



الرياضيات

المستوى الحادي عشر - مسار آداب وإنسانيات
الفصل الدراسي الثاني



حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني
أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءَ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّيَاءَ
قَطْرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الْأَوْفِيَاءِ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الْأَلَى	وَعَلَى ضِيَاءِ الْأَنْبِيَاءِ
قَطْرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ	عِزٌّ وَأَمْجَادُ الْإِبَاءِ
قَطْرُ الرِّجَالِ الْأَوَّلِينَ	حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءِ
وَحُمَائِمُ يَوْمَ السَّلَامِ	جَوَارِحُ يَوْمِ الْفِدَاءِ

قائمة بأدلة المصادر الرقمية للمستوى الحادي عشر - مسار آداب وإنسانيات

تجدون أدناه روابط توصلكم إلى محتويات توضّح بنية منهج الرياضيات وأثره على نتائج المتعلمين في الإختبارات الدولية، وطريقة تطبيق مشاريع STEM، وكيفية استخدام تطبيقات الآلة الحاسبة وعناصر التعلّم الإلكترونيّة (شروحات فيديوّهات التعلّم).

للاستفادة من الروابط، الرجاء
تسجيل الدخول إلى "نظام قطر
للتعليم" أوّلًا.

دليل إرشادي لمشاريع STEM
في منهج الرياضيات 9-12



تطبيقات الآلة الحاسبة



دليل استخدام العناصر الرقمية
لمادة الرياضيات



إعداد المتعلمين للاختبارات
الدولية TIMSS و PISA



بروشور منهج الرياضيات



4	 مشروع STEM
5	 دالة القيمة المطلقة 3-1
11	 الدوال المتعددة التعريف 3-2
17	 دالة الجذر التربيعي 3-3
23	 دالة الجذر التكعيبي 3-4
30	 التناسب العكسي ودالة المقلوب 3-5
38	 مراجعة الوحدة

خصائص الدوال والعمليات عليها

46		مشروع STEM
47		تحليل الدوال بيانيًا 4-1
53		إزاحات الدوال 4-2
59		التمدد والتضييق 4-3
66		العمليات على الدوال 4-4
75		الدوال العكسية 4-5
83		مراجعة الوحدة

90	مشروع STEM
91	5-1 تحليل تمثيل البيانات
98	5-2 مقارنة مجموعات البيانات
106	5-3 تفسير أشكال تمثيل البيانات
113	5-4 الانحراف المعياري
121	5-5 الجداول التكرارية المزدوجة
127	مراجعة الوحدة

ملحق

استخدام الآلة الحاسبة

G2	استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية
G6	استخدام الآلة الحاسبة البيانية

السؤال الأساس

كيف تستعمل بعض الدوال لنمذجة مواقف حياتية ولحل المسائل؟ وما هي الخصائص الأساسية لتمثيلاتها البيانية؟

نظرة عامة على الوحدة

3-1 The Absolute Value Function

3-2 Piecewise-Defined Functions

3-3 The Square Root Function

3-4 The Cubic Root Function

3-5 Inverse Variation and The Reciprocal Function

3-1 دالة القيمة المطلقة

3-2 الدوال المتعددة التعريف

3-3 دالة الجذر التربيعي

3-4 دالة الجذر التكعيبي

3-5 التناسب العكسي ودالة المقلوب

Topic Vocabulary

- absolute value function
- vertex
- axis of symmetry
- piecewise-defined function
- square root function
- cubic root function
- inverse variation
- constant of variation
- reciprocal function
- asymptote

مصطلحات الوحدة

- دالة القيمة المطلقة
- رأس
- محور تناظر
- دالة متعددة التعريف
- دالة الجذر التربيعي
- دالة الجذر التكعيبي
- تناسب عكسي
- ثابت التناسب
- دالة المقلوب
- خط التقارب

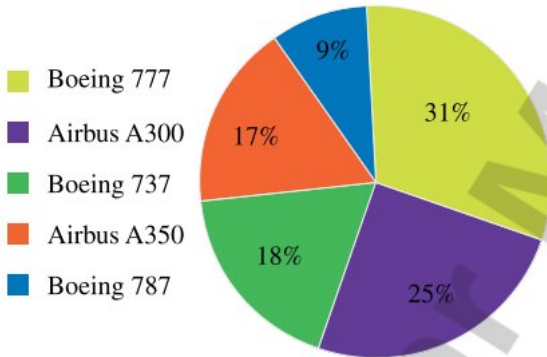
هل تعلم؟

تعتبر الخطوط الجوية القطرية من أهم وأسرع خطوط الطيران نموًا في العالم، حيث وصل عدد وجهاتها إلى **150 وجهة عالمية**. تضم الخطوط الجوية القطرية 45 633 موظفًا، وتملك أسطولًا يحتوي على أكثر من 300 طائرة من مختلف الأنواع الحديثة:

Boeing 737, Airbus A320, Boeing 777, Boeing 787, Airbus A350

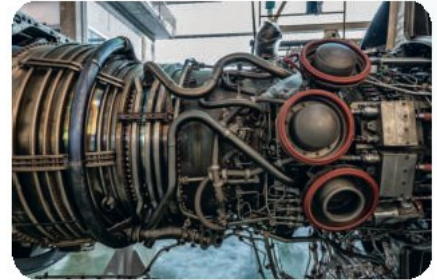


يبين التمثيل البياني نسب توزيع الطائرات وفق أنواعها



تصدّرت "أجزاء الطائرات العادية والطائرات العمودية"

لائحة أهم السلع المستوردة في دولة قطر لشهر أبريل 2019 بقيمة إجمالية مقدارها **448 مليون ريال قطري**.



انطلقت أعمال بناء **مطار حمد الدولي** عام 2006، وتم ردم منطقة من الخليج العربي شكّلت نسبة **60%** من موقع المشروع، وتضمّن هذا العمل نقل **6.5 مليون متر مكعب** من مواد النفايات لأغراض الردم، وهو أكبر مشروع بيئي في الخليج العربي.

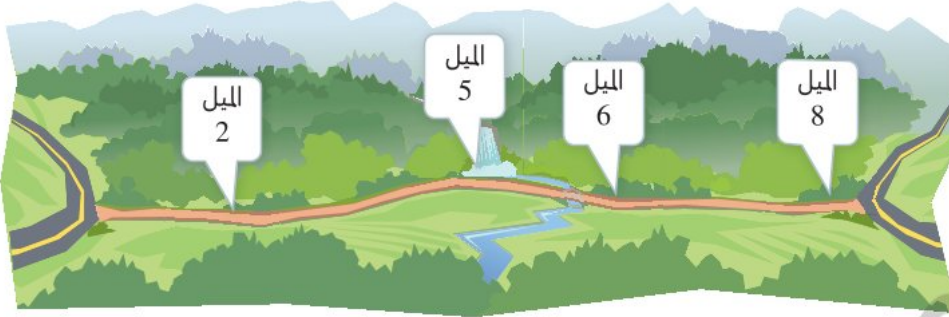


مهمتك: استهلاك الوقود في الطيران

ترتبط المسافة التي تقطعها الطائرة مع كمية الوقود المتبقية في خزانها بعلاقة عكسية. أجر بحثًا لإيجاد المسافات التي تقطعها طائرة Airbus A350 إلى أربعة بلدان وكمية الوقود اللازمة لقطع كل مسافة من هذه المسافات. بعد ذلك، قسّم كل مسافة من هذه المسافات الأربع إلى ثلاث مسافات جزئية تصاعدية، واحسب كمية الوقود المتبقية في الخزان بعد قطع كل مسافة جزئية.



انطلقت ثلاث مجموعات من الطلاب سيرة على الأقدام من مؤشرات الأميال 2 و 6 و 8 متفقيين على الالتقاء عند الشلال الواقع عند مؤشر الميل 5



أستطيع... إيجاد خواص دوال تتضمن مقادير قيمة مطلقة.

معايير الدرس

11F.1.4 و 11F.3.1

المصطلحات

• دالة القيمة المطلقة

absolute value function

vertex

• رأس

axis of symmetry

• محور تناظر

A. كيف يمكنك استعمال مؤشر الميل لتحديد عدد الأميال التي على كل مجموعة من الطلاب قطعها للوصول إلى الشلال؟

B. **نمذج** أنشئ تمثيلاً بيانياً يربط بين موقع كل مجموعة على المسار والمسافة التي تفصلها عن الشلال.

C. كيف ستتغير النقاط في التمثيل البياني الذي أنشأته في الجزء B مع اقتراب مجموعات الطلاب من الشلال؟

ما الخواص الأساسية للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة؟

السؤال الأساس

تمثيل دالة القيمة المطلقة بيانياً

مثال 1

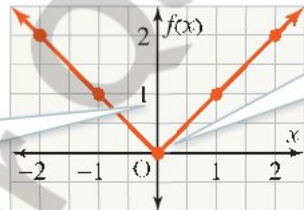
ما خواص التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ ؟

كُون جدولاً للقيم ومثل دالة

القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ بيانياً.

x	$f(x) = x $	$(x, f(x))$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$

الرأس، $(0, 0)$ ، هو نقطة التحول في التمثيل البياني.



محور التناظر هو
المستقيم $x = 0$.

يقع رأس التمثيل البياني عند تقاطعه مع محور التناظر. يمثل الرأس القيمة الصغرى في المدى.

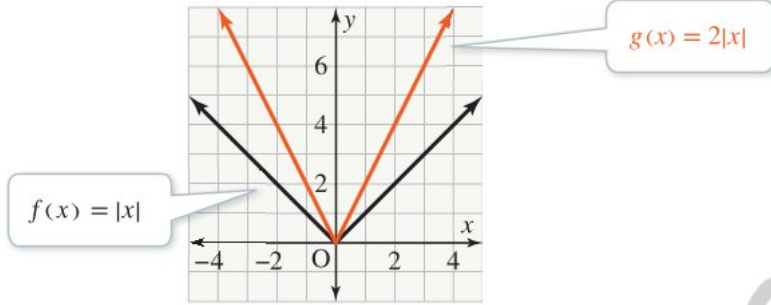
ابحث عن العلاقات

كيف تساهم طبيعة القيمة المطلقة في إظهار تناظر التمثيل البياني؟

للتمثيل البياني **محور تناظر** يتقاطع معه عند رأسه ويقسمه إلى قسمين، أو قطعتين، كل منهما انعكاس للآخر.

حاول أن تحل! 1. ما المجال والمدى للدالة $f(x) = |x|$ ؟

A. ما وجه المقارنة بين الدالتين $g(x) = 2|x|$ و $f(x) = |x|$ من حيث المجال والمدى؟
قارن بين التمثيلين البيانيين للدالتين f و g .

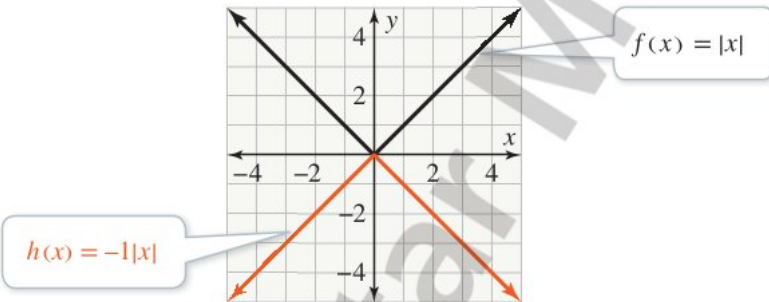


مجال كل من الدالتين f و g هو كل الأعداد الحقيقية.

بما أن مقدار القيمة المطلقة ينتج قيمًا غير سالبة فقط، فإن مدى الدالة f هو $y \geq 0$.
وعند ضرب $|x|$ في أي عامل موجب، وهو العدد 2 في هذه الحالة، تنتج مخرجات غير سالبة،
لذا فإن مدى الدالة g أيضًا $y \geq 0$.

إذن، مجال ومدى الدالة g هما نفس مجال ومدى الدالة f .

B. ما وجه المقارنة بين الدالتين $h(x) = -|x|$ و $f(x) = |x|$ من حيث المجال والمدى؟
قارن بين التمثيلين البيانيين للدالتين f و h .



مجال كل من الدالتين f و h هو كل الأعداد الحقيقية.

مدى الدالة f هو $y \geq 0$. وعند ضرب $|x|$ في أي عامل سالب، وهو -1 في هذه الحالة،
تنتج مخرجات غير موجبة، لذا فإن مدى الدالة h هو $y \leq 0$.

إذن، مجال الدالة h هو نفس مجال الدالة f ، في حين مدى الدالة h هو معكوس مدى
الدالة f .

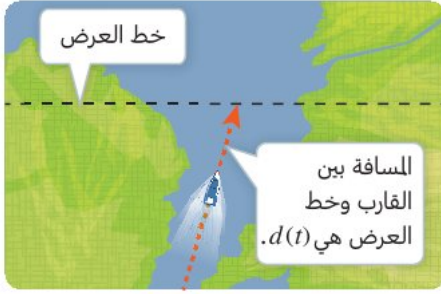
استعمل الأدوات المناسبة

لماذا من المفيد استعمال تمثيل
بياني وجدول قيم مغا لاستكشاف
مجال ومدى الدوال التي تتضمن
مقادير قيمة مطلقة؟

حاول أن تحل! 2. ما وجه المقارنة بين كل دالة مما يلي والدالة $f(x) = |x|$ من حيث المجال
والمدى؟

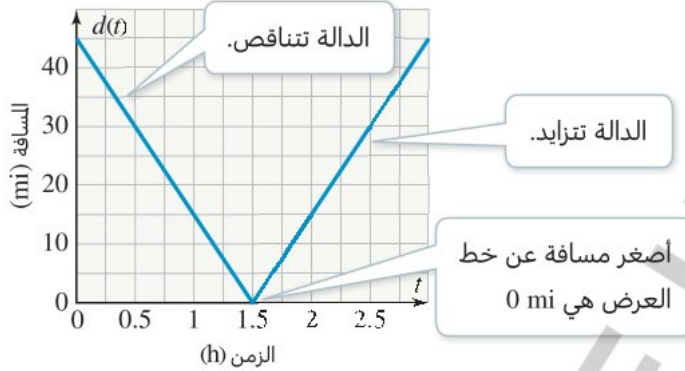
a. $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

b. $h(x) = -2|x|$



يبحر أحمد في قارب من منزله الواقع جنوب خط العرض المبين في الشكل المجاور إلى منزل صديقه الواقع شمال خط العرض.

يبين التمثيل البياني للدالة $d(t) = 30|t - 1.5|$ المسافة، بالأميال، بين القارب وخط العرض عند t ساعة. لنفترض أن التمثيل البياني يمثل رحلة أحمد بكاملها.



نصيحة دراسية

تذكر أن التمثيل البياني الذي يمثل حركة جسم قد لا يمثل صورة لمساره.

A. ما المسافة التي اجتازها أحمد لزيارة صديقه؟

بدأ أحمد رحلته من نقطة تبعد 45 mi عن خط العرض، حيث بلغه بعد ساعة ونصف. ثم ابتعد عن خط العرض من الجهة الثانية، فقطع 45 mi أخرى، ليصل إلى منزل صديقه بعد 3 ساعات. إذن، اجتاز أحمد 90 mi ليصل إلى منزل صديقه.

B. ما العلاقة بين التمثيل البياني ومجال الدالة ومداها؟

بما أن رحلة أحمد استمرت 3 ساعات، إذن مجال الدالة هو $0 \leq t \leq 3$

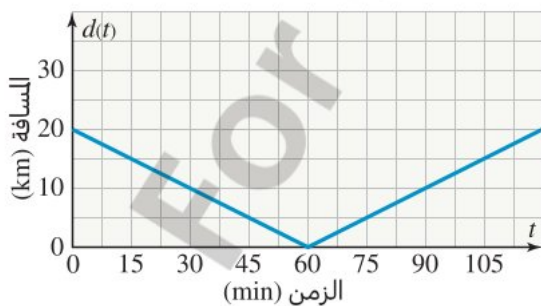
بالنسبة للجزء $0 < t < 1.5$ من الرحلة، المسافة التي تفصل أحمد عن خط العرض تتناقص. أما بالنسبة للجزء $1.5 < t < 3$ من الرحلة، فإن المسافة التي تفصله عن خط العرض تتزايد.

القيمتان العظمى والصغرى في التمثيل البياني هما 0 و 45،

إذن مدى الدالة هو $0 \leq d(t) \leq 45$

3. حاول أن تحل! 3. يمر راكب دراجة هوائية مشترك في سباق بمحطة للمياه. التمثيل البياني أدناه

للدالة $d(t) = \frac{1}{3}|t - 60|$ يمثل بعده عن محطة المياه عند t دقيقة.



افترض أن

التمثيل البياني يمثل

هذه المسافة على

طول مسار السباق.

ما المعلومات التي

يمكنك استنتاجها

من التمثيل البياني؟

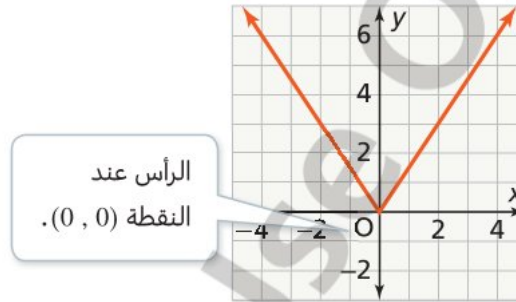
لفظيًا

للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة رأس يمثل القيمة الصغرى للدالة. يقطع محور التناظر الرأس ويقسم التمثيل البياني إلى قسمين كل منهما انعكاس للآخر.

جبريًا

$$f(x) = |x|$$

بيانيًا



المجال هو كل الأعداد الحقيقية، والمدى هو $y \geq 0$.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد مجال ومدى الدالة.

5. $g(x) = 5|x|$

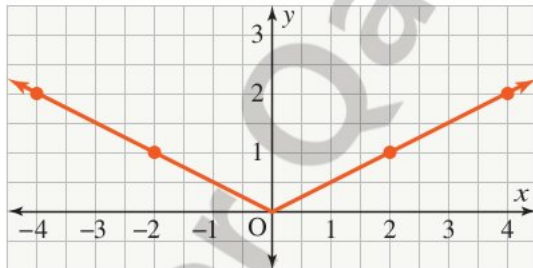
6. $h(x) = -2|x|$

في التمرينين 7 و 8، ممّن الدالة بيانيًا.

7. $g(x) = 1.5|x|$

8. $h(x) = -0.8|x|$

9. اكتب دالة قيمة مطلقة تنمذج التمثيل البياني أدناه. حدّد مجال هذه الدالة ومداه.



عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما الخواص الأساسية للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة؟

2. تواصل بدقة ما وجه المقارنة بين الدالتين $g(x) = a|x|$ و $f(x) = |x|$ من حيث المجال والمدى عندما $0 < a < 1$ وضح إجابتك.

3. فكّر وثابر في الحل إذا كانت النقطة (16, 1) تقع على التمثيل البياني للدالة $g(x) = a|x|$ ، أوجد نقطة أخرى تقع على التمثيل البياني لهذه الدالة. ما قيمة الثابت a في هذه الدالة؟

4. حلّل الخطأ تقول لطيفة إن رأس التمثيل البياني للدالة $g(x) = a|x|$ يمثل دائمًا القيمة الصغرى للدالة g . وضح خطأ لطيفة.

في التمارين 16-21، حدّد ما إذا كانت النقطة تقع على التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$. إذا كانت كذلك، اذكر إحداثي نقطة أخرى لها قيمة y نفسها. انظر المثال 1

16. (11, 11) 17. (-2.3, -2.3)
18. (0, 1) 19. (15, -15)
20. (-8, 8) 21. (1, 0)

في التمرينين 22 و 23، اكتب كل دالة موصوفة أدناه في الصورة $g(x) = a|x|$.

22. الرأس عند (0, 0)، التمثيل البياني يمر بالنقطة (3, 1).

23. المدى هو $y \leq 0$ ، التمثيل البياني يمر بالنقطة (-1, -4).

انظر المثال 1

في التمارين 24-27، مثل الدالة بيانيًا، ثم أوجد مجالها ومداها.

انظر المثال 2

24. $g(x) = -\frac{1}{4}|x|$ 25. $h(x) = 3.5|x|$
26. $p(x) = -5|x|$ 27. $d(x) = \frac{1}{3}|x|$

28. يشارك سالم في سباق للجري. يوضّح التمثيل البياني أدناه بُعد، بالأميال، عن نقطة التزوّد بالماء. كم ميلًا ركض سالم؟ وضح إجابتك. انظر المثال 3



10. **بّرر منطقيًا** كيف يؤثر تغيير إشارة الثابت a من موجبة إلى سالبة في مجال ومدى الدالة $f(x) = a|x|$ ؟

11. **تواصل بدقة** قارن وقابل بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = x$. ما أوجه الشبه والاختلاف بينهما؟

12. **حلّ الخطأ** صف خطأ محمود عند تحديد العلاقة بين مجال ومدى كل من الدالتين $f(x) = |x|$ و $f(x) = 10|x|$ ، وصّحه.

مجال الدالة $f(x) = 10|x|$
هو نفس مجال الدالة $f(x) = |x|$.
مدى الدالة $f(x) = 10|x|$
يساوي 10 أضعاف مدى الدالة $f(x) = |x|$.

13. **مهارات التفكير العليا** ما قيم a التي تجعل التمثيل البياني للدالة $f(x) = a|x|$ يشكّل زاوية قائمة عند الرأس؟ وضح إجابتك.

14. **استعمل البنية** يوضّح الجدول أدناه قيمًا مختارة للدالة $g(x) = a|x|$. انسّخ الجدول وأكمله. اكتب الإجابات المجهولة بدلالة a و b .

x	$g(x) = a x $
-4	b
■	a
■	0
1	■
■	b
■	$2b$

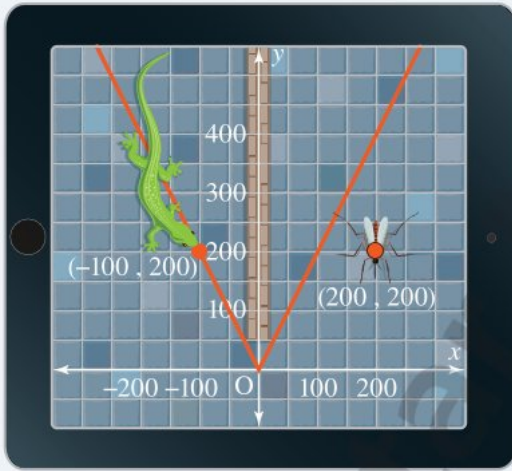
15. **بّرر منطقيًا** لناخذ الدالة $f(x) = 2|x|$. إذا كانت الدالة $g(x) = 2|x| - 2$ ، فهل يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة g من مجال ومدى الدالة f ؟

32. التمثيل البياني للدالة $f(x) = -0.1|x|$ مفتوح إلى _____.
النقطة $(-10, \quad)$ تقع على التمثيل البياني.

33. اختبار SAT/ACT في أي مجال يكون مدى كل من الدالتين $y = -|x|$ و $y = -x$ هو نفسه؟

- (A) $\{x : x < 0, x \in \mathbb{R}\}$
- (B) $\{x : x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$
- (C) $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
- (D) $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$
- (E) $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

34. مهمة أدائية يُمذج الشكل أدناه موقع سحلية في لعبة فيديو في مستوى إحداثي. تتبع السحلية المسار المبين في الصورة.



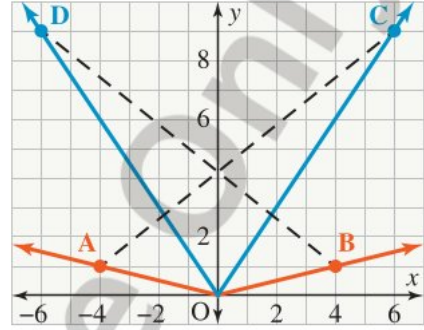
الجزء A اكتب دالة تتضمن مقدار قيمة مطلقة لموقع السحلية.

الجزء B فسر التمثيل البياني. أوجد الرأس وحدد الفترات التي تتزايد فيها الدالة، أو تتناقص، وأي قيم عظمى أو صغرى.

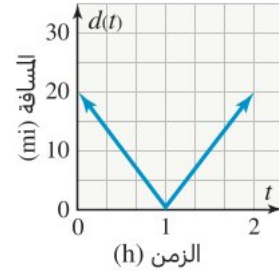
الجزء C في أي مكان يجب أن يقطع التمثيل البياني للدالة المحور x بحيث تتمكن السحلية من أكل الذبابة؟ وضح إجابتك.

الجزء D اكتب دالة يكون فيها الرأس الجديد الذي أوجدته في الجزء C حلاً للدالة، ويسمح للسحلية بأكل الذبابة.

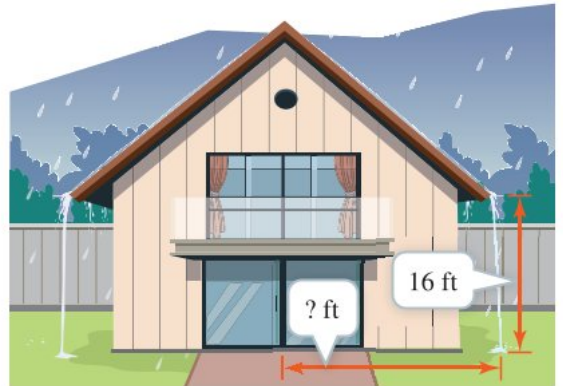
29. نمذج تبحث مصممة ألعاب عن دالتين لتمذجان الخططين المتصلين الموضحين في الرسم أدناه. ما هاتان الدالتان؟



30. فكر وثابر في الحل يبين التمثيل البياني المسافة بين راكب دراجة ومحل لبيع الشطائر في طريقه. اكتب دالة قيمة مطلقة لتمذج مسار راكب الدراجة استنادًا إلى التمثيل البياني.



31. فكر وثابر في الحل يتمذج الدالة $h(x) = -|x| + 34$ ارتفاع سقف المنزل المبين أدناه، حيث x المسافة الأفقية من منتصف المنزل إلى طرفه. إذا سقطت قطرة ماء من طرف السقف إلى الأرض، كم يبعد مكان سقوطها عن منتصف قاعدة المنزل؟ بّرر إجابتك.



أستطيع... تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً واستعمالها.

معيّار الدرس

11F.1.5

المصطلحات

• دالة متعددة التعريف

piecewise-defined function

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

تذكّر أن $|x| = x$ عندما $x \geq 0$ و $|x| = -x$ عندما $x < 0$

مسار العصا		
	الزمن (min)	المسافة الإجمالية (mile)
البداية	0	0
العذاء 1	3	0.25
العذاء 2	5.75	0.50
العذاء 3	9	0.75
العذاء 4	11.50	1.00

في أحد سباقات التتابع، يحمل كل عداء عصا ويقطع بها نفس المسافة قبل تسليمها إلى العداء التالي.

A. مثل بيانياً المسافة المقطوعة بالعصا بدلالة الزمن. كيف يتم تمثيل سرعة كل عداء في المستوى الإحداثي؟
B. أي عداء هو الأسرع؟

C. تواصل بدقة ما وجه الشبه بين التمثيل البياني لهذه الدالة والتمثيل البياني لدالة خطية؟ ما وجه الاختلاف بينهما؟

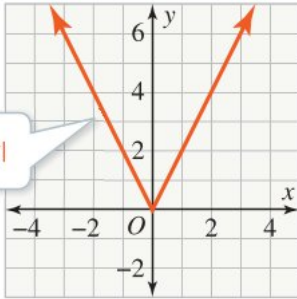
ما الخواص الأساسية للدوال المتعددة التعريف؟

السؤال الأساس

مثال 1

فهم الدوال المتعددة التعريف

ما العلاقة بين الدالة $f(x) = 2|x|$ والدالة الخطية؟



لنأخذ التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2|x|$. يتألف التمثيل البياني للدالة f من جزأين يلتقيان عند الرأس، وكل جزء يشكل جزءاً من مستقيم. أوجد قاعدة كل جزء في الدالة.

عندما $x \geq 0$ ، تكون القاعدة $f(x) = 2x$.

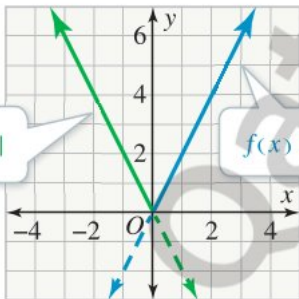
عندما $x < 0$ ، تكون القاعدة $f(x) = -2x$.

يمكنك كتابة هذه الدالة بدلالة أجزائها، بحيث يكون كل جزء معرّفاً على مجال معين.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

الدالة f هي دالة متعددة التعريف.

الدالة متعددة التعريف لها قواعد مختلفة للفترة المختلفة من مجالها.



إذن، تتكوّن الدالة $f(x) = 2|x|$ من جزأين معرّفين على فترتين من مجالها، بحيث يكون كل جزء دالة خطية.

حاول أن تحلّ! 1. عبّر عن الدالة $f(x) = -3|x|$ في صورة دالة متعددة التعريف.

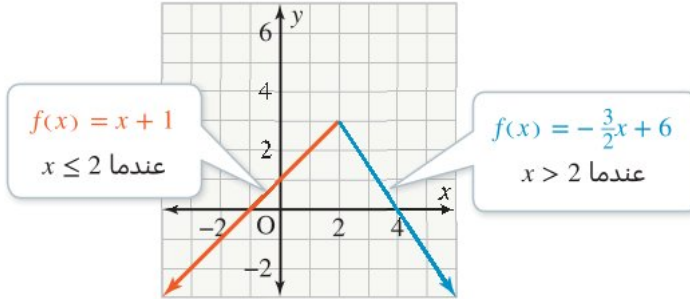
مثال 2

تمثيل دالة متعددة التعريف بيانيًا

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

مَثِّل بيانيًا الدالة

مَثِّل بيانيًا كل فرع من الدالة في المجال المعطى.



خطأ شائع

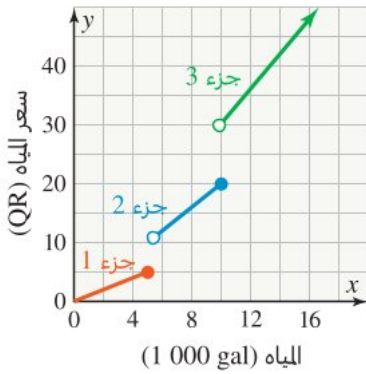
ربما تفترض أن فروع الدالة المتعددة التعريف يجب أن تكون متصلة، ولكن هذا الافتراض ليس صحيحًا بالضرورة.

حاول أن تحل! 2. مَثِّل الدالة التالية بيانيًا.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq 1 \\ -2x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

مثال 3

تحليل التمثيل البياني لدالة متعددة التعريف



تراجع والده ممدوح الفواتير الشهرية لاستهلاك المياه خلال فصل الصيف. تتضمن كل فاتورة شهرية تمثيلًا بيانيًا كما في الرسم المجاور، يعكس أسعارًا وفق ما تم استهلاكه من المياه.

زار عائلة ممدوح الكثير من الأقرباء في شهر يوليو وازدادت قيمة فاتورة المياه إلى ما يفوق الضعف. على فرض أن استهلاك المياه لم يتضاعف في ذلك الشهر، ما التفسير الممكن لهذا الازدياد؟

يبين التمثيل البياني ثلاثة أجزاء لقيمة فاتورة استهلاك المياه: من 0 إلى 5 000 gal، ومن 5 001 إلى 10 000 gal، وأكثر من 10 000 gal

ربما يكون الازدياد الكبير في الفاتورة قد نتج عن ازدياد الاستهلاك في حد واحد من فترات المجال، أي بين الجزء 1 والجزء 2، أو بين الجزء 2 والجزء 3،

الاستهلاك عند الحد بين الجزء 1 والجزء 2 والذي مقداره 5 000 gal تنتج عنه فاتورة قيمتها 5 QR بينما استهلاك مياه أكثر بقليل ينتج عنه فاتورة قيمتها 10 QR على الأقل.

حاول أن تحل! 3. كَوِّن تخمينًا حول أسباب فرض شركة الخدمات العامة لأسعار أعلى نظير مستويات استهلاك المياه المرتفعة.

تواصل بدقة

ترمز الدائرة الممتلئة إلى أن التمثيل البياني يتضمن النقطة، بينما ترمز الدائرة الفارغة إلى أن التمثيل البياني لا يتضمن النقطة. لماذا يكون هذا مهمًا للتمثيل البياني لدالة متعددة التعريف؟

تكلفة الأساور المطلوبة



من 0 إلى 50 سوارًا QR 8 للسوار الواحد + QR 80 بدل شحن
من 51 إلى 100 سوار .. QR 4 للسوار الواحد + QR 40 بدل شحن
أكثر من 100 سوار QR 2 للسوار الواحد + شحن مجاني

يرغب مدير نادي ألعاب رياضية في شراء
أساور مخصصة لحملة ترويجية، ويظن أنه
بحاجة إلى 75 سوارًا. فيما يصّر مساعده
على أن طلب أكثر من 100 سوار أقل
تكلفة من طلب 75 سوارًا. كيف يستطيع
مساعد المدير إقناع المدير برأيه؟

اكتب قاعدة لتمثيل كل سعر.

ليكن x عدد الأساور.

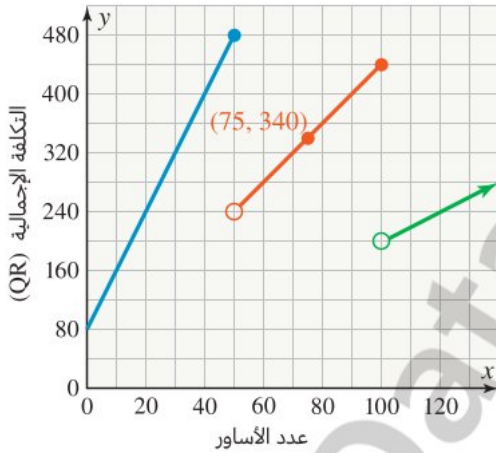
لتكن $f(x)$ التكلفة الإجمالية.

عدد الأساور	السعر (QR)	×	الأساور	+	تكلفة الشحن (QR)
0 – 50	8	×	x	+	80
51 – 100	4	×	x	+	40
أكثر من 100	2	×	x	+	0

اكتب دالة متعددة التعريف لتمثيل الموقف.

$$f(x) = \begin{cases} 8x + 80, & 0 \leq x \leq 50 \\ 4x + 40, & 50 < x \leq 100 \\ 2x, & x > 100 \end{cases}$$

من 0 إلى 50 سوارًا
من 51 إلى 100 سوار
أكثر من 100 سوار



أوجد قيمة $f(75)$ وقيمة $f(101)$.

$$f(75) = 4(75) + 40 = 300 + 40 = 340$$

$$f(101) = 2(101) = 202$$

تكلفة 75 سوارًا هي QR 340 وتكلفة 101 سوار هي QR 202.

إذن، ينفق مدير صالة الألعاب الرياضية مبلغًا أقل إذا طلب أكثر من 100 سوار.

حاول أن تحل! 4. ما الفرق في التكلفة بين طلب واحد مقداره 200 سوار وطلبين يحتويان على 100 سوار لكل طلب. وأربعة طلبات يحتوي كل منها على 50 سوارًا؟

لفظيًا

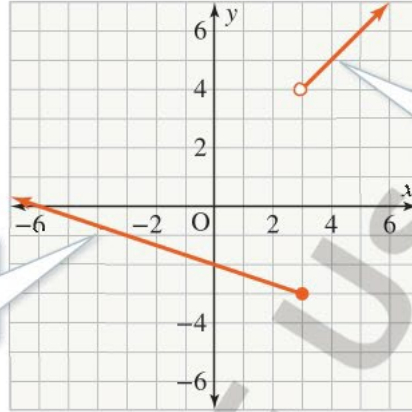
تكون الدوال المتعددة التعريف معرّفة بالقواعد المختلفة للفترات المختلفة من مجالها.

جبريًا

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x - 2, & x \leq 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$$

الحد هو 3

بيانيًا



إذا كانت $x > 3$ ، فإن القاعدة هي $x + 1$.

إذا كانت $x \leq 3$ ، فإن القاعدة هي $-\frac{1}{3}x - 2$.

طبق فهمك

في التمرينين 5 و 6، عبّر عن كل تمثيل بياني في صورة دالة متعددة التعريف.

5. $f(x) = 5|x|$

6. $f(x) = -2|x|$

في التمرينين 7 و 8، ممّل كل دالة بيانيًا.

7. $f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 3 \\ -2x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$

9. الدالة f معرّفة بالقاعدة $-0.5x + 1$ للمجال $x < 1$

وبالقاعدة x للمجال $x \geq 1$. اكتب الدالة المتعددة التعريف f باستعمال رمز الدالة.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس متعددة التعريف؟ ما الخواص الأساسية للدوال

2. استعمل البنية إذا كان مجال الدالة المتعددة التعريف f هو كل الأعداد الحقيقية، فهل يجب أن يكون مدى f هو أيضًا كل الأعداد الحقيقية؟ وضح إجابتك.

3. حلّل الخطأ كتبت بها الدالة المتعددة التعريف الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq -3 \\ -2x - 4, & x \geq -3 \end{cases}$$

أوجد خطأها وصحّحه.

4. فكّر وثابر في الحل ما عدد الأجزاء التي تتكون منها دالة القيمة المطلقة؟ وضح إجابتك.

في التمارين 16-19، عبّر عن كل دالة قيمة مطلقة في صورة دالة متعددة التعريف. انظر المثال 1

16. $f(x) = 6|x|$

17. $f(x) = -|x|$

18. $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

19. $f(x) = -1.5|x|$

في التمارين 20-22، ممّن كل دالة بيانيًا. حدّد فترات تزايد وتناقص وثبات الدالة. انظر المثال 2

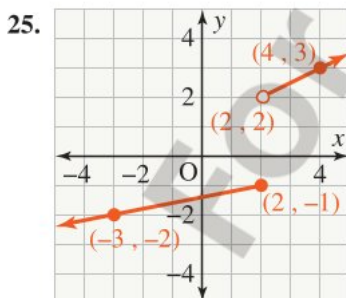
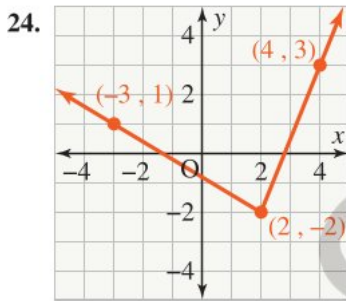
20. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ -x-2, & x > 2 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x+4, & x \leq 6 \\ 2x-8, & x > 6 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq -2 \\ x, & -2 < x \leq 2 \\ -2x+2, & x > 2 \end{cases}$

23. تفرض شركة اتصالات خلوية مبلغ 0.40 QR عن كل رسالة نصية إذا أرسل العميل ما لا يزيد عن 100 رسالة شهريًا، وتفرض الشركة 0.32 QR عن كل رسالة إذا أرسل العميل ما بين 101 و 200 رسالة شهريًا. وتفرض الشركة 0.24 QR عن كل رسالة إذا أرسل العميل بين 201 و 300 رسالة شهريًا. اليوم هو آخر يوم في الشهر. أرسلت سعاد 200 رسالة نصية، فهل يكون إرسال رسالة نصية إضافية لصالحها؟ وضح إجابتك. انظر المثالين 3 و 4

اكتب دالة متعددة التعريف لكل تمثيل بياني. انظر المثال 4



10. عمّم صف طريقتين للتعبير عن الدالة $f(x) = |x|$.

11. ابحث عن العلاقات ما العلاقة بين أجزاء الدالة المتعددة التعريف والمجال؟ وضح إجابتك.

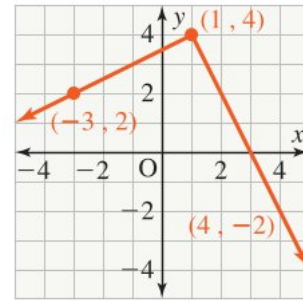
12. حلّ الخطأ صف الخطأ الذي ارتكبه أحمد في التعبير عن الدالة $f(x) = 3|x|$ في صورة دالة متعددة التعريف. ثم صحّح هذا الخطأ.

$$f(x) = 3|x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 0 \\ -3x, & x > 0 \end{cases}$$

X

13. تواصل بدقة في الرسم البياني أدناه، دالة متعددة التعريف f . استعمل رمز الدالة لوصف الدالة وحدّد المقطعين x و y .



14. بّرر منطقيًا لتكن الدالة f معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < n \\ -x+4, & x \geq n \end{cases}$$

a. اكتب مدى f ، إذا كانت $n = 5$.

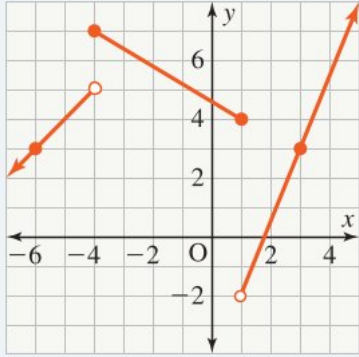
b. هل تغيّر قيمة n يغيّر المدى؟ وضح إجابتك.

15. مهارات التفكير العليا بالنسبة إلى دالة متعددة التعريف، تعرّف أجزاء الدالة في فترات المجال، $x \leq 1$ و $x > 1$.

a. اشرح كيف يمكنك إيجاد المقطع y للجزأين خلال الفترات $x \leq 1$ و $x > 1$.

b. عمومًا، كيف يمكنك إيجاد المقطع y للجزأين خلال الفترات $x \leq n$ و $x > n$ ؟

29. في الرسم البياني أدناه، التمثيل البياني للدالة f .



مجال الدالة f هو _____ . مدى الدالة f هو _____ .

يوجد _____ قيم في المجال حيث $f(x) = 4$ و $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

30. اختبار SAT/ACT أي دالة لها نفس التمثيل البياني للدالة $f(x) = 0.1|x|$.

Ⓐ $f(x) = \begin{cases} 0.1x, & x < 0 \\ -0.1x, & x > 0 \end{cases}$

Ⓑ $f(x) = \begin{cases} 0.1x, & x \leq 0 \\ -0.1x, & x > 0 \end{cases}$

Ⓒ $f(x) = \begin{cases} 0.1x, & x > 0 \\ -0.1x, & x < 0 \end{cases}$

Ⓓ $f(x) = \begin{cases} 0.1x, & x \geq 0 \\ -0.1x, & x < 0 \end{cases}$

Ⓔ $f(x) = \begin{cases} -0.1x, & x \geq 0 \\ 0.1x, & x < 0 \end{cases}$

31. مهمة أدائية تتقاضى بئينة QR 60 بدل الساعة الأولى

في مجالسة الأطفال و QR 40 عن كل ساعة إضافية، مع احتساب أي جزء من الساعة كساعة كاملة. نُمذج الدالة أدناه الأسعار التي تتقاضاها خصمة عن x من الساعات لمجالسة الأطفال.

$$f(x) = \begin{cases} 50x, & 0 \leq x < 4 \\ 40x, & 4 \leq x < 8 \\ 38x, & x \geq 8 \end{cases}$$

الجزء A من منهما تتقاضى مبلغًا أكبر عن مجالسة الأطفال لمدة 10 ساعات؟ بّر إجابتك.

الجزء B ما معدل التغير لكل دالة في الفترة

$7 \leq x \leq 11$ ؟ فسر معدلات التغير بدلالة أسعار مجالسة الأطفال.

26. نمذج يحتاج أحمد إلى 22 رحلة على الأقل بمترو الأنفاق في الشهر الواحد، ولديه خياران لشراء البطاقات. اكتب دالة تمثل الموقف. هل يمكنه شراء أكثر من 22 رحلة وتوفير المال؟ وضح إجابتك.



27. فكر وثابر في الحل لدى راشد QR 488 في حساب توفير، وقد أودع QR 280 كل أسبوع من مردود وظيفته على مدى الأسابيع الخمسة الأولى من الصيف. في الأسبوع السادس، حصل راشد على علاوة مما زاد من إيداعه الأسبوعي QR 48. اكتب دالة متعددة التعريف لتمثيل رصيده المصرفي.

b. أوجد $f(8)$.

c. ما الذي يعنيه المقدار $f(8) - 488$ بالنسبة إلى الموقف؟

28. فكر وثابر في الحل مجموعة من الأصدقاء يتناولون الطعام في أحد المطاعم وبحوزتهم قسيمة خصم حصلوا عليها عبر الإنترنت. كانت أسعار الأطباق التي طلبوها قبل استعمال القسيمة كما يلي: QR 88 و QR 80 و QR 68 و QR 56، وقيمة التكلفة الإجمالية لمشروباتهم QR 84. أوجد قيمة فاتورتهم قبل احتساب الضريبة والإكرامية.



3-3

دالة الجذر التربيعي

The Square Root Function

أستطيع... وصف الخواص الأساسية لدالة الجذر التربيعي.

معايير الدرس

11F.3.1 و 11F.1.4

المصطلحات

• دالة الجذر التربيعي

square root function

استكشف وبّر منطقيًا

اكتشف أحد أغرب الألغاز في علم الآثار في منطقة الكرات الصخرية في كوستاريكا، حيث عُثِر على مئات من الصخور كروية الشكل.

A. صيغة المساحة السطحية للكرة هي $SA = 4\pi r^2$. أوجد المساحة السطحية للحجر الكروي الشكل بدلالة محيط الدائرة العظمى.

B. تتراوح قيم محيطات الدوائر العظمى للأشكال الكروية بين 6 cm و 6 m، أنشئ تمثيلًا بيانيًا ينمذج المحيط بدلالة المساحة السطحية.

C. **ابحث عن العلاقات** ما أوجه الشبه والاختلاف التي تلاحظها بين التمثيل البياني من الجزء B والتمثيل البياني لدالة تربيعية؟



ما الخواص الأساسية المشتركة بين دالة الجذر التربيعي وإزاحات الدالة التربيعية؟

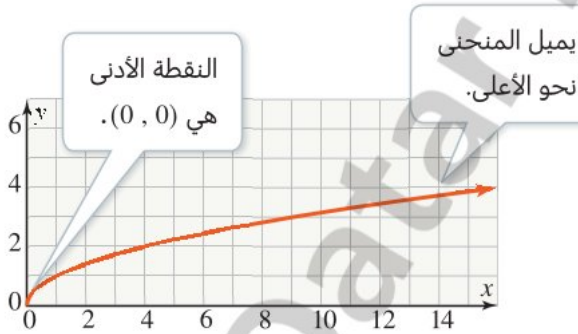
السؤال الأساس

الخواص الأساسية لدالة الجذر التربيعي

مثال 1

ما هي الخواص الأساسية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ هي **دالة الجذر التربيعي**. أنشئ جدولًا ومثل الدالة بيانيًا.



x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

خطأ شائع

تذكر أن $\sqrt{x}$ يساوي الجذر التربيعي الموجب للمتغير x .

يقتصر المجال على $x \geq 0$ ، لأن الأعداد غير السالبة فقط لها جذر تربيعي حقيقي. بما أن الجذر التربيعي لأي عدد لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن المدى هو $f(x) \geq 0$.

بالنسبة للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ، كل من المقطع x والمقطع y في التمثيل البياني للدالة يساوي الصفر. التمثيل البياني متزايد لكل القيم في مجال الدالة f .

حاول أن تحل! 1. مثل كل دالة بيانيًا. ما مقاطع الدالة ومجالها ومداهما؟

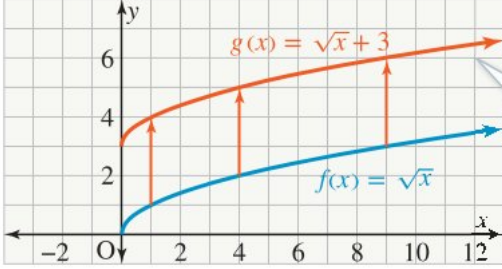
a. $p(x) = -\sqrt{x}$

b. $q(x) = \sqrt{\frac{x}{10}}$

A. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x} + 3$ والتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ممثل كل دالة بيانيًا.



لكل قيمة من قيم x ، تكون قيمة y في الدالة g أكبر بمقدار 3 وحدات من قيمة y المناظرة لها في الدالة f .

التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x} + 3$ هو إزاحة رأسية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بمقدار 3 وحدات.

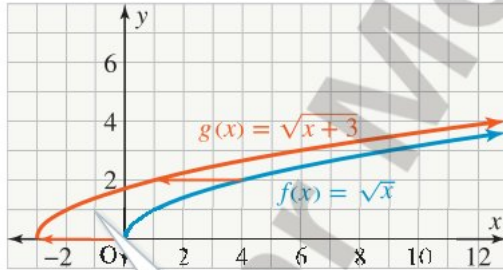
تنتج الإزاحة عن إضافة ثابت إلى مخرجة الدالة. مجال كلتا الدالتين هو $x \geq 0$.

مدى الدالة f هو $y \geq 0$ ، إذن مدى الدالة g هو $y \geq 3$.

B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ والتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ممثل كل دالة بيانيًا.



لكل قيمة من قيم y ، تكون قيمة x في الدالة g أصغر بمقدار 3 وحدات من قيمة x المناظرة لها في الدالة f .

التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ هو إزاحة أفقية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بمقدار 3 وحدات.

تنتج الإزاحة عن إضافة ثابت إلى مدخلة الدالة. مجال الدالة f هو $x \geq 0$ ، ومجال الدالة g

هو $x \geq -3$. مدى كلتا الدالتين هو $y \geq 0$.

استعمل البنية

لاحظ أن التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ هو إزاحة أفقية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مقدارها 3 وحدات إلى اليسار. هل الدالتان التربيعيتان $g(x) = (x+3)^2$ و $f(x) = x^2$ تتبعان النمط نفسه؟

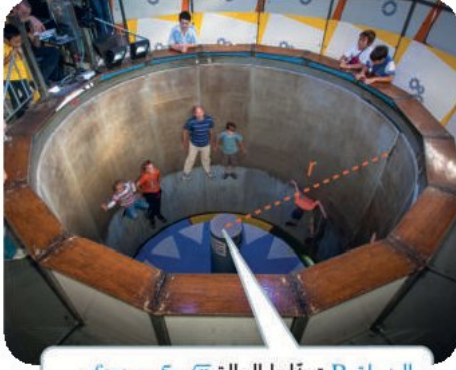
2. حاول أن تحل! ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لكل دالة أدناه والتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

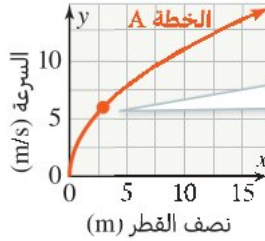
a. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

b. $p(x) = \sqrt{x-10}$

وضعت إدارة مدينة الملاهي خطتين لتحديد سرعة لعبة الأسطوانة الدوارة. يمثل التمثيل البياني أدناه الخطة A. أما الشكل الذي يوضح الأسطوانة الفعلية فيمثل الخطة B. إذا كان طول نصف قطر الأسطوانة 3 m، فأَي الخطتين تنتج سرعة أكبر للعبة؟



الخطة B تمثلها الدالة $f(r) = 5\sqrt{r}$ ، حيث r نصف قطر حلقة الجدار الدائري، و $f(r)$ السرعة.



عندما يكون طول نصف القطر 3 m، تكون السرعة تقريباً 6 m/s.

استعمل الأدوات المناسبة

كيف يمكنك تحديد طول نصف القطر بالأمتار في كلتا الخطتين بمعلومية سرعة مناظرة قدرها 7.5 m/s؟

قارن بين الخطتين.

الخطة B

أوجد قيمة $f(r) = 5\sqrt{r}$ إذا كان $r = 3$
 $f(3) = 5\sqrt{3}$
 ≈ 8.7
 عند استعمال الخطة B تكون سرعة اللعبة 8.7 m/s تقريباً عندما يكون طول نصف القطر 3 m

الخطة A

يبين التمثيل البياني للخطة A أن السرعة المناظرة لنصف قطر طوله 3 m هي 6 m/s تقريباً.

عندما يكون طول نصف القطر 3 m، تكون سرعة اللعبة وفق الخطة A هي 6 m/s، وتكون سرعة اللعبة وفق الخطة B هي 8.7 m/s تقريباً.

إذن، تكون سرعة اللعبة باستعمال الخطة B أكبر إذا كان طول نصف القطر 3 m

حاول أن تحل! 3. أوجد قيمة كل دالة عند القيمة المعطاة للمتغير. قَرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

a. $v(x) = \frac{\sqrt{x}}{10}, x = 17$

b. $w(x) = \sqrt{\frac{x}{10}}, x = 17$

جبريًا

$$g(x) = \sqrt{x-h} + k$$

- المجال: $x \geq h$
- المدى: $y \geq k$
- النقطة الأدنى: (h, k)

عدديًا

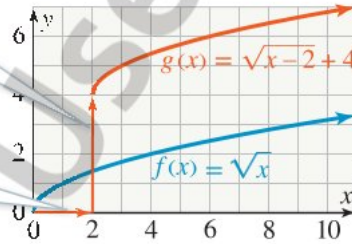
$$g(x) = \sqrt{x-2} + 4$$

- المجال: $x \geq 2$
- المدى: $y \geq 4$
- النقطة الأدنى: $(2, 4)$

بيانيًا

إزاحة رأسية مقدارها 4 وحدات إلى الأعلى.

إزاحة أفقية مقدارها 2 وحدات إلى اليمين.



طبق فهمك

في التمارين 5-8، ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

5. $g(x) = \sqrt{x} - 2$

6. $h(x) = \sqrt{x-5}$

7. $p(x) = 5 + \sqrt{x}$

8. $q(x) = \sqrt{7+x}$

9. أوجد قيمة كل دالة أدناه عند القيمة المعطاة للمتغير x مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{8}, x = 23$

b. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{8}}, x = 23$

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما الخواص الأساسية المشتركة

بين دالة الجذر التربيعي وإزاحات الدالة التربيعية؟

2. استعمل البنية وضح لماذا تُعد كل دالة أدناه، أو لماذا لا

تُعد، إزاحة لدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$.

a. $h(x) = 2\sqrt{x+1}$

b. $g(x) = \sqrt{x+2} - 3$

3. حلل الخطأ حدّد جاسم $(6, 12)$ و $(9, 27)$ كنقطتين

على التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{3x}$.

أوجد خطأ جاسم وصحّحه.

4. بزر منطقيًا ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ ؟

في التمارين 16-19، أوجد المقطعين x و y لكل دالة. إن لم يكن هناك مقطع اكتب "لا يوجد". انظر المثال 1

16. $f(x) = \sqrt{x} - 2$

17. $g(x) = \sqrt{x-9}$

18. $h(x) = \sqrt{x+9}$

19. $k(x) = \sqrt{x+4} - 9$

في التمارين 20-23، ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لكل دالة أدناه والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟ انظر المثال 2

20. $q(x) = \sqrt{x} + 11$

21. $r(x) = \sqrt{x+11}$

22. $s(x) = \sqrt{x-2} + 5$

23. $t(x) = \sqrt{x+3} - 6$

في التمارين 24-26، اكتب قاعدة كل دالة. انظر المثال 2

24. إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى الأعلى للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

25. إزاحة مقدارها $\frac{1}{2}$ وحدة إلى اليمين للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

26. إزاحة مقدارها وحدتين إلى الأسفل ووحدة واحدة إلى اليسار للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

في التمارين 27-30، أوجد المجال والمدى.

27. $p(x) = \sqrt{15x}$

28. $q(x) = \sqrt{x+11}$

29. $r(x) = \sqrt{2x-7}$

30. $t(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2}}$

31. أوجد قيمة كل دالة عند القيمة المعطاة للمتغير x مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{9}$, $x = 21$

b. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{9}}$, $x = 21$

10. **استعمل الأدوات المناسبة** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = -\sqrt{x+7}$ بيانياً. صف مجال الدالة ومداها.

11. **حلل الخطأ** صف خطأ أحمد وصححه عندما قازن بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

1. المقدار تحت الجذر في الدالة g يساوي $x+3$.
2. يقع $x+3$ على يمين x ، إذن التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f مقدارها 3 وحدات إلى اليمين.

12. **مهارات التفكير العليا** اكتب دالة تتضمن مقدار جذر تربيعي على أن يكون مجال الدالة $x \geq \frac{7}{2}$ ومداها $y \leq 2$.

13. **روابط في الرياضيات** لنأخذ الدالتين

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ و } g(x) = \sqrt{-x}$$

a. اكتب مجال كل دالة ومداها.

b. مثل كلتا الدالتين بيانياً في نفس المستوى الإحداثي.

c. ماذا يمثل المحور y للتمثيلين البيانيين؟

14. **استعمل البنية** في الدالة التي صورتها $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ، لماذا تُستبعد بعض الأعداد الحقيقية من المجال والمدى؟ وضح إجابتك.

15. **تواصل بدقة** وضح خطوات كل عملية حسابية أدناه.

a. أوجد $f(10)$ إذا كانت $f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{7}$.

b. أوجد $f(10)$ إذا كانت $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{7}}$.

35. أي من الدوال التالية هي إزاحات رأسية للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟ حدّد كل ما ينطبق.

- A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$
- B. $h(x) = 3 + \sqrt{x}$
- C. $k(x) = \sqrt{-5 + x}$
- D. $m(x) = \sqrt{5x}$
- E. $n(x) = -7 + \sqrt{x}$

36. اختبار SAT/ACT أوجد قيمتي الدالتين $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{11}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ عند $x = 24$ مقربةً إلى أقرب جزء من مئة.

- (A) 1.48 , 0.445
- (B) 1.477 , 0.45
- (C) 1.477 , 0.445
- (D) 1.477 , 0.45
- (E) 0.445 , 2.2

37. مهمة أدائية تمثّل الدالة $t = \sqrt{\frac{h}{4}}$ الزمن الذي يستغرقه سقوط جسم على الأرض، حيث h هو الارتفاع الابتدائي للجسم (بالأقدام).

الجزء A مثل الدالة $t = \sqrt{\frac{h}{4}}$ بيانيًا.

الجزء B استعمل التمثيل البياني للدالة $t = \sqrt{\frac{h}{4}}$ لتتوقع الزمن الذي يستغرقه سقوط صخرة من ارتفاع 20 قدمًا، وتحقق من صحة إجابتك باستعمال الدالة.

الجزء C استعمل الدالة $t = \sqrt{\frac{h}{4}}$ لتشتق الدالة h بدلالة t .

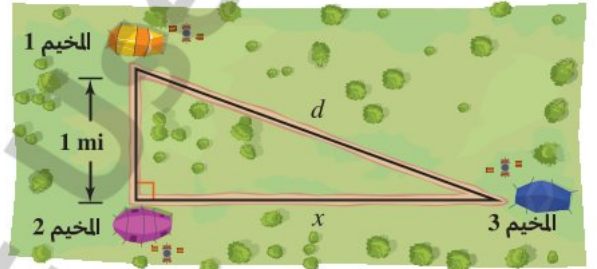
الجزء D ارسم الدالة $h(t)$ على نفس التمثيل البياني للدالة $t(h)$. ماذا تعني لك الدالة $h(t)$ ؟

32. نمذج بعذل معلّم درجات أحد الاختبارات باستعمال منحنى.

إذا كانت درجة أحد الطلاب في الاختبار هي x ، فإن الدرجة استنادًا إلى المنحنى تُعطى بالدالة $c(x) = 10\sqrt{x}$. حصل أربعة طلاب على الدرجات الآتية: 49 و 42 و 55 و 72، ما درجاتهم استنادًا إلى المنحنى؟ (مقربة إلى أقرب درجة)

33. فكّر وثابر في الحل غادرت مجموعة من المخيمين

المخيم (2) وساروا مسافة x من الأميال على طول المسار إلى المخيم (3)، تُعطى المسافة d بين مجموعة المخيمين والمخيم (1) بالدالة $d(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.



غير مرسوم وفق مقياس

a. استعمل الدالة لإيجاد المسافة d عندما x يساوي

1، 10، 15، 18.5، 25 و 50

b. عندما يقطع المخيمون مسافة تبعد 5 mi عن

المخيم (2)، تكون المسافة بينهم وبين المخيم (1)

ما المسافة الإضافية التي

عليهم قطعها ليضاعفوا المسافة بينهم وبين المخيم (1)؟

اكتب الحل.

34. تواصل بدقة المسافة إلى خط الأفق هي دالة للارتفاع عن

مستوى سطح البحر. إذا كان الارتفاع h فوق مستوى سطح

البحر مقيسًا بالأقدام وكانت المسافة d إلى خط الأفق مقيسة

بالأميال، فإن $d(h) \approx 1.22\sqrt{h}$.

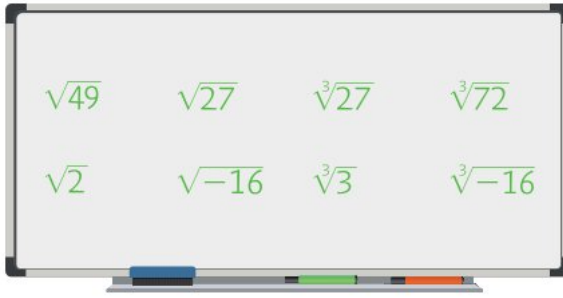


ينظر شخص راكب في منطاد إلى خط الأفق من ارتفاع 54 ft

فوق مستوى سطح البحر. أوجد المسافة بين الراكب وخط

الأفق.

كتب أسماء عدة مقادير جذرية على السبورة.



- A. أوجد قيمة كل مقدار، ووضح كيفية تعيين كل قيمة على خط الأعداد الحقيقية.
- B. وضح الفرق بين إيجاد قيمة دالة الجذر التكعيبي وإيجاد قيمة دالة الجذر التربيعي.
- C. **ابن الحجج الرياضية** تقول أسماء إن تعيين $\sqrt{-16}$ و $\sqrt[3]{-16}$ على خط الأعداد الحقيقية ليس ممكنًا. هل تتفق معها؟ وضح إجابتك.

أستطيع... تحديد الخصائص الأساسية لدالة الجذر التكعيبي.

معايير الدرس

11.F.1.4 و 11.F.3.1

المصطلحات

• دالة الجذر التكعيبي

cube root function

ما هي الخصائص الأساسية لدالة الجذر التكعيبي؟

السؤال الأساس

الخصائص الأساسية لدالة الجذر التكعيبي

مثال 1

A. ما الخصائص الأساسية للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ؟

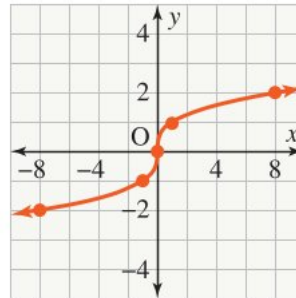
الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ هي **دالة الجذر التكعيبي**.
أنشئ جدولًا لقيم الدالة.

x	-8	-1	0	1	8
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

بما أن $x^3 = 0$ فقط عندما $x = 0$ ، فإن نقطة الأصل هي النقطة الوحيدة التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ كلا المحورين x و y .

$$(-2)^3 = -8, \text{ إذن } \sqrt[3]{-8} = -2$$

الآن، مثل الدالة بيانيًا.



كلما تزايدت قيمة x تزايدت قيمة جذرها التكعيبي. إذن دالة الجذر التكعيبي متزايدة دائمًا.

لا توجد قيود على قيم x أو y ، وبالتالي فإن كلاً من مجال الدالة ومداها هو جميع الأعداد الحقيقية.

يتبع في الصفحة التالية

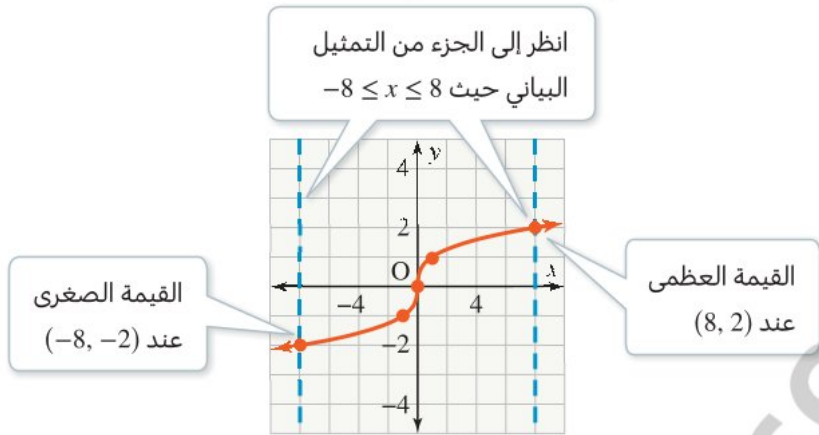
الاستيعاب المفاهيمي

ابحث عن البنية

كيف يؤثر الجذر التكعيبي على مجال الدالة ومداها؟

B. ما القيمتان العظمى والصغرى للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $-8 \leq x \leq 8$ ؟

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ هي دالة الجذر التكعيبي.



عَمَم

هل تنجح هذه الطريقة - استعمال نقطتي النهاية لمجال الدالة لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى - مع كل الدوال؟

القيمة العظمى للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ عندما $-8 \leq x \leq 8$ هي 2، والقيمة الصغرى تساوي -2، وبما أن الدالة متزايدة دائماً، فإن قيمتها العظمى والصغرى تقعان عند نقطتي النهاية للفترة المعطاة.

1. حاول أن تحل! ما هما القيمتان العظمى والصغرى للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $-27 \leq x \leq 27$ ؟

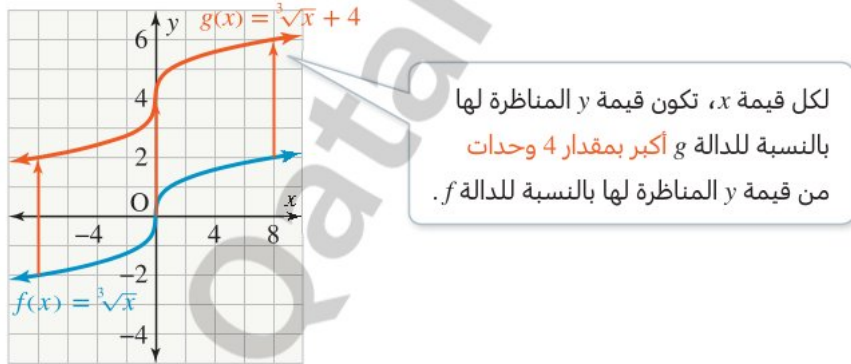
إزاحات دالة الجذر التكعيبي

مثال 2

A. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x} + 4$ والتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

مثل الدالتين بياناً.



التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x} + 4$ هو إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

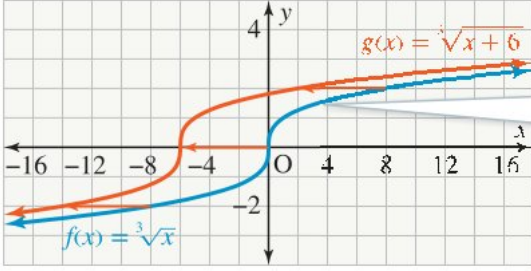
كما هو الحال مع الدوال الأخرى التي درستها سابقاً، عندما تضيف ثابتاً إلى مخرجة دالة الجذر التكعيبي $f(x) = \sqrt[3]{x}$ يكون التمثيل البياني للدالة الناتجة، $g(x) = \sqrt[3]{x} + k$ ، إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة f . مجال ومدى كلتا الدالتين هما جميع الأعداد الحقيقية.

يتبع في الصفحة التالية

B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x+6}$ والتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

مثل الدالتين بيانيًا.



لكل قيمة x ، تكون قيمة y المناظرة لها بالنسبة للدالة g أصغر بمقدار 6 وحدات من قيمة y المناظرة لها بالنسبة للدالة f .

التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x+6}$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$. عندما تطرح ثابتًا من مدخلة دالة الجذر التكعيبي $f(x) = \sqrt[3]{x}$ يكون التمثيل البياني للدالة الناتجة، $g(x) = \sqrt[3]{x-h}$ إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة f . مجال ومدى كلتا الدالتين هما جميع الأعداد الحقيقية.

2. حاول أن تحل! قارن بين التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين والتمثيل البياني

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

a. $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

b. $p(x) = \sqrt[3]{x+1}$

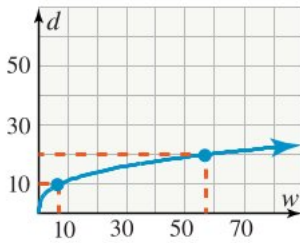
مثال 3 نمذجة مسألة باستعمال دالة الجذر التكعيبي

3 مثال

تطبيق



تحتوي مياه الخليج العربي على أنواع مختلفة من اللآلي الطبيعية أو المستزرعة. تُستعمل هذه اللآلي في صناعة المجوهرات. يمكن نمذجة طول قطر لؤلؤة مستزرعة d بالملمتر بالدالة $d(w) = \sqrt[3]{\frac{4w}{0.02847}}$ حيث w وزن اللؤلؤة بالقيراط. أوجد الوزن التقريبي للؤلؤة يتراوح طول قطرها بين 10 mm و 20 mm



مثل الدالة $d(w) = \sqrt[3]{\frac{4w}{0.02847}}$ بيانيًا.

يبين التمثيل البياني المجاور أن $d(57) = 20$ و $d(10) = 10$ تقريبًا

إذن، كل تغير في طول قطر اللؤلؤة يتراوح بين 10 mm و 20 mm سيؤدي إلى تغير وزنها بمقدار يتراوح بين 7 قيراط و 57 قيراطًا تقريبًا.

نمذج

هناك تطبيقات رياضية عديدة للرياضيات في المجالين الصناعي والتجاري، مثل تطوير تغليف وتعبئة المنتجات. إن النمذجة قبل بدء عملية الإنتاج قد تحول دون ارتكاب أخطاء مكلفة.

3. حاول أن تحل! يُنمذج طول نصف قطر كرة بالدالة $R(v) = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ حيث v حجم الكرة.

مثل الدالة $R(v) = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ بيانيًا. ما حجم كرة يتراوح طول نصف

قطرها بين 5 cm و 10 cm

مقارنة معدلات تغير دالة

مثال 4

ما وجه المقارنة بين متوسط معدل التغير من $x = 1$ إلى $x = 5$ ومتوسط معدل التغير من $x = 5$ إلى $x = 9$ بالنسبة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ؟

الخطوة 1 أوجد قيمة الدالة لقيم x التي تناظر نقطتي نهاية كل فترة.

الفترة: $5 \leq x \leq 9$

$$f(5) = \sqrt[3]{5-1} \approx 1.59 \quad f(9) = \sqrt[3]{9-1} = 2$$

الفترة: $1 \leq x \leq 5$

$$f(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0 \quad f(5) = \sqrt[3]{5-1} \approx 1.59$$

الخطوة 2 أوجد متوسط معدل تغير الدالة في كل فترة.

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} \approx \frac{2 - 1.59}{9 - 5} \approx 0.10$$

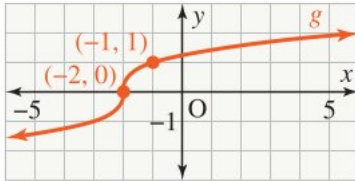
$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \approx \frac{1.59 - 0}{5 - 1} \approx 0.40$$

يبدو أن متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ يتناقص عندما $x \geq 1$ وعندما تزداد قيم طرفي الفترة. هذا يتناسب مع تناقص ميل المنحنى عندما $x \geq 1$ ومع تزايد قيم x .

حاول أن تحل! 4. قارن بين متوسط معدلات تغير الدالة $f(x) = 2\sqrt[3]{x-3}$ خلال الفترتين $-4 \leq x \leq 0$ و $-12 \leq x \leq -8$

مقارنة معدلات تغير دالتين

مثال 5



x	$h(x)$
0	1.22
1	2.22
2	2.48
3	2.66
4	2.81

يمثل كل من التمثيل البياني

والجدول إزاحات لدالة الجذر

التكعيبي $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

القيم المكتوبة في الجدول مقربة

إلى أقرب جزء من مئة. أي الدالتين

متوسط معدل تغيرها أكبر في

الفترة $2 \leq x \leq 4$ ؟

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f مقدارها وحدتين إلى اليسار، وبالتالي فإن $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$. استعمل هذه الدالة لإيجاد متوسط معدل التغير في الفترة $2 \leq x \leq 4$

$$\frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} \approx \frac{1.82 - 1.59}{4 - 2} = 0.115$$

لإيجاد متوسط معدل تغير $h(x)$ ، استعمل القيم المكتوبة في الجدول مباشرة.

$$\frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} \approx \frac{2.81 - 2.48}{4 - 2} = 0.165$$

إذن، متوسط معدل تغير $h(x)$ أكبر من متوسط معدل تغير الدالة $g(x)$ في الفترة $2 \leq x \leq 4$

يتبع في الصفحة التالية

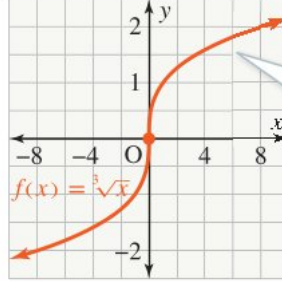
خطأ شائع

قد ترغب في التعبير عن القيم المحسوبة بدقة عالية، لكن هذا يؤدي إلى نتائج مضللة عندما تكون القيم تقديرية. لإجراء مقارنات منطقية، عبّر عن القيمتين بنفس مستوى الدقة.

حاول أن تحل! 5. أي دالة من الدالتين التاليتين متوسط معدل تغيرها أكبر في الفترة $-5 \leq x \leq 0$: الدالة الناتجة عن إزاحة الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ وحدة واحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى، أم الدالة $r(x) = \sqrt[3]{x} + 3$ ؟

ملخص المفهوم دالة الجذر التكعيبي

التمثيل البياني



الدالة f متزايدة في مجالها كله.

الخصائص الأساسية

المقطع $x: 0$

المقطع $y: 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

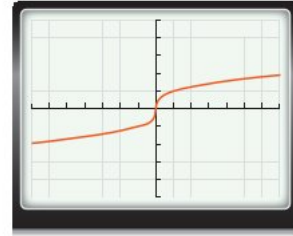
المدى: جميع الأعداد الحقيقية

طبّق فهمك

4. حدد مجال ومدى الدالة $s(x) = \sqrt[3]{3x}$.
5. صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x} - 3$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
6. أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ عندما $-2 \leq x \leq 9$.
7. احسب متوسط معدل تغير الدالة $g(x) = \sqrt[3]{x} + 3$ عندما $4 \leq x \leq 7$.
8. صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x-4}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساسي الجذر التكعيبي؟ ما هي الخصائص الأساسية لدالة الجذر التكعيبي؟
2. حلّ الخطأ يستعمل فارس آله الحاسبة لدراسة مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$. يقدر فارس المدى بأنه $-2 \leq y \leq 2$ ، وضح خطأ فارس وصحّحه.



3. ابحث عن العلاقات وضح العلاقة التي تربط بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\sqrt[3]{x}$.

في التمارين 16-19، حدّد المجال والمدى والمقطعين x و y للدالة المعطاة. انظر المثال 1

$$\begin{array}{ll} 16. f(x) = \sqrt[3]{x-3} & 17. f(x) = \sqrt[3]{2x} \\ 18. f(x) = \sqrt[3]{x} - 1 & 19. f(x) = \sqrt[3]{x+2} \end{array}$$

في التمارين 20-25، صفّ الإزاحات التي تحوّل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة.

انظر المثال 2

$$\begin{array}{ll} 20. g(x) = \sqrt[3]{x-3} & 21. p(x) = \sqrt[3]{x} + 2 \\ 22. p(x) = \sqrt[3]{x} - 10 & 23. q(x) = \sqrt[3]{x+7} \\ 24. j(x) = \sqrt[3]{x+4} - 8 & 25. k(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4} \end{array}$$

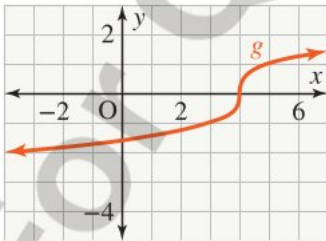
في التمارين 26-28، مثلّ الدالة بيانًا، ثم استعمل التمثيل لتقدير قيم x التي تحقق الشرط المعطى. انظر المثال 3

$$\begin{array}{l} 26. f(x) = \sqrt[3]{x}; 1 \leq f(x) \leq 2 \\ 27. g(x) = \sqrt[3]{x-2}; 1 \leq g(x) \leq 2 \\ 28. p(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3; 2 \leq p(x) \leq 5 \end{array}$$

في التمارين 29-31، احسب متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة. انظر المثال 4

$$\begin{array}{l} 29. f(x) = \sqrt[3]{x}; 3 \leq x \leq 10 \\ 30. g(x) = \sqrt[3]{x} + 2; -4 \leq x \leq 0 \\ 31. g(x) = \sqrt[3]{4x+5}; -1 \leq x \leq 1 \end{array}$$

لتكن الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$. الدالة g مبينة في التمثيل البياني أدناه. في التمارين 32-34، استعمل $<$ أو $>$ أو $=$ لإكمال العبارة المعطاة. انظر المثال 5



$$32. f(3) \text{ ____ } g(3)$$

33. المقطع x للدالة f ____ المقطع x للدالة g .

34. المقطع y للدالة f ____ المقطع y للدالة g .

9. **بّرر منطقيًا** وضح سبب تساوي المقطعين x و y للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

10. **ابحث عن العلاقات** قارن بين متوسط معدل تغير $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ومتوسط معدل تغير $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$ عندما $0 \leq x \leq 4$.

11. **حلّ الخطأ** حسب جابر متوسط معدل تغير $f(x) = \sqrt[3]{3x}$ عندما $0 \leq x \leq 5$ ، ووجد أنه يساوي 1.026، وضح خطأ جابر وصحّحه.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{3(5)} - \sqrt[3]{3(0)}}{5 - 0} \\ &= \frac{3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{0})}{5 - 0} \\ &\approx 1.026 \end{aligned}$$

12. **استعمل الأدوات المناسبة** أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ عندما $0 \leq x \leq 4$ استعمل تناظر الدالة لتوقع متوسط معدل التغير عندما $-4 \leq x \leq 0$.

13. **بّرر منطقيًا** أيهما يعطي قيمة تقديرية أفضل لمعدل تغير الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بالقرب من $x = 1$: متوسط معدل التغير في الفترة $-1 \leq x \leq 3$ أم متوسط معدل التغير في الفترة $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ؟ وضح تبريرك المنطقي.

14. **مهارات التفكير العليا** لنأخذ الدالة $f(x) = x^3$. كيف يمكنك إيجاد فترتين مختلفتين لهما نفس متوسط معدل التغير؟ وضح كيف يمكنك تعميم العبارة التي كتبتها.

15. **استعمل البنية** صفّ إزاحة أو زوجًا من الإزاحات للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ينتج عنها التمثيل البياني للدالة g في كل من الحالات التالية:

- a. المقطع y للتمثيل البياني للدالة g يساوي -2
- b. التمثيل البياني للدالة g يمر في النقطة (3, 5)
- c. المقطع x للتمثيل البياني للدالة g يساوي -1

38. حلّ الخصائص الأساسية للدالة $g(x) = \sqrt[3]{x-8} + 4$.

أي من العبارات التالية صحيحة؟ اختر كل ما ينطبق.

A. مجال الدالة g هو $x \geq 8$.

B. مدى الدالة g هو جميع الأعداد الحقيقية.

C. كلما اقتربت قيمة x من اللانهاية، اقتربت قيمة $g(x)$ من اللانهاية.

D. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بمقدار 8 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى الأعلى.

E. للدالة قيمة مطلقة صغرى عند $x = 8$.

39. اختبار SAT/ACT ما الذي يبين متوسط معدل تغير

$f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ في الفترة $1 \leq x \leq 4$ ؟

(A) 0.47

(B) 0.20

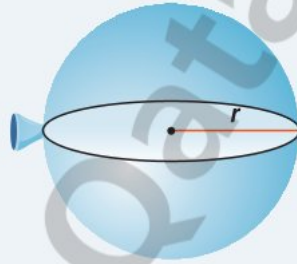
(C) -0.20

(D) -0.47

(E) -1.53

40. مهمة إداية يملأ بدر بالونات كروية الشكل لإجراء تجربة.

تتطلب التجربة ملء جميع البالونات بنفس الكمية من الماء، لكن بدر لا يملك أداة لقياس السعة.



الجزء A اكتب دالة الجذر التكعيبي التي يمكن لبدر

استعمالها لتوقع طول نصف القطر المرتبط بحجم معين باستعمال الصيغة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

الجزء B صف مجالاً ومدى معقولين لدالة الجذر التكعيبي.

الجزء C إذا افترضنا أن حجم كل بالون يجب أن يكون 72 in^3 ، فكم يجب أن يكون طول نصف قطر البالون؟

35. نموذج افتتح خالد مؤخرًا شركة لبيع السيارات. المبيعات الأسبوعية مبيّنة في الجدول أدناه.



ارسم التمثيل البياني لمبيعات الشركة واكتب دالة الجذر التكعيبي التي تنمذج المبيعات تقريبًا. ثم وضح معنى خصائص دالة الجذر التكعيبي بالنسبة لمبيعات الشركة على المدى الطويل.

36. تواصل بدقة تقوم شركة سلطان للشمع بتعبئة الشمع

الملون لصنع الشموع المنزلية في أوعية مكعبة الشكل. يحتاج خط الإنتاج في الشركة إلى تصميم أحجام الأوعية استنادًا إلى تكلفتها. اكتب دالة الجذر التكعيبي التي تُبين أطوال أضلاع الوعاء، x ، بالإنتاجات بما يتناسب مع التكلفة المعطاة، C.



37. روابط في الرياضيات مكعب حجمه يساوي حجم صندوق

طوله 4 ft 5 in وعرضه 3 ft 2 in وعمقه 3 ft 4 in.

a. اكتب مقدارًا بنمذج طول أحد أضلاع المكعب.

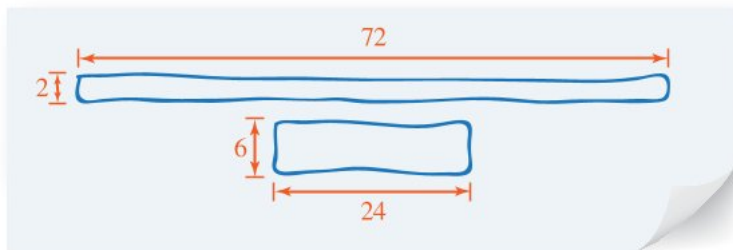
b. أوجد طول ضلع المكعب.

c. أيهما أكبر، المساحة السطحية للمكعب أم المساحة السطحية للصندوق؟ بكم أكبر؟

التناسب العكسي ودالة المقلوب

Inverse Variation and The Reciprocal Function

مساحة كلا المستطيلين أدناه تساوي 144 وحدة مربعة.



A. ارسم أي مستطيلات أخرى ممكنة يكون لها نفس مساحة المستطيلين أعلاه. نظم وسجل بياناتك المتعلقة بطول وعرض كل من المستطيلات.

B. **استعمل البنية** ماذا يحدث لعرض مستطيل مساحته 144 وحدة مربعة كلما ازداد طوله؟

C. اختبر على الأقل 5 أزواج أخرى من المستطيلات، على أن تكون لكل زوج المساحة نفسها. كيف تصف العلاقة بين طول وعرض كل زوج من المستطيلات؟

أستطيع... استعمال التناسب العكسي وإزاحات التمثيل البياني لدالة المقلوب.

معايير الدرس

11F.1.2 و 11F.1.3

11F.1.4 و 11F.3.1

المصطلحات

• تناسب عكسي

inverse variation

• ثابت التناسب

constant of variation

• دالة المقلوب reciprocal function

• خط التقارب asymptote

كيف يرتبط التناسب العكسي بدالة المقلوب؟

السؤال الأساس

مثال 1

تعريف التناسب العكسي

كيف تحدّد ما إذا كانت علاقة ما تناسب عكسي أم لا؟

A. هل جدول القيم أدناه يمثل تناسبًا عكسيًا؟

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

التناسب العكسي هو علاقة بين متغيرين بحيث كلما تزايد أحدهما تناقص الآخر تناسبًا.

لكي يمثل الجدول تناسبًا عكسيًا يجب أن يكون ناتج ضرب x في y ثابتًا.

أوجد ناتج الضرب، xy ، لقيم كل عمود في الجدول.

بما أن ناتج ضرب القيم ثابت، فإن جدول القيم يمثل تناسبًا عكسيًا.

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1
xy	12	12	12	12	12	12

B. هل يمثل جدول القيم أدناه تناسبًا عكسيًا؟

x	1	2	3	4	5	6
y	20	17	14	11	8	5

أوجد نواتج الضرب.

x	1	2	3	4	5	6
y	20	17	14	11	8	5
xy	20	34	42	44	40	30

بما أن نواتج الضرب ليست ثابتة، فإن جدول القيم لا يمثل تناسبًا عكسيًا.

نصيحة دراسية

احرص على التحقق من ناتج ضرب كل زوج من القيم قبل استخلاص النتيجة.

حاول أن تحلّ! 1. حدد ما إذا كان كل جدول قيم أدناه يمثل تناسبًا عكسيًا أم لا.

a.

x	1	2	3	5	6	15
y	25.5	12.75	8.50	5.10	4.25	1.70

b.

x	6.6	5.5	4.4	3.3	2.2	1.1
y	3	5	7	9	11	13

المفهوم التناسب العكسي

عندما تكون العلاقة بين المتغيرين x و y علاقة تناسب عكسي، نقول إن x يتناسب عكسيًا مع y .
يُنمذج التناسب العكسي بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو باستعمال صورة مكافئة لها $x = \frac{k}{y}$ أو $xy = k$ ، حيث $k \neq 0$. يمثل المتغير k **ثابت التناسب**، وهو العدد الذي يربط كلا المتغيرين في علاقة تناسب عكسي.

في الجدول أدناه ثابت التناسب يساوي 24

لاحظ أنه كلما تضاعفت قيمة x
من 1 إلى 2 إلى 4 إلى 8، ...

... بلغت قيمة y النصف من
24 إلى 12 إلى 6 إلى 3

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

استعمال التناسب العكسي

مثال 2

في تناسب عكسي، $x = 10$ عندما $y = 3$.

اكتب معادلة لتمثيل هذا التناسب العكسي. ثم أوجد قيمة y عندما $x = -6$.

اكتب معادلة التناسب العكسي.

$$y = \frac{k}{x}$$

عوّض $x = 10$ و $y = 3$.

$$3 = \frac{k}{10}$$

اضرب طرفي المعادلة في 10 لإيجاد قيمة k .

$$30 = k$$

بعد إيجاد قيمة k ، اكتب معادلة هذا التناسب العكسي.

$$y = \frac{30}{x}$$

اكتب المعادلة التي تمثل هذا التناسب العكسي

$$y = \frac{30}{-6}$$

عوّض $x = -6$ في المعادلة

$$y = -5$$

اقسم

إذن، المعادلة التي تمثل هذا التناسب العكسي هي $y = \frac{30}{x}$. عندما $x = -6$ ، $y = -5$.

خطأ شائع

تذكّر أن تنتبه للإشارات السالبة
عندما تعوّض في المعادلة أو تجري
العمليات الحسابية.

حاول أن تحلّ! 2. في تناسب عكسي، $x = 6$ عندما $y = \frac{1}{2}$.

a. ما المعادلة التي تمثل هذا التناسب العكسي؟

b. أوجد قيمة y عندما $x = 15$.

العود آلة موسيقية وترية يتناسب فيها طول الوتر، s ، مع تردده، f ، تناسبًا عكسيًا.



فكر وثابر في الحل

استعمل ما تعرفه عن التناسب العكسي لتحسب قيمة تقريبية لإجابتك ذهنيًا.

إذا كان طول الوتر 26 in يكون التردد 329.63 دورة في الثانية.

أوجد تردد وتر طوله 13 in

اكتب معادلة التناسب العكسي.

عوض $s = 26$ و $f = 329.63$.

اضرب في 329.63 لإيجاد قيمة k .

بعد إيجاد قيمة k ، اكتب معادلة هذا التناسب العكسي.

عوض $k = 8570.38$ في المعادلة.

عوض $s = 13$ في المعادلة.

أوجد قيمة f

إذن، تردد وتر طوله 13 in هو 659.26 دورة في الثانية.

$$s = \frac{k}{f}$$

$$26 = \frac{k}{329.63}$$

$$8570.38 = k$$

$$s = \frac{8570.38}{f}$$

$$13 = \frac{8570.38}{f}$$

$$f = 659.26$$

حاول أن تحل! 3. الزمن الذي يستغرقه ذوبان مكعب من الجليد يتناسب عكسيًا مع درجة حرارة الهواء. إذا كان ذوبان الجليد في درجة الحرارة 20°C يستغرق 20 دقيقة، فكم يستغرق ذوبانه في درجة الحرارة 30°C ؟

كيف تمثل بيانيًا دالة المقلوب $y = \frac{1}{x}$ ؟

تربط **دالة المقلوب** كل عدد حقيقي غير صفري بمقلوبه.

الخطوة 1 فكر في مجال الدالة ومدaha.

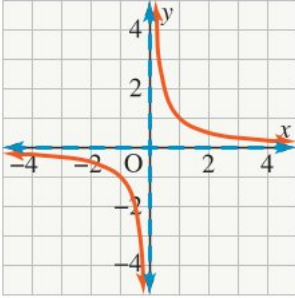
المجال: $\{x : x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$

المدى: $\{y : y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$

إذا كان $x = 0$ فستكون النتيجة مقدارًا غير معرّف، لذا فإن $x \neq 0$.

الخطوة 2 مَثَل الدالة بيانيًا.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	غير معرّف	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



استعمل جدول القيم
أو التكنولوجيا لتمثيل
الدالة بيانيًا.

استعمل الأدوات المناسبة

بالنسبة لمعادلة، لا تتضمّن معاملات متغيرة كثيرة كهذه، يستحسن رسم التمثيل البياني يدويًا. أما عند التعامل مع معادلات أكثر تعقيدًا فيفضل استعمال التكنولوجيا لرسم التمثيل البياني.

الخطوة 3 انظر إلى التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ كلما قارب اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة.

x	1	10	100	1 000	10 000
$f(x)$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1 000}$	$\frac{1}{10 000}$

كلما ازدادت قيمة x ،
أصبح المقام أكبر وقاربت
قيمة الدالة الصفر.

خط التقارب هو المستقيم الذي يقاربه المنحنى. توجه خطوط التقارب السلوك الطرفي للدالة.

عندما يقترب x من مالانهاية، تقترب $f(x)$ من الصفر، وهذا صحيح أيضًا عندما يقترب x من سالب مالانهاية، لذا فإن المستقيم $y = 0$ هو خط تقارب أفقي.

الخطوة 4 انظر إلى التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ عندما يقارب x الصفر لقيم x الموجبة والسالبة.

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1 000}$	$\frac{1}{10 000}$
$f(x)$	1	10	100	1 000	10 000

كلما اقتربت قيمة x من
الصفر أصبحت قيمة
الدالة أكبر فأكبر.

بالنسبة لقيم x الموجبة، كلما قارب x الصفر قاربت قيمة $f(x)$ موجب مالانهاية.

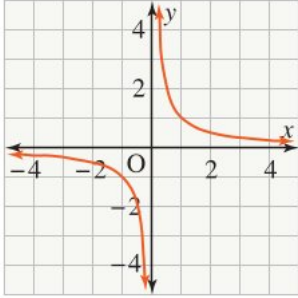
x	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1 000}$	$-\frac{1}{10 000}$
$f(x)$	-1	-10	-100	-1 000	-10 000

كلما اقتربت قيمة x
من الصفر، قاربت قيمة
الدالة سالب مالانهاية.

بالنسبة لقيم x السالبة، كلما قارب x الصفر قاربت $f(x)$ سالب مالانهاية. مجال الدالة لا يتضمن العدد 0، لذا لن يلامس منحنى الدالة المستقيم $x = 0$. إذن المستقيم $x = 0$ هو خط تقارب رأسي.

حاول أن تحل! 4. مَثَل الدالة $y = \frac{10}{x}$ بيانيًا، ثم أوجد مجال الدالة ومداها ومعادلات خطوط تقاربها.

مثّل الدالة $g(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ بيانيًا. أوجد معادلات خطوط التقارب. أوجد المجال والمدى.

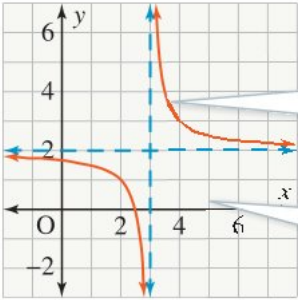


ابدأ بالتمثيل البياني للدالة الرئيسة، $f(x) = \frac{1}{x}$.

تذكر أنّ إضافة h إلى x في تعريف f تزحج التمثيل البياني للدالة f أفقيًا، وأنّ إضافة k إلى $f(x)$ تزحج التمثيل البياني للدالة f رأسيًا.

الدالة $q(x) = \frac{1}{x-h} + k$ إزاحة للدالة الرئيسة f بمقدار h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا.

الدالة $g(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ هي إزاحة للتمثيل البياني للدالة الرئيسة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين، ووحدين إلى الأعلى.



يتحرك خط التقارب الرأسي 3 وحدات إلى اليمين.

يتحرك خط التقارب الأفقي وحدثين إلى الأعلى.

المستقيم $x = 3$ هو خط تقارب رأسي. المستقيم $y = 2$ هو خط تقارب أفقي.

المجال هو $\{x : x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$

المدى هو $\{y : y \neq 2, y \in \mathbb{R}\}$

فكر وثابر في الحل

في الإزاحة، لا تُزاح نقاط التمثيل البياني فقط، بل تُزاح خطوط التقارب أيضًا.

5. حاول أن تحلّ! مثّل الدالة $g(x) = \frac{1}{x+2} - 4$ بيانيًا. أوجد معادلات خطوط التقارب. أوجد المجال والمدى.

تحويلات دالة المقلوب

تمنذج دالة المقلوب التناسب العكسي $y = \frac{1}{x}$.
مثل الدوال الأخرى، يمكن تحويل دالة المقلوب.

$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

$$y = \frac{1}{x-4} - 2$$

$$h = 4$$

$$k = -2$$

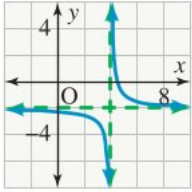
تمت إزاحة الدالة الرئيسة

وحدتين إلى الأسفل

و 4 وحدات إلى اليمين.

خط التقارب الرأسى هو $x = 4$

خط التقارب الأفقى هو $y = -2$



التناسب العكسي

لفظيًا

التناسب العكسي هو علاقة بين متغيرين بحيث يتزايد أحدهما كلما تناقص الآخر تناسبًا.

جبريًا

$$y = \frac{k}{x}$$

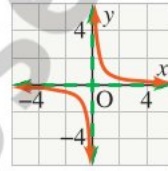
حيث $k \neq 0$

مثال

$$y = \frac{1}{x}$$

خط التقارب الأفقى هو $y = 0$

خط التقارب الرأسى هو $x = 0$



طبّق فهمك

5. في تناسب عكسي، $x = -8$ عندما $y = -\frac{1}{4}$.

أوجد قيمة y عندما $x = 4$.

6. أوجد معادلات خطوط التقارب للدالة $f(x) = \frac{1}{x-5} + 3$.

أوجد المجال والمدى.

7. تتناسب كمية الوقود المتبقية في خزان شاحنة عكسيًا

مع عدد الكيلومترات التي تقطعها الشاحنة. تستمر علاقة

التناسب العكسي هذه إلى أن تفرغ الشاحنة من الوقود.

نمذج علاقة تناسب عكسي تربط بين كمية الوقود في خزان

الشاحنة وعدد الكيلومترات التي تقطعها الشاحنة.



عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يرتبط التناسب العكسي بدالة المقلوب؟

2. ابن الحجج الرياضية

وَصِّحْ لماذا قد تمثل العلاقة بين كمية الغاز في خزان آلة الشواء والزمن المستغرق في الشواء علاقة تناسب عكسي.



3. المصطلحات ما السبب في أن تقاطع التمثيل البياني

للدالة $y = \frac{1}{x}$ مع خط التقارب الأفقى عند المحور x

غير ممكن؟

4. حلّ الخطأ تقول ماجدة إن جدول القيم أدناه يبيّن علاقة

تناسب عكسي. وَصِّحْ لماذا كلام ماجدة غير صحيح.

x	1	2	3	4	8	16
y	24	12	8	6	3	2

في التمرينين 14 و 15، هل يمثّل جدول القيم تناسبًا عكسيًا؟
وَصِّحْ إجابتك. انظر المثال 1

14.

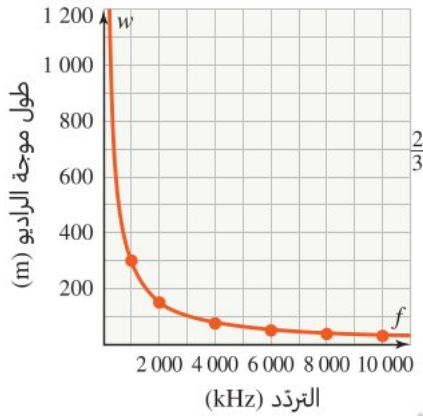
x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	5	11
y	$-\frac{9}{2}$	-9	6	36	90	198

15.

x	1	2	3	4	5	6
y	60	30	20	15	12	10

16. إذا كان x و y متناسبين عكسيًا، وكان $x = 3$ عندما $y = \frac{2}{3}$ ، أوجد قيمة y عندما $x = -1$. انظر المثال 2

17. يتناسب طول موجة الراديو، w ، عكسيًا مع ترددها، f ، كما يوضّح التمثيل البياني أدناه.



إذا كان طول موجة راديو ترددها 1 000 kHz يساوي 300 m، فما تردد هذه الموجة عندما يكون طولها 375 m؟ انظر المثال 3

18. مثّل الدالة $y = -\frac{2}{x}$ بيانيًا، ثم أوجد مجالها، ومداها، ومعادلات خطوط تقاربها. انظر المثال 4

19. مثّل الدالة $g(x) = \frac{1}{x-2} + 6$ بيانيًا، ثم أوجد مجالها، ومداها ومعادلات خطوط تقاربها. انظر المثال 5

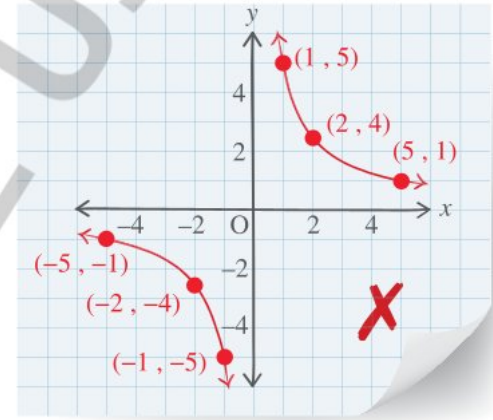
8. **تواصل بدقة** وَصِّحْ الفرق بين التمثيلات البيانية لدوال التناسب العكسي عندما $k > 0$ وعندما $k < 0$.

9. **عَمِّم** كيف يمكنك، بمجرد النظر إلى جدول القيم أدناه، أن تعرف أن البيانات الواردة فيه لا تمثّل تناسبًا عكسيًا.

x	-2	2	4	6	8	10
y	-6	6	12	18	24	30

10. **ابن الحجج الرياضية** وَصِّحْ لماذا لا يمكن لمجال تناسب عكسي أن يتضمن الصفر.

11. **حلّ الخطأ** مثّل جاسم الدالة $y = \frac{5}{x}$ بيانيًا كما هو مبين. أوجد خطأ جاسم وصحّحه.



12. **مهارات التفكير العليا** تبلغ تكلفة استئجار منزل على الشاطئ QR 6 000 أسبوعيًا. إذا تقاسم شخصان التكلفة بالتساوي سيدفع كل منهما QR 3 000. وَصِّحْ السبب في أن التكلفة لكل شخص تتناسب عكسيًا مع عدد الأشخاص الذين يتشاركون التكلفة. اكتب دالة تناسب عكسي يمكن استعمالها لحساب المبلغ، c ، الذي يتوجب دفعه على كل شخص من مجموعة أشخاص، p ، يتشاركون تكلفة استئجار منزل على الشاطئ.



13. **عَمِّم** بالنسبة إلى تناسب عكسي، اكتب معادلة تعطي k بدلالة x و y .

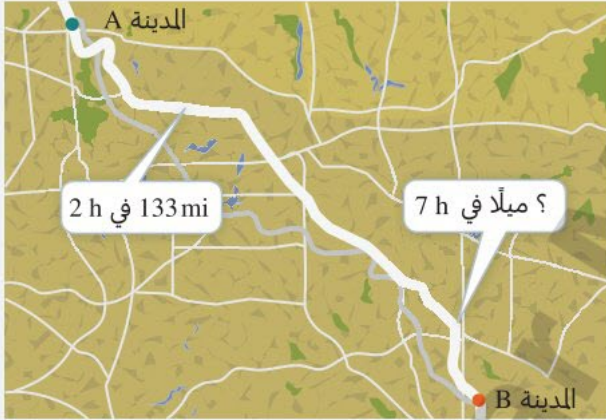
23. إذا كان $\frac{A}{B} = k$ ، أي مما يلي صحيح؟

- A. k يتناسب عكسيًا مع A.
- B. k يتناسب عكسيًا مع B.
- C. A يتناسب عكسيًا مع k .
- D. A يتناسب عكسيًا مع B.

24. اختبار SAT/ACT افترض أن y يتناسب عكسيًا مع مربع x . إذا ضربنا x في 4، أي العبارات التالية تنطبق على قيمة y ؟

- Ⓐ يجب ضرب y في 4
- Ⓑ يجب ضرب y في 16
- Ⓒ يجب ضرب y في $\frac{1}{4}$
- Ⓓ يجب ضرب y في $\frac{1}{16}$

25. مهمة أدائية انطلق فارس بسيارته من منزله في المدينة A باتجاه المدينة B لزيارة أقرانه.



الجزء A بعد مرور ساعتين كان فارس قد قطع 133 mi باتجاه المدينة B. تتناسب المسافة d ، بالأميال، التي يقطعها فارس طرديًا مع الزمن t بالساعات، اللازم لقطعها. اكتب معادلة التناسب الطردي. استعمل العلاقة المعطاة والمعادلة التي كتبتها لإيجاد عدد الأميال التي سيقطعها فارس بعد 5 ساعات أخرى.

الجزء B بقي في خزان سيارة فارس بعد ساعتين من القيادة 9 جالونات من الوقود. كمية الوقود g ، بالجالون، في خزان السيارة تتناسب عكسيًا مع مقدار الزمن t بالساعات، الذي يمضيه في القيادة. اكتب معادلة التناسب العكسي. استعمل العلاقة المعطاة والمعادلة التي كتبتها لإيجاد عدد الجالونات المتبقية من الوقود في الخزان بعد مرور 5 ساعات أخرى على قيادة السيارة.

20. **نمذج** يتناسب الزمن t ، اللازم لتفريغ خزان مياه، عكسيًا مع معدل الضخ P . تستطيع مضخة إفراغ خزان من الماء خلال 40 دقيقة بمعدل 120 جالون في الدقيقة. اكتب معادلة التناسب العكسي. كم الزمن الذي يلزم المضخة لتفريغ خزان الماء إذا كان معدل الضخ 200 جالون في الدقيقة؟

21. **استعمل البنية** يتناسب عدد ألعاب الفيديو التي يمكن تخزينها في نظام لألعاب الفيديو عكسيًا مع معدل حجم الألعاب. يستطيع أحد أنظمة ألعاب الفيديو تخزين 160 لعبة عندما يكون معدل حجم الألعاب 2.0 جيجابايت (GB).
a. اكتب معادلة تناسب عكسي تربط بين عدد الألعاب n التي يتسع لها نظام ألعاب الفيديو ومعدل حجم الألعاب s بالجيجابايت.

b. استعمل علاقة التناسب العكسي لإكمال جدول القيم أدناه:

حجم اللعبة (GB), s	1.0	2.5	3.0	4.0
عدد الألعاب n	■	■	■	■

c. مثل علاقة التناسب العكسي هذه بيانيًا في مستوى إحداثي.

22. **بزر منطقيًا** يتناسب فرق الجهد للتيار الكهربائي V (يقاس بوحدة Volt) في دائرة كهربائية عكسيًا مع المقاومة R (تقاس بوحدة Ohm). يبلغ مقدار فرق الجهد في دائرة كهربائية 15V عندما تكون المقاومة 192 Ohms

- a. اكتب معادلة هذا التناسب العكسي.
- b. أوجد قيمة فرق الجهد في الدائرة الكهربائية عندما تكون المقاومة 144 Ohms

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة ؟

1. كيف تستعمل بعض الدوال لنمذجة مواقف حياتية ولحل المسائل؟ وما هي الخصائص الأساسية لتمثيلاتها البيانية؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- دالة الجذر التربيعي
- الدالة المتعددة التعريف
- التناسب العكسي
- دالة القيمة المطلقة
- دالة المقلوب
- خط التقارب
- دالة الجذر التكعيبي
- علاقة عكسية

2. _____ لها مقدار جبري مع رمز القيمة المطلقة.

3. _____ هو مستقيم يقترب منه منحنى الدالة لكن لا يلامسه.

4. لدى _____ قواعد مختلفة لفترات مختلفة في مجالها.

5. _____ هي الدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

6. يمكن نمذجة _____ بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$.

7. يمكن نمذجة _____ بالمعادلة $y = \frac{1}{x}$.

8. _____ هي الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

تدرب وحلّ مسائل

في التمارين 9-11، حدّد ما إذا كانت النقطة تقع على التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$. إن كانت كذلك، أعط إحداثيّ نقطة ثانية على أن يكون لها الإحداثي y نفسه.

9. (8, 8) 10. (-5, 5) 11. (-3.5, -3.5)

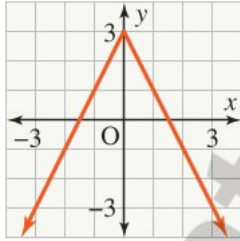
في التمرينين 12 و 13، مثلّ الدالة بيانيًا، ثم أوجد مجالها ومداها.

12. $f(x) = -2.5|x|$ 13. $g(x) = \frac{1}{3}|x|$

في التمرينين 14 و 15، أوجد رأس التمثيل البياني للدالة، المعطاة، ثم حدّد ما إذا كان يمثل قيمة عظمى أم صغرى للدالة.

14. $g(x) = -6.3|x|$ 15. $g(x) = 7|x|$

16. **ابحث عن العلاقات** أوجد المجال والمدى وإحداثيات الرأس للدالة الممثلة بيانيًا أدناه.

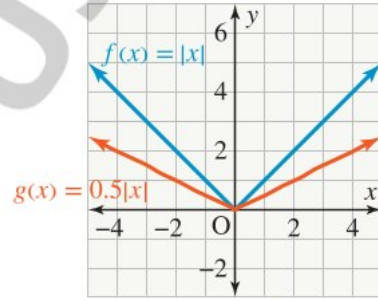


مراجعة سريعة

التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة، $f(x) = |x|$ ، له رأس عند النقطة (0, 0) ومحور تناظر معادلته $x = 0$ (المحور y).

مثال

ما وجه المقارنة بين مجال ومدى الدالة $g(x) = 0.5|x|$ ومجال ومدى الدالة $f(x) = |x|$ ؟



مجال كل من الدالتين f و g هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، ومدى كلتا الدالتين هو $y \geq 0$.

مراجعة سريعة

الدالة المتعددة التعريف هي دالة معرّفة بقواعد مختلفة للفترة المختلفة من مجالها.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > 2 \\ -x + 1, & x \leq 2 \end{cases}$$

وهي دالة معرّفة بقاعدتين خطيتين على مجالها في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

يمكن التعبير عن الدوال المتعددة التعريف بأكثر من قاعدتين كما في المثال التالي:

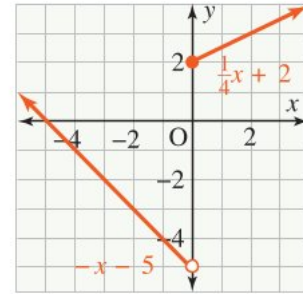
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x^2 - 1, & -1 \leq x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

مثال

ارسم التمثيل البياني للدالة f المعرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

مثّل بيانيًا كل جزء من الدالة في المجال المحدد له. حدّد الفترة التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة.



تكون الدالة متناقصة عند $x < 0$.

تكون الدالة متزايدة عند $x \geq 0$.

تدرب وحلّ مسائل

في التمرينين 17 و 18، عبّر عن كل دالة في صورة دالة متعددة التعريف.

17. $f(x) = 4|x|$

18. $f(x) = -2|x|$

في التمرينين 19 و 20، مثّل بيانيًا كل دالة متعددة التعريف.

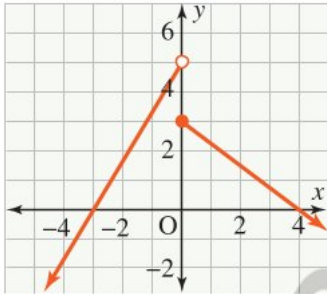
19. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ \frac{1}{2}x - 2, & -1 \leq x \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & -2 < x \leq 3 \\ x - 5, & 3 < x \end{cases}$

21. **حلّ الخطأ** صف الخطأ الذي ارتكبه جاسم في التعبير عن الدالة $f(x) = -5|x|$ في صورة دالة متعددة التعريف. ثم صحّح هذا الخطأ.

$$f(x) = -5|x|, f(x) = \begin{cases} -5x, & x < 0 \\ 5x, & x > 0 \end{cases}$$

22. اكتب دالة متعددة التعريف للتمثيل البياني التالي:



23. **نمذج** يبيع صاحب محل مجوهرات خواتم سعر الواحد

منها QR 140 بالإضافة إلى رسم شحن ثابت قيمته

QR 20 عندما لا تتجاوز الطلبية 10 خواتم. إذا كانت الطلبية

أكثر من 10 خواتم فإن سعر الخاتم الواحد

يصبح QR 120 دون احتساب تكلفة الشحن.

اكتب دالة متعددة التعريف لتمثيل هذه الحالة.

تدرب وحلّ مسائل

في التمارين 24-27، ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لكل دالة أدناه والتمثيل البياني للدالة: $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

24. $g(x) = \sqrt{x} + 4$ 25. $g(x) = \sqrt{x-8}$
 26. $g(x) = \sqrt{x-1} - 5$ 27. $g(x) = \sqrt{x+2} - 8$

في التمرينين 28 و 29، اكتب مقدارًا يمثل الدالة.

28. الدالة $g(x)$ التي تمثيلها البياني هو إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى الأسفل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

29. الدالة $h(x)$ التي تمثيلها البياني هو إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

30. **استعمل الأدوات المناسبة** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل الدالة $f(x) = -\sqrt{x-3}$ بيانيًا، ثم حدّد مجال الدالة ومداها.

31. **تواصل بدقة** تقاس السرعة القصوى للقوارب الشراعية بالعقدة البحرية ويمكن تقديرها باستعمال المعادلة $s(l) = 1.34\sqrt{l}$ ، حيث l طول القارب الشراعي بالأقدام. أوجد السرعة التقريبية لقارب شراعي طوله 45 ft

مراجعة سريعة

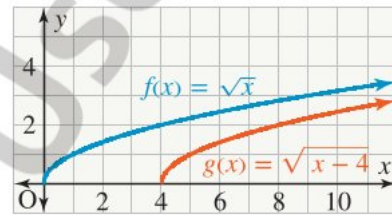
دالة الجذر التربيعي هي $f(x) = \sqrt{x}$.

مثال

ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x-4}$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

مثل كل دالة بيانيًا.

لكل قيمة من قيم y ، تكون قيمة x المناظرة لها في الدالة g أكبر بمقدار 4 وحدات من القيمة المناظرة لها في الدالة f .



التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x-4}$ إزاحة أفقية للتمثيل

البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مقدارها 4 وحدات إلى اليمين.

مجال الدالة f هو $x \geq 0$ ، ومجال الدالة g هو $x \geq 4$.

مدى الدالة f هو $y \geq 0$ ، ومدى الدالة g هو $y \geq 0$.

مراجعة سريعة

دالة الجذر التكعيبي هي $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

مثال

لنأخذ الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ ، ما وجه المقارنة بين متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $2 \leq x \leq 4$ ومتوسط معدل التغير في الفترة $6 \leq x \leq 8$ ؟

أوجد قيمة $f(x)$ لكل قيمة للمتغير x .

الفترة: $2 \leq x \leq 4$

$$f(2) = \sqrt[3]{2+2} \approx 1.59 \quad f(4) = \sqrt[3]{4+2} \approx 1.82$$

الفترة: $6 \leq x \leq 8$

$$f(6) = \sqrt[3]{6+2} = 2 \quad f(8) = \sqrt[3]{8+2} \approx 2.15$$

أوجد متوسط معدل التغير في كل فترة.

$$2 \leq x \leq 4:$$

$$\frac{1.82 - 1.59}{4 - 2} \approx 0.12$$

$$6 \leq x \leq 8:$$

$$\frac{2.15 - 2}{8 - 6} \approx 0.08$$

إذن، يتناقص متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ عندما تتزايد قيمة x .

تدرب وحل مسائل

في التمارين 32-35، صف الإزاحات التي تحوّل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة.

$$32. h(x) = \sqrt[3]{x} + 4 \quad 33. g(x) = \sqrt[3]{x+5}$$

$$34. p(x) = \sqrt[3]{x+1.5} - 2.5 \quad 35. j(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

في التمارين 36 و 37، احسب متوسط معدل التغير لكل دالة في الفترة المعطاة.

$$36. f(x) = \sqrt[3]{x}, 5 \leq x \leq 9$$

$$37. g(x) = \sqrt[3]{x+6}, -3 \leq x \leq 0$$

38. **ابحث عن العلاقات** قارن بين متوسط معدل التغير للدالة

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ ومتوسط معدل التغير للدالة } g(x) = \sqrt[3]{x-3}$$

إذا كان $-2 \leq x \leq 2$

39. **تواصل بدقة** يحتاج متجر أسماك إلى مزيد من خزانات

الأسماك المكعبة الشكل لرفوف العرض الخاصة به.

تتطلب كل سمكة 1 ft^3 من الماء، وتكلفة كل خزان هي

QR 20 لكل قدم مكعب. اكتب دالة الجذر التكعيبي التي

تعطي طول ضلع كل خزان x ، بالإنش، إذا كانت التكلفة C .

مراجعة سريعة

تمثل المعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$ تناسبًا عكسيًا بين المتغيرين x و y ، حيث $k \neq 0$ هو ثابت التناسب.
دالة المقلوب الرئيسة هي $y = \frac{1}{x}$.

مثال

في تناسب عكسي، $x = 9$ عندما $y = 2$.
أوجد قيمة y عندما $x = 3$.

عوض $x = 9$ ، $y = 2$

حل لإيجاد k

معادلة التناسب العكسي

عوض $x = 3$

اقسم

إذن، عندما $x = 3$ ، $y = 6$.

$$2 = \frac{k}{9}$$

$$18 = k$$

$$y = \frac{18}{x}$$

$$y = \frac{18}{3}$$

$$y = 6$$

تدرب وحل مسائل

40. في تناسب عكسي، $x = 2$ عندما $y = -4$.
أوجد قيمة y عندما $x = 16$.

41. في تناسب عكسي، $x = 6$ عندما $y = \frac{1}{12}$.
أوجد قيمة x عندما $y = 2$.

42. مثل الدالة $y = \frac{5}{x}$ بيانيًا، ثم أوجد مجالها ومداها.
اكتب معادلات خطوط التقارب لمنحنى هذه الدالة.

43. **ابحث عن العلاقات** كيف ترتبط دالة المقلوب الرئيسة مع التناسب العكسي؟

44. **فكر وثابر في الحل** يتناسب حجم الغاز، V ، عكسيًا مع الضغط P . إذا كان حجم الغاز يساوي 6 cm^3 عندما يكون الضغط 25 kg/cm^2 ، أوجد حجم الغاز عندما يكون الضغط 15 kg/cm^2 .

السؤال الأساس

كيف تستعمل بعض الدوال لنمذجة مواقف حياتية ولحل المسائل؟ وما هي الخصائص الأساسية لتمثيلاتها البيانية؟

نظرة عامة على الوحدة

- 4-1 Analyzing Functions Graphically
- 4-2 Translations of Functions
- 4-3 Stretches and Compressions
- 4-4 Operations with Functions
- 4-5 Inverse Functions

- 4-1 تحليل الدوال بيانيًا
- 4-2 إزاحات الدوال
- 4-3 التمدد والتضييق
- 4-4 العمليات على الدوال
- 4-5 الدوال العكسية

Topic Vocabulary

- translation
- reflection
- stretch
- compression
- composition of functions
- inverse of a function

مصطلحات الوحدة

- إزاحة
- انعكاس
- تمدد
- تضيق
- تركيب الدوال
- معكوس الدالة

هل تعلم؟

يشغل جسم **شخص** متوسط الحجم مساحة مقدارها **2 ft²**



بلغت **الكثافة السكانية** (عدد السكان لكل كيلومتر مربع) في مدينة الدوحة: **4 718** (عام 2015)

المساحة

الأرض: **5 101 000 km²**

قطر: **11 571 km²**

عدد السكان

الأرض: **7.846** مليار نسمة

قطر: **2.4** مليون نسمة



الشمال



الدوحة

مدينة الدوحة هي المدينة الأكثر كثافة للسكان من بين المدن القطرية.

استقبلت قطر أكثر من مليون و 400 ألف زائر من أنحاء العالم خلال نهائيات كأس العالم التي أقيمت في عام 2022

مهمتك: برمجة خوارزمية جذر تربيعي

تصمّم الملاعب الرياضية لتستوعب عددًا كبيرًا من المتفرّجين. ستقوم أنت وزملاؤك في الصف بتصميم مبنى قاعدته مربع يستوعب عددًا معيّنًا من الناس.



يمثل كل جدول أدناه جزءًا من دالة.

x	$f(x)$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1

x	$g(x)$
-2	20
-1	10
0	5
1	2.5
2	1.25

x	$h(x)$
-2	11
-1	8
0	5
1	2
2	-1

x	$j(x)$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

x	$k(x)$
-2	21
-1	11
0	5
1	3
2	5

أستطيع... تحديد الخصائص

العامة لدالة تمثيلها البياني معطى أو معادلتها معطاة.

معيّار الدرس

11F.1.4

A. عيّن النقاط لكل دالة في المستوى الإحداثي. اذكر ما تعرفه عن كل دالة.

B. ابحث عن العلاقات أي من هذه الدوال مرتبط بعضها ببعض؟ وضح إجابتك.

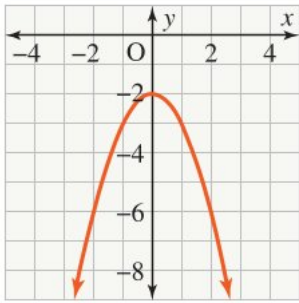
ماذا يمكنك أن تعرف عن دالة من خلال تحليل تمثيلها البياني؟

السؤال الأساس

تحليل المجال والمدى

مثال 1

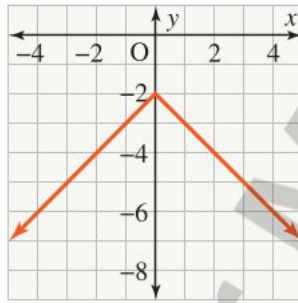
التمثيلات البيانية لثلاث دوال مبيّنة أدناه. أوجد مجال كل دالة ومداه.



$$g(x) = -x^2 - 2$$

المجال: كل الأعداد الحقيقية

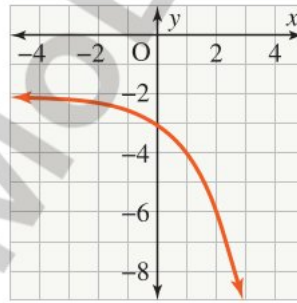
$$\text{المدى: } y \leq -2$$



$$h(x) = -|x| - 2$$

المجال: كل الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى: } y \leq -2$$



$$j(x) = -2^x - 2$$

المجال: كل الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى: } y < -2$$

لإيجاد مدى الدالة g ، لاحظ أن $x^2 \geq 0$ لكل قيم x ، وبالتالي $-x^2 \leq 0$ ، ومنه $-x^2 - 2 \leq -2$ لكل قيم x . إذن مدى الدالة g هو $y \leq -2$.

يمكنك إيجاد مدى الدالة h ومدى الدالة j بطريقة مشابهة لما سبق.مدى الدالة h هو $y \leq -2$ ، ومدى الدالة j هو $y < -2$.

خطأ شائع

تذكر أن منحنى الدالة يمتد إلى ما بعد حدود الشكل عندما يكون مجالها كل الأعداد الحقيقية. على سبيل المثال، يستمر التمثيل البياني للدالة j بالامتداد إلى الأسفل وإلى اليمين ما بعد حدود الشكل كلما تزايدت قيمة المتغير x .

1. حاول أن تحل! وضح كيف يمكنك تحديد مدى كل من الدالتين h و j من خلال المعادلة التي تعرّف كلّاً منهما.

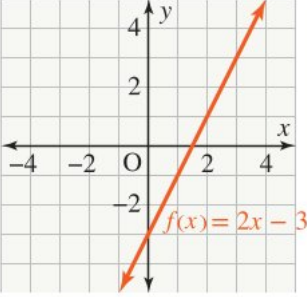
أي من الدوال التالية لها قيمة عظمى و/أو قيمة صغرى؟

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$$

$$h(x) = |x + 1| + 2$$

لنأخذ التمثيل البياني لدالة خطية f ، والتمثيل البياني لدالة أسية g ، وإزاحة للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة h .

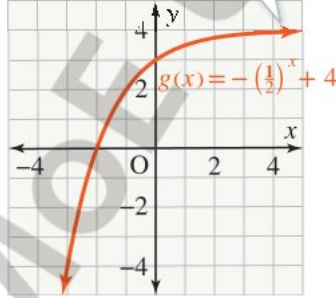


التمثيل البياني للدالة الخطية f يتزايد بمعدل ثابت. إذن، ليس لها قيمة عظمى ولا قيمة صغرى.

عندما تتزايد قيمة x تقترب قيمة y من العدد 4، لكنها لا تصل إليه أبدًا.

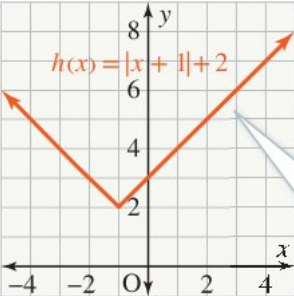
التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني لدالة أسية، يحده من الأعلى خط التقارب $y = 4$ وهذا يعني أن $g(x) < 4$. ومع ذلك ليس للدالة قيمة عظمى لأنها تتزايد باستمرار.

ليس للدالة g قيمة صغرى أيضًا لأنه عندما تتناقص x تتناقص $g(x)$.



تواصل بدقة

القيمة العظمى أو القيمة الصغرى هي قيمة من قيم y للدالة. ما القيم التي تحدد موقع القيمة العظمى أو القيمة الصغرى؟



التمثيل البياني للدالة h هو إزاحة للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة، وهو مفتوح إلى الأعلى. إذن، للدالة قيمة صغرى تساوي 2 عند الرأس $(-1, 2)$.

أما إذا كانت الدالة هي $h(x) = -|x + 1| + 2$ ، فإن تمثيلها البياني يكون مفتوحًا إلى الأسفل، وعندئذ يكون لها قيمة عظمى بدلًا من قيمة صغرى.

إرشاد

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة h باستعمال جدول قيم.

حاول أن تحل! 2. هل لكل دالة مما يلي قيمة عظمى و/أو قيمة صغرى؟ ارسم التمثيل البياني لكل دالة لتساعدك في الحل.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b. $g(x) = 2^x - 3$

c. $h(x) = -|x| - 2$

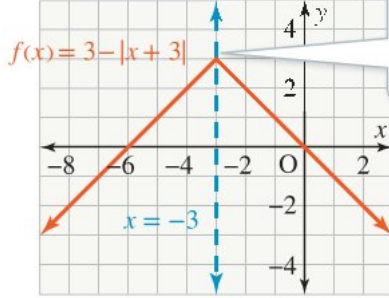
أي دالة مما يلي لها محور تناظر؟

نصيحة دراسية

إذا طويت رسم التمثيل البياني على امتداد محور التناظر، فسوف ينطبق جزأي التمثيل البياني على جانبي محور التناظر أحدهما على الآخر.

$$f(x) = 3 - |x + 3|$$

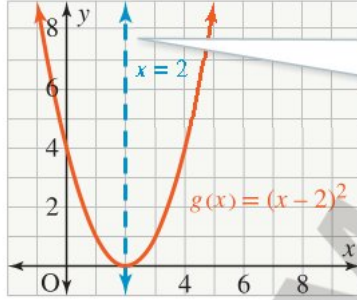
x	$f(x)$
-6	0
-5	1
-4	2
-3	3
-2	2
-1	1
0	0



إزاحات التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة لها دائمًا **محور تناظر** يمر برأس التمثيل البياني.

$$g(x) = (x - 2)^2$$

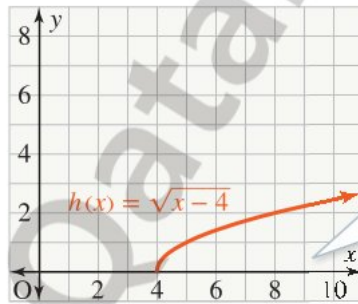
x	$g(x)$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9



الدوال التربيعية لها دائمًا **محور تناظر رأسي**.

$$h(x) = \sqrt{x - 4}$$

x	$h(x)$
4	0
5	1
8	2
13	3
20	4
29	5
40	6



هذه الدالة ليس لها **محور تناظر**، حيث لا يوجد طريقة لطّي التمثيل البياني بحيث ينطبق أحد جزأيه على جزئه الآخر.

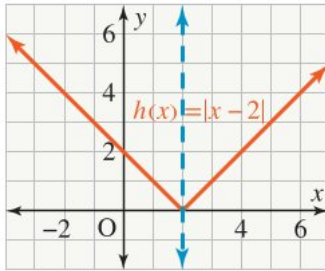
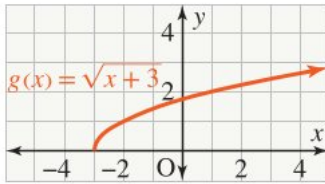
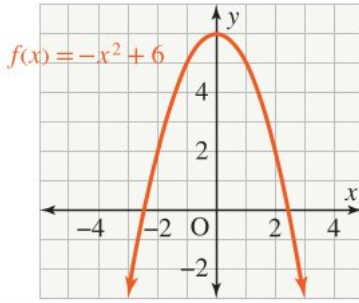
إذن، التمثيلات البيانية للدوال التربيعية وإزاحات التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة لها محور تناظر.

حاول أن تحل! 3. هل لكل دالة مما يلي محور تناظر؟ ارسم التمثيلات البيانية لتساعدك على الإجابة.

a. $g(x) = 2^x$

b. $h(x) = (x + 2)^2$

بيانيًا



لفظيًا

المجال والمدى

مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
مدى الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية $y \leq 6$

القيم العظمى والقيم الصغرى

الدالة g ليس لها قيمة عظمى.
القيمة الصغرى للدالة g هي 0 عندما $x = -3$.

محور التناظر

المستقيم الرأسى الذي يقسم التمثيل البياني للدالة إلى جزأين كل منهما انعكاس للآخر هو محور التناظر.
المستقيم $x = 2$ محور تناظر للدالة h .

طبّق فهمك

في التمارين 4-7، حدّد مجال ومدى الدالة. واحسب القيمة العظمى و/أو القيمة الصغرى، وحدّد محور التناظر إن وُجد.

4. $f(x) = \sqrt{x-5}$
5. $g(x) = x^2 + 2x + 1$
6. $h(x) = 2 - |x+6|$
7. $k(x) = 3^x + 2$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ماذا يمكنك أن تعرف عن دالة من خلال تحليل تمثيلها البياني؟
2. حلّ الخطأ يقول أحمد إن القيمة العظمى للدالة $f(x) = -2^x$ هي 0، بيّن خطأ أحمد وصحّحه.
3. ابحث عن العلاقات كيف يتشابه سلوك الدالة التربيعية مع سلوك دالة القيمة المطلقة؟

في التمارين 14-17، ارسم التمثيل البياني للدالة وحدد مجالها ومداها. انظر المثال 1

14. $f(x) = x^2 - 2$

15. $g(x) = \sqrt{x-3}$

16. $h(x) = 5^x$

17. $j(x) = 3 - |x-4|$

في التمارين 18-21، استعمل التمثيل البياني للدالة ليساعدك على تحديد قيمتها العظمى وقيمتها الصغرى إن وجدت.

انظر المثال 2

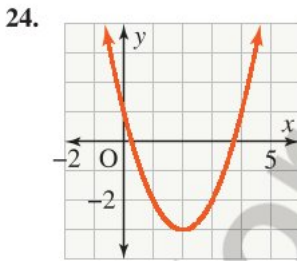
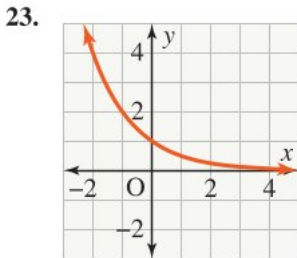
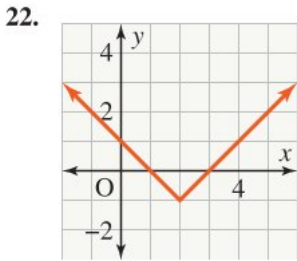
18. $f(x) = 3 - x^2$

19. $g(x) = 2\sqrt{x+1} - 2$

20. $h(x) = -2^x$

21. $j(x) = 5|x| - 8$

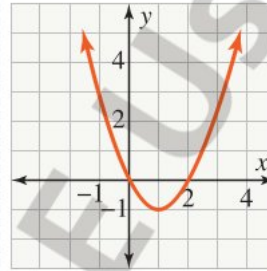
في التمارين 22-24، حدد معادلة محور التناظر للدالة إن وُجد. انظر المثال 3



8. **ابحث عن العلاقات** من دون رسم التمثيل البياني، كيف يمكنك تحديد مجال ومدى الدالة $f(x) = 4 - \sqrt{2x-5}$ ؟

9. **روابط في الرياضيات** مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو كل الأعداد الحقيقية ولها قيمة صغرى تساوي 0 وليس لها قيمة عظمى. كيف يمكنك إعادة تعريف مجال الدالة f بحيث تكون لها قيمة عظمى تساوي 4 وقيمة صغرى تساوي 0؟

10. **حلل الخطأ** التمثيل البياني أدناه هو للدالة $f(x) = x^2 - 2x$ ، طلب من عائشة إيجاد المدى والمجال لهذه الدالة فكتبت:



• المجال: كل الأعداد الحقيقية
• المدى: $y \geq 0$

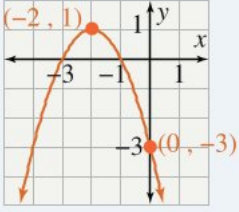
بين خطأ عائشة وصححه.

11. **تواصل بدقة** وضح السبب في أن المستقيم $y = 3$ لا يمكن أن يكون محور تناظر لدالة.

12. **مهارات التفكير العليا** مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية. محور التناظر للدالة هو المستقيم $x = 4$. عندما تقترب x من ما لا نهاية، تقترب y أيضًا من ما لا نهاية. هل يمكن أن يكون مدى f مجموعة الأعداد الحقيقية؟ وضح إجابتك.

13. **استعمل البنية** أوجد قيمة كل من a و b بحيث يكون للتمثيل البياني للدالة f المبينة أدناه محور تناظر.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq b \\ x, & x > b \end{cases}$$



28. يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ ، أي مما يلي صحيح؟ اختر كل ما ينطبق.

A. محور التناظر للتمثيل البياني للدالة f هو $x = -2$.

B. مجال الدالة f هو $x \leq 0$.

C. مدى الدالة f هو $y \leq 1$.

D. القيمة العظمى للدالة f تساوي 1 عند $x = -2$.

E. القيمة الصغرى للدالة f تساوي -3 عند $x = 0$.

29. اختبار SAT/ACT أي دالة مما يلي لها محور تناظر عند $x = 1$ وقيمة عظمى تساوي 3؟

(A) $y = 1 - |x - 3|$

(B) $y = |x - 1| + 3$

(C) $y = |x + 1| - 3$

(D) $y = 3 - |x - 1|$

(E) $y = |x - 3| + 1$

30. مهمة أدائية أسس صالح شركة صغيرة، وأخذ يسجل أرباحه الشهرية المبينة في الجدول أدناه.

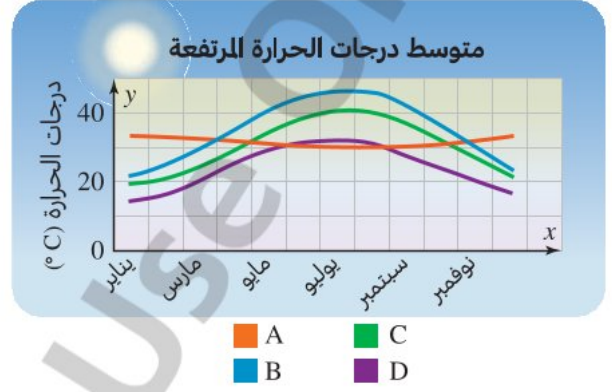
الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس
الأرباح QR	12	40	100	160	400	720	1 660	3 180

الجزء A أنشئ تمثيلًا بيانيًا يبين أرباح صالح بمرور الزمن. حدّد نوع الدالة التي تعدّ أفضل نموذجًا لأرباح صالح استنادًا إلى البيانات المدونة سابقًا.

الجزء B يبين خصائص الدالة المتعلقة بعمل صالح. وضح ما تعنيه هذه الخصائص في هذا السياق.

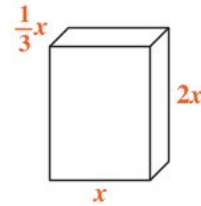
الجزء C اكتب معادلة تنمذج نمو عمل صالح. استعمل الدالة التي وجدتها لتتوقع أرباح صالح في شهر أغسطس من السنة التالية. هل تقديرك معقول؟ بّين السبب.

25. نموذج استعمل متوسط درجات الحرارة المرتفعة في كل من لبنان وقطر والكويت والصومال لرسم التمثيل البياني أدناه. استعمل المعلومات المتعلقة بالقيم العظمى والصغرى المبينة أدناه لإكمال المفتاح الذي يفسّر التمثيل البياني. وضح إجابتك.

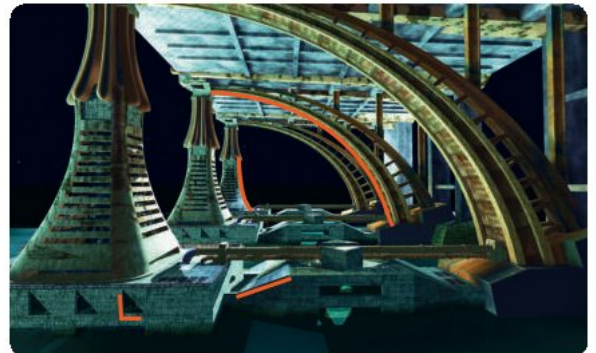


26. فكر وثابر في الحل تصمم شركة تسويق صندوقًا جديدًا لعبوات حبوب الإفطار.

حدّدت الشركة أن الدالة $C(x) = 4.5x^2$ تنمذج تكلفة صندوق أبعاده كما في الرسم أدناه (مقاسة بالإنش). حدد مجالًا ومدى معقولين لهذه الدالة.



27. نموذج تستعمل ماجة برنامجًا خاصًا بالرسم المتحركة لابتكار مشاهد فيلم. الأشكال والخصائص التي تستعملها معزفة بدوال. أوجد خصائص الدوال المفيدة لماجة، وكيف يمكنها استعمالها في عملها.

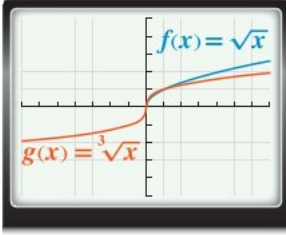


4-2

إزاحات الدوال

Translations of Functions

انقد وشرح



يبين الشكل المجاور التمثيلين البيانيين للدالتين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$. تقول لطيفة إن الإزاحات الرأسية لهاتين الدالتين ستعمل بنفس الطريقة التي تعمل بها للدوال التربيعية والدوال الأسية. لكن زميلتها إيمان لم توافقها الرأي.

- A. بالنسبة للدالتين $f(x) + c$ و $g(x) + c$ ، ما الإزاحة المتوقعة عندما تكون c موجبة؟ أو عندما تكون قيمة c سالبة؟
- B. **عَمِّم** أي من الطالبتين على صواب؟ وضح إجابتك.

أستطيع... أن أمثل بيانيًا وأحلل تحويلات الدوال.

معايير الدرس

11F.3.1 و 11F.3.2

المصطلحات

translation

• إزاحة

هل تعمل الإزاحات الأفقية والرأسية بنفس الطريقة لكل أنواع الدوال؟

السؤال الأساس

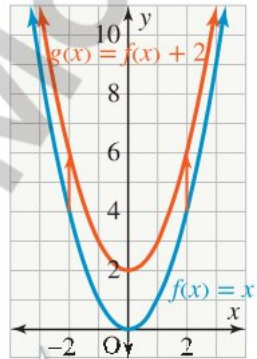
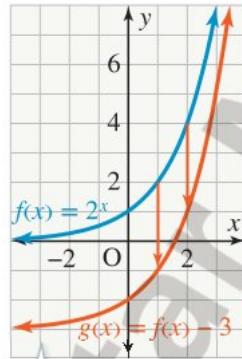
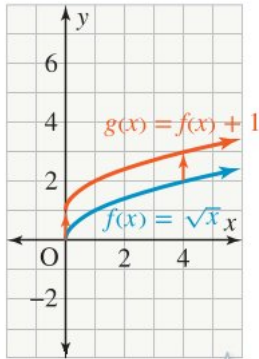
الإزاحات الرأسية

مثال 1

كيف تغيّر إضافة قيمة ثابتة إلى المخرجة التمثيل البياني للدالة؟

لننظر في تأثير القيمة الثابتة على تغيير التمثيل البياني لكل دالة مبيّنة أدناه.

يمكنك كتابة هذه العملية في الصورة $g(x) = f(x) + k$. هذا يعني أنه لكل قيمة للمتغير x ، تأخذ الدالة g مخرجة f مضافًا إليها الثابت k .



ابحث عن العلاقات

عند إضافة قيمة ثابتة سالبة k إلى دالة فإن قيمة الدالة تتناقص بالقيمة k نفسها. إذن يتحرك التمثيل البياني بمقدار k وحدة إلى الأسفل.

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.

التمثيل البياني للدالة g هو **إزاحة** لتمثيل الدالة f بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

إن إضافة قيمة ثابتة موجبة إلى مخرجة الدالة تعمل على إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى الأعلى، بينما إضافة قيمة ثابتة سالبة إلى مخرجة الدالة تعمل على إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى الأسفل.

حاول أن تحلّ! 1. لكل دالة $g(x) = f(x) + k$ ، كيف تؤثر قيمة الثابت k على التمثيل البياني للدالة f ؟

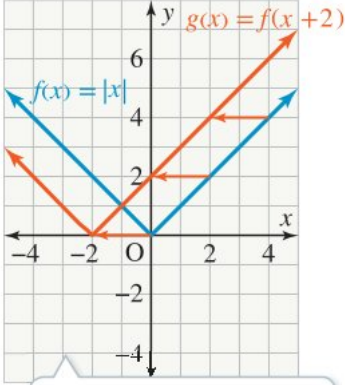
a. $g(x) = f(x) + 7$

b. $g(x) = f(x) - 9$

كيف يغير طرح قيمة ثابتة من المدخلة في التمثيل البياني للدالة؟

لننظر في تأثير القيمة الثابتة على تغيير التمثيل البياني لكل دالة مبيّنة أدناه.

يمكنك كتابة هذه العملية عمومًا في الصورة $g(x) = f(x - h)$. هذا يعني أن الدالة g تأخذ المدخلة للدالة f وتطرح الثابت h قبل تطبيق الدالة f .



التمثيل البياني للدالة g
هو إزاحة لتمثيل الدالة f
بمقدار وحدتين إلى اليسار.

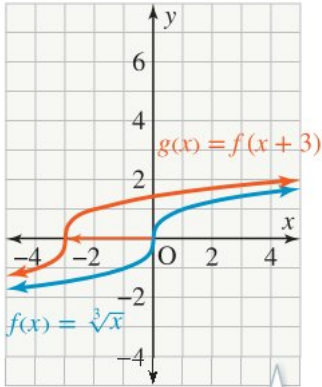
لنرى ما يحدث للتمثيل البياني عندما تطرح قيمة ثابتة من المدخلة، ففكر في مدخلات الدالة g التي تحتاج إليها للحصول على المخرجة نفسها التي للدالة f لمدخلة معطاة x .

على سبيل المثال، إذا كانت $g(x) = f(x + 2)$ ، تحتاج إلى مدخلة أصغر بوحدين من x للدالة $g(x_1) = f(x)$. إذن، التمثيل البياني للدالة g هو التمثيل البياني للدالة f مزاحًا وحدتين إلى اليسار.

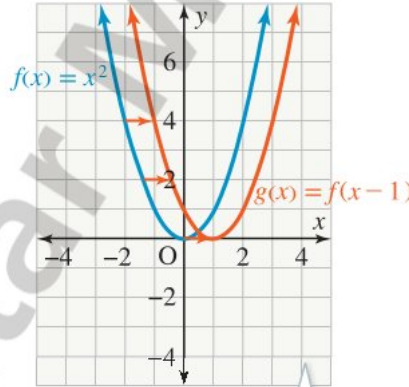
خطأ شائع

العبارة $(x + 2)$ في الدالة $f(x + 2)$ تنقل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أفقيًا في الاتجاه السالب وليس في الاتجاه الموجب. يمكنك التفكير في ذلك على أنه $f(x - (-2))$ ، إذن الثابت سالب.

يمكنك استعمال التبرير المنطقي نفسه لمعرفة كيف يتغير التمثيل البياني لأي دالة.



التمثيل البياني للدالة g هو
إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار
3 وحدات إلى اليسار.



التمثيل البياني للدالة g هو
إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار
وحدة واحدة إلى اليمين.

إن طرح قيمة ثابتة موجبة من المتغير x تعمل على إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى اليمين، بينما طرح قيمة ثابتة سالبة من المتغير x تعمل على إزاحة التمثيل البياني للدالة إلى اليسار.

حاول أن تحل! 2. لكل دالة $g(x) = f(x - h)$ ، كيف تؤثر قيمة الثابت h على التمثيل البياني للدالة f ؟

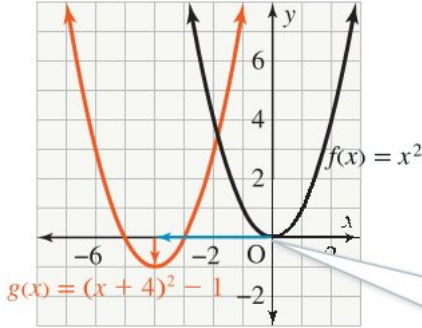
a. $g(x) = f(x - 8)$

b. $g(x) = f(x + 7)$

كيف يغير طرح قيمة ثابتة من المدخلة وإضافة قيمة ثابتة إلى المخرجة في التمثيل البياني للدالة؟

مثّل بيانيًا $g(x) = f(x + 4) - 1$ لأنواع متعددة من الدوال f .

في الصورة



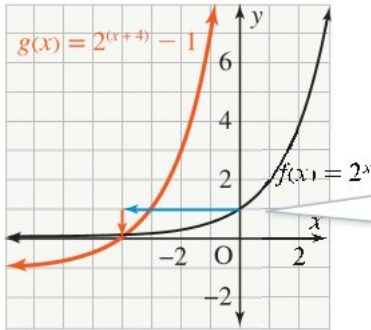
$$g(x) = f(x - h) + k$$

$$g(x) = f(x - (-4)) + (-1)$$

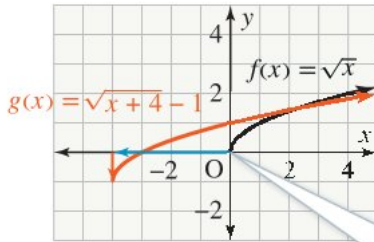
$$k = -1 \text{ و } h = -4$$

إذن

يزيح طرح h من الرأس x بمقدار 4 وحدات
إلى اليسار. يزيج جمع k مع الرأس
بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.



يزيح طرح h من النقطة المرجعية
بمقدار 4 وحدات إلى اليسار. يزيج جمع
 k مع النقطة المرجعية بمقدار
وحدة واحدة إلى الأسفل.



يزيح طرح h من النقطة المرجعية
بمقدار 4 وحدات إلى اليسار. يزيج جمع
 k مع النقطة المرجعية بمقدار
وحدة واحدة إلى الأسفل.

بئر منطقيًا

للدوال التي تمثيلاتها البيانية لا
رأس لها، نأخذ بالاعتبار النقاط التي
يمكن استعمالها كنقاط مرجعية
عند تنفيذ الإزاحة.

يؤثر دمج الإزاحات الممثلة في $g(x) = f(x + 4) - 1$ على التمثيل البياني لهذه الدوال بالطريقة نفسها. تتم إزاحة كل نقاط التمثيل البياني للدالة f بمقدار 4 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل.

الإزاحتان الأفقية والرأسية المدمجتان مستقلتان الواحدة عن الأخرى. بالرغم من أنه يمكن تطبيقهما بأي ترتيب، إلا أن الإزاحة الأفقية تُطبّق أولاً. لنأخذ $g(x) = f(x - h) + k$ ، التمثيل البياني للدالة g هو التمثيل البياني للدالة f بعد إزاحة بمقدار h وحدة أفقيًا ومن ثم إزاحة بمقدار k وحدة رأسيًا.

3. حاول أن تحلّ! 3. مثّل بيانيًا الدالة f والدالة $g(x) = f(x - 2) + 3$.

a. $f(x) = x^2$

b. $f(x) = 2^x$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

لفظيًا

تُحدث التغيرات على **المخرجة** $f(x)$ إزاحة رأسية للتمثيل البياني لهذه الدالة.

$k > 0$: انتقال بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأعلى.

$k < 0$: انتقال بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأسفل.

جبريًا

$$g(x) = f(x) + k$$

إزاحة بمقدار k وحدة رأسيًا

$$g(x) = f(x - h)$$

إزاحة بمقدار h وحدة أفقيًا

$$g(x) = f(x - h) + k$$

إزاحة بمقدار h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا

عدديًا

$$g(x) = f(x) - 2$$

إزاحة بمقدار وحدتين إلى الأسفل

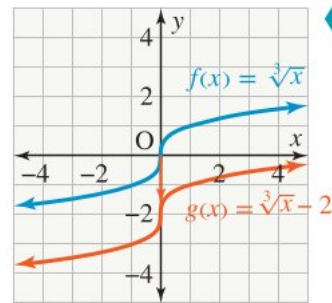
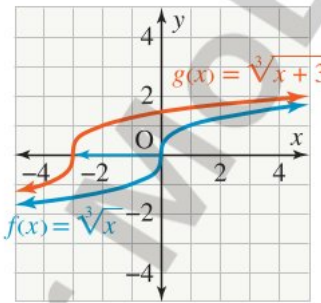
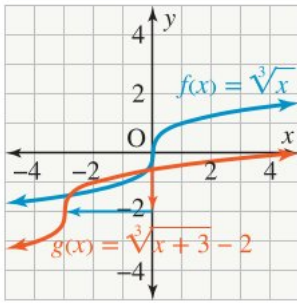
$$g(x) = f(x + 3)$$

إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى اليسار

$$g(x) = f(x + 3) - 2$$

إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ووحدين إلى الأسفل

بيانيًا

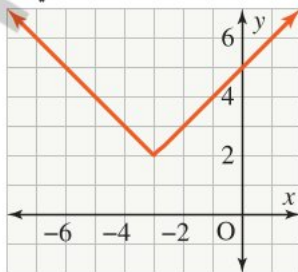


طبّق فهمك

في التمارين 5-10، ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

5. $f(x) = |x| + 4$
6. $f(x) = (x - 2)^3$
7. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
8. $f(x) = 3^x - 4$
9. $f(x) = (x - 1)^2 - 2$
10. $f(x) = \sqrt{x + 4} + 3$

11. أوجد معادلة التمثيل البياني أدناه.



عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس هل تعمل الإزاحات الأفقية والرأسية بنفس الطريقة لكل أنواع الدوال؟
2. استعمل البنية كيف يمكن أن تساعدك الإزاحات على رسم التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + 8x + 16$ ؟
3. حلّ الخطأ قالت أسيل إن مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x - 3}$ هو $x \geq -3$. أوجد خطأ أسيل وصحّحه.
4. ابن الحجج الرياضية وضح السبب في أن إضافة عدد إلى مخرجة الدالة تنقل تمثيلها البياني رأسيًا.

في التمارين 16-23، ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

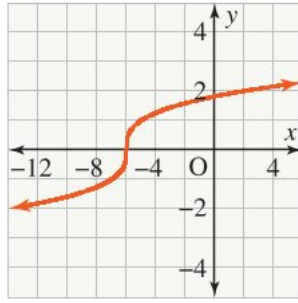
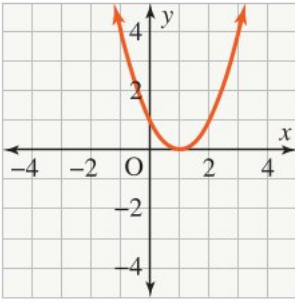
انظر المثالين 1 و 2

16. $g(x) = |x| + 6$ 17. $g(x) = x^2 - 3$
 18. $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$ 19. $g(x) = \sqrt{x} - 8$
 20. $g(x) = (x - 2)^2$ 21. $g(x) = |x + 4|$
 22. $g(x) = \sqrt{x + 3}$ 23. $g(x) = \sqrt[3]{x - 5}$

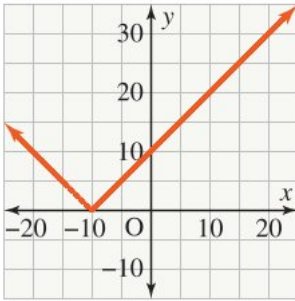
في التمارين 24-27، كل تمثيل بياني هو إزاحة للدالة المعطاة.

اكتب دالة التمثيل البياني. انظر المثال 2

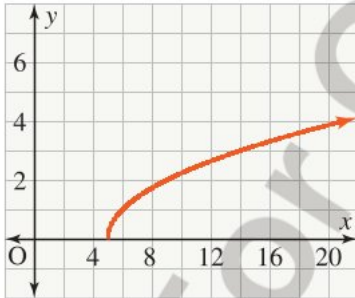
24. $f(x) = x^2$ 25. $f(x) = \sqrt[3]{x}$



26. $f(x) = |x|$



27. $f(x) = \sqrt{x}$



في التمرينين 28 و 29، ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

انظر المثال 3

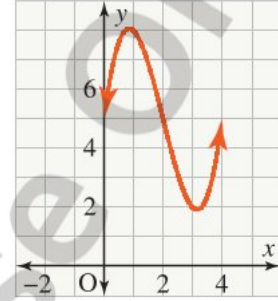
28. $g(x) = 2^{x+4} - 7$ 29. $g(x) = |x + 4.3| - 2.7$

12. **بزر منطقياً** كيف يتغير التمثيل البياني للدالة $f(x) = 5$ إلى

$g(x) = f(x - h) + k$ ، حيث h و k ثابتين؟

13. **استعمل البنية** التمثيل البياني للدالة $g(x) = f(x - 2) + 1$

مبين أدناه. ارسم التمثيل البياني للدالة f .



14. **حل الخطأ** طلب من سالم إيضاح العلاقة بين التمثيل

البياني للدالة $g(x) = |x - 2| + 2$ والتمثيل البياني للدالة

$f(x) = |x|$. حل سالم مبين أدناه.

$$\begin{aligned} g(x) &= |x - 2| + 2 \\ &= |x| + (-2 + 2) \\ &= |x| \end{aligned}$$

التمثيل البياني للدالة $g(x) = |x - 2| + 2$ هو نفس التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ ، حيث يقع الرأس عند (0, 0).

X

أوجد خطأ سالم وصححه.

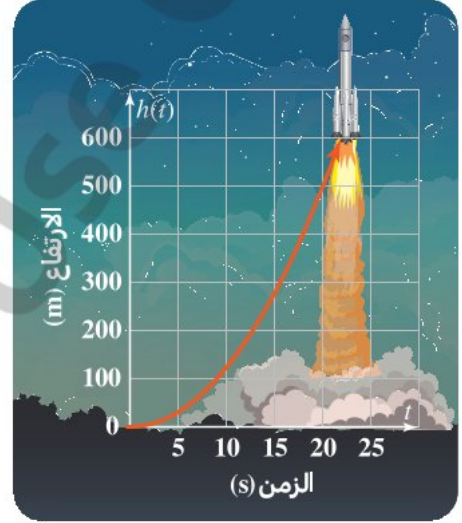
15. **مهارات التفكير العليا** إذا كانت $g(x) = f(x - 2) + 4$

و $j(x) = g(x + 5) - 3$ ، أوجد القيمتين h و k في المعادلة

$j(x) = f(x - h) + k$.

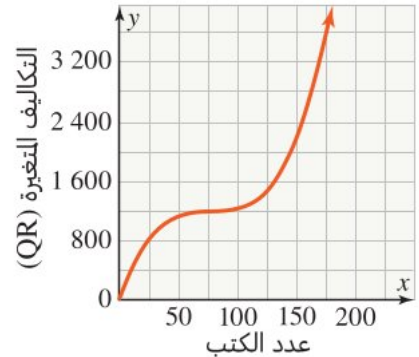
30. **فكر وتأبر في الحل** بنمذج الارتفاع h للصاروخ زحل (5)

بالأمتار بعد مرور t ثانية على إطلاقه بالتمثيل البياني المبين أدناه. لاحظ أن التمثيل البياني لا يمثل المسار الفعلي للصاروخ، وذلك لأن إطلاق الصاروخ تأخر بمقدار 60 s بسبب مشكلة تقنية. صف التأثير على $h(t)$ باستعمال إراحة. ارسم التمثيل البياني لارتفاع الصاروخ بعد t ثانية من زمن الإطلاق الأصلي.



31. **روابط في الرياضيات** تُصنّف تكاليف إنشاء دار نشر

جديدة إلى تكاليف ثابتة مثل الإيجار والتأمين، وتكاليف متغيرة مثل المواد والعاملين. التكاليف الثابتة لا يطرأ عليها تغيير، بينما تتغير التكاليف المتغيرة مع تغير عدد العناصر المنتجة. يبين التمثيل البياني التكاليف الأسبوعية المتغيرة استنادًا إلى عدد الكتب المنتجة.



a. إذا كانت التكاليف الأسبوعية الثابتة تساوي

QR 1 200، ارسم تمثيلًا بيانيًا يبين النفقات الإجمالية في الأسبوع.

b. أوجد التكلفة الإجمالية لإنتاج 75 كتابًا في أسبوع واحد.

32. أي مما يلي صحيحًا عن التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = (x - 2)^2 - 3$$

A. هو قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى.

B. هو قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل.

C. الرأس هو $(2, -3)$.

D. الرأس هو $(-2, -3)$.

E. الرأس هو $(2, 3)$.

33. **اختبار SAT/ACT** كيف تمت إراحة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

للحصول على التمثيل البياني للدالة

$$g(x) = \sqrt{x+5} + 6$$

A 5 وحدات إلى الأعلى و 6 وحدات إلى اليمين.

B 5 وحدات إلى اليمين و 6 وحدات إلى الأسفل.

C 5 وحدات إلى اليسار و 6 وحدات إلى الأعلى.

D 5 وحدات إلى اليسار و 6 وحدات إلى الأسفل.

E 5 وحدات إلى الأسفل و 6 وحدات إلى اليسار.

34. **مهمة أدائية** تحاول في مباراة كرة قدم افتراضية على

الكمبيوتر أن تسدد هدفًا. يمكن نمذجة كل تسديدة في

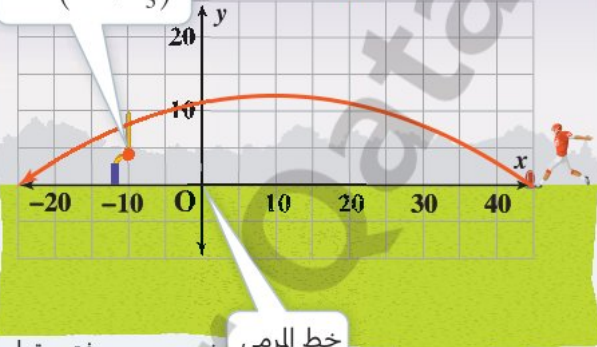
المباراة بإزاحة أفقية للدالة المبتينة أدناه. افترض أن

الإزاحات مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الباردة. يقع

شباك المرمى على بُعد 10 yd وراء خط المرمى.

يقع مركز عارضة
شباك المرمى عند
 $(-10, 3\frac{1}{3})$

$$f(x) = -\frac{1}{100}(x - 10)^2 + 12$$



خط المرمى غير مرسوم وفق مقياس

الجزء A كم تبعد عن خط المرمى الكرة الموضوعة في الشكل أعلاه؟

الجزء B ما أقصى بُعد عن خط المرمى يمكن وضع كرة القدم عنده لتعبر التسديدة العارضة؟

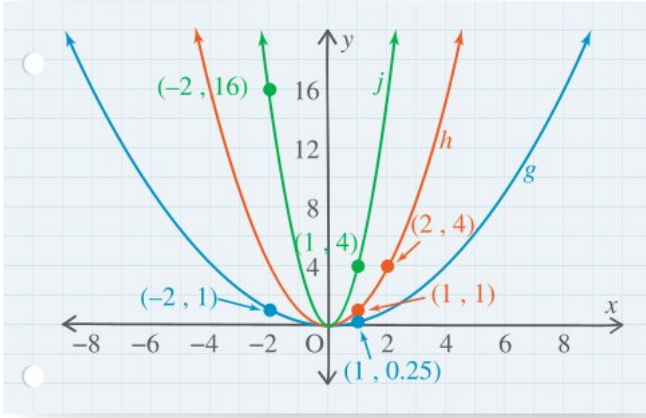
الجزء C اكتب الدالة التي تمثل التسديدة في الجزء B.

4-3

التمدد والتضييق

Stretches and Compressions

انقد وشرح



يبين الشكل المجاور تمثيلات
بيانية لثلاث دوال تربيعية
 g, h, j جميعها لها رأس
 $(0, 0)$. كما يبين نقاطاً
إضافية تقع على كل
تمثيل بياني.

أستطيع... تغيير الدوال لتمديد أو
تضييق تمثيلاتها البيانية.

معياري الدرس

11F.3.1

المصطلحات

reflection	• انعكاس
stretch	• تمدد
compression	• تضيق

A. اكتب دالة تربيعية لكل قطع مكافئ.

B. **تواصل بدقة** ما أوجه الشبه بين هذه الدوال؟ وما أوجه الاختلاف بينها؟

C. باستعمال معرفتك عن تضيق وتمدد الدوال الأخرى وإجاباتك عن الجزأين A و B،
صف كيفية كتابة تمديد أو تضيق رأسي للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

ما التغيير في الدالة الذي ينتج عنه تمديد أو تضيق رأسي أو أفقي
لتمثيلها البياني؟

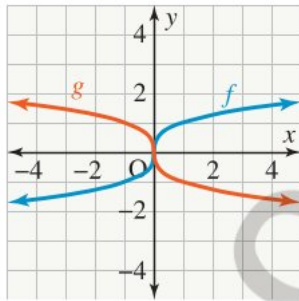
السؤال الأساس

تحليل الانعكاسات حول المحور x

مثال 1

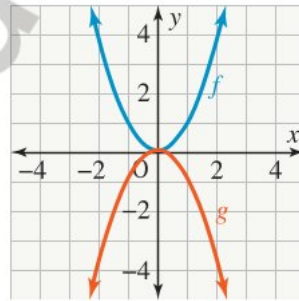
كيف يغير ضرب المخرجة في العدد -1 التمثيل البياني للدالة؟

لتكن الدالة $f(x) = x^2$ عندما $g(x) = -1f(x)$ ، وعندما $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = -\sqrt[3]{x}$$



$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2$$

يتبع في الصفحة التالية

ابحث عن العلاقات

تذكر تحويلات الدوال الأخرى التي درستها. كيف يتغير التمثيل البياني لدالة خطية عند ضرب المخرجة في -1؟

التمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^2$ هو **انعكاس** لتمثيل الدالة $f(x) = x^2$ حول المحور x .
التمثيل البياني للدالة $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ هو انعكاس لتمثيل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ حول المحور x .
بشكل عام، إذا كانت $g(x) = -1 f(x)$ ، فإن التمثيل البياني للدالة g هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة f حول المحور x .

حاول أن تحل! 1. اكتب دالة تمثيلها البياني انعكاس للتمثيل البياني للدالة f حول المحور x .

a. $f(x) = x$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

تحليل التمددات الرأسية للتمثيلات البيانية

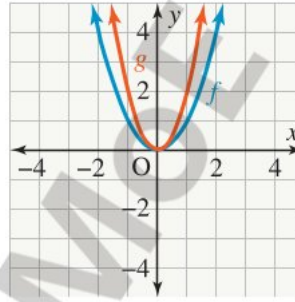
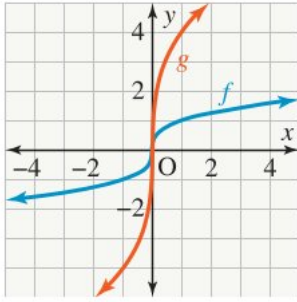
مثال 2

كيف يتغير ضرب المخرجة في عدد ثابت قيمته المطلقة أكبر من 1 على التمثيل البياني للدالة؟

لتكن الدالة $g(x) = k f(x)$ بحيث $|k| > 1$ عندما $f(x) = x^2$ وعندما $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $g(x) = 4\sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^2$ $g(x) = 2x^2$



بزر منطقياً

فكر في الطريقة التي تتغير بها قيم y للدالة لنفس قيم المدخلة عند ضرب المخرجة في عدد ثابت أكبر من العدد 1

التمثيل البياني للدالة $g(x) = 2x^2$ هو **تمدد** رأسي لتمثيل الدالة $f(x) = x^2$ بعيداً عن المحور x .
التمثيل البياني للدالة $g(x) = 4\sqrt[3]{x}$ هو تمدد رأسي لتمثيل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بعيداً عن المحور x .

بشكل عام، إذا كانت $g(x) = k f(x)$ بحيث $|k| > 1$ ، فإن التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f بعيداً عن المحور x .

حاول أن تحل! 2. اكتب دالة تمثيلها البياني تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f ،

بعيداً عن المحور x .

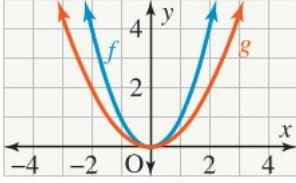
a. $f(x) = x$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

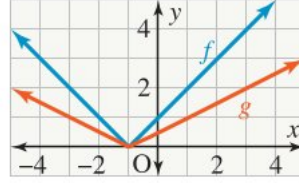
كيف يغير ضرب المخرجة في عدد ثابت قيمته المطلقة تقع بين 0 و 1 على التمثيل البياني للدالة؟

لتكن الدالة $g(x) = kf(x)$ بحيث $0 < |k| < 1$ عندما $f(x) = |x + 1|$ وعندما $f(x) = x^2$.

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$$



$$f(x) = |x + 1| \quad g(x) = \frac{1}{2}|x + 1|$$



التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}|x + 1|$ هو **تضييق** رأسي لتمثيل الدالة $f(x) = |x + 1|$ باتجاه المحور x .

التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو **تضييق** رأسي لتمثيل الدالة $f(x) = x^2$ باتجاه المحور x .

بشكل عام، إذا كانت $g(x) = kf(x)$ بحيث $0 < |k| < 1$ ، يكون التمثيل البياني للدالة g تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة f باتجاه المحور x .

حاول أن تحل! 3. اكتب دالة تمثيلها البياني تضييق رأسي للتمثيل البياني للدالة f ، باتجاه المحور x .

a. $f(x) = \sqrt{x}$

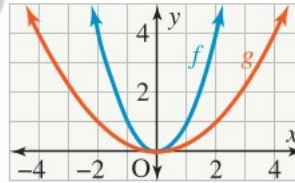
b. $f(x) = |x|$

لماذا يحدث تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة عند ضرب المدخلة في ثابت؟

لتكن الدالة $g(x) = f(kx)$ حيث $0 < k < 1$ عندما $f(x) = x^2$.

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	4	1
-1	1	0.25
0	0	0
1	1	0.25
2	4	1

$$g(-2) = f(-1)$$



$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

عند ضرب مدخلة الدالة $f(x) = x^2$ في العدد الثابت $\frac{1}{2}$ ينتج عنه $g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$. للحصول من الدالة g على قيم y المساوية للقيم من الدالة f عليك إدخال قيم x إلى الدالة g التي تكون أبعد عن المحور y من قيم x التي تدخلها إلى الدالة f . إذن، التمثيل البياني للدالة g هو تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة f بعيدًا عن المحور y .

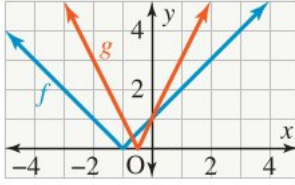
حاول أن تحل! 4. لماذا تُعتبر الدالة $g(x) = 0.2x + 2$ تمددًا أفقيًا للدالة $f(x) = x + 2$ ؟

ابحث عن العلاقات

للحصول على نفس قيم y من الدالة g كما هي في الدالة f ، يجب مضاعفة قيم x التمثيل البياني للدالة g هو تمدد أفقي معاملته 2 للتمثيل البياني للدالة f بعيدًا عن المحور y .

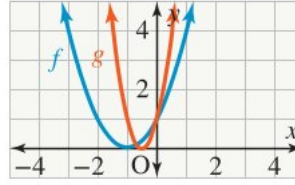
كيف يغير ضرب المدخلة في عدد ثابت له قيمة مطلقة أكبر من 1 على التمثيل البياني للدالة؟

لتكن الدالة $g(x) = f(kx)$ حيث $|k| > 1$ عندما $f(x) = (x + 1)^2$ وعندما $f(x) = |x + 1|$.



$$f(x) = |x + 1|$$

$$g(x) = |2x + 1|$$



$$f(x) = (x + 1)^2$$

$$g(x) = (2x + 1)^2$$

التمثيل البياني للدالة $g(x) = (2x + 1)^2$ هو تضيق أفقي لتمثيل الدالة $f(x) = (x + 1)^2$ باتجاه المحور y . التمثيل البياني للدالة $g(x) = |2x + 1|$ هو تضيق أفقي لتمثيل الدالة $f(x) = |x + 1|$ باتجاه المحور y .

بشكل عام، إذا كانت $g(x) = f(kx)$ حيث $|k| > 1$ ، فإن التمثيل البياني للدالة g هو تضيق أفقي للتمثيل البياني للدالة f باتجاه المحور y .

خطأ شائع

قد تظن أنه مع تزايد k يتمدد التمثيل البياني للدالة $f(kx)$ أفقيًا. ما يحدث في الواقع هو أن التمثيل البياني يتضيق أفقيًا مع تزايد k .

حاول أن تحل! 5. اكتب دالة تمثيلها البياني تضيق أفقي للتمثيل البياني للدالة f ،

باتجاه المحور y .

a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b. $f(x) = x^2$

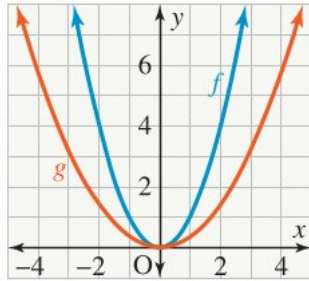
التمدد أو التضييق الأفقي

$$g(x) = f(kx)$$

يحدث تمدد أو تضييق للتمثيل البياني
للدالة f أفقيًا معاملة k

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = (0.6x)^2$$



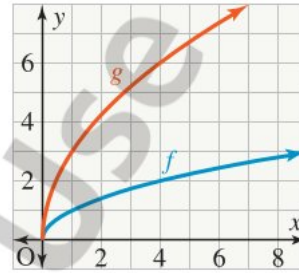
التمدد أو التضييق الرأسي

$$g(x) = kf(x)$$

تمدد أو تضييق للتمثيل البياني
للدالة f رأسيًا معاملة k

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x}$$



لفظيًا

جبريًا

بيانيًا

طبق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حدّد ما إذا كان التمثيل البياني للدالة g
انعكاسًا للتمثيل البياني للدالة f حول المحور x .

5. $f(x) = 4x + 5$

6. $f(x) = -3x^2 + 7$

$g(x) = -4x - 5$

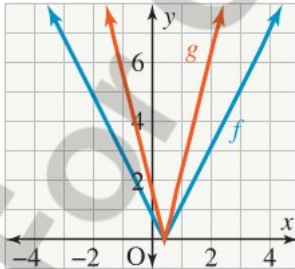
$g(x) = 3x^2 + 7$

في التمرينين 7 و 8، لتكن $k = 8$ ، صف العلاقة بين التمثيل
البياني لكل دالة أدناه والدالة f .

7. $g(x) = f(kx)$

8. $g(x) = kf(x)$

9. حدّد ما إذا استعمل تمدد أو تضييق أفقي لإنشاء التمثيل البياني
للدالة g استنادًا إلى التمثيل البياني للدالة f المبين
في الشكل أدناه.



عبّر عن فهمك

- السؤال الأساس ما التغيير في الدالة الذي ينتج عنه تمدد أو تضييق رأسي أو أفقي لتمثيلها البياني؟
- حلّ الخطأ يقول ماجد إن التمثيل البياني للدالة $g(x) = 0.4f(x)$ هو تضييق أفقي لتمثيل الدالة f . أوجد خطأ ماجد وصحّحه.
- تواصل بدقة ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمدد الرأسي والتمدد الأفقي.
- بزر منطقيًا معطى الدالة f والثابت k ، اكتب الصيغة العامة لتمدد أفقي للدالة. احرص على تضمين كل قيود k .

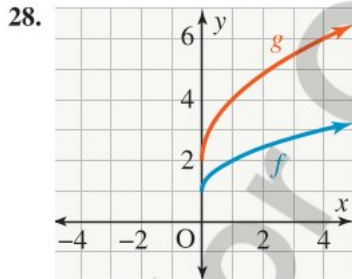
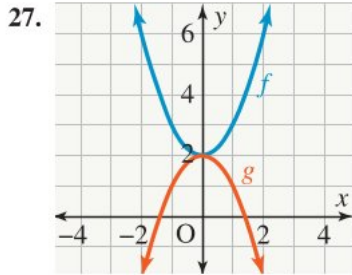
في التمارين 15-18، اكتب دالة تمثيلها البياني انعكاس للتمثيل البياني للدالة f حول المحور x . انظر المثال 1

15. $f(x) = x^2 - 3$ 16. $f(x) = |2x + 5|$
17. $f(x) = -\sqrt{2x}$ 18. $f(x) = -x + 4$

في التمارين 19-26، لكل زوج دوال، حدد ما إذا كان التمثيل البياني للدالة g تمددًا أو تضيقًا رأسيًا أو أفقيًا للتمثيل البياني للدالة f . انظر الأمثلة 2، 3، 4 و 5

19. $f(x) = |x + 3|$ 20. $f(x) = x^2 - 4$
 $g(x) = 2|x + 3|$ $g(x) = (0.5x)^2 - 4$
21. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 22. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
 $g(x) = 0.25\sqrt{x + 1}$ $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$
23. $f(x) = x - 3$ 24. $f(x) = |x - 2|$
 $g(x) = 0.4x - 3$ $g(x) = \frac{2}{3}|x - 2|$
25. $f(x) = x^2 + 2$ 26. $f(x) = \sqrt{x}$
 $g(x) = 6x^2 + 12$ $g(x) = \sqrt{7x}$

في التمرينين 27 و 28، لكل تمثيل بياني، حدد التحويل المطبق على الدالة f الذي ينتج عنه الدالة g ، وحدد قيمة k .



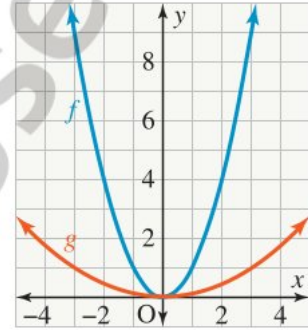
29. التمثيل البياني للدالة g هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x وتمدد رأسي لهذا التمثيل البياني معامله 3، اكتب الدالة g .

10. روابط في الرياضيات هل هناك علاقة بين الميل m

للمستقيم $y = mx + b$ وبين التمددات والتضيقات الرأسية والأفقية للتمثيل البياني لهذا المستقيم؟ وضح إجابتك.

11. ابحث عن العلاقات مثل بيانيًا الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ والدالة $g(x) = \sqrt{2x}$. وضح لماذا يمكنك اعتبار الدالة g إما تمددًا رأسيًا أو تضيقًا أفقيًا للدالة f .

12. فكر وثابر في الحل يبين الشكل أدناه تمثيلين بيانيين لدالتين تربيعيتين $f(x)$ و $g(x) = f(kx)$. ما القيمة التقريبية للثابت k ؟



13. حل الخطأ ببن وصحح خطأ جاسم عند محاولته وصف العلاقة بين التمثيلين البيانيين للدالتين.

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = (4x)^2 + 1$$

لأنه تم ضرب مُدخلة f بعدد ثابت للحصول على g ، إذن فالتمثيل البياني للدالة g هو التمثيل البياني للدالة f بعد تمده أو تضيقه أفقيًا. بما أن العدد الثابت يساوي 4، وهو أكبر من 1، إذن هذا تمدد أفقي.

X

14. مهارات التفكير العليا صف التمثيل البياني للدالة g بدلالة التمثيل البياني للدالة f لكل قيم k .

a. $g(x) = kf(x)$, $0 < |k| < 1$

b. $g(x) = kf(x)$, $1 < |k|$

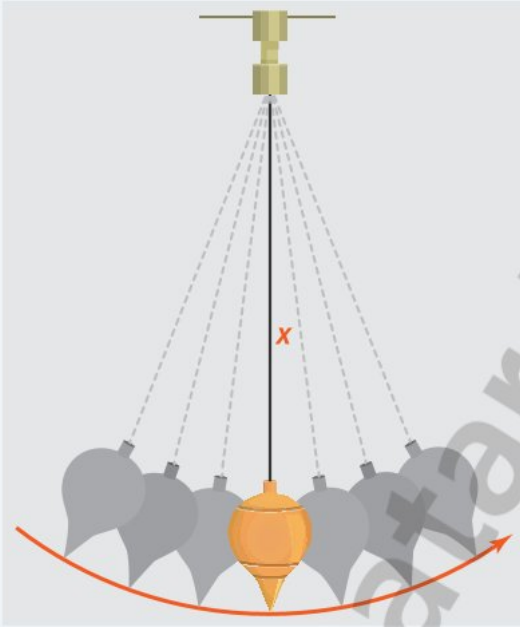
c. $g(x) = f(kx)$, $0 < |k| < 1$

33. ما قاعدة الدالة g بحيث يكون التمثيل البياني للدالة g انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = |2x + 5|$ حول المحور x ؟

34. اختبار SAT/ACT أي دالة مما يلي تمثلها البياني تمتد رأسي للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 4x^2 - 1$ ؟

- (A) $g(x) = 6(4x^2 - 1)$
 (B) $g(x) = 0.6(4x^2 - 1)$
 (C) $g(x) = 4(6x)^2 - 1$
 (D) $g(x) = -(4x^2 - 1)$

35. مهمة أدائية تُنمذج دورة تأرجح بندول، بالنواحي، على الأرض بالدالة $f(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ ، حيث x طول البندول بالأمتار. فيما تُنمذج الدالة $g(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{1.6}}$ دورة تأرجح البندول على القمر.



الجزء A مثل كلتا الدالتين بيانيًا على نفس الشبكة.

الجزء B اكتب بدلالة $f(x)$ دالة تمثل دورة تأرجح البندول على سطح القمر.

الجزء C إذا كانت $g(x) = k f(x)$ ، ما الذي توضحه قيمة k عن كيفية تأرجح البندول على القمر مقارنة بتأرجحه على الأرض؟

الجزء D صف أوجه الاختلاف بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f بدلالة التمددات والتضيقات.

30. فكر وثابر في الحل نمذج الدالة $f(x) = |-x| + 2$ شعار إحدى الشركات. في تصميم جديد، ترغب الشركة في أن يكون الشعار أضيق. ما الطريقتان اللتان يمكن بهما تعديل الدالة f بحيث ينتج التمثيل البياني للدالة الجديدة شعارًا أضيق؟ وضح إجابتك.

31. بزر منطقيًا صيغة المساحة A لمربع ما هي $A = s^2$ ، حيث s طول ضلع المربع.

a. مثل بيانيًا الدالة $A = s^2$ في المستوى الإحداثي. كيف يتغير التمثيل البياني عندما يتضاعف طول ضلع المربع؟ صف التغيرات بدلالة التمدد والتضييق.

b. اكتب دالة تعطي طول ضلع المربع بدلالة مساحته.

c. مثل بيانيًا الدالة الناتجة من الجزء (b).

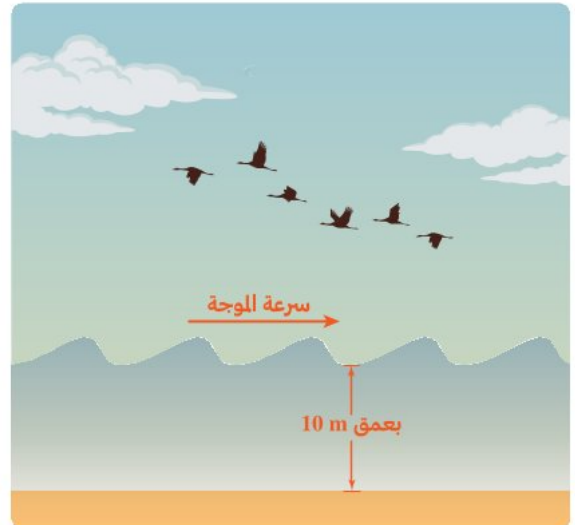
d. كيف يتغير التمثيل البياني الوارد في الجزء (c) عندما يتضاعف طول ضلع المربع؟ صف التغيرات بدلالة التمدد والتضييق.

32. نمذج يمكن تحديد سرعة موجة ما في المحيط بالأمتار لكل ثانية (m/s) باستعمال الدالة $f(x) = 3.13\sqrt{x}$ ، حيث x تمثل العمق بالأمتار للمياه أسفل الموجة.

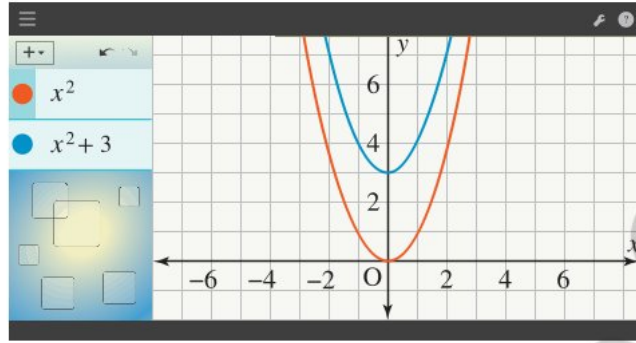
a. مثل الدالة بيانيًا.

b. حدّد المجال والمدى.

c. ما السرعة التي تتحرك بها الأمواج المبينة في الشكل على سطح المياه؟



يبين الشكل أدناه التمثيلين البيانيين للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$.



A. قارن بين المجال والمدى للدالتين.

B. مثل بيانًا دالة أخرى بالصورة $f(x) = x^2 + c$ باستعمال عدد ثابت مختلف مضافًا إلى x^2 .

C. **ابحث عن العلاقات** هل تغيير دالة بإضافة عدد ثابت يغيّر مجال هذه الدالة؟ هل تغيير دالة بإضافة عدد ثابت يغيّر مدى هذه الدالة؟

أستطيع... جمع، طرح، ضرب، وتركيب الدوال.

معايير الدرس

11F.2.1 و 11F.2.2

المصطلحات

• تركيب الدوال

composition of functions

كيف يمكنك توسيع عمليات الجمع والطرح والضرب من الأعداد

إلى الدوال؟

السؤال الأساس

مثال 1

جمع الدوال وطرحها

A. إذا كانت $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = 2x^2 + x + 7$ ، أوجد $f + g$. كيف يمكنك مقارنة مجال

ومدى الدالة $f + g$ مع المجال والمدى لكل من الدالتين f و g ؟

تمامًا كما يمكنك جمع الأعداد بعضها مع بعض، والمقادير وكثيرات الحدود، يمكنك أيضًا جمع الدوال، ناتج جمع دالتين f و g يساوي دالة أخرى تسمى $f + g$. تعرّف الدالة $f + g$ بالصورة $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

$$f(x) + g(x) = (2x - 3) + (2x^2 + x + 7)$$

$$= 2x - 3 + 2x^2 + x + 7$$

$$= 2x^2 + (2x + x) + (-3 + 7)$$

$$= 2x^2 + 3x + 4$$

عند جمع كثيرات الحدود

تجمع الحدود المتشابهة.

$$\text{إذن، } (f + g)(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

لاحظ أن دالة خطية و g دالة تربيعية، كما أن $(f + g)$ دالة تربيعية.

لكل من الدوال f ، g و $(f + g)$ نفس المجال وهو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى للدالة f هو كل الأعداد الحقيقية. يمكنك إيجاد المدى للدالة التربيعية بيانًا أو جبريًا.

المدى للدالة g هو $y \geq 6.875$ والمدى للدالة $f + g$ هو $y \geq 2.875$.

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

في $f + g$ ، يدل رمز الجمع على

جمع دالتين، بينما في

$f(x) + g(x)$ ، يدل رمز الجمع

على جمع عددين.

عمومًا، المجال والمدى لناتج دمج الدوال يمكن أن يكون مختلفًا عن المجال والمدى للدوال الأصلية. إذا كانت قيمة ما غير موجودة في مجال إحدى الدوال، فلن تكون موجودة في مجال ناتج جمع أو ناتج طرح الدوال الأصلية أيضًا.

B. إذا كانت $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = 2x^2 + x + 7$ ، أوجد $g - f$.

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (2x^2 + x + 7) - (2x - 3) && \text{عوض} \\ &= 2x^2 + x + 7 - 2x + 3 && \text{إزالة الأقواس} \\ &= 2x^2 + (x - 2x) + (7 + 3) && \text{اجمع الحدود المتشابهة} \\ &= 2x^2 - x + 10 && \text{بسط} \end{aligned}$$

إذن، $(g - f)(x) = 2x^2 - x + 10$.

المجال للدالة $g - f$ هو كل الأعداد الحقيقية، والمدى للدالة $g - f$ هو $y \geq 9.875$.

1. إذا كانت $f(x) = 15x^2 - 8x + 4$ و $g(x) = 11x + 6$ ، أوجد $f - g$.

خطأ شائع

تذكر أنه عندما تطرح كثيرة حدود، فإن كل حد منها يجب أن يُطرح.

ضرب الدوال

مثال 2

A. إذا كانت $f(x) = 9x + 20$ و $g(x) = x + 5$ ، أوجد $f \cdot g$.

تعرف الدالة $f \cdot g$ كما يلي $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

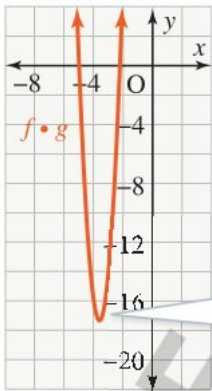
$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (9x + 20)(x + 5) && \text{عوض} \\ &= 9x(x) + 9x(5) + 20(x) + (20)(5) && \text{وزّع} \\ &= 9x^2 + 45x + 20x + 100 && \text{بسط} \\ &= 9x^2 + 65x + 100 && \text{اجمع الحدود المتشابهة} \end{aligned}$$

إذن، $(f \cdot g)(x) = 9x^2 + 65x + 100$.

استعمل البنية

فكر في الخواص التي يمكنك استعمالها لتبسيط ناتج ضرب الدالتين.

B. هل مجال ومدى كل من الدالتين f و g هما نفس مجال ومدى الدالة $f \cdot g$ ؟



بما أن كلا من الدالتين f و g خطية، فإن مجال ومدى كل منهما مجموعة الأعداد الحقيقية. بما أن $f \cdot g$ دالة تربيعية، فإن مجالها هو كل الأعداد الحقيقية ولكن مداها محدودًا.

يقع الرأس عند $(-3.6, -17.4)$ ،
والتمثيل البياني مفتوح إلى الأعلى،
فإن المدى هو $y \geq -17.4$.

مجال الدالة $f \cdot g$ هو نفسه مجال الدالة f ومجال الدالة g ، ولكن مداها يختلف عن مدى f ومدى g .

يتبع في الصفحة التالية

حاول أن تحلّ! 2. أوجد ناتج $f \cdot g$ فيما يلي. حدّد المجال لكل ناتج ضرب.

a. $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 2x - 1$

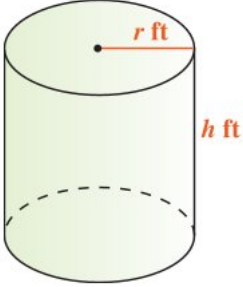
b. $f(x) = 3x^2 - 4$

$g(x) = 2^x$

تطبيق العمليات على الدوال

مثال 3

تطبيق



أسطوانة ارتفاعها يساوي ضعف نصف قطرها. أغلقت القاعدة العلوية والقاعدة السفلية لتصبح حاوية. أوجد دالة تمثّل المساحة السطحية الكلية لهذه الحاوية. ما أبعاد الحاوية إذا كانت مساحتها السطحية الكلية تساوي 120 ft^2 تقريبًا؟

اكتب دالة تمثّل المساحة السطحية للقاعدة العلوية والقاعدة السفلية للحاوية الأسطوانية.

$$f(r) = 2 \times (\text{مساحة القاعدة})$$

$$= 2\pi r^2$$

إذن، مساحة القاعدتين $f(r) = 2\pi r^2$.

اكتب دالة تمثّل المساحة السطحية الجانبية للحاوية الأسطوانية.

تذكر أن المساحة السطحية الجانبية هي مساحة السطح المنحني من الحاوية الأسطوانية. إذا فتحت الحاوية الأسطوانية على طول محور عمودي نحصل على مستطيل.

$$g(r) = (\text{محيط الدائرة}) \times (\text{الارتفاع})$$

$$= h \times 2\pi r$$

$$= (2r)(2\pi r)$$

$$= 4\pi r^2$$

الارتفاع يساوي ضعف طول نصف القطر.

إذن، المساحة الجانبية $g(r) = 4\pi r^2$.

المساحة السطحية الكلية هي ناتج جمع المساحة السطحية للقاعدتين والمساحة السطحية الجانبية. أوجد $f + g$.

$$f(r) + g(r) = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$$

$$= 6\pi r^2$$

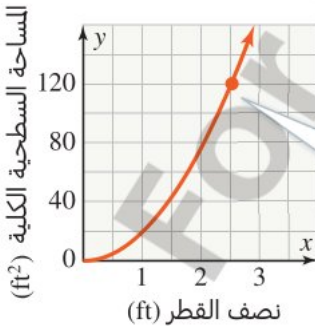
عوّض

بسط

إذن، المساحة السطحية الكلية للحاوية الأسطوانية تساوي $6\pi r^2$.

مثّل بيانيًا الدالة $(f + g)(r) = 6\pi r^2$ لإيجاد قيمة r المناظرة للمساحة الكلية 120 ft^2

$$(f + g)(2.52) \approx 120$$



يتبع في الصفحة التالية

عندما يكون طول نصف القطر يساوي 2.52 ft تقريبًا، فإن المساحة السطحية الكلية للحاوية الأسطوانية تساوي 120 ft² تقريبًا. في هذه الحالة بما أن الارتفاع يساوي ضعف طول نصف القطر فهو يساوي 5.04 ft تقريبًا.

فشر

حاول أن تحل! 3. لنفترض أن القاعدة السفلية فقط هي التي أُغُلِّقت، إذن تشمل المساحة الكلية المساحة السطحية الجانبية والمساحة السطحية للقاعدة السفلية فقط. ما أبعاد الحاوية إذا كانت مساحتها السطحية الكلية تساوي 120 ft² تقريبًا؟

المفهوم الدالة المركبة

الدالة المركبة هي نتيجة تطبيق قاعدة دالة f على قاعدة دالة أخرى g .
ويُشار إلى القاعدة الجديدة بالرمز $(f \circ g)$.

يعرّف تركيب دالتين f و g بالقاعدة: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

العملية $\circ$ التي تكوّن دوال مركبة تُسمى **تركيب الدوال**.

مجال $f \circ g$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية x في مجال g بحيث يكون $g(x)$ في مجال f .

إذن، مجال التركيب يكون نقطة تقاطع مجالات g و $f \circ g$ ، ولكن ليس f .

كتابة قاعدة دالة مركبة

مثال 4

أوجد قاعدة الدالة المركبة $(f \circ g)(x)$.

A. $f(x) = \sqrt{x+7}$, $g(x) = 2x - 5$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 5) \\ &= \sqrt{(2x - 5) + 7} \\ &= \sqrt{2x + 2}\end{aligned}$$

طبّق قاعدة g

طبّق قاعدة f

بسّط

قاعدة $(f \circ g)(x)$ هي $\sqrt{2x+2}$ ، ومجالها هو $x \geq -1$.

B. $f(x) = x^2 + x + 2$, $g(x) = 4 - x$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4 - x) \\ &= (4 - x)^2 + (4 - x) + 2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + 4 - x + 2 \\ &= x^2 - 9x + 22\end{aligned}$$

طبّق قاعدة g

طبّق قاعدة f

فكّك

ادمج الحدود المتشابهة

قاعدة $(f \circ g)(x)$ هي $x^2 - 9x + 22$ ومجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

فكر وثابر في الحل

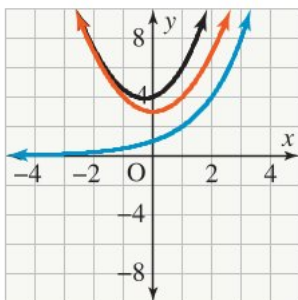
عند إيجاد قاعدة دالة مركبة،
يتم التعويض بقاعدة g في
قاعدة f تمامًا مثل التعويض بقيمة
عن متغير. كيف يمكنك إيجاد
قاعدة $f \circ g$ ؟

حاول أن تحل! 4. أوجد قاعدة كل من $f \circ g$ و $g \circ f$.

a. $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$

b. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 5$

بيانياً



$$f + g$$

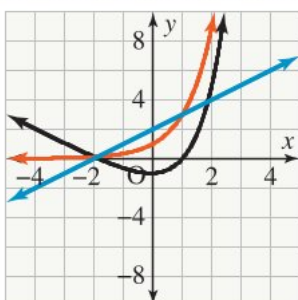
$$f(x) = x^2 + 3$$

$$g(x) = 2^x$$

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 3) + (2^x)$$

$$(f + g)(x) = x^2 + 3 + 2^x$$

جمع الدوال



$$f - g$$

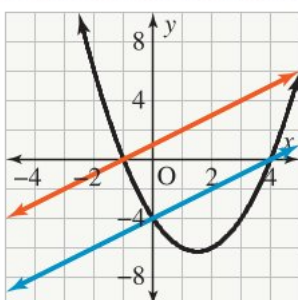
$$f(x) = 3^x$$

$$g(x) = x + 2$$

$$f(x) - g(x) = (3^x) - (x + 2)$$

$$(f - g)(x) = 3^x - x - 2$$

طرح الدوال



$$f \cdot g$$

$$f(x) = x + 1$$

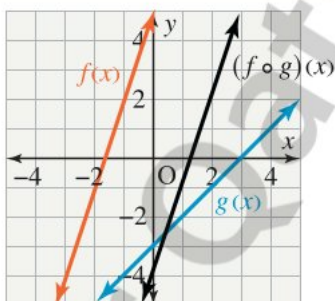
$$g(x) = x - 4$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(x - 4)$$

$$= x^2 - 4x + x - 4$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 - 3x - 4$$

ضرب الدوال



$$(f \circ g)(x)$$

$$f(x) = 3x + 5$$

$$g(x) = x - 3$$

$$(f \circ g)(x) = 3(x - 3) + 5 = 3x - 4$$

$$(g \circ f)(x) = (3x + 5) - 3 = 3x + 2$$

تركيب الدوال

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك توسيع عمليات الجمع والطرح والضرب من الأعداد إلى الدوال؟
2. استعمل البنية ما الخاصية المفيدة عند طرح دالة كثيرة حدود؟
3. المصطلحات عرّف، بمفرداتك الخاصة، الدالة المركبة، وأعط مثلاً عنها.
4. استعمل الأدوات المناسبة صف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني لإيجاد المجال والمدى لدالة هي ناتج دمج دالتين بعمليات الجمع والطرح والضرب.
5. حلّ الخطأ يقول صالح أن الدالتين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 5$ لا يمكن دمجهما بعمليات الجمع والطرح والضرب لعدم وجود حدود متشابهة. أوجد خطأ صالح وصحّحه.

طبّق فهمك

في التمرينين 6 و 7، أوجد $f + g$.

6. $f(x) = 4x + 1$
 $g(x) = 2x^2 - 5x$

7. $f(x) = x^2$
 $g(x) = 3^x$

في التمرينين 8 و 9، أوجد $f - g$.

8. $f(x) = 4x^2$
 $g(x) = x^2 + 2x + 7$

9. $f(x) = 6x + 5$
 $g(x) = \sqrt{2x}$

في التمرينين 10 و 11، أوجد $f \cdot g$.

10. $f(x) = 3x^2 - 2$
 $g(x) = x^2 - 4x$

11. $f(x) = 6x$
 $g(x) = 8^x$

12. إذا كانت $f(x) = 2x^2 + 5$ و $g(x) = -3x$ ، أوجد قاعدة $f(g(x))$.

19. **عقم** هل $g \circ f$ يساوي دائماً $f \circ g$ ؟ برّر إجابتك.

20. **حلّل الخطأ** أوجد حمد قاعدة تركيب الدوال $f \circ g$ للدالتين $f(x) = 3x^2 - x + 2$ و $g(x) = 2x + 1$ كما يلي:

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) \\ &= 3(2x + 1)^2 - 2x + 1 + 2 \\ &= 3(4x^2 + 4x + 1) - 2x + 1 + 2 \\ &= 12x^2 + 12x + 3 - 2x + 1 + 2 \\ &= 12x^2 + 10x + 6 \end{aligned}$$

X

أوجد خطأ حمد وصّحه.

21. **مهارات التفكير العليا** افترض أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرّفتان فقط من خلال الأزواج المرتبة أدناه.

$$f = (6, 7), (5, 2), (4, 1), (10, 8)$$

$$g = (5, 4), (3, 6), (1, 5), (2, 10)$$

أوجد الأزواج المرتبة التي تكون $(f \circ g)(x)$.

22. **روابط في الرياضيات** ما العلاقة بين عملية إيجاد قاعدة تركيب الدوال وترتيب العمليات الحسابية؟

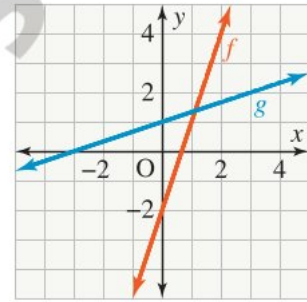
23. **فكر وثابر في الحل** إذا علمت أن الدالة المحايدة هي $f(x) = x$ ، أوجد دالتين $f(x)$ و $g(x)$ ، حيث $f(g(x)) = x$.

13. **روابط في الرياضيات** كيف يتشابه جمع الدوال وجمع كثيرات الحدود، وكيف يختلفان؟

14. **ابحث عن العلاقات** اكتب دالتين يكون للدالة الناتجة عن جمعهما مجال مختلف عن مجال إحدى الدالتين الأصليتين على الأقل.

15. **تعريف** وضح لماذا أحياناً لا يكون مجال ناتج قسمة الدوال هو مجموعة كل الأرقام الحقيقية.

16. **فكر وثابر في الحل** يبيّن الشكل أدناه التمثيلين البيانيين للدالتين f و g . مثّل بيانياً الدالتين $f + g$ و $f \cdot g$.

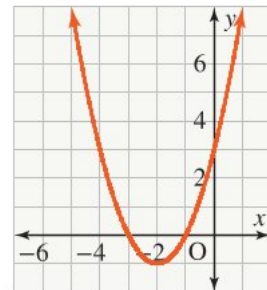


17. **حلّل الخطأ** ضرب أحمد الدالتين $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ و $g(x) = 2x - 1$ بيّن خطأ أحمد وصّحه.

$$\begin{aligned} (x^3 + 3x^2 + 1)(2x - 1) &= x^3(2x) + 3x^2(2x) + 2x \\ &= 2x^4 + 6x^3 + 2x \end{aligned}$$

X

18. **مهارات التفكير العليا** أوجد دالتين ناتج ضربهما الدالة المبيّن تمثيلها البياني أدناه. كيف تقارن مجال ومدى كل من الدالتين مع مجال ومدى الدالة الناتجة؟



في التمرينين 24 و 25، أوجد $f + g$. انظر المثال 1

$$\begin{aligned} 24. f(x) &= 6x^3 + 7x & 25. f(x) &= 3\sqrt{x} \\ g(x) &= x^2 - 3x + 2 & g(x) &= -2x + 4 \end{aligned}$$

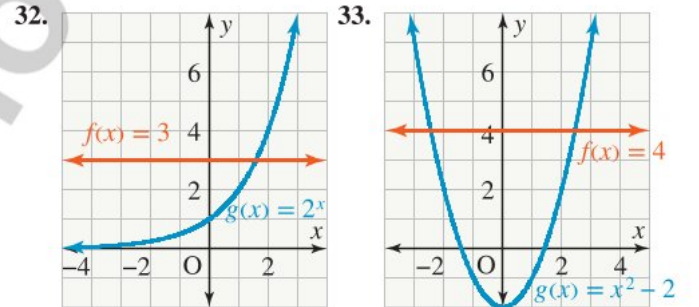
في التمرينين 26 و 27، أوجد $f - g$. انظر المثال 1

$$\begin{aligned} 26. f(x) &= 2x^3 + 2x^2 - 3 & 27. f(x) &= 7^x \\ g(x) &= 8x + 15 & g(x) &= 5x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

في التمارين 28-31، أوجد $f \cdot g$. انظر المثال 2

$$\begin{aligned} 28. f(x) &= 9x - 2 & 29. f(x) &= 3x^2 + 8x + 2 \\ g(x) &= x^2 + 4x - 7 & g(x) &= -6x + 1 \\ 30. f(x) &= 3^x & 31. f(x) &= \sqrt{5x} \\ g(x) &= 5x^2 - 2 & g(x) &= 7x + 2 \end{aligned}$$

في التمرينين 32 و 33، التمثيلان البيانيان للدالتين f و g مبيّنان أدناه. مثل بيانيًا الدالة $f + g$. قارن بين مجال ومدى الدالة $f + g$ مع مجال ومدى كل من الدالتين f و g .



34. يتقاضى بائع زهور، مقابل خدمة التسليم، أجرة تتألف من مبلغ ثابت مقداره QR 40 و QR 8 عن كل كيلومتر يقطعه السائق بين المتجر ومكان التسليم. يدفع البائع للسائق QR 2 لكل كيلومتر يقطعه و QR 20 ثمنًا للوقود المستهلك أثناء الرحلة. إذا كان x يمثل عدد الكيلومترات بين المتجر ومكان التسليم، اكتب دالة تنمذج مقدار الربح الذي يحققه البائع لكل رحلة تسليم. انظر المثال 3

في التمرينين 35 و 36، إذا كانت $f(x) = x^2 + x$

و $g(x) = 9 - 2x$ ، أوجد قاعدة كل دالة مركبة. انظر المثال 4

$$35. f \circ g \quad 36. g \circ f$$

37. **فكر وثابر في الحل** تتقاضى إدارة صالة ألعاب للأطفال

QR 200 ثمنًا للشرع في إقامة حفلة و QR 300 عن كل ساعة من زمن الحفلة. تدفع الإدارة للموظفين الذين ينظمون الحفلة أجرًا مجموع QR 144 للساعة الواحدة.

a. اكتب دالة f تمثل قيمة الإيرادات من حفلة تستمر مدة x ساعة.

b. اكتب دالة g تمثل تكلفة حفلة تستمر مدة x ساعة.

c. اكتب دالة مدمجة تمثل قيمة الربح الذي تحققه إدارة الصالة من حفلة تستمر مدة x ساعة.

38. **بزر منطقيًا** يبيع متجر ملصقات لدعم فريق رياضي محلي.

تنمذج الدالة $h(x) = -80x^2 + 320x + 960$ الإيرادات التي يتوقع المتجر أن يحققها بالريالات في حال باع الملصقات بسعر يفوق السعر الأصلي بمقدار QR 8. يدفع المتجر مبلغ QR 800 ثمنًا للملصقات.

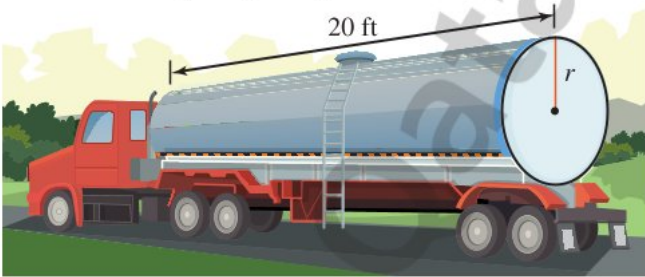
a. اكتب دالة تمثل قيمة المبلغ الذي دفعه المتجر ثمنًا للملصقات. ما نوع هذه الدالة؟

b. ما الدالة التي تنمذج أرباح المتجر من بيع الملصقات؟

c. إذا كان صاحب المتجر قد حقق ربحًا قدره QR 80، فما ثمن الملصق الواحد؟

39. **نمذج** يتم طلاء سطح خزان أسطواني الشكل.

مساحته السطحية الكلية هي مجموع دالتي مساحة.



a. اكتب دالة تمثل المساحة الكلية للقاعدتين الدائريتين بدلالة طول نصف القطر r .

b. اكتب دالة تمثل المساحة الجانبية للخزان الأسطواني بدلالة طول نصف القطر r .

c. ادمج الدالتين من الجزأين (a) و (b) لتحصل على المساحة الكلية للخزان الأسطواني في صورة دالة بدلالة طول نصف القطر r .

40. **نموذج** تنمذج الدالة $C(x) = 20x + 500$ ، تكلفة إنتاج الكمية

x من منتج في مصنع، بالريال القطري. تنمذج الكمية التي

يمكن إنتاجها في h ساعة بالدالة $x(h) = 30h$.

a. أوجد قاعدة $C(x(h))$.

b. أوجد التكلفة عندما h تساوي 8 ساعات.

c. وضح ما الذي تمثله الإجابة في الجزء (b).

41. لتكن الدالتان $f(x) = x + 8$ و $g(x) = x^2 - 9$. أي مما يلي

عبارة صحيحة بالنسبة إلى $f - g$ ؟ اختر كل ما ينطبق.

A. دالة خطية.

B. دالة تربيعية.

C. المجال هو كل الأعداد الحقيقية.

D. المدى هو كل الأعداد الحقيقية.

E. المدى هو $y \geq 17$.

42. **اختبار SAT/ACT** أوجد قيمة $f(g(5))$ إذا كانت

$$g(x) = x^2 + 6 \text{ و } f(x) = 4x + 1$$

(A) 101

(B) 124

(C) 125

(D) 676

(E) 682

43. **اختبار SAT/ACT** الدالة h هي ناتج جمع الدالتين

$$f(x) = 3x + 5 \text{ و } g(x) = 2x^2 - 6x - 2$$

أي مما يلي يمثل h ؟

(A) $h(x) = 5x^2 - x - 2$

(B) $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$

(C) $h(x) = 2x^2 + 9x + 7$

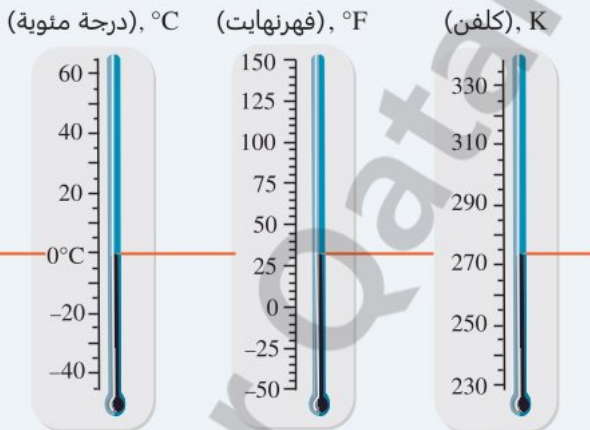
(D) $h(x) = -3x + 3$

44. **مهمة أدائية** درجة الحرارة بالدرجة المئوية أقل بمقدار 32 من

درجة الحرارة بالفهرنهايت، مضروبة في خمسة أضعاف.

وتكون درجة الحرارة بالكلفن عبارة عن عدد الدرجات المئوية

مضافاً لها 273



الجزء A أوجد صيغة تحويل لإيجاد عدد درجات كلفن

بمعلومية درجة الحرارة بالفهرنهايت.

الجزء B باستعمال صيغة التحويل من الجزء A،

أوجد درجة الحرارة بالكلفن عندما تكون درجة الحرارة 27°F،

قرب إلى أقرب عدد كلي إذا لزم الأمر.

يبين الجدولان أدناه بيانات الطلبات المختلفة التي تلقاها مطعمان مختلفان.

المطعم B	
بيتزا عدد (y)	سندويش عدد (x)
8	2
6	5
4	7
2	10

المطعم A	
سندويش عدد (y)	بيتزا عدد (x)
10	2
7	4
5	6
2	8

أستطيع... استعمال الدوال العكسية لحل مسائل.

معايير الدرس

11F.2.2

11F.2.3

المصطلحات

• معكوس الدالة

inverse of a function

- A. مثل بياناً نقاط البيانات الموضحة في الجدولين. استعمل لونين مختلفين لمجموعتي البيانات.
- B. **ابحث عن العلاقات** ما الملاحظة التي يمكنك تكوينها عن التمثيلين البيانيين لبيانات الجدولين أعلاه؟
- C. ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف التي تلاحظها في بيانات الجدولين؟

كيف يمكنك استعمال الدوال العكسية لمساعدتك على حل المسائل؟

السؤال الأساس

مثال 1

فهم الدوال العكسية

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 2x + 6$.

في **معكوس الدالة** يكون ترتيب المدخلات والمخرجات معكوساً لأي دالة. يُكتب عادة معكوس الدالة f في الصورة f^{-1} (يقرأ معكوس f). إذا كانت $f(x) = y$ فإن $f^{-1}(y) = x$ لكل قيم x في مجال f ولكل قيم y في مدى f . الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كانت الدالة الأصلية f واحد لواحد. الدالة f هي أيضاً معكوس الدالة f^{-1} . كوّن جدولاً لكل من الدالة ومعكوسها.

f	
x	y
0	6
1	8
2	10
3	12

بَدِّل بين قيم x وقيم y لإيجاد المعكوس.

f^{-1}	
x	y
6	0
8	1
10	2
12	3

بيانات الدالة العكسية في الجدول خطية. اكتب معادلة تمثل الدالة العكسية.

$$m = \frac{1-0}{8-6} = \frac{1}{2}$$

حدد قيمة الميل ثم استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة المعادلة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

إذن، معكوس الدالة هو $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

حاول أن تحل! 1. ما العلاقة بين ميل f^{-1} وميل f ؟

الاستيعاب المفاهيمي

المصطلحات

تذكر أن دالة واحد لواحد هي دالة يكون فيها كل عنصر في المدى منازلاً لعنصر واحد معيّن في المجال.

ما التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ لكل $x \geq 0$ ؟ ما التمثيل البياني لدالتها العكسية f^{-1} ؟

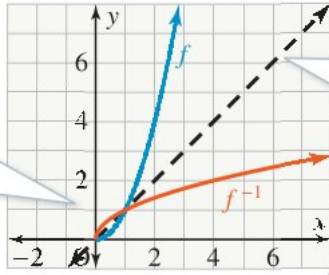
مجال الدالة الأصلية f مقيد بقيم غير سالبة. هذا يعني أن مدى f^{-1} مقيد أيضًا بقيم غير سالبة.

ابدأ بإنشاء جدولتي قيم لتبين نقاطًا على التمثيل البياني للدالة f وعلى التمثيل البياني لمعكوسها، ثم مثل الدالتين بيانيًا.

f	
x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

بذل بين قيم x وقيم y لإيجاد نقاط على التمثيل البياني للمعكوس.

f^{-1}	
x	y
0	0
1	1
4	2
9	3



إذا كان مجال الدالة غير مقيد، فإن المعكوس لا يمكن أن يكون دالة.

لاحظ أنه إذا طويت شبكة المربعات على طول المستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ينطبق التمثيل البياني للدالة الأصلية على التمثيل البياني لمعكوسها.

التمثيل البياني لمعكوس دالة هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأصلية في المستقيم الممثل للمعادلة $y = x$.

حاول أن تحل! 2. مثل كل دالة ومعكوسها بيانيًا.

a. $f(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = 2x^2, x \geq 0$

إيجاد الدالة العكسية جبريًا

مثال 3

كيف يمكنك إيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x + 6$ جبريًا؟

اكتب أولاً الدالة الأصلية في صورة معادلة:

$$y = 2x + 6$$

$$x = 2y + 6$$

$$x - 6 = 2y$$

$$\frac{1}{2}x - 3 = y$$

إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x + 6$ هي $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

بذل بين x و y لإحداث تبديل بين المجال والمدى. ثم حل لإيجاد y .

ابحث عن العلاقات

ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين عملية إيجاد معكوس الدالة جبريًا وعملية إيجاد معكوس الدالة باستعمال جدول؟

حاول أن تحل! 3. أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

a. $f(x) = 3x^2, x \geq 0$

b. $f(x) = x - 7$

تفسير الدوال العكسية

مثال 4

تطبيق

يخطط خالد للطيران مسافة 1 100 mi من المدينة A إلى المدينة B للمشاركة في تنظيم عرض للديناصورات في متحف. يريد أن يدفع ثمن بطاقة سفره باستعمال الأميال التي يربحها من مشترياته ببطاقة الائتمان الخاصة به. ما المبلغ الذي يجب أن ينفقه خالد ليربح عددًا من الأميال يكفي للرحلة من المدينة A إلى المدينة B؟



أوجد الدالة f التي تمثل رصيد خالد من أميال الطيران.

رصيد الأميال: الأميال المهداة + المبلغ المنفق × ميل لكل ريال يدفع

$$f(x) = 0.025x + 500$$

بما أن خالد يربح 1 ميل مقابل كل QR 40 ينفقها
إذن هو يربح 0.025 ميل مقابل كل QR 1 ينفقه.

أوجد معكوس هذه الدالة.

$$y = 0.025x + 500$$

$$x = 0.025y + 500$$

$$x - 500 = 0.025y$$

$$40x - 20\,000 = y$$

بدّل المتغيرين x و y
ثم حل لإيجاد y .

إذن، الدالة العكسية هي: $f^{-1}(x) = 40x - 20\,000$. تمثل الدالة العكسية قيمة ما ينفقه خالد ليربح x من أميال الطيران.

$$f^{-1}(x) = 40x - 20\,000$$

$$f^{-1}(1\,100) = 40(1\,100) - 20\,000$$

$$= 44\,000 - 20\,000$$

$$= 24\,000$$

الدالة العكسية

احسب

عوض 1 100 عن x

بسط

الحل

يجب أن ينفق خالد QR 24 000 ليربح أُميَّالاً تكفيه لتغطية ثمن بطاقة السفر بين المدينتين.

فُتِّر

حاول أن تحلّ! 4. لنفترض أن شركة بطاقة الائتمان غيّرت البرنامج بحيث يربح خالد

1 ميل مقابل كل QR 32 ينفقها.

كيف يغير ذلك من قيمة المبلغ الذي يجب أن ينفقه خالد ليربح العدد الكافي

من الأميال لسفرته؟

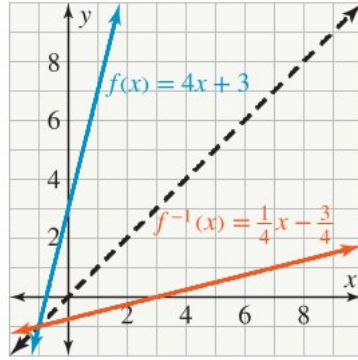
جداول

بذل بين قيم x وقيم y في الجدول.

x	y		x	y
1	7	→	7	1
2	11		11	2
3	15		15	3

بيانيًا

اعكس التمثيل البياني في المستقيم الممثل بالمعادلة $y = x$. إذا لزم الأمر، قيّد مجال الدالة الأصلية ليصبح معكوسها هو أيضًا دالة.



جبريًا

عند كتابة الدالة بصيغة معادلة، بدلالة x و y ، بذل بين المتغيرين ثم حل لتوجد y .

$$y = 4x + 3$$

المعادلة الأصلية

$$x = 4y + 3$$

بذل بين x و y

$$x - 3 = 4y$$

اعزل المتغير y

$$\frac{x-3}{4} = y$$

اقسم الطرفين على العدد 4

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

بسط

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

إذن، الدالة العكسية هي

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك استعمال الدوال

العكسية لمساعدتك على حل المسائل؟

2. حلّ الخطأ يقول ناصر إن التمثيل البياني لمعكوس دالة ما هو انعكاس التمثيل البياني للدالة الأصلية في المحور x . أوجد خطأ ناصر وصّحه.

3. المصطلحات هل كل دالة لها دالة عكسية؟ وضح إجابتك.

4. بزر منطقيًا إذا كان التمثيل البياني لدالة ما يقطع المحور x مرتين، هل يكون لهذه الدالة دالة عكسية؟ وضح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، انسخ وأكمل كل جدول قيم لكل دالة. ثم كوّن جدول قيم بمعكوس الدالة المعطاة.

5. $y = -2x + 3$

x	y
0	■
1	■
2	■
3	■

6. $y = 8x$

x	y
0	■
1	■
2	■
3	■

في التمرينين 7 و 8، اكتب المعكوس لكل دالة.

7. $f(x) = 2x + 11$

8. $f(x) = \sqrt{x}$

في التمرينين 15 و 16، لكل جدول أدناه، كُن جدول قيم للدالة العكسية. انظر المثال 1

15.

x	y
0	11
1	15
2	19
3	23

16.

x	y
0	3
1	4
2	7
3	12

في التمارين 17-20، مثل كل دالة ومعكوسها بيانيًا. انظر المثال 2

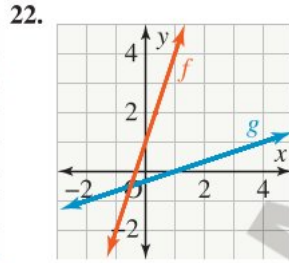
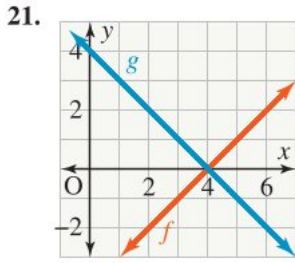
17. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

18. $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$

19. $f(x) = 0.25x^2, x \geq 0$

20. $f(x) = \sqrt{2x}$

في التمرينين 21 و 22، حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين f و g دالة عكسية للأخرى أم لا؟ انظر المثال 2



في التمارين 23-28، أوجد معكوس كل دالة جبريًا. انظر المثال 3

23. $f(x) = -5x - 11$

24. $f(x) = 0.7x + 4$

25. $f(x) = 7x + 12$

26. $f(x) = 9x^2, x \geq 0$

27. $f(x) = x^2 + 7, x \geq 0$

28. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$

29. لدى فاطمة حساب توفير رصيده QR 400. تريد فاطمة توفير QR 5 000 لرحلة سياحية في فصل الصيف، لذا قررت أن تضع 25% من راتبها وتذخره في حسابها في كل مرة تتقاضى فيها الراتب. اكتب دالة عكسية تنمذج الموقف وأوجد قيمة المبلغ الذي يجب أن تحصل عليه فاطمة من عملها لتحقيق هدفها.

9. روابط في الرياضيات ما أوجه الشبه والاختلاف بين معكوس الدالة والعمليات العكسية؟ وضح إجابتك.

10. حلّ الخطأ حاول منصور إيجاد معكوس الدالة $f(x) = -x + 4$. أوجد الخطأ في عمله وصحّحه.

$$\begin{aligned} y &= -x + 4 \\ -x &= y + 4 \\ -x - 4 &= y \\ f^{-1}(x) &= -x - 4 \end{aligned}$$

إذن، الدالة العكسية هي $f^{-1}(x) = -x - 4$

X

11. برّر منطقيًا هل يوجد لكل دالة مما يلي دالة عكسية أم لا؟ إذا كان كذلك اكتب الدالة العكسية، وإذا لم يكن لها دالة عكسية وضح كيف يمكنك تقييد المجال ليصبح لها دالة عكسية.

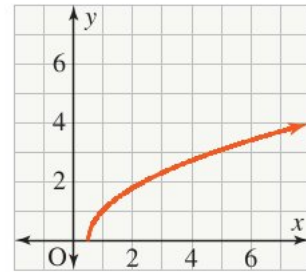
a. $f(x) = 5x$

b. $f(x) = 5x^2$

c. $f(x) = |5x|$

12. ابن الحجج الرياضية هل يمكن لعلاقة ليست دالة أن يكون لها دالة عكسية؟ أعط مثالاً يدعم إجابتك.

13. استعمل البنية ارسم معكوس الدالة التالية بيانيًا. وضح كيف توصلت إلى إجابتك.



14. مهارات التفكير العليا أوجد معكوس الدالة $f(x) = -x$. استعمل التمثيل البياني لهذه الدالة كي تدعم إجابتك.

33. حل كل دالة مما يلي بمعكوسها.

- I. $f(x) = 4x - 8$ A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
 II. $f(x) = 0.25x - 2$ B. $f^{-1}(x) = 0.25x + 2$
 III. $f(x) = 4x^2, x \geq 0$ C. $f^{-1}(x) = 4x + 8$
 IV. $f(x) = 2x^2, x \geq 0$ D. $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

34. اختبار SAT/ACT أي مما يلي هو معكوس الدالة
 $f(x) = -\sqrt{2x}$

- (A) $f^{-1}(x) = 0.5x^2, x \geq 0$
 (B) $f^{-1}(x) = 0.5x^2, x \leq 0$
 (C) $f^{-1}(x) = 0.5x^2$
 (D) $f^{-1}(x) = -0.5x^2$

35. مهمة أدائية يعلن نادٍ رياضي عن عرض جديد للاشتراك العائلي كما هو مبين في الإعلان أدناه.



الجزء A اكتب دالتين، واحدة تعطي التكلفة الإجمالية لاشتراك أول فرد في العائلة وأخرى تعطي التكلفة الإجمالية لاشتراك كل فرد إضافي. اكتب كل دالة y بدلالة x الذي يمثل عدد أشهر الاشتراك في النادي.

الجزء B اكتب دالة دمج تمثل التكلفة الإجمالية لاشتراك عائلة، مكونة من ثلاثة أفراد، اكتب معكوس الدالة.

الجزء C أوجد العدد التقريبي للأشهر التي تبقى فيها عائلة مكونة من ثلاثة أفراد، مشتركة في النادي الرياضي بمبلغ إجمالي QR 5 520.

30. **بزر منطقياً** يُعطى المحيط P لمربع بالصيغة $P = 4s$ حيث s هو طول ضلع المربع. ما معكوس هذه الصيغة؟ ما نوع السؤال الذي قد تجيب عنه باستعمال الدالة العكسية؟

31. **نمذج** يبلغ رصيد جاسم في بطاقة مسبقة الدفع للعبة الجولف المصغّر QR 200.



a. اكتب دالة f تمثل قيمة المبلغ المتبقي في بطاقة الهدية بعد x لعبة.

b. أوجد معكوس الدالة التي كتبها في الجزء (a).

c. ارسم في نفس المستوى الإحداثي التمثيل البياني لكل دالة من الجزأين (a) و (b). سم كل تمثيل بياني.
 d. أي دالة يمكنك أن تستعمل لإيجاد عدد الألعاب التي لعبت عندما بقي في البطاقة QR 40؟ وضح إجابتك.

32. **فكر وثابر في الحل** تُعطى مساحة دائرة بدلالة طول نصف قطرها r بالصيغة: $A = \pi r^2$.

a. وضح القيود على المجال للدالة $A = \pi r^2$ وللدالة العكسية في هذا السياق.

b. اكتب الدالة العكسية للدالة $A = \pi r^2$.

c. استعمل الدالة العكسية التي كتبها في الجزء (b) لإيجاد طول نصف قطر دائرة مساحتها 50.25 in^2 ، قرب إجابتك إلى أقرب إنش.

For Qatar MOE Use Only

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تستعمل بعض الدوال لنمذجة مواقف حياتية ولحل المسائل؟ وما هي الخصائص الأساسية لتمثيلاتها البيانية؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- إزاحة
- تمدد أو تضيق
- دمج الدوال
- تركيب الدوال
- انعكاس

2. عند إضافة عدد ثابت، غير الصفر، إلى مخرجة الدالة أو إلى مدخلتها فإن هذا يؤدي إلى _____ التمثيل البياني لهذه الدالة.

3. إذا كانت $g(x) = -f(x)$ فإن التمثيل البياني للدالة g هو _____ للتمثيل البياني للدالة f في المحور x .

4. عند ضرب مخرجة دالة أو مدخلتها في عدد ثابت، غير الصفر، فإن هذا يؤدي إلى _____ للتمثيل البياني لهذه الدالة.

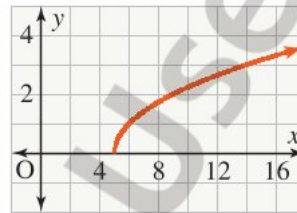
5. _____ هو تطبيق دالة على مخرجة دالة أخرى.

مراجعة سريعة

إذا كنت تعرف البنية الجبرية لدالة ما، فإن باستطاعتك استعمال تمثيلها البياني لتحديد خصائصها الأساسية.

مثال

حدد المجال، المدى، القيمة العظمى، القيمة الصغرى ومحور التناظر للدالة $f(x) = \sqrt{x-5}$.



ممثل الدالة بيانيًا.

- مجال الدالة هو $x \geq 5$.
- مدى الدالة هو $y \geq 0$.
- القيمة الصغرى تساوي 0 عند $x = 5$.
- لا يوجد قيمة عظمى.
- لا يوجد محور تناظر.

تدرب وحلّ مسائل

في التمارين 6-9، ارسم التمثيل البياني لكل دالة وحدد المجال والمدى والقيمة الصغرى والقيمة العظمى ومحور التناظر.

6. $f(x) = x^2 + 6$ 7. $f(x) = \sqrt{x+5}$

8. $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$ 9. $f(x) = \sqrt{x+2} - 8$

10. **ابحث عن العلاقات** دون رسم التمثيل البياني، كيف

يمكنك تحديد المدى للدالة $f(x) = -\sqrt{x+2}$ ؟
وضّح إجابتك.

11. **نمذج** تنمذج الدالة $h(t) = -16t^2 + 48t + 80$ ارتفاع كرة ألقيت من على سطح بناء حيث تمثل $h(t)$ هذا الارتفاع بالقدم بعد t ثانية.

تنمذج الدالة $g(t) = -16t^2 + 98t + 20$ ارتفاع كرة أخرى ضربت بعصا من على تلة صغيرة. أوجد القيمة العظمى ومحور التناظر لكل دالة.

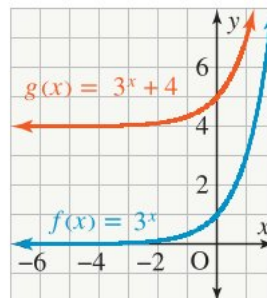
مراجعة سريعة

التمثيل البياني للدالة $g(x) = f(x) + k$ هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار k وحدة إلى الأعلى إذا كانت $k > 0$ ومقدار k وحدة إلى الأسفل إذا كانت $k < 0$.

التمثيل البياني للدالة $g(x) = f(x - h)$ هو إزاحة لتمثيل البياني للدالة f بمقدار h وحدة إلى اليمين إذا كانت $h > 0$ ومقدار h وحدة إلى اليسار إذا كانت $h < 0$.

مثال

لتكن $f(x) = 3^x$ ، كيف تقارن بين التمثيلين البيانيين للدالتين f و g إذا كانت $g(x) = f(x) + 4$ ؟



ممثل الدالتين بيانيًا.

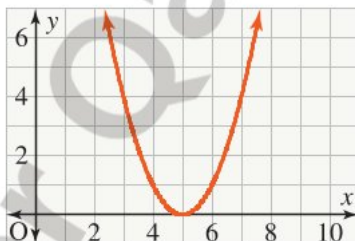
التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى.

تدرب وحلّ مسائل

في التمرينين 12 و 13، ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

12. $g(x) = |x-3|$ 13. $g(x) = x^2 + 5$

14. بيّن التمثيل البياني أدناه إزاحة للدالة $f(x) = x^2$.
اكتب دالة g تنمذج هذا التمثيل البياني.



15. **بزر منطقيًا** لتكن $f(x) = -3$ و $g(x) = f(x-h) + k$.
صف كيف يؤثر الثابتان h و k على التمثيل البياني للدالة g .

تدرب وحلّ مسائل

في التمرينين 16 و 17، اكتب دالة يكون تمثيلها البياني انعكاس حول المحور x للدالة المعطاة f .

16. $f(x) = x^2 + 5$

17. $f(x) = |2x - 1|$

في التمارين 18-21، اذكر لكل زوج من الدوال أدناه ما إذا كان التمثيل البياني للدالة g تضييق أو تمدد رأسي أو أفقي لتمثيل الدالة f .

18. $f(x) = |2x - 5|$

19. $f(x) = x^2 + 9$

$g(x) = 2|2x - 5|$

$g(x) = 0.25x^2 + 9$

20. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

21. $f(x) = 2x - 9$

$g(x) = \sqrt{4x - 4}$

$g(x) = 6x - 27$

22. **ابحث عن العلاقات** مثل بيانيًا الدالتين $f(x) = |x - 3|$ و $g(x) = 3|x - 3|$. هل التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي أو تضييق أفقي لتمثيل الدالة f ؟ وضح إجابتك.

23. **فكر وثابر في الحل** يستعمل مصمم قمصان الدالة $f(x) = x^2 - 3$ لخياطة شكل قطع مكافئ على قميص. ما الطريقتان اللتان يمكن بهما تغيير الدالة لتوسيع القطع المكافئ؟ وضح إجابتك.

مراجعة سريعة

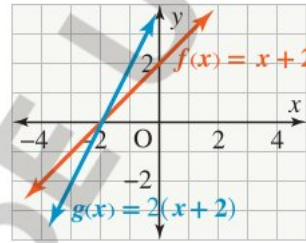
التمثيل البياني للدالة $g(x) = kf(x)$ هو تمدد لتمثيل الدالة f بعيدًا عن المحور x عندما $|k| > 1$ ، وهو تضييق باتجاه المحور x عندما $0 < |k| < 1$.

التمثيل البياني للدالة $g(x) = f(kx)$ هو تمدد لتمثيل الدالة f بعيدًا عن المحور y عندما $0 < |k| < 1$ ، وهو تضييق باتجاه المحور y عندما $|k| > 1$.

مثال

لتكن $f(x) = x + 2$. كيف تقارن بين التمثيل البياني للدالة $g = 2f(x)$ وتمثيل الدالة f ؟

مثل الدالتين بيانيًا.



التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f بعيدًا عن المحور x بمعامل مقداره 2.

مراجعة سريعة

يمكنك جمع وطرح وضرب وتركيب الدوال لتكوين دوال جديدة.

مثال

إذا كانت $f(x) = 3x - 5$ و $g(x) = 4x - 1$.

A. أوجد $f \circ g$ وحدد مجال ومدى الدالة $f \circ g$.

استعمل خاصية التوزيع أثناء ضرب كثيرات الحدود.

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$= (3x - 5) \times (4x - 1)$$

عوض

$$= 3x(4x) + 3x(-1) - 5(4x) - 5(-1)$$

وزّع

$$= 12x^2 - 3x - 20x + 5$$

إزالة الأقواس

$$= 12x^2 - 23x + 5$$

بسط

مجال ومدى الدالتين الأصليتين كل الأعداد الحقيقية. مجال

الدالة $f \circ g$ كل الأعداد الحقيقية. مدى الدالة $f \circ g$ كل الأعداد

الحقيقية التي هي أكبر من أو تساوي 6.02 - تقريبًا.

B. أوجد قاعدة $(f \circ g)(x)$.

$$f(g(x)) = g(x)$$

$$= f(4x - 1)$$

$$= 3(4x - 1) - 5$$

$$= 12x - 3 - 5$$

$$= 12x - 8$$

تدرب وحل مسائل

في التمارين 24-27، أوجد $f + g$.

24. $f(x) = 3x^2 + 5x$

25. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$g(x) = 2x - 8$

$g(x) = x^2 - 8x - 3$

26. $f(x) = \sqrt{2x}$

27. $f(x) = 4^x - 1$

$g(x) = 4 - x$

$g(x) = 2x^2 + 5x - 3$

في التمارين 28-31، أوجد $f \circ g$.

28. $f(x) = 5x^2 + 2x$

29. $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$g(x) = 3x - 1$

$g(x) = x - 4$

30. $f(x) = \sqrt{3x}$

31. $f(x) = 2^x$

$g(x) = 6x - 5$

$g(x) = 4x^2 - 3x - 8$

في التمرينين 32 و 33، أوجد قاعدة $f \circ g$.

32. $f(x) = 5x$

33. $f(x) = -x + 6$

$g(x) = 3x - 1$

$g(x) = 2x + 1$

34. **ابحث عن العلاقات** اكتب دالتين يكون للدالة الناتجة عن

ضربهما مدى مختلف عن مدى إحدى الدالتين الأصليتين

على الأقل.

35. **فكر وتأمل في الحل** حدّدت شركة ملابس أن دالة الإيرادات

لمبيع x ألف من القبعات هي $R(x) = -5x^2 + 23x$.

ودالة تكاليف إنتاج هذه القبعات هي $C(x) = 2x + 9$.

اكتب دالة تمثّل الربح لمبيع x ألف من القبعات، ثم حدّد

ربح شركة الملابس من مبيع 3 000 قبعة.

تدرب وحل مسائل

لكل جدول أدناه، أنشئ جدول قيم للدالة العكسية.

36.

x	y
0	3
1	5
2	8
3	11

37.

x	y
0	2
1	4
2	8
3	16

في التمارين 38-41، أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة.

38. $f(x) = 4x - 7$

39. $f(x) = 3x^2 - 8, x \geq 0$

40. $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

41. $f(x) = 5 + 2x$

42. **حل الخطأ** أوجد خطأ محمود وصححه عند إيجاد الدالة

العكسية للدالة $f(x) = 2x^2 + 3$.

$$y = 2x^2 + 3$$

$$x = 2y^2 + 3$$

$$x + 3 = 2y^2$$

$$\frac{x+3}{2} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{2}} = y$$

إذن الدالة العكسية للدالة: $f(x) = 2x^2 + 3$

$$f^{-1} = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

43. **بزر منطقياً** تُحسب المساحة السطحية A لمكعبباستعمال المعادلة: $A = 6s^2$ ، حيث s طول ضلع المكعب.أوجد معكوس $A = 6s^2$. ما نوع السؤال الذي قد تجيب عنه

باستعمال الدالة العكسية؟

مراجعة سريعة

معكوس دالة ما يعكس مدخلات ومخرجات هذه الدالة. تكون للدالة f دالة عكسية f^{-1} فقط إذا كانت الدالة الأصلية دالة واحد لواحد.لتمثيل الدالة العكسية للدالة f بيانياً بدّل بين قيم x و y في الجدول، أو اعكس التمثيل البياني للدالة f في المستقيم $y = x$.

للحصول على معادلة عكسية بدّل بين قيم x و y ثم حل المعادلة لإيجاد y.

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = 3x - 8$.

اكتب الدالة الأصلية في صورة معادلة

$$y = 3x - 8$$

بدّل بين قيم x و y

$$x = 3y - 8$$

أضف 8 إلى طرفي المعادلة

$$x + 8 = 3y - 8 + 8$$

بسط

$$x + 8 = 3y$$

اقسم طرفي المعادلة على 3

$$\frac{x+8}{3} = \frac{3y}{3}$$

بسط

$$\frac{x+8}{3} = y$$

إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x) = 3x - 8$ هي:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+8}{3}$$

السؤال الأساس

كيف تستعمل الإحصاء لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

نظرة عامة على الوحدة

5-1 Analyzing Data Displays

5-2 Comparing Data Sets

5-3 Interpreting the Shapes of Data Displays

5-4 Standard Deviation

5-5 Two Way Frequency Tables

5-1 تحليل تمثيل البيانات

5-2 مقارنة مجموعات البيانات

5-3 تفسير أشكال تمثيل البيانات

5-4 الانحراف المعياري

5-5 الجداول التكرارية المزدوجة

Topic Vocabulary

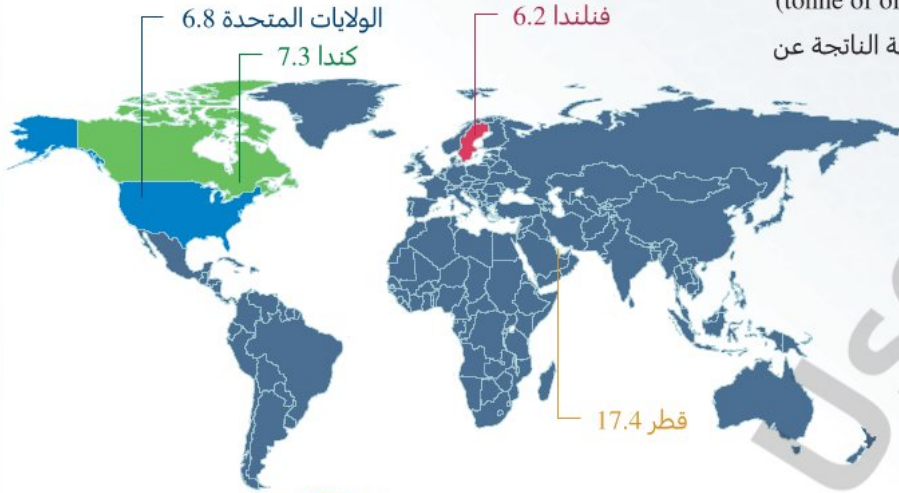
- normal distribution
- standard deviation
- variance
- joint frequency
- marginal frequency
- joint relative frequency
- marginal relative frequency
- conditional relative frequency

مصطلحات الوحدة

- توزيع طبيعي
- انحراف معياري
- تباين
- تكرار مزدوج
- تكرار هامشي
- تكرار نسبي مزدوج
- تكرار نسبي هامشي
- تكرار نسبي مشروط

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

المعدل السنوي لاستهلاك الفرد من الطاقة في بعض الدول إحصاءات (2017)



طن النفط المكافئ، أو TOE، (tonne of oil equivalent) وحدة لقياس الطاقة، ويُعرف بأنه كمية الطاقة الناتجة عن احتراق طن واحد من النفط الخام.



تستهلك أجهزة التكييف في دولة قطر

70% تقريباً من الطاقة الكهربائية

المنزلية، وذلك حسب إحصائيات شركة الكهرباء لعام 2017



لقد وُفّر النفط والغاز الطبيعي والفحم معظم الطاقة المستهلكة في الولايات المتحدة الأمريكية على مدى أكثر من 100 عام.

في العام 2013، تم توليد 3% تقريباً من الطاقة الكهربائية في العالم من الرياح. على الصعيد العالمي، يتزايد مقدار الطاقة التي يتم توليدها من الرياح **بمعدل 17% تقريباً كل عام.**



مهمّتك: إجراء دراسة مسحية عن استهلاك الطاقة

ستقوم أنت وزملاؤك بإجراء دراسة مسحية لاستطلاع آراء مجموعتين من الطلاب في مدرستك حول استهلاك الطاقة وتوفيرها. اجمع البيانات ومثلها بجداول وتمثيلات بيانية مناسبة، ثم استعمل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لمقارنة وتحليل بيانات المجموعتين. عمّم النتائج التي توصلت إليها وحاول القيام بحملة توعية في المدرسة تسلّط فيها الضوء على بعض الإجراءات التي يمكن اتخاذها لترشيد استهلاك الطاقة.



مطلوب خبراء في دراسات السوق!

تصمم شركة لتصنيع الألبسة خط إنتاج جديدًا للقمصان القطنية. انظر حولك في الصف واجمع البيانات المتعلقة بألوان حقائب الظهر لزملائك. إذا كانت حقيبة أحد الطلاب متعددة الألوان، اختر اللون السائد.

A. وضح سبب اختيار الطريقة التي استعملتها لتنظيم البيانات.

B. كيف يمكن للشركة استعمال هذه البيانات في رأيك؟

C. **استعمل الأدوات المناسبة** كيف ستمثل هذه البيانات لعرضها؟

أستطيع... فهم البيانات وتنظيمها باستعمال التمثيل بالنقاط والمدرج التكراري ومخطط الصندوق وطرفيه.

معياري الدرس

11F.6.1

ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من الطرائق المختلفة لعرض البيانات عن مجموعات البيانات؟

السؤال الأساس

مثال 1

تمثيل وتفسير البيانات باستعمال تمثيل بالنقاط

تطبيق



ينوي خالد شراء سيارة جديدة معدل استهلاكها للوقود مبيتين في الشكل المجاور. لتحديد ما إذا كان معدل استهلاك هذه السيارة من الوقود جيدًا أم لا، جمع خالد بيانات عن الكفاءة التقديرية لاستهلاك عدد من السيارات للوقود (داخل المدينة)، بوحدة الميل لكل جالون (mpg). ما وجه المقارنة بين كفاءة استهلاك السيارة التي ينوي خالد شراءها للوقود وكفاءة استهلاك السيارات الأخرى التي أجرى بحثًا عنها للوقود؟

25	45	26	35	31	26	30	28
29	26	28	26	27	27	28	28

يريد خالد المقارنة بين قيم منفردة، لذا يعدّ التمثيل بالنقاط طريقة جيدة لعرض هذه المعلومة.

أنشئ تمثيلًا بالنقاط لهذه البيانات من خلال رسم خط الأعداد الذي يمثل مدى البيانات أولاً. ثم عيّن كل قيمة واردة في الجدول كنقطة فوق خط الأعداد.

ابن الحجج الرياضية

لماذا يعدّ التمثيل بالنقاط طريقة جيدة لعرض القيم المنفردة؟ ما نوع البيانات التي توصفها الطريقتين الآخرين لعرض البيانات؟

تعتبر هذه البيانات عنقودية لأنها قريبة من بعضها البعض.

تعدّ نقطة البيانات الواقعة عند العدد 45 قيمة متطرفة لأنها بعيدة عن معظم قيم البيانات الأخرى في المجموعة.



معدل استهلاك الوقود داخل المدينة (mpg)

استعمل التمثيل بالنقاط لتفسير هذه البيانات.

يبين التمثيل بالنقاط أن معظم القيم عنقودية بين العددين 25 و 28

إذن، السيارة التي ينوي خالد شراءها كفاءة استهلاكها للوقود هي نفس كفاءة استهلاك السيارات المماثلة لها للوقود داخل المدينة.

حاول أن تحل! 1. ما الذي يمكن حسابه بالنسبة للقيمة المتطرفة؟

ينوي فريق تسويق إطلاق حملة إعلانية لمنتج جديد موجه إلى الراشدين الذين تتراوح أعمارهم بين 25 و 34 سنة. وقد أجرى الفريق بحثًا عن فئة أعمار الأشخاص الذين يشاهدون برنامجًا تلفزيونيًا معينًا لتقرير ما إذا كان عليهم الإعلان عن المنتج أثناء عرض هذا البرنامج أم لا. تظهر البيانات أعمار عينة عشوائية من 30 مشاهد أثناء عرض هذا البرنامج. بناءً على النتائج المبينة في الجدول أدناه، هل يجب على أعضاء فريق التسويق إطلاق حملتهم الإعلانية أثناء عرض هذا البرنامج التلفزيوني أم لا؟

14	21	22	17	24	20	26	15	20	22	14	24	26	15	17
21	32	30	16	31	25	25	19	16	21	37	17	20	15	16

تُستعمل المدرجات التكرارية غالبًا لتمثيل البيانات التي هي عبارة عن فئات أو فترات عديدة. لإنشاء مدرج تكراري، حدّد فترة مناسبة للبيانات أولاً. أنشئ جدولاً تكراريًا لتنظيم هذه البيانات.

الفئة العمرية	التكرار
0-4	
5-9	
10-14	II
15-19	III III
20-24	III III
25-29	IIII
30-34	III
35-39	I
40-44	

تذكّر أن الفترات يجب أن تكون متنسقة.

استعمل الجدول التكراري لإنشاء مدرج تكراري.



استعمل المدرج التكراري لتفسير البيانات.

يبين المدرج التكراري أن أقل من 25% من المشاهدين تتراوح أعمارهم بين 25 و 34 سنة. بناءً على هذه المعلومة، يجب على فريق التسويق عدم إطلاق حملته الإعلانية أثناء عرض هذا البرنامج التلفزيوني.

خطأ شائع

حاذر الخطأ في تفسير الفترات. كل فترة تمثل 5 قيم ممكنة. بما أن الفترات تبدأ عند العدد 0، فإن هذه الفترات هي: 0-4, 5-9, 10-14 وهكذا.

حاول أن تحلّ! 2. ما الفئة العمرية التي تتطابق مع المنتجات التي يعلن عنها أثناء عرض هذا البرنامج التلفزيوني؟ وضح إجابتك.

نظم الطلاب في مدرسة ثانوية محلية حملة لجمع التبرعات من أجل جمعية خيرية. أعلن رئيس مجلس الطلاب في المدرسة، بشير، أن أكثر من نصف الطلاب تبرع كل منهم بأكثر من QR 200. يبين الجدول أدناه المبالغ المالية التي تبرعت بها عينة مكونة من 24 طالباً. هل تدعم هذه البيانات ادعاء بشير؟

QR 236	QR 168	QR 100	QR 152	QR 180	QR 216	QR 272	QR 128
QR 104	QR 216	QR 200	QR 180	QR 168	QR 192	QR 200	QR 100
QR 180	QR 144	QR 220	QR 108	QR 124	QR 128	QR 196	QR 216

بما أن ادعاء بشير يتعلق بتوزيع القيم، فإن مخطط الصندوق وطرفيه يمكن أن يبين المعلومات المطلوبة.

يبين مخطط الصندوق وطرفيه كيفية توزيع البيانات باستعمال ملخص الأعداد الخمسة.

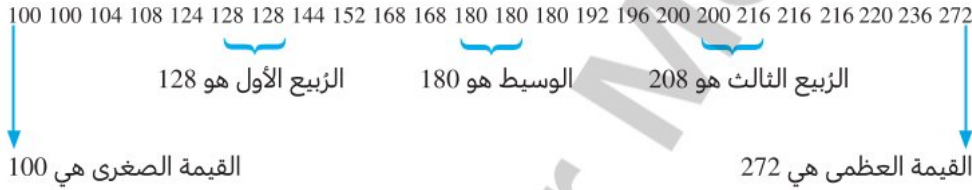
القيمة الصغرى هي أصغر قيمة في المجموعة.

القيمة العظمى هي أكبر قيمة في المجموعة.

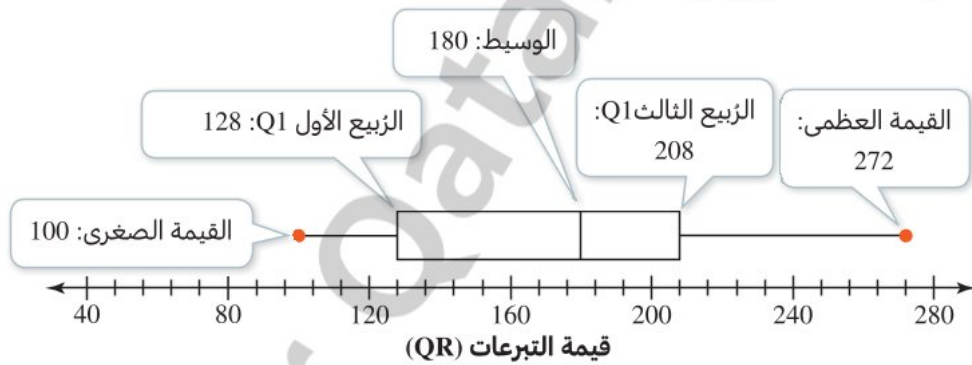
الوسيط هو العدد الذي في منتصف المجموعة عندما تكون الأعداد مرتبة من الأصغر إلى الأكبر.

الزبيغ الأول هو العدد الذي في المنتصف بين القيمة الصغرى والوسيط. الزبيغ الثالث هو العدد الذي في المنتصف بين الوسيط والقيمة العظمى.

رتب البيانات من الأصغر إلى الأكبر لتحديد كل من هذه القيم.



أنشئ مخطط الصندوق وطرفيه لتمثيل البيانات.



استعمل مخطط الصندوق وطرفيه لتفسير البيانات. يبين مخطط الصندوق وطرفيه أن الوسيط للمبالغ المجموعة، بناءً على العينة، هو QR 180. بما أن نصف عدد الطلاب تبرع بمبلغ مقداره QR 180 أو أقل، فإن البيانات لا تدعم ادعاء بشير.

حاول أن تحل! 3. افترض أن بشير قال إن 25% من الطلاب تبرعوا بأكثر من مبلغ معين.

ما مقدار ذلك المبلغ؟ وضح إجابتك.

المصطلحات

المدى الزبيغي IQR يمثل 50% من البيانات الواقعة في منتصف البيانات. لإيجاد المدى الزبيغي، اطح الزبيغ الأول Q1 من الزبيغ الثالث Q3. المدى الزبيغي في هذا المثال يساوي 208 - 128 أي 80

سجل فريق طلال 68 نقطة في مسابقة للمعلومات العامة. يوضح الجدول أدناه مجموع نقاط الفرق المنافسة الأخرى.

66	89	81	75
90	79	82	68
80	82	65	80
81	66	81	83

A. يريد طلال معرفة المركز الذي احتله فريقه. لمعرفة ذلك، هل على طلال استعمال التمثيل بالنقاط، أم المدرج التكراري، أم مخطط الصندوق وطرفيه؟

قارن بين خصائص الطرائق الثلاث لعرض البيانات.

- في التمثيل بالنقاط، ثمة نقطة لكل قيمة من قيم البيانات. كما أن هذه الطريقة لتمثيل البيانات توضح القيم العنقودية والقيم المتطرفة.
 - في المدرج التكراري، تتجمع قيم البيانات ضمن فترات أو فئات. لا يبين المدرج التكراري القيم المنفردة لكنه يوضح اتجاهات البيانات.
 - يبين مخطط الصندوق وطرفيه النزعة المركزية لمجموعة البيانات وتشتتها، لكنه لا يظهر البيانات المنفردة، إلا أنه يلخص البيانات باستعمال 5 معلومات أساسية.
- بما أن طلال مهتم بعرض مجموع نقاط كل فريق على حدة، فإن التمثيل بالنقاط هو الطريقة الأفضل لعرض البيانات.

B. ما المركز الذي احتله فريق طلال عند انتهاء المسابقة؟

أنشئ تمثيلاً بالنقاط وحلّه.



نتائج مسابقة المعلومات العامة

يبين التمثيل بالنقاط أن مجموع نقاط فريق طلال أقل بكثير من مجموع نقاط الفرق الأخرى، فقد حققت 3 فرق فقط نقاطاً أقل مما حقق فريق طلال، وبالتالي فقط احتل فريق طلال المركز الثالث عشر من أصل 16.

حاول أن تحل! 4. إذا أراد طلال معرفة نسبة الفرق التي حققت نقاطاً أكثر من فريقه، فأى طريقة لعرض البيانات يجب أن يستعمل؟ وضح إجابتك.

ابن الحجج الرياضية

ما الخيار الذي قد يكون خياراً جيداً لعرض البيانات إذا أراد طلال مقارنة نتيجة فريقه بالوسيط؟

مخطط الصندوق وطرفيه

يبين مخطط الصندوق وطرفيه مقاييس النزعة المركزية (الوسيط) وانتشار توزيع البيانات. يوفّر مخطط الصندوق وطرفيه المعلومات التالية: القيمة الصغرى، والقيمة العظمى، والوسيط، والزّبيع الأول، والزّبيع الثالث.

المدرج التكراري

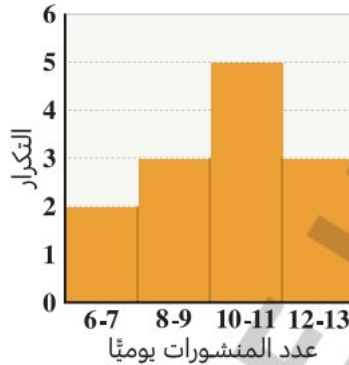
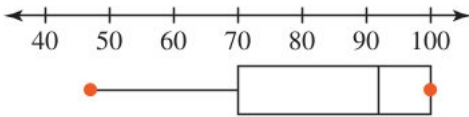
لا يعرض المدرج التكراري قيم البيانات المنفردة، لكنه يظهر شكل البيانات بوضوح، حيث تنتظم البيانات ضمن فترات. كما أن الأعمدة تبين التكرارات أو عدد مرات تكرار إحدى قيم البيانات في فترة معينة.

التمثيل بالنقاط

يعرض التمثيل بالنقاط كل قيم البيانات، ويبين القيم العنقودية والفجوات والقيم المتطرفة في مجموعة البيانات.

لفظيًا

بيانيًا



طبّق فهمك

في التمارين 6-11، استعمل مجموعة البيانات أدناه.

7	5	8	15	4
9	10	1	12	8
13	7	11	8	10

6. أنشئ تمثيلًا بالنقاط لهذه البيانات. ما المعلومات التي تكشفها طريقة العرض هذه عن مجموعة البيانات؟

7. أنشئ مدرجًا تكراريًا لهذه البيانات. ما المعلومات التي تكشفها طريقة العرض هذه عن مجموعة البيانات؟

8. أنشئ مخطط الصندوق وطرفيه لهذه البيانات. ما المعلومات التي تكشفها طريقة العرض هذه عن مجموعة البيانات؟

في التمارين 9-11، حدّد الطريقة الأفضل لعرض مجموعة البيانات أعلاه بحيث تتمكن من الإجابة عن السؤال. برّر إجابتك.

9. ما وسيط مجموعة البيانات؟

10. ما عدد قيم البيانات الأكبر من 7؟

11. ما عدد قيم البيانات التي تقع بين العددين 10 و 12؟

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من الطرائق المختلفة لعرض البيانات عن مجموعات البيانات؟

2. تواصل بدقة ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيل بالنقاط ومخطط الصندوق وطرفيه؟

3. استعمل الأدوات المناسبة إذا أردت أن تعرف الفترات التي تتجمع فيها قيم البيانات، فأى طريقة لعرض البيانات يجب أن تختار؟ وضح إجابتك.

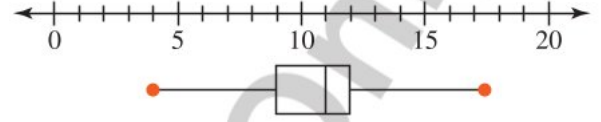
4. حلّ الخطأ تقول هيا إن بالإمكان تحديد الوسيط الحسابي لمجموعة بيانات من خلال مخطط الصندوق وطرفيه الذي يمثلها.

هل هيا على صواب؟ وضح تبريرك المنطقي.

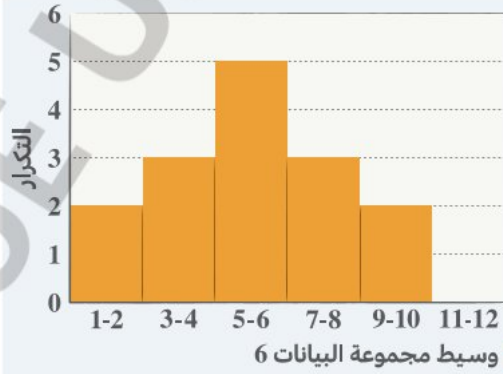
5. استعمل البنية هل يمكنك معرفة القيمتين الصغرى والعظمى لمجموعة بيانات بمجرد النظر إلى تمثيلها بالنقاط؟ مدرجها التكراري؟ مخطط الصندوق وطرفيه الذي يمثلها؟ وضح إجابتك.

عزّز فهمك

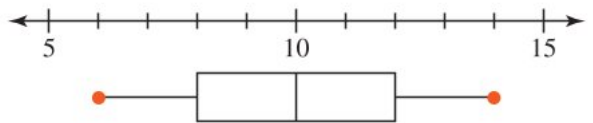
12. **بَرر منطقياً** يبيّن الشكل أدناه، مجموعة بيانات ممثلة بمخطط الصندوق وطرفيه. بين أي قيمتين تقع 50% من البيانات التي في المنتصف؟ وضح إجابتك.



13. **عَمّم** اكتب موقفاً يكون فيه التمثيل بالنقاط الطريقة الأفضل لعرض مجموعة البيانات التي تمثل هذا الموقف. وضح إجابتك.
14. **حلّل الخطأ** حلّل جاسم المدرج التكراري أدناه كما هو مبين. صف الأخطاء التي وقع فيها جاسم وصححها.



15. **مهارات التفكير العليا** يمثل مخطط الصندوق وطرفيه الموضح أدناه مجموعة بيانات مكونة من 12 قيمة. القيمة الصغرى والزبيغ الأول والوسيط والزبيغ الثالث والقيمة العظمى هي على الترتيب: 6 و 8 و 10 و 12 و 14



- a. هل يمكن إنشاء تمثيل بالنقاط لمجموعة البيانات هذه باستعمال مخطط الصندوق وطرفيه والقيم المعطاة فقط؟ وضح إجابتك.

- b. هل يمكن إنشاء مدرج تكراري لمجموعة البيانات هذه باستعمال مخطط الصندوق وطرفيه والقيم المعطاة فقط؟ وضح إجابتك.

تدرّب

- في التمارين 16-18، أنشئ العرض الذي يبيّن الإجابة الأفضل عن السؤال بالنسبة لمجموعة البيانات. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3 و 4
16. ما وسيط قيم مجموعة البيانات أدناه؟

40	47	43	35
42	32	40	47
49	46	50	42
48	43	34	45

17. ما تكرار القيمة 83؟

85	81	83	84	83	80
84	86	76	83	82	83
82	82	84	89	85	83

18. ما عدد قيم البيانات التي تقع بين العددين 7 و 9؟

9.6	5.5	8.4	9.1	6.7
7.2	11.5	9.2	5.2	7.6
11.1	6.1	7.2	14.8	12.5
8.4	10.5	10.2	8.4	13.5

- في التمارين 19-21، حدّد الطريقة الأفضل لعرض مجموعة البيانات بحيث تتمكن من الإجابة عن السؤال: التمثيل بالنقاط أم المدرج التكراري أم مخطط الصندوق وطرفيه؟ انظر المثال 4

19. ما عدد القيم الأكبر من أي قيمة معطاة في مجموعة البيانات؟
20. ما التكرار لكل فترة مكونة من 5 نقاط؟
21. 25% من قيم البيانات أصغر من أي قيمة؟

- في التمرينين 22 و 23، انظر مجموعة البيانات الممثلة بالنقاط. اعرض هذه البيانات بطريقة أخرى تبيّن بشكل أفضل إجابة السؤال. انظر المثال 1 و 2 و 3 و 4



22. ما عدد قيم البيانات التي تقع بين العددين 8 و 10 ضمناً؟
23. ما قيمة الزبيغ الأول لمجموعة البيانات؟

27. بالنظر إلى مخطط الصندوق وطرفيه. هل يعرض مخطط الصندوق وطرفيه خصائص مجموعات البيانات المذكورة أدناه؟ اختر نعم أو لا.

	لا	نعم
وسيط مجموعة البيانات	☐	☐
القيم المنفردة في مجموعة البيانات	☐	☐
القيم المتطرفة	☐	☐
القيمة الصغرى لمجموعة البيانات	☐	☐

28. اختبار SAT/ACT أي طريقة (أو أكثر) من الطرق التالية تبين الوسيط لمجموعة بيانات؟

- Ⓐ التمثيل بالنقاط فقط
 Ⓑ مخطط الصندوق وطرفيه فقط
 Ⓒ التمثيل بالنقاط ومخطط الصندوق وطرفيه
 Ⓓ المدرج التكراري ومخطط الصندوق وطرفيه
 Ⓔ التمثيل بالنقاط والمدرج التكراري ومخطط الصندوق وطرفيه

29. مهمة أدائية تستعمل مجموعة من الطلاب ساعة مقيانية لتسجيل الأزمنة التي يحققونها في سباق المئة متر. حدّد ما إذا كان على كل طالب من هؤلاء الطلاب اختيار التمثيل بالنقاط، أم المدرج التكراري، أم مخطط الصندوق وطرفيه لعرض البيانات. وضح تبريرك المنطقي، ثم أنشئ عرضًا للبيانات.

12.5	13.5	14.1	12.8	13.4
14.0	11.5	14.2	13.9	14.4
13.3	14.5	13.2	13.6	12.0
14.5	13.5	14.4	14.1	13.9

الجزء A يريد جاسم استعمال طريقة لعرض البيانات تبين شكل توزيع البيانات بوضوح.

الجزء B يريد سالم استعمال طريقة لعرض البيانات تبين كيفية انتشار البيانات فوق الوسيط وتحت.

الجزء C يريد حمد استعمال طريقة لعرض البيانات تقوم بتجميع البيانات ضمن فترات.

الجزء D يريد راشد استعمال طريقة لعرض البيانات يمكنه استعماله لإيجاد الوسيط الحسابي لمجموعة البيانات.

24. نمذج تحوّل من أوشحة وتبيعها عبر الإنترنت. يبين الجدول أدناه أسعار الأوشحة التي باعها الشهر الفائت. ما أسعار 50% من الأوشحة المباعة التي تقع في الوسط؟ أنشئ عرضًا للبيانات يبين الإجابة عن هذا السؤال؟

أسعار الأوشحة (QR)				
35	32	60	80	36
90	45	76	96	92
100	120	60	38	75
36	36	100	100	100
95	58	100	85	40

25. فكر وتأثر في الحل تدفع نورة عادةً مبلغًا يتراوح بين 1.6 QR و 2.4 QR للأونصة الواحدة من الشامبو المفضل لديها. لذا تقوم بجمع المعلومات عن أسعار نفس النوع من الشامبو في المتاجر القريبة من منزلها. يبين الجدول أدناه الأسعار بالريال القطري. أنشئ عرضًا للبيانات يتيح لنورة المقارنة بسهولة بين الأسعار المعروضة أدناه والسعر الذي تدفعه. ما وجه المقارنة بين هذه الأسعار والسعر الذي تدفعه نورة الآن؟

مقارنة أسعار الشامبو				
1.56	2.60	1.16	3.80	2.20
3.00	3.96	4.40	1.68	3.96
3.96	3.40	1.36	3.96	2.60
3.00	2.00	3.80	3.00	3.80

26. استعمال البنية أحرز عبدالعزيز 82 نقطة في مسابقة رياضة الكاراتيه، ويريد مقارنة مجموع نقاطه بمجموع نقاط منافسيه ليعرف عدد المنافسين الذين أحرزوا نقاطًا أكثر منه. يبين الجدول أدناه مجموع نقاط المشاركين في المسابقة. ما طريقة عرض البيانات الأكثر ملائمة للإجابة عن سؤال عبدالعزيز؟ أنشئ عرضًا للبيانات وحلّ أداء عبدالعزيز.

نتائج مسابقة الكاراتيه					
78	66	82	86	72	70
74	86	30	80	89	80
82	68	100	84	84	42
86	82	80	94	78	82



يبين الشكل المجاور أسعار اللوحات الفنية المباعة في معرضين خلال الشهرين الماضيين. لدى كل من ناصر وطارق لوحة يريدان بيعها.

• يريد ناصر بيع اللوحة في المعرض الأول لأنه حقق أعلى الأسعار.

• يريد طارق بيع اللوحة في المعرض الثاني لأن أسعار اللوحات فيه أكثر ثباتاً.

A. هل تتفق مع ناصر أم مع طارق؟ وضح تبريرك المنطقي.

B. **بَرر منطقياً** ما السبب (أو الأسباب) الذي قد يكون وراء اختلاف الأسعار بين المعرضين، وما سبب وجود القيمة المتطرفة في المعرض الأول؟

أستطيع... استعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمقارنة مجموعات البيانات.

معايير الدرس

11F.6.1 و 11F.6.2 و 11F.6.3

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

كيف يمكن استعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمقارنة مجموعات البيانات؟

السؤال الأساس

مقارنة مجموعات بيانات معروضة باستعمال التمثيل بالنقاط

مثال 1

حصر غانم بحثه عن سيارة في نوعين من السيارات. لاتخاذ قرار مدروس، جمع غانم بيانات عن الكفاءة التقديرية لاستهلاك هذين النوعين من السيارات للوقود (على الطرق السريعة). يبين التمثيلين بالنقاط أدناه بيانات هذين النوعين من السيارات.

النوع الأول



النوع الثاني



A. إذا كانت كفاءة استهلاك السيارة للوقود على الطرق السريعة هي الميزة الأهم بالنسبة لغانم، فما نوع السيارة التي يجب عليه شراؤها؟

تشير البيانات إلى أن كفاءة استهلاك السيارات التي من النوع الثاني للوقود على الطرق السريعة هي الأفضل. كما أن بيانات النوع الأول متجمعة بين العددين 33 و 38 وبيانات النوع الثاني متجمعة بين العددين 35 و 44

بناءً على عرض البيانات هذا، يجب على غانم شراء سيارة من النوع الثاني.

يتبع في الصفحة التالية

المصطلحات

القيمة المتطرفة هي قيمة بيانات مختلفة تمامًا عن قيم البيانات الأخرى. في مجموعة البيانات التي تمثل النوع الثاني، تبدو القيمة 51 نقطة متطرفة.

B. يريد غانم الحصول على مزيد من المعلومات عن مدى الكفاءة لاستهلاك هذين النوعين من السيارات للوقود، لذا قام بحساب الوسط الحسابي ومتوسط الانحراف المطلق (MAD) لمجموعتي البيانات. كيف يمكن لهذين المقياسين مساعدته على اتخاذ قرار مدروس أكثر؟

الوسط الحسابي لكفاءة استهلاك الوقود

النوع الأول من السيارات: 35.75 mpg

النوع الثاني من السيارات: 40.25 mpg

الوسط الحسابي لكفاءة استهلاك النوع الثاني للوقود أكبر من الوسط الحسابي لكفاءة استهلاك النوع الأول للوقود.

يريد غانم أيضًا معرفة مدى تغير بياناته لتحديد مدى موثوقيتها. متوسط الانحراف المطلق (MAD) هو الوسط الحسابي للفروق بين كل القيم في مجموعة البيانات والوسط الحسابي لمجموعة البيانات. يساعدك متوسط الانحراف المطلق (MAD) على تحديد مدى تغير البيانات داخل مجموعة بيانات معينة.

لحساب متوسط الانحراف المطلق (MAD)، احسب القيمة المطلقة للفرق بين كل نقطة من نقاط البيانات والوسط الحسابي، ثم أوجد الوسط الحسابي لهذه الفروق.

متوسط الانحراف المطلق (MAD) للنوع الأول من السيارات
(الوسط الحسابي: 35.75)

$$|33 - 35.75| = 2.75$$

$$|34 - 35.75| = 1.75$$

$$|35 - 35.75| = 0.75$$

$$|36 - 35.75| = 0.25$$

$$|37 - 35.75| = 1.25$$

$$|38 - 35.75| = 2.25$$

$$|41 - 35.75| = 5.25$$

اضرب كل فرق في عدد
مرات ظهوره في مجموعة
البيانات.

$$2.75(2) + 1.75(3) + 0.75(3) + 0.25(3) + 1.25(2) + 2.25(2) + 5.25 = 26$$

مجموع كل الفروق بين نقاط البيانات والوسط الحسابي هو 26، اقسم هذا المجموع على عدد نقاط البيانات لإيجاد متوسط الانحراف المطلق (MAD).

$$26 \div 16 \approx 1.63$$

إذن، متوسط الانحراف المطلق (MAD) للنوع الأول من السيارات هو 1.63 تقريبًا.

استعمل عملية مشابهة لإيجاد متوسط الانحراف المطلق (MAD) للنوع الثاني من السيارات. متوسط الانحراف المطلق (MAD) للنوع الثاني من السيارات هو 2.94 تقريبًا.

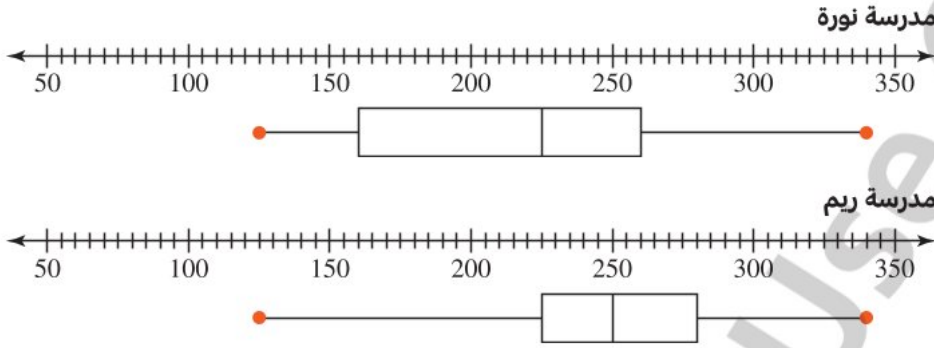
إذن، مع أن الوسط الحسابي لكفاءة استهلاك سيارات النوع الثاني للوقود أكبر من الوسط الحسابي لكفاءة استهلاك سيارات النوع الأول للوقود، إلا أنه هناك تغير أكثر في بيانات النوع الثاني. هذا قد يعني أن كفاءة الاستهلاك المتوقع لسيارات النوع الثاني للوقود أقل موثوقية.

نصيحة دراسية

متوسط الانحراف المطلق (MAD) هو مقياس للتباين يصف مدى تشتت قيم البيانات عن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات.

حاول أن تحل! 1. كيف تؤثر القيمة المتطرفة في مجموعة البيانات الثانية في الوسط الحسابي ومتوسط الانحراف المطلق (MAD)؟

نورة وريم طالبتان في مدرستين متجاورتين، وكلتاها تجمعان تبرعات للجمعيات الخيرية في مدرستيهما. تدّعي نورة أن المبلغ الذي تبرعت به الطالبات في مدرستها أكبر من المبلغ الذي تبرعت به الطالبات في مدرسة ريم. المبالغ التي تبرعت بها عينة عشوائية مكونة من 30 طالبة من كل مدرسة مبيّنة في مخططي الصندوق وطرفيه الموضحين أدناه. هل تدعم البيانات ادعاء نورة؟



يبين الجدول أدناه توزيع القيم في مجموعتي البيانات.

	مدرسة نورة	مدرسة ريم
القيمة الصغرى	125	125
القيمة العظمى	340	340
الزبيغ الأول	160	225
الوسيط	225	250
الزبيغ الثالث	260	280
المدى الزبيغي (IQR)	100	55

استعمل البنية

تذكر أن المدى الزبيغي (IQR) هو الفرق بين الزبيغين الأول والثالث ويمثل مدى تشتت 50% من البيانات الواقعة في الوسط. كيف تمثل بنية مخطط الصندوق وطرفيه المدى الزبيغي (IQR)؟

مع أن القيمتين الصغرى والعظمى للمبلغين المتبرع المتبرّع بهما في كلتا المدرستين متساويان، إلا أن تشتت نقاط البيانات بين القيمتين الصغرى والعظمى في المجموعتين مختلف.

• تُظهر عينة البيانات أن 50% من الطالبات في مدرسة نورة تبرّعن بمبالغ تتراوح بين QR 160 و QR 260. بينما تبرّع 50% من الطالبات في مدرسة ريم بمبالغ تتراوح بين QR 225 و QR 280.

• استنادًا إلى البيانات، 50% من الطالبات في مدرسة نورة تبرّعن بمبلغ أكبر من أو يساوي QR 225، في حين 50% من الطالبات في مدرسة ريم تبرّعن بمبلغ أكبر من أو يساوي QR 250.

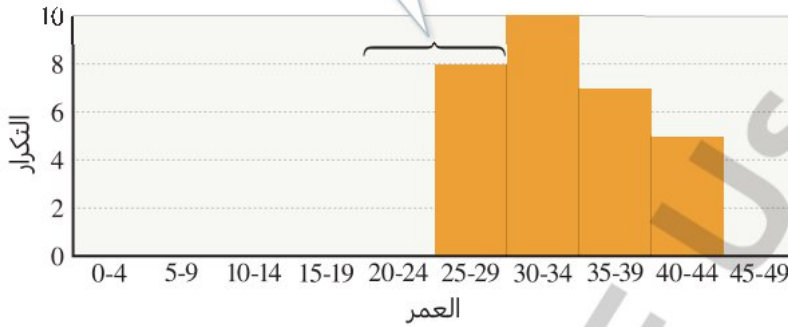
إذن، البيانات لا تدعم ادعاء نورة بل تشير إلى عكس ذلك، فهي تشير إلى أن المبلغ الذي تبرعت به الطالبات في مدرسة ريم أكبر من المبلغ الذي تبرعت به الطالبات في مدرسة نورة.

حاول أن تحلّ! 2. ما وجه المقارنة بين المدى الزبيغي (IQR) والمدى لمجموعة بيانات كل مدرسة؟

يجري فريق متخصص في التسويق دراسة حول أعمار الأشخاص الذين يتابعون برنامجين تلفزيونيين جديدين لتحديد المنتج الذي يجب الإعلان عنه أثناء عرض كل برنامج. للقيام بذلك اختار أعضاء الفريق عينة عشوائية مكونة من 30 شخصًا من مشاهدي كل برنامج. أثناء عرض أي من البرنامجين يجب على فريق التسويق الإعلان عن منتج موجه إلى البالغين الذين تتراوح أعمارهم بين 20 و 29 سنة؟

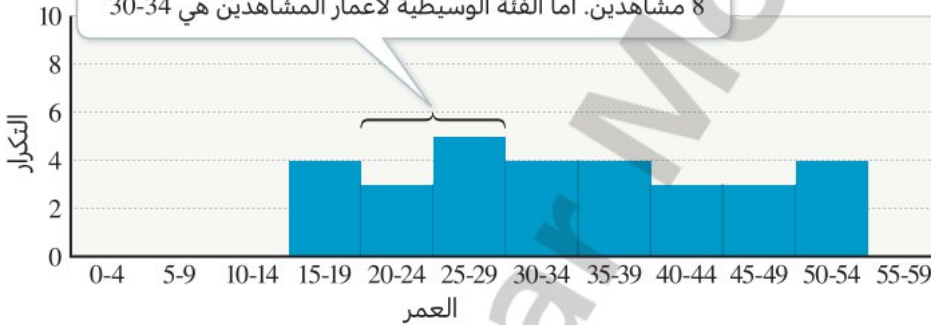
البرنامج الأول

عدد المشاهدين الذين تتراوح أعمارهم بين 20 و 29 سنة 8 مشاهدين.
أما الفئة الوسيطة لأعمار المشاهدين هي 30-34



البرنامج الثاني

عدد المشاهدين الذين تتراوح أعمارهم بين 20 و 29 سنة 8 مشاهدين.
أما الفئة الوسيطة لأعمار المشاهدين هي 30-34



خطأ شائع

عند مقارنة مدرجين تكرارين،
احرص على أن تكون الفترات هي
نفسها في المدرجين التكرارين.

من خلال عرض البيانات، يمكن إبداء العديد من الملاحظات عن البيانات التي جمعها فريق التسويق.

- من بين 30 مشاهدًا في العينة، يتابع كل برنامج 8 مشاهدين تتراوح أعمارهم بين 20 و 29 سنة.
- لا يتابع البرنامج الأول أي مشاهدين تتراوح أعمارهم بين 20 و 24
- يتابع البرنامج الثاني مشاهدون ينتمون جزئيًا إلى الفئة العمرية المستهدفة؛ 20-24 و 25-29
- كما أن للبرنامج الثاني مشاهدين في الفترتين العمريتين المحيطتين بالفئة العمرية المستهدفة، وهؤلاء قد يكونون زبائن محتملين.

استنادًا إلى هذه العينة، يجب على فريق التسويق الإعلان عن المنتج أثناء عرض البرنامج الثاني لأنه يتمتع بشعبية أكبر.

حاول أن تحل! 3. إذا أراد فريق التسويق الإعلان عن منتج موجه إلى البالغين من الفئة العمرية

25-34 سنة، فخلال أي برنامج يجب الإعلان عن المنتج؟ وضح إجابتك.

جمع طلال بيانات من 15 زميلًا من زملاءه في الصف عن عدد الرسائل النصية التي يرسلونها خلال أيام المدرسة وعن عددها خلال عطلة نهاية الأسبوع. نظم طلال بياناته في الجدولين أدناه. كيف يمكن استعمال مخطط الصندوق وطرفيه لمقارنة البيانات التي جمعها طلال؟

متوسط عدد الرسائل المرسلة خلال عطلة نهاية الأسبوع		
80	45	50
50	60	75
20	40	0
75	50	60
30	40	50

متوسط عدد الرسائل المرسلة خلال أيام المدرسة		
14	23	18
17	19	26
4	9	0
19	22	25
8	15	16

الخطوة 1 احسب ملخص الأعداد الخمسة لكل مجموعة بيانات.

الرسائل خلال عطلة نهاية الأسبوع

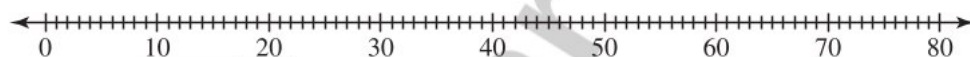
القيمة الصغرى: 0
القيمة العظمى: 80
الزبيغ الأول: 40
الوسيط: 50
الزبيغ الثالث: 60
المدى الزبيغي (IQR): 20

الرسائل خلال أيام المدرسة

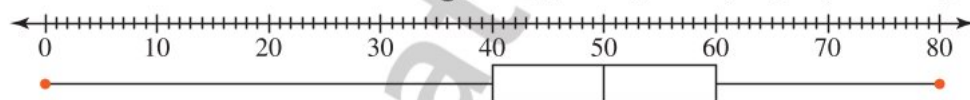
القيمة الصغرى: 0
القيمة العظمى: 26
الزبيغ الأول: 9
الوسيط: 17
الزبيغ الثالث: 22
المدى الزبيغي (IQR): 13

الخطوة 2 استعمل المعلومات المبينة أعلاه لإنشاء مخطط الصندوق وطرفيه الذي يمثل كل مجموعة بيانات.

متوسط عدد الرسائل المرسلة خلال أيام المدرسة



متوسط عدد الرسائل المرسلة خلال عطلة نهاية الأسبوع



الخطوة 3 استعمل عرضي البيانات أعلاه لتكوين ملاحظات عن مجموعتي البيانات.

- عدد الرسائل النصية التي يرسلها الطلاب خلال أيام العطلة أكبر بكثير من عدد الرسائل النصية التي يرسلونها خلال أيام المدرسة.
- التغير في عدد الرسائل المرسلة خلال أيام العطلة أكبر من التغير في عدد الرسائل المرسلة خلال أيام المدرسة.
- ثمة شخص واحد لا يرسل أي رسائل نصية خلال أيام العطلة. هذا يمثل قيمة متطرفة لأنه بعيد عن قيم البيانات الأخرى.

حاول أن تحل! 4. a. قدّم توضيحًا ممكنًا لكل ملاحظة من الملاحظات التي تم التوصل إليها.

b. قدّم ملاحظتين إضافيتين حول البيانات التي جمعها طلال.

يمكننا مقارنة مجموعتي بيانات باستعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت.

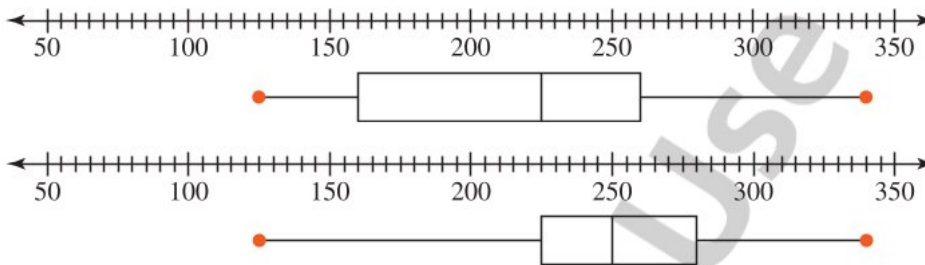
يبين التمثيل بالنقاط مدى تجانس نقطة بيانات معينة مع بقية البيانات.

التمثيل بالنقاط



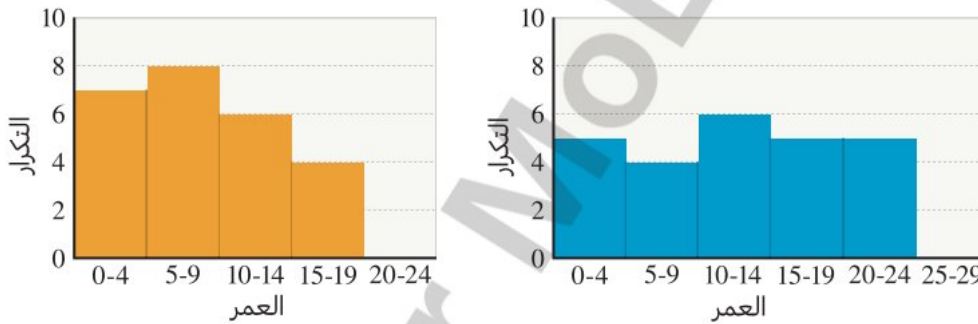
يبين مخطط الصندوق وطرفيه القيمتين الصغرى والعظمى ومقاييس النزعة المركزية للبيانات.

مخطط الصندوق وطرفيه



تسمح المدرجات التكرارية بالمقارنة بين فئات البيانات بسهولة.

المدرج التكراري



طبّق فهمك

في التمارين 5-9، استعمل مجموعتي البيانات أدناه.

مجموعة البيانات A					مجموعة البيانات B				
86	87	98	85	90	80	89	70	75	87
94	89	83	76	84	88	75	87	89	81
83	90	87	87	86	84	87	88	81	87

- ما وجه المقارنة بين الوسيطين الحسابيين؟
- ما وجه المقارنة بين متوسط الانحراف المطلق (MAD) كل من المجموعتين؟
- ما وجه المقارنة بين الوسيطين؟
- ما وجه المقارنة بين المديين الزبعيين (IQR)؟
- أي من مقاييس النزعة المركزية والتشتت هي الأفضل لمقارنة مجموعتي البيانات A و B؟ وضح إجابتك.

عبّر عن فهمك

- السؤال الأساس** كيف يمكن استعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمقارنة مجموعات البيانات؟
- تواصل بدقة** ما أوجه الشبه والاختلاف بين المدى الزبعي (IQR) ومتوسط الانحراف المطلق (MAD)؟
- بزر منطقيًا** عند مقارنة مجموعتين من البيانات، من الشائع النظر إلى الوسيطين الحسابيين. لماذا من الممكن أن يكون متوسط الانحراف المطلق (MAD) معلومة مفيدة لإجراء المقارنة بالإضافة إلى الوسط الحسابي؟
- حلّل الخطأ** يقول خالد إن الوسيط لمجموعتين من البيانات يكون هو نفسه إذا كانت القيمتان الصغرى والعظمى لمجموعتي البيانات متساوية. هل خالد على صواب؟ وضح إجابتك.

في التمارين 15-17، قارن بين مجموعتي البيانات من حيث الوسط الحسابي ومتوسط الانحراف المطلق (MAD)، ثم من حيث الوسيط والمدى الزبوعي (IQR). حدّد المقاييس الأفضل لمقارنة مجموعتي بيانات. وضح تبريرك المنطقي.

انظر الأمثلة 4-1

مجموعة البيانات A	مجموعة البيانات B
5 6 5 4	5 9 2 5
5 4 5 6	6 1 5 8
6 5 4 5	3 5 5 4
4 5 6 5	5 7 4 6

مجموعة البيانات A
3.0 2.8 3.2 3.3 3.2
3.4 3.3 2.9 3.0 4.5
4.8 3.1 3.2 4.9 3.1

مجموعة البيانات B
1.9 3.3 1.5 3.2 3.1
3.4 3.0 3.2 3.4 1.6
3.2 3.6 3.5 3.1 3.3

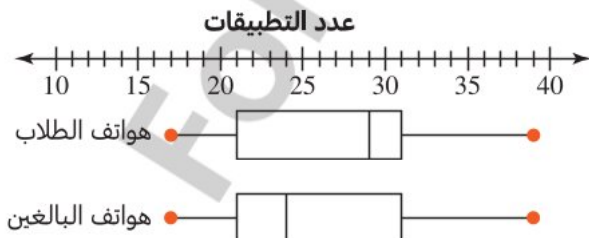
17. مجموعة البيانات A



مجموعة البيانات B



18. يدعي أحد الباحثين أن الطلاب يميلون إلى امتلاك تطبيقات على هواتفهم الذكية أكثر من البالغين. هل تدعم البيانات المعروضة أدناه ادعاء هذا الباحث؟ وضح إجابتك. انظر المثال 2



10. **بزر منطقيًا** إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الممثلة بالمدرج التكراري أدناه هو 12، فما هي القيمة التقريبية المعقولة للوسيط؟ وضح تبريرك المنطقي.



11. **ابن الحجج الرياضية** إذا كان الوسيطان الحسابيان لمجموعتين من البيانات متساويين، لكن وسيط إحدى المجموعتين أصغر بكثير من وسيط المجموعة الأخرى، ما الاستنتاجات التي يمكن استخلاصها بشأن مجموعتي البيانات من هاتين المعلومتين؟

12. **حلّ الخطأ** كتب هاشم العبارة التالية عن مجموعة البيانات الممثلة بالتمثيل بالنقاط أدناه. صف الخطأ الذي وقع فيه هاشم، وصحّحه.



13. **تواصل بدقة** ما أوجه الشبه والاختلاف بين المدى الزبوعي (IQR) والمدى لمجموعتين من البيانات؟

14. **مهارات التفكير العليا** الوسيط لمجموعتين من البيانات يساوي 10، والمدى الزبوعي (IQR) لمجموعة البيانات الأولى يساوي 22، والمدى الزبوعي (IQR) لمجموعة البيانات الثانية يساوي 8

a. ما الاستنتاجات التي يمكن استخلاصها عن مجموعتي البيانات هاتين؟ وضح إجابتك.

b. هل يمكن تخمين متوسط الانحراف المطلق (MAD) لكل من المجموعتين من المعلومات المعطاة؟ وضح إجابتك.

فواز	ماجد
45	30
40	35
80	50
60	70
20	30

22. يبين الجدول المجاور عدد الدقائق التي

قضاها كل من فواز وماجد في إنجاز الواجب المنزلي كل ليلة خلال الليالي الخمس الماضية. بناءً على هذه البيانات، أي العبارات الآتية صحيحة؟ اختر كل ما ينطبق.

Ⓐ وسيط بيانات ماجد أكبر من وسيط بيانات فواز.

Ⓑ يقضي فواز عادةً زمناً أطول من الزمن الذي يقضيه ماجد في إنجاز الواجب المنزلي.

Ⓒ الوسط الحسابي لكلتا المجموعتين أكبر من الوسيط.

Ⓓ المدى الزبيني (IQR) لبيانات ماجد أكبر من المدى الزبيني لبيانات فواز.

23. اختبار SAT/ACT يبدو المدرجان التكراريان اللذين يمثلان مجموعتين من البيانات متطابقين. ما الاستنتاج الذي يمكنك استخلاصه بشأن مجموعتي البيانات هاتين.

Ⓐ نقاط البيانات في المجموعتين متماثلة.

Ⓑ الوسط الحسابي لكلتا مجموعتي البيانات هو نفسه.

Ⓒ الوسيط لكلتا مجموعتي البيانات هو نفسه.

Ⓓ ليس أيًا من هذه الإجابات.

24. مهمة أدائية اختبرت جمعية حماية المستهلك أعمار بطاريات

هواتف ذكية مختلفة. يبين الجدول أدناه النتائج.

الهاتف A				
10.0	14.2	12.0	15.1	16.0
14.0	0.9	14.2	9.5	15.0
14.2	15.0	9.5	12.5	14.2
13.0	15.0	14.2	11.0	9.0

الهاتف B				
12.5	13.0	14.0	13.5	15.0
14.0	14.0	12.0	15.0	12.8
12.8	15.0	13.0	15.2	16.0
14.0	13.6	14.2	13.8	15.1

الجزء A أوجد الوسط الحسابي ومتوسط الانحراف المطلق (MAD) لمجموعتي البيانات.

الجزء B أوجد الوسيط والمدى الزبيني (IQR) لمجموعتي البيانات.

الجزء C أنشئ عرضين للبيانات يتيحان لك مقارنة مجموعتي البيانات.

الجزء D أي من هذه البطاريات يرجح أن تكون أطول عمراً؟ وضح تبريرك المنطقي.

19. نموذج الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في اختبار الرياضيات

في نهاية العام الدراسي الماضي كان 82 نقطة، مع متوسط الانحراف المطلق (MAD) مقداره 3.5 نقطة. يبين الجدول أدناه درجات الطلاب في اختبار الرياضيات هذا العام. ما وجه المقارنة بين درجات الطلاب في السنتين؟

درجات الاختبار النهائي في الرياضيات

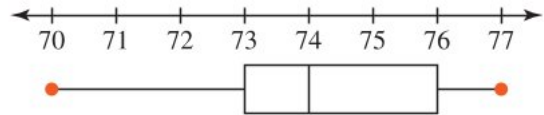
85	82	88	84	85
84	86	70	95	86
99	71	85	92	79
88	85	91	82	85
86	75	84	78	100

20. فكر وتأثر في الحل يبين الجدول أدناه النقاط التي سجلها كل

اللاعبين في فريق جاسم لكرة السلة خلال الموسم الرياضي الحالي. ويبين مخطط الصندوق وطرفيه نقاط الفريق المنافس خلال نفس الموسم. ما وجه المقارنة بين نقاط الفريقين؟

النقاط المسجلة لكل لاعب

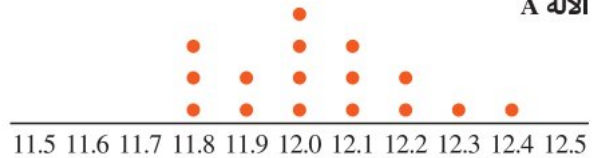
35	32	60	80	36
90	45	76	96	92
100	120	60	38	75



21. استعمال البنية يشير المصق على عبوة حبوب الطعام

أن وزن العبوة 12 أونصة. يبين التمثيلان بالنقاط أدناه أوزان عينتين عشوائيتين مكونتين من 16 عبوة معبئة بواسطة آلتين مختلفتين. ما وجه المقارنة بين مجموعتي البيانات لمعرفة ما إذا كان ثمة عطل في إحدى الآلتين أم لا؟

الآلة A



الآلة B



يستعمل خبير الأرصاد الجوية مقاييس النزعة المركزية لتلخيص درجات الحرارة القصوى المسجلة في الأيام العشرة الأخيرة.



A. أوجد الوسيط والوسط الحسابي والمنوال لهذه البيانات.

B. أي من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة يبدو الأكثر دقة في وصف هذه البيانات؟ وضح إجابتك.

C. تواصل بدقة كيف يمكنك وصف هذه البيانات؟

أستطيع... تفسير أشكال
عرض البيانات التي تمثل أنواعًا
مختلفة من توزيعات البيانات.

معايير الدرس

11F.6.2 و 11F.6.3

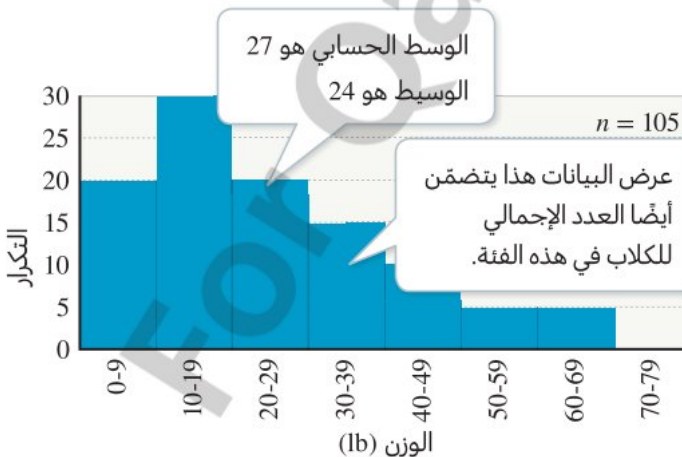
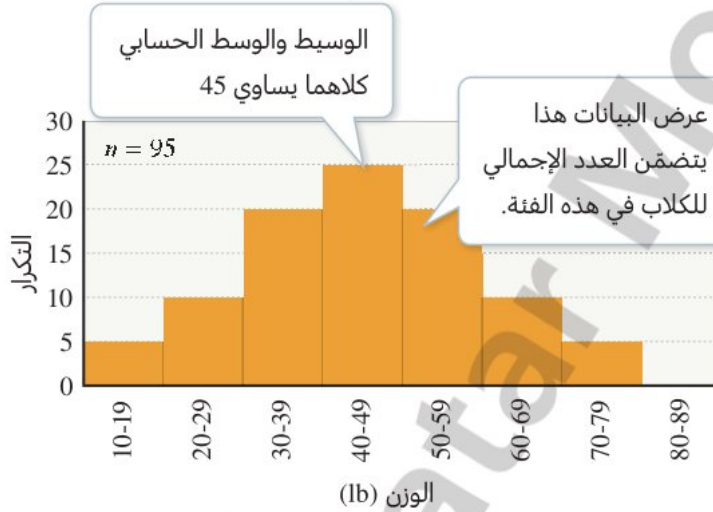
كيف يساعد شكل مجموعة البيانات على فهمها؟

السؤال الأساس

مثال 1

تفسير شكل توزيع البيانات

يبين المدرجان التكراريان أدناه أوزان جميع الكلاب الموجودة في المدينة موزعةً إلى فئتين مختلفتين. بالنظر إلى مجموعتي البيانات، ما الاستدلالات التي يمكنك استخلاصها بناءً على شكل البيانات؟



يتبع في الصفحة التالية

استنتاج أن أوزان معظم الكلاب في هذه الفئة أقل من 30 باوند.

الاستيعاب المفاهيمي

عمم

لحساب الوسط الحسابي يجب أخذ كل القيم في مجموعة البيانات. هل يجب استعمال الوسط الحسابي دائمًا لتلخيص مجموعة البيانات عندما تكون البيانات موزعة بالتساوي؟

المدرج التكراري المجاور متماثل ويبين أن البيانات موزعة بالتساوي على جانبي المركز.

الوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات متساويان أو تقريبًا متساويان.

بناءً على هذه البيانات يمكن استنتاج أن أوزان معظم الكلاب في هذه الفئة تتراوح بين 30 و 59 باوند.

يبين المدرج التكراري المجاور أن البيانات ملتوية جهة اليمين، وأن الوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

بناءً على هذه البيانات يمكن

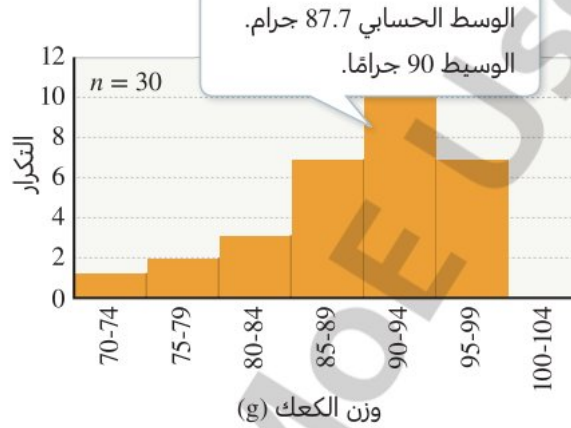
حاول أن تحل! 1. إذا كان الوسط الحسابي لأوزان فئة ثالثة من الكلاب هو 40 lb والوسيط هو 32 lb، ماذا يمكنك أن تستنتج عن الكلاب في هذه الفئة؟

مثال 2

تفسير شكل عرض البيانات الملتوي

تطبيق

اشتكى زبائن متجر للكعك من أن أوزان بعض الكعك أقل من الوزن المدون على الملصق. أخذ مدير مراقبة الجودة عينة عشوائية من 30 كعكة ووزنها. هل تستدعي هذه العينة إدخال تغيير على عملية صنع الكعك؟



شكل عرض البيانات ملتوي جهة اليسار، وهذا أمر شائع عندما يكون الوسط الحسابي لمجموعة بيانات أصغر من الوسيط.

نظرًا إلى أن الوسط الحسابي للعينة أقل من الوزن المعلن عنه، يريد مدير مراقبة الجودة في التوصية إدخال بعض التغييرات على عملية الإنتاج. لكن، بما أن العينة تتكون من 30 كعكة فقط، قرر المدير فحص عينة عشوائية أخرى.

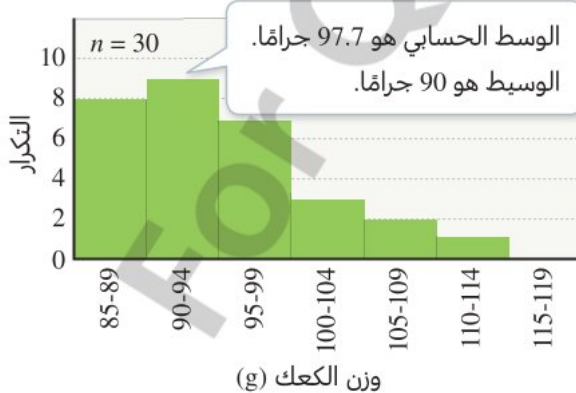
خطأ شائع

قد تعتقد أن بالإمكان التوصل إلى استنتاج بناءً على هذه العينة. لكن، نظرًا لصغر حجم العينة، يصعب التأكد من أنها تمثل مجتمع الدراسة بالكامل.

حاول أن تحل! 2. كيف يؤثر التواء البيانات في الوسط الحسابي في سياق هذا الموقف؟

مثال 3

المقارنة بين عروض البيانات الملتوية



أخذ المدير عينة عشوائية أخرى مكونة من 30 كعكة. هل تستدعي هذه العينة إدخال تغيير على عملية صنع الكعك؟ ما وجه المقارنة بين هذه العينة والعينة السابقة؟

يتبع في الصفحة التالية

شكل عرض البيانات ملتوي جهة اليمين، وهذا يحدث غالباً عندما يكون الوسط الحسابي لمجموعة البيانات أكبر من وسيط البيانات. في هذا المثال، الوسط الحسابي أكبر من الوزن المعلن عنه وأكبر من الوسط الحسابي لوزن الكعك في العينة الأولى.

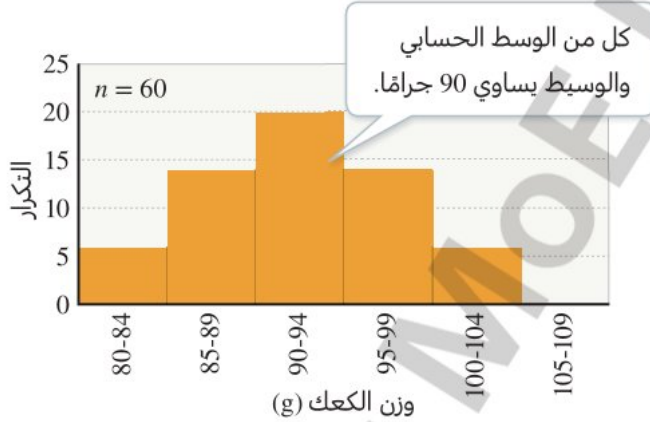
بناءً على هذه العينة وحدها، يمكن للمدير أن يوصي بتغييرات. ولكن، بما أن نتائج هذه العينة تتعاكس مع نتائج العينة الأولى، فإن المدير الآن لديه نتائج متضاربة في ما يتعلق بالوسط الحسابي لأوزان الكعك.

حاول أن تحلّ! 3. ما الذي يمكن استنتاجه عن البيانات من شكل المدرج التكراري للعينة الثانية؟

مثال 4 تفسير شكل عرض بيانات متماثل

مثال 4

يأخذ مدير مراقبة الجودة عينة عشوائية ثالثة تحتوي على ضعف عدد نقاط البيانات. المدرج التكراري الذي يمثل هذه العينة الثالثة، الأكبر من العينتين السابقتين، موضح أدناه. هل تستدعي هذه العينة إدخال تغيير على عملية صنع الكعك؟



يبين المدرج التكراري أعلاه أن نقاط البيانات موزعة بشكل متماثل على جانبي المركز. في هذه العينة، الوسط الحسابي والوسيط متساويان.

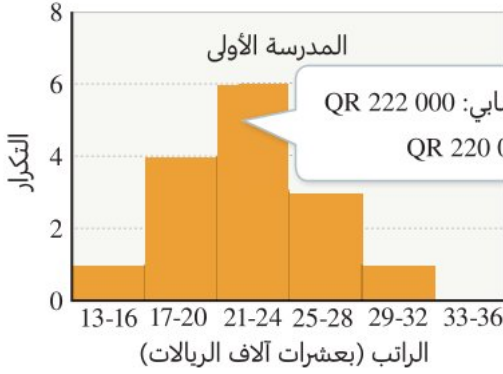
بناءً على هذه العينة، يقرر مدير مراقبة الجودة أن عملية صنع الكعك لا تحتاج إلى التغيير لأن البيانات متمركزة حول الوزن المعلن عنه وهو 90 جراماً.

حاول أن تحلّ! 4. افترض أن مدير مراقبة الجودة أضاف 10 كعكات أخرى إلى العينة الثالثة، وأن وزن 5 كعكات 78 g لكل منها، ووزن 5 كعكات أخرى 106 g لكل منها، هل يؤثر في قيمة كل من الوسط الحسابي والوسيط لأوزان الكعك؟ وضح إجابتك.

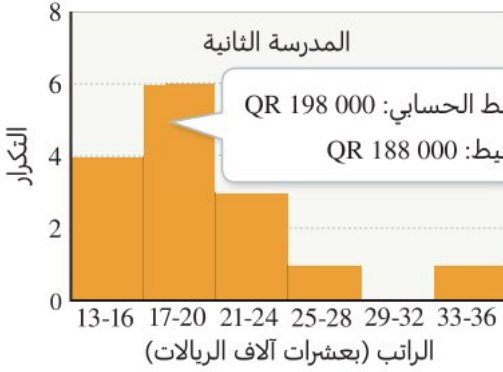
بزر منطقياً

كيف يؤثر تكبير حجم العينة في الاستنتاجات المستخلصة عن مجتمع الدراسة؟

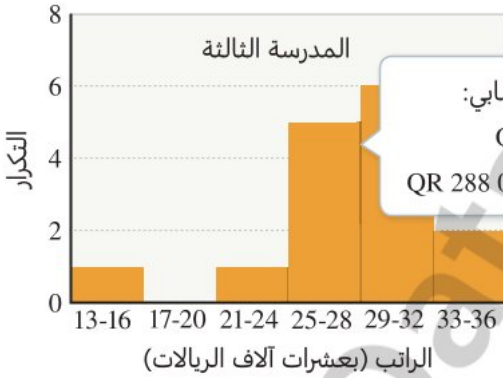
يدرس ماجد عروض العمل المقدمة من ثلاث مدارس مختلفة. تبيّن المدرجات التكرارية أدناه فئات رواتب وظائف متماثلة في المدارس الثلاث. ما الذي يمكن استنتاجه من أشكال البيانات عن رواتب المعلمين في المدارس الثلاث؟



توضّح بيانات المعلمين الذين يشغلون وظائف متماثلة في المدرسة الأولى أن رواتبهم تتمركز على جانبي الوسط الحسابي. هذا يعني أن رواتب المعلمين موزعة بالتساوي وباعتدال.



بيانات المعلمين في المدرسة الثانية ملتوية جهة اليمين. أي أن رواتب معظم المعلمين في هذه المدرسة أقل من الوسط الحسابي. هذا يعني أن عددًا قليلًا من المعلمين يحصلون على راتب عالٍ.



بيانات المعلمين في المدرسة الثالثة ملتوية جهة اليسار. أي أن معظم المعلمين الذين يشغلون وظائف متماثلة رواتبهم أعلى من الوسط الحسابي. هذا يعني أن عددًا كبيرًا من المعلمين يحصلون على راتب عالٍ.

خطأ شائع

عندما يكون عرض البيانات "ملتويًا" جهة اليمين يكون "ذيل" المدرج التكراري ممتدًا نحو اليمين، وعندما يكون عرض البيانات "ملتويًا" جهة اليسار يكون الذيل ممتدًا نحو اليسار.

إذا كان الراتب الابتدائي الذي تقدمه المدارس الثلاث هو نفسه، يجب على ماجد التفكير بشدة في المدرستين الأولى والثالثة. فاستنادًا إلى البيانات الممثلة هنا، احتمال أن يزداد راتب ماجد في هاتين المدرستين أكبر.

حاول أن تحلّ! 5. افترض أن مدرسة رابعة اقترحت على ماجد التعليم فيها، وأن الوسط الحسابي لرواتب المعلمين في هذه المدرسة QR 228 000 ووسيط الرواتب QR 196 000، هل ينبغي لماجيد التفكير في قبول عرض العمل المقدم من هذه المدرسة؟ وضح إجابتك.

لفظيًا

يكشف شكل عرض البيانات الكثير عن مجموعة البيانات.

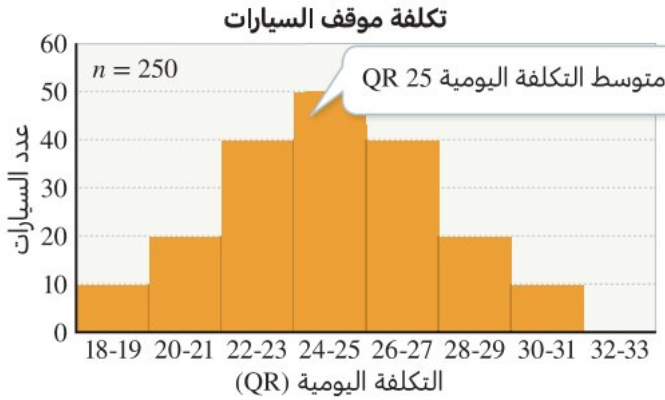
في عرض البيانات **المتماثل**، تكون نقاط البيانات موزعة بالتساوي على جانبي المركز، ويكون الوسط الحسابي والوسيط متساويين (أو متساويين تقريبًا).

في عرض البيانات **الملتوي**، تكون نقاط البيانات موزعة بشكل غير متساو على جانبي المركز (الوسيط). يمكن أن يكون عرض البيانات ملتويًا جهة اليمين أو جهة اليسار. وفي هذه الحالة لا يكون الوسط الحسابي والوسيط متساويين.

بيانيًا

توزيع مجموعة البيانات هذه متماثل.

عدد قيم البيانات الأكبر من الوسط الحسابي يساوي تقريبًا عدد قيم البيانات الأصغر من الوسط الحسابي.



عدد الحيوانات الأليفة

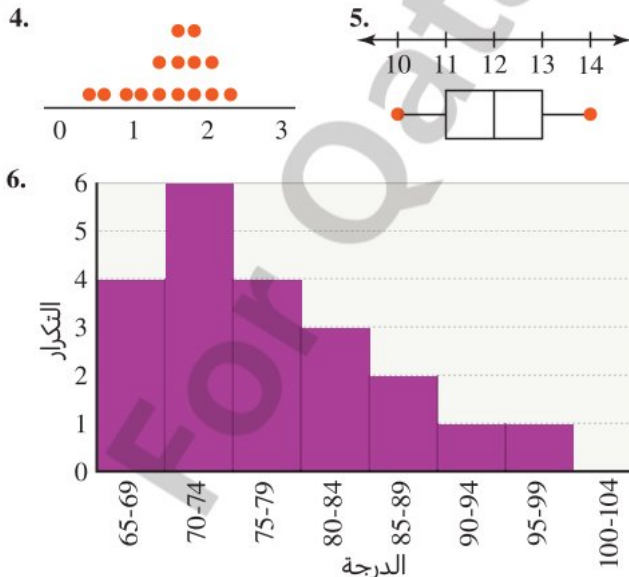
الوسيط هو 1 حيوان أليف

0 1 2 3 4 5

عائلة واحدة تقتني 5 حيوانات أليفة جعلت البيانات تلتوي جهة اليمين. إن حجم العينة الصغير جدًا يجعل أي استنتاجات لا يمكن الوثوق فيها.

طبّق فهمك

في التمارين 4-6، حدّد ما إذا كان توزيع البيانات ملتويًا جهة اليسار أم ملتويًا جهة اليمين أم متماثلًا، ثم فسّر معنى كل عرض بالنسبة إلى مجموعة البيانات.

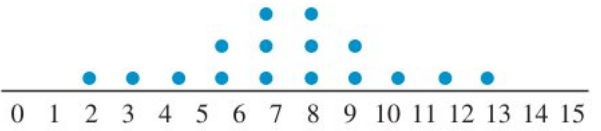
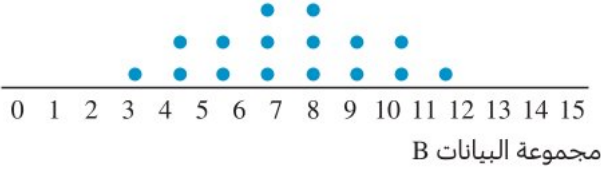


عبّر عن فهمك

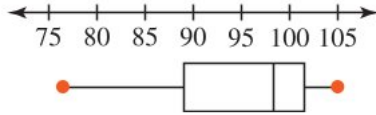
1. **السؤال الأساس** كيف يساعد شكل مجموعة البيانات على فهمها؟
2. **استعمل البنية** ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيل بالنقاط والمدرج التكراري ومخطط الصندوق وطرفيه؟
3. **حلّل الخطأ** تقول هيا إن شكل عرض توزيع البيانات الملتوي يكون متماثلًا على جانبي الوسط الحسابي. هل هيا على صواب؟ وضح تبريرك المنطقي.

في التمرينين 13 و 14، قارن بين كل زوج من عروض البيانات، ثم اذكر ما إذا كان عرض البيانات ملتويًا جهة اليسار، أم ملتويًا جهة اليمين، أم متماثلًا. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

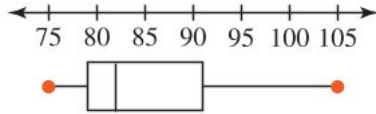
13. مجموعة البيانات A



14. مجموعة البيانات A



B مجموعة البيانات

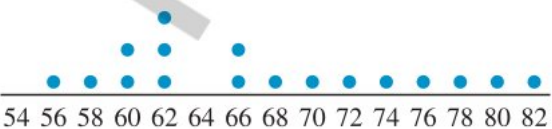


في التمرينين 15 و 16، فسر شكل العرض المعطى ضمن السياق المعطى، ثم لخص البيانات بالاستناد إلى أحد مقاييس النزعة المركزية. انظر المثالين 4 و 5

15. تمثل البيانات المبالغ المالية التي جمعها الطلاب لجمعية خيرية.



16. تمثل البيانات آلاف النقاط المسجلة في مسابقة ألعاب الفيديو.



7. **ابن الحجج الرياضية** لم يفهم أحد زملائك في الصف لماذا يكون الوسط الحسابي أصغر من الوسيط عندما تكون البيانات ملتوية جهة اليسار. كيف توضح هذه العلاقة لزميلك؟

8. **ابحث عن العلاقات** إذا كان الوسيط لمجموعتين من البيانات هو نفسه، وكانت إحدى المجموعتين ملتوية جهة اليمين والأخرى ملتوية جهة اليسار، فما العلاقة بين الوسيطين الحسابيين لمجموعتي البيانات هاتين؟

9. **حلل الخطأ** صف الخطأ الذي ارتكبه جاسم في تفسير شكل مخطط الصندوق وطرفيه، ثم صحح هذا الخطأ.



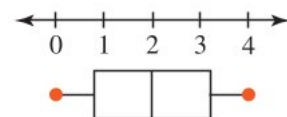
10. **بزر منطقيًا** ما أوجه الشبه والاختلاف بين شكلي عرضي مجموعتين من البيانات إذا علمت أن الوسط الحسابي لكل منهما 10، وأن متوسط الانحراف المطلق (MAD) للمجموعة الأولى 1.5 وللجموعة الثانية 3؟

11. **مهارات التفكير العليا** عرض البيانات A متماثل مع وسط حسابي يساوي 50 ومتوسط الانحراف المطلق (MAD) يساوي 5، بينما عرض البيانات B متماثل مع وسط حسابي يساوي 75 ومتوسط الانحراف المطلق (MAD) يساوي 5

a. ما أوجه الشبه والاختلاف بين عرضي البيانات؟

b. إذا كان شكلا العرضين غير متطابقين، كيف يمكن تغيير القيم في مجموعة البيانات B بحيث يصبح العرضان متماثلين؟

12. **فكر وثابر في الحل** تمثل البيانات المعروضة في مخطط الصندوق وطرفيه أداؤه متوسط عدد الساعات التي يقضيها كل طالب من 12 طالبًا في إنجاز واجباتهم المنزلية كل ليلة. أنشئ مجموعتين مختلفتين من البيانات يمكن تمثيلهما باستعمال مخطط الصندوق وطرفيه هذا.



17. روابط في الرياضيات يمثل عرضا البيانات أدناه أسعار المنازل في إحدى المدن خلال عامين متتاليين. ما الذي يمكن استنتاجه عن تغير أسعار المنازل خلال هذين العامين من عرضي البيانات؟

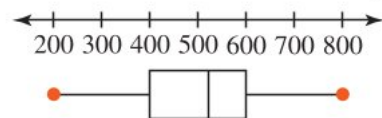


18. فكر وثابر في الحل جمع خالد بيانات عن أطوال الطلاب في مدرسته. يوضح التمثيلان بالنقاط أدناه بيانات عيّنتين من الطلاب. بناءً على هذين العرضين، ماذا يمكنك أن تستنتج عن كل عينة؟

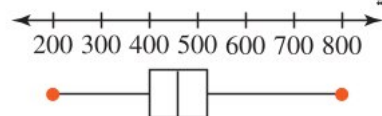


19. فكر وثابر في الحل يبين مخططا الصندوق وطرفيه أدناه درجات الطلاب في اختبارين. في أي اختبار من المرجح أن يحصل طالب تم اختياره عشوائيًا على درجة أعلى من الوسط الحسابي للدرجات؟ في أي اختبار من المرجح أن يحصل طالب تم اختياره عشوائيًا على درجة قريبة من الوسط الحسابي للدرجات؟ وضح إجابتك.

الاختبار الأول



الاختبار الثاني



20. إذا كان شكل عرض البيانات متماثلًا على جانبي قيمة البيانات 10، اختر كل ما ينطبق على مجموعة البيانات هذه.

Ⓐ الوسط الحسابي 10 تقريبًا

Ⓑ الوسيط 10 تقريبًا

Ⓒ يجب أن يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

Ⓓ يجب أن يكون الوسيط أكبر من الوسط الحسابي.

Ⓔ معظم قيم البيانات في مجموعة البيانات أكبر من 10

21. اختبار SAT/ACT إذا كان شكل عرض مجموعة بيانات متماثلًا نسبيًا، ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة إلى مقاييس النزعة المركزية؟

Ⓐ الوسط الحسابي أصغر من الوسيط.

Ⓑ الوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

Ⓒ الوسط الحسابي والوسيط متساويان تمامًا.

Ⓓ الوسط الحسابي والوسيط متقاربان من حيث القيمة.

22. مهمة أدائية من المفترض أن يكون عمر شريط أضواء الزينة 1 000 ساعة، مع هامش خطأ مقبول مقداره زائد أو ناقص 50 ساعة.

يبين الجدولان أدناه اختبارين لمراقبة جودة هذا المنتج.

عمر أضواء الزينة

الاختبار الأول				
975	1 025	950	950	975
1 050	925	1 050	1 025	1 050
1 000	1 075	975	950	1 025

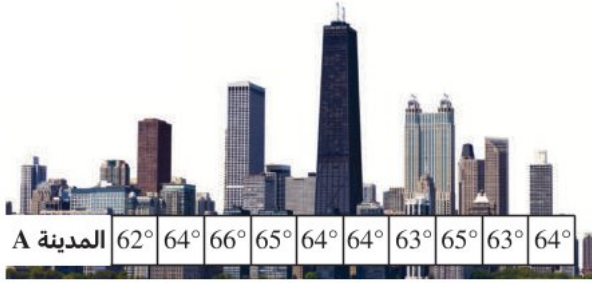
الاختبار الثاني				
975	1 000	1 025	1 000	1 000
1 025	1 000	950	975	1 025
1 000	975	1 050	1 000	1 000

الجزء A أوجد الوسط الحسابي، ومتوسط الانحراف المطلق (MAD)، والوسيط، والمدى الزبيني (IQR) لكل مجموعة بيانات.

الجزء B حدّد نوع عرض البيانات الذي تعتقد أنه سيسمح لك بمقارنة مجموعتي البيانات أعلاه. وضح تبريرك المنطقي. أنشئ عرضي البيانات.

الجزء C فسر وقارن شكلي عرضي البيانات. ما الذي يمكن استنتاجه من العرضين عن جودة أضواء الزينة هذه؟

يقارن أخصائي الأرصاد الجوية بين درجات الحرارة القصوى (بالفهرنهايت) في مدينتين خلال الأيام العشرة الأخيرة.



A. أنشئ عرضًا للبيانات يمثل درجات الحرارة القصوى في كل مدينة.

B. **استعمل البنية** ما الذي يمكن استنتاجه من شكل كل عرض للبيانات عن مجموعة البيانات ومقاييس النزعة المركزية؟

أستطيع... تحليل تشتت البيانات.

معايير الدرس

11F.6.2 و 11F.6.3

المصطلحات

- توزيع طبيعي
normal distribution
- انحراف معياري
standard deviation
- تباين
variance

لماذا طريقة تشتت البيانات مهمة؟

السؤال الأساس

مثال 1

تفسير تشتت مجموعة بيانات

يدعي مدير شركة لتصنيع المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي هو 1 200 ساعة. يبين الجدول أدناه العمر الافتراضي، بالساعات، لعينة من المصابيح الكهربائية من النوع A التي تصنعها هذه الشركة. ما مدى تطابق ادعاء مدير الشركة مع أعمار المصابيح في العينة؟

1 150	1 231	1 305	1 080	1 125	1 295	1 127	1 184	1 099	1 123
1 204	1 345	1 173	1 126	1 220	1 245	1 283	1 225	1 185	1 275

A. ما نوع عرض البيانات الذي يوضح البيانات بأفضل شكل ممكن؟

مدى الأعداد في مجموعة البيانات كبير جدًا. لفهم العلاقة بين هذه الأعداد والوسط الحسابي لعمر المصابيح المزعوم، أنشئ مدرجًا تكراريًا.

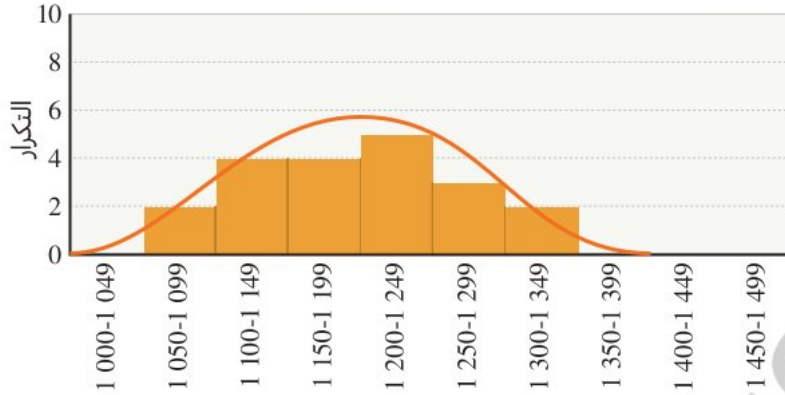


استعمل البنية

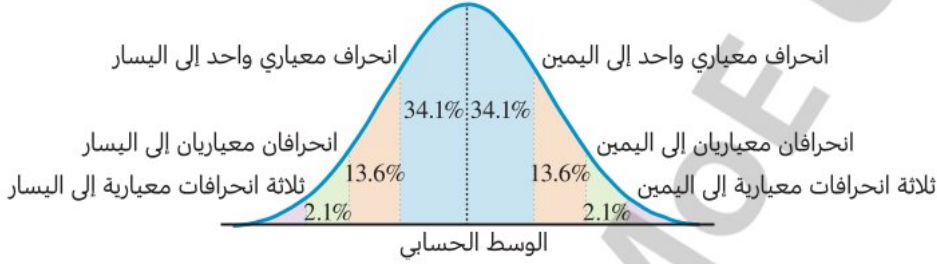
كيف يساعد شكل التوزيع على تحديد الوسط الحسابي؟

B. ما الذي يكشفه العرض عن البيانات؟

تشكل البيانات منحني جرسِي الشكل. البيانات التي تتخذ هذا الشكل يكون لها **توزيع طبيعي**.



عندما يكون توزيع البيانات طبيعيًا، فإن المقياس الأفضل لقياس التشتت هو الانحراف المعياري. **الانحراف المعياري** هو المقياس الذي يوضح كيف تتغير، أو تنحرف، البيانات عن الوسط الحسابي.



في التوزيع الطبيعي،

- 68% تقريبًا من جميع القيم تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.
 - 95% تقريبًا من جميع القيم تقع ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي.
 - 99.7% تقريبًا من جميع القيم تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي.
- الانحراف المعياري لهذه العينة من المصابيح الكهربائية هو 75.5 ساعة.

الوسط الحسابي لمجموعة البيانات هذه هو 1 200 ساعة. تقع المصابيح الكهربائية التي تتراوح أعمارها بين 1 124.5 و 1 275.5 ساعة ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي. إذن، في عينة كبيرة يتم اختيارها عشوائيًا من بين هذه المصابيح، نتوقع دائمًا أن تكون أعمار 68% من المصابيح تقريبًا ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي، ويعود الفضل في دقة هذا التوقع إلى التوزيع الطبيعي.

ابحث عن العلاقات

معظم قيم البيانات في مجموعة موزعة طبيعيًا تكون متجمعة على جانبي الوسط الحسابي. كلما ابتعدنا عن الوسط الحسابي، تصبح قيم البيانات أقل.

حاول أن تحلّ! 1. ما عمر المصابيح الكهربائية التي تقع ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي؟ وما عمر المصابيح الكهربائية التي تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي؟

يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها أحد الموظفين في شركة لبيع السيارات خلال ثمانية أسابيع. ما مقدار التشتت الذي تظهره البيانات؟

18	25	18	10	17	15	18	15
----	----	----	----	----	----	----	----

يمكن إيجاد التشتت من خلال إيجاد قيمة الانحراف المعياري للعينة باستعمال

$$\text{الصيغة } s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \text{ لحساب ذلك، اتبع الخطوات التالية.}$$

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي للبيانات بإيجاد مجموع قيم البيانات وقسمته على 8، يُستعمل الرمز $\bar{x}$ للإشارة إلى الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = 17$$

الخطوة 2 أوجد الفرق بين كل قيمة من قيم البيانات، x ، والوسط الحسابي، $\bar{x}$ ، ثم قم بتربيع الفرق.

x	18	25	18	10	17	15	18	15
$\bar{x}$	17	17	17	17	17	17	17	17
$x - \bar{x}$	1	8	1	-7	0	-2	1	-2
$(x - \bar{x})^2$	1	64	1	49	0	4	1	4

الخطوة 3 أوجد التباين.

التباين في مجتمع الدراسة، الذي يُرمز له غالبًا بالرمز σ^2 ، هو الوسط الحسابي لتربيعات الفروق بين جميع قيم البيانات والوسط الحسابي. عند إيجاد التباين في عينة، الذي يُرمز له غالبًا بالرمز s^2 ، فإن القسمة على n توفر تقديرًا صغيرًا جدًا للتباين في مجتمع الدراسة. وذلك لأن من المرجح أن تتجمع نقاط البيانات في العينة أكثر حول الوسط الحسابي للعينة أكثر من تجمعها حول الوسط الحسابي لمجتمع الدراسة. إذا قسمنا على $n - 1$ بدلًا من n ، فسنحصل على عدد أكبر قليلًا يكون أقرب إلى التباين في مجتمع الدراسة الحقيقي.

$$s^2 = \frac{1 + 64 + 1 + 49 + 0 + 4 + 1 + 4}{7}$$

$$s^2 \approx 17.71$$

في هذه العينة، $n = 8$

لذا نقسم على $n - 1$ ، أو 7

الخطوة 4 خذ الجذر التربيعي للتغير لإيجاد الانحراف المعياري، s .

$$s \approx \sqrt{17.71}$$

$$s \approx 4.21$$

بما أن السيارات لا تُباع مجزأة بل قطعة واحدة، فإن من المنطقي تقريب الانحراف المعياري إلى 4

الانحراف المعياري يساوي 4 سيارات تقريبًا والوسط الحسابي يساوي 17 سيارة تقريبًا، لذلك فإن البيانات تتضمن بعض التشتت. سوف يبيع موظف المبيعات ما بين 13 و 21 سيارة خلال 68% من الوقت تقريبًا لأن هذه القيم تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.

حاول أن تحلّ! 2. يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها موظف المبيعات خلال فترة

الثمانية أسابيع التالية. ما مقدار التشتت الذي تظهره البيانات؟

12	14	29	10	17	16	18	16
----	----	----	----	----	----	----	----

خطأ شائع

تذكر تربيع الفروق بين كل قيمة بيانات والوسط الحسابي. خلافًا لذلك، سيكون مجموع الفروق الصفري.

يعرض الجدول أدناه عدد النقاط التي سجلها فريق لكرة اليد في جميع المباريات التي لعبها خلال الموسم الرياضي السنوي.

24	13	10	21	18	3
27	18	20	14	7	27

A. ما الوسط الحسابي وما الانحراف المعياري لمجموعة البيانات هذه؟

أوجد الوسط الحسابي لقيم البيانات بإيجاد مجموعها ثم قسمة المجموع على 12

$$\bar{x} \approx 16.8$$

أوجد التباين. استعمل n في المقام لأن البيانات تمثل مجتمع الدراسة بأكمله.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 \approx \frac{51.36 + 14.69 + 46.69 + 17.36 + 1.36 + 191.36 + 103.36 + 1.36 + 10.03 + 8.03 + 96.69 + 103.36}{12}$$

$$\sigma^2 \approx 53.8$$

أوجد الانحراف المعياري بحساب الجذر التربيعي للتباين.

$$\sigma \approx \sqrt{53.8}$$

$$\sigma \approx 7.3$$

إذن، متوسط عدد النقاط التي سجلها الفريق هو 17 نقطة تقريبًا. الانحراف المعياري هو 7.3 نقاط تقريبًا، وهذا يعني أن الفريق سجل من 10 إلى 25 نقطة في 68 بالمئة تقريبًا من مبارياته.

B. لعب الفريق مباراتين بعد انتهاء الموسم، وسجل 7 نقاط في إحدهما و 14 نقطة في الأخرى.

L1	L2	L3	1
24			
13			
10			
21			
18			
3			
27			
L1(1) = 24			

كيف تؤثر نتيجتا هاتين المباراتين في الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد النقاط المسجلة طوال الموسم؟
استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

أدخل جميع الدرجات كقائمة في الحاسبة البيانية.

1-Var Stats
$\bar{x} = 15.92857143$
$\Sigma x = 223$
$\Sigma x^2 = 4291$
$Sx = 7.539274457$
$\sigma x = 7.265026651$
$n = 14$

استعمل قائمة STAT لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

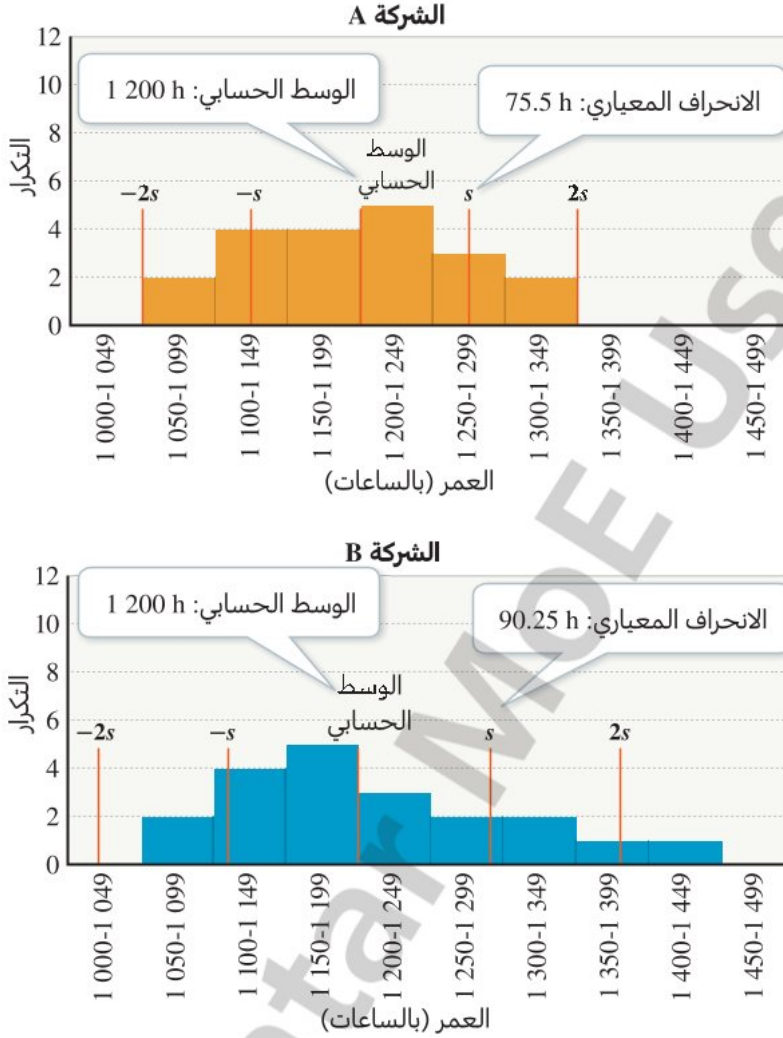
عند تضمين النقاط التي سجلها الفريق في المباراتين الإضافيتين، ينخفض الوسط الحسابي لعدد النقاط إلى 15.9 تقريبًا. يبقى الانحراف المعياري 7.3 تقريبًا.

3. حاول أن تحل! ما مدى النقاط التي سجلها الفريق في 95% من مبارياته خلال الموسم الرياضي السنوي؟

نصيحة دراسية

استعمل الحرف اليوناني σ (sigma) للانحراف المعياري عند العمل على مجتمع دراسة. استعمل s عند العمل على عينة.

يبين المدرجان التكراريان أدناه أعمار عيّنتين من المصابيح الكهربائية من شركتين. يعرض المدرج التكراري الأول عينة من إنتاج الشركة A ويعرض المدرج التكراري الثاني عينة من إنتاج الشركة B. تشير الخطوط الحمراء إلى الوسط الحسابي وكل انحراف معياري عن الوسط الحسابي. قارن بين توزيعي الأعمار لعلامتي المصباح الكهربائي.



استعمل البنية

كيف يساعدك شكلا المدرجين التكراريين على مقارنة الانحرافين المعياريين؟

يبلغ متوسط أعمار كلا النوعين من المصابيح 1 200 ساعة تقريبًا.

الانحراف المعياري لمجموعة بيانات الشركة A أصغر من الانحراف المعياري لمجموعة بيانات الشركة B. هذا يعني أن التشتت في أعمار المصابيح الكهربائية التي من إنتاج الشركة A يبدو أقل.

بما أن أعمار مصابيح الشركة A تتجمع قرب الوسط الحسابي بصورة ثابتة، فإن أعمار مصابيح الشركة A قابلة للتوقع أكثر من أعمار مصابيح الشركة B.

حاول أن تحل! 4. قارن بين مصابيح الشركة C، التي يبلغ الوسط الحسابي لأعمارها 1 250 ساعة مع انحراف معياري مقداره 83 ساعة، ومصابيح الشركتين A و B.

لفظيًا

الانحراف المعياري هو أحد مقاييس التشتت. يشير الانحراف المعياري إلى مقدار انحراف القيم في مجموعة بيانات عن الوسط الحسابي، وهو الجذر التربيعي للتباين. التباين هو متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي. عندما يكون توزيع البيانات طبيعيًا (في منحنى على شكل جرس)، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري يصفان مجموعة البيانات بالكامل.

مخطط

الانحراف المعياري لعينة

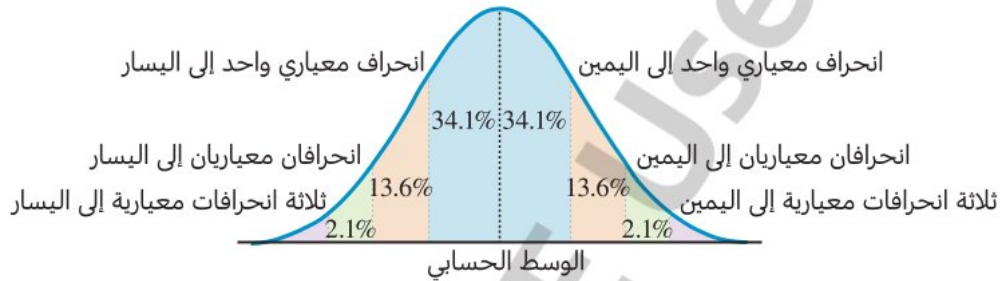
$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

مجموع مربعات الانحرافات
عن الوسط الحسابي.

الانحراف المعياري لمجتمع دراسة

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

بيانيًا



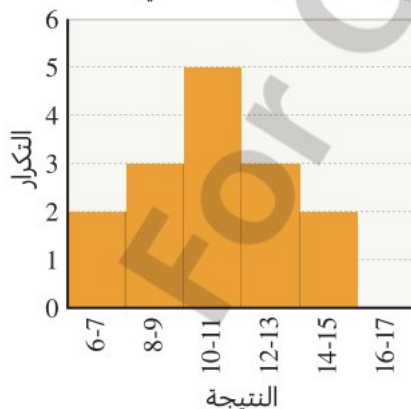
طبق فهمك

في التمارين 5-8، استعمل مجموعتي البيانات التاليتين:

العينة A: 2, 5, 1, 2, 3, 3, 4, 3

العينة B: 10, 5, 1, 2, 3, 7, 4, 3

- ما الذي يمكن تحديده عند استعمال المدى لمقارنة تشتت البيانات في مجموعتي البيانات؟
- أوجد الانحراف المعياري لكل مجموعة بيانات.
- كيف يمكن استعمال الانحراف المعياري لمقارنة تشتت البيانات في مجموعتي البيانات؟
- بناءً على المدرج التكراري أدناه، ما هي قيم البيانات التي تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي؟



عبّر عن فهمك

- السؤال الأساس لماذا طريقة تشتت البيانات مهمة؟
- عقم ما هي خطوات إيجاد الانحراف المعياري؟
- حلّل الخطأ يقول فواز إن الانحراف المعياري هو مقياس لمدى انحراف القيم في مجموعة البيانات عن الوسيط. هل فواز على صواب؟ وضح إجابتك.
- استعمل البنية ماذا يحدث لكل من الوسط الحسابي والمدى والانحراف المعياري لمجموعة بيانات إذا أضفنا 10 إلى كل قيمة من قيم البيانات في هذه المجموعة؟ وضح إجابتك.

في التمرينين 13 و 14، أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل مجموعة بيانات، ثم استعمل هذين المقدارين

لمقارنة تغير كل زوج من مجموعات البيانات. انظر الأمثلة 1 و 2 و 4

13. مجموعة البيانات A: 6, 9, 1, 2, 3, 4, 4, 5

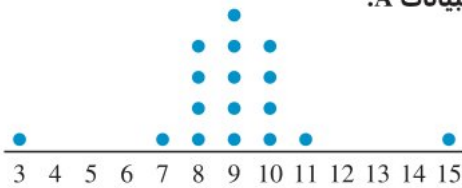
مجموعة البيانات B: 10, 5, 5, 2, 3, 7, 4, 8

14. مجموعة البيانات A	مجموعة البيانات B
21.25	41.50
42.25	29.25
2.00	39.75
40.50	40.00
19.75	38.25
57.75	51.25
39.25	42.00
78.75	31.00
38.50	37.75
62.25	49.00

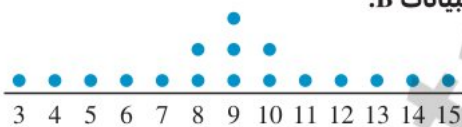
15. أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل مجموعة بيانات، ثم استعمل هذين المقدارين لمقارنة تغير مجتمع

الدراسة الممثلين بالتمثيلين بالنقاط أدناه. انظر المثالين 3 و 4

مجموعة البيانات A:



مجموعة البيانات B:



في التمارين 16-18، لنفترض أن قيم البيانات في مجموعتي البيانات الموزعة طبيعيًا A و B أعداد صحيحة من 0 إلى 30

ضمنًا. حدّد مدى القيم الذي يلائم الوصف المعطى. انظر المثال 2

مجموعة البيانات A: الوسط الحسابي: 12؛

الانحراف المعياري: 2

مجموعة البيانات B: الوسط الحسابي: 18؛

الانحراف المعياري: 3

16. كل قيم البيانات التي تقع ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات A.

17. كل قيم البيانات التي تبعد أكثر من انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات A.

18. كل قيم البيانات التي تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات B.

9. **عمق** تتضمن مجموعتان من البيانات العدد نفسه من القيم.

الوسط الحسابي للمجموعة الأولى يساوي 7.2 والانحراف

المعياري يساوي 1.25، الوسط الحسابي للمجموعة الثانية

يساوي 7.2 والانحراف المعياري يساوي 2.5

a. كيف يمكنك معرفة مجموعة البيانات الأكثر تشتتًا؟

b. ما وجه الاختلاف بين شكل المدرج التكراري لمجموعة

البيانات الأولى وشكل المدرج التكراري لمجموعة

البيانات الثانية؟

10. **حلّل الخطأ** حسب خالد الانحراف المعياري لمجموعة بيانات

كما هو موضح أدناه. يتن خطأ خالد وصّحه.

$$\sigma^2 = \frac{(-4) + 2 + (-1) + (-3) + 5 + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\sigma = \sqrt{0} = 0$$

X

11. **استعمل الأدوات المناسبة**

تعرض الشاشة المجاورة

المتغيرات الإحصائية لمجموعة

بيانات تم إدخالها إلى الحاسبة

البيانية. هل يقع العدد 8.7

ضمن انحرافين معياريين عن

الوسط الحسابي لمجموعة البيانات؟

وضّح إجابتك.

12. **مهارات التفكير العليا** تتضمن مجموعة بيانات قيمة تقع على

بعد انحراف معياري واحد إلى يسار الوسط الحسابي وتساوي

76.2، وقيمة أخرى تقع على بعد انحراف معياري واحد إلى

يمين الوسط الحسابي وتساوي 105.4

a. أوجد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات.

b. أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات.

c. أوجد القيمتان اللتان تقعان على بعد انحرافين معياريين

عن الوسط الحسابي.

	لا	نعم
7.51	☐	☐
4.18	☐	☐
4.16	☐	☐
10.00	☐	☐

22. لنأخذ مجموعة بيانات بوسط حسابي يساوي 5.72 وانحراف معياري يساوي 1.55، هل تقع الأعداد الواردة في الجدول ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي؟ اختر نعم أو كلا.

23. اختبار SAT/ACT إذا كان التباين في مجموعة بيانات مكونة من 8 قيم يساوي 144، ما الانحراف المعياري لهذه البيانات؟

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) ليس أيًا من هذه الإجابات

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
منتديات صقر الجنوب التعليمية
www.jnob-jo.com

24. مهمة أدائية يبيّن الجدول أدناه متوسط المسافات التي تجتازها الكرة في عام 2015 للاعبين الجولف المحترفين من الذكور والإناث. الوسط الحسابي للرجال 310.9 ياردة، والوسط الحسابي للنساء 267.2 ياردة.

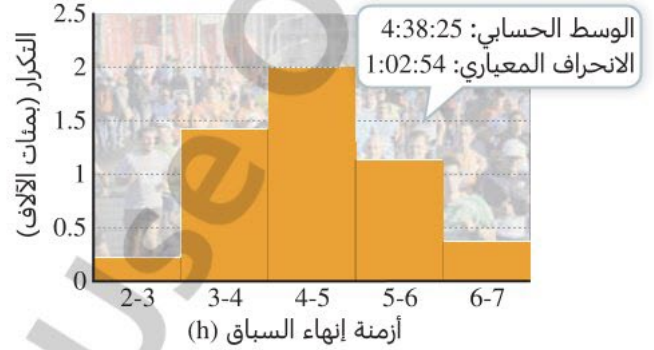
متوسط المسافة للنساء	متوسط المسافة للرجال
274.4	317.7
269.4	315.2
269.2	313.7
267.6	311.6
267.1	309.9
266.2	309.8
265.3	309.0
265.1	308.2
264.0	307.7
263.0	306.1

الجزء A أوجد مدى كل مجموعة من البيانات. ما الذي يمكن أن تعرفه من خلال المدى عن جنس اللاعب ومتوسط المسافة؟

الجزء B احسب الانحراف المعياري لكل عينة. كيف يمكن استعمال الانحراف المعياري لفهم العلاقة بين جنس اللاعب ومتوسط المسافة بشكل أفضل؟

الجزء C ما أوجه الشبه والاختلاف بين المدرجين التكراريين لمتوسط المسافة للرجال والنساء؟

19. فكر وثابر في الحل يبيّن المدرج التكراري أدناه عدد العدائين الذين أنهوا جميع سباقات الماراثون خلال سنة معينة في أزمّة مجموعها أقل من 7 ساعات. كيف يمكنك تقدير عدد العدائين الذين يبعد مجموع أزمّتهم في سباقات الماراثون أقل من انحرافين معياريين إلى اليسار من الوسط الحسابي؟



20. فكر وثابر في الحل في العام الماضي، كان عدد شجيرات أزهار الكوبية 12 شجيرة، وكان الوسط الحسابي لعدد الأزهار 14 زهرة لكل منها، مع انحراف معياري مقداره 2 يبيّن التمثيل بالنقاط أدناه عدد الأزهار على نفس الشجيرات هذا العام بعد تسميدها بنوع جديد من السماد النباتي. ما الاستنتاجات التي يمكن استخلاصها عن هذا النوع الجديد من السماد النباتي وعدد الأزهار؟

شجيرات الكوبية التي تم تسميدها بالسماد الجديد



21. فكر وثابر في الحل في اختبار موحد باستعمال إحصائيات معطاة، 68% من الدرجات تقريبًا تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي و 95% من الدرجات تقريبًا تقع ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي.

متوسط الدرجات: 450 الانحراف المعياري: 125

إجمالي عدد الخاضعين للاختبار: 78 000

ما هي درجتك إذا كنت تستطيع القول إن درجتك أعلى من درجات 95% من الأشخاص الذين خضعوا للاختبار؟ ما عدد الخاضعين للاختبار الذين يمكنهم قول ذلك؟

يلعب فريقان لكرة السلة في نفس الملعب. يبيّن الجدول أدناه نتائج مباريات الفريقين في الموسم علمًا أنه لم يكن هناك أي تعادلات.

نتائج كرة السلة

☆ انتصارات ☆		
	على أرضه	خارج أرضه
الفريق الأول	11 من 16	08 من 14
الفريق الثاني	18 من 26	18 من 30

A. كيف يمكن تنظيم هذه البيانات في جدول؟

B. ابحث عن العلاقات كيف يمكن تحليل البيانات لتحديد ما إذا كانت تدعم الادعاء بأن احتمالات فوز الفريق تكون أكبر عندما يلعب على أرضه؟

أستطيع... تنظيم البيانات
في جداول تكرارية مزدوجة
واستعمالها لاستخلاص
استنتاجات.

معیار الدرس

11F.6.4

المصطلحات

- joint frequency تکرار مزدوج
- marginal frequency تکرار هامشی
- joint relative frequency تکرار نسبی مزدوج
- marginal relative frequency تکرار نسبی هامشی
- conditional relative frequency تکرار نسبی مشروط

السؤال الأساس

كيف يمكن استعمال الجداول التكرارية المزدوجة لتحليل البيانات؟

مثال 1

تفسیر جدول تکراری مزدوج

يخطط مالكو سلسلة من المطاعم لإضافة صنف جديد إلى قائمة الطعام التي يقدمونها. طُلب من الزبائن اختيار صنف واحد من صنفين جديدين. يبيّن الجدول أدناه النتائج. ما الاتجاهات التي تبيّنها النتائج؟

يقع التكرار المزدوج عند تقاطع الصف مع العمود.		يقع التكرار الهامشي على الهامشي، أو الهامش، أو على طرف العمود أو الصف.	
المجموع	بيتزا بالخضار	همبرجر بالجبن	
الذكور	40	50	
الإناث	75	60	
المجموع	115	110	

يشير **التكرار المزدوج** إلى تكرار خيار محدد لفئة معينة؛ على سبيل المثال، عدد الذكور الذين اختاروا الهمبرجر بالجين.

يشير **التكرار الهامشي** إلى مجموع التكرارات لكل خيار أو فئة، مثل مجموع الإناث المشاركات في الاستبيان.

تبيّن التكرارات المزدوجة أن الزبائن الذكور يفضلون الهمبرجر بالجبن على البيتزا بالخضار، بينما تفضل الإناث البيتزا بالخضار على الهمبرجر بالجبن.

تبتين التكرارات الهامشية أن جميع المشاركين في الاستبيان أظهروا تفضيلاً طفيفاً للبيتزا بالخضار على الهمبرجر بالجبن، وتبين أيضاً أن عدد الإناث المشاركات في الدراسة المسحية أكبر من عدد الذكور المشاركين فيها.

نصيحة دراسية

يمكن للجدول التكراري المزدوج
إظهار العلاقات الممكنة بين
مجموعتين من البيانات النوعية.

حاول أن تحل! 1. ماذا يمكنك أن تستنتج من التكرارات الهامشية عن عدد الذكور والإناث المشاركين في الاستبيان؟

مثال 2

تفسير جدول تكراري نسبي مزدوج

ماذا تكشف نتائج الدراسة المسحية عن الخيارات التفضيلية للإناث والذكور في ما يخص الهمبرجر بالجبن؟

التكرار النسبي المزدوج هو نسبة التكرار المزدوج إلى المجموع (أو النسبة المئوية للتكرار المزدوج).

التكرار النسبي الهامشي هو نسبة التكرار الهامشي إلى المجموع (أو النسبة المئوية للتكرار الهامشي).

المجموع	بيتزا بالخضار	همبرجر بالجبن	
الذكور	$\frac{40}{225} \approx 18\%$	$\frac{50}{225} \approx 22\%$	$\frac{90}{225} \approx 40\%$
الإناث	$\frac{75}{225} \approx 33\%$	$\frac{60}{225} \approx 27\%$	$\frac{135}{225} \approx 60\%$
المجموع	$\frac{115}{225} \approx 51\%$	$\frac{110}{225} \approx 49\%$	$\frac{225}{225} \approx 100\%$

من بين الزبائن الذين شملتهم الدراسة المسحية، 22% تقريباً من الذكور اختاروا الهمبرجر بالجبن و 27% تقريباً من الإناث اخترن الهمبرجر بالجبن. إذن، نسبة الإناث اللواتي اخترن الهمبرجر بالجبن أكبر من نسبة الذكور الذين اختاروا الهمبرجر بالجبن.

حاول أن تحل! 2. كيف يمكنك أن تعرف ما إذا كانت نسبة الزبائن الذين اختاروا الهمبرجر بالجبن أكبر أم نسبة الزبائن الذي اختاروا البيتزا بالخضار؟

حساب التكرار النسبي المشروط

مثال 3

باستعمال بيانات المثالين 1 و 2، استنتج فريق التسويق أن الإناث يفضلن الهمبرجر بالجبن أكثر من الذكور. هل تدعم نتائج الدراسة المسحية هذا الاستنتاج؟

التكرار النسبي المشروط هو نسبة التكرار المزدوج إلى التكرار الهامشي المرتبط به.

إن حساب التكرار النسبي المشروط لكل صف سيعدل الفروق بين عدد الذكور وعدد الإناث من الزبائن الذين شاركوا في الدراسة المسحية.

المجموع	بيتزا بالخضار	همبرجر بالجبن	
الذكور	$\frac{40}{90} \approx 44\%$	$\frac{50}{90} \approx 56\%$	$\frac{90}{90} \approx 100\%$
الإناث	$\frac{75}{135} \approx 56\%$	$\frac{60}{135} \approx 44\%$	$\frac{135}{135} \approx 100\%$

$$\frac{\text{التكرار المزدوج}}{\text{التكرار الهامشي}} = \text{التكرار النسبي المشروط}$$

النتائج لا تدعم استنتاج فريق التسويق. تبين التكرارات النسبية المشروطة أنه، على الرغم من أن 56% من الذكور يفضلون الهمبرجر بالجبن، إلا أن 44% فقط من الإناث يفضلن الهمبرجر بالجبن.

حاول أن تحل! 3. ما الاستنتاج الذي يمكن لفريق التسويق استخلاصه عن خيارات الذكور والإناث في ما يخص البيتزا بالخضار؟ بزر إجابتك.

تطبيق

خطأ شائع

لإيجاد التكرار النسبي، اقسم كل تكرار على مجموع التكرارات الموجود في الزاوية السفلية اليمنى للجدول التكراري. اكتب كل تكرار نسبي في صورة كسر اعتيادي أو كسر عشري أو نسبة مئوية.

الاستيعاب المفاهيمي

ابن الحجج الرياضية

ما الذي يمكن استنتاجه من التكرارات النسبية المشروطة عن العلاقة بين جنس الزبون ونوع صنف الطعام المختار؟

مثال 4

تفسير التكرار النسبي المشروط

استعمل البنية

التكرارات النسبية المشروطة المحسوبة للصفوف ليست نفس التكرارات النسبية المشروطة المحسوبة للأعمدة. ما الفرق بين الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها من خلال النظر إلى الجدول في المثال 3 والأسئلة التي يمكن الإجابة عنها من خلال النظر إلى الجدول في المثال 4؟

خلص فريق التسويق أيضًا إلى أن هناك تغييرًا أكبر في النسب المئوية للرجال والنساء الذين يحبون البييتزا بالخضار من النسب المئوية للرجال والنساء الذين يفضلون الهمبرجر بالجبن. هل تدعم نتائج الدراسة المسحية هذا الاستنتاج؟

إن حساب التكرار النسبي المشروط لكل عمود يمكّنك من تحليل ما يفضله الذكور والإناث لكل فئة من الطعام.

	همبرجر بالجبن	بييتزا بالخضار
الذكور	$\frac{50}{110} \approx 45\%$	$\frac{40}{115} \approx 35\%$
الإناث	$\frac{60}{110} \approx 55\%$	$\frac{75}{115} \approx 65\%$
المجموع	$\frac{110}{110} = 100\%$	$\frac{115}{115} = 100\%$

نتائج الدراسة المسحية تدعم استنتاج فريق التسويق. تظهر التكرارات النسبية المشروطة أن 65% من الزبائن الذين يفضلون البييتزا بالخضار من الإناث و 35% فقط من الذكور. من بين أولئك الذين يفضلون الهمبرجر بالجبن، 55% إناث و 45% ذكور.

حاول أن تحل! 4. ما الاستنتاج الذي يمكن استخلاصه إذا كانت النسبة المئوية للذكور تساوي النسبة المئوية للإناث في صفوف هذا الجدول؟

مثال 5

تفسير تكرارات البيانات

	يشجعون الفريق B	يشجعون الفريق A	المجموع
الذكور	72	65	137
الإناث	49	44	93
المجموع	121	109	230

سُئلت عيّنة عشوائية من المشجعين أثناء دخولهم إلى ملعب كرة القدم ما إذا كانوا يشجعون الفريق A أم الفريق B في مبارياتهما المنتظرة ضمن دوري لكرة القدم. تم تصنيف العيّنة حسب الجنس والفريق.

A. ماذا يمثل التكرار النسبي المزدوج $\frac{65}{230}$ في هذا السياق؟

$\frac{65}{230}$ → التكرار المزدوج
→ مجموع المشجعين المشاركين في الاستبيان

ابحث عن التكرار المزدوج 65 في الجدول. يمكنك أن تلاحظ أن عدد الذكور الذين يشجعون الفريق A هو 65، إذن تمثل النسبة $\frac{65}{230}$ نسبة الذكور من مشجعي الفريق A إلى مجموع المشجعين المشاركين في الاستبيان.

B. ماذا يمثل التكرار النسبي المشروط $\frac{49}{93}$ في هذا السياق؟

$\frac{49}{93}$ → التكرار المزدوج
→ التكرار الهامشي المرتبط به

يمثل الكسر $\frac{49}{93}$ نسبة مشجعات الفريق B إلى مجموع المشجعات الإناث الذين شملهم الاستبيان.

حاول أن تحل! 5. ماذا يمثل التكرار النسبي المشروط $\frac{72}{137}$ في هذا السياق؟

لفظيًا

تبيّن الجداول التكرارية المزدوجة العلاقات بين مجموعتين من البيانات النوعية. يمكن أن تكون المدخلات تكرارات أو تكرارات نسبية. المدخلات في متن الجدول هي **تكرارات مزدوجة** (أعداد) أو **تكرارات نسبية مزدوجة** (نسب). المدخلات في عمود أو صف المجاميع هي **تكرارات هامشية** أو **تكرارات نسبية هامشية**.

تبيّن **التكرارات النسبية المشروطة** تكرار الاستجابات لحالة معينة، أو نسبة التكرارات المزدوجة إلى التكرار الهامشي المناظر.

جداول

خيارات أوقات مشاهدة الأفلام

	المجموع	المساء	بعد الظهر
الطلاب	$\frac{140}{200} = 70\%$	$\frac{50}{200} = 25\%$	$\frac{90}{200} = 45\%$
الراشدون	$\frac{60}{200} = 30\%$	$\frac{40}{200} = 20\%$	$\frac{20}{200} = 10\%$
المجموع	$\frac{200}{200} = 100\%$	$\frac{90}{200} = 45\%$	$\frac{110}{200} = 55\%$

70% من المشاركين في الاستبيان من الطلاب.

20 راشدًا من أصل 200 مشارك في الاستبيان، أو ما نسبته 10% من المشاركين، هم راشدون يفضلون مشاهدة الأفلام في فترة بعد الظهر.

التكرار النسبي المشروط

	المجموع	المساء	بعد الظهر
الطلاب	$\frac{140}{140} = 100\%$	$\frac{50}{140} \approx 36\%$	$\frac{90}{140} \approx 64\%$
الراشدون	$\frac{60}{60} = 100\%$	$\frac{40}{60} \approx 67\%$	$\frac{20}{60} \approx 33\%$

من أصل جميع الراشدين المشاركين في الاستبيان، 33% يفضلون مشاهدة الأفلام في فترة بعد الظهر.

التكرار النسبي المشروط

	المساء	بعد الظهر
الطلاب	$\frac{50}{90} \approx 56\%$	$\frac{90}{110} \approx 82\%$
الراشدون	$\frac{40}{90} \approx 44\%$	$\frac{20}{110} \approx 18\%$
المجموع	$\frac{90}{90} = 100\%$	$\frac{110}{110} = 100\%$

من أصل جميع المشاركين في الاستبيان الذين يفضلون مشاهدة الأفلام في المساء، 44% هم من الراشدين.

طبّق فهمك

في التمارين 5-8، يختار الزبائن بين المنتج A أو B. اختار 20 ذكرًا و 10 إناث المنتج A. 5 بين 20 زبونيًا اختاروا المنتج B كانوا ذكورًا.

5. أنشئ جدولًا تكراريًا مزدوجًا لتنظيم هذه البيانات.

6. أنشئ جدولًا تكراريًا نسبيًا مزدوجًا لتنظيم هذه البيانات.

7. احسب التكرارات النسبية المشروطة للذكور والإناث.

هل من المنطقي الاستنتاج أن الذكور يفضلون المنتج A أكثر من الإناث؟

8. احسب التكرارات النسبية المشروطة للمنتج A وللمنتج B.

هل من المنطقي الاستنتاج أن الزبون الذي يفضل المنتج B من المرجح أكثر أن يكون أنثى؟

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال الجداول

التكرارية المزدوجة لتحليل البيانات؟

2. تواصل بدقة ما أوجه الشبه والاختلاف بين التكرارات

المزدوجة والتكرارات الهامشية؟

3. ابحث عن العلاقات ما العلاقة بين التكرارات النسبية

المشروطة والتكرارات المزدوجة والتكرارات الهامشية؟

4. حلّ الخطأ يقول سعيد إن التكرار النسبي الهامشي

لمتغير معطى هو 10، هل يمكن أن يكون ما يقوله سعيد

صحيحًا؟ وضح تبريرك المنطقي.

في التمارين 13-16، في استبيان شمل طلاب الصفين الحادي عشر والثاني عشر عن فريق كرة القدم المفضل لديهم، الفريق A أم الفريق B، اختار 30 طالباً من الصف الحادي عشر و 10 طلاب من الصف الثاني عشر الفريق A، و 5 من بين 20 طالباً يفضلون الفريق B هم من طلاب الصف الحادي عشر.

انظر الأمثلة 1-4

أنشئ جدولاً تكرارياً مزدوجاً لتنظيم هذه البيانات.

13. هل من المنطقي القول إن الفريق المفضل لدى أكثر الطلاب هو الفريق A؟ وضح إجابتك.

14. هل من المنطقي القول إن عدد طلاب الصف الثاني عشر المشاركين في الاستبيان أكثر من عدد طلاب الصف الحادي عشر؟ وضح إجابتك.

احسب التكرارات النسبية المشروطة.

15. هل من المنطقي القول إن طلاب الصف الحادي عشر يفضلون الفريق A أكثر من طلاب الصف الثاني عشر؟ وضح إجابتك.

16. هل الطالب الذي يفضل الفريق B من المرجح أكثر أن يكون في الصف الثاني عشر من أن يكون في الصف الحادي عشر؟ وضح إجابتك.

في التمارين 17-23، في الجدول التكراري المزدوج أدناه، التكرارات مبينة في أعلى كل خانة باللون الأزرق، والنسب التكرارية مبينة في الأسفل باللون الأحمر. معظم التكرارات غير

مبينة. انظر الأمثلة 1-5

متخرج من المدرسة الثانوية؟	الخيار A	الخيار B	المجموع
نعم	16 0.08	—	0.56
لا	—	24	—
المجموع	—	—	—

جميع الحقوق محفوظة
وزارة التربية والتعليم العالي
القطرية
تم نقل ورفع الملف من قبل
مكتبات صقر الجنوب التعليمية
www.job-jo.com

17. أكمل الجدول أعلاه.

18. احسب التكرارات النسبية المشروطة للخيارين نعم ولا.

19. احسب التكرارات النسبية المشروطة للخيارين A و B.

20. هل من المرجح أن يفضل متخرج من المدرسة الثانوية الخيار A أم الخيار B؟ وضح إجابتك.

21. إذا كان شخص يفضل الخيار A، هل من المرجح أن يكون متخرجاً من المدرسة الثانوية؟ وضح إجابتك.

22. ماذا يمثل التكرار النسبي المزدوج $\frac{64}{200}$ في هذا السياق؟

23. ماذا يمثل التكرار النسبي المشروط $\frac{96}{120}$ في هذا السياق؟

9. **بتر منطقياً** تم استطلاع آراء أعداد متساوية من طلاب الصف الحادي عشر والصف الثاني عشر عما إذا كانوا يفضلون الصف A أم الصف B من الطعام. هل من المنطقي الاستنتاج أن أكثر طلاب الصف الحادي عشر يفضلون الصف B في حين أن أكثر طلاب الصف الثاني عشر يفضلون الصف A؟ وضح إجابتك.

المجموع	الصف B	الصف A
0.5	0.4	0.1
0.5	0.2	0.3
1.0	0.6	0.4

10. **حلل الخطأ** توصل هاشم إلى التعميم التالي بناءً على الجدول التكراري المزدوج أدناه. بتر خطأ هاشم وضح.

أي مادة تفضل؟		
المجموع	اللغة العربية	الرياضيات
90	45	45
60	30	30
150	75	75

يفضل الطلاب المواطنين الرياضيات أكثر من الطلاب المقيمين.

X

11. **ابحث عن العلاقات** ما العلاقة بين التكرارات النسبية المزدوجة والتكرارات النسبية الهامشية في الجداول التكرارية النسبية المزدوجة؟

12. **مهارات التفكير العليا** أجريت دراسة مسحية على مجموعة من الطلاب حول الزمن الذين يقضونه في الاستعداد لاختبار.

- 10% من الطلاب الذين درسوا مدة 3 ساعات أو أكثر، ركبوا في الاختبار.
- 40% من الطلاب الذين درسوا مدة تقل عن 3 ساعات نجحوا في الاختبار.
- طالبان ممن درسوا مدة 3 ساعات أو أكثر ركبوا في الاختبار.
- 4 طلاب ممن درسوا مدة تقل عن 3 ساعات نجحوا في الاختبار.

a. أنشئ جدولاً تكرارياً مزدوجاً يظهر العلاقة بين مدة الدراسة والنجاح في الاختبار.

b. هل تبدو هذه العلاقة وثيقة؟ وضح إجابتك.

24. **ابن الحجج الرياضية** هل هناك علاقة وثيقة بين دخل الشخص وما إذا كان يؤيد الاستفتاء أم لا؟ بَرِّر إجابتك.

هل تؤيد الاستفتاء؟			
المجموع	لا	نعم	الدخل
100	20	80	$\leq$ QR 400 000
50	10	40	$>$ QR 400 000
150	30	120	المجموع

25. **فكر وثابر في الحل** لا يرضى البستاني إلا إذا حملت شجيرة الكوبية 14 زهرة على الأقل. كيف يمكن تنظيم البيانات الموضحة في التمثيلين بالنقاط أدناه في جدولين تكراريين مزدوجين لاستنتاج العلاقة بين نوع السماد الجديد وعدد أزهار الكوبية؟

الكوبية من دون السماد الجديد



الكوبية مع السماد الجديد



26. **ابن الحجج الرياضية** استنادًا إلى بيانات الدراسة المسحية أدناه، يستنتج فريق التسويق في أحد الخطوط الجوية أن شخصًا يتراوح عمره بين 18 و 24 سنة من المرجح أكثر أن لا يكون قد سافر على متن طائرة تجارية من شخص عمره 25 سنة أو أكثر. هل تتفق مع هذا الاستنتاج؟ بَرِّر إجابتك.

المطار			
هل سبق وسافرت على متن طائرة تجارية؟			
المجموع	لا	نعم	
279	81	198	18-24 سنة
2 987	448	2 539	25 سنة أو أكثر
3 266	529	2 737	المجموع

27. لَنأخذ جدولًا تكراريًا مزدوجًا. اختر كل ما ينطبق.

- (A) مجموع كل التكرارات المزدوجة يساوي مجموع التكرارات.
- (B) مجموع كل التكرارات الهامشية يساوي مجموع التكرارات.
- (C) مجموع كل التكرارات الهامشية في أحد الصفوف يساوي مجموع التكرارات.
- (D) مجموع كل التكرارات المزدوجة في أحد الأعمدة يساوي التكرار الهامشي المكتوب في أسفل العمود.
- (E) التكرار النسبي يساوي نسبة التكرار المزدوج إلى التكرار الهامشي.

28. **اختبار SAT/ACT** في جدول تكراري مزدوج، التكرار المزدوج

في إحدى الخانات هو 8 والتكرار الهامشي للصف الذي يتضمنها هو 32، ما التكرار النسبي المشروط لهذه الخانة؟

- (A) 0.12
- (B) 0.20
- (C) 0.25
- (D) 0.40
- (E) 0.50

29. **مهمة أدائية** تنظم مدرسة ثانوية دورة تحضيرية للطلاب الذين يريدون إعادة اختبار امتحان القبول في الجامعة.

- من بين 25 طالبًا شاركوا في الدورة التحضيرية، حصل 20 طالبًا في الاختبار الثاني على 50 نقطة على الأقل أعلى من الاختبار الأصلي.
- بشكل عام، أجرى 100 طالب الاختبار، وحصل 50 طالبًا في الاختبار الثاني على 50 نقطة على الأقل أعلى من الاختبار الأصلي.

الجزء A أنشئ جدولًا تكراريًا مزدوجًا لتنظيم البيانات.

الجزء B قد تتوقف المدرسة عن تنظيم الدورات التحضيرية لأن عددًا أكبر من الطلاب حصلوا على 50 نقطة على الأقل أعلى في الاختبار من دون الالتحاق بالدورة التحضيرية. هل تتفق مع هذا القرار؟ إن لم تكن متفقًا مع القرار، كيف يمكنك استعمال جدول تكراري مزدوج لبناء حجة رياضية تقنع إدارة المدرسة على مواصلة تنظيم الدورات التحضيرية؟

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تستعمل الإحصاء لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

- التكرار النسبي المشروط
- التكرار المزدوج
- التوزيع الطبيعي
- الانحراف المعياري
- التكرار النسبي المزدوج

2. _____ هو مقياس للتشتت يبين مدى انحراف البيانات عن الوسط الحسابي.

3. يشير _____ إلى تكرار خيار محدد بالنسبة لفئة معينة.

4. _____ هو توزيع للبيانات يشكل منحنى على شكل جرس.

5. _____ هو نسبة التكرار المزدوج إلى التكرار الهامشي المرتبط به.

مراجعة المفاهيم والمهارات

تحليل تمثيل البيانات

الدرس 5-1

تدرب وحل مسائل

6. **عَمِّم** في أي من المواقف يكون مخطط الصندوق وطرفيه الطريقة الأفضل لعرض مجموعة البيانات؟

7. في أي من المواقف يكون التمثيل بالنقاط الطريقة الأفضل لعرض مجموعة البيانات؟

أنشئ عرضاً لمجموعة البيانات أدناه يعطي الإجابة الأفضل عن السؤال المطروح. وضح تبريرك المنطقي.

8. ما تكرار قيمة البيانات 35؟

30	33	35	39
37	35	31	36
39	30	35	35

في التمرينين 9 و 10، اختر عرض البيانات الأنسب للإجابة عن السؤال المتعلق بمجموعة البيانات. وضح إجابتك.

9. ما التكرارات لكل فترة من نقطتين؟

10. ما عدد قيم البيانات الأصغر من قيمة معينة في مجموعة البيانات؟

مراجعة سريعة

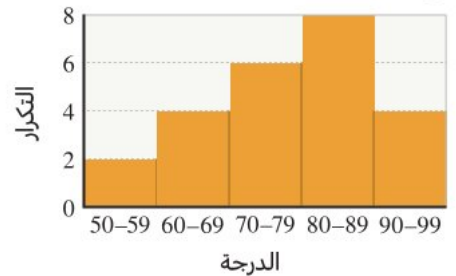
يبين **التمثيل بالنقاط** عدد القيم في مجموعة بيانات. ويبين **المدرج التكراري** توزيع القيم في مجموع بيانات ضمن آماذ أو فترات. ويبين **مخطط الصندوق وطرفيه** النزعة المركزية لتوزيع البيانات وتشتتها باستعمال ملخص الخمسة أعداد.

مثال

يبين الجدول أدناه درجات اختبار طلاب الصف الحادي عشر في اختبار الرياضيات. أنشئ مدرجاً تكرارياً للبيانات.

83	92	56	63	80	91	78	59
75	79	62	85	81	90	82	74
60	95	88	82	77	74	68	82

وزّع الدرجات على فترات طول كل منها 10

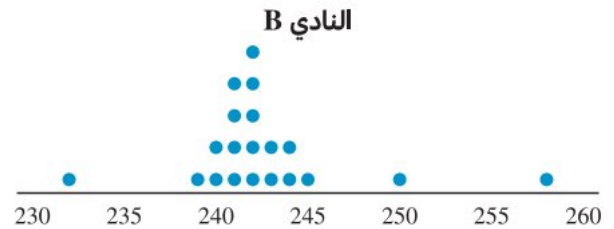
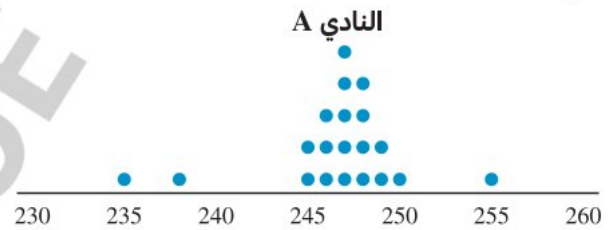


مراجعة سريعة

يمكن مقارنة مجموعات البيانات باستعمل مقاييس النزعة المركزية والتشتت. يشير شكل البيانات في عروض البيانات إلى العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية. يصف متوسط الانحراف المطلق (MAD) مدى انحراف قيم البيانات عن الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات، ويساوي الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة.

مثال

يرغب حمد في الاشتراك في نادي غولف جديد. ويقوم بجمع البيانات عن متوسط مسافة القيادة (بالياردة) لنوعين مختلفين من الأندية. يظهر المخططان النقطيان البيانات لكل نوع.



إذا كان حمد مهتمًا بزيادة مسافة قيادته، بأي نادٍ عليه الاشتراك؟

تظهر البيانات أن للنادي A مسافة قيادة أفضل. معظم النقاط في عرض بيانات النادي A من 245 إلى 250 ياردة، أما معظم النقاط في عرض بيانات النادي B فمجموعة من 239 إلى 245 ياردة. لذلك، ينبغي على حمد الاشتراك بالنادي A.

تدرب وحلّ مسائل

11. **ابن الحجج الرياضية** إذا كان الوسط الحسابي للقيم في مجموعة بيانات معطاة أكبر من وسيط هذه القيم، ماذا يعني ذلك بالنسبة إلى البيانات؟

12. قارن بين قيمتي الوسط الحسابي ومتوسط الانحراف المطلق لمجموعتي البيانات أدناه، ثم قارن بين قيمتي الوسيط والمدى الربيعي. حدّد المقاييس الأفضل لمقارنة مجموعتي البيانات. وضح تبريرك المنطقي.

مجموعة البيانات A			
3	8	7	5
7	1	4	9
5	4	2	6
4	1	4	3

مجموعة البيانات B			
4	6	2	5
3	7	8	6
8	2	9	3
6	2	8	6

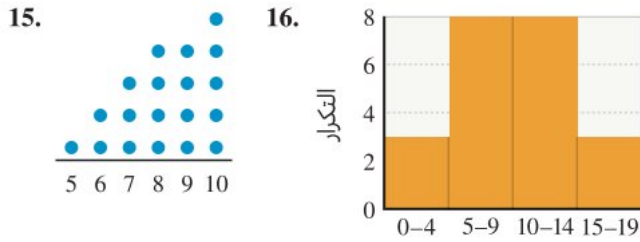
13. **نمذج** بلغ متوسط عدد النقاط التي حققها فريق كرة السلة في مدرسة جاسم في العام الماضي 78 نقطة لكل مباراة مع متوسط انحراف مطلق يساوي 4.5 نقاط. يبيّن الجدول أدناه عدد النقاط التي حققها الفريق في مبارياته هذا العام. ما وجه المقارنة بين عدد نقاط الفريق خلال هذين العامين؟

83	65	90	88	75	82
68	78	80	82	94	73
78	85	80	81	74	88

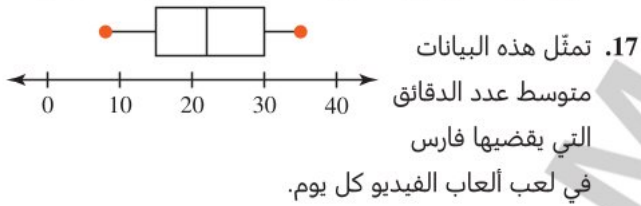
تدرب وحل مسائل

14. **ابحث عن العلاقات** لدينا مجموعتان من البيانات A و B. في مجموعة البيانات A، الوسيط أصغر من الوسط الحسابي، بينما في مجموعة البيانات B، الوسيط أكبر من الوسط الحسابي. ماذا يعني ذلك بالنسبة للتمثيل البياني لمجموعتي البيانات؟

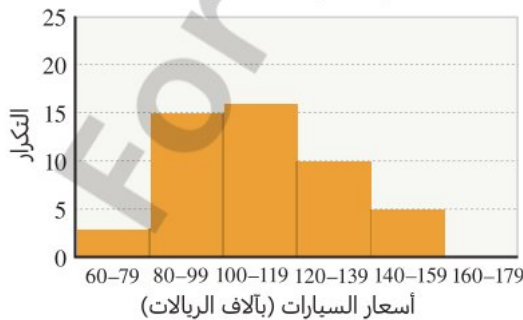
في التمرينين 15 و 16، حدّد ما إذا كان عرض البيانات ملتويًا إلى اليسار أم ملتويًا إلى اليمين أم متماثلًا.



في التمرينين 17 و 18، فسّر شكل عرض البيانات في السياق المعطى، ثم لخص البيانات إلى أحد مقاييس النزعة المركزية.



18. يمثّل عرضا البيانات أدناه مبيعات وكالة لبيع السيارات خلال شهرين متتاليين. ما الذي يمكن استنتاجه من العرضين عن التغيّر في مبيعات السيارات خلال هذين الشهرين؟



مراجعة سريعة

عندما يكون شكل عرض البيانات متماثلًا، تكون قيم البيانات موزعة بالتساوي على جانبي المركز. وتكون قيمة الوسط الحسابي قريبة من قيمة الوسيط. عندما يكون شكل عرض البيانات ملتويًا، يكون عرض البيانات ملتويًا إلى اليمين أو إلى اليسار، ولا يكون الوسط الحسابي والوسيط متساويين.

مثال

يبين المدرج التكراري أدناه أطوال اللاعبين في فريق لكرة القدم. الوسط الحسابي لأطوال اللاعبين يساوي 59 in، ما الاستنتاجات التي يمكن استخلاصها عن شكل البيانات؟



يبين المدرج التكراري أن البيانات ملتوية إلى اليسار، وهذا يعني أن الوسط الحسابي أصغر من الوسيط. بالاستناد إلى البيانات، يمكننا استنتاج أن أطوال معظم اللاعبين أكثر من 59 in

مراجعة سريعة

يشير الانحراف المعياري إلى مدى انحراف القيم في مجموعة بيانات عن الوسط الحسابي، ويساوي الجذر التربيعي للتباين، الذي يساوي الوسط الحسابي لمربع الانحرافات عن الوسط الحسابي.

مثال

يوضح الجدول أدناه عدد فطائر البيتزا التي باعها مطعم للبيتزا كل يوم على مدى أسبوعين. ما مدى التقلب الذي تظهره بيانات العينة؟

40	28	18	36	52	41	29
24	30	27	51	34	42	35

الوسط الحسابي: $\bar{x} \approx 35$ ؛ التباين: $s^2 \approx 95.41$ ؛

الانحراف المعياري: $s \approx 9.77$

الانحراف المعياري كبير نسبيًا، وهذا يعني أن البيانات تُظهر تقلبًا كبيرًا. يبيع المطعم عادةً ما بين 25 و 45 فطيرة بيتزا يوميًا.

تدرب وحلّ مسائل

19. **بَرز منطقيًا** الوسط الحسابي لمجموعة بيانات يساوي 50.5 والانحراف المعياري يساوي 9.6 تقريبًا. هل تقع قيمة البيانات 70.5 ضمن انحرافين معياريين عن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات هذه؟ وضح إجابتك.

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمقارنة التقلب الذي تظهرانه مجموعتي البيانات أدناه.

20. العينة A: 15, 12, 8, 18, 16, 13, 14, 10

العينة B: 16, 19, 11, 9, 8, 10, 15, 11

21. **فكر وثابر في الحل** تُظهر عينة من الحسابات المصرفية موزعة طبيعيًا أن الوسط الحسابي للأرصدة في هذه الحسابات يساوي QR 22000 مع انحراف معياري يساوي QR 1275. ما قيمة الرصيد الذي تبلغ قيمته أكثر من 95% من الحسابات المصرفية الواقعة في الوسط؟ ما نسبة الحسابات المصرفية التي تحقق هذا المطلب؟

الجدول التكرارية المزدوجة

الدرس 5-5

مراجعة سريعة

يبين الجدول التكراري المزدوج العلاقة بين مجموعتين من البيانات النوعية. يشير **التكرار المزدوج** إلى تكرار إحدى الفئات. تشير **التكرارات الهامشية** إلى مجموع تكرارات كل فئة.

مثال

طلب أحد المعلمين من طلاب الصفين العاشر والحادي عشر الاختيار بين المتحف أو حديقة الحيوانات من أجل رحلة مدرسية. النتائج مبينة في الجدول أدناه. ما الاتجاهات التي تشير إليها النتائج؟

المجموع	حديقة الحيوانات	المتحف	
12	7	5	الصف العاشر
18	6	12	الصف الحادي عشر
30	13	17	المجموع

تشير التكرارات المزدوجة إلى أن طلاب الصف العاشر يفضلون حديقة الحيوانات وأن طلاب الصف الحادي عشر يفضلون المتحف. تشير التكرارات الهامشية إلى أن جميع الطلاب المشاركين في الاستبيان أظهروا تفضيلًا طفيفًا للذهاب إلى المتحف.

تدرب وحلّ مسائل

في دراسة مسحية طُلب من عدد من مشاهدي التلفزيون الاختيار بين نوعين من الأفلام، أفلام الحركة والأفلام الكوميدية. اختار 40 رجلًا و 10 نساء أفلام الحركة. من بين 30 شخصًا اختاروا الأفلام الكوميدية، كان 20 منهم نساء و 10 منهم رجال.

22. أنشئ جدولًا تكراريًا مزدوجًا لتنظيم هذه البيانات. هل من المنطقي القول إن عدد الأشخاص الذي يفضلون أفلام الحركة، من بين المشاركين في الدراسة المسحية، أكبر من عدد الأشخاص الذين يفضلون الأفلام الكوميدية؟ وضح إجابتك.

23. **ابن الحجج الرياضية** وفقًا للبيانات أدناه، هل هناك علاقة وثيقة بين عمر الشخص والمصدر الذي يستقي منه الأخبار؟ بَرز إجابتك.

من أين تحصل على معظم الأخبار؟			
المجموع	الإنترنت	التلفزيون	العمر
130	80	50	≤ 30
70	40	30	> 30
200	120	80	المجموع

ENGLISH

العربية

standard deviation	انحراف معياري
reflection	انعكاس
translation	إزاحة
variance	تباين
composition of functions	تركيب الدوال
compression	تضييق
joint frequency	تكرار مزدوج
joint relative frequency	تكرار نسبي مزدوج
conditional relative frequency	تكرار نسبي مشروط
marginal relative frequency	تكرار نسبي هامشي
marginal frequency	تكرار هامشي
stretch	تمدد
inverse variation	تناسب عكسي
normal distribution	توزيع طبيعي
constant of variation	ثابت التناسب
asymptote	خط التقارب
square root function	دالة الجذر التربيعي
cubic root function	دالة الجذر التكعيبي
absolute value function	دالة القيمة المطلقة
reciprocal function	دالة المقلوب
piecewise-defined function	دالة متعددة التعريف
vertex	رأس
axis of symmetry	محور تناظر
inverse of a function	معكوس الدالة



ملاحظة : تسلسل الضغط على الأزرار يكون دائماً من اليسار إلى اليمين.

مقدمة

عند تشغيل الآلة الحاسبة، وقبل البدء بأي عملية حسابية نقوم بمسح الذاكرة:



أولاً: استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية

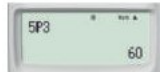
1. معامل الارتباط r ومعادلة خط الانحدار $y = Bx + A$ التي تربط بين المتغيرين x و y .

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تكوين جدول	  	
ملء الجدول بقيم x المعطاة	القيمة الأولى x ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$	
الانتقال إلى العمود الذي يتضمن قيم y		
ملء الجدول بقيم y المعطاة	القيمة الأولى y ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$	
مسح الشاشة		
لإيجاد قيمة r	    $=$	
لإيجاد قيمة B	    $=$	
لإيجاد قيمة A	    $=$	

II. الإحصاء بمتغير واحد.

شكل الشاشة	الأزرار المستعملة	الخطوات
	  	الحالة الأولى: قيم بيانات عينة
	      	الحالة الثانية: جدول تكراري
	القيمة الأولى x ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$	الحالة الأولى: قيم بيانات عينة
 	القيمة الأولى x ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$ ثم نستعمل الأسهم  للانتقال إلى إدخال قيم التكرار	الحالة الثانية: جدول تكراري
		مسح الشاشة
	    $=$	لإيجاد عدد البيانات المدخلة n
	    $=$	لإيجاد قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$
	    $=$	لإيجاد قيمة الانحراف المعياري σ_x
	    $=$	لإيجاد قيمة الانحراف المعياري s_x
	    $=$	لإيجاد القيمة الصغرى
	    $=$	لإيجاد القيمة العظمى

III. طرق العد.

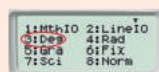
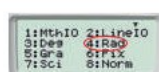
الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
لإيجاد مضروب عدد	  	
لإيجاد عدد التباديل nPr	    	
لإيجاد عدد التوافيق nCr	    	

IV. الاحتمال الطبيعي.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية التوزيع الطبيعي	  	
لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z < a)$	      	
لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z > a)$	      	

لإيجاد قيمة الاحتمال $P(a \leq z \leq b)$ نوجد قيمة الفرق $P(z \leq b) - P(z \leq a)$

V. الأعداد المركبة والعمليات عليها.

الخطوات	الأزرار المستعملة		شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية Cmplx	 		
اختيار المقياس	للمقياس بال degree	  	
	للمقياس بال radian	  	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيمة $(a + ib)^n$		
حل معادلة تربيعية $az^2 + bz + c = 0$	 = (يظهر الحل الأول) = (يظهر الحل الثاني)	
إيجاد المقياس r والسعة θ للعدد المركب $a + ib$		
إيجاد مرافق العدد المركب $a + ib$		

VI. الأوامر المباشرة.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيم لوغاريتمية	إيجاد قيمة $\log a$: إيجاد قيمة $\ln a$: إيجاد قيمة $\log_a b$:	
إيجاد قيم أسية e^a		
إيجاد نسب مثلثية لزوايا معطاة بالدرجات	اختيار المقياس: إيجاد قيمة $\cos x^\circ$: إيجاد قيمة $\sin x^\circ$: إيجاد قيمة $\tan x^\circ$:	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد الزوايا المرجعية (لإيجاد قياس الزاوية x بالراديان حيث $\cos x = a$)		
إيجاد التكامل المحدود	 ملاحظة: لإدخال x نضغط على α ثم x	

ثانيًا: استخدام الآلة الحاسبة البيانية

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تمثيل دالة بيانيًا	 ملاحظة: نستعمل X, Y, T لاختيار المتغير x و للحصول على $\sqrt{\quad}$ نضغط SHIFT ، x^2	
لرسم التمثيل البياني لدالة ثنائية	 صيغة الدالة الثانية	
لإلغاء معادلة ومحو التمثيل البياني	 نختار الدالة المطلوبة	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
دراسة المزايا الأساسية لدالة	 لإيجاد أصفار الدالة:	
	 لإيجاد القيمة العظمى للدالة:	
	 لإيجاد القيمة الصغرى للدالة:	
	 للحصول على المقطع y :	
	 للحصول على إحداثيات تقاطع منحنيين:	
	(ننتقل بالسهم لإيجاد باقي الإحداثيات عند وجود أكثر من نقطة) ملاحظة: عند ظهور <i>not found</i> يعني أن القيمة المطلوبة غير موجودة.	
الصيغة الحدودية	تفعيل وضعية Rad أو Deg:  أو	
	لتفعيل وضعية الصيغة الحدودية:  الصيغ الحدودية (نستعمل  لإدخال المتغير T)	
	ملاحظة: للتحكم بقياسات الرسم البياني والمتغير T نضغط على  إذا كانت الشاشة على لائحة المعادلات وندخل القيم التي تتناسب مع المثال المعطى.	

Photographs

4 Top Center Eliyahu Yosef Parypa/Shutterstock; 4 Bottom Left aapsky/Shutterstock;
4 Bottom Center Right EQRoy/Shutterstock; 4 Center Right Mehmet Cetin/Shutterstock;
4 Bottom Left Yeti studio/Shutterstock; 17 Top Left Marco Diaz Segura/Shutterstock;
19 Top Left Joern Sackermann/ALAMY; 22 Bottom Right Jason Edwards/Getty Images;
25 Center Left ANCH/Shutterstock; 32 Top Center nexus 8/Shutterstock; 46 Bottom Left Yeti studio/Shutterstock;
46 Center fifg/Shutterstock; 46 Top Center Left Nadin3d/Shutterstock; 46 Top Center oakki/Shutterstock;
46 Top Right Tetiana Ch/Shutterstock; 46 Bottom Left Stockshoppe/Shutterstock;
52 Bottom Right Dariush M/Shutterstock; 65 Bottom Right bulatova/Shutterstock;
77 Top Center Erick Nguyen/ALAMY; 90 Top Left okili77/Shutterstock;
90 Bottom Left Oleksandr Rodin/Shutterstock; 90 Bottom Left Yeti studio/Shutterstock;
90 Top Right Andrey Popov/Shutterstock; 90 Top Center Porojnicu Stelian/Shutterstock;
113 Top Center MaxyM/Shutterstock; 113 Top Center kan_khampanya/Shutterstock;
120 Top Right EvrenKalinbacak/Shutterstock

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته



جميع الحقوق محفوظة

وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي

لدولة قطر

تم رفع الملف من قبله



مندیانت صقر الجنوبي التعليمية

المنهاج القطري

كل ما تحتاجه في مكان واحد



WWW.JNOB-QA.COM