إذا كان $\langle -4, 3 \rangle, \vec{r} = \langle b, b+2 \rangle$ متجهين متعامدين، فأجد قيمة b .

الوحدة 7



سيارات: تسحب شاحنة سيارة كما في الشكل المجاور. إذا كان مقدار قوة السحب $|\vec{F}| = 34\text{N}$ ، والمسافة المقطوعة $|d| = 12\text{ km}$ ، وشغل الشاحنة المبذول $W = 46\text{J}$ ، فأجد قياس زاوية السحب.



في الشكل المجاور، إذا كان $2 = |\vec{a}|$ ، و $4 = |\vec{b}|$ ، و $5 = |\vec{c}|$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

$$13 \quad \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$14 \quad \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$15 \quad \vec{a} \cdot \vec{c}$$

أكمل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



برهان: إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات، وكان $\vec{0}$ المتجهة الصفرية، فأثبت صحة كلٍ مما يأتي:

$$17 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$18 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$19 \quad \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$$

مسألة مفتوحة: إذا كان $\langle 6, 2 \rangle = \vec{q}$ ، فأجد قيمة محتملة للمتجه \vec{p} .

مسألة مفتوحة: أجد متجهاً يعادل المتجه $\langle -8, -2 \rangle$.

تبرير: أبين باستعمال المتجهات أن المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(6, -2), (1, 5), (-4, -2)$ مُتطابق الضلعين، ثم أجد قياسات جميع زواياه، مبرراً إجابتي.

تبرير: إذا كان المتجهان $\langle r, -1 \rangle = \vec{a}$ ، و $\langle 2, -3 \rangle = \vec{b}$ متوازيين، فما قيمة r ؟

اختبار نهاية الوحدة

إذا كان $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, -3 \rangle$. فإذا كان $2\vec{b} \cdot \vec{a}$ تساوي: ⑧

- a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانت النقاط A, B, C, D نقاطاً في المستوى الإحداثي، حيث $A(4, -1), B(2, -3), D(7, 1)$. فإذا كان C هي النقطة إذا كان: ⑨

$$\vec{AC} = -2\vec{AB}$$

$$⑩ \quad \vec{DC} = \frac{1}{3}\vec{DB}$$

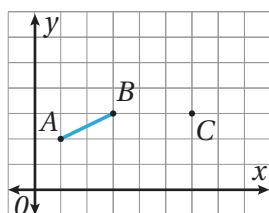
أحدد في ما يأتي العبارات الصحيحة، مصححا الخطأ في غير الصحيح منها:

النحوين المتساوين لهما نفس المقدار. ⑪

المتجهان المتوازيان لهما نفس المقدار والاتجاه. ⑫

لأن متجهين: \vec{v} و \vec{u} ، فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. ⑬

أنسخ الرسم البياني الآتي، ثم استعمله لأجيب عن الأسئلة التي تليه:



إذا كان $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة E على المستوى الإحداثي. ⑭

إذا كان $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ ، فأحدد النقطة D على المستوى الإحداثي. ⑮

إذا كان $\vec{AB} = 2\vec{AM}$ ، فأحدد النقطة M على المستوى الإحداثي. ⑯

إذا كانت $\vec{DC} = k\vec{AM}$ ، فأجد قيمة الثابت k . ⑰

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

إذا كان $\langle 1, -1 \rangle = \vec{v}$ ، فإن $|\vec{v}|$ تساوي: ⑯

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

إذا كان $\vec{BA} = A(2, 5), B(-1, 7)$ هو: ⑯

- a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$
c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

العبارة الصحيحة في ما يأتي هي: ⑯

(a) مقدار المتجه $\langle 4, 2 \rangle$ يساوي 20

(b) مقدار المتجه $\langle 10, -4 \rangle$ يساوي

(c) مقدار المتجه $\langle -3, 4 \rangle$ يساوي 7

(d) مقدار المتجه $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

إذا كانت $|AB| = 3\sqrt{2}$ ، وكان $A(0, 2)$, $B(3, y)$ ، فإن y تساوي: ⑯

- a) 5 b) -1
c) 5, -1 d) 7, -3

إذا كان $\langle 1, 5 \rangle = \vec{v}$ ، $\vec{u} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجيب عن الأسئلة: ⑯

إذا كان $\vec{v} - \vec{u}$ تساوي: ⑯

- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$
c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

إذا كان $\vec{p} + 2\vec{v} = \vec{u}$ ، فإن $|\vec{p}|$ تساوي: ⑯

- a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

معكوس المتجه $\vec{v} + \vec{u}$ هو: ⑯

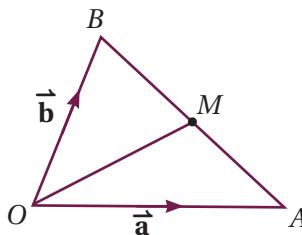
- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 2, -4 \rangle$
c) $\langle 4, 6 \rangle$ d) $\langle -4, -6 \rangle$

اختبار نهاية الوحدة

25 أَلْقَعْتُ طائِرَتَانِ معاً مِنَ الْمَطَارِ فِي الْوَقْتِ نَفْسِيهِ. وَقَدْ رَصَدَ بَرْجُ الْمَراقبَةِ حِرْكَةَ الطَّائِرَتَيْنِ، فَوُجِدَ بَعْدَ ثَوَانٍ عِدَّةً أَنَّ $\langle 6, 8 \rangle = \vec{a}$ يُمَثِّلُ مَسَارَ الطَّائِرَةِ الْأُولَى، وَأَنَّ $\langle 4, -3 \rangle = \vec{b}$ يُمَثِّلُ مَسَارَ الطَّائِرَةِ الثَّانِيَةِ. هُلْ يَتَعَامِدُ مَسَارَا الطَّائِرَتَيْنِ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

تدريب على الاختبارات الدولية

26 أَجِدُ الزَّاوِيَةَ θ بَيْنَ الْمَتَجَهِيْنِ \vec{p} وَ \vec{q} إِذَا كَانَ $\vec{p} = \langle 5, -1 \rangle$, $\vec{q} = \langle -2, 3 \rangle$

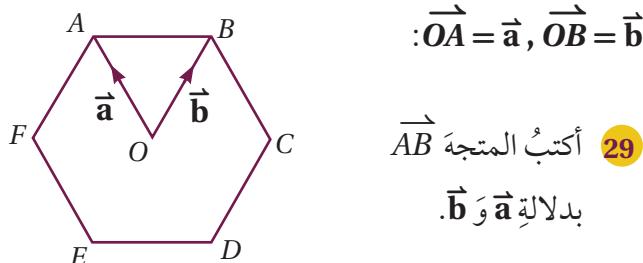


يُمَثِّلُ الشَّكْلُ الْمَجاوِرُ الْمَتَجَهِيْنِ \vec{OB} وَ \vec{OA} الْمَرْسُومِيْنِ فِي الْوَضِيعِ الْقِيَاسِيِّ، حِيثُ O نَقْطَةُ الْأَصْلِ، وَ M نَقْطَةُ مُنْتَصِفٍ لِلقطْعَةِ الْمُسْتَقِيمَةِ AB .

27 أَكْتُبُ الْمَتَجَهَ AB بَدْلَالَةِ \vec{a} وَ \vec{b} .

28 أَبْرُرُ أَنَّ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$.

الشَّكْلُ الْمَجاوِرُ هُوَ سَدَاسِيٌّ مُنْظَمٌ، مَرْكُزُهُ O ، وَفِيهِ



$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

29 أَكْتُبُ الْمَتَجَهَ AB بَدْلَالَةِ \vec{a} وَ \vec{b} .

30 إِذَا مُدَّ AB عَلَى اسْتِقَامَتِهِ حَتَّى النَّقْطَةِ K بِحِيثُ كَانَتْ $AB : BK = 1 : 2$ ، فَأَكْتُبُ الْمَتَجَهَ CK بَدْلَالَةِ \vec{a} وَ \vec{b} .

إِذَا كَانَ $\langle 1, 5 \rangle = \vec{u}$ ، وَ $\langle 2, -1 \rangle = \vec{v}$ ، وَ $\langle 4, -2 \rangle = \vec{w}$ ، فَأَجِدُ كَلَّا مَمَّا يَأْتِي:

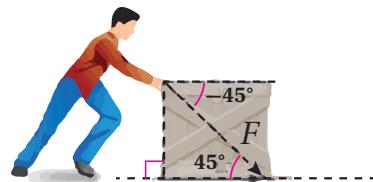
18 $-3(\vec{v} - \vec{w})$

19 $\vec{v} \cdot 2\vec{u}$

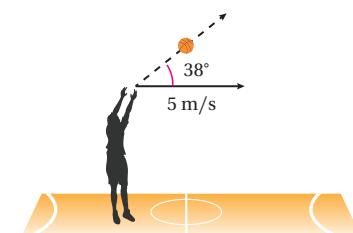
20 $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w})$

21 الزَّاوِيَةُ بَيْنَ الْمَتَجَهِيْنِ \vec{v} وَ \vec{w} .

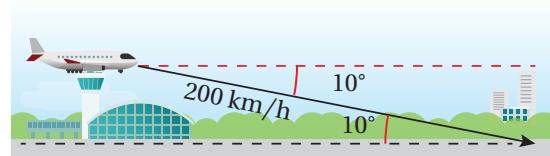
22 دَفَعَ عَامِلٌ صَنْدُوقًا بِقُوَّةِ $N 78$ ، وَبِزاوِيَةِ 45° – كَمَا فِي الشَّكْلِ التَّالِي. أَجِدُ مَقْدَارَ الشُّغُلِ الَّذِي بِذَلِكَ الْعَامِلُ لَتَحْرِيكِ الصَّنْدُوقِ مَسَافَةً 12 m



23 رَكَضَ حَسَامٌ فِي اتِّجَاهِ السَّلَةِ فِي أَثْنَاءِ مَبَارَةِ دُورِيِّ كُرَةِ السَّلَةِ بِسُرْعَةٍ أَفْقيَةٍ مَقْدَارُهَا 5 m/s ، وَقَذَفَ الْكُرَةَ بِسُرْعَةٍ مَقْدَارُهَا 20 m/s ، وَبِزاوِيَةٍ قِيَاسُهَا 38° مَعَ الْأَفْقِيِّ. أَجِدُ مَحَصَّلَةَ سُرْعَةِ الْكُرَةِ.



24 هَبَطَتْ طَائِرَةٌ بِسُرْعَةٍ مَقْدَارُهَا 200 km/h ، وَبِزاوِيَةٍ انْخَافِاضٍ قِيَاسُهَا 10° . أَكْتُبُ السُّرْعَةَ الْمَتَجَهَةَ لِلْطَّائِرَةِ بِالصُّورَةِ الْإِلَهَائِيَّةِ.



الإحصاء والاحتمالات Statistics and Probabilities

ما أهمية هذه الوحدة؟

يساعدنا علم الإحصاء والاحتمالات على تفسير الظواهر، وتحليل البيانات الكثيرة في حياتنا اليومية. فمثلاً، إذا أردت استنتاج العلاقة بين زمن الاستيقاظ صباحاً وتحصيل الطلبة الدراسييّ، فإنني أحتج إلى أداة إحصائية تُسمى شكل الانتشار، ومفهوم الارتباط، وهو مما سأتعلّمه في هذه الوحدة.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ▶ وصف العلاقة بين متغيرين باستعمال شكل الانتشار، والمستقيم الأفضل مطابقاً.
- ▶ إيجاد قيم الربعيات والمؤنثات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
- ▶ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المُنظمَة في جداول تكرارية ذات فئات.
- ▶ حساب احتمال حوادث مركبة، والاحتمال المشروط.

تعلّمت سابقاً:

- ✓ تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات.
- ✓ إيجاد مقاييس التوزع المركزية للبيانات (مفردات، جداول تكرارية)، وتحديد أثر إجراء تحويل خططي للقيم في مقاييس نزعتها المركزية.
- ✓ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المفردة أو المُنظمَة في جداول تكرارية.
- ✓ حساب الاحتمال لحوادث بسيطة ومركبة.

مشروع الوحدة

مستوى الأقارب التعليمي

جمع بيانات عن مستوى الأقارب التعليمي، وتنظيمها، وتحليلها، وكتابة استنتاجات عنها.

فكرة المشروع



برمجية جيوجبرا، برمجية العرض التقديمي (بوربوينت).

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

رقم العائلة	المستوى التعليمي	
	الزوجة	الزوج
1		
2		
3		

1 أجمع بيانات من 12 عائلة من أقاربي أو جيراني عن المستوى التعليمي للزوج والزوجة.

2 أنظم في الجدول المجاور البيانات التي جمعتها على النحو الآتي:

- أدون في عمود الزوج والزوجة قيمًا عددية وفق التصنيف الآتي: من دون تعليم (1)، الأساسي (2)، الثانوي (3)، الدبلوم (4)، البكالوريوس (5)، الماجستير (6)، الدكتوراه (7).

3 أستعمل برمجية جيوجبرا لتمثيل القيم العددية لمستوى تعليم الزوج والزوجة في صورة أزواج مرتبة على هيئة شكل انتشار، ثم أجد معايرة المستقيم الأفضل مطابقة لل نقاط الاشتراك عشرة.

فئات المستوى التعليمي	عدد الزوجات	عدد الأزواج
1-3		
4-6		
7-9		

4 أنظم البيانات التي جمعتها في الجدول السابق في جدول تكراري ذي فئات كما في الجدول المجاور.

5 أحسب الانحراف المعياري للمستوى التعليمي لكل من الأزواج والزوجات، ثم أقارن بينهما، وأفسرهما.

6 أكتب حادثتين متنافيتين، وآخرين غير متنافيدين عن اختيار شخص (أو أكثر) عشوائياً من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوفه معهما معاً، واحتمال وقوفه أحدهما على الأقل.

7 أكتب حادثتين مستقلتين، وآخرين مشروطتين عن اختيار شخص (أو أكثر) عشوائياً من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوفه معهما معاً.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعة عرضاً تقديميّاً (بوربوينت) يلخص العمل، وما توصل إليه كل فرد في المجموعة، وما تعلمه من هذا المشروع؛ على أن يتضمن العرض التقديمي صوراً للجدوار، وشكل الانتشار، وجميع الاستنتاجات التي توصل إليها في أثناء تنفيذ المشروع.

الدرس

1

أشكال الانتشار

Scatter Graphs

فهم أشكال الانتشار، ووصفها، واستعمال المستقيم الأفضل لتقدير قيمة أحد متغيرين بمعرفة قيمة الآخر.

شكل الانتشار، الارتباط الموجب، الارتباط السالب، المستقيم الأفضل مطابقة.



ادعى رakan أنه كلما زاد طول الشخص زادت المسافة بين طرفه ذراعيه عند مدّهما على استقامه. كيف تتحقق من صحة ادعائه؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



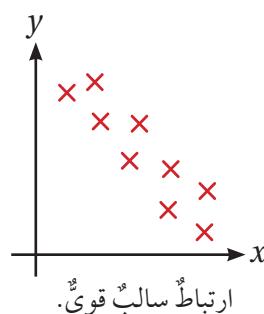
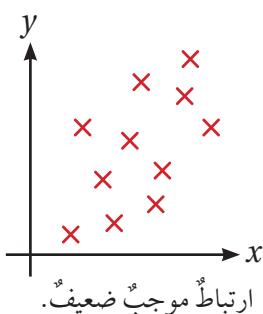
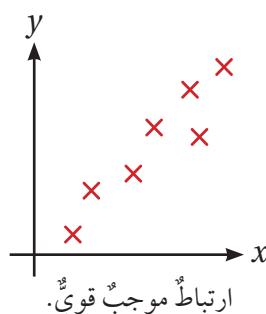
يتعين علينا في كثير من المواقف الحياتية استكشاف العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ووصف هذه العلاقة. ومن الأمثلة على ذلك:

• طول الإنسان ومعدل نبضات قلبه.

• تحصيل الطلبة في الرياضيات وتحصيلهم في العلوم.

شكل الانتشار (scatter graph) هو تمثيل بياني يوضح العلاقة (إن وجدت) بين مجموعتين من البيانات، وتظهر فيه نقاط تمثل بيانات المجموعتين بوصفها أزواجًا مرتبة (y, x) في المستوى الإحداثي؛ إذ تمثل بيانات المتغير x على المحور الأفقي الموجب، وتتمثل بيانات المتغير y على المحور الرأسي الموجب.

الارتباط (correlation) هو وصف العلاقة بين مجموعتي البيانات. وقد يكون الارتباط موجباً (positive correlation)، أو سالباً (negative correlation)، أو قوياً، أو ضعيفاً، كما في أشكال



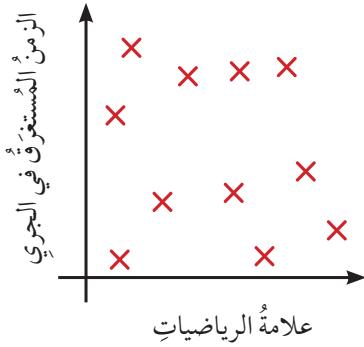
الانتشار الآتية:

أتعلم

الاحظ عدم وجود حاجة إلى الأجزاء السالبة من المحاور في المستوى الإحداثي؛ لأن النقطة التي تمثل شكل الانتشار موجبة.

الوحدة 8

من الملاحظ أنه كلما كان الارتباط موجباً قوياً تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله موجب، وأنه كلما كان الارتباط سالباً قوياً تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله سالب.

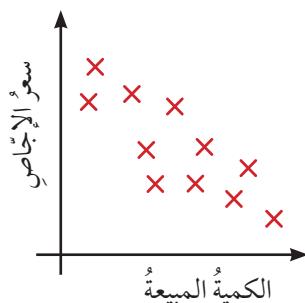


أما إذا كان الارتباط ضعيفاً (أو لا يوجد ارتباط)، فإن النقاط في شكل الانتشار تكون متاثرةً ومتباعدةً كما في شكل الانتشار المجاور، الذي يُظهر العلاقة بين تحصيل مجموعة من الطلبة في مادة الرياضيات والزمن الذي استغرقه كل منهم في الجري مسافة 800 m

مثال 1

هل يوجد ارتباط بين بيانات المتغيرين الممثلين في كل من شكل الانتشار الآتيين؟ في حالة وجود ارتباط بينها، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟

1

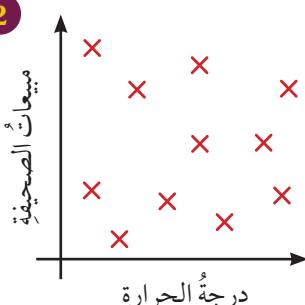


يُظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين سعر الإجاص وكميته المبيعة. وبناءً على توزيع النقاط في هذا الشكل، فإن كمية الإجاص المبيعة كانت قليلة عندما كان سعره مرتفعاً، والعكس صحيح. وهذا يشير إلى وجود ارتباط سالب؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار متقاربة، فهو قوي.



يُزرع في دول العالم المختلفة نحو 300 نوع من الإجاص.

2



يُظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين درجة الحرارة ومبيعات إحدى الصحف. ومن الملاحظ أنه لا يوجد ارتباط أو علاقة واضحة بين درجات الحرارة ومبيعات الصحفية؛ لأنَّ نقاط شكل الانتشار متباعدة.

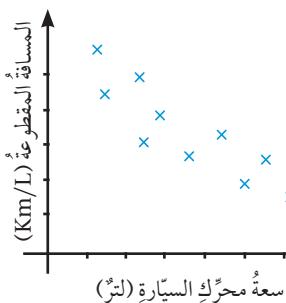
أتحقق من فهمي

هل يوجد ارتباطٌ بينَ بياناتِ المُتغيّرينِ المُمثّلينِ في كلّ شكلٍ منْ أشكالِ الانتشارِ الآتية؟ في حالة وجود ارتباطٍ بينها، هل هو موجبٌ أم سالبٌ؟ هل هو قويٌ أم ضعيفٌ؟

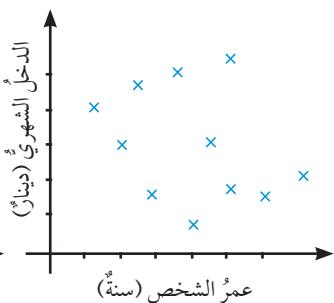


يعدُّ معدّل استهلاك السيارة للوقود أحدَ أهمِ العوامل المحفّزة لشرائها؛ لذا تحرصُ مصانعُ السياراتِ دائمًا على ابتكارِ أساليبٍ تكنولوجيةٍ للحدّ منَ استهلاكِ الوقود.

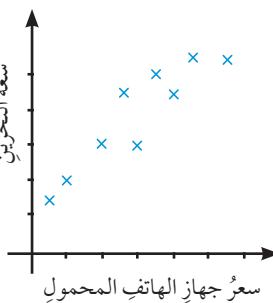
a)



b)



c)

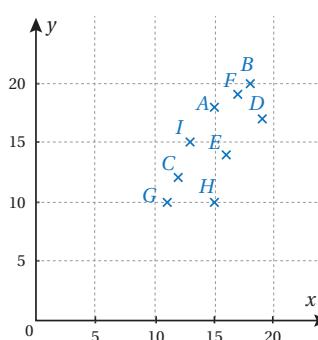


عندَ تمثيلِ مجموعتينِ منَ البياناتِ بمتغيّرينِ مثلِ (x) و (y) ، يمكنُ تمثيلِ شكلِ الانتشارِ يدوياً، أو باستعمالِ برمجية جيوجبرا، وذلكَ بتعيينِ نقاطِ شكلِ الانتشارِ بوصفِها أزواجاً مرتبةً (x, y) ؛ لأنَّهَا منْ وصفِ الارتباطِ (إنْ وجدَ).

مثال 2

أُمِّلِّ البياناتِ في الجدولِ الآتي على شكلِ انتشارٍ، ثمَّ أصِفُّ الارتباطَ بينَ المُتغيّرينِ (x) و (y) :

مدة الاستحمام (x) بالدقائق للشخص، وكمية المياه المستهلكة (y) باللتر.									
الشخص	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15



أُعِينُ الأزواجَ المرتبةَ في المستوى الإحداثيٍّ كما في الشكلِ المجاور.

بالنظرِ إلى شكلِ الانتشارِ، يلاحظُ وجودُ ارتباطٍ موجبٍ قويٌّ بينَ المُتغيّرينِ (x) و (y) ؛ لأنَّهُ كلَّما زادَتْ قيمةُ (x) في أغلِّ الحالاتِ زادَتْ قيمةُ (y) ؛ أيْ كلَّما زادَتْ مدةُ الاستحمامِ لشخصٍ ما زادَتْ كميةُ المياهِ التي يستهلكُها.



يعاني الأردنُ شحًا في الموارِدِ المائية؛ ولهذا، فإنَّ عدمَ الإسرافِ في استهلاكِ المياهِ هو واجبٌ دينيٌّ ووطنيٌّ.

الوحدة 8

أتحقق من فهمي

أمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثم أصف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

سعر السيارة (x) بألوف الدنانير، وعمر السيارة (y) بالسنوات.

السيارة	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

المستقيم الأفضل مطابقة (line of best fit) هو مستقيم يمر بأكبر عدد من نقاط شكل الانتشار، بحيث يكون عدد النقاط التي لا يمر بها متساوياً (تقريباً) على جهتين، وتكون أقصر المسافات بينه وبين النقاط التي لا يمر بها متساوية (تقريباً).

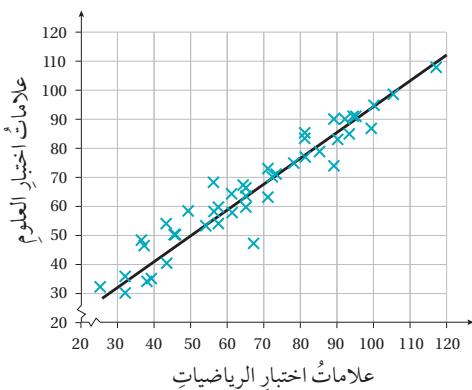
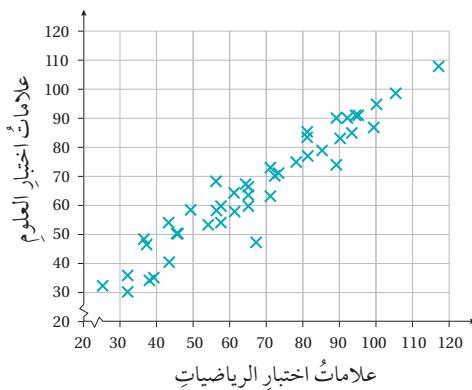
يُستعمل المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد المتغيرين في شكل الانتشار ذي الارتباط القوي بمعنوية قيمة المتغير الآخر.

إرشاد

يرسم المستقيم الأفضل مطابقة بالنظر عامة ولرسمه، يُفضل استعمال مسطرة شفافة.

أتعلم

عند عدم الحاجة إلى بدء المحاور في التمثيل البياني من نقطة الأصل، توضع قبل قيم البدء للمحورين خطوط متعرجة تدل على إهمال جزء من المحورين الإحداثيين



مثال 3

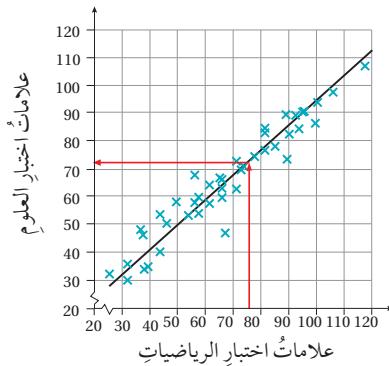
اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثل علامات اختبار الرياضيات وعلامات اختبار العلوم لمجموعة من الطلبة، أجب عن الأسئلة الآتية:

1 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة للبيانات الممثلة في شكل الانتشار.

أرسم المستقيم الأفضل مطابقة باستعمال المسطرة كما في الشكل المجاور.

الاحظ أنَّ الارتباط بين المتغيرين موجب وقوي.

2 علامة طالب في اختبار الرياضيات 75، لكنه غاب عن اختبار العلوم بسبب مرضه. أستعمل المستقيم الأفضل مطابقة الذي رسمته لتقدير علامته المحتملة في مادة العلوم.



أقدر علامة هذا الطالب في مادة العلوم برسم مستقيم رأسي، بدءاً بالعلامة 75 على المحور الأفقي حتى يلتقي بالمستقيم الأفضل مطابقة. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيماً أفقياً، وصولاً إلى المحور الرأسي، فأقدر علامته بنحو 72 كما في الشكل المجاور.

3 أجد معادلة المستقيم الأفضل مطابقة. يمكن إيجاد معادلة المستقيم إذا علمت إحداثيات أي نقطتين يمرُّ بهما، ولتكن $(53, 53)$ و $(95, 90)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

معادلة مستقيم يمرُّ ب نقطتين معلومتين

$$y - 53 = \frac{90 - 53}{95 - 53} (x - 53)$$

بتعمير إحداثيات النقطتين

$$y = 0.88x + 6.36$$

بالتبسيط

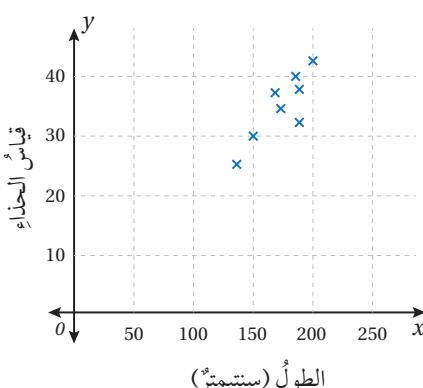
إرشاد

بما أنه يمكن رسم أكثر من مستقيم، و اختيار أي نقطتين يمرُّ بهما المستقيم (يختلف هذا الاختيار من شخص إلى آخر)، فإنَّ معادلة المستقيم قد تختلف تبعاً للنقطتين المختارتين.

تحقق من فهمي

اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يمثل الطول (x) بالستيمتر، وقياس الحذاء (y) لمجموعة من الأشخاص، أجيِّب عما يأتي:

(a) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

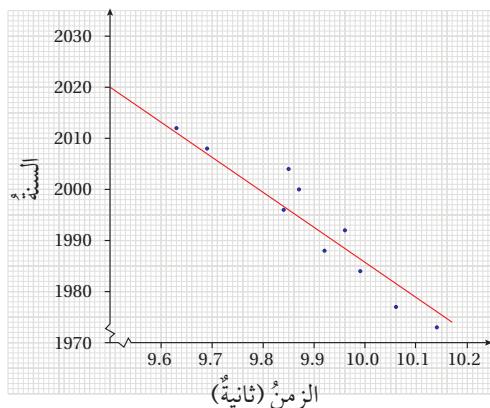


(b) أقدر قياس الحذاء لشخص طوله 190 cm.

الوحدة 8

من المحاذير التي يجب التنبأ لها، استعمال شكل الانتشار لعمل استنتاجات؛ فشكل الانتشار يكون مفيداً فقط ضمن مدى القيم المعطاة. أما في حال الخروج عن هذا المدى فقد تكون الاستنتاجات مضللة، أو غير منطقية.

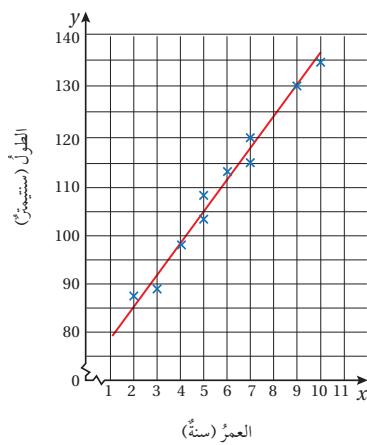
مثال 4



يُمثل شكل الانتشار المجاور الأزمنة المُدورة لصاحب المركز الأول في سباق 100 m للرجال في عدد من دورات الألعاب الأولمبية. استعمل المستقيم الأفضل مطابقة المعطى في الشكل لتقدير الزمن الذي سيحقق صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2020.

هل يمكن تقدير الزمن الذي سيحقق صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2038؟

إذا استعملت المستقيم الأفضل مطابقة، فأقدر الزمن من المستغرق لقطع مسافة السباق بنحو 9.5 ثوانٍ في دورة عام 2020م، ولكن هذا التقدير لا ينطبق على الدورات الأولمبية التالية الخارجية عن مدى القيم المعطاة؛ فوفقاً لهذا التقدير، يتوقع استمرار انخفاض الزمن المستغرق لقطع مسافة السباق إلى 9 ثوانٍ، و8.5 ثوانٍ، و8 ثوانٍ، ...، وهكذا حتى الوصول إلى دورة لن يحتاج فيها المتسابقون إلى أي زمان لقطع مسافة السباق التي طولها 100 m، وهذا غير منطقي.



أتحقق من فهمي

استعمل المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل المجاور لتقدير طول طفل عمره 8 سنوات. هل يمكن استعمال هذا الشكل لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؟ أBrief إجابتي.

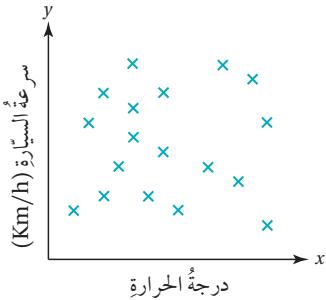


الألعاب الأولمبية: حدث رياضي دولي يُنظم كل سنتين في السنوات الزوجية، بتناوب الألعاب الصيفية والألعاب الشتوية.

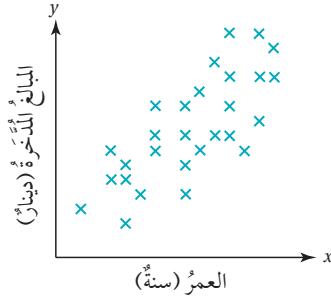


أَصِفُ الارتباط في شكلِي الانتشارِ الآتيين:

1



2



3

ماذا أستنتج من شكلِي الانتشارِ السابقين؟ أبُرُّ إجابتي.

يُمثّل الجدول الآتي العُمر والطُول والكتلة لسبع لاعباتٍ من فريق كرَّة الطائرة في إحدى المدارسِ:

اسم اللاعبة	وفاء	هنُد	عائشة	هدى	تغريد	ابتسام	سميرة
العمر (سنة)	14	15	11	11	12	15	13
الطول (ستيمتر)	169	168	154	158	162	165	161
الكتلة (كيلوغرام)	40	42	35	32	37	42	41

أرسم أشكالَ الانتشارِ، ثم أَصِفُ الارتباطَ لكُل منها:

6 العُمرُ مقابل الكتلة.

5 الطُولُ مقابل الكتلة.

4 العُمرُ مقابل الطُولِ.

تجربةٌ علميةٌ: يُبيّن الجدول الآتي المسافة بالسنتيمتر، والسرعة بالسنتيمتر لكل ثانية، عند درجة كرَّة على سطح طاولة، بدءاً ب نقطة محددة:

المسافة (cm)	10	20	30	40	50	60	70	80
السرعة (cm/s)	18	16	13	10	7	5	3	0

أرسم شكلَ الانتشارِ لبياناتِ الجدولِ.

أرسم المستقيم الأفضل مطابقاً لبياناتِ.

أقدرُ سرعةَ الكرة لحظة قطعها مسافة 5 cm من نقطة انطلاقها.

أقدرُ المسافةَ التي قطعتها الكرة من نقطة انطلاقها عندما كانت سرعتها 12 cm/s

الوحدة 8

لحل المسألة الواردة في بداية الدرس، أجمع بيانات من 10 طلبة عشوائياً، ثم أدونها في الجدول الآتي، ثم أجيب عن الأسئلة التي تلي:

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول الطالب										
المسافة بين طرف ذراعيه (cm)										

أصِفُ الارتباط بين المتغيرين.

12

أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

11

هل ادعاء راكان صحيح؟ أبّرّ إجابتي.

13

أطوال: يبيّن الجدول الآتي أطوال 20 آباء وأبنائهم الذين تبلغ أعمارهم 20 سنة بالستيمتر:

طول الأب	178	186	164	152	169	174	183	147	162	153
طول الابن	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
طول الأب	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175
طول الابن	152	160	150	156	164	170	154	160	167	172

إرشاد

يمكن تمثيل طول الأب على المحور الأفقي بتدريب يتراوح بين 140 cm و 200 cm، وتمثيل طول الابن على المحور الرأسى بتدريب يتراوح بين 140 cm و 200 cm أيضًا.

أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

14

هل صحيح أنَّ الأب الطويل ابنه طويل؟ أبّرّ إجابتي.

15

أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

16

في دراسة مسحية لمعلم عن عدد ساعات ممارسة الرياضة ومشاهدة التلفاز أسبوعياً شملت 20 طالباً في أحد الصنوف التي يدرّسها، كانت نتيجة الملح كما في الجدول الآتي:

عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	3	5	15	11	0	9	7	6	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	18	26	24	16	19	27	12	13	17	14
عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	10	7	6	7	3	1	2	0	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	22	16	18	22	12	28	18	20	25	13

أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

17

إذا كان أحد الطلبة من الصفي نفسيه يشاهد التلفاز مدة 8 ساعات أسبوعياً، فهل يمكن تقدير عدد الساعات التي يمارس فيها الرياضة أسبوعياً؟ أبّرّ إجابتي.

سيارة أجرة: يُبيّن الجدول الآتي المسافات المقطوعة بالكيلومتر والمدة الزمنية المستغرقة بالدقائق لـ 10 رحلات قام بها سائق سيارة أجرة في أحد الأيام:

المسافة (km)	1.6	3.8	5.2	6.6	4.8	2.9	3.9	5.8	8.8	5.4
الزمن (min)	3	17	11	13	9	15	8	11	16	10

- 19) أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول، بوضع الزمن على المحور الأفقي.
- 20) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.
- 21) إذا استغرقت إحدى الرحلات 5 دقائق، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقاديرها لهذه الرحلة؟
- 22) ما الزمن الذي يمكن تقاديره لرحلة قطع فيها السائق مسافة 4 km ؟
- 23) إذا استغرقت إحدى الرحلات ساعة كاملة، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقاديرها لهذه الرحلة؟ أبّرّ إجابتني.

مهارات التفكير العليا



24) **تبرير:** يُبيّن الجدول الآتي علامات 10 طالبات في اختباري الرياضيات والجغرافيا. إذا كانت إحدى الطالبات مريضة عند تقديمها اختبار الجغرافيا، فمن هي؟ أبّرّ إجابتني.

المنى	فداء	علياء	سعاد	سارة	رقية	دعاء	تهاني	بسملة	إيمان	الاسم
168	163	152	145	151	167	167	142	155	145	علامات اختبار الرياضيات
156	180	162	166	173	181	168	158	173	175	علامات اختبار الجغرافيا

25) **اكتشف الخطأ:** بالعودة إلى الجدول في السؤال السابق، لم تتقدم سميحة لاختبار الجغرافيا، وقد أحضرت علامة 75 في اختبار الرياضيات. قدّرت سميحة أنها ستحصل على علامة 80 في اختبار الجغرافيا لو أنها قدّمت. هل تقادير سميحة منطقية؟ أبّرّ إجابتني.

26) **مسألة مفتوحة:** أختار متغيرين، ثم أنشئ جدولًا أنظم فيه بعض قيمهما، ثم أستعمله للتثبت بالقيمة الحقيقية لأحد المتغيرين باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

27) **تبرير:** لماذا يوصف الارتباط بأنه موجب في شكل الانتشار الذي يمثل مبيعات أحد المحال من المثلجات على مدار أشهر السنة؟ هل يعني ذلك أن أحد المتغيرين (مبيعات المثلجات، أو أشهر السنة) سبب لآخر؟ أبّرّ إجابتني.

رسم المستقيم الأفضل مطابقةً

Graphing the Line of Best Fit

يمكنُ استعمال برمجية جيوجبرا الرسم المستقيم الأفضل مطابقةً لنقاطٍ شكلِ الانتشار.

نشاط

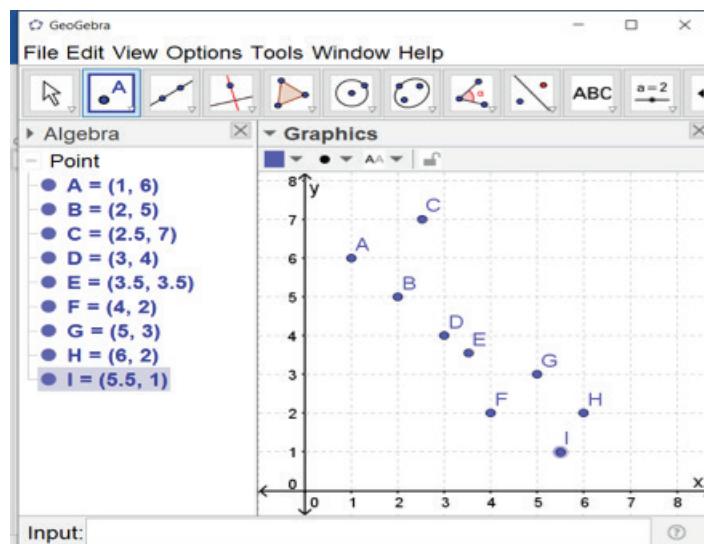
أرسمُ المستقيم الأفضل مطابقةً للبيانات الواردة في الجدول الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا.

x	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6	5.5
y	6	5	7	4	3.5	2	3	2	1

لرسمِ المستقيم الأفضل مطابقةً، أَتَّبعُ الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُعِينُ النقاطَ في المستوى الإحداثي.

اختارُ أيقونة منْ شريطِ الأدواتِ، ثُمَّ أنقرُ عندَ موقعِ كُل زوجِ مُرتبٍ في المستوى البيانيِّ، لظهورِ النقاطُ كما في الشكلِ الآتي:



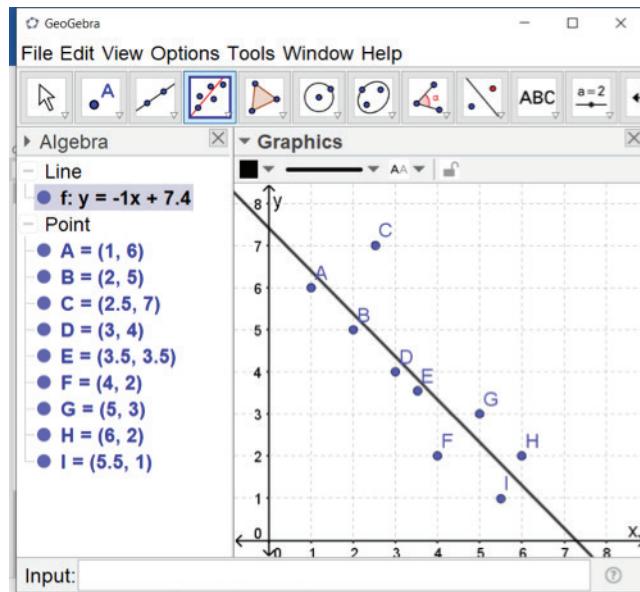
يمكِّنُ أيضًا تعريفُ النقاطِ بإدخالِ كُل منها في شريطِ الإدخالِ باستعمالِ لوحةِ المفاتيحِ في صورة: $A = (x, y)$.

الخطوة 2: أرسم المستقيم الأفضل مطابقة.

أختار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أحدد جميع النقاط التي عيّتها في المستوى الإحداثي، بوضع المؤشر في أي مكان بعيداً عن النقاط، ثم الضغط باستمرار على الزر الأيسر لفأرة الحاسوب، مع السحب لشمول جميع النقاط، عندئذ سيظهر المستقيم الأفضل مطابقة، وتنظر معادلته إلى يسار الشاشة كما في الشكل الآتي:

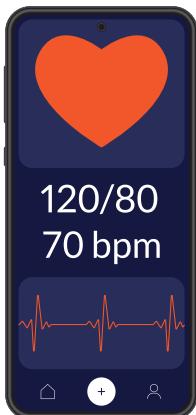
الشكل

لإظهار هامش (Algebra)، أختار من قائمة العرض (Algebra) .(View)



أتدرّب

أحل الأسئلة (16, 9, 10, 8) في الدرس السابق باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أقارن الحل بحلّي اليدوي.



تحوي الهاتف المحمول تطبيقاً يستعمل لرصد معدل نبضات القلب. استعمل هذا التطبيق لرصد معدل نبضات القلب لـ 10 أشخاص على الأقل، ثم أقيس طول كل منهم، ثم أرسم شكل الاتساع والمستقيم الأفضل مطابقة باستعمال برمجية جيوجبرا.

الدرس

2

المنحنى التكراري التراكميُّ Cumulative Frequency Graph

تعرفُ الرباعياتِ والمئيناتِ، وإيجادُها للبياناتِ المُبُوَّبةِ في جداولِ تكراريَّةٍ باستعمالِ المنحنى التكراريِّ التراكميِّ.

فكرةُ الدرس



المنحنى التراكميُّ، المئيناتُ.

المصطلحات



مسألةُ اليوم



يُبيّنُ الجدولُ المجاورُ رواتبَ الموظفينَ في إحدى الشركاتِ. ما عددُ الموظفينَ الذينَ تزيدُ رواتبُهم على 520 ديناراً؟

فئاتُ الرواتبِ	عددُ الموظفينَ
$349 \leq x < 399$	8
$399 \leq x < 449$	12
$449 \leq x < 499$	15
$499 \leq x < 549$	9
$549 \leq x \leq 599$	6

يُمثّلُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ (cumulative frequency graph) للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولِ تكراريَّةٍ ذاتِ العلاقةِ بينَ التكرارِ التراكميِّ للفئاتِ في التوزيعِ التكراريِّ والحدودِ العلياِ للفئاتِ.

مثال 1

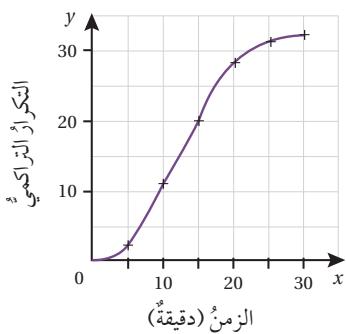
الزمنُ (دقيقةٌ)	التكرارُ (عددُ الطلبة)
$0 \leq x < 5$	2
$5 \leq x < 10$	9
$10 \leq x < 15$	9
$15 \leq x < 20$	8
$20 \leq x < 25$	3
$25 \leq x \leq 30$	1

يُبيّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ الذي يستغرقهُ طلبةُ الصفِ العاشرُ في الوصولِ إلى المدرسةِ. أرسِمُ المنحنى التكراريُّ التراكميُّ للبياناتِ.

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميُّ بإضافةِ عمودٍ للتكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ الآتي. أضيفُ الحدَّ الأعلىِ للفئةِ التي تسبقُ الفئةَ الأولىِ التي يساوي تكرارُها صفرًا.

أضيف فئةً جديدةً
إلى الجدول
تكرارها يساوي
صفرًا.

الحدود العليا للبيانات	التكرار التراكمي
0	0
5	$0 + 2 = 2$
10	$2 + 9 = 11$
15	$2 + 9 + 9 = 20$
20	$2 + 9 + 9 + 8 = 28$
25	$2 + 9 + 9 + 8 + 3 = 31$
30	$2 + 9 + 9 + 8 + 3 + 1 = 32$



الخطوة 2: أرسم المنحنى التكراري التراكمي.

أرسم منحنى يمثل العلاقة بين الحدود العليا لفئات الزمن بالدقات (المتغير x) والتكرار التراكمي (المتغير y ، التي تمثلها الأزواج المربطة الآتية:

$$(0, 0), (5, 2), (10, 11), (15, 20), \\ (20, 28), (25, 31), (30, 32)$$

معلومة

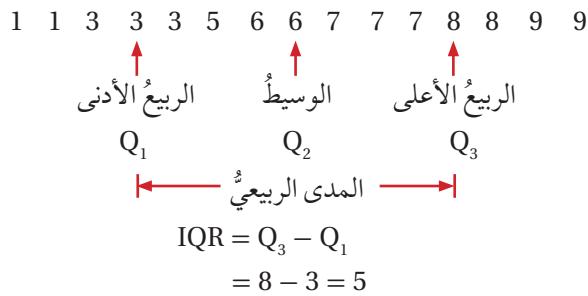
محافظة المفرق هي ثانية أكبر محافظات المملكة الأردنية الهاشمية من حيث المساحة، وتقع في الشمال الشرقي للمملكة.

الفئات (درجة الحرارة)	التكرار (عدد الأيام)
$5 \leq x < 8$	1
$8 \leq x < 11$	7
$11 \leq x < 14$	9
$14 \leq x < 17$	6
$17 \leq x < 20$	5
$20 \leq x < 23$	1
$23 \leq x \leq 26$	1

تحقق من فهمي
طقس: يبيّن الجدول التكراري المجاور درجات الحرارة في محافظة المفرق في أحد أشهر فصل الربيع. أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

تعَرَّفتُ سابقاً على الربعيات؛ وهي ثلاثة قيم تقسم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية. وهذه القيم هي: الربع الأدنى (Q_1)؛ وهو وسيط النصف الأدنى من البيانات، والربع الأوسط (Q_2)؛ وهو وسيط البيانات كلها، والربع الأعلى (Q_3)؛ وهو وسيط النصف الأعلى من البيانات. تعَرَّفتُ أيضاً على المدى الربعي؛ وهو مدى البيانات التي تقع بين الربع الأدنى والربع الأعلى.

الوحدة 8



المئيني (percentile): هو قيمة أكبر من نسبة مئوية محددة من البيانات، فمثلاً، إذا حصلت في اختبار الحاسوب على درجة تساوي «المئيني الأربعين»، فإن ذلك يعني أن درجتك أعلى من درجات 40% من الطلبة الذين تقدموا للختبار، ويرمز للمئيني الأربعين بالرمز P_{40} .

يمكن تقدير قيم الرباعيات والمئينات للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنهجي التكراري التراكمي.

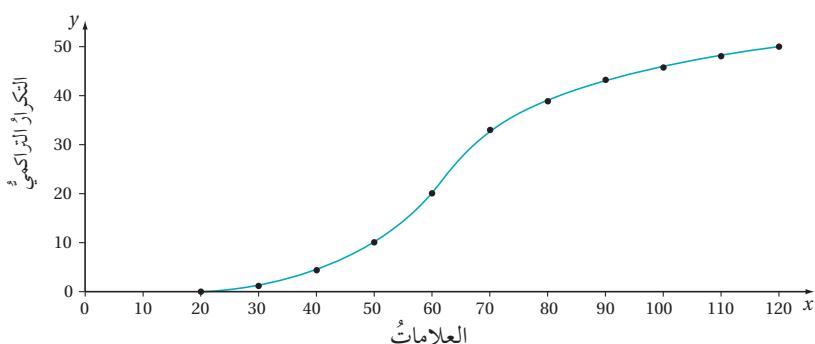
أتعلم

بما أن الربيع الأدنى (Q_1) أكبر من ربع البيانات فإنه يساوي المئين الخامس والعشرين (P_{25}). وهكذا فإن:

$$Q_1 = P_{25}, \quad Q_2 = P_{50}, \\ Q_3 = P_{75}$$

مثال 2

يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور علامات 50 طالباً في اختبار اللغة العربية:

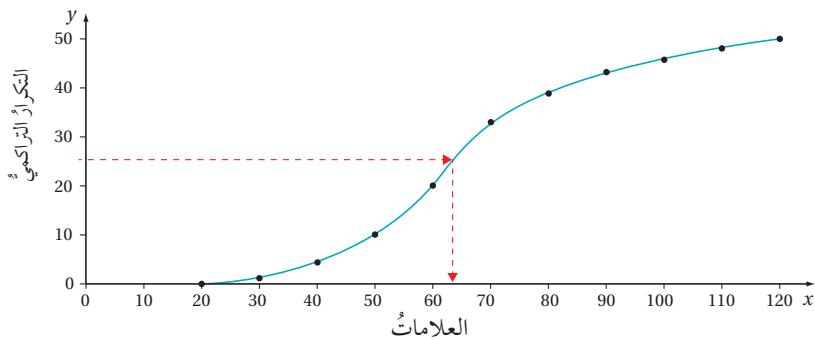


1. أقدر وسيط البيانات.

الخطوة 1: أحدد رتبة الوسيط.

بما أن عدد الطلبة 50 طالباً، فإن رتبة الوسيط هي: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

الخطوة 2: أرسم مستقيماً أفقياً بدءاً بالتقرار التراكمي 25 حتى يتقطع مع المنحنى التكراري التراكمي. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيماً رأسياً حتى يتقطع مع المحور الأفقي (العلامات) كما في الشكل الآتي.



إذن، قيمة الوسيط هي العلامة 64 تقريرياً.

أَجِدُّ المدى الربيعيّ ②

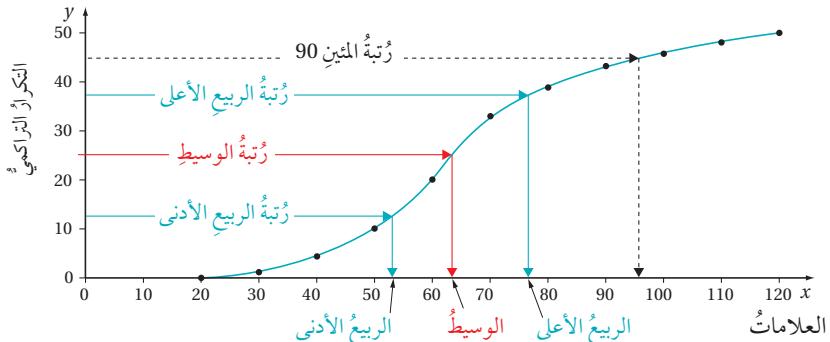
الخطوة 1: أُحدِّدُ رُتبة الربع الأدنى، ورُتبة الربع الأعلى.

$$\text{رُتبة الربع الأدنى: } 0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$$

$$\text{رُتبة الربع الأعلى: } 0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$$

الخطوة 2: أقدِّرْ قيمتي الربعين: الأدنى والأعلى، برسم المستقيمات الأفقيّة والرأسية على

المنحنى التكراري التراكميّ كما في الفرع السابق.



الاحظُّ من التمثيل البيانيّ أنَّ قيمة الربع الأدنى هي العلامة 53 تقريرياً، وأنَّ قيمة الربع الأعلى هي العلامة 77 تقريرياً. عليه، فإنَّ قيمة المدى الربيعيّ:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

أَجِدُّ المئين 90، ثُمَّ أُفسِّرُ معناهُ ③

الخطوة 1: أُحدِّدُ رُتبة المئين 90

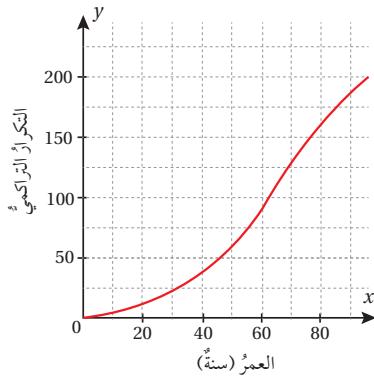
$$\text{رُتبة المئين } 90 : 90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45 : 90$$

الوحدة 8

الخطوة 2: أقدر قيمة المئين 90 برسم المستقيمات الأفقية والرأسية على المنحنى التكراري التراكمي كما في الفرع السابق.

الألاحظ من التمثيل البياني أن قيمة المئين 90 هي العلامة 96 تقريباً، وأن هذه القيمة تعني أن 90% من الطلبة أحizarوا علامات أقل من العلامة 96، أو أن 10% من الطلبة أحizarوا علامات أكثر من العلامة 96 في هذا الاختبار.

أتحقق من فهمي



يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور لأعمار

200 عضو في جمعية ثقافية:

(a) أقدر وسيط البيانات.

(b) أجد المدى الربيعي.

(c) أجد المئين 85، ثم أفسر معناه.

أتدرب وأحل المسائل



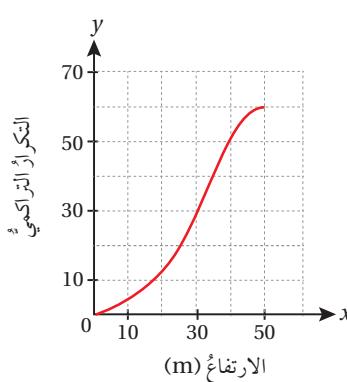
عدد الأهداف	عدد الطلبة
0 – 4	3
5 – 9	17
10 – 14	12
15 – 19	9
20 – 24	5
25 – 29	4

كرة قدم: يبين الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجلها طلبة المرحلة الثانوية في دوري كرة القدم المدرسي:

1 أرسم المنحنى التكراري التراكمي.

2 أقدر المئين 85، ثم أفسر معناه.

3 أقدر عدد الطلبة الذين سجلوا 18 هدفاً على الأقل.



يبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور ارتفاع عدد من المبني في مدينة عمان:

4 أقدر وسيط البيانات.

5 أجد المدى الربيعي.

6 أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.

7 أجد المئين 80، ثم أفسر معناه.



ألعاب: يبيّن الجدول المجاور نتائج 80 متسابقاً في لعبة رمي السهام:

مجموع النقاط (x)	عدد المتسابقين
1 – 20	9
21 – 40	13
41 – 60	23
61 – 80	15
81 – 100	11
101 – 120	7
121 – 140	2

أرسُمِ المنحنى التكراري التراكمي. **8**

أَجِدْ قيمة كُلّ من الوسيط، والمدى الربيعي. **9**

إذا حصلَ المتسابقُ الذي مجموعُ نقاطِه أكثُرُ مِنْ 90 على جائزةٍ، فما نسبةُ المتسابقين الذين سيمُحصّلونَ على جائزةٍ؟ **10**

طلَبَ إلى 30 طالباً، و 50 مُعلِّماً رفعُ أيديهم لحظةَ تقديرِ انقضاضِ دقيقةٍ واحدةٍ بعدَ إعطاءِ إشارةِ البدءِ، وقد نظمَتِ النتائج في الجدولين الآتيين:

فئاتُ الزمِنِ (x) ثانيةً	عدد المُعلِّمين
$10 \leq x < 20$	1
$20 \leq x < 30$	2
$30 \leq x < 40$	2
$40 \leq x < 50$	9
$50 \leq x < 60$	17
$60 \leq x < 70$	13
$70 \leq x < 80$	3
$80 \leq x < 90$	2
$90 \leq x \leq 100$	1

فئاتُ الزمِنِ (x) ثانيةً	عدد الطلبة
$20 \leq x < 30$	1
$30 \leq x < 40$	3
$40 \leq x < 50$	6
$50 \leq x < 60$	12
$60 \leq x < 70$	3
$70 \leq x < 80$	3
$80 \leq x \leq 90$	2

أرسُمِ المنحنى التكراري التراكمي لـكُلّ جدولٍ. **11**

أَجِدْ الوسيطُ والمدى الربيعي لـكُلّ جدولٍ. **12**

أيُّ الفريقيْن كانَ أَفْضَلَ في تقديرِ مَدَّ الدقيقةِ: الطُّلُبُ أم المُعلِّمُونَ؟ أُبَرِّرُ إجابتِي. **13**

الوحدة 8

المعدل التراكمي (x)	عدد الطلبة
$1 \leq x < 1.5$	3
$1.5 \leq x < 2$	7
$2 \leq x < 2.5$	25
$2.5 \leq x < 3$	38
$3 \leq x < 3.5$	24
$3.5 \leq x < 4$	11

جامعات: يُبيّن الجدول المجاور مُعَدَّلاتِ عيّنةٍ من طلبة كلية الهندسة في الجامعة الأردنية:

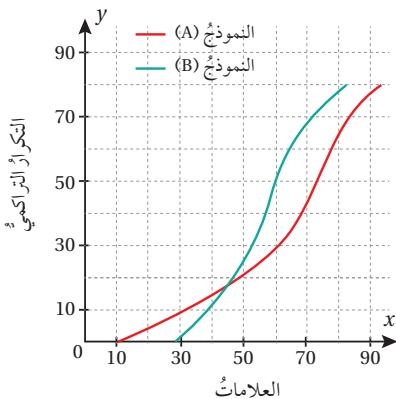
أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات. **14**

أجد الوسيط والمدى الريعي للبيانات. **15**

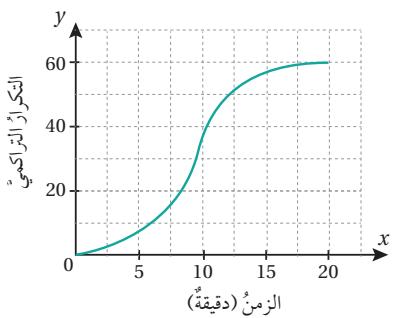
إذا كان الطلبة الذين تزيد مُعَدَّلاتُهُم التراكمية على 3.4 قد حصلوا على منحة، فكم طالباً في هذه العيّنة لم يحصل على منحة؟ **16**

أحل السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم. **17**

مهارات التفكير العليا



تبرير: طلب معلم الرياضيات إلى طلبة الصف العاشر الإجابة عن أسئلة اختبار من نموذجين A و B ، ثم رسم المنحنى التكراري التراكمي لنتائج الطلبة كما في الشكل المجاور. أي النموذجين كان أصعب: A أم B ? أبُرِّر إجابتي. **18**



تحدد: يُبيّن الشكل المجاور المنحنى التكراري التراكمي للمدة الزمنية التي استغرقتها 60 مكالمة هاتفية أجريت في أحد الأيام مع مقدم برنامج حواري في إحدى المحطات الإذاعية. أستعمل هذا التمثيل لتقدير النسبة المئوية للمكالمات التي استغرقت 10 دقائق على الأقل. **19**

مسألة مفتوحة: أجمع بياناتي الخاصة بـ 30 مشاهدة، ثم أنظمها في جدولٍ تكراري، ثم أجد كلاً من الوسيط، والمدى الريعي لها. **20**

الدرس

3

مقاييس التشتت للجداول التكرارية ذات الفئات Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.

فئة الأجر	عدد العمال
$70 \leq x < 75$	6
$75 \leq x < 80$	8
$80 \leq x < 85$	4
$85 \leq x \leq 90$	2

فكرة الدرس



مسألة اليوم



يعمل في مصنع للأثاث المنزلي 20 عاملاً، يتوزعون وفق الأجرا الأسبوعي لأقرب دينار كما في الجدول المجاور. في أثناء زيارة مندوب وزارة العمل الذي يتبع أحوال العمال في المصانع، أفاد المدير المالي للمصنع بأن الانحراف المعياري لأجر العاملين هو 4.72 تقريباً.
كيف يمكن التتحقق من صحة ما أفاد به المدير المالي؟

تعرفت سابقاً مقاييس التشتت التي تصف تباعد البيانات عن بعضها. ومن هذه المقاييس التباين، وهو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، وقد أوجده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$

حيث:

μ : الوسط الحسابي للبيانات.

n : عدد البيانات.

تعرفت أيضاً الانحراف المعياري σ ؛ وهو الجذر التربيعي للتباين.
لمراجعة كيفية حساب هذين المقياسين في المثال الآتي.

مثال 1

أحد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية: 4, 7, 1, 3, 0, 3

التباين 2 : 1

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي.

صيغة الوسط الحسابي

بالتعويض، والتبسيط

$$\mu = \frac{\sum x}{n} = \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3$$

أتعلم
إذا كانت البيانات $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تمثل عينة عشوائية من مجتمع إحصائي ما؛ فإن التباين يرمز له σ^2 ، ويعرف بأنه:
$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

وفي هذا الدرس؛ ستعامل جميع البيانات على أنها تمثل مجتمعاً إحصائياً، وعلىه فإن التباين يعرف بالصيغة المجاورة.
الاحظ الاختلاف بين الصيغتين.

الوحدة 8

x	$(x - \mu)$	$(x - \mu)^2$
4	$4 - 3 = 1$	1
7	$7 - 3 = 4$	16
1	$1 - 3 = -2$	4
3	$3 - 3 = 0$	0
0	$0 - 3 = -3$	9
3	$3 - 3 = 0$	0
المجموع		30

الخطوة 2: أُشْتَأْ جدوًّا أحسبُ فيه انحرافَ كُلَّ قيمةٍ عن الوسطِ الحسابيِّ، فضلاً عن حسابِ مربعاتِ الفروقِ.

الخطوة 3: أُعوّضُ القيمة التي توصلتُ إليها من الجدولِ بصيغةِ التباینِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2}{n}$$

$$= \frac{30}{6} = 5$$

صيغةُ التباینِ

إذن، التباینُ هو 5

الانحرافُ المعياريُّ 2:

الانحرافُ المعياريُّ هو الجذرُ التربيعيُّ للتباینِ: $\sigma = \sqrt{5}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ التباینَ والانحرافَ المعياريَّ لمجموعةِ البياناتِ الآتية:

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغمِ من أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتِ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القيمةُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِّنُ استعمالُها لتقديرِ التباینِ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ؛ إذُ يُمكِّنُ النظرُ إلى جميعِ قيمِ البياناتِ في فئةٍ مُعينَةٍ على أساسِ أنَّ كُلَّ منها ممثلاً بقيمةٍ متصفٍ بـ(مرکزُ الفئةِ) x .

الوسطُ الحسابيُّ والتباينُ للبياناتِ ذاتِ الفئاتِ

مفهومُ أساسيٍّ

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةٌ في جداولِ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x : مرکزُ الفئةِ.
 f : التكرارُ المقابلُ للفئةِ.

- لتقديرِ التباينِ للبياناتِ المُنظَّمةٌ في جداولِ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f}$$

- لتقديرِ الانحرافِ المعياريِّ، أَجِدُ الجذرَ التربيعيَّ للتباینِ.

أتذكرُ

مجموعُ انحرافاتِ المشاهداتِ أو القيمِ عن وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا.

معلوماتٌ

في ما يخصُّ البياناتِ المُنظَّمةَ في الجداولِ ذاتِ الفئاتِ، يكونُ المدى مساوياً لقيمةِ الحد الأعلىِ الفعليِّ للفئة العليا مطروحاً منها قيمةُ الحد الأدنىِ الفعليِّ للفئة الدنيا.

مثال 2: من الحياة



بريد إلكتروني: دوّنت سُميةً عدد رسائل البريد الإلكتروني اليومية التي وصلتها في 40 يوماً، ونظمت بياناتها في الجدول التكراري المجاور. أقدر التباین لهذه البيانات.



معلومة

في شهر تشرين الثاني من عام 1971م، تمكّن راي توملينسون (مخترع البريد الإلكتروني) من إرسال أول رسالة إلكترونية.

عدد الرسائل	عدد الأيام
10 – 14	6
15 – 19	5
20 – 24	12
25 – 29	9
30 – 34	8

لتقدیر التباین، أنشئ جدوّلاً جديداً يحوي الأعمدة المُظللة عناوينها على النحو الآتي:

عدد الرسائل	f	x	$x \times f$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 \times f$
10 – 14	6	12	72	-11	121	726
15 – 19	5	17	85	-6	36	180
20 – 24	12	22	264	-1	1	12
25 – 29	9	27	243	4	16	144
30 – 34	8	32	256	9	81	648
المجموع	40		920			1710

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23 \quad \text{بالتعويض في صيغة الوسط الحسابي}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x - \mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{صيغة التباین}$$

$$= \frac{1710}{40} \quad \text{بالتعويض}$$

$$\approx 43 \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

أتحقق من فهمي

يبين الجدول المجاور توزيعاً لـ 200 سائق وفق أعمارهم، ممن تسبيوا في حوادث مرورية خطيرة في إحدى المدن على مدار أسبوع. أقدر التباین والانحراف المعياري لهذه البيانات.

فئات العمر (سنّة)	عدد الأشخاص
$18 \leq x < 28$	100
$28 \leq x < 38$	50
$38 \leq x < 48$	26
$48 \leq x < 58$	18
$58 \leq x \leq 68$	6

توجد صيغة أخرى لتقدیر التباین للبيانات المُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، من دون حاجة إلى حساب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وهذه الصيغة هي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

أتعلم

يُفضل استعمال الصيغة المجاورة عندما يكون الوسط الحسابي عددًا غير صحيح.

الوحدة 8

مثال 3

عدد الأجزاء	عدد الحفاظ
6 – 8	15
9 – 11	10
12 – 14	25

حفظ القرآن الكريم: يُبيّن الجدول المجاور توزيعاً لخمسين طالباً وفقاً لعدد الأجزاء التي يحفظونها من القرآن الكريم. أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

لتقدير التباين، أنشئ جدولًا يحوي الأعمدة المظللة عناوينها على النحو الآتي:

عدد الأجزاء	f	x	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
6 – 8	15	7	105	49	735
9 – 11	10	10	100	100	1000
12 – 14	25	13	325	169	4225
المجموع	50		530		5960

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{530}{50}$$

بالتعمip في صيغة الوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

الصيغة الثانية للتباين

$$= \frac{5960}{50} - \left(\frac{530}{50} \right)^2$$

بالتعمip

$$= 6.84$$

باستعمال الآلة الحاسبة

لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma \approx 2.62$$

أتحقق من فهمي

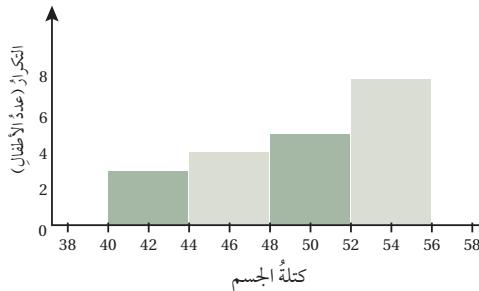
أحل مسألة (بريد إلكتروني) التي وردت في المثال 2 باستعمال الصيغة الثانية لتقدير التباين، ثم أقارب قيمة التباين التي أتوصل إليها بالقيمة التي سبق حسابها.

أفكّر

لماذا لا يستطرد في مجموع انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي أن يساوي صفرًا، في حالة البيانات المنظمة في الجدول ذي الفئات؟

يمكّنني أيضاً تقدير مقاييس التشتت للبيانات الممثلة بمدرج تكراري، عن طريق إعادة تنظيمها في جدول ذي فئات وتكرار.

مثال 4: من الحياة



كتلة الجسم: يُبيّن التمثيل بالمُدرج التكراري المُجاوِرِ توزيعاً لمجموعة أطفالٍ من سن 10 سنواتٍ وفقَ كتل أجسامهم مُقرَبةً إلى أقرب كيلوغرامٍ.
أُقدرُ التباین والانحراف المعياري لهذه البيانات.

التباین: أُعيد تنظيم البيانات في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ على النحو الآتي:

الفئة (الكتلة x)	f	x	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
$40 \leq x < 44$	3	42	126	1764	5292
$44 \leq x < 48$	4	46	184	2116	8464
$48 \leq x < 52$	5	50	250	2500	12500
$52 \leq x \leq 56$	8	54	432	2916	23328
المجموع	20		992		49584

$$\mu = \frac{\sum (x \times f)}{\sum f} = \frac{992}{20}$$

بالتعويض في صيغة الوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

الصيغة الثانية لحساب التباین

$$= \frac{49584}{20} - \left(\frac{992}{20} \right)^2$$

بالتعويض

$$= 19.04$$

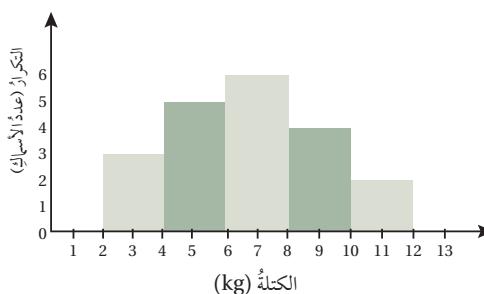
باستعمال الآلة الحاسبة

2 الانحراف المعياري:

لتقدير الانحراف المعياري، أجدُ الجذر التربيعي للتباین: $\sigma \approx 4.36$



أتحقق من فهمي



صيد بحري: يُبيّن التمثيل بالمُدرج التكراري المُجاوِرِ توزيعاً لكتل مجموعة من الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في مدينة العقبة.
أُقدرُ التباین والانحراف المعياري لهذه البيانات.

يحوي خليج العقبة ما يزيد على 500 نوعٍ من الأسماك من أصل 1400 نوعٍ تعيش في مياه البحر الأحمر.

الوحدة 8

أتدرب وأحل المسائل



الفئات (عدد الكلمات في الدقيقة)	عدد الطلبة
26 – 30	8
31 – 35	12
36 – 40	10
41 – 45	7
46 – 50	3

طباعة: يُبيّن الجدول المجاور توزيعاً لأربعين طالباً في الصف العاشر بحسب عدد الكلمات التي يستطيعون طباعتها في جهاز الحاسوب في دقيقة واحدة:

1 أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

2 أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

الفئات (المساحة m^2)	عدد الشقق
$80 \leq x < 100$	2
$100 \leq x < 120$	5
$120 \leq x < 140$	7
$140 \leq x < 160$	6
$160 \leq x \leq 180$	3

شقق سكنية: يُبيّن الجدول المجاور توزيعاً لـ 23 شقة سكنية - بحسب مساحاتها - بتّها إحدى شركات الإسكان عام 2020م:

3 أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

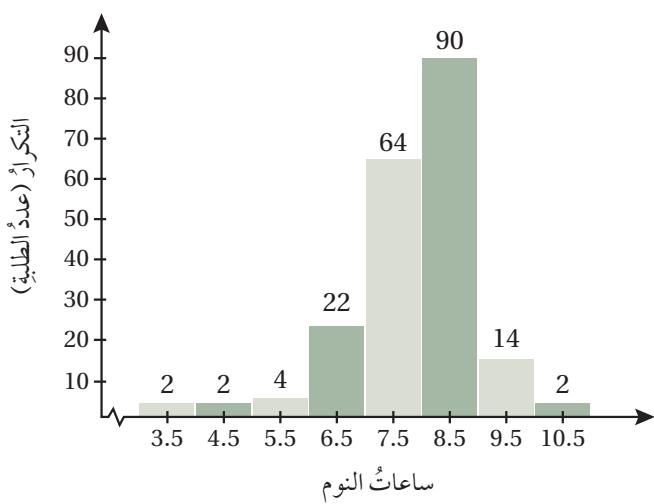
4 أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات بطريقةتين مختلفتين.

الطول (x)	فريق النسور	فريق الأسود
$170 \leq x < 178$	3	2
$179 \leq x < 187$	1	3
$188 \leq x < 196$	4	3
$197 \leq x \leq 205$	2	2

كرة سلة: يُبيّن الجدول المجاور توزيع اللاعبين في فريقين لكرة السلة وفق أطوالهم بالستيمتر:

5 أقدر التباين لأطوال اللاعبين في كل فريق.

6 أي الفريقين أكثر تجانساً من حيث أطوال اللاعبين؟ أبرر إجابتي.



ساعات النوم: يُبيّن التمثيل بالمُدَرَّج التكراري المجاور توزيعاً لـ 200 طالب بحسب ساعات نومهم:

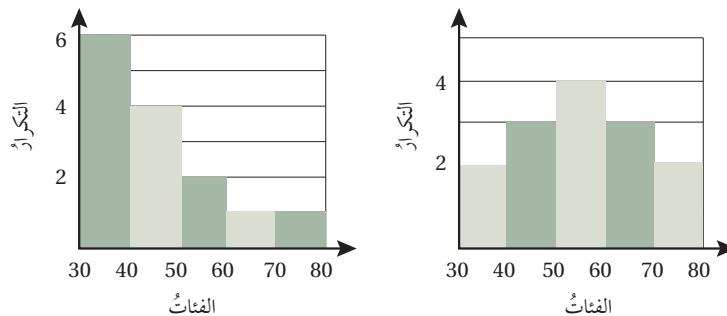
7 أقدر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

8 أقدر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

9 أصِف توزيع هذه البيانات.

10

أقارِنْ بينَ قيمَتِي التبَاعِنِ للبياناتِ المُمثَلَّةِ في الشَّكَلَيْنِ الآتَيْنِ، مُفسِّرًا سبَبَ الاختِلافِ بَيْنَهُما.



11

أحل السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم.

مهارات التفكير العليا

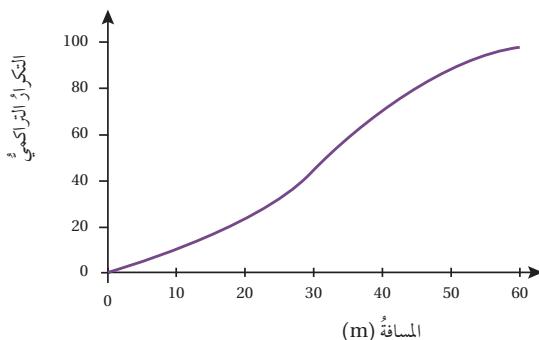
12

مسائلة مفتوحة: أنظِمُ البياناتِ الآتِيَةِ في جدولٍ تكراريٍّ (اختار طولاً مناسِباً للفئات)، ثُمَّ أقدِّرْ قيمَتِي الوسْطِ الحسابيِّ والبيانِ، مُستعمِلاً آلَةً حاسِبةً لإيجادِ القيمةِ الدقيقَةِ لِكُلِّ مِنْهُمَا، ثُمَّ أقارِنْ قيمَهُما الدقيقَةَ بالقيمِ التقدِيريَةِ.

15	14	14	14	13	12	11	11	11	11
10	11	13	16	10	9	15	12	9	10
7	14	13	14	8	9	8	11	13	13
15	12	9	10	9	9	16	16	12	10
11	11	12	15	6	10	10	10	11	9

13

تبرير: في السؤال (12)، ما تأثيرُ أطوالِ فتراتِ الجدولِ التكراريِّ الذي أنشأْتُهُ في القيمةِ التقدِيرِيَةِ للبيانِ؟
أُبَرِّرُ إجابتِي.



تبرير: هل يُمكِنُ تقدِيرُ التبَاعِنِ للبياناتِ المُمثَلَّةِ في المنحنى التكراريِّ التراكميِّ المجاورِ؟ أُبَرِّرُ إجابتِي.

الدرس

4

احتمالات الحوادث المتنافية

Probability of Mutually Exclusive Events



حساب احتمالات الحوادث المتنافية، وغير المتنافية، ومتّمة الحادث.

الحادث البسيط، الحادث المركب، الحادثان المتنافيان.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



استوردة تاجر سحنة من السكر في بآخرتين. إذا كان احتمال وصول الباخرة الأولى في موعدها 60%， واحتمال وصول الباخرة الثانية في موعدها 50%， واحتمال وصولهما معاً 30%， فما احتمال وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها؟

يُسمى الحادث الواحد (مثل وصول الباخرة الأولى في موعدها) **الحادث البسيط**

(simple event)، أمّا **الحادث المركب** (compound event) فيتكون من حادثين

بسطيئين أو أكثر، مثل وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها.

إذا كان (A) و (B) حادثين في تجربة عشوائية، فإنّهما يُسميان **حادثين متنافيين** (mutually exclusive)؛ إذا تعرّض وقوعهما معاً في الوقت نفسه. ويقصد بالمتنافيين عدم وجود عناصر مشتركة بينهما.

أتعلم

يطلق على الحادثين المتنافيين أيضاً اسم الحادثين المنفصلين.

مثال 1

أحدد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا في ما يأتي، مبرراً إجابتي:

1 التجربة هي لعب كرة القدم. الحادث الأول هو الفوز في المباراة، والحادث الثاني هو الخسارة.

الحادثان متنافيان؛ لأنّه لا يمكن الفوز والخسارة في الوقت نفسه.

2 التجربة هي إلقاء حجر نرد منتظم. الحادثان هما الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أقل من 3

الحادثان غير متنافيان؛ نظراً إلى وجود عنصر مشترك بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3 في الوقت نفسه.

أتذكر

الحادثان (A و B) أو (A و B) كلاهما مركب؛ لأنّه يتكون من حادثين بسيطين.

أتحقق من فهمي

أُحدِّد إذا كانَ الحادثانِ متنافِيَنْ أَمْ لَا فِي مَا يَأْتِي، مُبِرّراً إِجابتِي:

- (a) التجربةُ هي سحبٌ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائياً من سلسلةٍ فيها 5 بطاقاتٍ حمراء، و3 بطاقاتٍ خضراء. الحادثُ الأول سحبٌ بطاقةٍ حمراء، والحادثُ الثاني سحبٌ بطاقةٍ خضراء.
- (b) التجربةُ هي إلقاء حجرٍ نردٍ منتظمٍ. الحادثُ الأول هو الحصولُ على عددٍ فرديٍّ والثاني هو الحصولُ على عددٍ زوجيٍّ.

تعرَّفْتُ سابقاً أنَّ تقاطعَ حادثَيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ يعني وقوعُهُما معاً، ويُستَدَّلُ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (وَ: and) أو الرمزِ (∩)، وأنَّ اتحادَ حادثَيْنِ يعني وقوعُ أحدهِما على الأقل، ويُستَدَّلُ على ذلكَ منْ أداةِ الربطِ (أوَ: or) أو الرمزِ (U). فإذا كانَ (A) و (B) حادثَيْنِ متنافِيَنْ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معاً $P(A \cap B)$ يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدهِما على الأقل $P(A \cup B)$ يساوي مجموعَ احتماليَّ وقوعِهما.

احتمالُ الحادثَيْنِ المتنافِيَيْنِ

مفهومُ أساسِيٍّ

إذا كانَ (A) و (B) حادثَيْنِ متنافِيَيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ احتمالَ وقوعِهما معاً يساوي صفرًا، واحتمالَ وقوعِ أحدهِما على الأقل يساوي مجموعَ احتماليَّ وقوعِهما.

إذا كانَ (A) و (B) حادثَيْنِ متنافِيَيْنِ، فإنَّ

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

أتعلَّم

الحرفُ (P) هو اختصارُ
كلمة (Probability)
التي تعني الاحتمالَ.

مثال 2

إذا كانَ الحادثانِ Z و Y متنافِيَيْنِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، وكانَ $P(Y) = 0.3$ و $P(Z) = 0.5$ ، فأجدُ كلاً ممَّا يأتي:

1) $P(Y \cup Z)$

$$P(Y \cup Z) = P(Y) + P(Z)$$

$$P(Y \cup Z) = 0.3 + 0.5$$

$$= 0.8$$

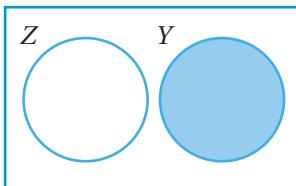
صيغُهُ احتمالِ اتحادِ حادثَيْنِ متنافِيَيْنِ

بالتعويضِ

بالتبسيطِ

الوحدة 8

2 $P(Y-Z)$



Ω بما أن الحادثين Z و Y متنافيان، فإن $Y-Z$ يعني وقوع الحادث Y فقط؛ لأنهما لا يقعان معًا، كما يظهر في شكلٍ ثُن المجاور. إذن:

$$P(Y-Z) = P(Y) = 0.3$$

3 $P(\overline{Y \cup Z})$

$$\begin{aligned} P(\overline{Y \cup Z}) &= 1 - P(Y \cup Z) \\ &= 1 - 0.8 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

احتمال المتممة
بالتعويض
بالتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كان الحادثان A و B متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{5}$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B \cap \overline{A})$

c) $P(\overline{A \cup B})$

أتذكر

يعني الحادث $Y-Z$
وقوع الحادث Y فقط،
وعدم وقوع الحادث Z
ويمكن أيضًا التعبير عنه
بالرمز $Y \cap \overline{Z}$

أتذكر

احتمال وقوع متممة
الحادث A هو 1 ناقص
احتمال وقوع الحادث A .
 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

أتذكر

لأي تجربة عشوائية،
احتمال وقوع الحادث
البسيط E يساوي عدد
عناصر هذا الحادث
 $n(E)$ مقسومًا على
عدد عناصر فضاء العينة
 $n(\Omega)$:
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

أتذكر

لأي حادث (A) في
فضاء العينة لتجربة
عشوائية ما Ω ، فإن:
$$0 \leq P(A) \leq 1$$



في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، أجد ما يأتي:

1 احتمال ظهور العدد 1، وظهور عدد زوجي.

افتراض أن (A) هو حادث ظهور العدد 1، و (B) هو حادث ظهور

$$A = \{1\}, B = \{2, 4, 6\}$$

بما أن $\Phi = \{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 4, 6\} = \{1\}$ ، فإن (A) و (B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال وقوعهما

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$$

2 احتمال ظهور العدد 1، أو ظهور عدد زوجي.

بما أن (A) و (B) حادثان متنافيان، فإن احتمال وقوع (A) أو (B) (وقوع أحدهما على

الأقل) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما. وبالرموز:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

بالجمع، ثم التبسيط

أتحقق من فهمي

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من بين الأعداد: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 أجد:

(a) احتمال اختيار عدد أولي، ويقبل القسمة على 4

(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد يقبل القسمة على 4

رموز رياضية

يُستعمل الحرف

اليوناني Ω للدلالة

على فضاء العينة

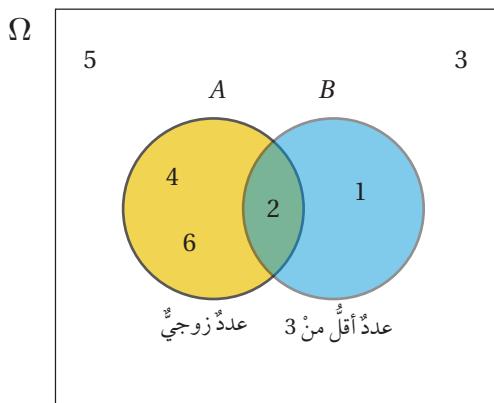
للتجربة العشوائية،

ويقرأ: أو ميغا.

لاحظت في المثال 1 أن حادثي الحصول على عدد زوجي أو عدد أقل من 3 عند القاء حجر نردي منتظم هما غير متنافيين؛ نظراً إلى وجود عنصير مشترك بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3، فكيف أجد احتمال وقوع أحد هما على الأقل؟

إذا كان (A) حادث الحصول على عدد زوجي، و(B) حادث الحصول على عدد أقل من 3، في تجربة القاء حجر نردي منتظم مرّة واحدة، فإنه يمكن تمثيل هذين الحادثين باستعمال أشكال

فنـ كما يأتي:



عند حساب احتمال كل حادث على حدة، أجد أنَّ:

$$P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

عند إيجاد احتمال وقوع أحد الحادثين على الأقل، وجمع هذين الاحتمالين، فإنَّ احتمال العدد 2 سيتكرر؛ لأنَّه موجود في الحادثين (موجود في منطقة التقاء بين الحادثين)، ولذلك يجب طرحه من مجموع الاحتمالين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

الوحدة 8

احتمال الحادثين غير المتنافيين

مفهوم أساسٍ

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادثين غير متنافيين في تجربة عشوائية، فإنَّ احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع (A) و (B) معاً.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين غير متنافيين، فإنَّ:

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 4

يحتوي صندوق على 15 بطاقة مُرقمَة من 1 إلى 15، إذا سُحبَت بطاقة عشوائياً، فأَجِد احتمال الحادثين الآتيَنِين:

1 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، ومن عوامل العدد 12

أفترض أن (M) هو حادث اختيار عدد من مضاعفات العدد 3، و (F) هو حادث اختيار عدد من عوامل العدد 12.

$$M = \{3, 6, 9, 12, 15\}, F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

أداة الوصل (و) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو تقاطع الحادثين (M) و (F) .

$$\text{إذن } M \cap F = \{3, 6, 12\}$$

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F)$$

$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، أو من عوامل العدد 12

أداة الوصل (أو) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو اتحاد الحادثين غير المتنافيين (M) و (F) اللذين سُمِيَا في الفرع السابق. وهذا يعني احتمال وقوع أحدهما على الأقل (احتمال اتحاديهما):

$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

أتحقق من فهمي

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من المجموعة: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}، أجد:

(a) احتمال اختيار عدد أولي، ومن عوامل العدد 10

(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد من عوامل العدد 10

مثال 5

إذا كان A و B حادثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.65$, $P(B) = 0.75$ ، فأوجد كلاً ممّا يأتي:

1 $P(A \cap B)$

صيغة احتمال اتحاد حادثين غير متنافيين

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

بالتعويض
 $0.85 = 0.65 + 0.75 - P(A \cap B)$

بالتبسيط
 $0.85 = 1.4 - P(A \cap B)$

بحل المعادلة
 $P(A \cap B) = 0.55$

2 $P(\bar{A})$

احتمال المتممة
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

بالتعويض
 $= 1 - 0.65$

بالتبسيط
 $= 0.35$

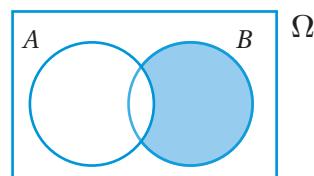
3 $P(\bar{A} \cap B)$

إن $\bar{A} \cap B$ يعني وقوع الحادث B فقط، وعدم وقوع الحادث A كما يظهر في شكلٍ ثنائي المجاور، ولإيجاد احتماله أطرح احتمال تقاطع الحادثين A و B من احتمال الحادث B ، إذن:

احتمال وقوع الحادث B فقط
 $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

بالتعويض
 $= 0.75 - 0.55$

بالتبسيط
 $= 0.2$



4 $P(\bar{A} \cup B)$

صيغة احتمال اتحاد حادثين غير متنافيين

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

بالتعويض
 $= 0.35 + 0.75 - 0.2$

بالتبسيط
 $= 0.9$

الوحدة 8

5 $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

إن $\bar{A} \cap \bar{B}$ يعني متممة اتحاد الحادفين A و B كما يظهر في شكل قن المجاور، إذن:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A \cup B})$$

احتمال تقاطع متممة حادفين

$$= 1 - P(A \cup B)$$

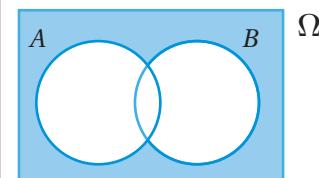
احتمال المتممة

$$= 1 - 0.85$$

بالتعميض

$$= 0.15$$

بالتبسيط



أتحقق من فهمي

إذا كان A و B حادفين في تجربة عشوائية، وكان، $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ ، فإذا كان $P(A \cap B) = 0.2$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\bar{B})$

c) $P(A-B)$

d) $P(A \cup \bar{B})$

e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$



أتدرب وأحل المسائل

أحدد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا لكل تجربة عشوائية في ما يأتي، مبرراً إجابتي:

1 ظهور العدد 3، أو ظهور عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة.

2 ظهور أحد عوامل العدد 12، أو ظهور عدد أولي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة.

3 ظهور عددين مجموعهما 8 أو 12 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة.

في تجربة اختيار بطاقة واحدة عشوائياً من 20 بطاقة متماثلة، كتب على كل منها عدد من 1 إلى 20، أجد:

4 احتمال اختيار عدد من مضاعفات العدد 7، ومن مضاعفات العدد 5

5 احتمال اختيار عدد من مضاعفات العدد 7، أو من مضاعفات العدد 5

6 احتمال اختيار عدد فردي، ويقبل القسمة على 4

7 احتمال اختيار عدد فردي، أو يقبل القسمة على 4

إذا كان الحادثان A و B حادفين متنافيين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.4$ ، $P(B) = 0.25$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

8) $P(A \cap B)$

9) $P(A \cup B)$

10) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

11) $P(A-B)$



مجموعهٌ من الكرات المتماثله، مُرَقّمه من 1 إلى 21، وموضعه داخل صندوق.
إذا اخترت كرهٌ من الصندوق عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

12) احتمال أن تحمل الكره عدد زوجياً.

13) احتمال أن تحمل الكره عدد من مضاعفات العدد 3

14) احتمال أن تحمل الكره عدد زوجياً، ومن مضاعفات العدد 3

15) احتمال أن تحمل الكره عدد زوجياً، أو من مضاعفات العدد 3

إذا كان A و B حادثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.15$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

16) $P(A \cup B)$

17) $P(\bar{A})$

18) $P(B-A)$

19) $P(A \cup \bar{B})$

20) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

رياضة: سئل 60 رياضياً إذا كانوا يمارسون لعبة كرة القدم أو كرة السلة، وقد توزعوا وفق إجاباتهم كما في الجدول الآتي:

عدد الرياضيين	عدم ممارسة أيٍ من اللعبتين	كرة القدم فقط	كرة السلة فقط	كرة القدم، وكرة السلة
12	30	8	10	

إذا اخترت رياضيًّا منهم عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

21) احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبتي كرة القدم وكرة السلة.

22) احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

23) احتمال أن يكون ممن يمارسون لعبة كرة السلة، ولا يمارسون لعبة كرة القدم.

24) احتمال أن يكون ممن لا يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.



تجارة: أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

تَحْدِيد: إذا كان R و S حادثين في تجربة عشوائية، وكان $P(R) = P(S) = 3P(R \cap S)$, $P(R \cup S) = 0.75$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

26) $P(R \cap S)$

27) $P(R)$

28) $P(\bar{S})$

29) $P(\bar{R} \cap \bar{S})$

تبرير: قال هاني: إن احتمال فوز فريق المفضل هو 0.3، فرد عليه يزيد قائلاً: إذن، احتمال خسارة الفريق هو 0.7، هل قول يزيد صحيح؟ أبّر إجابتي.

مسألة مفتوحة: أصف مواقفين من حياتي اليومية، أحدهما يتضمن حادثين متنافيين، والآخر يتضمن حادثين غير متنافيين، مبيناً كيف حدّدت ذلك.

الدرس

5

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

Probability of Independent and Dependent Events

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تميّز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، وحساب احتمالاتها.

الحوادث المستقلة، الحوادث غير المستقلة، الاحتمال المشروط، جداول الاتجاهين.



تحتوي السنة على 365 يوماً؛ لذا، فإنَّ احتمال أن يكون الأول من شهر
أيلول يوم ميلاد شخصٍ هو $\frac{1}{365}$ تقريرًا. إذا اختيار شخصان عشوائياً،
فما احتمال أن يكون يوم ميلاد كلِّيَهما الأول من شهر أيلول؟

لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) مستقلُين (independent) إذا كانَ وقوعُ
أحدِهما (أو عدم وقوعِه) لا يؤثُّر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

احتمال الحادثين المستقللين

مفهوم أساسى

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادثين مستقللين في تجربة عشوائية ، فإنَّ احتمال
وقوعِهما معًا هو حاصل ضرب احتمال وقوع كُلِّ منهُما.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين مستقللين ، فإنَّ:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أتعلم

تُستعمل عملية الضرب عند حساب احتمالات الحوادث التي تقع تباعًا. يمكن تعليم قانون حساب احتمال وقوع حادثين مستقللين معًا لأكثر من حادثين مستقللين.

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد منتظمتين عشوائياً معًا مرَّة واحدة، أجدُ احتمال ظهور العدد 6 على حجر النرد والصورة على قطعة النقود.

افتراض أنَّ (A) هو حادث ظهور العدد 6 على حجر النرد، و (B) هو حادث ظهور الصورة على قطعة النقود. الاحظ أنَّ وقوع الحادث (A) أو عدم وقوعه لا يؤثُّر في وقوع الحادث (B) أو عدم وقوعه. إذن، (A) و (B) حادثان مستقلان، وإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

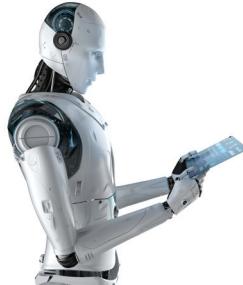
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين عشوائياً معاً مرّة واحدة، أجد احتمال ظهور عدد فردي على حجر النرد الأول وعدد أكبر من 4 على حجر النرد الثاني.

لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) **غير مستقلين** (dependent) إذا أثّر وقوع أحدهما في احتمال وقوع الآخر.

مثال 2



يُستعمل علم الاحتمالات في الذكاء الاصطناعي، وهي الأنظمة أو الأجهزة التي تحاكي الذكاء البشري ويمكنها أن تتطور من قدراتها ذاتياً استناداً إلى المعلومات التي تجمعها.

أحدّد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

1 سحب كرتين على التوالي عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة مختلفة الألوان، علماً بأن سحب الكرة الثانية كان بعد إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس.

إرجاع الكرة المسحوبة أولًا إلى الكيس يعني أنه يمكن إعادة سحبها، أو سحب غيرها، فتكون فرص سحبها وغيرها من الكرات متكافئة؛ أي إن نتيجة سحبها لا تؤثر في نتيجة سحب أي كرة أخرى؛ فالحادثان مستقلان.

2 سحب كرتين على التوالي عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة، وعدم إرجاع أي منها إلى الكيس.

عدم إرجاع الكرة المسحوبة أولًا إلى الكيس يعني نقص عدد الكرات المتبقيّة فيه، وهذا يعني أن احتمال سحب الكرة الثانية سيتأثر بنتيجة الكرة المسحوبة أولًا؛ فالحادثان غير مستقلان.

3 سحب كرة عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة حمراء وصفراء، ثم سحب كرة عشوائياً من كيس آخر فيه كرات متماثلة حمراء وصفراء.

نتيجة سحب الكرة من الكيس الأول لا تؤثر في نتيجة سحب كرة من الكيس الثاني؛ فالحادثان مستقلان.

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

- (a) اختيار قطعة حلوي حمراء عشوائياً وأكلها، ثم اختيار قطعة حلوى حمراء أخرى عشوائياً من كيس يحوي 10 قطع حلوى حمراء و 25 قطعة حلوى زرقاء، جميعها متماثلة.
- (b) ظهور العدد 5 على حجري نرد ألقيا معاً مرّة واحدة عشوائياً.
- (c) سحب كرة حمراء عشوائياً من كيس فيه كرات متماثلة، 4 منها حمراء و 3 صفراء، ثم إعادتها إلى الكيس، ثم سحب كرة حمراء أخرى عشوائياً.

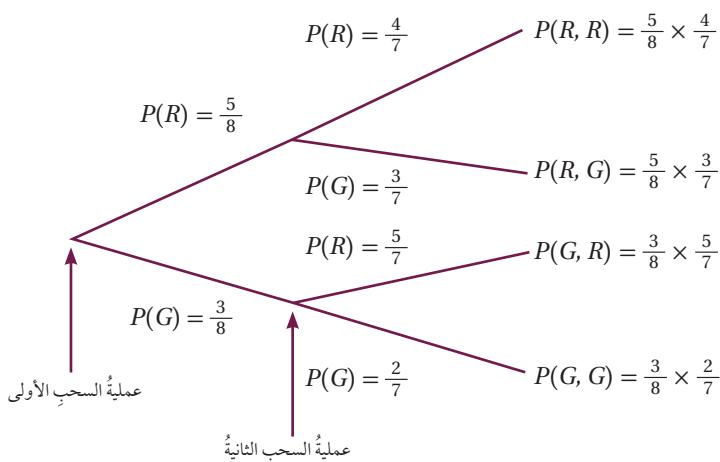
الوحدة 8

يساعدُ استعمال الشجرة الاحتمالية على حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مثال 3

يحتوي كيسٌ على 5 كراتٍ حمراء (R)، و3 كراتٍ خضراء (G)، جميعها متماثلة. سُحبَت كرّةٌ من الكيسِ عشوائياً، ثمَّ كُتبَ لونُها من دونِ إرجاعِها إلى الكيس، ثُمَّ سُحبَت كرّةٌ أخرى عشوائياً، ثمَّ كُتبَ لونُها. أَجِدُ احتمالَ كُلٍّ منَ الحوادث التالية باستعمالِ الشجرة الاحتمالية:

أَلْاحِظُ منَ التمثيل بالشجرة الاحتمالية الآتي كيف تتأثُّرُ عملية السحب الثانية بنتيجة عملية السحب الأولى عندَ عدمِ إرجاعِ الكرّة المسحوبة:



1 سحبُ كرتينِ خضراوينِ.

بعدَ عمليةِ السحبِ الأولى يقلُّ عددُ الكراتِ في الكيسِ بمقدارِ كرّةٍ خضراء

2 سحبُ كرّةٍ خضراءَ في المرةِ الأولى وكرّةٍ حمراءَ في المرةِ الثانية.

يمُكِّنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالةٍ واحدةٍ فقطٍ منَ الحالاتِ الأربعِ التي تظهرُ في الشجرةِ الاحتمالية

3 سحبُ كرتينِ، إحداهما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.

يمُكِّنُ الحصولُ على هذهِ النتيجةِ في حالتينِ، هما: الكرّةُ الأولى حمراءُ، والثانيةُ خضراءُ، أوِ الكرّةُ الأولى خضراءُ، والثانيةُ حمراءُ

لغةُ الرياضيات

العباراتُ الآتيةُ متكافئةُ:

- سحبُ كرتينِ، إحداهما خضراءُ، والأُخرى حمراءُ.
- سحبُ كرتينِ مختلفتيِ اللونِ.
- سحبُ كرتينِ، إحداهما حمراءُ، والأُخرى خضراءُ.
- سحبُ كرٌةٌ منْ كُلِّ لونِ.

أتحقق من فهمي

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R), و 8 قطع حلوى خضراء (G), جميعها متماثلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائياً وأكلها، ثم اختار قطعة أخرى عشوائياً ليأكلها. أجد احتمال كل من الحادثين الآتيين باستعمال الشجرة الاحتمالية:

(a) اختيار الطفل قطعه حلوى متماثل لونه.

(b) اختيار الطفل قطعه حلوى مختلف لونه.

الاحظ في المثال السابق أن احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكمة حمراء في المرة الثانية يساوي احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى مضروباً في احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية، علمًا بأن كرة خضراء سُحبَت في المرة الأولى.

احتمال الحادثين غير المستقلين

مفهوم أساسٍ

بالكلمات: احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معًا يساوي احتمال وقوع الحادث الأول مضروباً في احتمال وقوع الحادث الثاني بعد وقوع الحادث الأول.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين غير مستقلين في تجربة عشوائية ما، فإنَّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B | A)$$

يقرأ الرمز $P(B | A)$: احتمال وقوع الحادث (B) شرط وقوع الحادث (A) ; لذا يسمى الاحتمال المشروط (conditional probability)، ويمكن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مثال 4

أُلقي حجر نرد منتظم عشوائياً مرّة واحدة. ما احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجي؟

في هذه التجربة العشوائية، فضاء العينة هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
إذا كان (A) هو حادث ظهور العدد 6، و (B) هو حادث ظهور عدد زوجي، فإنَّ:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$

الوحدة 8

$P(A | B)$ تعني احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجياً:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

الاحتمال المشروط

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أليّي حجر نرد منتظم عشوائياً مرّة واحدة. ما احتمال ظهور عدد أكبر من 3 إذا كان العدد الظاهر زوجياً؟

في كثير من الأحيان، تعرّض البيانات لفتين من الأشياء باستعمال ما يسمى جداول الاتجاهين (two-ways tables)، وهي جداول تتيح إيجاد الاحتمال المشروط على نحو سهلٍ.

مثال 5: من الحياة

	ورقية	غير ورقية
السبت	7	94
الأحد	8	121

تدوير: يُبيّن الجدول المجاور كتل النفايات التي جُمعت بالأطنان في يومين من إحدى المدن. إذا سُحبَت عينة عشوائية منها قبل البدء بإعادة تدويرها، فما احتمال أن تكون العينة ورقية، علمًا بأنّها جُمعت يوم الأحد؟

	ورقية	غير ورقية	المجموع
السبت	7	94	101
الأحد	8	121	129
المجموع	15	215	230

إذا كان (A) هو حادث سحب عينة من الورق، و (B) هو حادث سحب عينة أخرى جُمعت يوم الأحد، فما قيمة $P(A | B)$ ؟

الخطوة 1: أكمل جدول الاتجاهين بإيجاد المجاميع.

الخطوة 2: أجد احتمالات الحوادث اللازمة لحساب الاحتمال المشروط.

بالنظر إلى جدول الاتجاهين، أجد كلاً من: $(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$, و $P(A \cap B)$:

$$P(A) = \frac{15}{230}$$

كتلة الورق التي جُمعت في اليومين 15 طناً، وكتلة جميع النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طناً

$$P(B) = \frac{129}{230}$$

كتلة النفايات التي جُمعت يوم الأحد 129 طناً، وكتلة النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طناً



يسهم عملية تدوير النفايات في المحافظة على البيئة بصورة كبيرة. فمثلاً، إعادة تدوير طن واحد من الورق قد تحول دون قطع 17 شجرة.

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

كتلة النفايات الورقية التي جمعت يوم الأحد 8 أطنان،
وكتلة جميع النفايات التي جمعت 230 طناً

الخطوة 3: أعرض قيم الاحتمالات بصيغة الاحتمال المشروط.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

صيغة الاحتمال المشروط

$$= \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

بالتعمير، والتبسيط

إذن، احتمال أن تكون العينة ورقية، وأنها جمعت يوم الأحد هو $\frac{8}{129}$

أتحقق من فهمي

إذا سُجِّلت عينة عشوائية، فما احتمال أن تكون غير ورقية، علمًا بأنها جمعت يوم السبت؟

ملحوظة

يمكن إيجاد ناتج الاحتمال المشروط سهولةً من جدول الاتجاهين مباشرةً.

ملخص المفاهيم

القانون	الوصف	نوع الحوادث
$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة.	المتنافيان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	يوجد بينهما عناصر مشتركة.	غير المتنافيين
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة، واتحادهما معاً يمثل فضاء العينة.	المُتمامان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	المستقلان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$	وقوع أحدهما يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	غير المستقلين
$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$	وجود معلومة إضافية عن وقوع أحدهما.	المشروطة



كرات زجاجية: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R), و3 كرات خضراء (G), وكرتين صفراوين (Y), جميعها متماثلة. سُحبَت كرة من الكيس عشوائياً، ثم كتب لونها، ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحبَت كرة أخرى عشوائياً، ثم كتب لونها:

ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية صفراء؟ 1

ما احتمال أن تكون الكرتان خضراوين؟ 2

أحدد إذا كان الحادثان مستقلان أو غير مستقلان في كل من التجارب العشوائية الآتية:

سحب كرة زرقاء عشوائياً من صندوق، والحصول على العدد 5 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة. 3

اختيار طالبٍ من مواليد شهر 10 عشوائياً ليخرج من غرفة الصف، ثم اختيار طالب آخر عشوائياً من مواليد شهر 5 ليتحقق به.

الحصول على عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، وعدد يقبل القسمة على 2 عند إلقاء حجر نرد آخر منتظم.

إصابة صيادي الهدف الثابت الذي أطلق كل منهما طلقة واحدة نحوه عشوائياً. 6

سحب بطاقة عشوائياً تحمل العدد 6 من مجموعة بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من 1 إلى 10، ثم إعادة كل منها، ثم سحب بطاقة أخرى عشوائياً تحمل عدداً زوجياً.

أقلام حبر: في علبة قلما حبر أحمر، وثلاثة أقلام حبر أزرق، جميعها متماثلة. اختيار سالم منها قلمين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

اختيار قلمي حبر أحمر. 8

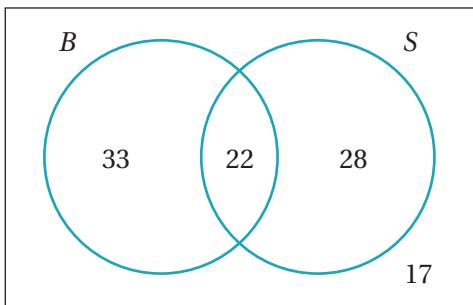
اختيار قلمي حبر أزرق. 9

اختيار قلم حبر من كل لون.

اختبارات: تقدم سامي لاختبارين في الرياضيات، وكان احتمال نجاحه في الأول 75%， واحتمال نجاحه في الثاني إذا نجح في الأول 80%， واحتمال رسوبه في الثاني إذا رسب في الأول 60%， فأجد كلاً مما يأتي:

احتمال نجاح سامي في كلا الاختبارين. 11

احتمال نجاح سامي في أحد الاختبارين، ورسوبه في الآخر.



سُئلَ 100 شخصٍ عنْ وجودِ أخٍ لِهُمْ أوْ أختٍ، وقد توزّعوا وفقَ إجاباتِهِمْ كما في شكلِ فنِ المجاورِ، حيثُ

B: الأشخاصُ الذينَ لِكُلِّ مِنْهُمْ أخٌ.

S: الأشخاصُ الذينَ لِكُلِّ مِنْهُمْ أختٌ.

إذا اخترَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائياً، فما احتمالُ

أنْ يكونَ لهُ أخٌ؟ 13

أنْ يكونَ لهُ أخٌ، علماً بِأَنَّ لهُ أختاً؟ 14

أنْ يكونَ لهُ أختٌ، علماً بِأَنَّ لهُ أخاً؟ 15

		لديهِ خبرةٌ سابقةٌ	
		نعم	لا
لديهِ شهادةً	نعم	54	27
	لا	5	4

وظائفُ: يُبيّنُ الجدولُ المجاورُ أعدادَ المُتقَدِّمينَ لوظيفةٍ في إحدى الشركاتِ، ومُؤهَّلَاتِهِمُ العلمية، وخبراتِهِمُ السابقةة. إذا اخترَ أحدُ المُتقَدِّمينَ للوظيفةِ عشوائياً، فما احتمالُ

أنْ يكونَ لديهِ خبرةٌ سابقةٌ، علماً بِأَنَّ لديهِ شهادةً جامعيةً؟ 16

ألاّ يكونَ لديهِ شهادةً جامعيةً، علماً بِأَنَّ لديهِ خبرةٌ سابقةً؟ 17

إشاراتٌ مرورٌ: تمرُّ غادةً في رحلةٍ عودتها من العملِ بشارعِ رئيسٍ عليهِ إشاراتانِ ضوئيتانِ. إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الإشارةُ الأولى، وتجتارَها وهيَ مضاءةٌ باللونِ الأخضرِ G هوَ 0.3، وإذا كانتْ مضاءةً بالأحمرِ R، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةُ الثانيةَ وهيَ مضاءةً بالأحمرِ هوَ 0.8، أما إذا كانتِ الإشارةُ الأولى مضاءةً بالأحمرِ، فإنَّ احتمالَ وصولِها الإشارةُ الثانيةَ وهيَ مضاءةً بالأحمرِ هوَ 0.4

أستعملُ التمثيلَ بالشجرةِ الاحتماليةِ لإيجادِ كُلِّ من الاحتمالاتِ الآتيةِ:

احتمالُ وصولِها كُلُّاً من الإشارتينِ وهما مضاءتانِ بالأحمرِ. 18

احتمالُ وصولِها كُلُّاً من الإشارتينِ وهما مضاءتانِ بالأخضرِ. 19

احتمالُ وصولِها إحدى الإشارتينِ وهيَ مضاءةً بالأحمرِ، ووصلِها الإشارةُ الأخرى وهيَ مضاءةً بالأحمرِ. 20



أرصاد جوية: أفادت مذيعة النشرة الجوية أنَّ احتمال تساقط الثلوج يوم الإثنين هي 25%， وأنَّها ترتفع إلى 90% يوم الثلاثاء. استعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمالٍ:

- 21 تساقط الثلوج يوم الثلاثاء، وعدم تساقطها يوم الإثنين.
- 22 عدم تساقط الثلوج في كلا اليومين.
- 23 تساقط الثلوج في أحدِ اليومين على الأقل.

صيد: أطلق صياد طلقة واحدةً على هدف ثابت، وأطلق آخر طلقةً واحدةً على الهدف نفسه. إذا كان احتمال إصابةُ الأولى للهدف 70%， واحتمالُ إصابة الثانية للهدف 60%， فأجدُ احتمالاً:

- 24 إصابة كلا الصياديْن الهدف.
- 25 عدم إصابةِهما الهدف.
- 26 إصابة الصياد الثاني الهدف، علماً بأنَّ الصياد الأول أصابَ الهدف.
- 27 عدم إصابة الصياد الثاني الهدف، علماً بأنَّ الصياد الأول لم يُصبِ الهدف.
- 28 أحلُّ السؤال الوارد في فقرة مسألة اليوم.

مهارات التفكير العليا



تبرير: إذا كان (A) و (B) حادثيْن متنافيْن في تجربةٍ عشوائيَّة، فما قيمة $P(A | B)$? أبُرُّ إجابتي.

تبرير: قالَتْ تماضرُ: إنَّه لائِي حادثيْن (A) و (B) في فضاء العيَّنة Ω لتجربةٍ عشوائيَّة ما، فإنَّ:

$$P(A | B) = P(B | A)$$

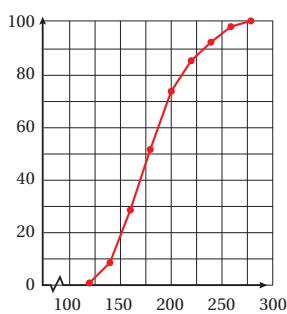
هل قولُ تماضرَ صحيحٌ؟ أبُرُّ إجابتي.

تحدٍ: يحتوي كيسٌ على n من الكراتِ المُتماثلةِ مختلفةُ الألوان. إذا كانَ احتمال سحبِ كرةٍ حمراءً ثمَّ سحبِ كرةٍ خضراءً من دون إرجاع 2.4%， فما قيمة n ؟

مسألةٌ مفتوحةٌ: أذكر مثلاً على حادثيْن مستقلٍّين، ومثلاً آخر على حادثيْن غير مستقلٍّين، مبيِّناً كيفَ أجدُ احتمالَ وقوعِ الحادثيْن معًا في كُلِّ مثاِلٍ.

اختبار نهاية الوحدة

رسائل بريدية: يُبيّن الشكل الآتي المنهج التكراري التراكمي لكتلة 100 رسالة (بالغرام) مُسجّلة لدى أحد مكاتب البريد. قيمة المدى الربع الأعلى لكتل الرسائل هي:



- a) 160 b) 200
c) 210 d) 230

5 في الجدول الآتي، إذا كان مجموع مربعات انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي في التكرار المقابل لها هو 324، فإن قيمة التباين هي:

الفئات	التكرار
$5 \leq x < 10$	7
$10 \leq x < 15$	12
$15 \leq x < 20$	6

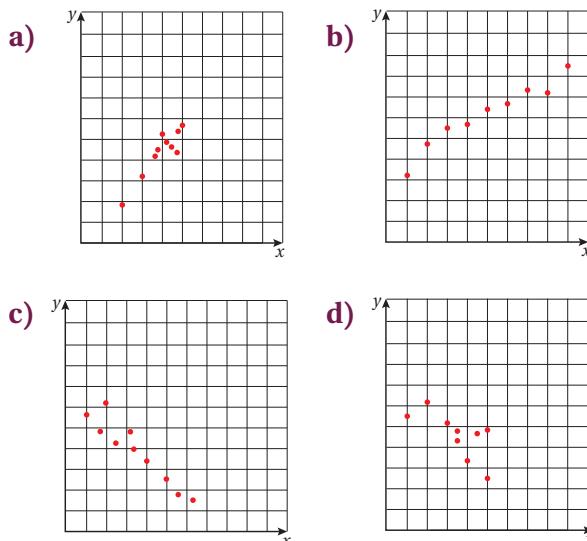
- a) 13.50 b) 12.96
c) 3.67 d) 3.60

6 حجر نرد: أُلقي حجر نرد منتظمان، أحدهما أحمر، والآخر أزرق عشوائياً مرّة واحدة. احتمال ظهور عدد أولي على حجر النرد الأحمر، وعدٍ أقل من 3 على حجر النرد الأزرق هو:

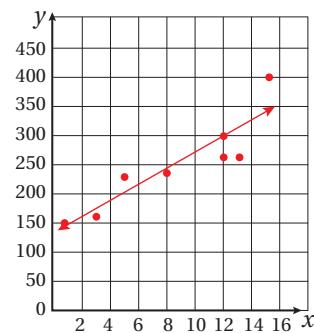
- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$
c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

أَصْبِع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 شكل الاتساع الذي يُظهر الارتباط الموحد الأقوى بين (x) و (y) هو:



2 باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل الآتي، تقدير قيمة y عندما $x = 7$ هو:



- a) 150 b) 175
c) 200 d) 225

3 قيمة المدى الربع للقيم: 10، 7، 8، 10، 5، 11، 13، 12، 15، 9، 6، 7، 4 هي:

- a) 5 b) 6
c) 9 d) 11

اختبار نهاية الوحدة

14 قيمة المئين 80 لكتل البيض، مفسّراً دلالته.

15 عدد البيض الذي تزيد كتلته على 65g

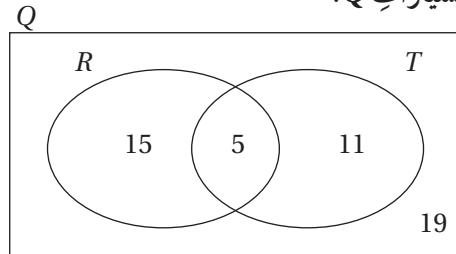
16 يُمثل الجدول الآتي كمية الأمطار في إحدى مناطق المملكة على مدار 20 عاماً لأقرب مليمتر:

كمية الأمطار	عدد السنوات
$199 \leq x < 249$	2
$249 \leq x < 299$	3
$299 \leq x < 349$	6
$349 \leq x < 399$	3
$399 \leq x < 449$	4
$449 \leq x \leq 499$	2

أجد التباين والانحراف المعياري لكمية الأمطار.

سيارات: يبيّن شكلُ قُلْبِ الآتي عدد السيارات الحمراء R ، وعدد السيارات ذات البالغين T ، وعدَّ سياراتٍ أخرى في أحد

مواقف السيارات Q :



إذا اخترت سيارةً عشوائياً، فما احتمال:

17 أن تكون حمراء، وذات باليين؟

18 ألا تكون حمراء، ولها بابان؟

19 إذا اخترت سيارةً، وكانت ذات باليين، فما احتمال ألا تكون حمراء؟

20 إذا اخترت سيارتين، الواحدة تلو الأخرى عشوائياً، فما احتمال أن يكون لونهما أحمر؟

إذا كان A و B حادثين في تجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.3$

$, P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.1$

7 $P(A \cup B)$

8 $P(\bar{A})$

9 $P(B - A)$

10 $P(A \cup \bar{B})$

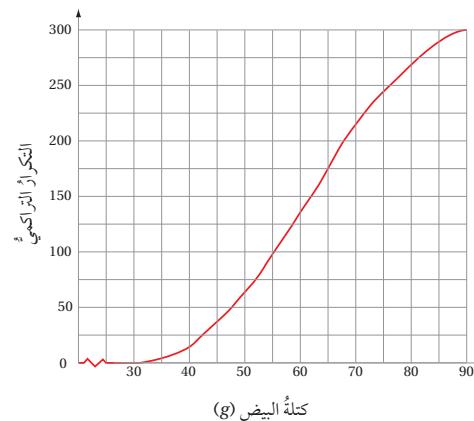
11 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

زراعة: دُونَ مهندس زراعي كتلة 300 بيضة بالغرام كما في

الجدول الآتي:

كتلة البيضة (x)	التكرار
$30 \leq x < 40$	15
$40 \leq x < 50$	48
$50 \leq x < 60$	72
$60 \leq x < 70$	81
$70 \leq x < 80$	54
$80 \leq x \leq 90$	30

يُبيّن التمثيل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لهذا الجدول:



استعمل المنحنى التكراري التراكمي لإيجاد:

12 قيمة الوسيط لكتل البيض، مفسّراً دلالته.

13 قيمة المدى الريعي لكتل البيض، مفسّراً دلالته.

اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية

لون العينين: يبيّن الجدول الآتي احتمال أن يكون الشخص في مجتمع ما ذا عينين زرقاء، أو بُنيتين، أو خضراء؟

لون العينين	زرقاوان	بنيان	خضراء
الاحتمال	0.4	0.5	0.1

إذا اختير شخصان عشوائياً، فما احتمال:

أن تكون عينا كلاً منهما زرقاء؟ **27**

أن تكون عينا كلاً منهما مختلفي اللون؟ **28**

أقلام ملونة: يحتوي صندوق على 3 أقلام حمراء R ، وقلمين زرقاء B ، و 4 أقلام خضراء G . اختارت شيماء قلمين عشوائياً من الصندوق على التوالي، ومن دون إرجاع. ما احتمال:

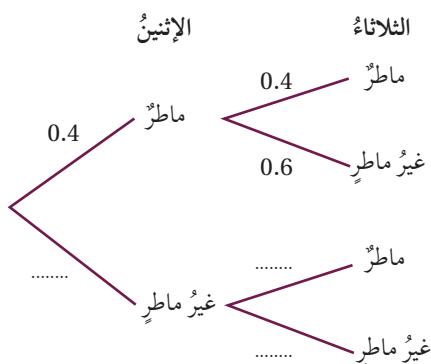
أن يكون لون القلمين أحمر؟ **29**

أن يكون لقلمين اللون نفسه؟ **30**

أن يكون لون أحد القلمين فقط أخضر؟ **31**

أمطار: إذا نزل المطر اليوم، فإن احتمال نزوله غداً هو 0.4، وإذا لم ينزل اليوم، فإن احتمال نزوله غداً هو 0.2. نزل المطر يوم الأحد:

أكمل الفراغ في الشكل الآتي: **32**



أجد احتمال نزول المطر في يوم واحد على الأقل من اليومين الواردين في الشكل. **33**

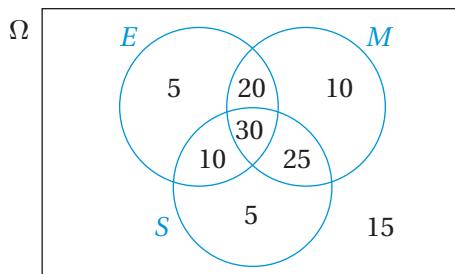
كرات ملونة: يحتوي كيس على كرتين سوداوين، وكربة بيضاء. إذا كانت جميع الكرات متماثلة، وسحب مصبب كرة عشوائياً، ثم كتب لونها، ثم أعادها إلى الكيس، ثم سحب أخرى عشوائياً، ثم كتب لونها، فأستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد الاحتمالات الآتية:

الكرتان المسحوبتان بيضاوان. **21**

الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون. **22**

إحدى الكرتین المسحوبتين على الأقل لونها أسود. **23**

تقديم 120 طالباً لاختبارات في اللغة الإنجليزية (E)، والرياضيات (M)، والعلوم (S)، وقد توزعوا وفق نجاحهم في هذه الاختبارات كما في شكلٍ فن الآتي:



إذا اختير أحد هؤلاء الطلبة عشوائياً، فما احتمال:

أن يكون ناجحاً في العلوم، علمًا بأنه ناجح في الرياضيات؟ **24**

أن يكون ناجحاً في اللغة الإنجليزية، علمًا بأنه ناجح في الرياضيات؟ **25**

ألا يكون ناجحاً في العلوم، علمًا بأنه ليس ناجحاً في الرياضيات؟ **26**



السلام عليكم ورحمة الله وبركاته
نرجوكم في

موقع منتديات صقر الجنوب التعليمية
منهاج المملكة الأردنية الهاشمية

وسعدنا وشرفنا ان نستعرض لكم في تقديم
كل ما هو جديد للمنهاج المحدث المطور وجميع
المستويات والمواد

ملفاتنا مجدها من كل مكان ونضعها لكم في مكان واحد
ليسهل تحميلها
علما انه جميع ما ننشر مجاني ٦٠٠%

أخيه الزائر - أفتتحي الزائره انه دعمكم لنا فهو اضخم لكم لنا
فهو شرف كبير

صفحتنا على الفيس بوك [هنا](#)
مجموعتنا على الفيس بوك [هنا](#)
قناتنا على اليوتيوب [هنا](#)

جميع ملفاتنا نرفعها على مركز تحميل خاص في صقر الجنوب

خزنه نسعه دائمًا في تقديم كل ما هو أفضل لكم وهذا وعد منا انه شاء الله
شبعونا دائمًا حتى نواصل في العطاء و نسأله الله انه يوفقنا ويسدد خطانا
في حال واجهنا أي

مشكلة في تحميل اي ملف
من منتديات صقر الجنوب المنهاج الأردني