



الرياضيات^٣

المستوى العاشر - الفصل الدراسي الثاني

طبعة 1447 - 2025



حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني
أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءَ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّيَاءَ
قَطْرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الْأَوْفِيَاءِ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الْأَلَى	وَعَلَى ضِيَاءِ الْأَنْبِيَاءِ
قَطْرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ	عِزٌّ وَأَمْجَادُ الْإِبَاءِ
قَطْرُ الرَّجَالِ الْأَوَّلِينَ	حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءِ
وَحُمَائِمُ يَوْمَ السَّلَامِ	جَوَارِحُ يَوْمِ الْفِدَاءِ

قائمة بأدلة المصادر الرقمية للمستوى العاشر

تجدون أدناه روابط توصلكم إلى محتويات توضّح بنية منهج الرياضيات وأثره على نتائج المتعلمين في الإختبارات الدولية، وطريقة تطبيق مشاريع STEM، وكيفية استخدام تطبيقات الآلة الحاسبة وعناصر التعلّم الإلكتروني (شروحات فيديو التعلّم).

للاستفادة من الروابط، الرجاء
تسجيل الدخول إلى "نظام قطر
للتعليم" أولاً.

دليل إرشادي لمشاريع STEM
في منهج الرياضيات 9-12



تطبيقات الآلة الحاسبة



دليل استخدام العناصر الرقمية
لمادة الرياضيات



إعداد المتعلمين للاختبارات
الدولية TIMSS و PISA



بروشور منهج الرياضيات



المثلث القائم والنسب المثلثية

4	مشروع STEM
5	المثلثات القائمة الزاوية ونظرية فيثاغورس 4-1
14	النسب المثلثية 4-2
22	النسب المثلثية ومقلوباتها 4-3
31	قانون الجيب 4-4
38	قانون جيب التمام 4-5
45	تطبيقات على النسب المثلثية 4-6
51	مراجعة الوحدة

56		مشروع STEM
57		الجذور النونية والجذور والأسس النسبية 5-1
65		العمليات على الأسس والجذور 5-2
73		المعادلات الأسية 5-3
81		مراجعة الوحدة

86	مشروع STEM
87	6-1 الأقواس والقطاعات الدائرية
97	6-2 مماسات الدائرة
106	6-3 أوتار الدائرة
115	6-4 الزوايا المحيطة
123	6-5 الأوتار المتقاطعة
131	مراجعة الوحدة

138	مشروع STEM	
139	العمليات على المصفوفات	7-1
149	ضرب المصفوفات	7-2
156	المتجهات	7-3
166	المحددات والنظير الضربي للمصفوفة	7-4
175	حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال المصفوفات	7-5
183	مراجعة الوحدة	

190	مشروع STEM
191	مقاييس النزعة المركزية 8-1
199	مقاييس التشتت 8-2
210	المنحنى التكراري التراكمي 8-3
223	مراجعة الوحدة

ملحق

استخدام الآلة الحاسبة

G4	استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية
G8	استخدام الآلة الحاسبة البيانية

For Qatar MOE Use Only

السؤال الأساس ؟

ما فائدة نظرية فيثاغورس وحساب المثلثات ؟

نظرة عامة على الوحدة

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 4-1 | Right Triangles and the Pythagorean Theorem | 4-1 | المثلثات القائمة الزاوية ونظرية فيثاغورس |
| 4-2 | Trigonometric Ratios | 4-2 | النسب المثلثية |
| 4-3 | Trigonometric Ratios and their Reciprocals | 4-3 | النسب المثلثية ومقلوباتها |
| 4-4 | The Law of Sine | 4-4 | قانون الجيب |
| 4-5 | The Law of Cosine | 4-5 | قانون جيب التمام |
| 4-6 | Applications with Trigonometric Ratios | 4-6 | تطبيقات على النسب المثلثية |

Topic Vocabulary

- pythagorean triple
- trigonometric ratios
- sine
- cosine
- tangent
- inverse sine ratio
- sine
- cosine
- tangent
- reciprocal trigonometric ratios
- secant
- cosecant
- cotangent
- cofunction
- identity
- cofunction identities
- law of sine
- law of cosine
- angle of depression
- angle of elevation

مصطلحات الوحدة

- ثلاثية فيثاغورس
- النسب المثلثية
- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- ظل الزاوية
- معكوس نسبة الجيب
- جيب
- جيب تمام
- ظل
- مقلوبات النسب المثلثية
- قاطع
- قاطع التمام
- ظل التمام
- النسب المثلثية للزوايا المتتامة
- متطابقة
- متطابقات النسب المثلثية للزوايا المتتامة
- قانون الجيب
- قانون جيب التمام
- زاوية الانخفاض
- زاوية الارتفاع

هل تعلم؟

يقيس **جهاز قياس المسافات بالليزر** المسافة التي تفصله عن جسم ما بطريقة غير مباشرة. حيث يقيس الجهاز الزمن الذي تستغرقه نبضة الليزر لقطع المسافة بين الجهاز والجسم ذهابًا وإيابًا بسرعة **186 000 ميلًا في الثانية** تقريبًا.



يُستعمل **السونار** لقياس المسافات تحت الماء. تعتمد سرعة الصوت في المحيط على **درجة حرارة وضغط وملوحة** المياه. بمجرد معرفة سرعة الصوت، يمكنك إرسال موجات السونار إلى الجسم الهدف تحت الماء والتقاط ارتدادها، وقياس الزمن الذي استغرقته للعودة، وحساب بُعد الجسم.



في القرن الثالث قبل الميلاد، حسب عالم الرياضيات اليوناني **أراتوستينس** محيط الأرض بطريقة غير مباشرة. بما أنه لم يكن قادرًا على قياس هذه المسافة قدمًا تلو قدم، فقد استعمل **علم الهندسة وظل الشمس** لتقدير محيط الأرض.

مهمتك: حساب مسافة

تُعد النسب المثلثية أداة ممتازة لقياس الأطوال والمسافات بطريقة غير مباشرة. سنستعمل أنت وزملاؤك النسب المثلثية والقياس غير المباشر لإيجاد ارتفاع جسم طويل جدًا بحيث يتعذر قياسه بطريقة مباشرة.

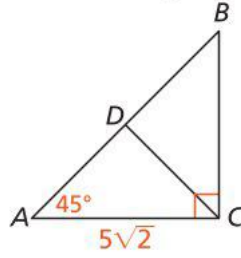
4-1

المثلثات القائمة الزاوية ونظرية فيثاغورس

Right Triangles and the Pythagorean Theorem

استكشف وبرز منطقياً

تأمل $\triangle ACB$ الذي ارتفاعه $\overline{CD}$ كما هو موضح.



A. أوجد مساحة كل من $\triangle ACB$ و $\triangle ADC$. وضح إجابتك.

B. أوجد طول كل من $\overline{AD}$ و $\overline{AB}$.

C. **ابحث عن العلاقات** اقسم طول الوتر في $\triangle ACB$ على طول أحد الأضلاع. ثم اقسم طول الوتر في $\triangle ADC$ على طول أحد الأضلاع. اكتب تخمينًا يفسر النتائج.

أستطيع... إثبات نظرية فيثاغورس
باستعمال تشابه المثلثات وتحديد
العلاقات الخاصة في المثلثات
القائمة الزاوية.

معياري الدرس

10.7.3

المصطلحات

• ثلاثية فيثاغورس

pythagorean triple

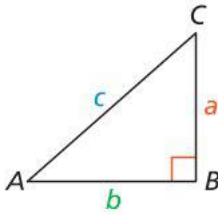
كيف يرتبط تشابه المثلثات القائمة الزاوية ونظرية فيثاغورس ؟

السؤال الأساس

تذكر أن نظرية فيثاغورس وعكسها يصفان العلاقة بين أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية.

النظرية 4-1 نظرية فيثاغورس

إذا كان ABC مثلثًا قائم الزاوية



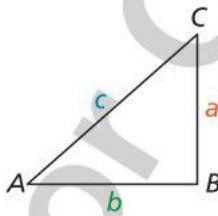
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ فإن}$$

في المثلث القائم الزاوية، مجموع مربعي طولي
ضلعي القائمة يساوي مربع طول الوتر.

البرهان: انظر المثال 1

النظرية 4-2 عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$

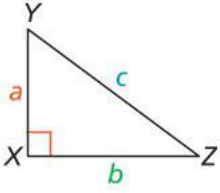


فإن ABC مثلث قائم الزاوية

إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعيين في مثلث
يساوي مربع طول الضلع الثالث، فإن المثلث
قائم الزاوية.

البرهان: انظر التمرين 17

استعمل تشابه المثلثات القائمة الزاوية لكتابة برهان لنظرية فيثاغورس.



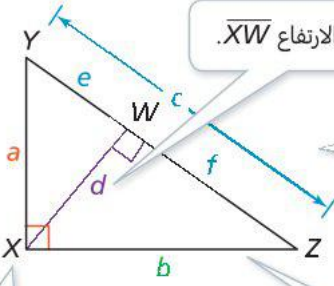
المعطيات: $\triangle YXZ$ قائم الزاوية.

المطلوب: إثبات أن $a^2 + b^2 = c^2$

الخطوة: لإثبات نظرية فيثاغورس، ارسم الارتفاع $\overline{XW}$ على الوتر.

ثم استعمل العلاقات في المثلثين القائمي الزاوية المتشابهين اللذين ينتجان.

البرهان:



الخطوة 1 ارسم الارتفاع $\overline{XW}$.

الخطوة 2 $\triangle YXZ \sim \triangle XWZ \sim \triangle YWX$

الخطوة 3 بما أن $\triangle YXZ \sim \triangle YWX$ ،
إذن، $\frac{c}{a} = \frac{a}{e}$ ، وبالتالي $a^2 = ce$.

الخطوة 4 بما أن $\triangle YXZ \sim \triangle XWZ$ ،
إذن، $\frac{c}{b} = \frac{b}{f}$ وبالتالي $b^2 = cf$.

الخطوة 5 اكتب معادلة تربط a^2 و b^2 بالقيم ce و cf .

$$a^2 + b^2 = ce + cf$$

$$a^2 + b^2 = c(e + f)$$

$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ابحث عن العلاقات

فكر في كيفية تطبيق خواص

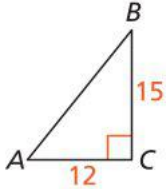
المثلثات المتشابهة.

ما العلاقة بين الأضلاع المتناظرة

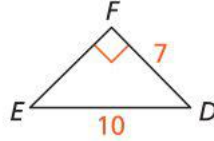
في المثلثات المتشابهة ؟

حاول أن تحل! 1. أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية.

a. AB



b. EF





A. لتحقيق قواعد السلامة، يجب أن تكون المسافة بين الحائط وقاعدة السلم مساوية لربع طول السلم على الأقل. هل وضع خالد السلم بشكل صحيح؟ يشكّل السلم مع الأرض والحائط مثلثًا قائم الزاوية.

الخطوة 1 أوجد طول السلم.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 2.5^2 + 9^2 &= c^2 \\ 87.25 &= c^2 \\ 9.34 &\approx c \end{aligned}$$

استعمل نظرية فيثاغورس حيث $b = 9$ و $a = 2.5$

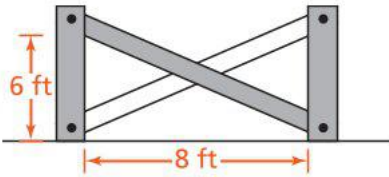
الخطوة 2 أوجد ربع طول السلم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}c &\approx \frac{1}{4}(9.34) \\ &\approx 2.335 \end{aligned}$$

طول السلم 9.34 ft

بما أن $2.5 > 2.335$ ، إذن وضع خالد السلم بشكل صحيح.

B. طول كل قطعة عرضية من السياج 10 ft، لماذا بنى صاحب المزرعة هذا السياج بالقياسات الموضحة؟



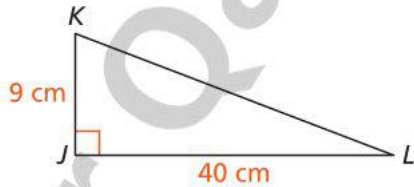
تكوّن الأعداد 6 و 8 و 10 ثلثية فيثاغورس. **ثلثية فيثاغورس** هي مجموعة من ثلاثة أعداد كلية غير صفرية تحقق المعادلة $a^2 + b^2 = c^2$. بما أن $6^2 + 8^2 = 10^2$ ، إذن العمودان والأرض والقطعتان العرضيتان تشكّل مثلثين قائمي الزاوية.

باستعمال هذه القياسات، يعرف صاحب المزرعة أن أعمدة السياج عمودية على الأرض، الأمر الذي يجعل السور ثابتًا.

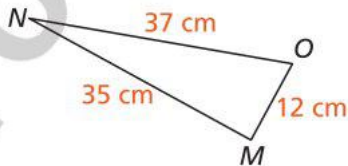
نصيحة دراسية

تعلّم وتعزّف إلى ثلاثيات فيثاغورس الشائعة مثل 3, 4, 5 و 5, 12, 13، وذلك لإجراء الحسابات بسرعة.

حاول أن تحلّ! 2. a. أوجد KL.

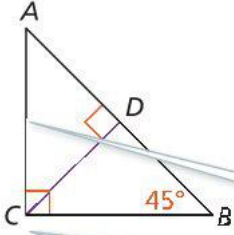


b. هل $\triangle MNO$ مثلث قائم الزاوية؟ وضح إجابتك.



هل هناك علاقة بين طول $\overline{AB}$ وطول $\overline{AC}$ في $\triangle ACB$ ؟

ارسم الارتفاع $\overline{CD}$ لتكوّن المثلثات القائمة الزاوية المتشابهة $\triangle BDC$ و $\triangle ADC$ و $\triangle ACB$.



لاحظ أن $\triangle ABC$ مثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ،
وأن $AC = BC$.

استعمل تشابه المثلثات القائمة الزاوية لكتابة معادلة.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{\frac{1}{2}AB}$$

$$\frac{1}{2}AB^2 = AC^2$$

$$AB^2 = 2AC^2$$

$$AB = \sqrt{2} \times AC$$

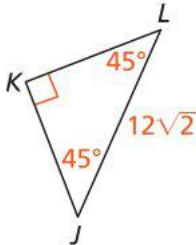
بما أن $\triangle ACB \sim \triangle ADC$ ، فإن AC هو
الوسط الهندسي لكل من AD و AB .

بما أن $\triangle ABC$ مثلث متطابق
الضلعين، فإن $\overline{CD}$ تنصف $\overline{AB}$.

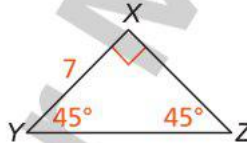
إذن، طول $\overline{AB}$ يساوي $\sqrt{2}$ مضروباً في طول $\overline{AC}$.

3. حاول أن تحلّ! أوجد أطوال الأضلاع في كل مثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ أدناه.

b. ما طول $\overline{LK}$ و $\overline{JK}$ ؟

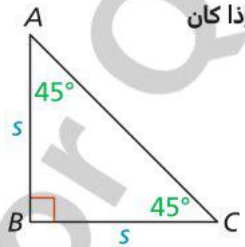


a. ما طول $\overline{YZ}$ و $\overline{XZ}$ ؟



النظرية 3-4 نظرية المثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

إذا كان



$$\text{فإن } AC = \sqrt{2}s$$

في المثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ، ضلعا القائمة
متطابقان وطول الوتر يساوي $\sqrt{2}$ مضروباً
في طول ضلع القائمة.

البرهان: انظر التمرين 18

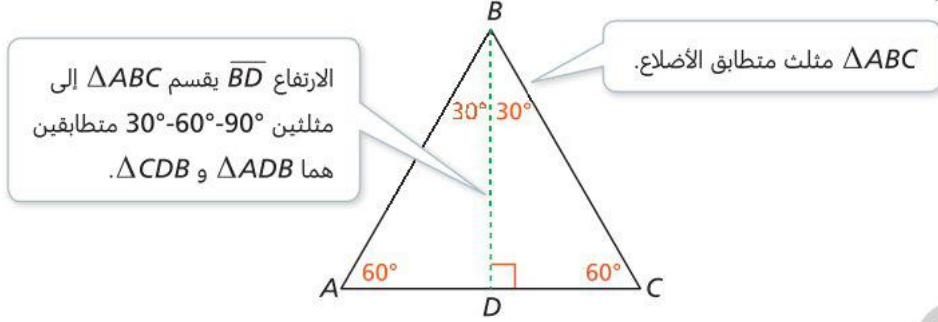
بّرر منطقياً

فكر في خواص المثلث الذي فيه
زاويتان متطابقتان. كيف تساعدك
خواص هذا المثلث على الربط بين
أطوال الأضلاع ؟

استنتاج أطوال أضلاع المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

مثال 4

باستعمال مثلث متطابق الأضلاع، وضح العلاقة بين أطوال كل من الضلع القصير والضلع الطويل والوتر في المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$



الارتفاع $\overline{BD}$ يقسم $\triangle ABC$ إلى مثلثين $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ متطابقين هما $\triangle CDB$ و $\triangle ADB$.

$\triangle ABC$ مثلث متطابق الأضلاع.

انظر إلى $\triangle ADB$. افترض أن طول الضلع القصير $\overline{AD}$ يساوي s .
أوجد العلاقة بين AD و AB .

$$AD = CD = s$$

$\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$.

$$AC = AD + CD$$

$$AC = 2s$$

$\triangle ABC$ متطابق الأضلاع، إذن $AB = AC = 2s$.

$$AB = 2s$$

أوجد العلاقة بين AD و BD .

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

استعمل نظرية فيثاغورس.

$$s^2 + BD^2 = (2s)^2$$

$$BD^2 = 3s^2$$

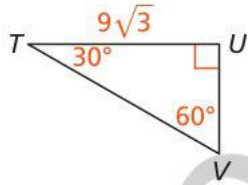
$$BD = \sqrt{3}s$$

إذن، في $\triangle ADB$ ، طول الوتر $\overline{AB}$ يساوي ضعف طول الضلع القصير $\overline{AD}$.
وطول الضلع الطويل $\overline{BD}$ يساوي $\sqrt{3}$ مضروباً في طول الضلع القصير.

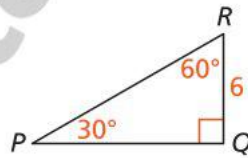
نصيحة دراسية

تذكر أن ارتفاع المثلث يكون عمودياً على أحد أضلاعه. ففكر في خواص المثلث التي ينتج عنها ارتفاع يكون منصفاً لقطعة مستقيمة.

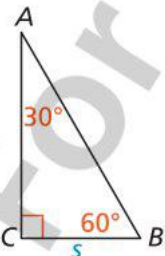
b. أوجد TV و UV .



4. a. أوجد PQ و PR .



النظرية 4-4 نظرية المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$



إذا كان

في المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ، طول الوتر يساوي ضعف طول الضلع القصير، وطول الضلع الطويل يساوي $\sqrt{3}$ مضروباً في طول الضلع القصير.

$$\text{فإن } AC = \sqrt{3}s$$

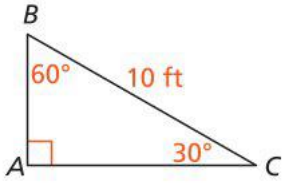
$$\text{و } AB = 2s$$

البرهان: انظر التمرين 19

مثال 5

تطبيق العلاقات الخاصة للمثلثات القائمة الزاوية

تطبيق



A. يريد جاسم صنع دعائمي المنحدر الأفقية والرأسية $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ كما هو موضح في الشكل جانباً. هل يكفي لوح خشبي طوله 12 ft لصنع الدعامتين ؟ وضح إجابتك.
يكون المنحدر والدعامتان مثلثاً من النوع $30^\circ-60^\circ-90^\circ$.

$$\begin{aligned} BC &= 2AB \\ 10 &= 2AB \\ AB &= 5 \text{ ft} \end{aligned}$$

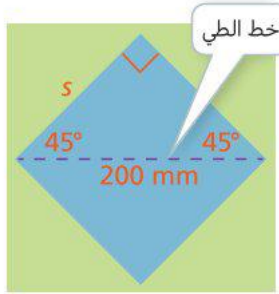
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{3} AB \\ AC &= 5\sqrt{3} \text{ ft} \end{aligned}$$

أوجد الطول الكلي للدعامتين.

$$\begin{aligned} AB + AC &= 5 + 5\sqrt{3} \\ &\approx 13.66 \text{ ft} \end{aligned}$$

بما أن $13.66 > 12$ ، إذن لا يكفي لوح طوله 12 ft لصنع الدعامتين.

B. بدأت سلمى في صنع طائر ورقي باستعمال فن الأوريجامي عن طريق طي ورقة طول قطرها 200 mm كما في الشكل أدناه. أوجد طول ضلع المربع الورقي ومساحته.



الخطوة 1 أوجد طول أحد أضلاع الورقة.

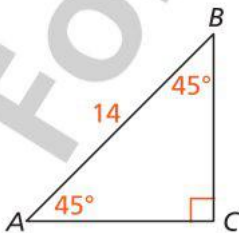
$$\begin{aligned} \sqrt{2} s &= 200 \\ s &= \frac{200}{\sqrt{2}} \\ s &\approx 141.4 \text{ mm} \end{aligned}$$

الخطوة 2 أوجد مساحة المربع الورقي.

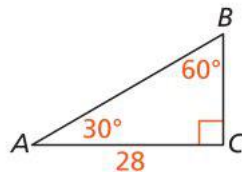
$$\begin{aligned} A &= s^2 \\ A &= (100\sqrt{2})^2 \\ A &= 20\,000 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

إذن، طول ضلع المربع الورقي 141.4 mm ومساحته $20\,000 \text{ mm}^2$

b. أوجد AC و BC.



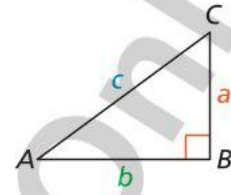
5. a. أوجد AB و BC.



النظرية 4-1

نظرية فيثاغورس

إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية

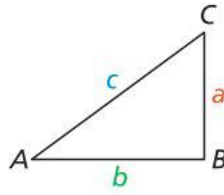


فإن $a^2 + b^2 = c^2$

النظرية 4-2

عكس نظرية فيثاغورس

إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$

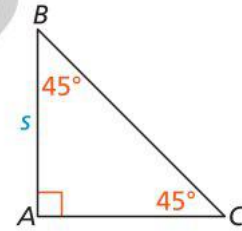


فإن $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية

النظرية 4-3

نظرية المثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

إذا كان

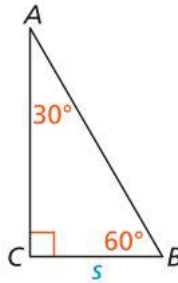


فإن $BC = \sqrt{2} s$

النظرية 4-4

نظرية المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

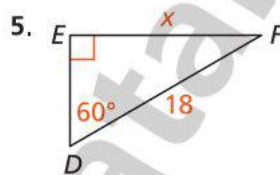
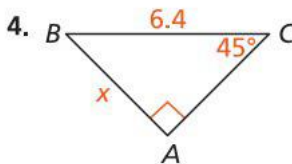
إذا كان



فإن $AC = \sqrt{3} s$
 $AB = 2s$

طبق فهمك

في التمرينين 4 و 5، أوجد قيمة x .



في التمارين 6-8، هل $\triangle RST$ مثلث قائم الزاوية؟ وضح إجابتك.

6. $RS = 20$, $ST = 21$, $RT = 29$

7. $RS = 35$, $ST = 36$, $RT = 71$

8. $RS = 40$, $ST = 41$, $RT = 11$

9. يريد راشد تعليق العلم المثلث الموضح رأسيًا بين نافذتين المسافة

بينهما 19 in، هل تكفي هذه المسافة لتعليق

العلم؟ وضح إجابتك.



عبر عن فهمك

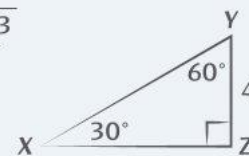
1. السؤال الأساس كيف يرتبط تشابه المثلثات القائمة

الزاوية ونظرية فيثاغورس؟

2. حلل الخطأ طلبت المعلمة من ليلي إيجاد XY .

بين خطأ ليلي وصححه.

$XY = YZ \sqrt{3}$
 $XY = 4\sqrt{3}$



X

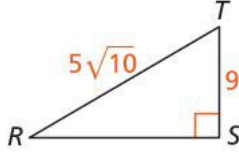
3. بزر منطقيًا مثلث قائم الزاوية طولاه ضلعي القائمة

4.5 و $4.5\sqrt{3}$ ، أوجد قياسات زواياه. وضح إجابتك.

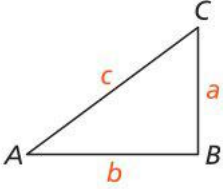
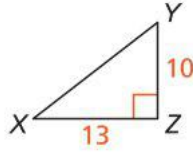
في التمرينين 15 و 16، أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث.

انظر المثال 1

15. RS



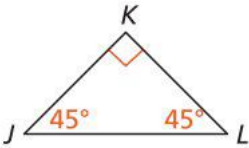
16. XY



17. إذا كان $\triangle ABC$ فيه $a^2 + b^2 = c^2$ ،

اكتب برهاناً من عمودين لإثبات عكس

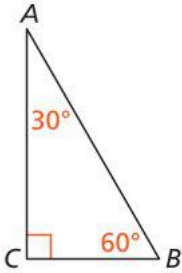
نظرية فيثاغورس. انظر المثال 2



18. اكتب برهاناً من عمودين لإثبات

نظرية المثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

انظر المثال 3



19. اكتب برهاناً من عمودين لإثبات

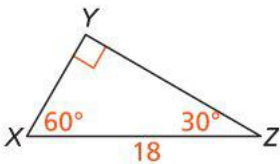
نظرية المثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

انظر المثال 4

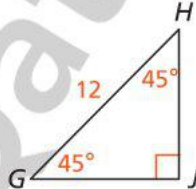
في التمرينين 20 و 21، أوجد أطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث.

انظر المثالين 3 و 4

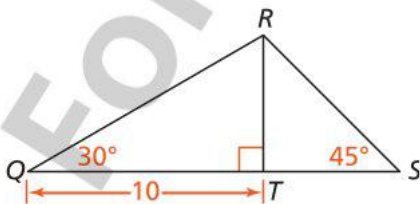
21. أوجد XY و YZ.



20. أوجد GJ و HJ.

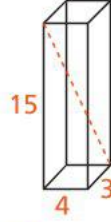


22. أوجد QS. انظر المثال 5

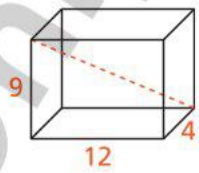


10. روابط في الرياضيات أي شبه مكعب قطره أطول؟ وضح إجابتك.

شبه المكعب P



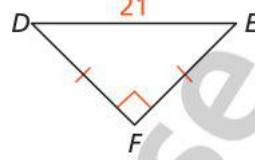
شبه المكعب Q



11. حل الخطأ طلب المعلم من

ناصر إيجاد EF. بين خطأ

ناصر وضح.



لا توجد معلومات كافية لإيجاد EF.

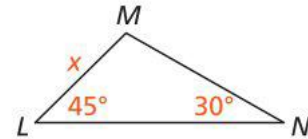
إيجاد طول EF يجب معرفة إما طول DF

أو قياس إحدى الزاويتين الأخرتين.

X

12. فكر وتأبر في الحل ما المقادير التي تمثل MN و LN؟

تلميح: أنشئ الارتفاع من النقطة M إلى LN.



13. مهارات التفكير العليا المثلث XYZ قائم الزاوية.

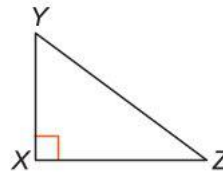
في أي نوع من المثلثات يكون

$$(XZ)^2 + (XY)^2 > (YZ)^2$$

في أي نوع من المثلثات يكون

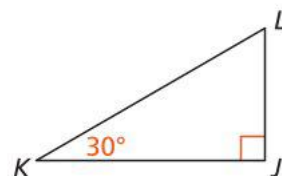
$$(XZ)^2 + (XY)^2 < (YZ)^2$$

وضح إجابتك.



14. ابحث عن العلاقات اكتب معادلة تعبر عن العلاقة بين

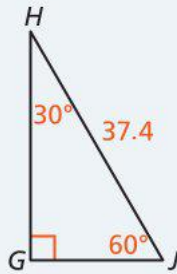
KL و JK.



26. صل كل مجموعة من أطوال أضلاع المثلث بالوصف الأفضل للمثلث.

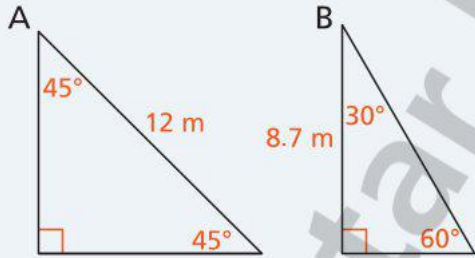
- A. مثلث قائم الزاوية $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$
 B. مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ $5, 3\sqrt{2}, \sqrt{43}$
 C. مثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ $8, 8, 8\sqrt{2}$
 D. ليس مثلثًا قائم الزاوية $11, 11\sqrt{3}, 22$

27. اختبار SAT/ACT ما GJ في الشكل أدناه ؟



- (A) 18.7 (B) $18.7\sqrt{2}$
 (C) $18.7\sqrt{3}$ (D) 74.8

28. مهمة أدائية صمّم حمد شراعين مثلثي الشكل لمركب شراعي.

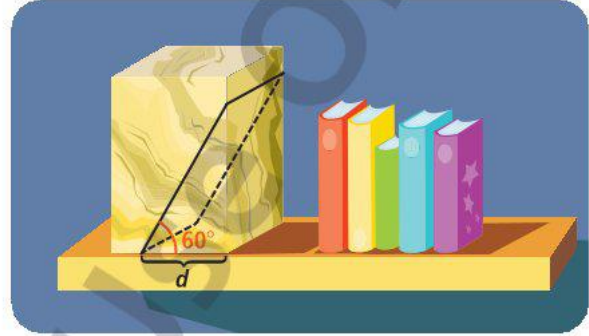


الجزء A أوجد مساحة الشراع A.

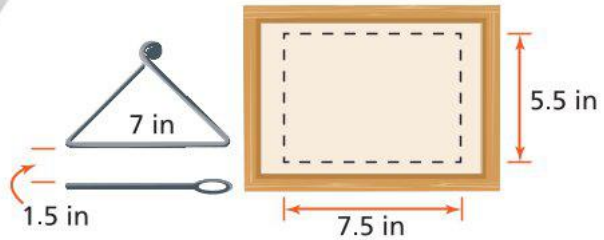
الجزء B أوجد مساحة الشراع B.

الجزء C هل يمكن لحمد قص الشراعين من قطعة قماش مربعة الشكل طول ضلعها 9 أمتار ؟ ارسم مخططاً لتوضيح إجابتك.

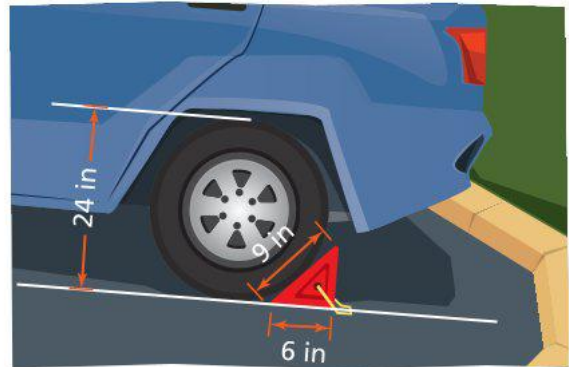
23. **بزر منطقياً** يريد جاسم قص القطعة الرخامية بزاوية 60° لصنع مسند لكتبه، كما هو موضح أدناه. إذا أراد جاسم أن يكون طول مسند الكتب بين 7.5 in و 8 in، فما الطول d الذي يمثل قاعدة المسند التي يجب أن يقصها جاسم باستعمال آلة قص الرخام ؟ وضح إجابتك.



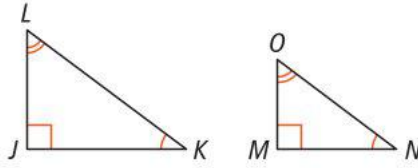
24. **تواصل بدقة** وجدت نورة جرس عشاء قديم يبدو على شكل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، لكن القياس الوحيد المعطى هو قياس أطول ضلع. تريد نورة وضع الجرس والعصا في إطار صورة أبعادها 5.5 in في 7.5 in، بفرض أن الجرس مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، هل تستطيع نورة وضع الجرس والعصا داخل الإطار ؟ وضح إجابتك.



25. **ابن الحجج الرياضية** عندما تترك دانة سيارتها على تل، تضع ركائز خلف عجلات سيارتها لتثبيتها. يجب أن يكون ارتفاع الركائز ربع ارتفاع العجلات على الأقل لكي تثبت السيارة في مكانها. الركيزة الموضحة أدناه لها شكل مثلث قائم الزاوية. هل يمكن لركيزة كهذه أن تثبت السيارة في مكانها ؟ وضح إجابتك.



طلب معلم من طلابه كتابة تناسب باستعمال أطوال أضلاع مثلثين قائمي الزاوية.



إجابات اثنين من الطلاب موضحة أدناه.

خالد

$$\frac{JK}{MN} = \frac{JL}{MO}$$

سالم

$$\frac{JK}{JL} = \frac{MN}{MO}$$

A. في رأيك، هل التناسب الذي كتبه خالد صحيح؟ وضح إجابتك.

B. في رأيك، هل التناسب الذي كتبه سالم صحيح؟ وضح إجابتك.

C. **استعمل البنية** إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، كيف نحصل على معادلة مكافئة يكون الطرف الأيسر فيها $\frac{a}{c}$ ؟

أستطيع... استعمال النسب

المثلثية لإيجاد الأطوال وقياسات الزوايا في المثلثات القائمة الزاوية.

معايير الدرس

10.7.4 و 10.7.5 و 10.7.7

المصطلحات

• النسب المثلثية

trigonometric ratios

• جيب الزاوية sine

• جيب تمام الزاوية cosine

• ظل الزاوية tangent

• معكوس نسبة الجيب

inverse sine ratio

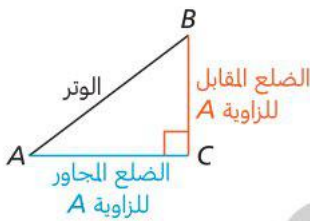
كيف تربط النسب المثلثية بين قياسات زوايا وأطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية؟

السؤال الأساس

المفهوم النسب المثلثية

تربط **النسب المثلثية**، بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وزواياه الحادة.

جيب $\angle A$



$$\sin A = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية A}}{\text{طول الوتر}} = \frac{BC}{AB}$$

جيب تمام $\angle A$

$$\cos A = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية A}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{AB}$$

ظل $\angle A$

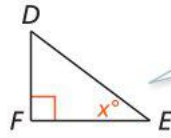
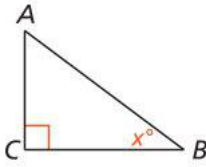
$$\tan A = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية A}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية A}} = \frac{BC}{AC}$$

مثال 1

فهم النسب المثلثية باستعمال التشابه

ما العلاقة بين جيب زاويتين مختلفتين لهما نفس القياس ؟

افترض أن $\triangle DFE$ و $\triangle ACB$ مثلثان قائما الزاوية فيهما $m\angle B = m\angle E$



بما أن $\angle B \cong \angle E$ و $\angle C \cong \angle F$
فإن $\triangle ACB \sim \triangle DFE$ بحسب
نظرية التشابه بزاويتين ($AA \sim$).

يمكنك استعمال خواص التشابه لتحديد العلاقة بين $\sin E$ و $\sin B$.

حسب تعريف نسبة الجيب، $\sin B = \frac{AC}{AB}$ ، $\sin E = \frac{DF}{DE}$

بما أن $\triangle ACB \sim \triangle DFE$ ، فإنك تعرف أن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. وبالأخص، $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$

أعد كتابة هذه المعادلة للمقارنة بين أضلاع $\triangle ACB$ وأضلاع $\triangle DFE$.

للحصول على جيب كل من الزاويتين B و E، اضرب

كل من طرفي المعادلة في النسبة $\frac{DF}{AB}$.

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{DF} \cdot \frac{DF}{AB} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{DF}{AB}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \text{ عوض}$$

$$\sin E = \frac{DF}{DE}$$

$$\sin B = \sin E$$

إذن، أي زاويتين حادتين متساويتين في القياس لهما نفس الجيب.

حاول أن تحل! 1. أثبت أن أي زاويتين حادتين متساويتين في القياس لهما نفس جيب التمام.

فكر وتأبر في الحل

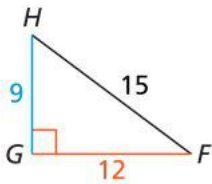
يوجد العديد من علاقات التناسب في المثلثات المتشابهة. ابحث عن علاقة واحدة تستعمل كل أطوال الأضلاع في المقادير التي تعبر عن $\sin E$ و $\sin B$

مثال 2

كتابة النسب المثلثية

أوجد نسبة كل من الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية H.

استعمل تعريفات النسب المثلثية.



$$\sin H = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } H}{\text{طول الوتر}} = \frac{12}{15}$$

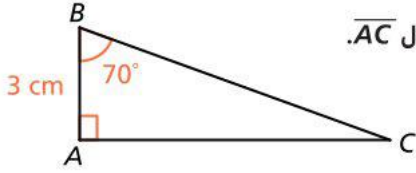
$$\cos H = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } H}{\text{طول الوتر}} = \frac{9}{15}$$

$$\tan H = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } H}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } H} = \frac{12}{9}$$

حاول أن تحل! 2. في المثال 2، أوجد نسبة كل من الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية F.

خطأ شائع

قد تفترض خطأً أن الضلع الأفقي هو دائماً الضلع المجاور، والضلع الرأسى هو دائماً الضلع المقابل. تذكر أن تحديد أي ضلع هو الضلع المقابل وأي ضلع هو الضلع المجاور يتوقف على الزاوية التي نحسب نسبتها المثلثية.



A. في الشكل المجاور، استعمل النسب المثلثية لإيجاد طول $\overline{AC}$.
قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن الضلع $\overline{AC}$ يقابل الزاوية B حيث $m\angle B = 70^\circ$ وبما أن طول الضلع المجاور للزاوية B يساوي 3، إذن نستخدم النسبة $\tan B$.

$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 70^\circ = \frac{AC}{3}$$

$$3 \times \tan 70^\circ = AC$$

$$AC = 3 \times \tan 70^\circ$$

$$AC \approx 8.2$$

إذن، طول $\overline{AC}$ يساوي 8.2 تقريباً.



B. في الشكل المجاور، أوجد $m\angle B$.
قرب إجابتك إلى أقرب درجة.

بما أنك تعلم طول الضلع المقابل للزاوية B وطول الوتر، استعمل النسبة $\sin$.

$$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$m\angle B$ هو قياس الزاوية الحادة التي جيبها $\frac{1}{4}$ ، لإيجاد قياس هذه الزاوية، نستخدم **معكوس نسبة الجيب** ويُرسم له بالرمز $\sin^{-1}$.

$$\sin B = \frac{1}{4}$$

$$m\angle B = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\approx 14^\circ$$

نصيحة دراسية

لاختبار النسبة المثلثية الصحيحة، فُكر في ضلع المثلث الذي تعرف طوله والضلع الذي تحتاج إلى إيجاد طوله.

إرشاد

إذا علمت أن $\sin x = 0.3$ ، استعمل التعبير $\sin^{-1}(0.3)$ لإيجاد قياس الزاوية x .

إذا علمت $\tan y = 2$ ، استعمل التعبير $\tan^{-1}(2)$ لإيجاد قياس الزاوية y . استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياسات هذه الزوايا.

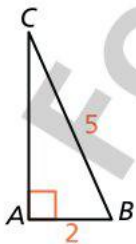
3. a. في الشكل المجاور، استعمل نسبة مثلثية مناسبة لإيجاد طول $\overline{AB}$.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



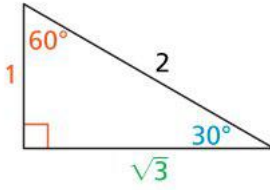
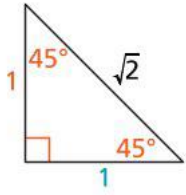
b. في الشكل المجاور، أوجد $m\angle C$.

قرب إجابتك إلى أقرب درجة.



A. ما نسب كل من الجيب وجيب التمام والظل لزوايا قياسها 30° , 45° , 60° ؟

يمكنك استعمال ما تعرفه عن المثلثين القائمي الزاوية $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ و $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ لإيجاد النسب.



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

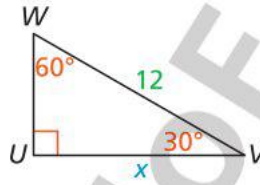
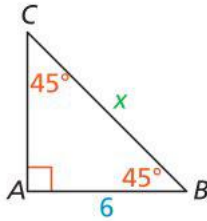
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

B. استعمل النسب المثلثية لإيجاد قيمة x في كل مثلث.



اختر نسبة مثلثية ملائمة لكتابة معادلة، ثم حل المعادلة لإيجاد قيمة x .

$$\cos 45^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{x}$$

$$x = 6\sqrt{2}$$

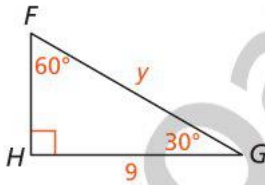
$$\sin 60^\circ = \frac{x}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12}$$

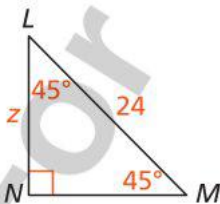
$$x = 6\sqrt{3}$$

عوّض بقيمة النسبة المثلثية.

4. a. في $\triangle FHG$ ، ما قيمة y ؟ حاول أن تحل!



b. في $\triangle LNM$ ، ما قيمة z ؟



نصيحة دراسية

قد تجد أن مقارنة الأعداد غير النسبية أسهل غالبًا إذا جعلت المقامات أعدادًا نسبية.



A. أقلعت طائرة بزاوية 12° ،
هل هذه الزاوية كافية لتحلق
الطائرة فوق جبل ارتفاعه
11 088 ft ويبعد عن المدرج
بمقدار 12.5 mi أم يجب زيادة
زاوية إقلاع الطائرة ؟

نصيحة دراسية

لاختيار النسبة المثلثية الصحيحة،
فكر في ضلع المثلث الذي تعرف
طوله والضلع الذي تحتاج إلى إيجاد
طوله.

الخطوة 1 بما أنك تعرف طول الضلع المجاور للزاوية 12° ، استعمال نسبة الظل لإيجاد ارتفاع الطائرة عند مرورها فوق الجبل.

$$\tan 12^\circ = \frac{x}{12.5}$$

$$x = 12.5 \times \tan 12^\circ$$

$$\approx 2.66$$

استعمل الحاسبة.

12.5 TAN 12 ENTER

سيكون ارتفاع الطائرة عند بلوغها الجبل 2.66 mi تقريبًا.

الخطوة 2 قارن ارتفاع الطائرة بارتفاع الجبل.

$$11\,088 \text{ ft} \times \frac{1 \text{ mi}}{5\,280 \text{ ft}} = 2.1 \text{ mi}$$

اكتب ارتفاع الجبل بالأميال.

بما أن $2.1 \text{ mi} < 2.66 \text{ mi}$

إذن، زاوية إقلاع الطائرة التي قياسها 12° ستكون كافية لتحلق فوق الجبل الذي ارتفاعه 11 088 ft

مساعدة دراسية

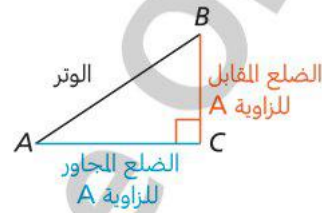
لتحويل المسافة من قدم إلى ميل
أضرب في النسبة الثابتة $\frac{1}{5280}$

حاول أن تحل! 5. إذا أقلعت الطائرة بزاوية 5° وحلقت صعودًا مسافة 20 mi، أوجد ارتفاع الطائرة بعد قطعها تلك المسافة. قرب إجابتك إلى أقرب قدم.

لفظيًا

- في المثلث القائم الزاوية ACB ، تربط النسب المثلثية $\sin A$ ، $\cos A$ ، $\tan A$ بين قياس الزاوية الحادة في المثلث وأطوال الأضلاع.
- لإيجاد طول ضلع في المثلث القائم الزاوية، تحتاج إلى معلومية إحدى النسب المثلثية لزاوية حادة وطول ضلع.
- لإيجاد قياس زاوية في المثلث القائم، تحتاج إلى معلومية طول ضلعين، واستعمال معكوس إحدى النسب المثلثية.

بمخطط

المثلث ACB قائم الزاوية.

بالرموز

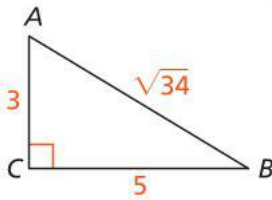
$$\sin A = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } A}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos A = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } A}{\text{طول الوتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } A}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } A}$$

طبق فهمك

في التمارين 7-12، استعمل $\triangle ACB$ أدناه لإيجاد النسب المثلثية وقياسات الزوايا المطلوبة.



7. $\tan B$

8. $\cos B$

9. $\sin A$

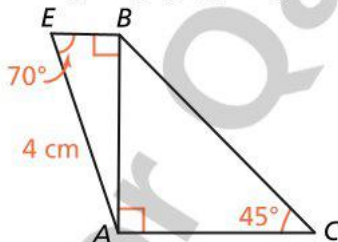
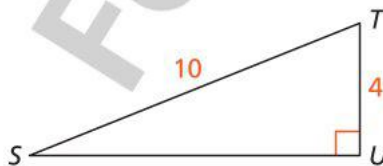
10. $\tan A$

11. $m\angle B$

12. $m\angle A$

13. BAC مثلث قائم الزاوية في A .

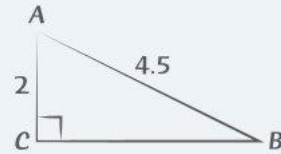
أوجد قياس الزاوية B إذا كان $\cos B = \frac{3}{4}$. قَرِّب إجابتك إلى أقرب درجة.

14. في الشكل أدناه، أوجد طول كل من $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$.15. في الشكل الموضح أدناه، أوجد $m\angle T$ و $m\angle S$.

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تربط النسب المثلثية بين قياسات زوايا وأطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية ؟
2. حلّ الخطأ أوجد الخطأ في المعادلة التالية وصحّحه.

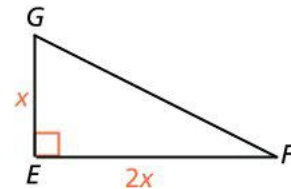
$$\sin A = \frac{2}{4.5}$$



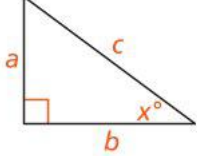
3. المصطلحات ما وجه الشبه بين إيجاد معكوس النسب

المثلثية واستعمال العمليات العكسية ؟

4. تواصل بدقة أوجد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين نسبة الجيب ونسبة جيب تمام لنفس الزاوية في مثلث قائم.

5. ابحث عن العلاقات إذا كان $\sin A = \frac{a}{c}$ ، كيف تستعمل a و c كي تجد $\cos A$ ؟6. بَرِّر منطقيًا كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية G في الشكل أدناه ؟

في التمارين 21-23، اكتب النسب المثلثية التالية: انظر المثال 2



21. $\sin x^\circ$ 22. $\cos x^\circ$ 23. $\tan x^\circ$

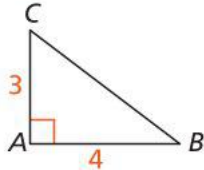
في التمارين 24-29، أوجد النسب المثلثية التالية: انظر المثال 2



24. $\sin x^\circ$ 25. $\cos x^\circ$ 26. $\tan x^\circ$
27. $\sin y^\circ$ 28. $\cos y^\circ$ 29. $\tan y^\circ$

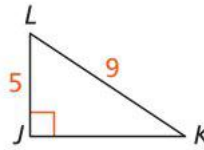
في التمارين 30-33، أوجد قياسات زوايا المثلث. انظر المثال 3

30. $m\angle B$

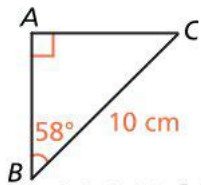


31. $m\angle C$

32. $m\angle K$



33. $m\angle L$



34. في الشكل أدناه، استعمل النسب المثلثية لإيجاد طول كل من $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$. انظر المثال 3

في التمارين 35-40، احسب النسب المثلثية التالية: انظر المثال 4

35. $\sin 30^\circ$ 36. $\cos 60^\circ$ 37. $\sin 45^\circ$
38. $\tan 45^\circ$ 39. $\cos 30^\circ$ 40. $\tan 60^\circ$

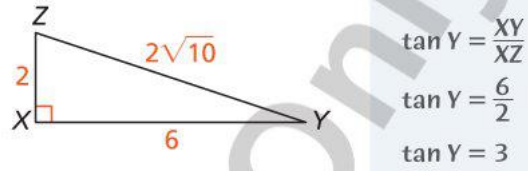
41. سدد حمد الكرة البيضاء بزاوية 62° بهدف إصابة الكرة الحمراء كما هو موضح في الشكل أدناه.

هل زاوية التسديد مناسبة لإصابة الكرة الحمراء إذا كانت على مسافة 160 cm من الرأس الزاوية العلوية اليسرى للطاولة؟

انظر المثال 5

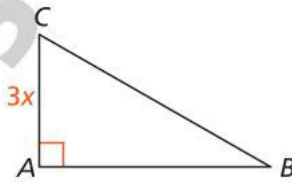


16. **حلّ الخطأ** طلبت المعلمة من جميلة إيجاد ظل $\angle Y$. أوجد خطأ جميلة وصحّحه.

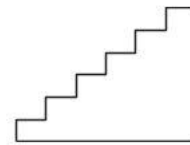


$$\begin{aligned}\tan Y &= \frac{XY}{XZ} \\ \tan Y &= \frac{6}{2} \\ \tan Y &= 3\end{aligned}$$

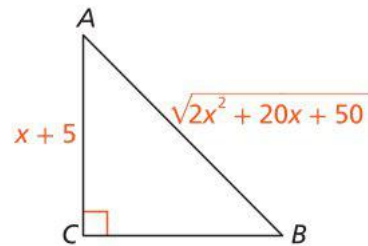
17. **فكّر وثابر في الحل** في المثلث أدناه، إذا كان $\sin B = 0.5$ ، أوجد AB .



18. **بزر منطقياً** يمثّل الشكل أدناه درخا داخل منزل، عمق كل درجة من درجاته (أي عرضها) 8 in وارتفاع الجزء القائم منها 6 in، كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية التي يشكّلها الدرج مع الأرض؟ وضح إجابتك.

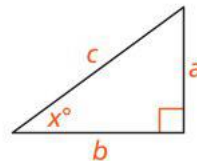


19. **روابط في الرياضيات** أوجد القيم التالية:

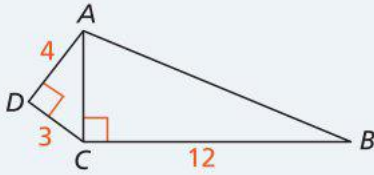


- a. $\sin B$ b. $m\angle B$

20. **مهارات التفكير العليا** لماذا لا يمكن أن يكون جيب وجيب تمام الزاوية x° أكبر من واحد أبداً؟ استعمل المثلث أدناه لتوضيح تبريرك المنطقي.

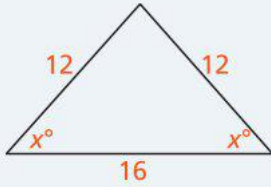


45. صل كل نسبة مثلثية بقيمتها.



- | | |
|------------------------|--------------------|
| I. $\cos \angle ACD$ | A. $\frac{12}{13}$ |
| II. $\tan \angle ABC$ | B. $\frac{4}{5}$ |
| III. $\sin \angle BAC$ | C. $\frac{3}{5}$ |
| IV. $\cos \angle CAD$ | D. $\frac{5}{12}$ |

46. اختبار SAT/ACT ما قيمة $\cos x^\circ$ ؟



- (A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

47. مهمة أدائية ربط يوسف سلسلة بشجرة وثبت طرفها الآخر في

طوق كلبه. عندما يشد الكلب السلسلة إلى أقصاه، تتشكل زاوية

بين السلسلة والشجرة قياسها 84°



الجزء A إذا كانت حديقة جار يوسف تبعد 18 ft عن الشجرة،

هل يستطيع كلب يوسف أن يصل إليها ؟ إذا كان كذلك،

كم يستطيع أن يبتعد الكلب داخل حديقة الجار ؟

قرب إجابتك لأقرب جزء من عشر أقدام.

الجزء B إذا كان يوسف حريصاً على عدم تمكّن الكلب من

الاقتراب من حديقة الجار مسافة لا تزيد عن 1 ft ، عند أي

ارتفاع للشجرة يجب عليه ربط السلسلة. قرب الإجابة إلى

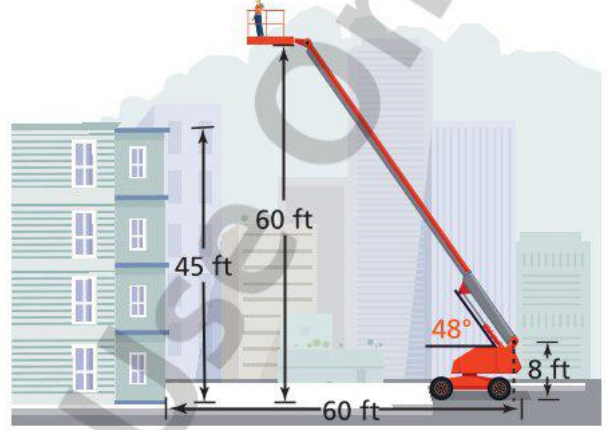
أقرب جزء من عشر أقدام.

42. فكر وتأثر في الحل لإجراء إصلاحات في أحد المباني، يستعمل

العمال رافعة ذراعية أقصى ارتفاع لها 60 ft عند زاوية 48° ،

إذا كانت قاعدة الرافعة تبعد 60 ft عن المبنى، هل يمكن أن تصل

ذراع الرافعة إلى أعلى المبنى ؟ وضح إجابتك.



43. نموذج رسم المدرب خطة لعب بحيث يتمكن اللاعب خلف الوسط

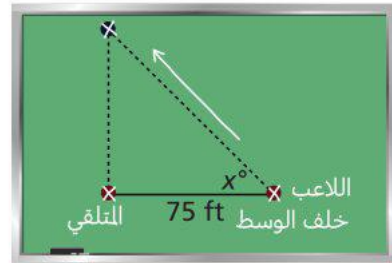
من رمي الكرة في نفس الوقت الذي يركض فيه المتلقي مباشرة

تجاه نهاية الملعب. افترض أن اللاعب خلف الوسط رمي الكرة

بسرعة 20 ft/s وركض المتلقي بسرعة 12 ft/s ، بأي زاوية x° مع

الخط الأفقي يجب أن يرمي اللاعب خلف الوسط الكرة لكي يمسكها

المتلقي ؟ وضح إجابتك.



44. استعمال البنية وضع حسان مجسم غوريلا قابلاً للنفخ للإعلان عن

تخفيضات لأسعار السيارات في معرض السيارات الذي يعمل فيه.

تم تثبيت هذا المجسم بثلاثة حبال زواياها موضحة في الرسم أدناه.

أوجد الطول الكلي للحبال. قرب إجابتك إلى أقرب قدم.



أستطيع... استعمال النسب المثلثية ومقلوباتها لحل المسائل.

معايير الدرس

10.7.10 و 10.7.6

المصطلحات

- sine جيب
- cosine جيب التمام
- tangent ظل
- reciprocal trigonometric ratios مقلوبات النسب المثلثية
- secant قاطع
- cosecant قاطع التمام
- cotangent ظل التمام
- cofunction النسب المثلثية للزوايا المتتامه
- identity متطابقة
- identity for cofunctions متطابقات النسب المثلثية للزوايا المتتامه
- cofunction identities

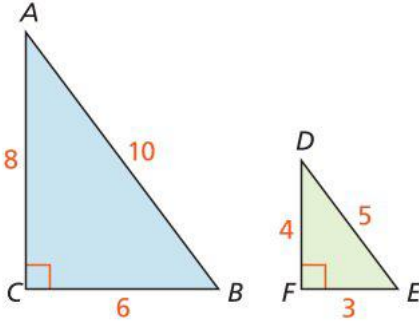
استكشف وبزر منطقيًا

في الشكل المجاور، $\triangle ACB \sim \triangle DFE$.

A. اكتب أكبر عدد ممكن من النسب باستعمال طولي ضلعين في $\triangle ACB$.

B. اكتب أكبر عدد ممكن من النسب باستعمال طولي ضلعين في $\triangle DFE$.

C. **ابحث عن العلاقات** ما النتائج التي تتوقع الحصول عليها في الجزأين A و B عن نسب أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة الزاوية المتشابهة؟



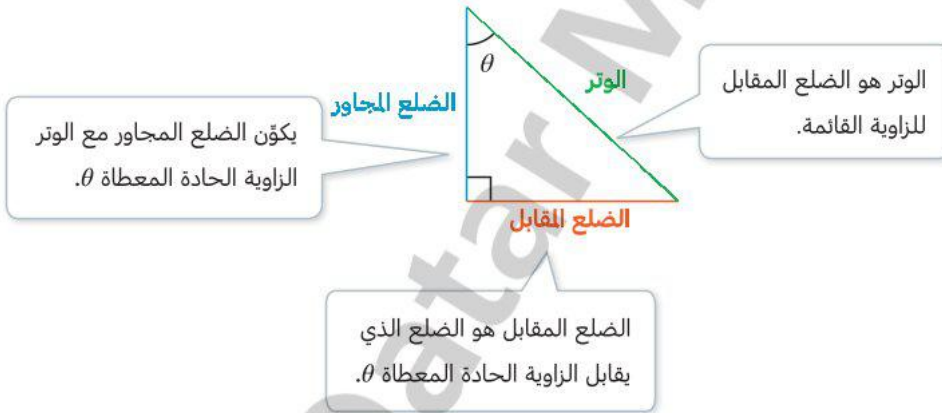
كيف يمكن للنسب بين أطوال الأضلاع في المثلثات القائمة الزاوية أن تساعد على إيجاد أطوال الأضلاع الأخرى وقياسات الزوايا في هذه المثلثات؟

السؤال الأساس

المفهوم النسب المثلثية

في المثلث القائم الزاوية، الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى الوتر، والضلعان الآخران يسمىان ضلعي القائمة.

يُستعمل الحرف اليوناني θ ، ويُقرأ "ثيتا"، غالبًا لتمثيل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية. الزاوية θ هي اختصار للعبارة "زاوية قياسها θ ".



النسب المثلثية الأساسية الست للزاوية θ هي:

جيب الزاوية θ

$$\sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

جيب تمام الزاوية θ

$$\cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

ظل الزاوية θ

$$\tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

تتكون مقلوبات النسب المثلثية للزاوية θ من خلال المبادلة بين البسط والمقام في كل نسبة.

قاطع تمام الزاوية θ

$$\csc \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

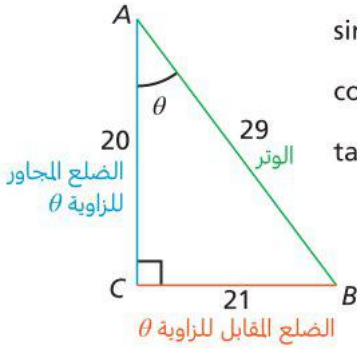
قاطع الزاوية θ

$$\sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

ظل تمام الزاوية θ

$$\cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

في الشكل المجاور، $\triangle ACB$ قائم الزاوية في C . اكتب النسب المثلثية الست للزاوية θ .



$$\sin \theta = \frac{21}{29}$$

$$\csc \theta = \frac{29}{21}$$

$$\cos \theta = \frac{20}{29}$$

$$\sec \theta = \frac{29}{20}$$

$$\tan \theta = \frac{21}{20}$$

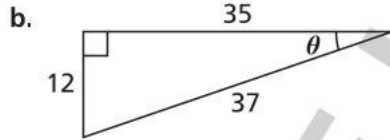
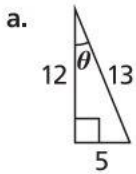
$$\cot \theta = \frac{20}{21}$$

يكون كلٌّ من قيمتي جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية في الفترة $[-1, 1]$ ، في حين أن قيم مقلوباتها تكون في الفترة $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

نصيحة دراسية

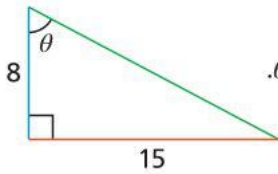
قبل إيجاد النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية، من المفيد تحديد اسم كل ضلع: المقابل للزاوية θ ، المجاور للزاوية θ ، الوتر.

1. حاول أن تحل! أوجد النسب المثلثية الست للزاوية θ في كل مثلث مما يلي:



استعمال نسبة مثلثية واحدة لإيجاد النسب المثلثية الأخرى

في المثلث القائم الزاوية، إذا كانت $\tan \theta = \frac{15}{8}$ ، أوجد النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ .

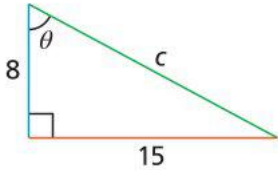


يمكنك استعمال نسبة مثلثية واحدة لإيجاد النسب المثلثية الأخرى.

الخطوة 1 استعمال تعريف نسبة $\tan \theta$ لترسم مثلثًا قائمًا يحتوي الزاوية θ .

$$\tan \theta = \frac{15}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

الخطوة 2 استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(8)^2 + (15)^2 = c^2$$

$$17 = c$$

الخطوة 3 استعمال أطوال الأضلاع لإيجاد بقية النسب المثلثية.

عوّض أطوال الأضلاع في الصيغ. على سبيل المثال،

بما أن $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، فإن $\sin \theta = \frac{15}{17}$. اكتب الآن بقية النسب المثلثية.

إذن النسب المثلثية الخمسة الأخرى هي :

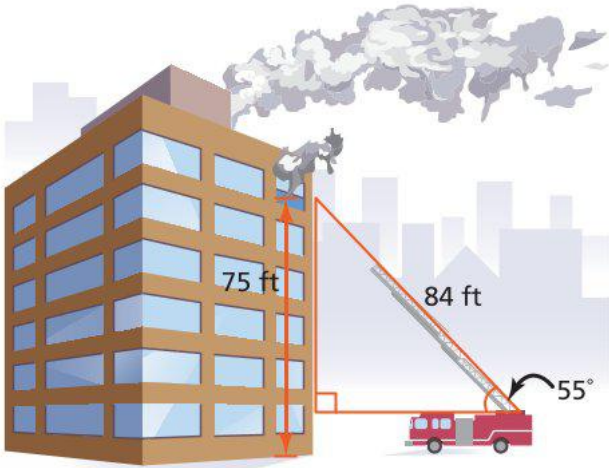
$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = \frac{8}{17}, \quad \csc \theta = \frac{17}{15}, \quad \sec \theta = \frac{17}{8}, \quad \cot \theta = \frac{8}{15}$$

استعمل البنية

هل في كل مثلث قائم الزاوية مرسوم بقياس زاوية θ ونسبة مثلثية $\tan \theta$ معطاة يمكنك استنتاج بقية النسب المثلثية ؟

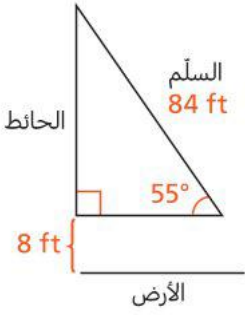
2. حاول أن تحل! في المثلث القائم الزاوية، إذا كانت $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ، حيث θ زاوية حادة في المثلث،

أوجد النسب المثلثية الخمس الأخرى للزاوية θ .



يمتد سلم سيارة إطفاء بطول 84 ft
مقابل بناء صانعا زاوية قياسها 55°
مع مستوى سطح السيارة التي
ارتفاعها عن سطح الأرض 8 ft،
يحاول رجال الإطفاء الوصول إلى نافذة
في البناء ارتفاعها عن سطح الأرض
75 ft، هل بإمكان رجال الإطفاء
الوصول إلى هذه النافذة بوضعية
السلم هذه ومع قياس
الزاوية المعطاة ؟

الخطوة 1 ارسم مخططاً لتمثيل الموقف، ثم عَيِّن القياسات المعطاة على الرسم.



الخطوة 2 حدّد النسبة المثلثية التي سوف تستعملها.

لديك طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، والمطلوب إيجاد طول
الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 55°.
في المثلث القائم الزاوية، النسبة التي تربط طول الضلع المقابل
لزاوية بطول الوتر هي جيب الزاوية.

الخطوة 3 ليكن x طول الضلع المقابل للزاوية 55°

$$\sin 55^\circ = \frac{x}{84}$$

الخطوة 4 أوجد قيمة x .

$$x = 84 \sin 55^\circ$$

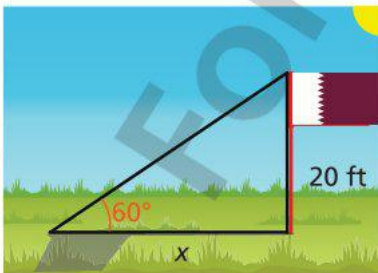
$$x \approx 68.8 \text{ ft}$$

الخطوة 5 أوجد الارتفاع الذي يمكن لسلم سيارة الإطفاء أن يصل إليه.

الارتفاع الذي يصل إليه سلم سيارة الإطفاء
يساوي طول ضلع المثلث زائد ارتفاع سيارة
الإطفاء عن سطح الأرض البالغ 8 ft

$$68.8 + 8 = 76.8 \text{ ft}$$

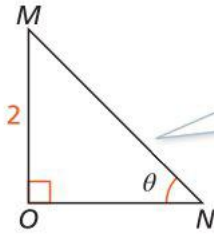
إذن ، نعم يستطيع رجال الإطفاء الوصول إلى النافذة التي ارتفاعها 75 ft حيث الحريق ، لأن سلم الإطفاء
يمكن أن يصل إلى ارتفاع 76.8 ft.



حاول أن تحلّ! 3. يشكّل شعاع الشمس مع الأرض زاوية
قياسها 60°، أوجد طول ظل سارية علم
ارتفاعها 20 ft عن سطح الأرض.

A. مثلث قياسات زواياه $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ و $OM = 2$.

أوجد النسب المثلثية الست للزاوية N التي قياسها θ .



هذا مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين،
لذا فإن ضلعي القائمة متطابقان.

أوجد الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس:

نصيحة دراسية

تذكر أن في كل مثلث قياسات زواياه $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ، يمكن التعبير عن أطوال الأضلاع بالصورة $x, x, x\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (2)^2 + (2)^2 &= c^2 \\ c &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

أطوال الأضلاع هي: $MO = 2, NM = 2\sqrt{2}, ON = 2$.

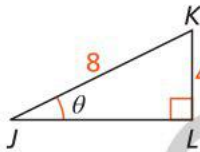
إذن النسب المثلثية للزاوية θ في $\triangle MON$ هي:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan \theta &= \frac{2}{2} = 1 \\ \csc \theta &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \sec \theta &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \cot \theta &= 1 \end{aligned}$$

تحقق من حساباتك باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من $\sin 45^\circ$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
يجب أن يساوي كل منهما 0.7071 تقريبًا.

B. افترض أن LLK مثلث قائم الزاوية قياسات زواياه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ وفيه

$LK = 4$ و $m\angle J = 30^\circ$. أوجد النسب المثلثية الست للزاوية J التي قياسها θ .



هذا المثلث هو نصف مثلث متطابق
الأضلاع، لذا فإن طول الوتر فيه يساوي
ضعف طول ضلع القائمة الأقصر.

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الضلع الثالث:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (4)^2 + b^2 &= (8)^2 \\ b^2 &= 48 \\ b &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

إذن أطوال الأضلاع هي: $LK = 4, KJ = 8, JL = 4\sqrt{3}$.

نصيحة دراسية

تذكر أن في كل مثلث قياسات زواياه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ، يمكن التعبير عن أطوال الأضلاع بالصورة $x, 2x, x\sqrt{3}$.

إذن النسب المثلثية للزاوية θ في $\triangle JLK$ هي:

$$\sin \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{8}{4} = 2$$

$$\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

حاول أن تحل! 4. طول الوتر في مثلث قياسات زواياه $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ يساوي $5\sqrt{2}$ ، أوجد نسبتي الجيب والقاطع حيث $\theta = 45^\circ$.

شرح المتطابقات المثلثية

مثال 5

الاستيعاب المفاهيمي

A. أي النسب المثلثية تُعدّ مقلوبات بعضها لبعض؟

المتطابقة هي معادلة صحيحة لجميع قيم المتغير التي تجعل كل المقادير في المعادلة معروفة. لقد رأينا في السابق أن بعض النسب المثلثية تتضمن نسبًا تُعدّ مقلوبات بعضها لبعض. مثال:

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

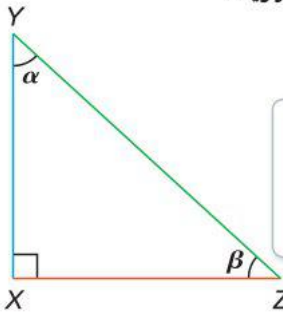
يتضح أن متطابقة مقلوب النسبة المثلثية التالية صحيحة لكل قيم θ التي هي قياس زاوية حادة:

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

تأكد من أن المعادلة صحيحة جبريًا باستعمال التعويض:

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = \frac{1}{\left(\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}\right)} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

B. ما العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين الحادتين في المثلث القائم الزاوية؟



يُستعمل غالبًا الحرفان اليونانيان α (ألفا) و β (بيتا) لتمثيل الزوايا في حساب المثلثات.

α و β زاويتان متتامتان.

إذن، $\alpha + \beta = 90^\circ$ ، وبالتالي

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

قارن بين الجيب وجيب التمام للزاويتين α و β :

$$\sin \alpha = \frac{XZ}{YZ}$$

$$\sin \beta = \frac{XY}{YZ}$$

$$\cos \alpha = \frac{XY}{YZ}$$

$$\cos \beta = \frac{XZ}{YZ}$$

نلاحظ ما يلي: إذا كانت $\beta = 90^\circ - \alpha$ ، فإن $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \alpha = \sin \beta$. العلاقة بين النسب

المثلثية **لزاويتين متتامتين** تسمى **متطابقات النسب المثلثية للزوايا المتتامة**.

يتبع في الصفحة التالية

نصيحة دراسية

مجموع قياسي الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية يساوي 90° ، إذن هاتان الزاويتان متتامتان.

C. المثلث DFE قائم الزاوية في F ، وفيه $m\angle D = \alpha$ و $m\angle E = \beta$.

إذا كان $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ و $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ ، أوجد $\sin \beta$ و $\cos \beta$.

في مثلث قائم الزاوية، حيث α و β زاويتان متتامتان، $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \alpha = \sin \beta$.

بما أن $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ و $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ ،

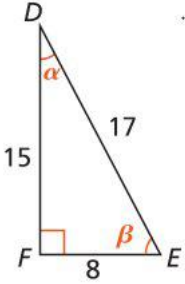
فإن $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و $\cos \beta = \frac{8}{17}$.

يمكنك التحقق من النتائج التي توصلت إليها برسم مثلث واحد ممكن يمثل الموقف.

في هذا المثال، طول الوتر يساوي 17، وطول الضلع المقابل للزاوية α يساوي 8،

وطول الضلع المجاور للزاوية α يساوي 15، يمكنك من خلال هذه المعلومات إثبات

أن $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و $\cos \beta = \frac{8}{17}$.



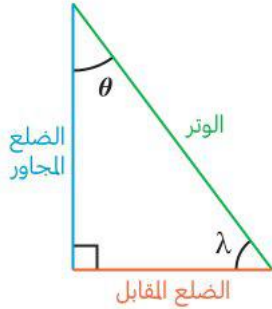
5. **حاول أن تحل!** أوجد متطابقات نسبي الظل وظل التمام للزاويتين المتتامتين في المثلث القائم الزاوية.

لفظيًا

النسب بين أطوال الأضلاع في أي مثلث قائم الزاوية هي نفسها دائمًا للزاوية θ المعطاة.

هذه النسب تُعرف باسم النسب المثلثية الأساسية الست.

التعريفات



$$\tan \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$$

متطابقات النسب المثلثية للزوايا المتتامّة.

إذا كانت $\alpha = 90^\circ - \beta$ ، فإن $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \alpha = \sin \beta$

طبّق فهمك

في التمرينين 7 و 8، أوجد $\sin \theta$ باستعمال النسبة المثلثية المعطاة.

$$7. \csc \theta = \frac{7}{3}$$

$$8. \tan \theta = \frac{5}{12}$$

في التمرينين 9 و 10، استعمل النسبة المثلثية المعطاة لإيجاد النسب المثلثية الخمس الأخرى.

$$9. \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$10. \tan \theta = \frac{3}{4}$$

في التمرينين 11 و 12، اكتب متطابقة مقلوب كل نسبة مثلثية معطاة.

$$11. \cos \theta$$

$$12. \tan \theta$$

في التمرينين 13 و 14، اكتب متطابقة النسب المثلثية للزوايا المتتامّة لكل نسبة مثلثية معطاة.

$$13. \csc \theta$$

$$14. \sec \theta$$

15. مثلث قائم الزاوية طول أحد أضلاعه 16 m وهو المجاور لزاوية قياسها 37° ، أوجد طول الوتر في المثلث مقربًا إلى أقرب متر.

16. سارية علم طولها 24 ft، ورأسها مربوط إلى وتد على سطح الأرض بسلك معدني يصنع زاوية قياسها 73° مع سطح الأرض. أوجد المسافة بين الوتر وقاعدة السارية مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن للنسب بين أطوال الأضلاع

في المثلثات القائمة الزاوية أن تساعدك على إيجاد أطوال الأضلاع الأخرى وقياسات الزوايا في هذه المثلثات ؟

2. حلّ الخطأ تقول هند إن $\cos \theta$ هو مقلوب $\sin \theta$. بّين خطأ هند وصححه.

3. المصطلحات وضح ما يعنيه القول بأن $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ متطابقة.

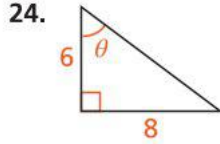
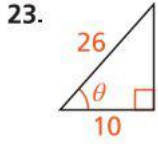
4. ابن الحجج الرياضية لماذا تكون متطابقات الزوايا المتتامّة صحيحة دائمًا في كل المثلثات القائمة ؟

5. عمّم كيف تساعدك معرفة نسبة مثلثية واحدة على إيجاد النسب المثلثية الأخرى ؟

6. ابحث عن العلاقات لماذا يجب أن تكون قيمة كل من نسبة قاطع الزاوية ($\sec \theta$) ونسبة قاطع تمام الزاوية ($\csc \theta$) دائمًا أكبر من 1 أو أصغر من -1 ؟

في التمرينين 23 و 24، اكتب النسب المثلثية الست للزاوية θ .

انظر المثال 1



في التمارين 25-28، أوجد النسب المثلثية للزاوية θ في مثلث قائم

الزاوية في ضوء القيمة المعطاة التالية: انظر المثال 2

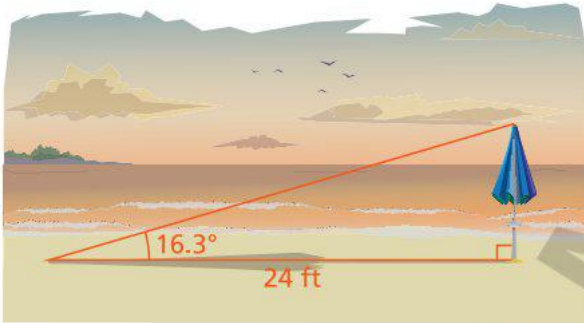
25. $\cos \theta = \frac{4}{5}$

26. $\cot \theta = \frac{12}{16}$

27. $\csc \theta = \frac{17}{15}$

28. $\sec \theta = \frac{52}{20}$

29. تصنع مظلة مغلقة ظلًا على الأرض طوله 24 ft أثناء شروق الشمس. إذا كان قياس زاوية شروق الشمس مع الأرض 16.3° ، أوجد ارتفاع المظلة مقربًا إلى أقرب قدم. انظر المثال 3



في التمرينين 30 و 31، أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ في المثلثات الخاصة

المعطاة. انظر المثال 4

30. مثلث $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ، وطول ضلع القائمة 9

31. مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ، وطول الوتر فيه 14، حيث $\theta = 30^\circ$.

في التمرينين 32 و 33، اكتب متطابقة النسب المثلثية للزوايا

المتتامة للنسبة المثلثية المعطاة؟ انظر المثال 5

33. جيب التمام

32. القاطع

17. **ابن الحجج الرياضية** قال منصور إن بإمكاننا إيجاد طول أي ضلع

أو قياس أي زاوية في مثلث قائم الزاوية إذا عرفنا طول ضلع واحد وقياس زاوية حادة واحدة أو طول ضلعين على الأقل.

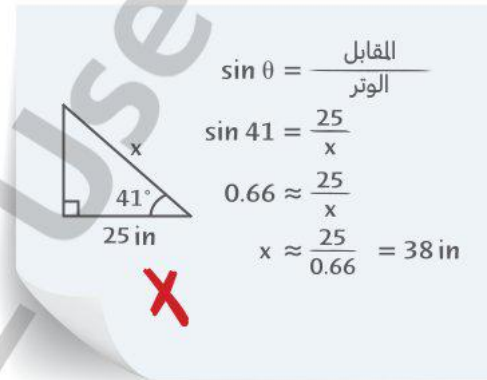
هل منصور على صواب؟ وضح إجابتك.

18. **ابحث عن العلاقات** يجب أن يكون جيب الزاوية في المثلث القائم

الزاوية أكبر من 0 وأصغر من 1، وضح السبب.

19. **حلل الخطأ** أوجد ناصر طول الوتر في المثلث القائم كما هو مبين

أدناه. يبين خطأ ناصر وصحته.



20. **ابن الحجج الرياضية** أثبت أن متطابقة المقلوب $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

صحيحة دائمًا.

21. **عقم** إذا كانت قياسات الزوايا الثلاث في مثلث معطاة، فإنه لا

يمكنك إيجاد أطوال أضلاع هذا المثلث بدقة. لكن إذا كانت أطوال

الأضلاع الثلاثة في مثلث معطاة، فإنه يمكنك إيجاد قياسات الزوايا

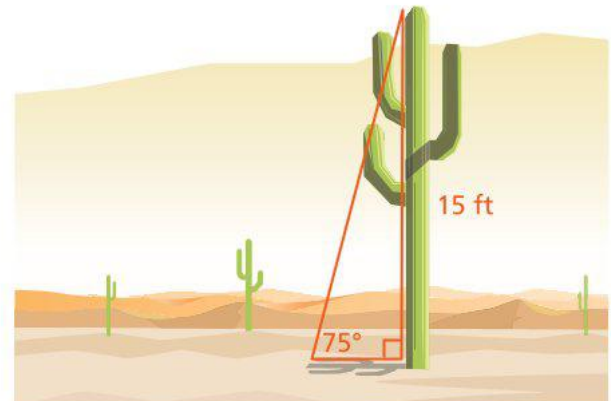
الثلاث بدقة.

وضح السبب.

22. **برز منطقياً** تصنع الشمس بعد الشروق زاوية قياسها 75° مع

سطح الأرض. أوجد طول ظل ساق نبتة صبار ارتفاعها 15 ft عن

سطح الأرض. قَرِّب إجابتك إلى أقرب قدم.



38. صل كل نسبة مثلثية في العمود الأيسر بمقلوبها في العمود الأيمن.

- | | |
|------------------|----------------------------|
| 1. $\sin \theta$ | A. $\frac{1}{\cos \theta}$ |
| 2. $\sec \theta$ | B. $\frac{1}{\sin \theta}$ |
| 3. $\tan \theta$ | C. $\frac{1}{\cot \theta}$ |
| 4. $\cos \theta$ | D. $\frac{1}{\sec \theta}$ |
| 5. $\csc \theta$ | E. $\frac{1}{\tan \theta}$ |
| 6. $\cot \theta$ | F. $\frac{1}{\csc \theta}$ |

39. اختبار SAT/ACT أي مما يلي صحيح ؟

- Ⓐ $\sin \theta = \csc(90^\circ - \theta)$
 Ⓑ $\sec \theta = \cos(90^\circ - \theta)$
 Ⓒ $\tan \theta = \cos(90^\circ - \theta)$
 Ⓓ $\sec \theta = \sin(90^\circ - \theta)$
 Ⓔ $\tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$

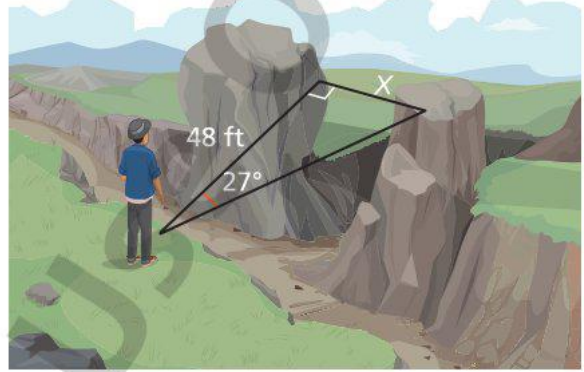
40. مهمة أدائية ففز كلب ماجد في جدول مالي من حافة جسر وسبح في مسار يصنع زاوية قياسها 68° مع الجسر. عبر ماجد الجسر وسار في اتجاه التيار ليقابل الكلب. كما هو موضح في الشكل أدناه.



الجزء A أوجد طول الجزء من الجسر الذي يصل بين ضفتي النهر بالأقدام.

الجزء B أوجد المسافة التي سبها الكلب بالأقدام.

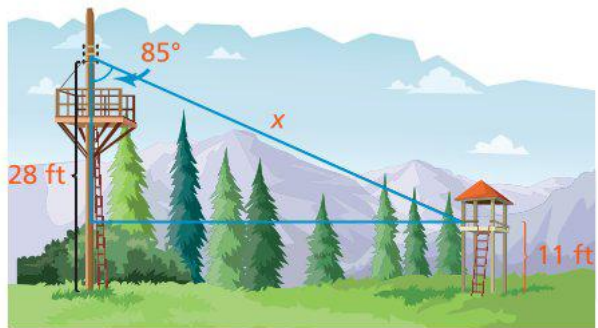
34. فكر وثابر في الحل شاهد سالم صخرتين متقابلتين تشكّلان ما يشبه وادياً ضيقاً، إحداهما تواجه سالم مباشرةً والأخرى تصنع زاوية قياسها 27° مع الصخرة الأولى كما تُرى من موقع سالم. استعمل المعطيات المدونة على الصورة لإيجاد المسافة بين التكوينين الصخريين. قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



35. بزر منطقياً وضعت إدارة الصحة والسلامة قاعدة "1 في 4" (أي وحدة أفقية واحدة لكل 4 وحدات رأسية) لتحديد ما إذا كانت وضعية السلم آمنة أثناء استعماله. من جهة أخرى، يُعتبر أن القياس الأقصى للزاوية التي يشكّلها السلم مع الأرض وتضمن استعمالاً آمناً له هو 75° ، استعمل نسبة مثلثية لتحديد ما إذا كانت قاعدة "1 في 4" تضمن استعمالاً آمناً للسلم.

36. نموذج بُنيت لوحة مزخرفة بواسطة سلك معدني طوله 42 in بوتد على سطح الأرض. إذا كان السلك يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها 80° ، أوجد ارتفاع اللوحة.

37. فكر وثابر في الحل يُستعمل سلك منحدر لإرسال أدوات من برج مراقبة إلى آخر. بُنيت أحد طرفيه عند ارتفاع 28 ft على عمود البرج الأول والطرف الثاني عند ارتفاع 11 ft على عمود البرج الآخر. ينحدر السلك بزاوية تساوي 85° مع العمود الأول كما هو موضح. أوجد طول السلك إذا كان مشدوداً تماماً. قَرّب إجابتك إلى أقرب عدد كلي.



4-4

قانون الجيب

The Law of Sine

أستطيع... استعمال قانون الجيب
لحل المسائل.

معايير الدرس

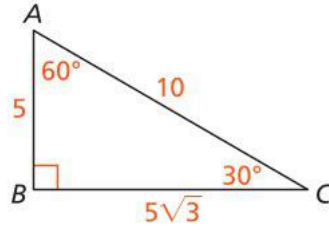
10.7.7 و 10.7.9 و 10.7.10

المصطلحات

• قانون الجيب law of sine

استكشف وبّر منطقياً

لنأخذ المثلث القائم الزاوية $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ الموضح أدناه.



A. أوجد قيمة كل من النسبتين $\frac{\sin C}{AB}$ و $\frac{\sin A}{BC}$. ما العلاقة بين قيمتي هاتين النسبتين؟

B. فكر وثابر في الحل في رأيك، هل هذه العلاقة تنطبق على قيمتي هاتين النسبتين في أي مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ؟ وضح إجابتك.

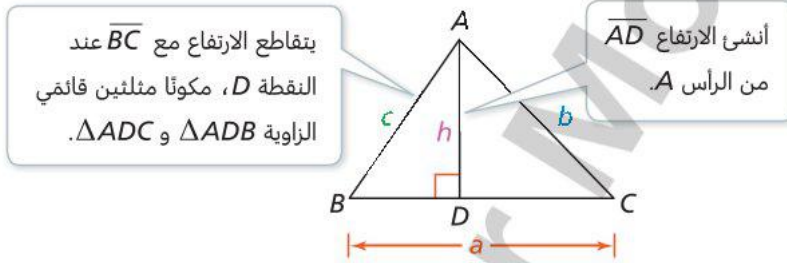
كيف يمكن استعمال قانون الجيب لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلثات الحادة الزوايا والمثلثات المنفرجة الزاوية؟

السؤال الأساس

استكشف قانون الجيب

مثال 1

كيف يمكن استعمال النسبة المثلثية لجيب الزاوية في إيجاد علاقة بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في $\triangle ABC$ ؟



يتقاطع الارتفاع مع $\overline{BC}$ عند النقطة D ، مكوناً مثلثين قائمي الزاوية $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$.

أنشئ الارتفاع $\overline{AD}$ من الرأس A .

اكتب معادلات $\sin B$ و $\sin C$ باستعمال المثلثين القائمين.

$$\sin B = \frac{h}{c}$$

$$c \cdot \sin B = h$$

$$\sin C = \frac{h}{b}$$

$$b \cdot \sin C = h$$

حل المعادلتين لإيجاد قيمة h .

ساو بين المقدارين بدلالة h .

$$c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يتضمن تعريف نسبة الجيب الزوايا الحادة فقط. بالنسبة إلى المثلثات القائمة والمنفرجة الزاوية، يمكنك توسيع تعريف نسبة الجيب ونسبة جيب التمام ليشمل هاتين الزاويتين.

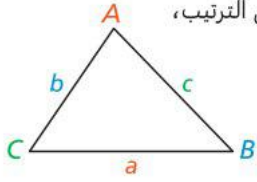
الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

تذكر أن جيب الزاوية في المثلث القائم هو نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الوتر.

حاول أن تحل! 1. في المثال 1، أثبت أن: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

المفهوم قانون الجيب

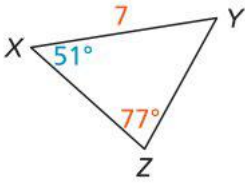


في أي مثلث ABC ، إذا كانت أطوال الأضلاع a, b, c تقابل الزوايا A, B, C على الترتيب، فإن **قانون الجيب** يربط جيب كل زاوية بطول الضلع المقابل لها.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

مثال 2

استعمال قانون الجيب لإيجاد طول ضلع في مثلث



في المثلث XYZ ، أوجد طول $\overline{YZ}$. قَرِّب الطول إلى أقرب جزء من عشرة.

حدِّد زوجين معلومين من الأضلاع والزوايا.

- قياس $\angle Z$ وطول الضلع المقابل لها $\overline{XY}$ معلومان.
 - قياس $\angle X$ معلوم لكن طول الضلع $\overline{YZ}$ غير معلوم.
- استعمل قانون الجيب لكتابة معادلة وإيجاد طول $\overline{YZ}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin Z}{XY} &= \frac{\sin X}{YZ} \\ \frac{\sin 77^\circ}{7} &= \frac{\sin 51^\circ}{YZ} \\ YZ &= \frac{7 \sin 51^\circ}{\sin 77^\circ} \\ YZ &\approx 5.6 \end{aligned}$$

استعمل الآلة الحاسبة.

$$7 \times \sin 51 \div \sin 77$$

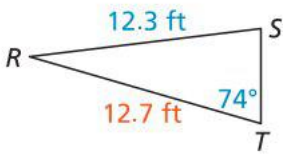
خطأ شائع

أحرص على كتابة نسبة جيب الزاوية إلى طول الضلع المقابل لها بشكل صحيح. من المفيد رسم سهم من رأس كل زاوية إلى الضلع المقابل لها.

حاول أن تحل! 2. في المثال 2، أوجد XZ إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال 3

استعمال قانون الجيب لإيجاد قياس زاوية في مثلث



في $\triangle RST$ ، أوجد $m\angle S$ و $m\angle R$.

الخطوة 1 استعمال قانون الجيب لكتابة معادلة لإيجاد $\sin S$ وحلها.

$$\begin{aligned} \frac{\sin S}{RT} &= \frac{\sin T}{RS} \\ \frac{\sin S}{12.7} &= \frac{\sin 74^\circ}{12.3} \\ \sin S &= \frac{12.7 \sin 74^\circ}{12.3} \\ \sin S &\approx 0.9925 \end{aligned}$$

$m\angle T$ وطول الضلع المقابل للزاوية T معلومان، كما أن طول الضلع المقابل للزاوية S معلوم أيضًا.

الخطوة 2 استعمال معكوس جيب الزاوية $\sin^{-1}$ لإيجاد $m\angle S$.

$$\sin^{-1}(\sin S) = \sin^{-1}(0.9925)$$

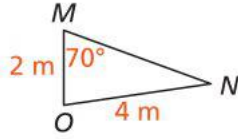
$$m\angle S \approx 83^\circ$$

الخطوة 3 أوجد $m\angle R$.

$$m\angle R \approx 180^\circ - 74^\circ - 83^\circ$$

$$m\angle R \approx 23^\circ$$

يتبع في الصفحة التالية

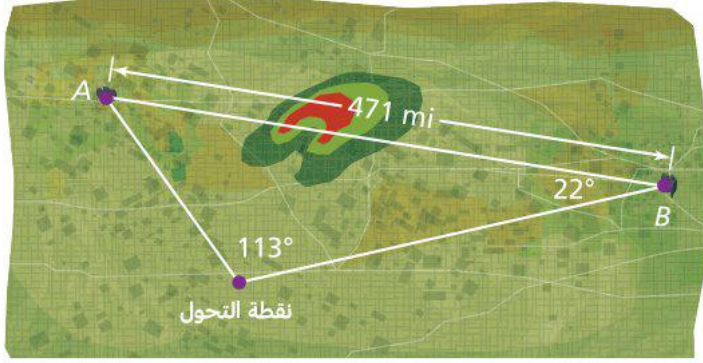


- حاول أن تحل! 3. a. أوجد $m\angle N$
b. أوجد $m\angle O$

تطبيق قانون الجيب

مثال 4

تطبيق



يبين المخطط المجاور المسار الذي سلكه طيار بين المدينة A والمدينة B كي يتفادى عاصفة رعدية. بكم تزيد المسافة التي قطعها عن المسافة المباشرة من المدينة A إلى المدينة B ؟

الخطوة 1 افترض أن x يمثل المسافة بين نقطة التحول والمدينة A. أوجد قيمة x .

استعمل قانون الجيب.

$$\frac{\sin 113^\circ}{471} = \frac{\sin 22^\circ}{x}$$

$$x = \frac{471 \sin 22^\circ}{\sin 113^\circ}$$

$$x \approx 191.7$$

الخطوة 2 افترض أن y يمثل المسافة بين المدينة B ونقطة التحول. أوجد قيمة y .

حدد أولاً قياس الزاوية المقابلة للمسافة y .

$$m\angle A = 180^\circ - 113^\circ - 22^\circ = 45^\circ$$

ثم استعمل قانون الجيب.

$$\frac{\sin 113^\circ}{471} = \frac{\sin 45^\circ}{y}$$

$$y = \frac{471 \sin 45^\circ}{\sin 113^\circ}$$

$$y \approx 361.8$$

الخطوة 3 أوجد إجمالي المسافة التي قطعها الطيار.

$$191.7 \text{ mi} + 361.8 \text{ mi} = 553.5 \text{ mi}$$

ثم أوجد الزيادة في المسافة.

$$553.5 \text{ mi} - 471 \text{ mi} = 82.5 \text{ mi}$$

إذن، الطيار قطع مسافة 82.5 mi زيادة عن المسافة المباشرة.

يتبع في الصفحة التالية

فكر وتأبر في الحل

فكر في متطلبات المسألة.

أي المسافات يجب عليك إيجادها ؟

حاول أن تحل! 4. افترض أن الطيار اختار الطيران شمال العاصفة. بكم تزيد مسافة الرحلة شمالاً عن المسافة المباشرة بين المدينة A والمدينة B ؟



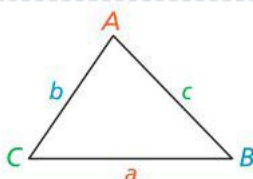
لفظيًا

في أي $\triangle ABC$ ، إذا كانت أطوال الأضلاع a, b, c تقابل الزوايا A, B, C على الترتيب، فإن قانون الجيب يربط بين جيب كل زاوية وطول الضلع المقابل لها.

- إذا كان لديك قياس زاوية وطول الضلع المقابل لها، يمكنك إيجاد:
- طول أحد الضلعين الآخرين بمعلومية قياس الزاوية المقابلة له.
 - قياس إحدى الزاويتين الأخريين بمعلومية الضلع المقابل لها.

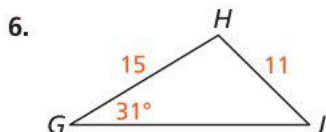
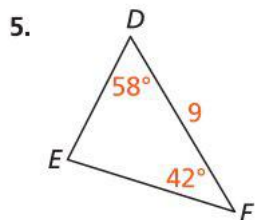
بالرموز

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

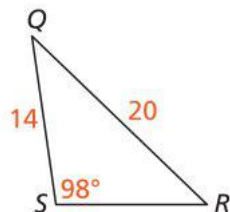


طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، اذكر عناصر كل مثلث يمكن إيجادها باستعمال قانون الجيب.



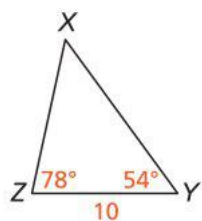
في التمرينين 7 و 8، استعمل $\triangle QRS$.



7. أوجد $m\angle R$ و $m\angle Q$.

8. أوجد محيط $\triangle QRS$.

في التمرينين 9 و 10، استعمل $\triangle XYZ$.

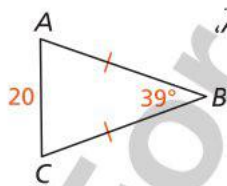


9. أوجد XY .

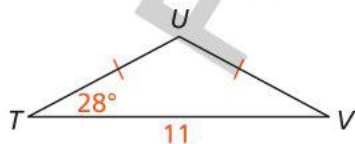
10. أوجد XZ .

11. في المثلث المجاور $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

أوجد AB و CB .



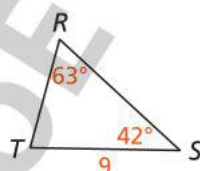
12. أوجد محيط $\triangle UTV$.



عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال قانون الجيب لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلثات حادة الزوايا والمثلثات منفرجة الزاوية؟

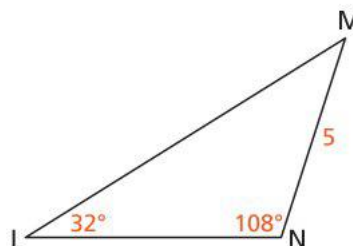
2. حلّل الخطأ طُلب إلى إيمان إيجاد طول ضلع غير معلوم في $\triangle RST$. بين خطأ إيمان وصحّحه؟



$$\begin{aligned} \frac{\sin R}{RT} &= \frac{\sin S}{ST} \\ \frac{\sin 63^\circ}{RT} &= \frac{\sin 42^\circ}{9} \\ RT &= \frac{9 \sin 63^\circ}{\sin 42^\circ} \approx 12 \end{aligned}$$

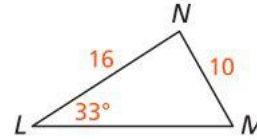
X

3. المصطلحات ما هي أزواج الزوايا و أطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث LMN ؟ كيف يساعدك قانون الجيب على إيجاد هذه الأزواج؟



4. برّر منطقيًا هل بإمكانك إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في المثلث باستعمال قانون الجيب إذا كنت تعرف أطوال الأضلاع الثلاثة؟ وضح إجابتك.

13. حلّ الخطأ طلب من أحمد إيجاد $m\angle M$. بين خطأ أحمد وصحّحه.



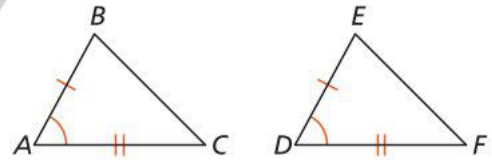
$$\frac{\sin M}{16} = \frac{\sin L}{10}$$

$$\sin M = \frac{16 \cdot \sin 33^\circ}{10}$$

$$m\angle M = 0.8714$$

X

14. ابن الحجج الرياضية في المثلثين أدناه، على فرض أنك تعرف طولَي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما فقط، وتريد إثبات تطابق هذين المثلثين باستعمال نظرية التطابق بضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS). هل يمكنك إيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثين باستعمال قانون الجيب؟ وضح إجابتك.

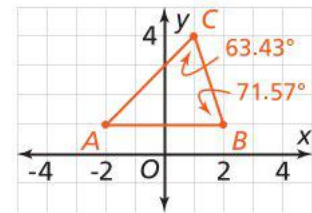


15. تواصل بدقة إذا كنت تعلم قياس زاويتين وطول الضلع المقابل للزاوية الثالثة في مثلث، كيف يمكن استعمال قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية الثالثة وطولَي الضلعين الآخرين في هذا المثلث؟ وضح إجابتك.

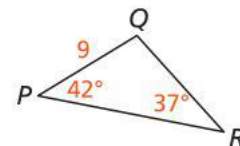
16. روابط في الرياضيات في الشكل أدناه، أوجد AC باستعمال كل

من صيغة المسافة بين نقطتين وقانون الجيب.

قارن بعد ذلك بين النتيجتين؟ وضح إجابتك.

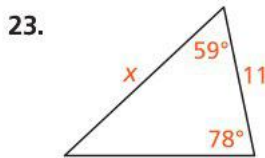
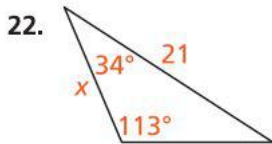
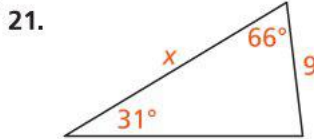
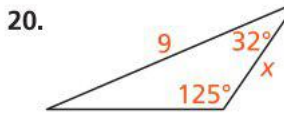
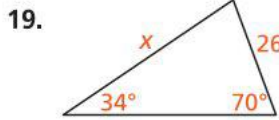


17. برّر منطقياً وضح كيف يمكن استعمال قانون الجيب لإيجاد محيط $\triangle PQR$. ثم اكتب مقداراً يمثل محيط هذا المثلث.



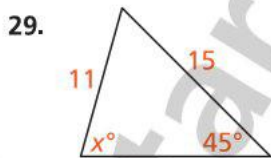
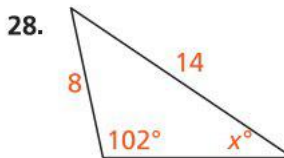
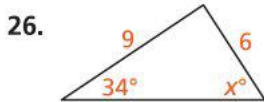
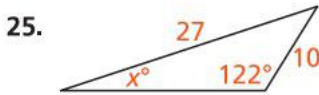
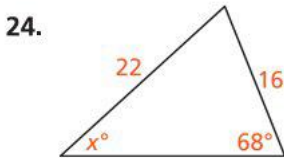
في التمارين 18-23، أوجد قيمة x.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثالين 1 و 2



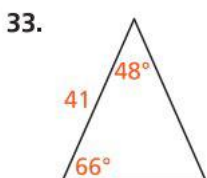
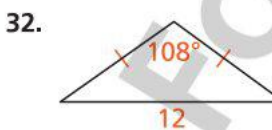
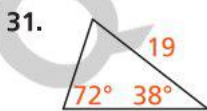
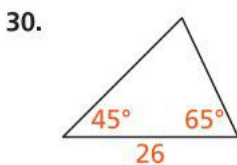
في التمارين 24-29، أوجد قياس الزاوية x°. قرب إجابتك إلى أقرب

جزء من عشرة. انظر المثال 3



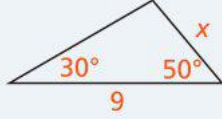
في التمارين 30-33، أوجد محيط المثلث.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثال 4



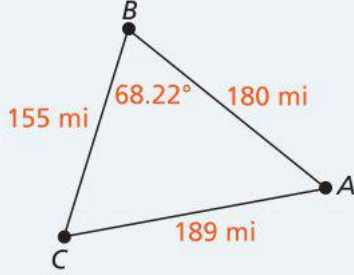
37. أوجد قيمة x في المثلث أدناه.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



38. اختبار SAT/ACT إذا كانت A, B, C ثلاث مدن.

ما قياس الزاوية المحصورة بين الطريقين عند المدينة A ؟



(A) 55.10°

(B) 49.60°

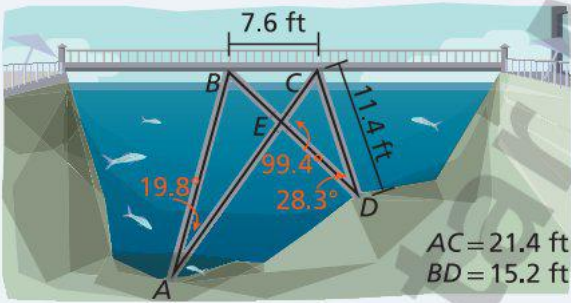
(C) 72.28°

(D) 40.40°

39. مهمة أدائية أوكلت إلى أحد المهندسين مهمة تصميم جسر عبور،

ولكن ليس لديه سوى بعض المعطيات المطلوبة لتنفيذ التصميم.

ساعده على إيجاد بقية المعطيات.



الجزء A أوجد طول $\overline{AB}$ مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

وَصِّحْ إجابتك.

الجزء B وجد المهندس أنه بحاجة إلى بناء عارضة دعم بين

النقطة A وطرف جسر العبور من جهة اليسار، وعارضة دعم بين

النقطة D وطرف جسر العبور من جهة اليمين.

هل يوجد ما يكفي من المعطيات لإيجاد طولي العارضتين ؟

إذا كانت الإجابة نعم، أوجد هذين الطولين.

أما إذا كانت لا، فوَصِّحْ نوع المعطيات التي يحتاج إليها المهندس.

34. فكر وثابر في الحل لإيجاد ارتفاع شجرة، استعمل موظف في

محمية طبيعية جهاز قياس للزوايا. من مسافة معينة بعيداً عن

الشجرة، وجد أن قياس الزاوية التي يشكلها المستقيم الأفقي مع

رأس الشجرة 47° ، ثم تراجع 8 ft إلى الخلف وقياس نفس الزاوية

من جديد فوجدها 36° .

أوجد ارتفاع الشجرة مقرباً إجابتك إلى أقرب قدم.



35. روابط في الرياضيات عند النقطة A، عاين قائد طائرة شراعية

مدرج الهبوط فوجد أن قياس زاوية اتجاه الطائرة مع مدرج الهبوط

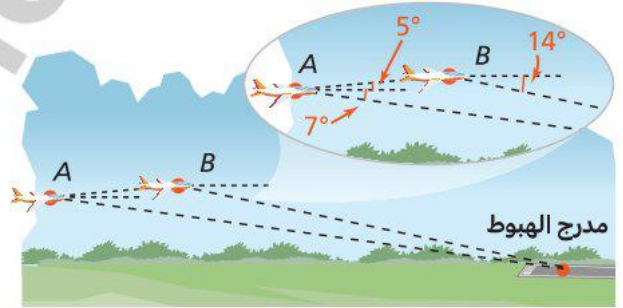
هو 7° ، ولكن بسبب هبوب عاصفة أجبر الطيار على الارتفاع بزاوية

قياسها 5° ثم اجتاز مسافة 1 100 ft فوصل إلى النقطة B،

حيث عاين قياس زاوية اتجاه الطائرة مع مدرج الهبوط

فوجدها 14° ، أوجد المسافة بين النقطة B ومدرج الهبوط

مقرباً إجابتك إلى أقرب قدم.



36. مهارات التفكير العليا أبحر أحد المراكب نحو الشرق. عند النقطة

X وجد القبطان أن قياس الزاوية شرق شمال 41° مع الرصيف

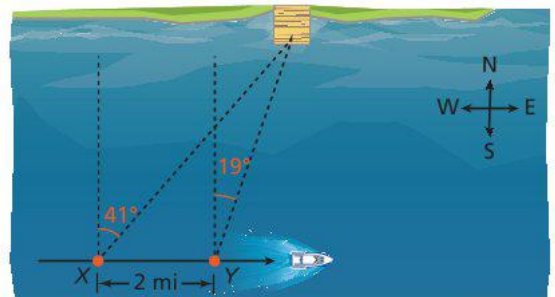
البحري، وبعد أن ابتعد في مساره مسافة 2 mi عن النقطة X

وصل إلى النقطة Y. ثم قاس الزاوية شرق شمال فوجدها 19° مع

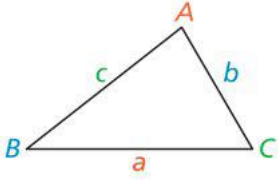
الرصيف البحري. توجد منطقة محظور الدخول إليها، دائرية الشكل

وطول نصف قطرها 2.5 mi ومركزها في نهاية الرصيف البحري.

هل سيدخل المركب المنطقة المحظورة ؟ وَصِّحْ إجابتك.



المفهوم قانون جيب التمام



في أي $\triangle ABC$ ، يربط **قانون جيب التمام** بين جيب تمام الزوايا وأطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

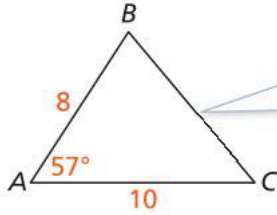
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال 2

استعمل قانون جيب التمام لإيجاد طول ضلع في مثلث

في الشكل المجاور، أوجد طول $\overline{BC}$ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



طول الضلع المقابل للزاوية A مجهول، لكنك تعرف طولي ضلعين وقياس الزاوية A المحصورة بينهما.

استعمل قانون جيب التمام لكتابة معادلة وحلها لإيجاد BC .

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC) \cos A$$

$$(BC)^2 \approx 8^2 + 10^2 - 2(8)(10)(0.5446)$$

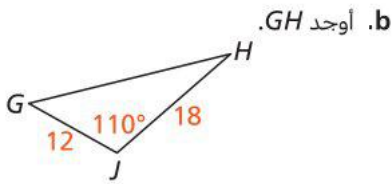
$$(BC)^2 \approx 76.864$$

$$BC \approx 8.8$$

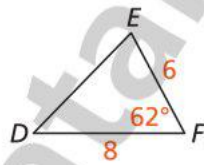
إذن طول $\overline{BC}$ يساوي 8.8 تقريبًا.

استعمل البنية

ما المعلومات التي يوفرها قانون جيب التمام ولا يوفرها قانون الجيب؟



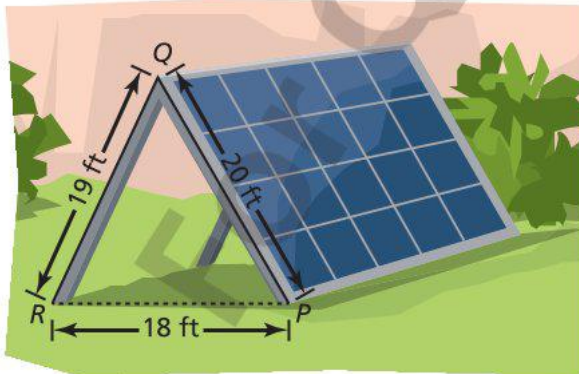
b. أوجد $\overline{GH}$.



2. a. أوجد $\overline{DE}$.

استعمل قانون جيب التمام لإيجاد قياس زاوية في مثلث

مثال 3



يتراوح الانحدار المثالي للوح خالد شمسي بين 58° و 60° . هل وضع خالد لوحه الشمسي بزاوية مثالية؟

اكتب معادلة باستعمال قانون جيب التمام. ثم استعمل معكوس جيب التمام لإيجاد $m\angle P$.

يتبع في الصفحة التالية

عند تطبيق قانون جيب التمام، تأكد من وضع قياس الزاوية المحصورة وطول الضلع المقابل للزاوية المحصورة بشكل صحيح في طرفي المعادلة.

$$(QR)^2 = (PR)^2 + (PQ)^2 - 2(PR)(PQ)\cos P$$

$$19^2 = 18^2 + 20^2 - 2(18)(20)\cos P$$

$$\cos P = \frac{-363}{-720}$$

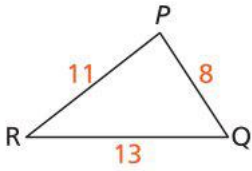
$$\cos P \approx 0.5042$$

$$m\angle P \approx \cos^{-1}(0.5042)$$

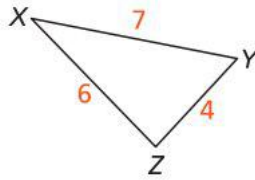
$$m\angle P \approx 59.72^\circ$$

إذن، وضع خالد لوحه الشمسي بزاوية مثالية وتساوي 59.72° تقريبًا.

b. أوجد $m\angle P$.



3. a. أوجد $m\angle X$.

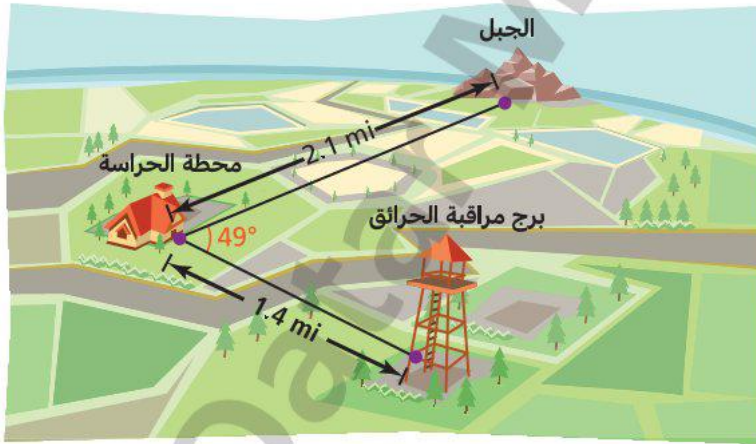


استعمال قانون جيب التمام في حل المسائل

مثال 4

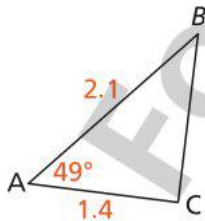
تطبيق

يرغب حارس المنطقة في بناء محطة حراسة جديدة مكان برج مراقبة الحرائق، لأنها قد تكون أقرب إلى الجبل من المحطة القديمة. هل حارس المنطقة على صواب؟ وضح إجابتك.



تشكل كل من محطة الحراسة والجبل وبرج مراقبة الحرائق رؤوس مثلث. ليكن الرأس A يمثل محطة الحراسة، والرأس B الجبل، والرأس C برج مراقبة الحرائق. ارسم المثلث ABC.

ضع



يوضح المثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما. المسافة بين برج مراقبة الحرائق والجبل مجهولة.

يتبع في الصفحة التالية

استعمل قانون جيب التمام لكتابة معادلة لإيجاد المجهول.

► احسب

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(AC)(AB)\cos A$$

$$(BC)^2 = 1.4^2 + 2.1^2 - 2(1.4)(2.1)(\cos 49^\circ)$$

$$(BC)^2 \approx 2.512$$

$$BC \approx 1.6$$

عوض القيم المعروفة
وحل لإيجاد BC .

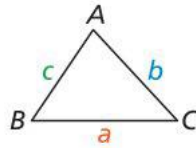
► فسر
تبلغ المسافة بين برج مراقبة الحرائق والجبل 1.6 mi تقريباً. إذن، حارس المنطقة على صواب في قوله إن المحطة الجديدة الموجودة مكان البرج ستكون أقرب إلى الجبل.

حاول أن تحل! 4. في المثال 4، ما الزاوية التي يشكلها المسار الجديد مع المسار القديم عند الجبل؟

لفظيًا

في أي ΔABC ، يربط قانون جيب التمام بين جيب تمام كل زاوية وأطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث. إذا كنت تعلم طولي ضلعين في مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما، يمكنك إيجاد طول الضلع الثالث.

بالرموز



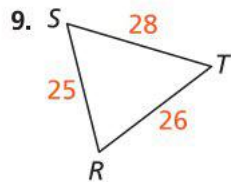
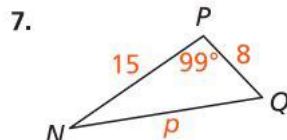
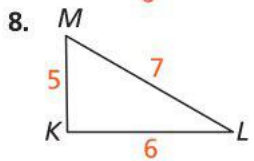
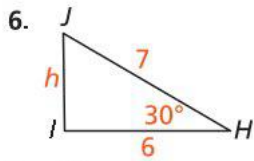
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

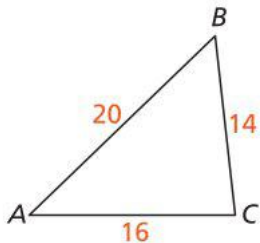
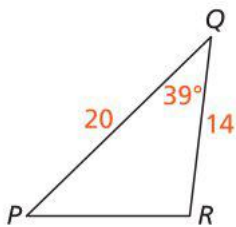
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

طبق فهمك

في التمارين 6-9، حدّد الأجزاء التي يمكنك إيجاد قياساتها في المثلث باستعمال قانون جيب التمام.

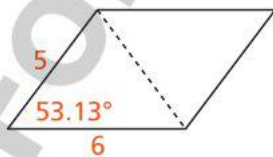


10. أوجد PR مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.



أوجد $m\angle B$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

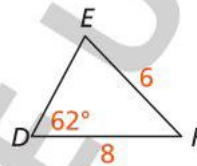
12. استعمل قانون جيب التمام لإيجاد قطر متوازي الأضلاع.



عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال قانون جيب التمام لتحديد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في المثلثات الحادة الزوايا والمثلثات المنفرجة الزاوية؟

2. حلّ الخطأ طلب المعلم من سعيد إيجاد DE . بيّن خطأ سعيد وصحّحه.



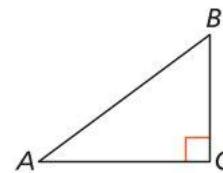
$$\begin{aligned} (DE)^2 &= (DF)^2 + (EF)^2 - 2(DF)(EF)\cos F \\ (DE)^2 &= 8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 62^\circ \\ (DE)^2 &= 54.930\dots \\ DE &= 7.411\dots \end{aligned}$$

X

3. المصطلحات كيف تصف قانون جيب التمام لفظيًا؟

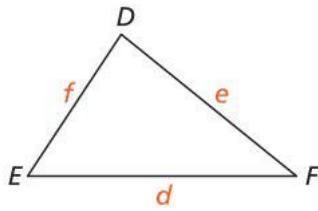
4. ابن الحجج الرياضية هل يمكنك إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة لأي مثلث تعرف قياسات أي ثلاثة أجزاء فيه باستعمال قانون الجيب وقانون الجيب التمام؟ وضح إجابتك.

5. بزر منطقياً استعمل قانون جيب التمام ونظرية فيثاغورس مع ΔABC لإثبات أن $\cos 90^\circ = 0$.



في التمرينين 18 و 19، استعمل $\triangle DEF$.

اكتب معادلة لإيجاد الطول المطلوب. انظر المثال 1

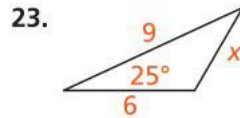
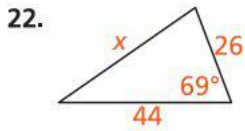
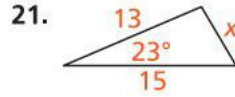
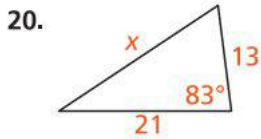


19. الطول f

18. الطول e

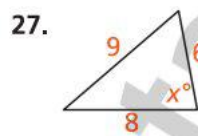
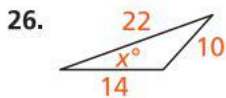
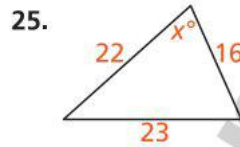
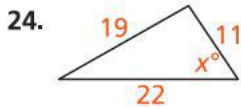
في التمارين 20-23، أوجد قيمة x .

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثال 2



في التمارين 24-27، أوجد قيمة x .

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثال 3

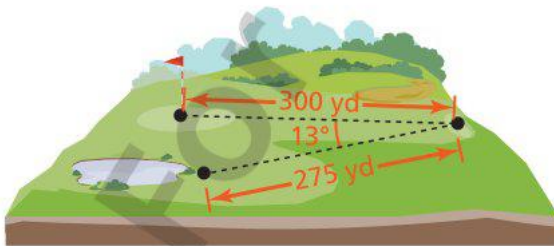


28. صوّبت لاعبة جولف الكرة من نقطة الانطلاق إلى حفرة تبعد

300 yd، قطعت الكرة مسافة 275 yd لكنها انحرفت عن

مسارها إلى الحفرة بمقدار 13° ، ما المسافة التي يجب على لاعبة

الجولف إعادة تصويب الكرة خلالها لتصل إلى الحفرة؟ انظر المثال 4



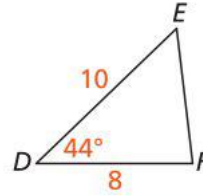
13. **ابن الحجج الرياضية** كيف يمكن استعمال قانون جيب التمام

لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة إذا كانت أطوال أضلاع المثلث

معلومة؟ وضح إجابتك.

14. **حلل الخطأ** طلب المعلم من جاسم إيجاد

طول $\overline{EF}$. بين خطأ جاسم وضح.



$$(EF)^2 = (DF)^2 + (DE)^2 - 2(DF)(DE) \cos D$$

$$(EF)^2 = 8^2 + 10^2 - 2(8)(10) \cos 44^\circ$$

$$(EF)^2 \approx 64 + 100 - (160)(0.7193)$$

$$EF \approx 48.91$$

X

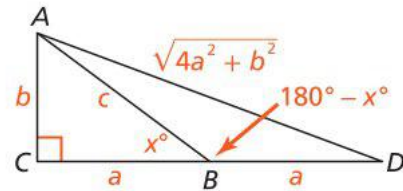
15. **مهارات التفكير العليا** استعمل المخطط أدناه لإثبات أن لكل زاوية

حادة x° ، يكون $\cos(180 - x)^\circ = -\frac{a}{c}$.

تلميح: طبق قانون جيب التمام على $\triangle ABD$ ،

واكتب معادلة تتضمن $\cos(180 - x)^\circ$.

ثم استعمل العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$ في $\triangle ABC$.

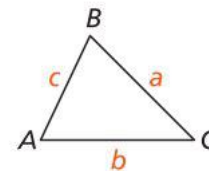


16. **عمم** افترض أنك تعرف طولي ضلعين من أضلاع مثلث وقياس

إحدى زواياه. كيف تحدد ما إذا كان عليك استعمال قانون الجيب أم

قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث؟ وضح إجابتك.

17. **ابحث عن العلاقات** لـ $\triangle ABC$.



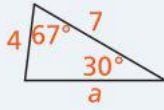
a. كيف تجد $m\angle A$ إذا كنت تعرف a و b و c ؟

ضمّن إجابتك معادلة لتوضيحها.

b. كيف تجد a إذا كنت تعرف $m\angle A$ و b و c ؟

ضمّن إجابتك معادلة لتوضيحها.

32. أي من المعادلات التالية صحيحة بالنسبة للمثلث الموضح أدناه ؟
اختر كل ما ينطبق.



- (A) $a^2 = 16 + 49 - 28 \cos 30^\circ$
(B) $16 = a^2 + 49 - (14a) \cos 30^\circ$
(C) $49 = a^2 + 16 - (4a) \cos 67^\circ$
(D) $a^2 = 49 + 16 - 56 \cos 67^\circ$

33. اختبار SAT/ACT مثلث طولاً ضلعين من أضلاعه 12 cm و 15 cm ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 46° ، ما طول الضلع الثالث ؟ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

- (A) 24.9 cm (B) 10.5 cm
(C) 13.0 cm (D) 10.9 cm

34. مهمة أدائية غادرت طائرة مستلزمات طبية بدون طيار من الميناء A ، 40° إلى الشمال الشرقي. بعد الطيران لمسافة 32 mi في هذا المسار إلى النقطة C ، انعطفت الطائرة 50° نحو اليمين لتطير باتجاه الشرق. ثم طارت 8 mi أخرى ، حيث أفرغت حمولتها في ميناء الجزيرة.



الجزء A يمكن أن تطير الطائرة مسافة إجمالية تبلغ 75 mi قبل أن تحتاج إلى إعادة شحنها. هل يمكنها الطيران مباشرة إلى الميناء A من ميناء الجزيرة ؟ وضح إجابتك.

الجزء B يبعد الميناء B مسافة 24 mi شمال الميناء A. ما المسافة بين ميناء الجزيرة والميناء B ؟ هل تستطيع الطائرة الطيران إلى الميناء B ؟

الجزء C يبدو أن الميناء B يقع غرب ميناء الجزيرة مباشرة. هل هذا صحيح ؟ إذا كان الأمر كذلك ، وضح إجابتك. إذا لم يكن الأمر كذلك ، ما اتجاهه بالنسبة إلى ميناء الجزيرة ؟

29. نموذج يمارس كل من حمد وراشد وناصر لعبة ، تلعب في مضمار بقرص طائر. القرص مع ناصر ويقف حمد في منطقة النهاية ، لكن ناصر لا يمكنه أن يرمي بدقة إلا لمسافة 7.5 m أو أقل. رمى ناصر القرص إلى راشد ، لأن راشد يمكنه أن يرمي القرص بدقة لمسافة 9.5 m ، هل يقف حمد داخل النطاق الذي سيرمي راشد القرص فيه ؟ وضح إجابتك.

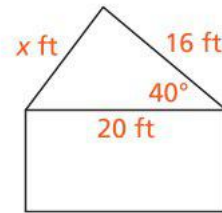


30. روابط في الرياضيات غادر منقذان في نفس الوقت للعثور على متسلق مصاب.

سار الأول 25° باتجاه الشمال الغربي بسرعة 3.5 mph ، وسار الآخر 36° باتجاه الشمال الشرقي بسرعة 2.5 mph بعد ساعتين ، وجد المنقذ الثاني المتسلق وطلب المساعدة من المنقذ الأول عبر الراديو. إذا أسرع المنقذ الأول مباشرة باتجاه المنقذ الثاني بسرعة 6 mph ، فما الزمن الذي سيستغرقه للوصول إليه ؟



31. فكر وثابر في الحل اقترح مهندس معماري الخطة الموضحة أدناه لبناء سقف جديد بانحدار مقداره 40° على أحد الجوانب. يرى مالك المنزل أن انحدار سقف المنزل بمقدار 40° ليس كافياً ويريد أن يكون الانحدار 50° ، إذا لم يتغير طول الضلع المجاور ، فما مقدار الزيادة في طول الضلع المقابل ، x ft ؟ ما زاوية الانحدار الجديدة للضلع المقابل ؟



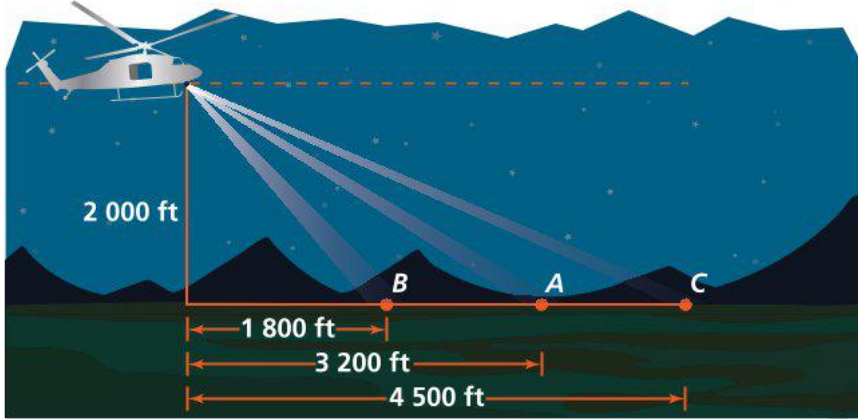
4-6

تطبيقات على النسب المثلثية

Applications with Trigonometric Ratios

نمذج وناقش

يجري فريق بحث وإنقاذ تدريباً مسائلاً. كان اثنان من أعضاء الفريق في مروحية تحلق على ارتفاع 2 000 ft فوق مستوى سطح الأرض.



أستطيع... استعمال النسب المثلثية في حل المسائل.

معايير الدرس

10.7.10 و 10.7.8

المصطلحات

• زاوية الانخفاض

angle of depression

• زاوية الارتفاع

angle of elevation

- A. حاول الفريق أولاً تحديد موقع الجسم A. بأي زاوية من الخط الأفقي لاتجاه سير المروحية يجب عليهم توجيه المصباح بحيث يسقط على الجسم A ؟
- B. إذا شلت المصباح على الجسم B، كيف تتغير زاوية المصباح من الخط الأفقي ؟
- C. **استعمل البنية** عموماً، كيف تتغير زاوية المصباح من الخط الأفقي عندما يتحرك الضوء من الجسم A إلى الجسم B ؟ ومن الجسم A إلى الجسم C ؟

كيف يمكن استعمال النسب المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة ؟

السؤال الأساس

مثال 1

تحديد زوايا الارتفاع والانخفاض

في الشكل أدناه، هل $\angle 2$ زاوية ارتفاع أم زاوية انخفاض ؟ كّرر الأمر مع $\angle 3$. بّرر إجابتك.

زاوية الانخفاض هي الزاوية المحصورة بين مستقيم أفقي على مستوى عين الناظر والمستقيم الذي يصل بين عينه وجسم يقع أسفل المستقيم الأفقي.

برج المراقبة

المطعم

زاوية الارتفاع هي الزاوية المحصورة بين مستقيم أفقي على مستوى عين الناظر والمستقيم الذي يصل بين عينه وجسم يقع أعلى المستقيم الأفقي.

نصيحة دراسية

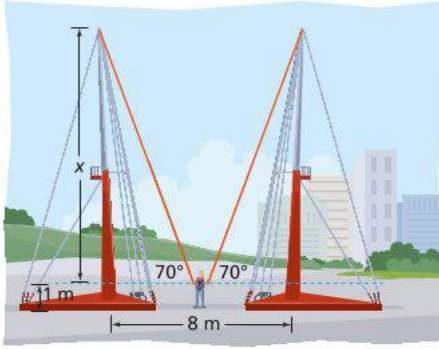
عند حل مسائل تتضمن زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض، استعمل مخططاً وابحث عن المثلثات القائمة الزاوية.

لرؤية الشخص الموجود في الأعلى، ينظر الشخص الواقف في برج المراقبة إلى الأعلى من الخط الأفقي، إذن $\angle 2$ زاوية ارتفاع.

لرؤية الشخص الموجود في الأسفل، ينظر الشخص الواقف في برج المراقبة إلى الأسفل من الخط الأفقي، إذن $\angle 3$ زاوية انخفاض.

حاول أن تحل: 1. في مثال 1، قارن بين زاوية الانخفاض $\angle 1$ ، وزاوية الارتفاع $\angle 2$. وضح إجابتك.

في جولة قفز بالحبال المطاطية، وقف أحمد في منتصف المسافة بين دعامتين رأسيّتين. يمتد حبلان مطاطيان من أعلى الدعامتين إلى وسط جسم أحمد على ارتفاع 1 m فوق سطح الأرض. أوجد ارتفاع كل من الدعامتين الرأسيّتين عن سطح الأرض.



$$\tan 70^\circ = \frac{x}{4}$$

$$x = 4 \tan 70^\circ$$

$$x \approx 10.9899$$

$$11 + 1 = 12$$

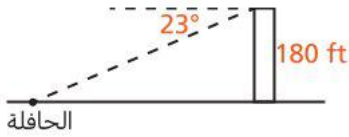
بما أن الطول المجهول والطول الذي يبلغ 4 m هما للضلعين المقابل والمجاور للزاوية التي قياسها 70° ، إذن استعمل نسبة الظل.

أوجد ارتفاع الدعامتين الرأسيّتين.

إذن، طول الدعامتين الرأسيّتين 12 m تقريباً.

خطأ شائع

أحرص على عدم نسيان المسافة بين وسط جسم أحمد والأرض.



2. برى جابر حافلة الرحلات من أعلى البرج.

كم تبعد الحافلة عن قاعدة البرج ؟

قرب إجابتك إلى أقرب قدم.

يمسك المدرب حبل الأمان عند النقطة C لطالب ليهبط من نقطة التثبيت T.

طول الحبل بينهما حالياً 61 ft، ما طول الحبل الإضافي الذي يجب أن يحرره المدرب ليتمكن الطالب من الانتقال من نقطة التثبيت T إلى نقطة التثبيت R ؟

في $\triangle TRC$ ، المعلوم هو طول ضلع وقياس زاويتين. لذا استعمل قانون الجيب لإيجاد TR.

الخطوة 1 اكتب قانون الجيب بدلالة الشكل.

$$\frac{\sin x^\circ}{CT} = \frac{\sin y^\circ}{TR}$$

الخطوة 2 أوجد y و x.

$$y = 79 - 75 = 4$$

$$m\angle CRH = 90 - 75 = 15$$

$$x = 180 - 15 = 165$$

تواصل بدقة

فكر كيف يمكنك التحقق من منطقية إجابتك. ما النظريات أو التعاريف التي يمكنك استعمالها ؟

الخطوة 3 استعمال التناسب لإيجاد TR .

$$\frac{\sin 165^\circ}{61} = \frac{\sin 4^\circ}{TR}$$

$$TR = \frac{61(\sin 4^\circ)}{\sin 165^\circ} = 16$$

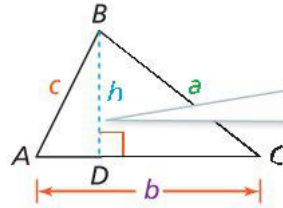
إذن، يجب أن يحرر المدرب 16 ft من الحبل.

3. في مثال 3، بعد وصول الطالب إلى نقطة التثبيت R ، أوجد المسافة الفاصلة بينه وبين المدرب.

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 4

استعمال النسب المثلثية لإيجاد مساحة مثلث

A. كيف يمكنك استعمال النسب المثلثية لإيجاد مساحة $\triangle ABC$ ؟ارسم الارتفاع $\overline{BD}$
بطول h .لكتابة صيغة تتضمن طولي الضلعين b و c والزاوية المحصورة A ، طبق صيغة مساحة المثلث.

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}b(c \sin A)$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin A$$

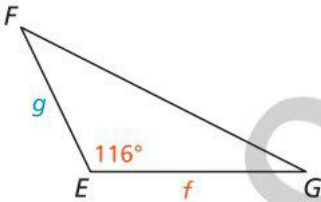
في $\triangle ADB$ ، $\sin A = \frac{h}{c}$ ،
إذن، $h = c \sin A$.يمكنك تطبيق نفس التبرير المنطقي على الزاويتين B و C لكتابة صيغتي المساحة التاليتين:

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}ac \sin B$$

B. أوجد مساحة $\triangle FEG$.

في المثلث $\triangle FEG$ ، طول الضلعين f و g هما 3 cm و 4 cm، على التوالي، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 116°



$$\text{Area } \triangle FEG = \frac{1}{2}gf \sin E$$

$$= \frac{1}{2}(3)(4) \sin 116^\circ$$

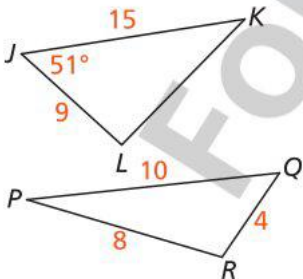
$$= 6 \sin 116^\circ$$

$$\approx 5.4$$

إذن، مساحة المثلث EFG تساوي 5.4 cm^2 تقريباً.

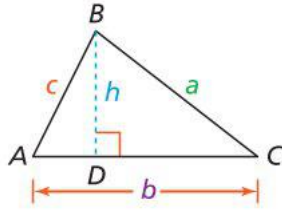
نصيحة دراسية

لكي تستعمل الصيغة
 $\text{Area } \triangle FEG = \frac{1}{2}bc \sin A$
يجب أن تعرف طول ضلعين وقياس
الزاوية المحصورة بينهما.

4. a. أوجد مساحة $\triangle JKL$.b. أوجد مساحة $\triangle PQR$.

تلميح: طبق أولاً قانون جيب التمام لإيجاد
قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{PR}$ و $\overline{PQ}$
ثم طبق صيغة المساحة التي تتضمن جيب
قياس الزاوية.

صيغ المساحة

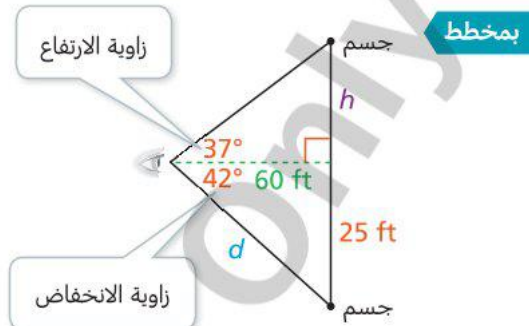


$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$$

زوايا الارتفاع أو الانخفاض



$$\tan 37^\circ = \frac{h}{60}$$

$$\sin 42^\circ = \frac{25}{d}$$

طبق فهمك

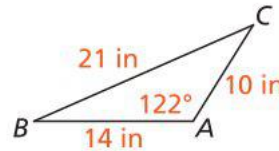
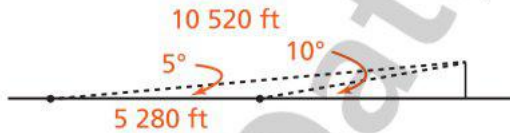
عبر عن فهمك

5. ركب شخص مصعدًا زجاجيًا في بهو أحد الفنادق. أثناء صعود المصعد، كيف تتغير زاوية الانخفاض بالنسبة إلى نقطة ثابتة على أرض البهو ؟

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال النسب المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة ؟

6. يراقب شخص قمة هوائي راديو بزاوية ارتفاع قياسها 5° ، بعد اقترابه مسافة 1 mi من الهوائي، أصبح قياس زاوية الارتفاع 10° ، المسافة من نقطة وقوفه الأولى إلى رأس الهوائي تساوي 10 520 ft، أوجد ارتفاع الهوائي ثم أوجد المسافة من نقطة وقوفه الثانية إلى رأس الهوائي. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.

2. حلّ الخطأ ما الخطأ الذي ارتكبه جاسم في إيجاد مساحة المثلث ؟



$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 210 \times 0.8480$$

إذن المساحة 89 in^2 تقريبًا.

X

7. في $\triangle ABC$ ، $AB = 13$ و $AC = 15$ و $m\angle A = 59^\circ$. أوجد مساحة المثلث. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

3. المصطلحات يقف شخص في شرفة منزل ويقف شخص آخر في الشارع، وينظر كل منهما إلى الآخر. ارسم مخططاً لتمثيل الموقف وحدد زاويتي الارتفاع والانخفاض.

8. في $\triangle DEF$ ، $DE = 13$ و $EF = 14$ و $m\angle E = 67^\circ$. أوجد مساحة المثلث. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

4. فكّر وثابر في الحل كيف يمكنك إيجاد مساحة مثلث أطوال أضلاعه الثلاثة فقط معطاة ؟

9. بنى مزارع حظيرة مؤقتة للمشاة باستعمال قطع من السياج طول كل منها 10 أقدام مرتبة على شكل مثلث. إذا كان أحد أضلاع الحظيرة يحتوي على 4 قطع، وكان ضلع آخر يحتوي على 5 قطع، والزوايا المحصورة بين الضلعين 84° ، فما مساحة الحظيرة ؟

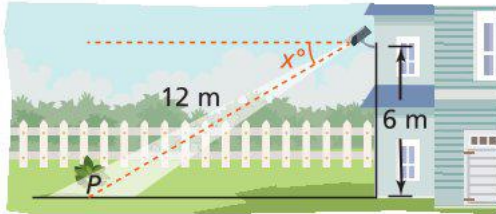
15. ما قياس زاوية الارتفاع لمبنى ارتفاعه 300 m ويبعد

مسافة 1 000 m ؟ انظر المثال 1

16. وضع أحمد كاميرا مراقبة على ارتفاع 6 m عن الأرض، ووجهها

نحو الأرض لمراقبة النقطة P. أوجد زاوية الانخفاض التي يجب

ضبط الكاميرا عندها. انظر المثال 2



17. إذا كان قياس زاوية ارتفاع الشمس 21.5° ، فما طول ظل شخص

طوله 5 ft 6 in ؟ انظر المثال 2

18. يبلغ ارتفاع عيني ليلي عن سطح الأرض 5 ft، وقياس زاوية

ارتفاع خط رؤيتها إلى قمة النصب التذكاري 74° ، كم تبعد

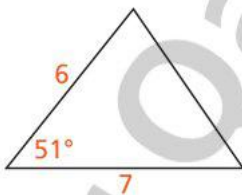
ليلى عن النصب التذكاري ؟ انظر المثال 3



19. في المثلث GHI ، $GJ = 15$ ، $GH = 13$ ، $m\angle G = 74^\circ$.

أوجد مساحة المثلث ؟ انظر المثال 4

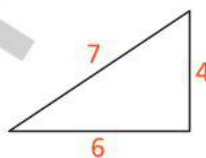
20. أوجد مساحة المثلث أدناه. انظر المثال 4



21. في المثلث KLM ، $KL = 22$ ، $KM = 27$ ، و $LM = 29$.

أوجد مساحة المثلث. انظر المثال 4

22. أوجد مساحة المثلث أدناه. انظر المثال 4



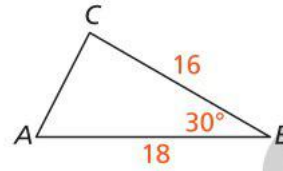
10. ابن الحجج الرياضية كيف يمكن تحديد مساحة المثلث عند

معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما ؟

11. حل الخطأ طلبت المعلمة من

لينا إيجاد مساحة $\triangle ABC$.

بين خطأ لينا وضح.



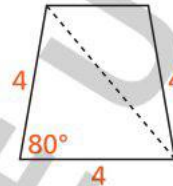
$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 16 \times 18 \times \cos 30^\circ \approx 125$$

X

12. روابط في الرياضيات أوجد طول قطر شبه

المنحرف المتطابق الضلعين.

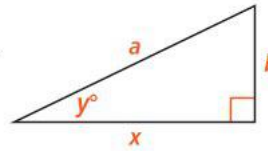
ثم أوجد طول الضلع الرابع.



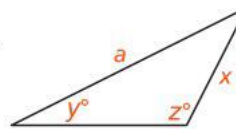
13. استعمل الأدوات المناسبة لكل مثلث

أدناه، اكتب معادلة بدلالة x باستعمال نسبة مثلثية.

a.

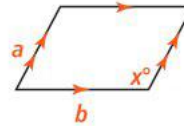


b.

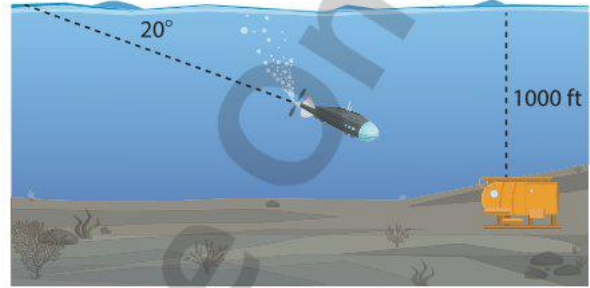


14. مهارات التفكير العليا ما صيغة مساحة متوازي الأضلاع الموضح

في الشكل ؟ وضح خطوات الحل.



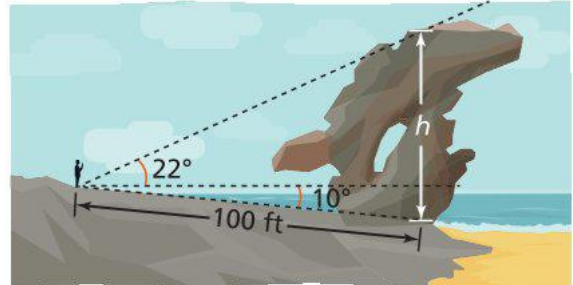
23. **نمذج** تغوص غواصة بحثية بسرعة 100 ft/min مباشرة نحو مختبر الأبحاث. أوجد الزمن اللازم لوصول الغواصة من سطح المحيط إلى المختبر. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



24. **فكر وثابر في الحل** يصوب قاسم نحو مركز الهدف من مسافة 70 m، إذا أطلق سهماً بزاوية انخفاض قياسها 0.055° أسفل المركز، هل يصيب الدائرة الصفراء؟ وضح إجابتك.



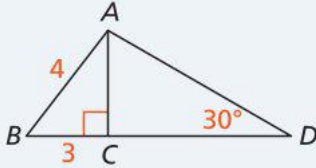
25. **بزر منطقياً** سار فارس مسافة 100 ft صاعداً التلة بزاوية ارتفاع قياسها 10° ويريد معرفة ارتفاع الكتلة الصخرية الموضحة في الرسم أدناه. وهناك استعمال جهاز الكلينومتر لقياس زاوية الارتفاع لقمّة الكتلة الصخرية فوجدها 22° ، أوجد الارتفاع h للكتلة الصخرية.



26. أوجد مساحة المثلث أدناه. قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



27. **اختبار SAT/ACT** أي المعادلات التالية صحيحة؟

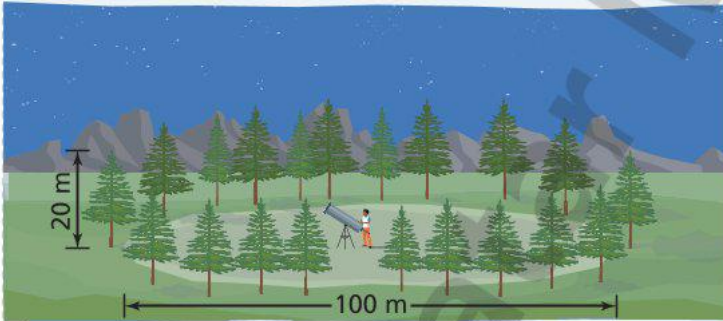


- I. $\tan B = \frac{4}{3}$
- II. $AD = 2\sqrt{7}$
- III. $\text{Area } \triangle ACB = \frac{1}{2} (BD)(AD) \sin 30^\circ$

(A) فقط I (B) فقط II

(C) فقط III (D) II و III فقط

28. **مهمة أدائية** وضع عالم فلك مبتدئ التليسكوب الخاص به وسط حقل دائري تحيط به أشجار طول كل منها 20 m، حيث ارتفاع الحامل الثلاثي للتليسكوب 1 m عن سطح الأرض.



الجزء A ما أصغر زاوية ارتفاع يمكن لعالم الفلك أن يراقب بها نجمة؟

الجزء B إذا أراد عالم الفلك مراقبة نجمة تقع شرقاً وبزاوية ارتفاع قياسها 15° ، ما أصغر مسافة يجب أن ينقل إليها التليسكوب غرباً ليتمكن من مراقبتها؟

الجزء C إذا وضع عالم الفلك التليسكوب في مركز الحقل على منصة ارتفاعها 1.5 m فوق سطح الأرض، أوجد أصغر زاوية تمكنه من مراقبة النجوم بها.

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة ؟

1. ما فائدة نظرية فيثاغورس وحساب المثلثات ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. تُعرّف النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية وطول الوتر باسم

_____.

3. _____ هو علاقة تناسب بين جيب زاوية في مثلث وطول الضلع المقابل لها.

4. في أي مثلث، إذا كان طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلومة فإننا نستعمل

_____ لإيجاد طول الضلع الثالث.

5. تُعرف الزاوية التي تتكون بواسطة المستقيم الأفقي وخط الرؤية إلى جسم ما والتي فوق المستقيم الأفقي باسم _____.

6. _____ هي مجموع ثلاثة أعداد كلية غير صفرية تحقق المعادلة $a^2 + b^2 = c^2$.

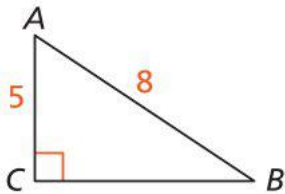
- زاوية الانخفاض
- زاوية الارتفاع
- جيب تمام الزاوية
- قانون الجيب
- قانون جيب التمام
- ثلاثية فيثاغورس
- جيب الزاوية
- ظل الزاوية
- النسبة المثلثية

مراجعة المفاهيم والمهارات

المثلثات القائمة الزوايا ونظرية فيثاغورس والنسب المثلثية

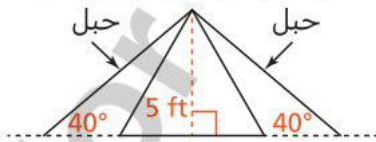
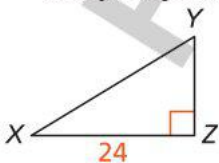
الدرسان 4-1 و 4-2

تدرب وحلّ مسائل

في التمارين 7-9، استعمل $\triangle ACB$ لإيجاد قيمة كل مما يلي.7. BC 8. $\cos B$ 9. $m\angle A$ إلى أقرب جزء من عشرة.

10. لدى خليفة حبل طوله 16 ft لتثبيت الجزء الأمامي من الخيمة.

هل لديه المقدار الكافي من الحبل؟ وضح إجابتك.

11. فكّر وتأبّر في الحل في $\triangle XZY$ ، ما المعلومات الإضافية اللازمة لإيجاد YZ ؟ وضح إجابتك.

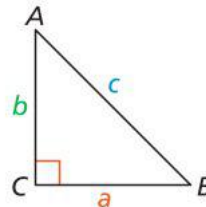
مراجعة سريعة

في $\triangle ACB$ القائم الزاوية في C ، تنص نظرية فيثاغورس على أن $a^2 + b^2 = c^2$ ، النسب المثلثية هي

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$



مثال

في $\triangle DFE$ ، أوجد $\sin D$.

الخطوة 1 استعمل نظرية

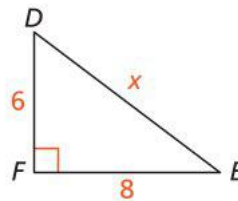
فيثاغورس لإيجاد قيمة x

$$8^2 + 6^2 = x^2$$

$$10 = x$$

الخطوة 2 استعمل النسبة المثلثية لإيجاد $\sin D$.

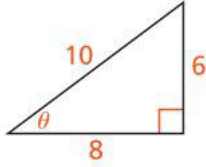
$$\sin D = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$



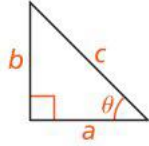
تدرب وحل مسائل

في التمرينين 12 و 13، اكتب النسب المثلثية الأساسية الست للزاوية θ في المثلثين أدناه.

12.



13.



في التمرينين 14 و 15، أوجد النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ في مثلث قائم الزاوية باستعمال النسبة المعطاة.

14. $\sin \theta = \frac{5}{13}$

15. $\cot \theta = \frac{56}{33}$

16. **ابحث عن العلاقات** ما النسبة المثلثية التي يمكن استنتاجها من متطابقة النسبة المثلثية $(\sec(90^\circ - \theta))$ ؟

17. **فكر وتأثر في الحل** سَلَم طوله 15 ft مُسند إلى جدار منزل بزاوية قياسها 65° ، أوجد المسافة بين جدار المنزل وقاعدة السَلَم. قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

مراجعة سريعة

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} & \csc \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المقابل}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} & \sec \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} & \cot \theta &= \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}} \end{aligned}$$

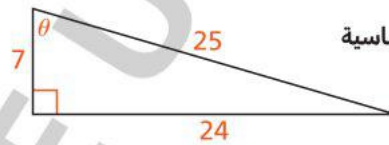
إذا كانت α و β زاويتين متتامتين في مثلث، فإن:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \beta$$

مثال

اكتب النسب المثلثية الأساسية الست للزاوية θ في المثلث المجاور.



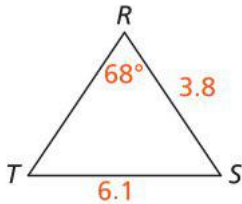
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{24}{25} & \cos \theta &= \frac{7}{25} & \tan \theta &= \frac{24}{7} \\ \csc \theta &= \frac{25}{24} & \sec \theta &= \frac{25}{7} & \cot \theta &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

قانون الجيب

الدرس 4-4

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 18 و 19، استعمل $\triangle RST$ لإيجاد القياس المطلوب. قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



18. $m\angle T$

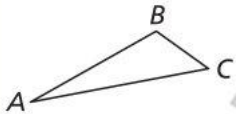
19. RT

20. **بزر منطقياً** كيف يمكن تطبيق

قانون الجيب لإثبات أن المقدار

أدناه يكافئ محيط $\triangle ABC$ ؟

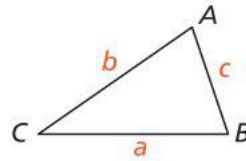
$$\frac{AB \sin A}{\sin C} + \frac{BC \sin B}{\sin A} + \frac{BC \sin C}{\sin A}$$



مراجعة سريعة

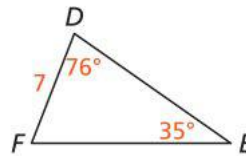
في $\triangle ABC$ ، ينص قانون الجيب على أن:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



مثال

في $\triangle DEF$ ، أوجد EF . قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



استناداً إلى قانون الجيب:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 35^\circ}{7} &= \frac{\sin 76^\circ}{EF} \\ EF &= \frac{7(\sin 76^\circ)}{(\sin 35^\circ)} \\ EF &\approx 11.8 \end{aligned}$$

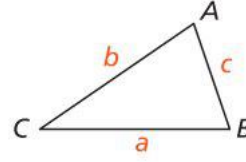
مراجعة سريعة

ينص قانون جيب التمام على أن:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc (\cos A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac (\cos B)$$

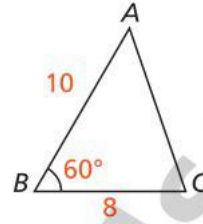
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab (\cos C)$$



مثال

في $\triangle ABC$ ، أوجد AC .

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos B$$

$$(AC)^2 = 100 + 64 - 2(10)(8)\cos 60$$

$$(AC)^2 = 84$$

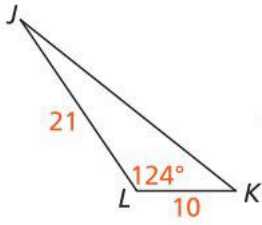
$$AC \approx 9.2$$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 21 و 22،

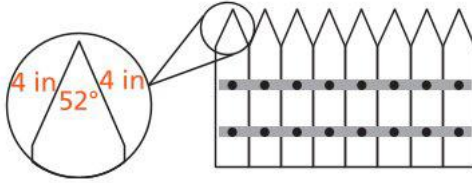
استعمل $\triangle JKL$ لإيجاد القياس المطلوب.

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

21. JK 22. $m\angle J$

23. أوجد عرض البوابة الموضحة في الشكل أدناه. قرب الإجابة إلى

أقرب إنش.



تطبيقات على النسب المثلثية

الدرس 4-6

مراجعة سريعة

يمكن نمذجة العديد من المسائل، مثل المسائل التي تتضمن زوايا الارتفاع أو الانخفاض، باستعمال المثلثات.



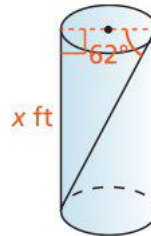
يمكن استعمال النسب المثلثية لحل تلك المسائل.

مثال

قياس زاوية الانخفاض من قمة البئر إلى قاعها يساوي 62° ، إذا كان قطر البئر يبلغ 4.5 ft، فكم يبلغ عمقها؟

$$\tan 62^\circ = \frac{x}{4.5}$$

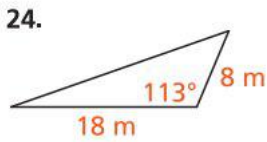
$$x \approx 8.5$$



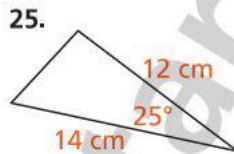
إذن عمق البئر يساوي تقريبا 8.5 ft

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 24 و 25، أوجد مساحة كل مثلث.



24.



25.



26. تواصل بدقة ينظر متجول، تبعد

عيناه عن الأرض 5 1/2 ft إلى راكب زورق

على ضفة النهر الأخرى في الأسفل.

كيف يمكنك إيجاد عرض

النهر التقريبي؟

السؤال الأساس ؟

ما هي الجذور وما العمليات عليها ؟ كيف تُستعمل المعادلات الأسية في حل مسائل من واقع الحياة ؟

نظرة عامة على الوحدة

5-1 nth Roots, Radicals, and Rational Exponents

5-2 Properties of Exponents and Radicals

5-3 Exponential Equations

5-1 الجذور النونية والجذور والأسس النسبية

5-2 العمليات على الأسس والجذور

5-3 المعادلات الأسية

Topic Vocabulary

- nth root
- radical symbol
- index
- radicand
- reduced radical form
- rationalizing the denominator
- like radicals
- rational exponent
- equation with rational exponent

مصطلحات الوحدة

- الجذر النوني
- رمز الجذر
- دليل الجذر
- المجذور
- الصيغة الجذرية المبسطة
- إنطاق المقام
- الجذور المتشابهة
- أس نسبي
- المعادلة الأسية

هل تعلم؟

بتوقع قانون مور حدوث تطورات في العديد من الأجهزة الإلكترونية الرقمية، ويفيد أن هذا النمو أسي.



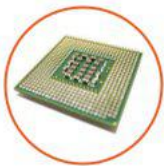
لو طبقنا قانون مور على السفر في الفضاء، لاستغرقت رحلة إلى القمر دقيقة واحدة.

قانون مور، عام 1965 (مع توقع أن يسري للسنوات العشر التالية): سيتضاعف تقريباً عدد الترانزستورات الذي يمكن أن تحويه شريحة إلكترونية واحدة كل 12 شهراً.

قانون مور المعدل عام 1975: (مع توقع أن يسري للسنوات العشر التالية) سيتضاعف تقريباً عدد الترانزستورات الذي يمكن أن تحويه شريحة إلكترونية واحدة كل 24 شهراً.



نتيجة لقانون مور: يقل حجم الترانزستورات التي يمكن أن تحويها شريحة معينة إلى النصف كل 24 شهراً.



المعالج الدقيق



الدائرة الكهربائية المتكاملة



الترانزستور

لو كانت أحجام السيارات والترانزستورات تصغر بالمعدل ذاته، لأصبحت سيارات اليوم بحجم نملة.



مهمتك: توقع المستقبل مستعملاً قانون مور

توقع أنت وزملاؤك ميزات هاتف خلوي سيتم إنتاجه بعد 3 أعوام من الآن، وحدد هل سيبقى قانون مور ساري المفعول في الأعوام العشرين المقبلة.



5-1

الجذور النونية والجذور والأسس النسبية

nth Roots, Radicals, and Rational Exponents

أستطيع... الربط بين الجذور والأسس النسبية واستعمالها لتبسيط المقادير وحل المعادلات.

معيّار الدرس

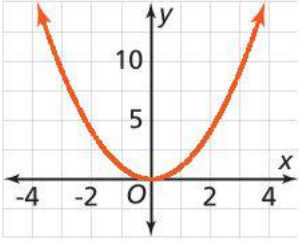
10.1.1

المصطلحات

nth root	الجذر النوني
radical symbol	رمز الجذر
index	دليل الجذر
radicand	المجذور

استكشف وبّر منطقًا

بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$.



A. أوجد جميع القيم الممكنة للمتغير x أو للمتغير y بحيث تقع النقطة على التمثيل البياني.

- (a) (2, ____) (b) (3, ____)
 (c) (-3, ____) (d) (5, ____)
 (e) (____, 4) (f) (____, -16)
 (g) (____, 7) (h) (____, 5)

B. تواصل بدقة اكتب مجموعة إرشادات دقيقة توضح كيفية إيجاد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{13}$ باستعمال التمثيل البياني.

C. مثل المعادلة $y = x^3$ بيانيًا واستعمل التمثيل البياني لإيجاد القيمة التقريبية لكل مما يلي:

- (a) $\sqrt[3]{5}$ (b) $\sqrt[3]{-5}$ (c) $\sqrt[3]{8}$
 (d) حل المعادلة $x^3 = 5$ (e) حل المعادلة $x^3 = -5$ (f) حل المعادلة $x^3 = 8$

كيف تُستعمل الأسس والجذور لتمثيل جذور الأعداد الحقيقية ؟

السؤال الأساس

مثال 1

إيجاد جميع الجذور النونية الحقيقية

A. أوجد جميع الجذور التكعيبة الحقيقية للعدد 125

الجذر النوني للعدد c هو x ، بحيث $x^n = c$. يمكن التعبير عن الجذر النوني باستعمال **رمز الجذر** مع

الدليل n بالمقدار $\sqrt[n]{c}$ ، ويطلق على c اسم **المجذور**.

لتمثيل الجذر التكعيبي الحقيقي للعدد 125، اكتب $x = \sqrt[3]{125}$.

أوجد قيمة x بحيث $x^3 = 125$.

لحل المعادلة $x^3 = 125$ ، لاحظ أن $5^3 = 125$

إذن، الجذر التكعيبي يساوي 5

فكّر في ما إذا كانت هناك جذور أخرى.

لتحديد ذلك، ساو المقدار بالصفر ثم حلّه إلى عوامله.

$$x^3 - 125 = 0$$

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$$

$$\text{إما } x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$\text{وإما } x^2 + 5x + 25 = 0$$

وبما أن مميز المعادلة التربيعية $x^2 + 5x + 25 = 0$ هو $5^2 - 4(1)(25) = -75 < 0$

فليس لها جذور حقيقية. إذن، العدد 5 هو الجذر التكعيبي الحقيقي الوحيد للعدد 125

يتبع في الصفحة التالية

الاستيعاب المفاهيمي

فكّر وتأبّر في الحل

تذكّر أن معادلات الدرجة الثالثة لها ثلاثة حلول. في هذه الحالة، أحد الحلول عدد حقيقي والحلان الآخران عددان غير حقيقيان.

B. أوجد جميع الجذور الحقيقية من الدرجة الرابعة للعدد 16

الدليل يساوي 4 والمجذور يساوي 16 ، لذا اكتب $x = \sqrt[4]{16}$

أوجد قيمة x بحيث $x^4 = 16$

ساو المقدار بالصفر ثم حلّه إلى عوامله.

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2$$

رمز الجذر يمثل الجذر
الموجب (الحقيقي)

المعادلة $x^2 + 4 = 0$ ليس لها جذور حقيقية.

إذن، الجذور الحقيقية للمعادلة $x^4 = 16$ هي 2 و -2

حاول أن تحل! 1. أوجد الجذور المحددة لكل عدد معطى أدناه.

a. الجذور الحقيقية من الدرجة الرابعة للعدد 81

b. الجذور التكعيبية الحقيقية للعدد 64

فهم الأسس النسبية

مثال 2

A. ما معنى الأس في المقدار $16^{\frac{1}{4}}$ ؟

لتفسير أس نسبي، انظر إلى ما يحدث عند تطبيق خواص الأسس الصحيحة على الأسس النسبية.

افترض أن خاصية قوة القوة تنطبق على الأسس التي في الصورة $\frac{1}{n}$.

$$(16^{\frac{1}{4}})^4 = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2 = \sqrt[4]{16}$$

$16^{\frac{1}{4}}$ هو عدد ترفعه إلى القوة 4 للحصول على 16

هذا يعني أن بإمكانك كتابة $16^{\frac{1}{4}}$ في صورة $\sqrt[4]{16}$ أو 2

بصورة عامة، بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n ، يمكن كتابة $x^{\frac{1}{n}}$ في صورة $\sqrt[n]{x}$.

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

يشير كل من الأس $\frac{1}{n}$ ورمز الجذر إلى
الجذر النوني الرئيس $\sqrt[n]{x}$.

B. ما معنى الأس في المقدار $27^{\frac{2}{3}}$ ؟

أعد كتابة المقدار باستعمال خاصية قوة القوة

استعمل تعريف الأس $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$$\begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} &= (27^{\frac{1}{3}})^2 \\ &= (\sqrt[3]{27})^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

هذا يعني أن بإمكانك كتابة $27^{\frac{2}{3}}$ في صورة $(\sqrt[3]{27})^2$ أو 9

حاول أن تحل! 2. وضح معنى كل أس كسري أدناه، ثم أوجد قيمته.

a. $25^{\frac{1}{2}}$

b. $32^{\frac{2}{5}}$

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

من المهم معرفة التمثيلات المتعددة
لنفس القيمة لتتمكن من تحديد
الصورة الأنسب للموقف المعطى.

المفهوم تفسير الأسس الكسرية

دليل الجذر يكافئ مقام الأس الكسري.
بشكل عام، إذا كان الجذر النوني للعدد c عددًا حقيقيًا، فإن $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$.
كذلك، إذا كان m عددًا صحيحًا والكسر $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، فإن
 $\sqrt[n]{c^m} = (c^m)^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{m}{n}}$ و $c^{\frac{m}{n}} = (c^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{c})^m$.

إيجاد قيم مقادير بأسس نسبية

مثال 3

تطبيق

A. أوجد قيمة كل من المقادير: $32^{\frac{3}{5}}$, $27^{-\frac{2}{3}}$, $50^{\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} 32^{\frac{3}{5}} &= (32^{\frac{1}{5}})^3 \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27^{-\frac{2}{3}} &= (27^{\frac{1}{3}})^{-2} \\ &= (3)^{-2} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

بما أن العدد 50 ليس له جذر
رابع كامل، استعمل الآلة الحاسبة
لإيجاد القيمة التقريبية:
 $50^{\frac{3}{4}} \approx 18.80$

استعمل الأدوات المناسبة

يمكن إيجاد قيمة الكثير من المقادير
التي لها جذور صحيحة باستعمال
الحساب الذهني. لكن عندما لا يكون
الجذر عددًا صحيحًا، فمن المفيد
استعمال مفتاح القوة في الآلة
الحاسبة لحساب الجذور النسبية.

B. يُستعمل مقياس فوجيتا F ، لقياس شدة الأعاصير باستعمال الصيغة $F = \sqrt[3]{\left(\frac{W}{14.1}\right)^2} - 2$ ،
حيث W السرعة التقريبية للرياح بوحدة mph. أوجد تصنيف (فئة) المؤشر F لإعصار السرعة
التقديرية للرياح فيه 100 mph

فئة المؤشر	نطاق المؤشر	حجم الأضرار
F0	$0 \leq F < 1$	أضرار طفيفة
F1	$1 \leq F < 2$	أضرار متوسطة
F2	$2 \leq F < 3$	أضرار ملحوظة
F3	$3 \leq F < 4$	أضرار كبيرة
F4	$4 \leq F < 5$	أضرار جسيمة
F5	$5 \leq F < 6$	أضرار كارثية



$$\begin{aligned} F &= \sqrt[3]{\left(\frac{100}{14.1}\right)^2} - 2 \\ &= \left(\frac{100}{14.1}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \\ &\approx (7.09)^{\frac{2}{3}} - 2 \\ &\approx 3.69 - 2 \\ &\approx 1.69 \end{aligned}$$

عوّض $W = 100$ في الصيغة

أعد كتابة الجذر باستعمال الأس

اقسم 100 على 14.1

أوجد قيمة الأس

اطرح

إذن يُصنّف الإعصار الذي فيه السرعة التقديرية للرياح هي 100 mph بأنه من الفئة F1 وفق مقياس فوجيتا.

3. حاول أن تحلّ! أوجد قيمة كل مقدار أدناه. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

a. $-(16^{\frac{3}{4}})$

b. $\sqrt[5]{(3.5)^4}$

بسط المقدارين التاليين:

A. $\sqrt[5]{32m^{15}}$

$$\sqrt[5]{2^5 m^{15}} = \sqrt[5]{(2m^3)^5}$$

$$= 2m^3$$

اكتب المجذور في صورة
مقدار مرفوع إلى الأس 5

إذن، $\sqrt[5]{32m^{15}} = 2m^3$

B. $\sqrt[4]{x^{20}y^8}$

$$\sqrt[4]{x^{20}y^8} = \sqrt[4]{(x^5y^2)^4}$$

$$= |x^5y^2|$$

$$= |x^5|y^2$$

اكتب المجذور في صورة مقدار
مرفوع إلى الأس 4

تذكر أن قيمة y^2 موجبة دائماً
ولا يتطلب إيجاد قيمته المطلقة.

إذن، $\sqrt[4]{x^{20}y^8} = |x^5|y^2$

خطأ شائع

قد تعتقد أن المقدار لا يمكن تبسيطه
لأن العددين 20 و 8 ليست لهما
جذور كاملة من الدرجة الرابعة. لكن
كل أس هو أحد مضاعفات العدد 4،
وأن $(n^4)^m = n^{4m}$

4. بسط المقدارين التاليين:

a. $\sqrt[3]{-8a^3b^9}$

b. $\sqrt[4]{256x^{12}y^{24}}$

استعمال الجذور النونية لحل المعادلات

حل المعادلة $2x^5 = 64$

$2x^5 = 64$

$x^5 = 32$

$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$

$x = 2$

أوجد الجذر الخامس
لطرفي المعادلة

إذن، حل المعادلة هو $x = 2$.

عَمِّم

أوجد الجذر النوني لطرفي المعادلة
بحيث يصبح أس المتغير هو
العدد 1، وباستعمال الصيغة
الجذرية، يكون
 $\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^1$

5. حل المعادلتين التاليين:

a. $5x^3 = 320$

b. $2p^4 = 162$

المفهوم حل معادلة في الصورة $x^n = c$

لحل معادلة في الصورة $x^n = c$ ، أوجد الجذر النوني للطرفين برفع كل مقدار إلى القوة $\frac{1}{n}$

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = (c)^{\frac{1}{n}}$$

استعمال الجذور النونية لحل المسائل

مثال 6

تطبيق

وعاء مكعب الشكل مملوء بالماء ضلعه أطول بمقدار 2 cm من طول ضلع وعاء مكعب فارغ أصغر منه وموضوع تحته. إذا كان حجم المكعب الكبير يساوي 729 cm^3 ، أوجد حجم الماء المنسكب عند امتلاء الوعاء الصغير.



نموذج

استعمل المعلومات الواردة في نص المسألة لكتابة معادلة تمثل الموقف.

$$\begin{aligned} (x + 2)^3 &= 729 \\ [(x + 2)^3]^{\frac{1}{3}} &= (729)^{\frac{1}{3}} \\ x + 2 &= 9 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

ارفع الطرفين إلى الأس $\frac{1}{3}$ ثم حل.

حجم المكعب الصغير يساوي 7^3 cm^3 أو 343 cm^3

حجم المكعب الكبير يساوي 729 cm^3

حجم الماء الذي سينسكب من المكعب الصغير $729 - 343 = 386$

إذن، حجم الماء المنسكب عند امتلاء الوعاء الصغير يساوي 386 cm^3 من الماء.

حاول أن تحل! 6. مكعب طول ضلعه أصغر بمقدار 3 cm من طول ضلع مكعب آخر. إذا كان حجم المكعب الصغير يساوي 200 cm^3 ، أوجد حجم المكعب الكبير.

حل معادلة في الصورة $x^n = c$

الربط بين الصيغة الجذرية والصيغة الأسية

لحل معادلة في الصورة $x^n = c$ ، أوجد الجذر النوني
لطرفي المعادلة برفع كل مقدار إلى الأس $\frac{1}{n}$

دليل الجذر يكافئ مقام الأس الكسري.
أس المجذور يكافئ بسط الأس الكسري.

لفظيًا

$$\begin{aligned} x^3 &= 1\,728 \\ (x^3)^{\frac{1}{3}} &= (1\,728)^{\frac{1}{3}} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{32^4} &= (32^4)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{4}{5}} \\ 729^{\frac{5}{6}} &= (729^{\frac{1}{6}})^5 = (\sqrt[6]{729})^5 \end{aligned}$$

الصيغة الجذرية
الصيغة الأسية

عدديًا

$$\begin{aligned} x^n &= c \\ (x^n)^{\frac{1}{n}} &= (c)^{\frac{1}{n}} \\ x &= c^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{c^m} &= (c^m)^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{m}{n}} \\ c^{\frac{m}{n}} &= (c^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{c^m} \end{aligned}$$

الصيغة الجذرية
الصيغة الأسية

جبريًا

طبق فهمك

في التمرينين 7 و 8، اكتب المقدار بالصيغة الجذرية.

7. $a^{\frac{1}{5}}$

8. $7^{\frac{2}{3}}$

في التمرينين 9 و 10، اكتب المقدار بالصيغة الأسية.

9. $\sqrt[3]{b}$

10. $\sqrt[4]{p^7}$

11. ما عدد الجذور الحقيقية من الدرجة الثالثة للعدد 3 375 ؟

12. ما عدد الجذور الحقيقية من الدرجة السادسة للعدد 15 625 ؟

13. حل المعادلة $4x^3 = 324$

14. حل المعادلة $2x^4 = 2\,500$

في التمرينين 15 و 16، بسّط المقدار.

15. $\sqrt[3]{27x^{12}y^6}$

16. $\sqrt[5]{-32x^5y^{30}}$

17. تم وضع كرة ثلج اصطناعية في علبة مكعبة الشكل حجمها

 64 in^3 ، ثم وُضعت هذه العلبة في صندوق شحن كبير، مكعب

الشكل أيضًا، طول ضلعه أكبر بمقدار 8 in من طول ضلع العلبة.

أوجد عدد كرات الثلج التي يتسع لها صندوق الشحن.

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تُستعمل الأسس والجذور لتمثيل
جذور الأعداد الحقيقية ؟

2. حلّ الخطأ تقول منى إن $\sqrt[3]{10} = 10^3$ ؛ بين خطأ
منى وصحّحه.

3. المصطلحات حدّد الدليل والمجذور في المقدار
الجذري $\sqrt[5]{125}$

4. استعمل البنية أثبت أن المقدار $75^{\frac{3}{5}}$ يساوي
المقدار $(75^{\frac{1}{5}})^3$

5. ابن الحجج الرياضية يقول خالد إن $\frac{x^8}{x^4} = x^4$ ،
هل هو على صواب ؟ وضح إجابتك.

6. فكّر وثابر في الحل هل يمكن أن يكون الأس النسبي كسرًا غير
فعلي ؟ وضح كيف يمكن إيجاد قيمة المقدار $27^{\frac{4}{3}}$ أو لماذا لا
يمكن إيجاد قيمته.

في التمارين 25-28، أوجد الجذور المحددة لكل عدد. انظر المثال 1

25. الجذور الحقيقية من الدرجة الرابعة للعدد 256

26. الجذور الحقيقية من الدرجة الثالثة للعدد 343

27. الجذور الحقيقية من الدرجة الخامسة للعدد 1 024

28. الجذور التربيعية الحقيقية للعدد 25

في التمارين 29-32، اكتب المقدار باستعمال أس كسري.

انظر المثال 2

29. $\sqrt[4]{16^2}$

30. $\sqrt[6]{729}$

31. $\sqrt[7]{x^2}$

32. $\sqrt[4]{ab}$

في التمرينين 33 و 34، أوجد قيمة المقدار. قرب الإجابة إلى أقرب

جزء من مئة إذا لزم الأمر. انظر المثال 2

33. $\sqrt[4]{25^2}$

34. $-\sqrt[3]{125^5}$

في التمارين 35-38، بسط المقدار. انظر المثال 4

35. $\sqrt[3]{8y^9}$

36. $\sqrt[4]{q^{12}z^4}$

37. $\sqrt[6]{729a^{24}b^{18}}$

38. $\sqrt[8]{v^8g^{40}}$

في التمارين 39-42، حل المعادلة. انظر المثال 5

39. $1\,125 = 9x^3$

40. $6\,480 = 5w^4$

41. $270 = 10q^3$

42. $256 = 4h^6$

43. المكعب الصغير في الصورة أدناه طول ضلعه أصغر بمقدار

1.5 in من طول ضلع المكعب الكبير. أوجد حجم المكعب

الكبير. انظر المثال 6

الحجم: 85 in^3



18. **ابن الحجج الرياضية** وجدت نورة أن الجذر الخامس للحد الجبري

$$243x^{15}y^5 \text{ هو } 3x^3y^5, \text{ هل هي على صواب؟}$$

وَصَح تبريرك المنطقي.

19. **فكر وثابر في الحل** في أحد المهرجانات، تم نفخ كل الكرات

حتى أصبح حجم الكرة الواحدة منها $\frac{2}{3} \text{ in}^3$ ، وَصَح كيفية

إيجاد طول نصف القطر r لكل كرة منفوخة.

استعمل التكنولوجيا لإيجاد الناتج.



20. **حلل الخطأ** كتب عامر المقدار الأسّي الموضح بالصيغة الجذرية

كما يلي:

$$x^{\frac{4}{3}} = (x^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$(x^4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^4} \quad \text{X}$$

بَيّن خطأ عامر وَصّحه.

21. **ابن الحجج الرياضية** حدّد ما إذا كان $\sqrt[3]{x^2}$ يساوي $(\sqrt[3]{x})^2$.

وَصَح تبريرك المنطقي.

22. **استعمل البنية** ما عدد الجذور من الدرجة الثالثة للعدد -512؟

وَصَح تبريرك المنطقي.

23. **مهارات التفكير العليا** تحسب صيغة الفائدة السنوية أدناه الرصيد

النهائي للحساب، F ، بدلالة المبلغ الأصلي، S ، ونسبة الفائدة، r ،

بعد 10 سنوات.

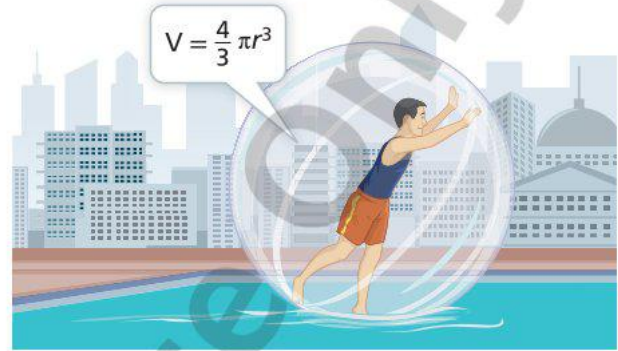
$$F = S(1 + r)^{10}$$

عند الحل لإيجاد قيمة r ، لماذا يمكن تجاهل الجذر السالب؟

24. **روابط في الرياضيات** طولاً ساقي مثلث قائم الزاوية هما 4 و 8،

اكتب طول الوتر في أبسط صورة جذرية.

44. **نمذج** كرة بلاستيكية للمشي على سطح الماء حجمها يساوي 4.19 m^3 تقريبًا. أوجد طول نصف قطرها r .



45. **فكر وثابر في الحل** تلقى أحمد صندوق هدايا على شكل شبه مكعب، عرضه يساوي ارتفاعه، وطوله يساوي ضعف عرضه، وحجمه يساوي $3,456 \text{ in}^3$ ، أوجد ارتفاع الصندوق.



46. **فكر وثابر في الحل** أودعت نورة مبلغًا من المال في حساب مصرفي بفائدة سنوية. توضح المعادلة أدناه المبلغ الأصلي، QR 200، ورصيد نورة بعد أربعة أعوام، QR 220.82. أوجد معدل الفائدة r .

$$220.82 = 200(1 + r)^4$$

47. **نمذج** يتم إيجاد المساحة السطحية لجسم المريض في أحد المستشفيات باستعمال المقدار الجذري $\sqrt{\frac{H \cdot W}{3600}}$ اكتب هذا المقدار باستعمال أس كسري.

48. حدّد ما إذا كان كل مقدار في الجدول يمثل طريقة أخرى لكتابة b^4 . اختر نعم أو لا.

	نعم	لا
a. $\sqrt[4]{b^3}$	☐	☐
b. $(b^3)^{\frac{1}{4}}$	☐	☐
c. $b^{\frac{4}{3}}$	☐	☐
d. $\sqrt[3]{b^4}$	☐	☐
e. $\frac{b^3}{b^4}$	☐	☐

49. **اختبار SAT/ACT** أي مما يلي يكافئ المقدار $\sqrt[6]{4096x^{18}y^{30}}$ ، حيث $x > 0$ و $y > 0$ ؟

- (A) $682.7x^{15}y^{24}$
- (B) $4x^{1.6}y^{1.8}$
- (C) $4096x^3y^5$
- (D) $4x^3y^5$
- (E) $682.7x^3y^5$

50. **مهمة أدائية** تستعمل شركة لإنتاج الألبان أوعية أسطوانية الشكل ارتفاع كل وعاء منها يساوي طول قطر قاعدته، لشحن إنتاجها.



الجزء A يصل حجم أحد الأوعية إلى 169.65 ft^3 تقريبًا. ما كمية المادة اللازمة لصنع السطح الجانبي لوعاء الشحن؟

الجزء B ارتفاع غرفة التخزين في سفينة الشحن هو 20 ft . أوجد أكبر عدد من أوعية الشحن التي يمكن وضع بعضها فوق بعض في غرفة التخزين هذه.

5-2

العمليات على الأسس والجذور Properties of Exponents and Radicals

أستطيع... استعمال خصائص الأسس والجذور لتبسيط المقادير الجذرية.

معايير الدرس

10.1.1 و 10.1.2

المصطلحات

- الصيغة الجذرية المبسطة
- reduced radical form
- إنطاق المقام
- rationalizing the denominator
- الجذور المتشابهة
- like radicals

انقد واشرح

كانت هدى تتدرب على إيجاد قيم المقادير وتبسيطها. موضح أدناه حلها لثلاثة مقادير.

$$1. 24^2 = 400 + 16 = 416$$

$$2. 3^6 = 9(27) = 270 - 27 = 243$$

$$3. \sqrt{625} = \sqrt{400} + \sqrt{225} = 20 + 15 = 35$$

A. هل حل هدى للمقدار الأول صحيح؟ وضح طريقة تفكيرك.

B. هل حل هدى للمقدار الثاني صحيح؟ وضح طريقة تفكيرك.

C. هل حل هدى للمقدار الثالث صحيح؟ وضح طريقة تفكيرك.

D. فكر وثابر في الحل ما النصيحة التي يمكنك تقديمها لهدى حول تبسيط المقادير الجذرية؟

كيف يمكن استعمال خصائص الأسس والجذور لإعادة كتابة المقادير الجذرية؟

السؤال الأساس

المفهوم خصائص الأسس النسبية

لا تنطبق خصائص الأسس على الأسس الصحيحة فقط، وإنما على الأسس النسبية أيضًا. والآن لنفترض أن n و m يمثلان أعدادًا نسبية، حيث $a, b \neq 0$.

الخاصية	بالرموز	مثال
ضرب القوى	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$4^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$
قسمة القوى	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$
قوة القوة	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(7^3)^{\frac{2}{3}} = 7^2$
قوة ناتج الضرب	$(ab)^m = a^m b^m$	$(16x)^{\frac{1}{2}} = (16^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}) = 4x^{\frac{1}{2}}$
الأس السالب	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}$

استعمال خصائص الأسس

مثال 1

كيف يمكنك إعادة كتابة كل مقدار باستعمال خصائص الأسس؟

$$A. 81^{\frac{5}{6}} \times 81^{-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} 81^{\frac{5}{6}} \times 81^{-\frac{1}{3}} &= 81^{\frac{5}{6} + (-\frac{1}{3})} \\ &= 81^{\frac{1}{2}} \\ &= 9 \end{aligned}$$

استعمل خاصية ضرب القوى

بسط الأس

أوجد القيمة

إذن، يمكنك إعادة كتابة $81^{\frac{5}{6}} \times 81^{-\frac{1}{3}}$ في صورة 9

استعمل البنية

عند ضرب الأعداد التي لها نفس الأساس، فإن جمع أس سالب يعطي نفس نتيجة طرح معكوسه الجمعي.

يتبع في الصفحة التالية

B. $\left(\frac{xy^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(x^{(1-\frac{1}{2})}y^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(x^{\frac{1}{2}}y^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{3}}y^2 \\ &= y^2\sqrt[3]{x}\end{aligned}$$

استعمل خاصية قسمة القوى

بسط

استعمل خاصيتي قوة ناتج الضرب وقوة القوة

اكتب بالصيغة الجذرية

إذن، يمكنك إعادة كتابة $\left(\frac{xy^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ في صورة $y^2\sqrt[3]{x}$.

خطأ شائع

تذكر أن تطرح الأسس، لا أن تقسمها. لأنك إذا قسمتها تحصل على إجابة خاطئة وهي x^2 .

حاول أن تحل! 1. أعد كتابة كل مقدار باستعمال خصائص الأسس.

a. $\left(\frac{3}{32^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

b. $2a^{\frac{1}{3}}(ab^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$

استعمال خصائص الأسس لإعادة كتابة الجذور

مثال 2

كيف يمكنك التوسع في خصائص الأسس لاشتقاق خصائص الجذور؟

A. إذا كان a و b عددين غير سالبين، فكيف يمكنك إعادة كتابة $\sqrt[n]{ab}$ باستعمال خصائص الأسس؟

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{ab} &= (ab)^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\end{aligned}$$

أعد كتابة الجذر في صورة أس نسبي

أعد الكتابة باستعمال خاصية قوة ناتج الضرب

أعد كتابة الأسس النسبية في صورة جذور

إذن، $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

يمكنك استعمال طريقة مشابهة لإثبات أن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ لكل $a \geq 0$ و $b > 0$

B. كيف يمكنك إعادة كتابة $\sqrt[3]{16x^5}$ باستعمال خصائص الأسس؟

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16x^5} &= \sqrt[3]{8x^3 \cdot 2x^2} \\ &= \sqrt[3]{8x^3} \cdot \sqrt[3]{2x^2} \\ &= 2x\sqrt[3]{2x^2}\end{aligned}$$

العوامل المتبقية للعدد

16 و x^5 التي ليست

مكعبات كاملة.

عوامل العدد 16 و x^5 التي تمثل مكعبات كاملة

إذن، $\sqrt[3]{16x^5} = 2x\sqrt[3]{2x^2}$

قد يشار إلى كتابة المقدار في صورة $2x\sqrt[3]{2x^2}$ باسم **الصيغة الجذرية المبسطة** للمقدار لأن جميع الجذور النونية للقوى النونية الكاملة في المجذور تم تبسيطها ولم يتبق أية جذور في المقام.

حاول أن تحل! 2. أعد كتابة كل مقدار بالصيغة الجذرية المبسطة.

a. $\sqrt[4]{81a^8b^5}$

b. $\sqrt[3]{\frac{x^4y^2}{125x}}$

الاستيعاب المفاهيمي

المفهوم خصائص الجذور

خاصية ناتج قسمة الجذور
الجذر النوني لناتج القسمة يساوي ناتج قسمة الجذور النونية للعوامل.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

خاصية ناتج ضرب الجذور
الجذر النوني لناتج ضرب يساوي ناتج ضرب الجذور النونية للعوامل.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

ابحث عن العلاقات

تقود خاصيتنا ضرب القوى وقسمة القوى إلى معرفة خاصيتي ناتج الضرب وناتج القسمة للجذور.

إرشاد

إذا كان الجذر عدد زوجي، يجب أن يكون المجذور عدد غير سالب.

مثال 3

إعادة كتابة ناتج ضرب جذر أو ناتج قسمته

A. اكتب المقدار $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{8}$ بالصيغة الجذرية المبسطة.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{8} &= \sqrt[5]{16 \times 8} && \text{استعمل خاصية ضرب الجذور} \\ &= \sqrt[5]{128} && \text{اضرب المجوزين} \\ &= \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{4} && \text{استعمل خاصية ضرب الجذور} \\ &= 2 \sqrt[5]{4} && \text{بسّط} \end{aligned}$$

إذن، الصيغة الجذرية المبسطة للمقدار $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{8}$ هي $2 \sqrt[5]{4}$

B. اكتب المقدار $\sqrt[6]{8x} \cdot \sqrt[3]{2x}$ بالصيغة الجذرية المبسطة.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{8x} \cdot \sqrt[3]{2x} &= (8x)^{\frac{1}{6}} \cdot (2x)^{\frac{1}{3}} && \text{لضرب أو قسمة مقادير جذرية ذات أدلة مختلفة، استعمل الأسس النسبية. أعد الكتابة باستعمال الأسس النسبية} \\ &= (8x)^{\frac{1}{6}} \cdot (2x)^{\frac{2}{6}} && \text{أعد الكتابة باستعمال الدليل المشترك (المقام)} \\ &= (8x \cdot (2x)^2)^{\frac{1}{6}} && \text{استعمل خاصية ناتج الضرب للجذور} \\ &= \sqrt[6]{32x^3} && \text{بسّط} \end{aligned}$$

إذن، الصيغة الجذرية المبسطة للمقدار $\sqrt[6]{8x} \cdot \sqrt[3]{2x}$ هي $\sqrt[6]{32x^3}$

C. اكتب المقدار $\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}}$ بالصيغة الجذرية المبسطة.

لإنطاق مقام مقدار جذري، أعد كتابته بحيث لا توجد جذور في أي مقام ولا توجد مقامات في أي جذر.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{2n}{9m}} &= \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3m^2}}{\sqrt[3]{3m^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{\sqrt[3]{27m^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m} \end{aligned}$$

لإنطاق المقام، ابحث عن عامل بحيث يتكوّن جذر تكعيبي لمكعب كامل.

العدد 9 هو أحد عوامل المكعب الكامل 27، و m^1 أحد عوامل m^3 . اضرب المقام والبسط في $\sqrt[3]{3m^2}$ لتكوين مكعب كامل.

إذن، الصيغة الجذرية المبسطة للمقدار $\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}}$ هي $\frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m}$

بّر منطقياً

فكر في العامل الأبسط الذي يمكنك ضرب المقام فيه لتبسيط الجذر. هناك عدة خيارات ولكن اختيار العامل الأبسط هو الحل الأفضل.

حاول أن تحل! 3. أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار مما يلي:

a. $\sqrt[5]{\frac{7}{16x^3}}$

b. $\sqrt[4]{27x^2} \cdot \sqrt{3x}$

A. ما ناتج $\sqrt{20} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} - \sqrt{5}$ ؟

الجذور المتشابهة لها نفس الدليل ونفس المجذور. الجذور المتشابهة فقط هي التي يمكن دمجها باستعمال الجمع والطرح.

$$\sqrt{20} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{20} - \sqrt{5} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$$

$$2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$$

$$(2 - 1)\sqrt{5} + (-2 + 5)\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2}$$

ادمج الحدود الجذرية التي لها أدلة متشابهة

بسط كل حد جذري

التحليل بإخراج الجذور المتشابهة باستعمال

معكوس خاصية التوزيع

ادمج الحدود الجذرية المتشابهة

إذن، المقدار $\sqrt{20} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} - \sqrt{5}$ مكافئ للمقدار $\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2}$.

B. يوضح التصميم الألواح المطلوبة لتدعيم خلفية أحد المناظر المسرحية. هل تكفي قطعة خشب طولها 75 ft لتدعيم المنظر المسرحي بالكامل ؟



افترض أن a يمثل طول قطر المربع الصغير و b يمثل طول قطر المربع الأكبر. حدّد أطوال الأقطار:

المربع الصغير

$$4^2 + 4^2 = a^2$$

$$32 = a^2$$

$$4\sqrt{2} = a$$

المربع الكبير

$$7^2 + 7^2 = b^2$$

$$98 = b^2$$

$$7\sqrt{2} = b$$

خذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة وبسط الجذر. نظرًا إلى أن السياق يتعلق بالطول، فيمكن تجاهل الحل السالب.

توجد 3 أضلاع للمربع الصغير طول كل منها 4 ft، و 4 أضلاع للمربع الكبير طول كل منها 7 ft،

وقطران للمربع الصغير طول كل منهما $4\sqrt{2}$ ft وقطران آخران للمربع الكبير طول كل منهما $7\sqrt{2}$ ft أوجد إجمالي طول الألواح:

$$3(4) + 4(7) + 2(4\sqrt{2}) + 2(7\sqrt{2}) = 40 + 22\sqrt{2}$$

$$40 + 22\sqrt{2} \approx 71.1$$

إذن، تكفي قطعة خشب طولها 75 ft لتدعيم المنظر المسرحي بالكامل.

يتبع في الصفحة التالية

نصيحة دراسية

استعمل عكس خاصية التوزيع

لتجميع الجذور المتشابهة بنفس

الطريقة التي يمكنك بها دمج

الحدود المتشابهة.

تطبيق



حاول أن تحل! 4. أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار مما يلي:

a. $\sqrt[3]{2000} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{128}$ b. $\sqrt{20} - \sqrt{600} - \sqrt{125}$

مثال 5 ضرب المقادير الجذرية ثنائية الحد

مثال 5

ما الصيغة الجذرية المبسطة لكل ناتج ضرب ؟

A. $\sqrt[3]{7}(2 - \sqrt[3]{49})$

$\sqrt[3]{7}(2) - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{49}$

$\sqrt[3]{7}(2) - \sqrt[3]{343}$

$2\sqrt[3]{7} - 7$

استعمل خاصية التوزيع

اضرب المجذورين اللذين لهما أدلة متشابهة

بسط كل حد جذري

إذن، ناتج الضرب هو $2\sqrt[3]{7} - 7$

B. $(2x - \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

$4x^2 - 2x\sqrt{3} - 2x\sqrt{3} + \sqrt{9}$

$4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3$

أوجد مفكوك ناتج الضرب

ادمج الحدود المتشابهة

إذن، ناتج الضرب هو $4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3$

نصيحة دراسية

تذكر أنه توجد طرق مختلفة لتحليل ناتج ضرب العوامل ثنائية الحد.

حاول أن تحل! 5. أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل ناتج ضرب.

a. $(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$ b. $\sqrt{6}(5 + \sqrt{3})$

مثال 6 إنطاق مقام ثنائي الحد

مثال 6

كيف يمكنك إعادة كتابة $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$ بدون وجود جذر في المقام ؟

لإنطاق مقام ثنائي حد، اضرب في مرافق المقام.

$\frac{1}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$

$\frac{2 - \sqrt{5}}{4 - 5}$

$\frac{2 - \sqrt{5}}{-1}$

$\sqrt{5} - 2$

اضرب البسط والمقام في مرافق المقام

اضرب البسط والمقام

اطرح الحدود في المقام

بسط

إذن، يمكن إعادة كتابة $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$ في صورة $\sqrt{5} - 2$

نصيحة دراسية

المرافق هو المقدار الذي يُضرب في مقدار جذري لإزالة الجذر.
مثال:

$\sqrt{5} - 2$ هو مرافق $\sqrt{5} + 2$ لأن
 $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 5 - 4 = 1$

نصيحة دراسية

ناتج ضرب المرافقين هو $a^2 - b^2$ ،
مما يحذف الجذور من المقام.

حاول أن تحل! 6. أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار مما يلي:

a. $\frac{5 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}$ b. $\frac{-4x}{1 - \sqrt{x}}$

إنتاج المقام	خاصية ناتج قسمة الجذور	خاصية ناتج ضرب الجذور	لفظيًا
لإنتاج مقام جذري، اضرب المقام في مرافق المقام.	الجذر النوني لناتج القسمة يساوي ناتج قسمة الجذور النونية للعوامل.	الجذر النوني لناتج الضرب يساوي ناتج ضرب الجذور النونية للعوامل.	
$\frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$ حيث $x > 0$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $a \geq 0, b > 0$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ حيث $a \geq 0, b \geq 0$	جبريًا
$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{40}$ $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$	عدديًا

استعمال خصائص الجذور

إنتاج المقام	خاصية ناتج ضرب الجذور	بسط
$\frac{5}{x-\sqrt{8}} \cdot \frac{x+\sqrt{8}}{x+\sqrt{8}} = \frac{5(x+\sqrt{8})}{x^2+x\sqrt{8}-x\sqrt{8}-8} = \frac{5x+5\sqrt{8}}{x^2-8}$ بما أن المقام ثنائي حد، اضرب البسط والمقام في مرافق المقام.	$\sqrt[4]{32x^9} = \sqrt[4]{16x^8} \cdot \sqrt[4]{2x}$ $= 2x^2 \sqrt[4]{2x}$ أوجد عوامل لها جذر رابع كامل.	

طبق فهمك

في التمارين 5-12، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار.

5. $49^{\frac{3}{4}} \times 49^{-\frac{1}{4}}$
6. $\left(\frac{a^2b^8}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$
7. $\sqrt[4]{1024x^9y^{12}}$
8. $\sqrt[3]{\frac{4}{9m^2}}$
9. $\sqrt{63} - \sqrt{700} - \sqrt{112}$
10. $\sqrt{5}(6 + \sqrt{2})$
11. $\frac{3}{\sqrt{6}}$
12. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5} + 3}$

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال خصائص الأسس والجذور لإعادة كتابة المقادير الجذرية؟
2. المصطلحات كيف يمكنك تحديد ما إذا كان المقدار الجذري في صورة مبسطة؟
3. استعمل البنية وضح سبب أن $(-64)^{\frac{1}{3}}$ يساوي $-64^{\frac{1}{3}}$ ولكن $(-64)^{\frac{1}{2}}$ لا يساوي $-64^{\frac{1}{2}}$
4. بزر منطقياً وضح الخطأ في حل منى عند إعادة كتابة المقدار الجذري التالي:
 $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12} = \sqrt{-3(-12)} = \sqrt{36} = 6$

في التمارين 19-22، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار.

انظر المثال 1

$$19. (3x^{\frac{1}{2}})(4x^{\frac{2}{3}}) \quad 20. 2b^{\frac{1}{2}}(3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}})^2$$

$$21. (x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{12}})^4 \div x^{\frac{2}{3}} \quad 22. \left(\frac{16c^{14}}{81d^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

في التمارين 23-28، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار. انظر المثال 2

$$23. \sqrt[3]{250y^2z^4} \quad 24. \sqrt[4]{256v^7w^{12}}$$

$$25. \sqrt{\frac{48x^3}{3xy^2}} \quad 26. \sqrt{\frac{56x^5y^5}{7xy}}$$

$$27. \sqrt[3]{216m} \quad 28. \sqrt[3]{\frac{250f^7g^3}{2f^2g}}$$

في التمارين 29-36، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار. انظر المثال 3

$$29. \sqrt{x^5y^5} \cdot 3\sqrt{2x^7y^6} \quad 30. \sqrt[3]{\frac{18n^2}{24n}}$$

$$31. \sqrt[3]{3x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{9x^3} \quad 32. \sqrt{\frac{162a}{6a^3}}$$

$$33. \sqrt[5]{2pq^6} \cdot 2\sqrt{2p^3q} \quad 34. \sqrt[3]{\frac{x^2}{9y}}$$

$$35. \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{16} \quad 36. \sqrt[4]{\frac{2}{5x}}$$

في التمارين 37-40، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار. انظر المثال 4

$$37. 4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{24} \quad 38. 6\sqrt{45y^2} - 4\sqrt{20y^2}$$

$$39. 3\sqrt{12} - \sqrt{54} + 7\sqrt{75} \quad 40. \sqrt{32h} + 4\sqrt{98h} - 3\sqrt{50h}$$

في التمارين 41-44، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار. انظر المثال 5

$$41. (3\sqrt{p} - \sqrt{5})(\sqrt{p} + 5\sqrt{5}) \quad 42. (4m - \sqrt{3})(4m - \sqrt{3})$$

$$43. (3\sqrt{2} + 8)(3\sqrt{2} - 8) \quad 44. \sqrt[3]{3}(5\sqrt[3]{9} - 4)$$

في التمارين 45-48، أوجد الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار. انظر المثال 6

$$45. \frac{4}{1 - \sqrt{3}} \quad 46. \frac{20}{3 + \sqrt{2}}$$

$$47. \frac{3 + \sqrt{8}}{2 - 2\sqrt{8}} \quad 48. \frac{-2x}{3 + \sqrt{x}}$$

13. **نمذج** في المقدار $PV^{\frac{4}{3}}$ ، يمثل P ضغط عينة غاز ويمثل V حجمها. أوجد قيمة المقدار عندما $P = 7$ و $V = 8$.

14. **بزر منطقياً** صف القيم المحتملة للمتغير k بحيث يمكن إعادة كتابة $\sqrt{32} + \sqrt{k}$ في صورة حد واحد.

15. **حلل الخطأ** وضح سبب عدم صحة الحل التالي. ثم أوجد الإجابة الصحيحة.

$$\begin{aligned} 5\left(4 - 5^{\frac{1}{2}}\right) &= 5(4) - 5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 20 - 25^{\frac{1}{2}} \\ &= 15 \end{aligned}$$

16. **تواصل بدقة** ناقش مزايا وعيوب إعادة كتابة المقدار $\sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{147}$ في الصيغة الجذرية المبسطة من أجل تقدير قيمتها العشرية.

17. **مهارات التفكير العليا** اكتب المقدار $\sqrt{\frac{4}{5}}$ بطريقتين مختلفتين، بحيث يكون البسط مبسطاً في إحدهما ويتم إنطاق المقام في الأخرى.

18. **ابن الحجج الرياضية** بزر كل خطوة مستعملة في تبسيط العبارة أدناه.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2}{\frac{3}{a^4}}\right)^{\frac{1}{5}} &= \left(a^{2-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= a^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

53. يعيد محمد كتابة المقدار $\frac{1 + \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}}$ بالصيغة الجذرية المبسطة. حدد ما إذا كان محمد سيكتب الخطوات أدناه لتوضيح حله. اختر نعم أم لا.

	نعم	لا
$\frac{6 + 4\sqrt{3} - 3}{25 + 9}$	☐	☐
$\frac{5 + \sqrt{3} + 5\sqrt{3} + \sqrt{9}}{25 + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \sqrt{9}}$	☐	☐
$\frac{4 + 3\sqrt{3}}{11}$	☐	☐
$\frac{8 + 6\sqrt{3}}{28}$	☐	☐
$\frac{5 + 6\sqrt{3} + 3}{25 - 3}$	☐	☐

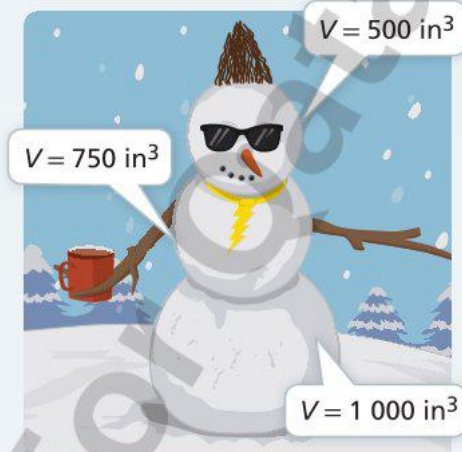
54. اختبار SAT/ACT ما المقدار الذي لا يمكن إعادة كتابته في صورة -10 ؟

- (A) $\sqrt{25} \times \sqrt[3]{-8}$ (B) $\sqrt[3]{-125} \times \sqrt[4]{16}$
 (C) $-\sqrt[3]{1\,000}$ (D) $-\sqrt{25} \times \sqrt[5]{-32}$
 (E) $\sqrt{4} \times (-\sqrt[3]{125})$

55. مهمة أدائية شكل كروي نصف قطره r وحجمه $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

الجزء A استعمل الصيغة لإيجاد r بدلالة V ، أنطق المقام.

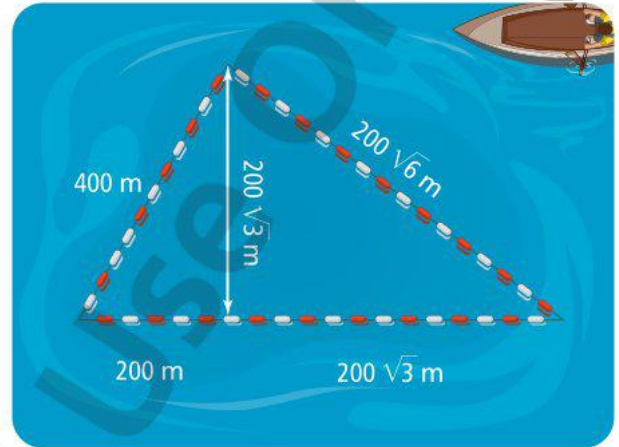
الجزء B رجل ثلج مصنوع باستعمال ثلاث كرات ثلجية كروية الشكل. تمثل الكرة الثلجية العلوية الرأس و يبلغ حجمها 500 in^3 ، ما قطر الكرة الثلجية العلوية ؟



الجزء C يبلغ حجم كرتي الثلج الآخرين 750 in^3 و $1\,000 \text{ in}^3$ ؛ ما طول رجل الثلج ؟

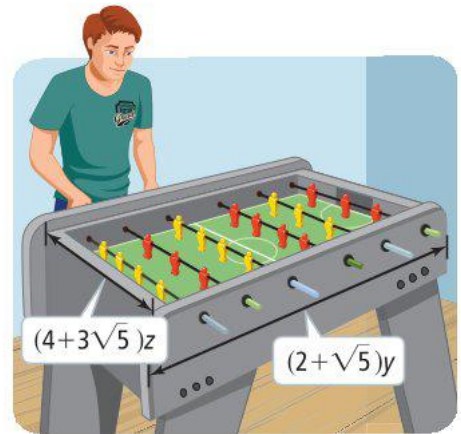
49. نموذج حددت منطقة سباحة مثلثة بحبل.

- a. إذا سبح رجل حول محيط منطقة السباحة، ما المسافة التي سيسبحها ؟
 b. ما مساحة القسم المحدد بالحبل ؟



50. استعمل البنية صيغة الفائدة r اللازمة ليزيد رصيدك من المقدار p إلى المقدار a خلال m أشهر هي $r = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$. ما نسبة الفائدة اللازمة لزيادة الرصيد من QR 14 400 إلى QR 25 600 خلال 7 أشهر ؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المئة.

51. استعمل البنية مستطيل طوله $y(2 + \sqrt{5})$ وعرضه $z(4 + 3\sqrt{5})$ ، أوجد مساحته.



52. نموذج طاولة اجتماعات مستطيلة طولها $\sqrt{440} \text{ ft}$ وعرضها $\sqrt{20} \text{ ft}$ ، أوجد مساحتها.

5-3

المعادلات الأسية

Exponential Equations

انقد واشرح

ناصر

$$3^{-3} = -27$$

راشد

$$3^{-3} = \frac{1}{27}$$

طلب المعلم من الطلاب كتابة مقدار مكافئ للمقدار 3^{-3}

كتب كل من ناصر وراشد مقدارًا على السبورة.

A. أيهما على صواب، ناصر أم راشد؟ وضح إجابتك.

B. **بزر منطقيًا** ما الخطأ الذي على الأرجح قد وقع فيه أحد الطالبين؟

أستطيع... استعمال خصائص

الأسس لحل معادلات تتضمن أسسًا نسبية.

معايير الدرس

10.1.1 و 10.1.3

المصطلحات

• أس نسبي rational exponent
• المعادلة الأسية equation with rational exponent

equation with rational exponent

الاستيعاب المفاهيمي

ما خصائص الأسس النسبية وكيف تُستعمل لحل مسائل تتضمن معادلات أسية؟

السؤال الأساس

مثال 1

كتابة الجذور باستعمال الأسس النسبية

A. لكل من الطابعين A و B نفس المساحة، لكن طول ضلع كل منهما مكتوب بطريقة مختلفة. كيف يمكنك إثبات أن $\sqrt{2}$ يساوي $2^{\frac{1}{2}}$ ؟

استعمل خواص الأسس لإثبات أن

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2} \times 2}$$

خاصية قوة القوة

$$= 2^1$$

اضرب الأسس

$$= 2$$

بسط

$$\text{إذن، } \sqrt{2}^1 \text{ يكافئ } 2^{\frac{1}{2}}$$

B. طولًا ضلعي الطابع C مختلفان عن طول

ضلع كل من الطابعين السابقين.

كيف يمكنك كتابة $\sqrt[3]{5^2}$ باستعمال أس نسبي؟

$$\text{بما أن } \sqrt[3]{5^2} \text{ يكافئ } 2^{\frac{1}{2}}, \text{ فإن } \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

بشكل عام، **الأسس النسبية** هي طريقة أخرى لكتابة الجذور.

إذا كان الجذر **النوني** للعدد a عددًا حقيقيًا

وكان m عددًا صحيحًا،

$$\text{فإن } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ و } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

حاول أن تحل! 1. اكتب $\sqrt[3]{2}$ باستعمال أس نسبي.

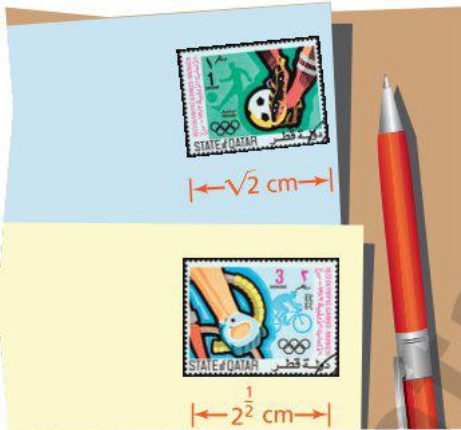
عقم

خاصية قوة القوة هي $(a^m)^n = a^{mn}$

وهي تنطبق على كل الأسس

الصحيحة. ما وجه المقارنة بين هذه

الخاصية والأسس النسبية؟



مثال 2

استعمال خاصية ضرب القوى لحل المعادلات التي تتضمن أسسًا نسبية

المعادلة الأسية هي معادلة يتكون أحد طرفيها على الأقل من قوى، حيث يتضمن الأس متغيرًا.

$$\text{حل المعادلة } (3^{\frac{x}{2}})(3^{\frac{x}{3}}) = 3^9$$

$$(3^{\frac{x}{2}})(3^{\frac{x}{3}}) = 3^9$$

$$3^{\frac{x}{2} + \frac{x}{3}} = 3^9$$

$$3^{\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6}} = 3^9$$

$$3^{\frac{5x}{6}} = 3^9$$

$$\frac{5x}{6} = 9$$

$$\frac{6}{5} \left(\frac{5x}{6} \right) = \frac{6}{5} (9)$$

$$x = \frac{54}{5}$$

أعد كتابة الطرف الأيسر من المعادلة بأس واحد.

خاصية ضرب القوى

اكتب الأسس باستعمال مقام مشترك

الأساسان متساويان، إذن الأسس متساوية

اضرب الطرفين في $\frac{5}{6}$ إذن، الحل هو $x = \frac{54}{5}$

نصيحة دراسية

لضرب قوتين أساسهما مشترك،
اكتب الأساس المشترك كما هو
 واجمع الأسين.

$$\text{حاول أن تحل! 2. حل المعادلة } (2^{\frac{x}{4}})(2^{\frac{x}{6}}) = 2^3$$

مثال 3

استعمال خاصية قوة القوة لحل المعادلات التي تتضمن أسسًا نسبية

$$\text{A. حل المعادلة } 27^{x-4} = 3^{2x-6}$$

$$27^{x-4} = 3^{2x-6}$$

$$(3^3)^{x-4} = 3^{2x-6}$$

$$3^{3x-12} = 3^{2x-6}$$

$$3x - 12 = 2x - 6$$

$$3x - 12 - 3x = 2x - 6 - 3x$$

$$-12 = -x - 6$$

$$-12 + 6 = -x - 6 + 6$$

$$-6 = -x$$

$$6 = x$$

أعد كتابة 27 بحيث يكون الأساس 3

خاصية قوة القوة

اكتب الأسين في صورة معادلة

إذن، الحل هو $x = 6$

نصيحة دراسية

لإيجاد قوة القوة، دع الأساس كما هو
 واضرب الأسس.

يتبع في الصفحة التالية

B. حل المعادلة $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{x}{3}-2}$.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بحيث يكون الأساس في طرفيها هو نفسه.

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{x}{3}-2}$$

أعد كتابة كل من $\frac{1}{25}$ و $\frac{1}{125}$ في صورة قوة للعدد 5

$$\left(5^{-3}\right)^{-\frac{x}{2}} = \left(5^{-2}\right)^{-\frac{x}{3}-2}$$

$$5^{\frac{3x}{2}} = 5^{\frac{2x}{3}+4}$$

خاصية قوة القوة

الخطوة 2 اكتب الأسين في صورة معادلة وحلها.

$$\frac{3x}{2} = \frac{2x}{3} + 4$$

$$6\left(\frac{3x}{2}\right) = 6\left(\frac{2x}{3} + 4\right)$$

$$9x = 4x + 24$$

$$9x - 4x = 4x + 24 - 4x$$

$$5x = 24$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{24}{5}$$

$$x = 4.8$$

إذن، الحل هو $x = 4.8$.

خطأ شائع

تذكر أن توزع على الحدين عند إجراء عملية الضرب.

حاول أن تحل! 3. حل المعادلتين التاليتين:

a. $256^{x+2} = 4^{3x+9}$

b. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{2}-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{3}}$

مثال 4 استعمال خاصية قوة ناتج الضرب لحل المعادلات التي تتضمن أسسًا نسبية

يقوم بدر الإعداد لنزهة في البرية، وقد وضع ثلاثة مفارش مربعة الشكل على الأرض كما هو موضح في الصورة المجاورة. أوجد مساحة المفارش C.



المساحة	=	الطول	•	العرض
12	=	$x^{\frac{1}{2}}$	•	$8^{\frac{1}{2}}$
مساحة المستطيل		طول		طول
العشبي		ضلع		ضلع
		المفارش C		المفارش B

تطبيق

ضع

يتبع في الصفحة التالية

احسب

حل لإيجاد قيمة x ، مساحة المفروش C.اضرب الأساسين
واترك الأس كما هو.

$$(8^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}) = 12$$

$$(8x)^{\frac{1}{2}} = 12$$

قم بتربيع الطرفين.

$$[(8x)^{\frac{1}{2}}]^2 = 12^2$$

$$8x = 144$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{144}{8}$$

$$x = 18$$

فبتبر

إذن، مساحة المفروش C تساوي 18 m^2 تحقق: قارن ناتج ضرب $\sqrt{18}$ في $\sqrt{8}$ بمساحة المستطيل التي تساوي 12

$$\begin{aligned} (\sqrt{8})(\sqrt{18}) &= (8^{\frac{1}{2}})(18^{\frac{1}{2}}) \\ &= (8 \cdot 18)^{\frac{1}{2}} = 144^{\frac{1}{2}} \\ &= 12 \end{aligned}$$

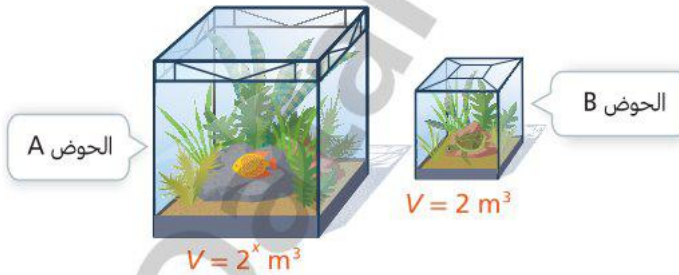
حاول أن تحل! 4. إذا كان ناتج ضرب طول ضلع المفروش A في $2^{\frac{1}{2}}$ يساوي 6 m،
فما مساحة المفروش A ؟

تطبيق

مثال 5

استعمال خاصية قسمة القوى لحل المعادلات التي تتضمن أسسًا نسبية

الحوضان الزجاجيان A و B مكعبا الشكل. طول ضلع الحوض A يساوي ضعف طول ضلع الحوض B.
أوجد قيمة x .



الخطوة 1 اكتب تناسبًا باستعمال طولي ضلعي الحوضين.

طول ضلع المكعب A يساوي $\sqrt[3]{2^x}$ طول ضلع المكعب B يساوي $\sqrt[3]{2}$

النسبة بين طولي الضلعين تساوي 2

$$\begin{aligned} \frac{(2^x)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} &= 2 \\ \frac{2^{x \cdot \frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} &= 2 \end{aligned}$$

يتبع في الصفحة التالية

الخطوة 2 استعمل خواص الأسس للتبسيط.

$$\frac{2^x}{2^1} = 2$$

$$2^{x-1} = 2$$

خاصية قسمة القوى.

$$2^{\frac{x-1}{3}} = 2$$

$$2^{\frac{x-1}{3}} = 2^1$$

اكتب 2 بالصورة الأسية.

الخطوة 3 ساو بين الأسين واخل لإيجاد قيمة x .

$$\frac{x-1}{3} = 1$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4$$

إذن، قيمة x تساوي 4

نصيحة دراسية

لقسمة قوتين لهما نفس الأساس، اكتب الأساس المشترك كما هو واطرح الأسس.

حاول أن تحل! 5. ما قيمة x إذا كان طول ضلع الحوض A يساوي أربعة أضعاف طول ضلع الحوض B ؟

لفظيًا

المعادلة الأسية هي معادلة يتكون أحد طرفيها على الأقل من قوى، حيث يتضمن الأس متغيرًا.

إذا كان الجذر النوني للعدد a عددًا حقيقيًا وكان m عددًا صحيحًا، فإن

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

جبريًا

قسمة القوى

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

ضرب القوى

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

قوة ناتج الضرب

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

قوة القوة

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

عدديًا

$$\frac{8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = 8^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$= 8^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2$$

$$16^{\frac{1}{4}} \times 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= 16^{\frac{2}{4}}$$

$$= 16^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4$$

$$(4 \times 9)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times 3$$

$$= 6$$

$$(256^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 256^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}$$

$$= 256^{\frac{1}{8}}$$

$$= 2$$

طبّق فهمك

في التمارين 7-12، اكتب الجذور باستعمال أسس نسبية.

7. $\sqrt{7}$

8. $\sqrt{15}$

9. $\sqrt[3]{6^4}$

10. $\sqrt[3]{2^3}$

11. $\sqrt[4]{2^4}$

12. $\sqrt{8^3}$

في التمارين 13-18، حل المعادلة.

13. $(2^{\frac{x}{3}})(2^{\frac{x}{2}}) = 2^5$

14. $(4^{\frac{x}{2}})(4^{\frac{x}{5}}) = 4^8$

15. $64^{x+1} = 4^{x+7}$

16. $16^{(x-3)} = 2^{(x-6)}$

17. $(\frac{1}{243})^{-\frac{x}{3}} = (\frac{1}{9})^{(-\frac{x}{2}+1)}$

18. $(\frac{1}{36})^{(x-4)} = (\frac{1}{216})^{(x+1)}$

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما خصائص الأسس النسبية وكيف

تُستعمل لحل مسائل تتضمن معادلات أسية؟

2. تواصل بدقة مربع مساحته 15 ft^2 ،

عبّر عن طول ضلعه بطريقتين.

3. ابحث عن العلاقات إذا كان $3^x = 3^y$ ، فما العلاقة

بين x و y ؟

4. حلّل الخطأ كتب ماجد $\sqrt[3]{4^2}$ في صورة $4^{\frac{3}{2}}$ ، ما الخطأ الذي

وقع فيه ماجد؟

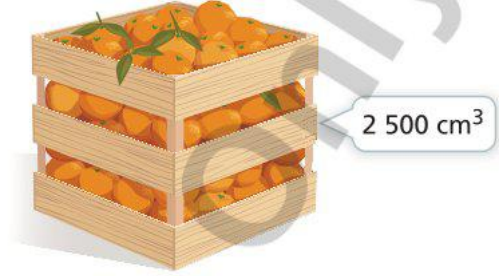
5. بزر منطقياً متى يكون من المفيد تحويل الجذور إلى أسس

نسبية لحل المعادلات؟

6. المصطلحات ما أوجه الشبه والاختلاف بين الأسس النسبية

والأسس المكوّنة من أعداد كلية؟

19. فكر وثابر في الحل صف طريقتين للتعبير عن طول ضلع مكعب باستعمال الحجم الموضح أدناه.



20. ابحث عن العلاقات إذا كان أس نسبي يمثل الجذر التكعيبي للمقدار x^m ، فكيف يتغير الأس النسبي مع تزايد قيمة m ؟

21. حل الخطأ بين خطأ حامد عند البدء بحل المعادلة $8^{x+3} = 2^{2x-5}$ وصححه.

$$\begin{aligned} 8^{x+3} &= 2^{2x-5} \\ (2^3)^{x+3} &= 2^{2x-5} \\ 2^{3x+3} &= 2^{2x-5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

X

22. ابن الحجج الرياضية قاعدة قوة ناتج القسمة هي $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ، $b \neq 0$ هل تطبق هذه القاعدة مع الأسس

النسبية إذا كان عدداً موجباً ؟ اذكر مثلاً لدعم حجتك.

23. مهارات التفكير العليا خاصية الأس الصفري هي $a^0 = 1$ ، $a \neq 0$

a. كيف يمكنك استعمال خصائص الأسس لتفسير لماذا $a^0 = 1$ ؟

b. كيف يمكن تطبيق خاصية الأس صفر عند حل معادلات تتضمن أسساً نسبية ؟

24. استعمال البنية لتأخذ المقدار $\sqrt[3]{625}$

a. اكتب الجذر باستعمال أسس نسبية.

b. صف طريقتين لإيجاد قيمة المقدار.

c. بسط المقدار الوارد في الجزء (b).

في التمارين 25-30، اكتب الجذور باستعمال أسس نسبية.

انظر المثال 1

25. $\sqrt{3}$

26. $\sqrt[3]{7}$

27. $\sqrt[5]{3^2}$

28. $\sqrt[4]{2^{-5}}$

29. $\sqrt[3]{a^2}$

30. $\sqrt{b^a}$

في التمارين 31-42، حل المعادلة. انظر الأمثلة 2 و 3 و 4 و 5

31. $(5^{\frac{x}{3}})(5^{\frac{x}{4}}) = 5^5$

32. $(2^{\frac{x}{2}})(4^{\frac{x}{2}}) = 2^6$

33. $(3^{\frac{x}{2}+1}) = (3^{-\frac{5x}{2}})$

34. $625^{2x-3} = 25^{3x-2}$

35. $(\frac{1}{256})^{-\frac{x}{4}} = (\frac{1}{16})^{-\frac{x}{2}}$

36. $8^{-\frac{x}{3}} = 4$

37. $49^{\frac{x}{4}-1} = 343^{\frac{x}{3}}$

38. $3 = (5^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}})$

39. $2 = (4^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{x}{3}})$

40. $\frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{x}{4}}} = 1$

41. $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{125^{\frac{x}{3}}}{25^{\frac{4}{3}}}$

42. $\frac{6^{\frac{1}{4}}}{36^{-\frac{x}{2}}} = 1$

في التمرينين 43 و 44، حدد خاصية الأسس المستعملة في كل

حل جزئي. انظر الأمثلة 2 و 3 و 4

43.

$$\begin{aligned} 36^{\frac{x}{3}+3} &= 216^{\frac{x}{5}} \\ (6^2)^{\frac{x}{3}+3} &= (6^3)^{\frac{x}{5}} \\ 6^{\frac{2x}{3}+6} &= 6^{\frac{3x}{5}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \frac{3^{\frac{3x}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} &= 3^{-\frac{3}{4}} \\ 3^{\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}} &= 3^{-\frac{3}{4}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

48. صل كل مقدار في العمود الأيسر بالمقدار المكافئ له في العمود الأيمن.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| I. $\sqrt[4]{2^5}$ | A. $2^{\frac{1}{5}}$ |
| II. $\sqrt{5}$ | B. $2^{\frac{5}{4}}$ |
| III. $\sqrt[5]{2^4}$ | C. $2^{\frac{4}{5}}$ |
| IV. $\sqrt[5]{2}$ | D. $5^{\frac{1}{2}}$ |

49. اختبار SAT/ACT ما قيمة x في المعادلة $27^{\frac{x}{2}} = 3^{(x-1)}$ ؟

- (A) -3
(B) -2
(C) $\frac{1}{3}$
(D) 2
(E) 3

50. مهمة أدائية يمكن كتابة أي عدد صحيح موجب في صورة مجموع قوى العدد 2 مع أسس مكونة من أعداد كلية. على سبيل المثال، يمكنك كتابة العدد 75 بالطريقة التالية:

$$2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^6 = 75$$

الجزء A استعمل المعادلة أعلاه لكتابة العدد 75 في صورة مجموع قوى العدد 8 باستعمال أسس نسبية. ما القيم الممكنة لكل من a و b و c و d ؟

$$8^a + 8^b + 8^c + 8^d = 75$$

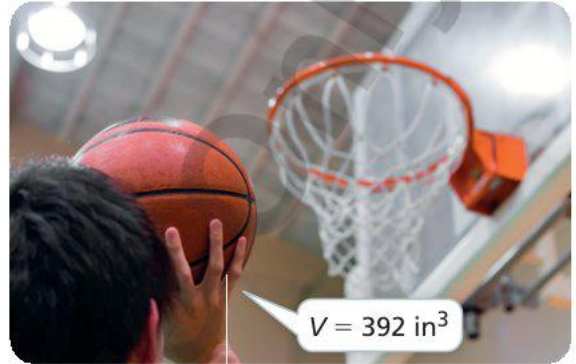
الجزء B كيف يمكنك تعديل المعادلة التي كتبتها في الجزء A لكتابة العدد 75 في صورة مجموع قوى العدد 16 ؟

$$16^a + 16^b + 16^c + 16^d = 75$$

الجزء C إذا كانت a و b و c و d أعدادا نسبية، فما نوع قيم الأعداد الصحيحة للمتغير x التي تجعل المعادلة التالية صحيحة ؟ وضح إجابتك.

$$x^a + x^b + x^c + x^d = 75$$

45. استعمل الأدوات المناسبة صيغة الحجم V لشكل كروي هي $\frac{4}{3}\pi r^3$. أوجد نصف قطر كرة السلة الموضحة أدناه بدلالة V .



46. استعمل البنية في مسابقة شعرية، يتم إقصاء بعض المتسابقين بعد كل جولة. يُستعمل الأس النسبي، $\frac{n-1}{n}$ ، حيث يمثل n رقم الجولة في المسابقة، لتحديد عدد المتسابقين الذين سينتقلون إلى الجولة التالية. إذا كان عدد المتسابقين في الجولة الثانية هو 243، أوجد عدد المتسابقين الذين سينتقلون إلى الجولة الخامسة.

47. فكر وثابر في الحل الصور A و B و C جميعها مربعة الشكل. مساحة الصورة C تساوي مساحة صورة مستطيلة الشكل طولها يساوي طول ضلع الصورة A وعرضها يساوي طول ضلع الصورة B. استعمل خصائص الأسس النسبية لكتابة معادلة وحلها لإيجاد طول ضلع الصورة A. قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.



الصورة A
المساحة = $x \text{ cm}^2$



الصورة B
المساحة = 72 cm^2



الصورة C
المساحة = 110 cm^2

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. ما هي الجذور وما العمليات عليها ؟ كيف تُستعمل المعادلات الأسية في حل مسائل من واقع الحياة ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. في المقدار $\sqrt[n]{c}$ ، n يسمى _____.

3. في المقدار $\sqrt[n]{c}$ ، c يسمى _____.

4. _____ هي معادلة تحدد العلاقة بين كمية وكمية أخرى أو أكثر.

5. عندما تُبسط جميع الجذور النونية للقوى النونية الكاملة ولا تبقى أي جذور في المقام، تكون العبارة في _____.

6. الجذور التي لها الدليل نفسه والمجذور نفسه هي _____.

- أس نسبي
- المعادلة الأسية
- الجذر النوني
- رمز الجذر
- دليل الجذر
- المجذور
- الصيغة الجذرية المبسطة
- إنطاق المقام
- الجذور المتشابهة

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 5-1

الجذور النونية والجذور والأسس النسبية

مراجعة سريعة

الجذر النوني للعدد c هو x ، إذا كان $x^n = c$.

ويمكن تمثيل الجذر النوني للعدد c في الصورة $\sqrt[n]{c}$ ،

حيث يمثل n الدليل ويمثل c المجذور.

إذا كان الجذر عدد زوجي، يجب أن يكون المجذور عدداً غير سالب.

مثال

حل المعادلة $2x^4 = 162$

اكتب المعادلة الأصلية

اقسم الطرفين على 2

ارفع الطرفين إلى مقلوب أس x

استعمل خاصية قوة القوة

$$2x^4 = 162$$

$$x^4 = 81$$

$$(x^4)^{\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm 3$$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 7 و 8، أوجد قيمة المقدار. قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

$$7. \sqrt[4]{16^2}$$

$$8. -\sqrt[3]{25^6}$$

في التمرينين 9 و 10، بَسِّط المقدار.

$$9. \sqrt[3]{27x^{12}}$$

$$10. \sqrt[4]{16a^{24}b^8}$$

في التمرينين 11 و 12، حل المعادلة.

$$11. 750 = 6y^3$$

$$12. 1280 = 5z^4$$

13. **تواصل بدقة** صف العلاقة بين الأس النسبي وجذر العدد x .

14. **فكر وثابر في الحل** تمثل الدالة $d(t) = 9.8t^2$ المسافة التي

يقطعها جسم، بالأمطار، أثناء سقوطه في t ثانية.

ما الزمن الذي تستغرقه صخرة عند سقوطها من ارتفاع

300 m ؟ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.

تدرب وحل مسائل

في التمارين 15-18، ما الصيغة الجذرية المبسطة لكل مقدار؟

15. $\sqrt{x^6 y^4} \cdot \sqrt{x^8 y^6}$

16. $\sqrt[3]{\frac{243m^4}{3m}}$

17. $\sqrt[3]{5x^4} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{25x^3}$

18. $\sqrt{\frac{98a^{10}}{2a^4}}$

في التمارين 19-22، اضرب المقدارين.

19. $(\sqrt{n} - \sqrt{7})(\sqrt{n} + 3\sqrt{7})$

20. $(9x + \sqrt{2})(9x + \sqrt{2})$

21. $(5\sqrt{3} + 6)(5\sqrt{3} - 6)$

22. $\sqrt[3]{4}(6\sqrt[3]{2} - 1)$

في التمارين 23-26، كيف يمكنك إعادة كتابة كل مقدار نسبي

بحيث لا تبقى أي جذور في المقام؟

23. $\frac{6}{1 + \sqrt{2}}$

24. $\frac{5}{2 - \sqrt{5}}$

25. $\frac{4 + \sqrt{6}}{3 - 3\sqrt{6}}$

26. $\frac{-9x}{\sqrt{x}}$

27. **حل الخطأ** صف الخطأ الذي حدث عند إعادة كتابة المقدار

$$5\sqrt{18} - \sqrt{27} = 7\sqrt{2}$$

28. **بزر منطقيًا** تبلغ أبعاد جدار مستطيل $\sqrt{240}$ m

و $\sqrt{50}$ m وترغب في طلائه مرتين لتغطية المساحة كلها

بطبقتين من الطلاء. إذا كانت كل علبة من الطلاء يمكن أن

تغطي 60 m^2 ، فكم علبة من الطلاء ستحتاج؟

مراجعة سريعة

لتبسيط المقادير الجذرية، ابحث عن العوامل التي تمثل عوامل القوة النونية الكاملة.

يمكن استعمال خاصية ناتج ضرب الجذور وخاصية ناتج قسمة الجذور لإعادة كتابة المقادير الجذرية.

خاصية ناتج ضرب الجذور $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

خاصية ناتج قسمة الجذور $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

تابع الدرس 5-2

مثال

كيف تكتب $\sqrt[4]{64} \times \sqrt[4]{2}$ بالصيغة الجذرية المبسطة؟

$$\sqrt[4]{64} \times \sqrt[4]{2}$$

اكتب العبارة الأصلية

$$= \sqrt[4]{64 \times 2}$$

استعمل خاصية ناتج الضرب للجذور

$$= \sqrt[4]{128}$$

اضرب

$$= \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{8}$$

أعد الكتابة باستعمال خاصية ناتج الضرب للجذور

$$= 2\sqrt[4]{8}$$

بسط

مراجعة سريعة

إذا كان الجذر النوني للعدد a عددا حقيقيا، وكان m عددا حقيقيا، فإن $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ و $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

خاصية قوة القوة: $(a^m)^n = a^{mn}$

خاصية قوة ناتج الضرب: $(a \cdot b)^m = a^m b^m$

خاصية ناتج ضرب القوى: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

خاصية ناتج قسمة القوى: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$

مثال

كيف يمكنك استعمال خاصية قوة القوة لحل المعادلة

$$64^{x-3} = 16^{2x-1}$$

أعد كتابة المعادلة بحيث يكون لكلا المقدارين نفس الأساس.

$$64^{x-3} = 16^{2x-1}$$

$$(2^6)^{x-3} = (2^4)^{2x-1}$$

$$2^{6x-18} = 2^{8x-4}$$

$$6x - 18 = 8x - 4$$

$$-18 = 2x - 4$$

$$-14 = 2x$$

$$-7 = x$$

إذن، الحل هو $x = -7$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 29 و 30، اكتب الجذور باستعمال أسس نسبية.

29. $\sqrt{8}$

30. $\sqrt[3]{12}$

في التمرينين 31 و 32، حل المعادلة.

31. $(6^{\frac{x}{2}})(6^{\frac{x}{3}}) = 6^6$

32. $36^{(4x-1)} = 6^{(x+2)}$

33. **فكر وتأبر في الحل** صف طريقتين للتعبير عن طول ضلع

مكعب حجمه 64 cm^3

34. **نمذج** استعمل الأسس النسبية للتعبير عن العلاقة بين قيمتي

جائزتين، بالريال، في مسابقة.

القيمة	الجائزة
QR 1 024	دراجة
QR 262 144	سيارة فارهة

السؤال الأساس ؟

ما علاقة الأشكال المتكونة نتيجة قطع مستقيم أو أكثر لدائرة، بكل من نصف قطر الدائرة ومحيطها ومساحتها ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 6-1 Arcs and Sectors
- 6-2 Lines Tangent to a Circle
- 6-3 Chords
- 6-4 Inscribed Angles
- 6-5 Secant Lines and Segments

- 6-1 الأقواس والقطاعات الدائرية
- 6-2 مماسات الدائرة
- 6-3 أوتار الدائرة
- 6-4 الزوايا المحيطة
- 6-5 الأوتار المتقاطعة

Topic Vocabulary

- central angle
- intercepted arc
- minor arc
- major arc
- arc length
- radian
- sector of a circle
- segment of a circle
- tangent to a circle
- point of tangency
- chord
- inscribed angle
- secant

مصطلحات الوحدة

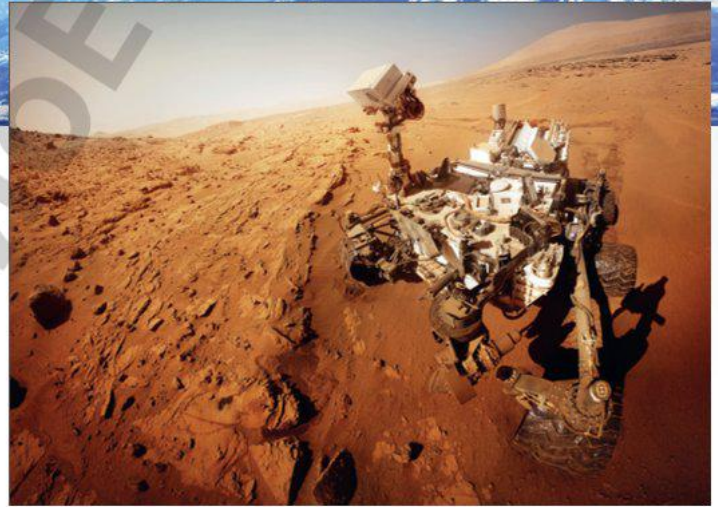
- زاوية مركزية
- قوس محصور
- القوس الأصغر
- القوس الأكبر
- طول القوس
- راديان
- قطاع دائري
- قطعة دائرية
- مماس الدائرة
- نقطة التماس
- وتر
- الزاوية المحيطية
- القاطع

هل تعلم؟

يعيش ستة رواد فضاء ويعملون معًا في محطة الفضاء الدولية (ISS) منذ عام 2000. زار سكان **17 دولة** محطة الفضاء الدولية (ISS).



تدور محطة الفضاء الدولية (ISS)، التي بحجم ملعب كرة القدم، دورة كاملة حول الأرض كل 90 دقيقة **على ارتفاع 248 ميلًا** وبسرعة **17 500 mph** تقريبًا.

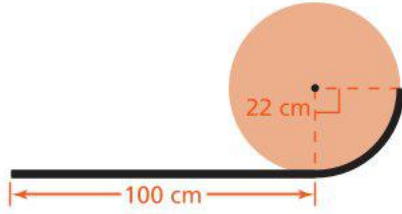


عندما يكون كوكب المريخ في أقرب موقع له من الأرض، فإن البعد بينهما يساوي **150 ضعف** مسافة بُعد الأرض عن القمر. وبالرغم من هذه المسافة، تمكنت كل من الولايات المتحدة وروسيا منذ عدة عقود من إرسال مركبات فضائية وأجهزة علمية هبطت على سطح كوكب المريخ.

مهمتك: تصميم مدن فضائية

افتراض أنك انتقلت 500 عام في المستقبل. تسافر المحطات الفضائية التي بحجم مدن صغيرة عبر الفضاء. استعمل هندسة الدائرة لحساب قياسات محطتين من هذه المحطات، ثم صمّم مجموعة من ثلاث "مدن فضائية" وقم بقياسها ووصفها.

تريد عائشة أن تصنع الشكل المبين أدناه، فأخذت سلكًا معدنيًا وقامت بثني أحد طرفيه باستعمال قرص دائري.



A. أوجد طول السلك المعدني الذي تحتاج إليه عائشة لتصنع هذا الشكل. وضح إجابتك.

B. **ابن الحجج الرياضية** في رأيك، ما المعلومات التي تحتاج إليها عائشة لإيجاد طول جزء من محيط دائرة؟ وضح إجابتك.

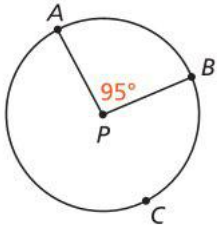
ما العلاقة التي تربط بين طول قوس ومساحة قطاع دائري وبين محيط دائرة ومساحتها؟

السؤال الأساس

العلاقة بين الزوايا المركزية وقياسات الأقواس

مثال 1

أوجد $m\widehat{ACB}$ و $m\widehat{AB}$.



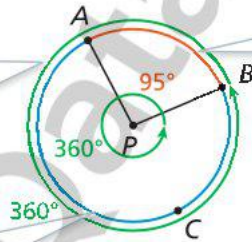
الزاوية المركزية في دائرة هي زاوية تتكوّن بواسطة نصفي قطر ورأسها في مركز الدائرة. الزاوية APB هي زاوية مركزية.

تُنشئ الزاوية المركزية قوسين محصورين. **القوس المحصور** هو الجزء من الدائرة الذي يقع بين قطعتين مستقيمتين، أو شعاعين، أو مستقيمين يتقاطعان مع الدائرة.

قياس الزاوية المركزية في دائرة يساوي قياس القوس المقابل لها من هذه الدائرة.

$\angle APB$ زاوية مركزية و $\widehat{AB}$ هو القوس المقابل لها.

القوس الأكبر في دائرة هو قوس أكبر من نصف دائرة. $\widehat{ACB}$ قوس أكبر.



القوس الأصغر في دائرة هو قوس أصغر من نصف دائرة. $\widehat{AB}$ قوس أصغر.

أوجد $m\widehat{AB}$.

$$m\widehat{AB} = m\angle APB = 95^\circ$$

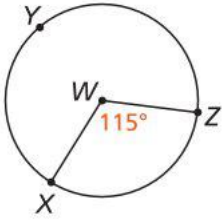
أوجد $m\widehat{ACB}$.

$$m\widehat{ACB} = 360^\circ - 95^\circ = 265^\circ$$

قياس $\widehat{AB}$ بالدرجات يساوي قياس الزاوية المركزية $\angle APB$ المقابلة له.

نصيحة دراسية

تذكر أن قياس القوس الأصغر أصغر من 180° وقياس القوس الأكبر أكبر من 180° .



1. حاول أن تحل! استعمال $\odot W$ للإجابة عن الأسئلة التالية.

a. أوجد $m\widehat{XZ}$.

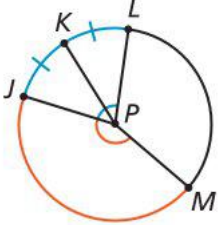
b. أوجد $m\widehat{XYZ}$.

المفهوم قياس القوس

قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له.

$$m\widehat{JM} = m\angle JPM$$

الزوايا المركزية المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة، والأقواس المتطابقة تقابل زوايا مركزية متطابقة.



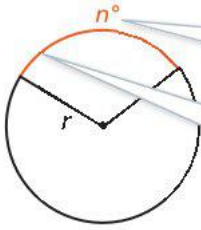
$$\angle JPK \cong \angle LPL$$

$$\widehat{JK} \cong \widehat{LM}$$

العلاقة بين طول قوس ومحيط الدائرة

مثال 2

A. كيف تجد طول قوس S من دائرة إذا كان قياسه معطى بالدرجات؟



قياس القوس هو كسر من 360°

طول القوس هو جزء من محيط الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{360^\circ}$$

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{n}{360}$$

$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

استعمل التناسب لتمثيل العلاقة بين طول القوس S وطول نصف قطر الدائرة r وقياس القوس n بالدرجات.

إذن، صيغة إيجاد طول قوس S من دائرة إذا كان قياسه معطى بالدرجات n° هي:

$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

B. كيف تجد طول قوس S من دائرة إذا كان قياسه معطى بالراديان؟

بالإضافة إلى الدرجات، يمكن التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان.



الراديان (القياس الدائري) هو قياس زاوية مركزية

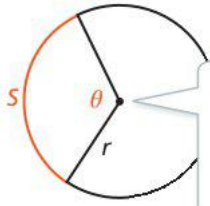
تقابل قوس دائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة.

الاستيعاب المفاهيمي

إرشاد

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$
حيث r هو نصف قطر الدائرة.

يتبع في الصفحة التالية



المحيط يساوي $2\pi r$ ، والذي يعني 2π قوساً طول كل منها r .
بما أن كل قوس طوله r يناظر 1 راديان،
إذن هناك 2π راديان في الدائرة.
إذن، 2π راديان يكافئ 360° ، لإيجاد طول
قوس من دائرة، استعمل التناسب التالي:

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس (بالراديان)}}{2\pi}$$

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$S = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r = \theta r$$

طول القوس S يتناسب مع طول نصف
قطر الدائرة حيث θ هي ثابت التناسب.

إذن، لإيجاد طول قوس S من دائرة قياسه θ بالراديان نستخدم الصيغة $S = \theta r$.

نصيحة دراسية

تذكر أن محيط الدائرة هو طول الخط
المنحني، وأن طول القوس هو طول
جزء من هذا الخط.

2. a. في دائرة طول نصف قطرها 4، أوجد طول قوس قياسه 80° ،

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

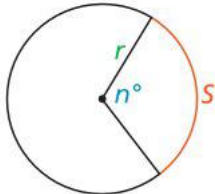
b. في دائرة طول نصف قطرها 6، أوجد طول قوس قياسه π راديان.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

المفهوم طول قوس من دائرة

طول قوس S من دائرة يساوي ناتج ضرب النسبة
بين قياس زاويته المركزية n بالدرجات إلى 360°
في محيط الدائرة $2\pi r$

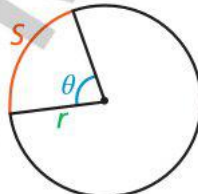
قياس زاوية مركزية بالدرجات



$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

طول قوس S من دائرة يساوي ناتج ضرب قياس زاويته
المركزية θ بالراديان في طول نصف قطر الدائرة r .

قياس زاوية مركزية بالراديان

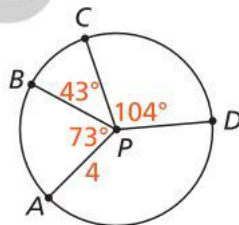


$$S = \theta r$$

تطبيق طول القوس

مثال 3

في الشكل أدناه، أوجد طول $\widehat{AD}$. عر عن إجابتك بدلالة π .



يتبع في الصفحة التالية

الخطوة 1 أوجد قياس القوس $\widehat{AD}$ بالدرجات

$$m\widehat{AD} = 360^\circ - m\widehat{AB} - m\widehat{BC} - m\widehat{CD}$$

$$= 360^\circ - 73^\circ - 43^\circ - 104^\circ$$

$$= 140^\circ$$

قياس كل قوس مساو لقياس الزاوية المركزية المقابلة له.

إذن، قياس $\widehat{AD}$ هو 140°

الخطوة 2 أوجد طول القوس $\widehat{AD}$

$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

استعمل صيغة طول القوس للزوايا المعطاة بالدرجات.

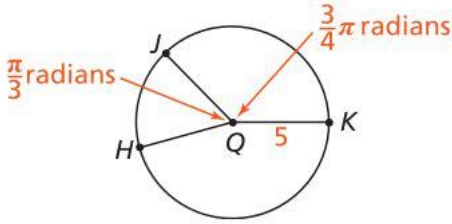
$$S = \frac{140}{360} \times 2\pi(4)$$

$$S = \frac{28}{9} \pi$$

إذن، طول القوس $\widehat{AD}$ هو $\frac{28}{9} \pi$

فكر وثابر في الحل

فكر جيدًا متى يجب أن تعتبر عن طول القوس بدلالة π ، ومتى تعطي إجابة تقريبية لهذا الطول. كيف تفكر ذلك؟

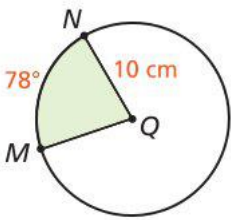
حاول أن تحل! 3. استعمل $\odot Q$. عثر عن إجابتك بدلالة π .

a. أوجد طول $\widehat{JK}$

b. أوجد طول القوس الأصغر $\widehat{HK}$.

مثال 4 العلاقة بين مساحة دائرة ومساحة قطاع دائري منها

مثال 4



القطاع الدائري هو المنطقة المحصورة بين نصفي قطري دائرة والقوس المقابل للزاوية المكوّنة من نصفي القطرين.

أوجد مساحة القطاع الدائري MQN .

لإيجاد مساحة القطاع الدائري، أوجد $\frac{78}{360}$ من مساحة الدائرة.

$$A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{78}{360} \times \pi (10)^2$$

$$= \frac{65}{3} \pi$$

بشكل عام، مساحة القطاع الدائري هي $A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$ ، حيث يمثل n° قياس القوس المقابل ويمثل r نصف قطر الدائرة.

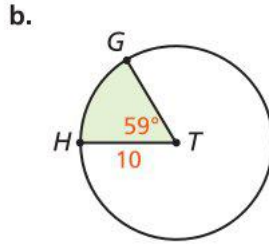
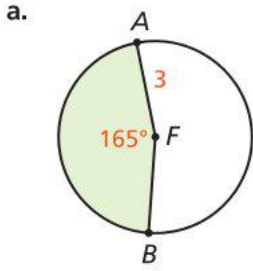
إذن، مساحة القطاع الدائري MQN تساوي $\frac{65}{3} \pi \text{ cm}^2$

عقم

قارن بين صيغة طول القوس وصيغة مساحة القطاع الدائري. ما العلاقة بينهما وبين قياس قوس معطى؟

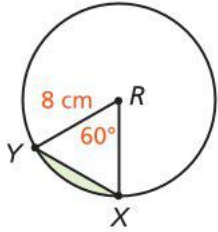
يتبع في الصفحة التالية

4. حاول أن تحل! أوجد مساحة كل قطاع دائري أدناه.



إيجاد مساحة القطعة الدائرية

مثال 5



القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محصور بين قوس والقطعة المستقيمة التي تصل بين نهايتيه.

ما مساحة المنطقة المظللة؟

لإيجاد مساحة القطعة الدائرية، اطرح مساحة المثلث من مساحة القطاع الدائري.

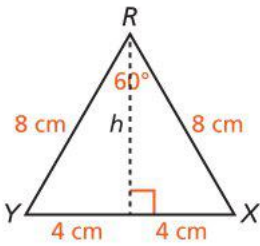
الخطوة 1 أوجد مساحة القطاع الدائري.

$$A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{60}{360} \times \pi (8)^2$$

$$= \frac{32}{3} \pi$$

استعمل صيغة مساحة القطاع الدائري.



الخطوة 2 أوجد مساحة المثلث.

بما أن $\overline{RY}$ و $\overline{RX}$ نصف قطر والزاوية الواقعة بينهما قياسها 60° ، فإن $\triangle RYX$ متطابق الأضلاع.

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد h .

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}(8)(4\sqrt{3})$$

$$= 16\sqrt{3}$$

$$4^2 + h^2 = 8^2$$

$$h^2 = 8^2 - 4^2$$

$$h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

الخطوة 3 أوجد مساحة القطعة الدائرية.

مساحة القطعة الدائرية A_{seg} = مساحة القطاع الدائري A_{sec} - مساحة المثلث A_t

$$A_{seg} = A_{sec} - A_t$$

$$= \frac{32}{3} \pi - 16\sqrt{3}$$

$$\approx 5.8$$

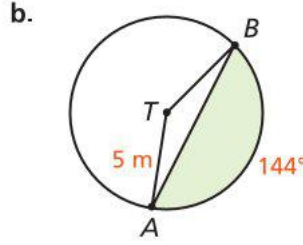
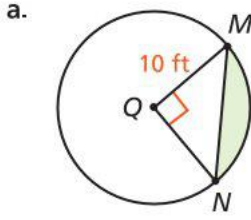
إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي 5.8 cm^2 تقريبًا.

نصيحة دراسية

لإيجاد مساحة مثلث داخل دائرة، قد تحتاج إلى تطبيق النسب المثلثية لإيجاد ارتفاع المثلث وطول قاعدته.

يتبع في الصفحة التالية

5. حاول أن تحل! أوجد مساحة كل قطعة دائرية في كل مما يلي:

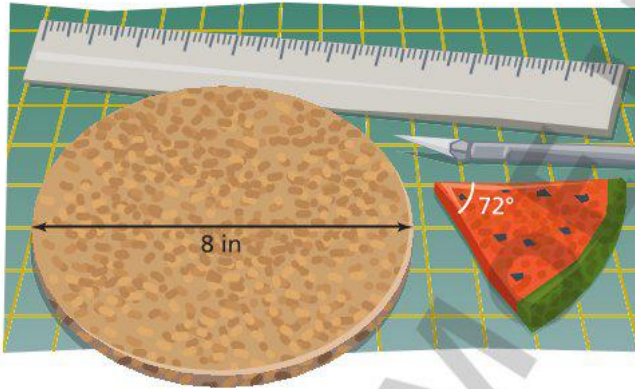


حل مسائل من واقع الحياة

مثال 6

تطبيق

يستخدم أحمد لوحات دائرية من الفلين ليصنع منها 18 قاعدة حماية على شكل شريحة من البطيخ ليبيعها في معرض للأشغال الحرفية.



خطأ شائع

تجنب استعمال صيغة طول القوس عند استعمال صيغة مساحة القطاع الدائري. تذكر دائماً أن مساحة القطاع الدائري تتناسب مع مساحة الدائرة، وأن طول القوس يتناسب مع محيط الدائرة.

A. استعمال أحمد طلاءً خاصاً لطلاء الوجه العلوي لقاعدة الحماية. إذا كان وعاء من الطلاء يكفي لطلاء 200 in^2 ، فهل يكفي وعاء واحد لطلاء كافة قواعد الحماية؟

أوجد مساحة قاعدة حماية واحدة باستعمال صيغة مساحة القطاع الدائري. عوض 3.14 عن π .

$$A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$$

استعمل صيغة مساحة القطاع الدائري

$$= \frac{72}{360} \times \pi (4)^2$$

$$\approx 10$$

مساحة قاعدة حماية واحدة تساوي 10 in^2 تقريباً.

يستطيع أحمد طلاء $200 \div 10 = 20$ أي 20 قاعدة حماية باستعمال وعاء واحد من الطلاء، وبالتالي لديه من الطلاء ما يكفي لطلاء 18 قاعدة حماية.

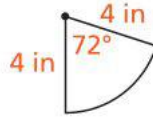
B. يريد أحمد وضع شريط زخرفة حول حواف كل قاعدة حماية.

أوجد طول الشريط الذي يحتاج إليه لكل قاعدة حماية؟

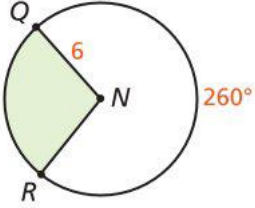
محيط قاعدة الحماية يتألف من طول نصف قطر وطول قوس.

يتبع في الصفحة التالية

$$\begin{aligned}
 P &= r + r + \frac{n}{360} \times 2\pi r \\
 &= 4 + 4 + \frac{72}{360} \times 2\pi(4) \\
 &\approx 13
 \end{aligned}$$



يحتاج أحمد إلى 13 in تقريبًا من الشريط المزخرف لكل قاعدة حماية.



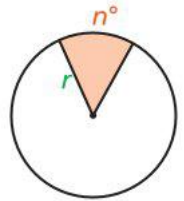
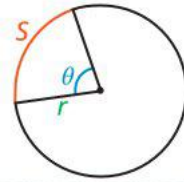
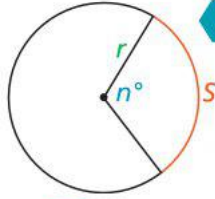
6. **حاول أن تحل!** ما مساحة القطاع الدائري QNR وما محيطه؟
قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

لفظيًا

طول القوس S

طول القوس هو جزء من محيط الدائرة.

بمخطط



القطاع الدائري

هو المنطقة المحصورة بين نصفي قطري دائرة والقوس المقابل للزاوية المركزية المكوّنة من نصفي القطرين.

القطعة الدائرية

هي جزء من الدائرة محصور بين قوس والقطعة المستقيمة التي تصل بين نهايته.

جبريًا

قياس الزاوية بالدرجات

$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

قياس الزاوية بالراديان

$$S = \theta r$$

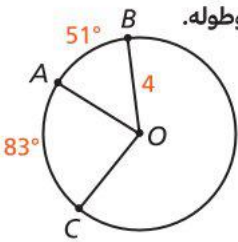
$$A = \frac{n}{360} \times \pi r^2$$

مساحة القطعة الدائرية A_{seg}

= مساحة القطاع الدائري A_{sec} - مساحة المثلث A_t

طبّق فهمك

عبر عن فهمك

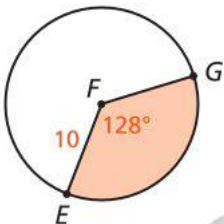


في التمرينين 5 و 6، أوجد قياس كل قوس وطوله.
عبر عن إجابتك بدلالة π .

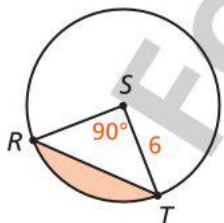
5. $\widehat{BC}$

6. $\widehat{ABC}$

7. $\odot P$ طول نصف قطرها 8، و Q و R نقطتان تقعان على هذه الدائرة. إذا كان طول $\widehat{QR}$ يساوي 4π ، أوجد $\angle QPR$ بالراديان.



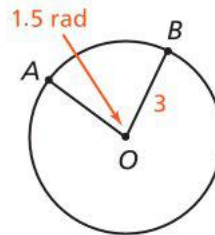
8. أوجد مساحة القطاع الدائري EFG .
عبر عن إجابتك بدلالة π .



9. أوجد مساحة القطعة الدائرية المظللة.
عبر عن إجابتك بدلالة π .

1. السؤال الأساس ؟ ما العلاقة التي تربط بين طول قوس ومساحة قطاع دائري وبين محيط دائرة ومساحتها ؟

2. حلّل الخطأ طلب من صالح إيجاد طول $\widehat{AB}$.
أوجد خطأ صالح وصححه.



$$S = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

$$S = \frac{1.5}{360} \times 2\pi(3) \approx 0.0785$$

X

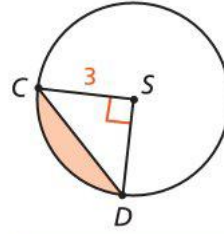
3. المصطلحات كيف يمكن أن تساعدك كلمة "قطعة" على تذكّر معنى قطعة دائرية من دائرة ؟

4. بزر منطقياً تقول سلمى إن بإمكانها إيجاد مساحة ربع دائرة باستعمال الصيغة $A = \frac{1}{4} \pi r^2$.

استعمل صيغة مساحة القطاع الدائري لإيضاح أن ما قالته سلمى صحيح.

10. **عقم** هل صحيح دائمًا أن قوسين لهما نفس الطول لهما أيضًا نفس القياس؟ وضح إجابتك.

11. **حلل الخطأ** طُلب من راشد أن يحسب مساحة المنطقة المظللة. أوجد خطأ راشد وضح.



مساحة القطعة الدائرية A_{seg}

مساحة القطاع الدائري A_{sec} - مساحة المثلث A_t

$$A_{seg} = A_{sec} - A_t$$

$$= \frac{90}{360} \times 2\pi(3) - \frac{1}{2}(3)(3) \approx 0.21$$

X

12. **روابط في الرياضيات** تمثل المعادلة

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

معادلة $\odot P$ إذا كانت

$X(-1, -1)$ و $Y(-2, 6)$ نقطتان تقعان على هذه الدائرة.

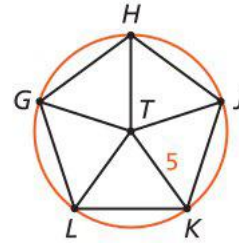
أوجد $m\widehat{XY}$. وضح كيف عرفت الإجابة.

13. **بزر منطقيًا** الشكل $GHJKL$ هو خماسي منتظم. بالتقريب إلى

أقرب جزء من عشرة، ما النسبة من مساحة $\odot T$ التي ليست جزءًا

من مساحة $GHJKL$ (أي التي تقع بين الدائرة والخماسي)؟

وضح إجابتك.



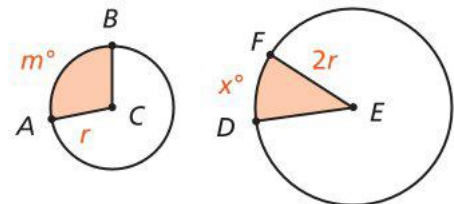
14. **استعمل البنية** وضح سبب كون طول قوس قياسه a° متناسبًا مع

طول نصف قطر هذه الدائرة.

15. **مهارات التفكير العليا** في الشكل أدناه، إذا كانت مساحة القطاع

الدائري ACB تساوي مساحة القطاع الدائري DEF ،

فعبّر عن x بدلالة m . بّين طريقة عملك.



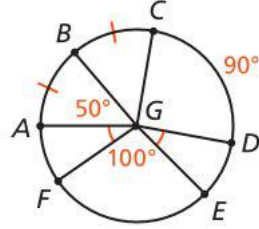
في التمارين 16-19، أوجد قياس القوس. انظر المثال 1

16. $m\widehat{FE}$

17. $m\widehat{BC}$

18. $m\widehat{CE}$

19. $m\widehat{CFE}$

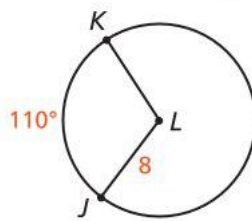
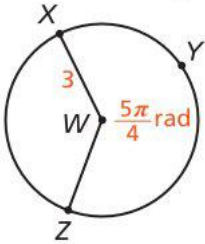


في التمرينين 20 و 21، أوجد طول القوس بدلالة π .

انظر المثالين 2 و 3

21. طول $\widehat{XYZ}$

20. طول $\widehat{JK}$

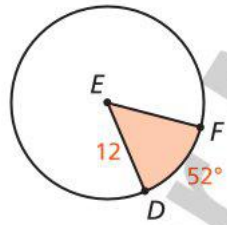
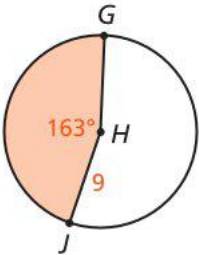


في التمرينين 22 و 23، أوجد مساحة القطاع الدائري. قُرب إجابتك

إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثالين 4 و 6

23. القطاع الدائري GHJ

22. القطاع الدائري DEF

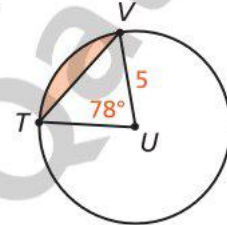
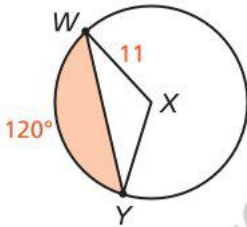


في التمرينين 24 و 25، أوجد مساحة القطعة الدائرية.

قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. انظر المثال 5

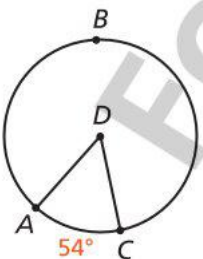
24.

25.

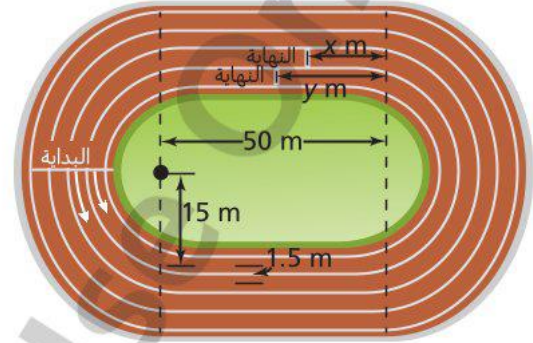


26. طول $\widehat{ABC}$ يساوي 110 ft، أوجد طول نصف قطر $\odot D$.

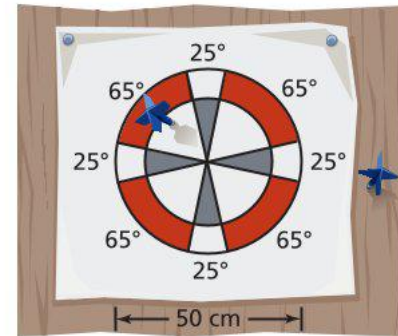
قُرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



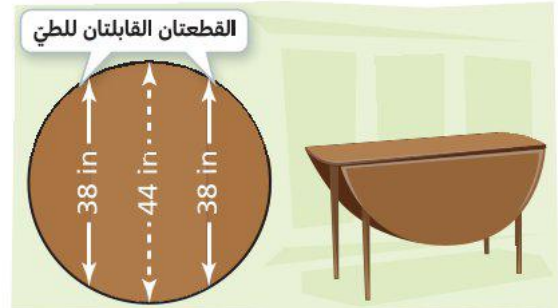
27. **فكر وثابر في الحل** يركض كل من خالد ويوسف مسافة 150 m في مسارين مختلفين داخل حلبة الركض، لذلك يجب وضع علامتي النهاية بشكل صحيح. ما قيمة كل من x و y ؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



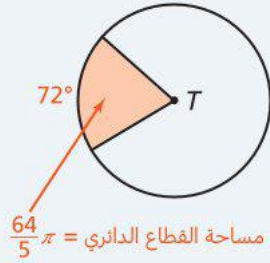
28. **بزر منطقيًا** تريد جواهر وضع تصميم للوحة لعبة السهام على أن تشكل الأجزاء الملونة بالأحمر 25% من المساحة الكلية. كم يجب أن يكون طول نصف قطر الدائرة الداخلية ؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



29. **مهارات التفكير العليا** يريد أحمد أن يبيع طاولة مستديرة الشكل مكونة من ثلاثة أجزاء، الجزء الأوسط مع القوائم الأربع تمثل الجزء الثابت من الطاولة وعلى جانبيه قطعتان نصف دائريتين متطابقتان وقابلتان للطي (انظر الصورة). أوجد مساحة الجزء الأوسط من الطاولة. قَرِّب إجابتك إلى أقرب إنش مربع. وضح كيف توصلت إلى الإجابة.



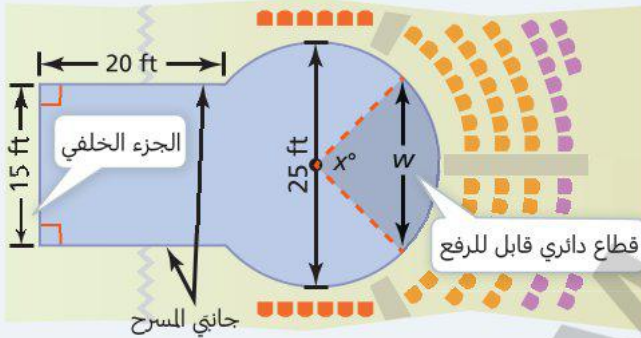
30. أوجد طول قطر T .



31. **اختبار SAT/ACT** إذا كان طول قوس 6π وقياس زاويته المركزية $\frac{2}{5}\pi$ ، فإن محيط الدائرة يساوي:

(A) 12π (B) 15π (C) 30π (D) 36π

32. **مهمة أدائية** يبني نجار مسرحًا من أجل عرض فني.



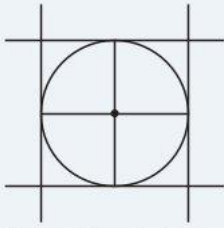
- الجزء A ما المساحة الكلية للألواح الخشب اللازمة لتغطية أرضية المسرح ؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب قدم مربع. وضح كيف توصلت إلى الإجابة.

- الجزء B إذا أراد النجار تعليق حبل مصابيح على جانبي المسرح وفي الجزء الأمامي. ما إجمالي طول حبل المصابيح اللازم ؟ وضح إجابتك.

- الجزء C يمكن رفع جزء من المسرح أثناء الحفل. تستطيع الرافعة رفع مساحة أقصاها 180 ft^2 ، لكن الفرقة تريد أن يكون العرض w للمساحة المرفوعة 20 ft على الأقل. ماذا يمكن أن تكون قيمة x ؟ وضح إجابتك.

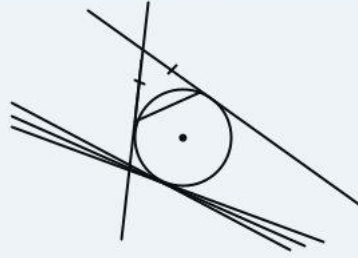
وضعت فاطمة وسمر تخمينات لتحديد المستقيمات التي تتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط.

سمر



- يتقاطع المستقيمان المتوازيان مع الدائرة عند الطرفين المتقابلين لنفس القطر.
- كل مستقيم يتقاطع مع الدائرة عند نقطة واحدة يكون متعامدًا مع قطر الدائرة.

فاطمة



- تتقاطع مستقيمات كثيرة مع الدائرة في نقطة واحدة تنتمي للدائرة.
- يكون المستقيمان اللذان يقطع كل منهما الدائرة في نقطة واحدة مع القطعة المستقيمة التي تصل بين هاتين النقطتين مثلثًا متطابق الضلعين.

أستطيع... استعمال خصائص مماسات الدائرة لحل المسائل.

معايير الدرس

10.6.3 و 10.6.4

المصطلحات

- مماس الدائرة
- tangent to a circle
- نقطة التماس
- point of tangency

A. **استعمل الأدوات المناسبة** مع أي من التخمينات الأربعة تتفق؟ مع أي منها لا تتفق؟ أنشئ رسوماً تدعم إجابتك.

B. أي تخمينات أخرى يمكن أن تضعها حول المستقيمات التي يقطع كل منها الدائرة في نقطة واحدة؟

ما العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة عند نقطة التماس؟

السؤال الأساس

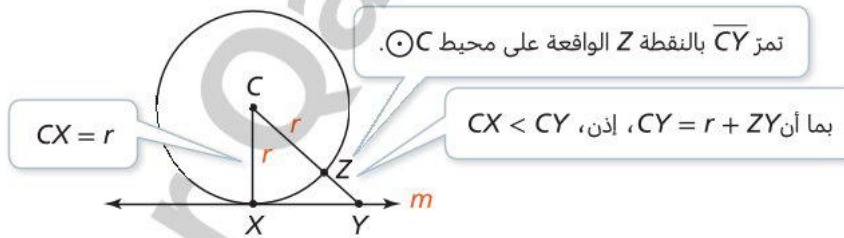
مثال 1

فهم مماسات الدائرة

ما العلاقة بين دائرة ومماسها؟

مماس الدائرة هو مستقيم في مستوى الدائرة يتقاطع معها عند نقطة واحدة فقط. تُسمى هذه النقطة **نقطة التماس**.

للدائرة C مماس m يحتوي نقطة التماس X. النقطة Y هي أي نقطة أخرى على m.



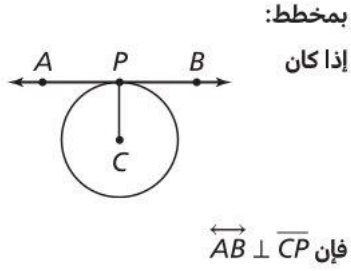
$\overline{CX}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من مركز C إلى المستقيم m. وبما أن أقصر قطعة مستقيمة من النقطة إلى مستقيم تكون متعامدة مع هذا المستقيم، فإن $\overline{CX} \perp m$.

عقم

تمثل النقطة Y أي نقطة بخلاف نقطة التماس. هل ستكون النتيجة صحيحة بغض النظر عن موقع النقطة Y على المستقيم m؟

1. **حاول أن تحل!** هل يدعم المثال 1 تخمين سمر بأن المستقيمين المتوازيين يتقاطعان مع الدائرة عند الطرفين المتقابلين لنفس القطر؟ وضح إجابتك.

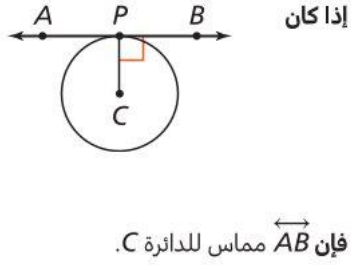
النظرية 6-1 وعكسها



لفظيًا:

النظرية

إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًا للدائرة C عند P ،
فإن $\overleftrightarrow{AB}$ يكون عموديًا على $\overline{CP}$.



عكسها

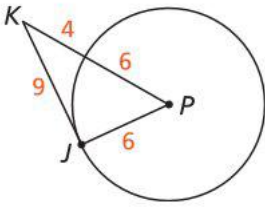
إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عموديًا على نصف القطر $\overline{CP}$ عند P ،
حيث P تقع على C فإن $\overleftrightarrow{AB}$ يكون مماسًا
للدائرة C .

البرهان: انظر التمرينين 12 و 13

استعمال المماسات لحل المسائل

مثال 2

A. هل $\overline{KJ}$ مماس للدائرة P عند J ؟



إذا تقاطعت قطعة مستقيمة (أو شعاع) مع دائرة في نقطة واحدة،
وكانت جزءًا من مماس، فإنها تكون مماسًا للدائرة.

إذا كانت $\overline{KJ}$ جزءًا من المستقيم الذي هو مماس للدائرة P عند J ،
فإن $\overline{PJ} \perp \overline{JK}$ و $\triangle PJK$ قائم الزاوية في J .

استعمل عكس نظرية فيثاغورس

لتحديد ما إذا كان $\triangle PJK$ قائم الزاوية.

$$9^2 + 6^2 \stackrel{?}{=} (4 + 6)^2$$

$$117 \neq 100$$

إذن، $\overline{PJ}$ ليس متعامدًا مع $\overline{KJ}$.

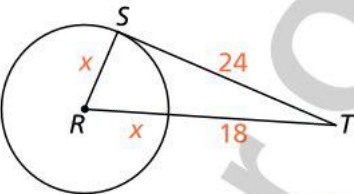
وبالتالي فإن $\overline{KJ}$ ليس مماسًا للدائرة P عند J .

B. إذا كانت القطعة المستقيمة ST مماسًا للدائرة R .

فأوجد طول نصف قطر للدائرة R .

بما أن $\overline{ST}$ مماس للدائرة R عند S .

فإن $\triangle RST$ قائم الزاوية في S .



$$x^2 + 24^2 = (x + 18)^2$$

$$x^2 + 576 = x^2 + 36x + 324$$

$$252 = 36x$$

$$7 = x$$

استعمل نظرية فيثاغورس مع طول الوتر $x + 18$

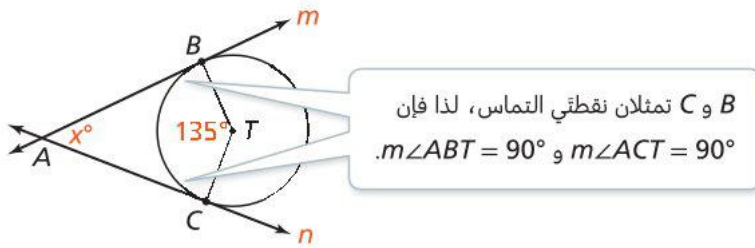
خطأ شائع

قد تخطئ بتربيع الحدين x و 18
فقط. تذكر طريقة تربيع ثنائية الحد.
من المفيد أن تكتب $(x + 18)^2$ في
الصورة $(x + 18)(x + 18)$ أولاً،
ثم تُجري عملية الضرب.

إذن، طول نصف قطر R يساوي 7

يتبع في الصفحة التالية

C. في الشكل المجاور، المستقيم m مماس للدائرة T عند B ، والمستقيم n مماس للدائرة T عند C .
أوجد قيمة x .



استعمل نظرية مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي لإيجاد قيمة X .

$$m\angle BAC + m\angle ACT + m\angle CTB + m\angle TBA = 360^\circ$$

$$x^\circ + 90^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

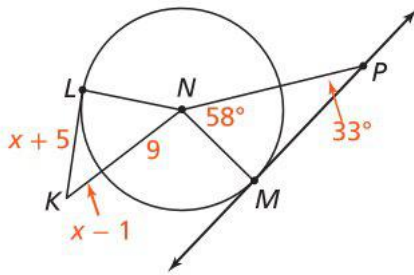
$$x^\circ = 45^\circ$$

إذن، قيمة x هي 45

نصيحة دراسية

تذكر أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع محدب هو $180^\circ(n - 2)$ ، حيث n عدد أضلاع المضلع.

حاول أن تحل! 2. استعمل $\odot N$ للإجابة عن الأسئلة التالية:



a. هل $\overleftrightarrow{MP}$ مماس للدائرة N ؟

وضّح إجابتك.

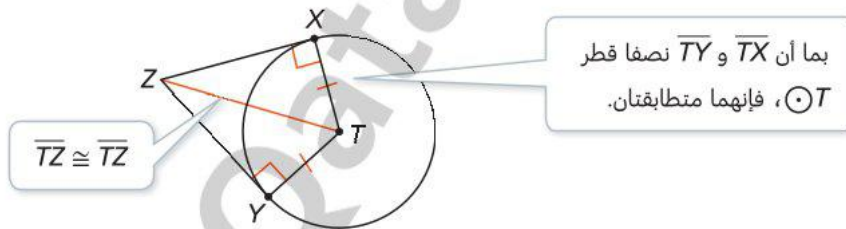
b. إذا كان $\overline{LK}$ مماسًا للدائرة N عند L ،

أوجد طول $\overline{KN}$.

مثال 3

إيجاد أطوال القطع المستقيمة المماسية لدائرة

ما العلاقة بين $\overline{XZ}$ و $\overline{YZ}$ ؟



ووفقاً لنظرية تطابق المثلثات بوتير (ضلع مشترك) وضلع قائمة (HRL)، فإن $\triangle TXZ \cong \triangle TYZ$ ،
لذا فإن $\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$ بحسب تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة.

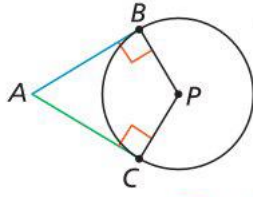
3. إذا كان $TX = 12$ و $TZ = 20$ ، فأوجد XZ و YZ . **حاول أن تحل!**

النظرية 2-6 نظرية القطع المستقيمة المماسية للدائرة

لفظيًا:

القطعتان المستقيمتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

بمخطط:



فإن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

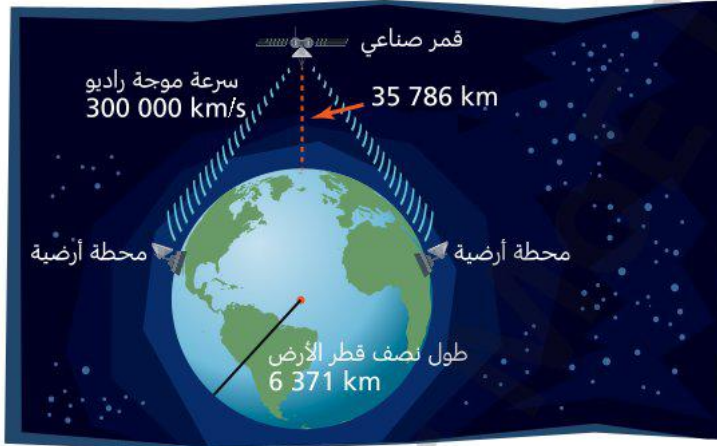
البرهان: انظر التمرين 14

تطبيق

مثال 4

إيجاد القياسات التي تتضمن خطوط المماس

تحتاج الأقمار الصناعية إلى خط رؤية للاتصال بالمحطات الأرضية. المحطتان الأرضيتان المبيتتان في الشكل أدناه هما الأكثر بُعدًا عن القمر الصناعي. أوجد الزمن اللازم لانتقال إشارة لاسلكية من إحدى المحطتين إلى القمر الصناعي ثم العودة إلى المحطة الأخرى.



المستقيمان من القمر الصناعي إلى المحطتين الأرضيتين الأكثر بُعدًا مماسان لسطح الأرض.

استعمل نظرية فيثاغورس لحساب المسافة بين القمر الصناعي وإحدى المحطتين الأرضيتين، ثم احسب الزمن الذي تستغرقه موجات الراديو لقطع ضعف هذه المسافة.

الخطوة 1 أوجد المسافة بين المحطتين الأرضيتين الأكثر بُعدًا والقمر الصناعي.



$$x^2 + 6\,371^2 = (6\,371 + 35\,786)^2$$

$$x^2 + 40\,589\,641 = 1\,777\,212\,649$$

$$x^2 = 1\,736\,623\,008$$

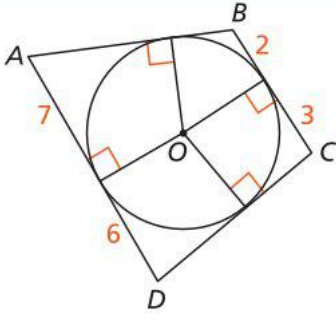
$$x \approx 41\,673$$

الخطوة 2 أوجد الزمن الذي تستغرقه موجات الراديو لقطع ضعف هذه المسافة.

$$(41\,673 \times 2) \text{ km} \div 300\,000 \text{ km/s} \approx 0.28 \text{ sec}$$

إذن، الزمن اللازم لانتقال إشارة من إحدى المحطتين الأرضيتين الأكثر بُعدًا إلى القمر الصناعي ثم العودة إلى المحطة الأرضية الأخرى هو 0.28 ثانية تقريبًا.

يتبع في الصفحة التالية



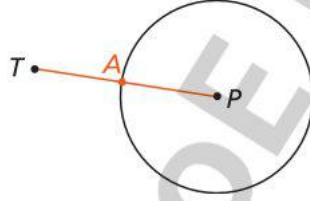
4. حاول أن تحل! يمثل الشكل الرباعي $ABCD$ حديقة خلفية لمنزل أحمد، الذي يريد تركيب مضخة ماء كهربائية فيها حيث أن النقطة O تكون على نفس المسافة من كل ضلع من أضلاع الحديقة. إذا كانت المسافة بين المضخة O والزاوية A 8.5 m ، احسب المسافة الثابتة بين المضخة وكل ضلع.

مثال 5

إنشاء خطوط المماس

كيف تُنشئ مماسًا للدائرة P مارًا بالنقطة T ؟

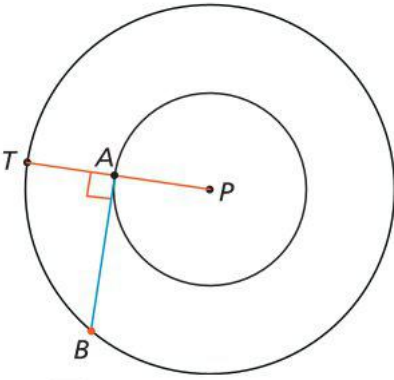
الخطوة 1 استعمل مسطرة لرسم $\overline{PT}$.
سمّ النقطة A حيث يتقاطع $\overline{PT}$ مع الدائرة.



خطأ شائع

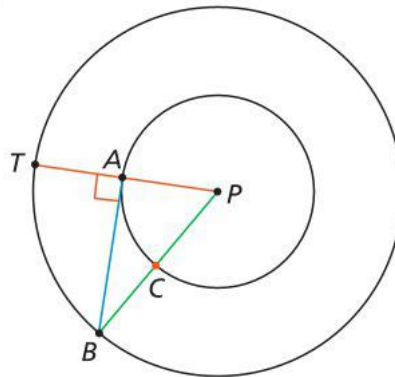
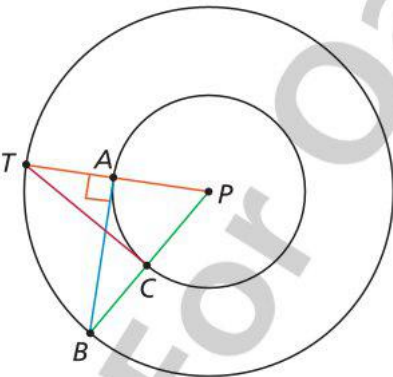
قد تعتقد أن A هي نقطة منتصف $\overline{PT}$. لكن إنشاء مستقيم عمودي هنا يختلف عن إنشاء عمود منصف للقطعة المستقيمة $\overline{PT}$.

الخطوة 2 استعمل الفرجار لإنشاء دائرة مركزها P وتمر بالنقطة T .
أنشئ مستقيمًا عموديًا على $\overline{PT}$ عند A . سمّ النقطة B حيث يتقاطع المستقيم العمودي مع الدائرة الخارجية.



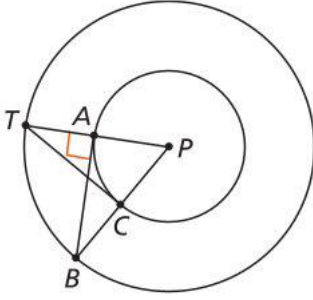
الخطوة 4 استعمل مسطرة لإنشاء $\overline{TC}$.

الخطوة 3 استعمل مسطرة لإنشاء $\overline{BP}$.
سمّ النقطة C حيث يتقاطع $\overline{BP}$ مع الدائرة الداخلية.



إذن، مماس الدائرة P المار بالنقطة T هو $\overline{TC}$.

يتبع في الصفحة التالية



5. **حاول أن تحل!** برهن أن $\overline{TC}$ مماس للدائرة P .

المعطيات: دائرتان مركزهما P ,

تقع النقطتان A و C على الدائرة

الصغيرة، والنقطتان B و T

على الدائرة الكبيرة، $\overline{AB} \perp \overline{PT}$.

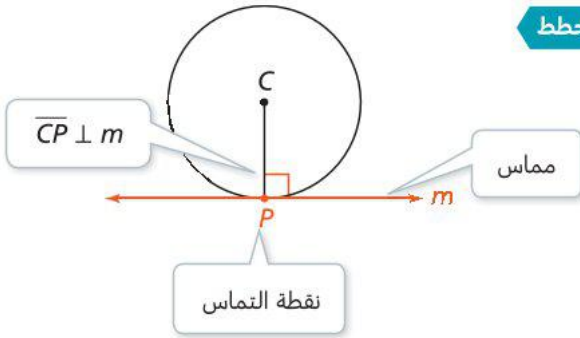
المطلوب: إثبات أن $\overline{TC}$ مماس للدائرة P

عند النقطة C .

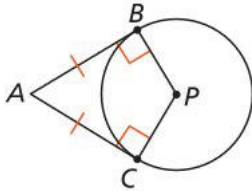
لفظيًا

- مماس الدائرة هو مستقيم يتقاطع معها في نقطة واحدة فقط.
- نصف القطر الذي يتضمن نقطة التماس يتعامد مع المماس.

بمخطط

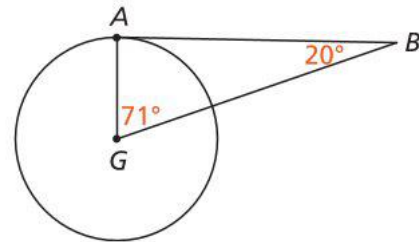


- القطعتان المستقيمتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

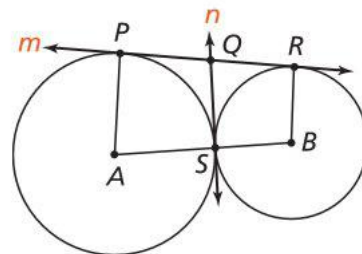


عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة عند نقطة التماس؟
2. حلّ الخطأ نظرت سعاد إلى الشكل المبين أدناه وقالت إن $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة G عند A لأنه يتقاطع معها عند A فقط. ما الخطأ الذي وقعت فيه سعاد؟

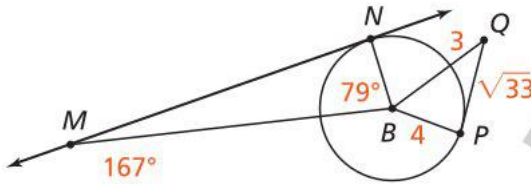


3. المصطلحات هل يمكن لأي نقطة تقع على الدائرة أن تكون نقطة تماس؟ وضح إجابتك.
4. برّر منطقيًا المستقيمان m و n مماسان للدائرتين A و B . ما العلاقات بين $\angle PAS$, $\angle PQS$, $\angle RQS$, $\angle RBS$ ؟ وضح إجابتك.



طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، وضح ما إذا كان كل مستقيم أو قطعة مستقيمة مماسًا للدائرة B .



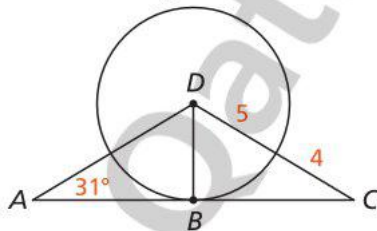
5. $\overleftrightarrow{MN}$

6. $\overline{QP}$

في التمرينين 7 و 8، القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ مماسًا للدائرة D عند B . أوجد قيمة كل مما يلي:

7. $m\angle ADB$

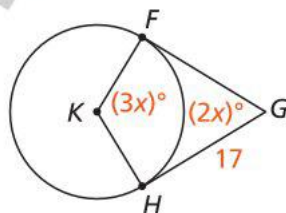
8. BC



في التمرينين 9 و 10، $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة K عند F و $\overline{HG}$ مماسًا للدائرة K عند H . أوجد قيمة كل مما يلي:

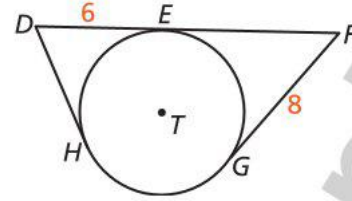
9. FG

10. $m\angle FGH$



عزز فهمك

11. حل الخطأ



للدائرة T . طلب من راشد إيجاد DF . بين خطأ راشد وصححه.

$$\begin{aligned} DF &= DE + EF \\ DE &= EF \quad (4-2 \text{ نظرية}) \\ DF &= 6 + 6 = 12, \text{ إذن} \end{aligned}$$

X

12. ابن الحجج الرياضية استعمال الشكل أدناه لكتابة برهان

لنظرية 6-1.

المعطيات: المستقيم m مماس للدائرة T عند G .

المطلوب: إثبات أن $\overline{GT} \perp m$.

• افترض أن $\overline{GT}$ ليس عمودياً على m .

• ارسم $\overline{HT}$ بحيث يكون $m \perp \overline{HT}$.

• استعمال المثلثات لإثبات أن $GT > HT$.

• أثبت أن هذا تناقض، لأن H تقع خارج $\odot T$.

13. ابن الحجج الرياضية أثبت عكس النظرية 6-1.

المعطيات: $\overline{QR} \perp n$.

المطلوب: إثبات أن n مماس للدائرة Q عند R .

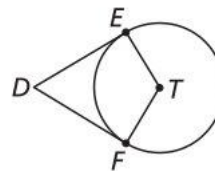
تلميح: حدد أي نقطة أخرى S تقع على المستقيم n .

أثبت أن $\overline{QS}$ هو وتر $\triangle QRS$ ، لذا فإن $QS > QR$ وبالتالي، تقع النقطة S خارج $\odot Q$.

14. ابن الحجج الرياضية أثبت النظرية 6-2.

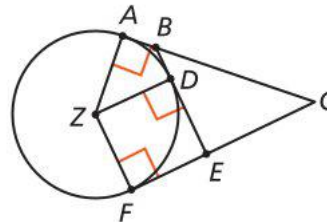
المعطيات: $\overline{DE}$ و $\overline{DF}$ مماسان للدائرة T .

المطلوب: إثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DF}$.



15. مهارات التفكير العليا

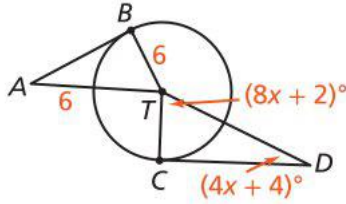
إذا كان $AC = x$ ، أوجد محيط $\triangle BCE$ بدلالة x . وضح إجابتك.



تدرب

$\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ مماسان للدائرة T . أوجد قيمة كل مما يلي.

انظر المثالين 1 و 2



16. AB

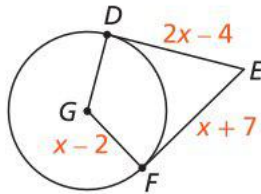
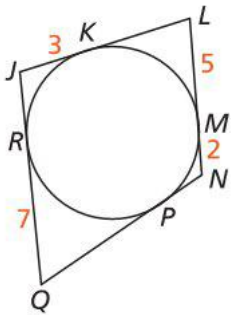
17. $m\angle TDC$

في التمارين 18-20، القطع المستقيمة مماسات للدائرة.

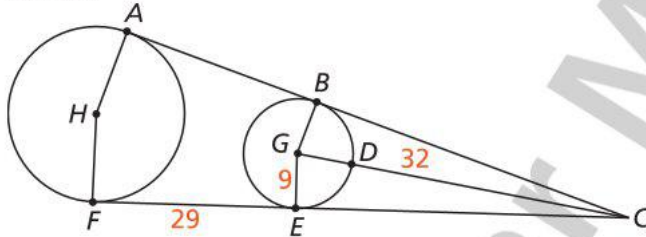
أوجد قيمة كل مما يلي: انظر المثالين 3 و 4

19. محيط $JLNQ$

18. DG

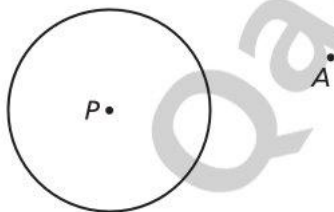


20. AC



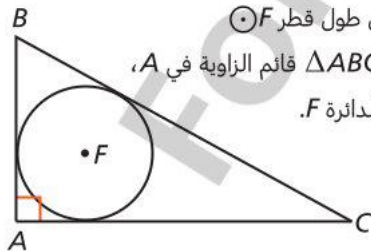
21. مستعلاً $\odot P$ والنقطة A . أنشئ مماساً للدائرة P يمر بالنقطة A .

انظر المثال 5



22. في الرسم المقابل، إذا كان طول قطر F

يساوي 8 و $AB = 10$ و $\triangle ABC$ قائم الزاوية في A ، أوجد محيط $\triangle ABC$. $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{AC}$ مماسات للدائرة F .

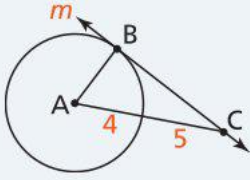


26. توصف الدائرة P بالمعادلة $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

أي من المستقيمات التالية مماس للدائرة P ؟
اختر كل ما ينطبق.

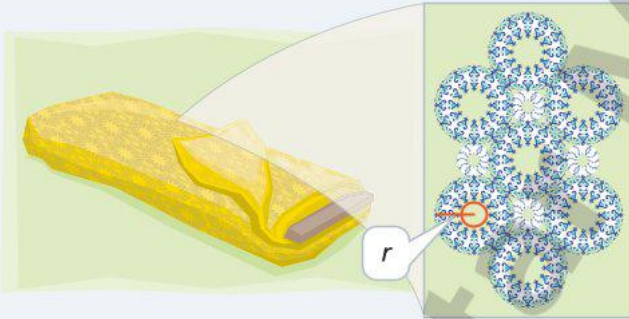
- (A) $y = x + 3$ (B) $y = 5$ (C) $y = x$
(D) $x = 2$ (E) $y = -3$ (F) $y = x - 3$

27. اختبار SAT/ACT المستقيم m مماس للدائرة A عند B .
ما مساحة $\triangle ABC$ ؟



- (A) 10 (B) 18
(C) $2\sqrt{65}$ (D) $\frac{5\sqrt{65}}{2}$

28. مهمة أدائية يستند التصميم العربي أدناه إلى دوائر متماسة.



الجزء A إذا كان طول نصف قطر الدوائر الكبيرة هو r ، فما طول نصف قطر الدوائر الصغيرة ؟

الجزء B اختر قيمة لطول نصف القطر الكبير وارسم النمط.
قِس أطوال أنصاف أقطار الدوائر الصغيرة والكبيرة. هل ترتبط القيم بالطريقة التي وصفتها في الجزء A ؟

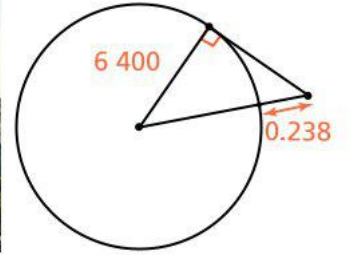
الجزء C في المخطط من الجزء B، عَيّن النقاط التي تكون عندها الدوائر الصغيرة والكبيرة مماسة لبعضها لبعض. اجمع المستقيمات التي تشكل مماسات للدوائر عند تلك النقاط. صف كيف تؤكد خطوط المماس التي رسمتها النظريتين 1-6 و 2-6



23. فُكّر وثابر في الحل تريد عائشة شراء حامل لكرة زجاجية مزخرفة طول قطرها 8 in وتفكر في الحامل المبين جانباً، وتريد معرفة الارتفاع h للجزء الذي سيكون مرئياً من الكرة. أوجد قيمة h ؟



24. استعمل البنية ينظر جاسم من أعلى طابق في برج الشعلة على ارتفاع 238 m في يوم صافٍ. كم يبعد الأفق عن موقعه، علماً أن طول نصف قطر الأرض حوالي 6 400 km ؟



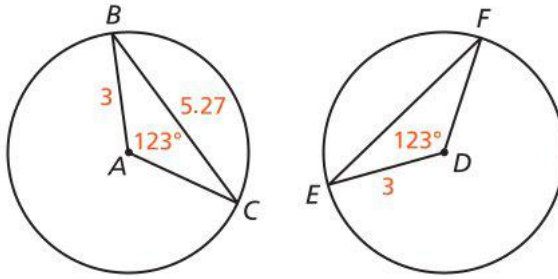
25. روابط في الرياضيات يريد مخطوطو السكك الحديدية ربط مسارين مستقيمين بمسار منحنٍ كما هو في الشكل أدناه. يجب أن يكون طول نصف قطر المنحنى 450 m على الأقل.

a. اشرح كيف يستطيع المهندسون تحديد موقع النقطة P ، مركز المقطع المنحني للمسار حيث يشكل المساران المستقيمان مماسين للدائرة التي تتضمن هذا المقطع المنحني.



b. بعد إنشاء المسار المنحني، ما المسافة التي ستقطعها القطارات بين المدينتين، حيث المسافة المعطاة إلى المدينة A أو B تبدأ من نقطة تقاطع المسارين المستقيمين؟ بَرّر إجابتك.

استعمل المخطط أدناه للإجابة عن الأسئلة.



A. أي الأشكال في المخطط متطابقة؟ وضح إجابتك.

B. ابحث عن العلاقات كيف يمكنك إيجاد EF؟

أستطيع... الربط بين طول الوتر وزاويته المركزية والقوس الذي يقطعه.

معايير الدرس

10.6.3 و 10.6.4

المصطلحات

chord

• وتر

ما العلاقة بين الأوتار وزواياها المركزية والأقواس المحصورة؟

السؤال الأساس

مثال 1

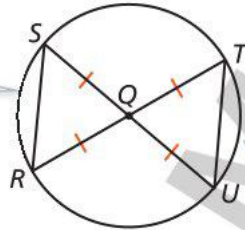
العلاقة بين الزوايا المركزية والأوتار

الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على دائرة.

لماذا $\overline{RS} \cong \overline{UT}$ ؟

$$\angle RQS \cong \angle UQT$$

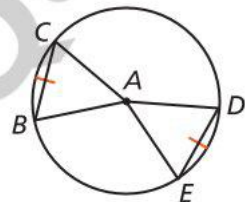
لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس.



$$\overline{SQ} \cong \overline{TQ} \cong \overline{UQ} \cong \overline{RQ}$$

لأن أطوال جميع أنصاف أقطار الدائرة متساوية.

استنادًا إلى نظرية تطابق مثلثين بضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS) فإن $\triangle QRS \cong \triangle QUT$.
بالتالي، $\overline{RS} \cong \overline{UT}$ لأنهما ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين.

حاول أن تحل! 1. في الشكل أدناه، أثبت أن $\angle BAC \cong \angle DAE$.

نصيحة دراسية

راجع المخطط أثناء قراءة البرهان.
لاحظ الأجزاء المتطابقة في المثلثين.

النظرية 6-3 وعكسها

إرشاد

يتطابق وتران في دائرة أو في دائرتين متطابقتين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيتان للوترين متطابقتين. تعني عبارة "إذا وفقط إذا" أن النظرية متحققة في الاتجاهين.

لفظيًا:

النظرية

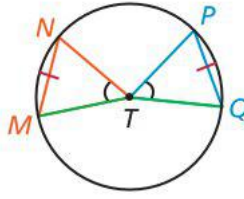
إذا تطابق وتران في دائرة أو في دائرتين متطابقتين، فإن زاويتيهم المركزيتين متطابقتان.

العكس

إذا تطابقت زاويتان مركزيتان في دائرة أو في دائرتين متطابقتين، فإن وتريهما متطابقتان.

البرهان: انظر التمرينين 12 و 13

بمخطط:



بالرموز:

إذا كان $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ فإن $\angle MTN \cong \angle PTQ$

إذا كان $\angle MTN \cong \angle PTQ$ فإن $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$

النظرية 6-4 وعكسها

لفظيًا:

النظرية

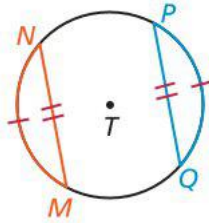
إذا تطابق قوسان في دائرة أو في دائرتين متطابقتين، فإن وتريهما متطابقتان.

العكس

إذا تطابق وتران في دائرة أو في دائرتين متطابقتين، فإن قوسيهما متطابقتان.

البرهان: انظر المثال 2 وحاول أن تحل 2

بمخطط:



بالرموز:

إذا كان $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$ فإن $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$

إذا كان $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ فإن $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$

مثال 2

العلاقة بين الأقواس والأوتار

اكتب برهانًا للنظرية 6-4

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

الخطة:

استعمل العلاقة بين الزوايا المركزية والأقواس

برسم أنصاف الأقطار $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

وبما أن قياس الزاوية المركزية يساوي قياس قوسها،

فإن $m\angle APB = m\widehat{AB}$ و $m\angle CPD = m\widehat{CD}$

باستعمال المعطيات نجد أن:

$\angle APB \cong \angle CPD$ و $m\angle APB = m\angle CPD$

بما أن أنصاف الأقطار في نفس الدائرة متطابقة، لذا $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC} \cong \overline{PD}$

استنادًا إلى نظرية التطابق بضعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)، فإن $\triangle APB \cong \triangle CPD$

إذن، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ بحسب تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة.

البرهان

فكر وثابر في الحل

فكر في طرق أخرى يمكنك استعمالها. كيف يمكنك إثبات تطابق الوترين باستعمال تطابق المثلثات؟

حاول أن تحل! 2. اكتب برهانًا تسلسليًا لعكس النظرية 6-4.

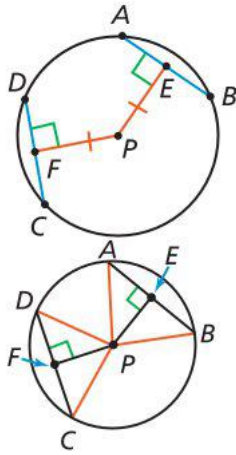
النظرية 5-6 وعكسها

لفظيًا:	بمخطط:	بالرموز:
النظرية		إذا كان $\overline{SE} \cong \overline{SF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
العكس		إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{SE} \cong \overline{SF}$
إذا تساوى بُعْدَا وترين عن مركز دائرة أو عن مركزي دائرتين متطابقتين، فإنهما متطابقان. إذا تطابق وتران في دائرة أو في دائرتين متطابقتين، فإنهما متساويا البُعد عن مركز الدائرة أو عن مركزي الدائرتين. البرهان: انظر المثال 3 وحاول أن تحل 3		

العلاقة بين وترين متساويي البُعد عن المركز

مثال 3

البرهان



اكتب برهانًا للنظرية 5-6

المعطيات: $\odot P$ حيث $\overline{AB} \perp \overline{PE}$, $\overline{CD} \perp \overline{PF}$
 $\overline{PE} \cong \overline{PF}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

الخطوة: أنشئ مثلثات برسم أنصاف الأقطار $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$.
ثم أثبت أن المثلثات متطابقة لتطبيق نظرية "تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة".

البرهان:

خطأ شائع

تأكد من أن أجزاء المثلثات التي تنشئها متناظرة، وذلك للتوصل إلى الاستنتاج المطلوب.

السبب	العبرة
1. المعطيات.	1. $\overline{AB} \perp \overline{PE}$, $\overline{CD} \perp \overline{PF}$
2. تعريف المستقيما المتعامدة.	2. $\angle DFP$, $\angle CFP$, $\angle BEP$, $\angle AEP$
3. تعريف المثلثات القائمة.	3. $\triangle DFP$, $\triangle CFP$, $\triangle BEP$, $\triangle AEP$ مثلثات قائمة.
4. كل أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.	4. $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC} \cong \overline{PD}$
5. المعطيات.	5. $\overline{PE} \cong \overline{PF}$
6. استنادًا إلى نظرية الوتر وضلع قائمة (HRL).	6. $\triangle AEP \cong \triangle BEP \cong \triangle CFP \cong \triangle DFP$
7. استنادًا إلى نظرية تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة.	7. $\overline{AE} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF} \cong \overline{DF}$
8. مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة.	8. $AB = AE + EB$, $CD = CF + FD$
9. بالتعويض.	9. $CD = 2CF$, $AB = 2AE$
10. بالتعويض.	10. $AB = CD$
11. تعريف القطع المستقيمة المتطابقة.	11. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

يتبع في الصفحة التالية

3. حاول أن تحل! اكتب برهانًا تسلسليًا لعكس النظرية 5-6

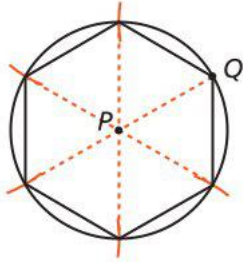
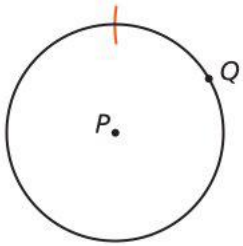
مثال 4

إنشاء سداسي منتظم محاط بدائرة

كيف ترسم سداسيًا منتظمًا محاطًا بالدائرة P ؟

نصيحة دراسية

تذكر أن المضلع المنتظم متطابق الأضلاع ومتساوي الزوايا.



الخطوة 1 حدّد النقطة Q على الدائرة.

الخطوة 2 اضبط الفرجار بطول نصف قطر الدائرة. ضع رأس الفرجار المديب عند Q وارسم قوسًا يقطع الدائرة.

الخطوة 3 حافظ على وضعية الفرجار. ضع رأس الفرجار المديب على نقطة تقاطع القوس مع الدائرة وارسم قوسًا آخر يقطع الدائرة. تُعد كل نقطة تقاطع رأسًا للسداسي. كرر الأمر حتى ترسم خمسة أقواس.

الخطوة 4 ارسم أوتارًا بحيث يصل كل وتر بين نقطة تقاطع القوس مع الدائرة والنقطة التالية لها على الدائرة.

جميع أطوال أضلاع الشكل الناتج متطابقة لأن جميعها تساوي طول نصف قطر الدائرة.

توصيل مركز الدائرة بالرؤوس الستة للمضلع المحاط بدائرة يكون ستة مثلثات متطابقة الأضلاع، لذا فإن قياس كل زاوية يساوي 120° ، وبالتالي الشكل سداسي منتظم.

4. حاول أن تحل! أنشئ مثلثًا متطابق الأضلاع محاطًا بدائرة.

النظرية 6-6 وعكسها

لفظيًا:

النظرية

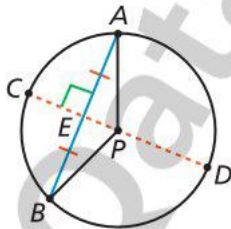
إذا تعامد قطر على وتر، فإنه ينصف الوتر.

العكس

إذا نصف قطر وترًا (الوتر ليس قطرًا)، فإنه يكون عموديًا على هذا الوتر.

البرهان: انظر التمرينين 15 و 16

بمخطط:



بالرموز:

إذا كان $\overline{CD}$ قطرًا

و $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

فإن $\overline{AE} \cong \overline{BE}$

إذا كان $\overline{CD}$ قطرًا

و $\overline{AE} \cong \overline{BE}$

فإن $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

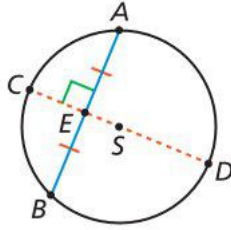
النظرية 6-7

لفظيًا:

العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة.

بمخطط:

إذا كان



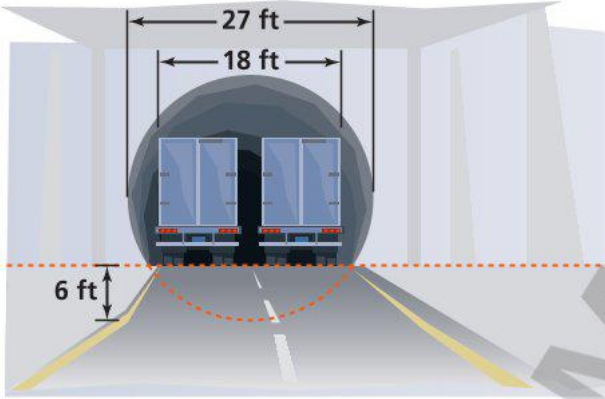
فإن S تقع على $\overline{CD}$

البرهان: انظر التمرين 27

حل مسائل تتضمن أوتار الدوائر

مثال 5

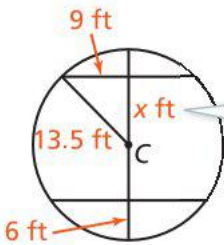
تطبيق



يصمم مهندس نفق خدمة يتسع لشاحنتين في آن واحد. إذا كان النفق يتسع لعرض 18 ft، فما أكبر ارتفاع لشاحنة يمكن أن يتسع له النفق؟
اطرح 0.5 ft لتحسب تقلبات سطح الطريق.

ارسم رسمًا وضع عليه المعطيات ليساعدك على حل المسألة.

ضع



لتكن x هي المسافة من المركز إلى أكبر ارتفاع. نصف القطر يساوي 13.5 ft

اكتب معادلة وحلها لإيجاد قيمة x .

احسب

$$9^2 + x^2 = 13.5^2 \quad \text{استعمل نظرية فيثاغورس.}$$

$$x^2 = 13.5^2 - 9^2$$

$$x = \sqrt{13.5^2 - 9^2}$$

$$x \approx 10.06$$

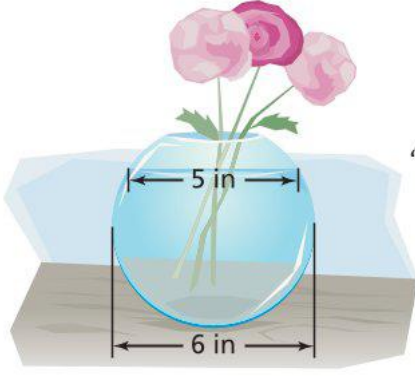
أضف المسافة من الأرض إلى المركز $13.5 - 6 = 7.5$ إلى x واطرح 0.5 ft لحساب تقلبات سطح الطريق.

$$7.5 + 10.06 - 0.5 = 17.06$$

إذن، أكبر ارتفاع يمكن أن يتسع له النفق هو 17.06 ft تقريبًا.

فتش

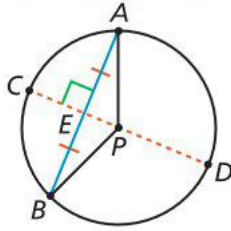
يتبع في الصفحة التالية



حاول أن تحل! 5. يجب وضع الأزهار المقطوفة حديثاً في مياه عمقها 4 in على الأقل. مُلئت مزهرية كروية الشكل بالماء إلى أن أصبح سطح المياه دائرة قطرها 5 in، هل المياه عميقة بما يكفي لوضع الأزهار فيها ؟ وضح إجابتك.

الأوتار والقطر

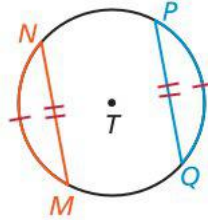
يتعامد قطر على وتر (الوتر ليس قطرًا)،
إذا وفقط إذا نصف القطر الوتر.



$\overline{AB} \perp \overline{CD}$
إذا وفقط إذا $\overline{AE} \cong \overline{BE}$

الأوتار والأقواس

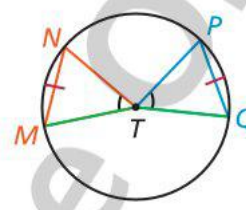
يتطابق وتران في دائرة أو في
دائرتين متطابقتين إذا وفقط إذا
قطع الوتران قوسين متطابقين.



$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$
إذا وفقط إذا $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$

الأوتار والزوايا المركزية

يتطابق وتران في دائرة أو في دائرتين
متطابقتين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان
المركزيّتان للوترين متطابقتين.

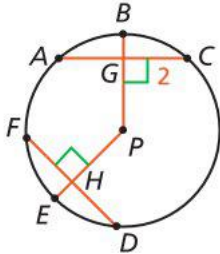


$\angle MTN \cong \angle PTQ$
إذا وفقط إذا $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$

بمخطط

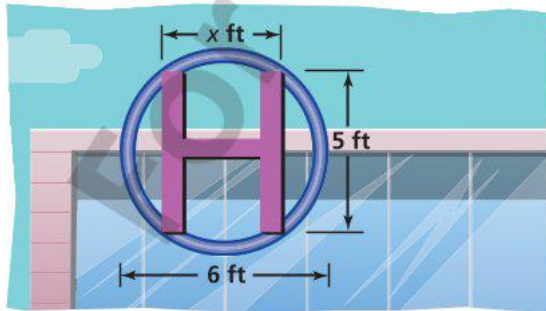
طبق فهمك

في التمارين 5-10، في الدائرة P، $m\widehat{AB} = 43^\circ$
و $AC = DF$. أوجد كل قياس مما يلي:



5. DF
6. $m\widehat{ABC}$
7. FH
8. $m\widehat{DE}$
9. AC
10. $m\widehat{DF}$

11. يريد المدير التنفيذي لإحدى الشركات وضع شعار الشركة الدائري
الشكل والذي طول قطره 6 ft وفي وسطه حرف H طول جانبه
العمودي 5 ft على الحائط الأمامي لمبنى الشركة. أوجد x،
والذي يمثل عرض الحرف H.



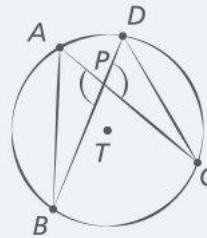
عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس ما العلاقة بين الأوتار وزواياها المركزية
والأقواس التي تحصرها؟

2. حل الخطأ كتبت منال البرهان أدناه لتثبت تطابق وترين في
دائرة. وضح خطأ منال وصححه.

$$\begin{aligned}\angle APB &\cong \angle CPD \\ \overline{AB} &\cong \overline{CD} \\ \overline{AB} &\cong \overline{DC}\end{aligned}$$

زاويتان متقابلتان بالرأس
وتران يقابلان زاويتين مركزيّتين متطابقتين
وتران يقطعان قوسين متطابقين

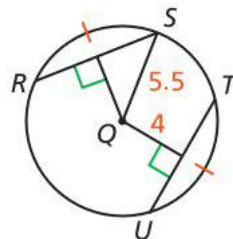


3. المصطلحات وضح لماذا تُعد جميع أقطار الدوائر أوتارًا في
الدوائر أيضًا.

4. برز منطقيًا في Q المجاورة،

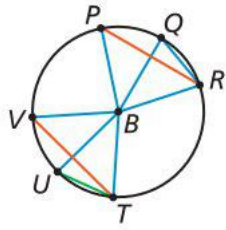
إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{UT}$ ،

فكيف توجد UT؟



في التمارين 18-21، في $\odot B$ ، $m\angle VBT = m\widehat{PR} = 90^\circ$ ،

$QR = TU$ انظر المثالين 1 و 2



18. أوجد $m\angle PBR$.

19. أوجد $m\widehat{TV}$.

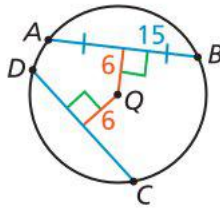
20. أي الزوايا مطابقة للزاوية $\angle QBR$ ؟

21. أي قطعة مستقيمة مطابقة مع $\widehat{TV}$ ؟

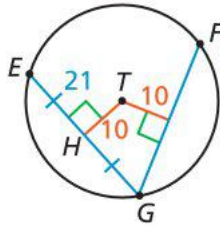
22. أنشئ مربعاً محاطاً بدائرة. ما وجه الاختلاف بين رسم مربع محاط

بدائرة ورسم سداسي أو مثلث محاط بدائرة؟ انظر المثال 4

23. أوجد CD . انظر المثال 3



24. أوجد FG . انظر المثال 3



25. وتر في دائرة طوله 12 cm، ويبعد 30 cm عن مركز الدائرة.

ما طول نصف قطر الدائرة؟ انظر المثال 5

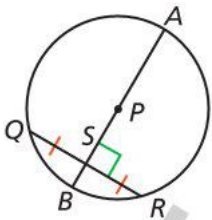
26. دائرة طول قطرها 39 in، ولها وتران طول كل منهما 8 in،

أوجد المسافة بين كل منهما ومركز الدائرة. انظر المثال 5

27. يبعد وتر 4 وحدات عن مركز دائرة طول نصف قطرها 5 وحدات.

أوجد طول الوتر. انظر المثال 5

28. اكتب برهاناً للنظرية 6-7



المعطيات: $\overline{QR}$ وتر في $\odot P$ ،

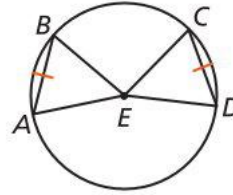
$\overline{AB}$ عمود منصف للوتر $\overline{QR}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$ يحتوي النقطة P.

12. ابن الحجج الرياضية اكتب برهاناً للنظرية 6-3

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

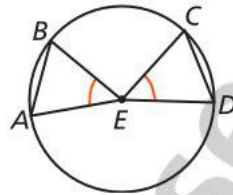
المطلوب: إثبات أن $\angle AEB \cong \angle CED$



13. ابن الحجج الرياضية اكتب برهاناً ذا عمودين لعكس النظرية 6-3

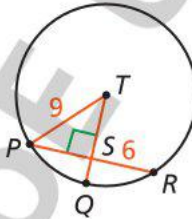
المعطيات: $\angle AEB \cong \angle CED$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



14. حلل الخطأ أوجد الخطأ الذي ارتكبه سليمان عند إيجاد TS ثم

صحح هذا الخطأ.



$$TS = \sqrt{PR^2 - PS^2}$$

$$= \sqrt{12^2 - 9^2}$$

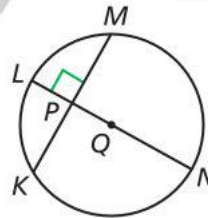
$$\approx 7.9$$

15. ابن الحجج الرياضية اكتب برهاناً للنظرية 6-6

المعطيات: $\overline{LN}$ قطر للدائرة Q،

$\overline{LN} \perp \overline{KM}$

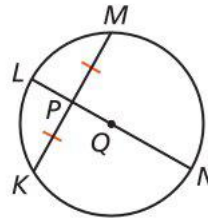
المطلوب: إثبات أن $\overline{KP} \cong \overline{MP}$



16. ابن الحجج الرياضية اكتب برهاناً لعكس النظرية 6-6

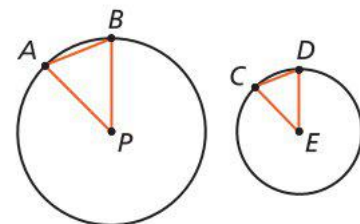
المعطيات: $\overline{LN}$ قطر $\overline{KP} \cong \overline{MP}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{LN} \perp \overline{KM}$



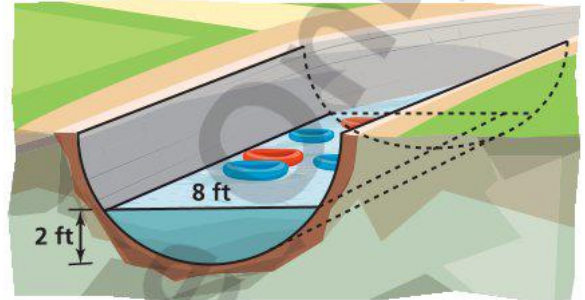
17. مهارات التفكير العليا إذا كان $\triangle ABP \sim \triangle CDE$

أثبت أن $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$



29. روابط في الرياضيات تصمم ليلي لعبة مائية وتريد استعمال أنبوب

نصف أسطواناني في بنائها. إذا أرادت أن يكون عرض مجرى المياه 8 ft عندما يكون عمقها 2 ft، أوجد طول قطر الأنبوب.

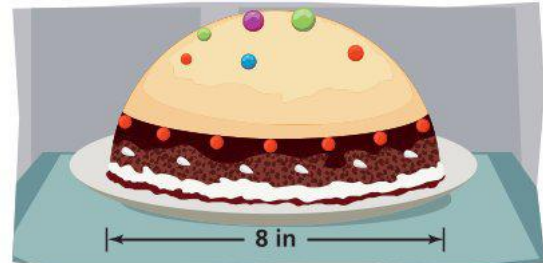


30. نموذج مسار دراجات فيه حفر عرضها 20 in وعمقها 5 in،

إذا كان طول قطر عجلات دراجة ريم 26 in، فهل يمكنها قيادة دراجتها في المسار من دون أن تصطدم العجلات بفقاع الحفر؟ وضح إجابتك.



31. فكر وثابر في الحل كعكة نصف كروية طول قطرها 8 in

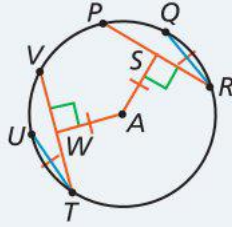


a. إذا قُطعت الكعكة أفقيًا إلى جزأين ارتفاعهما متساويان، هل يمكن وضع الجزء العلوي في طبق طول قطره 6 in؟ وضح إجابتك.

b. إذا قُطعت الكعكة أفقيًا إلى ثلاث قطع متساوية الارتفاع، هل يمكن وضع الثلث العلوي في طبق طول قطره 5 in؟ وضح إجابتك.

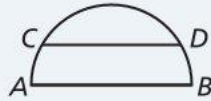
تدرب على اختبار

32. في الشكل أدناه، أي الاحتمالات يجب أن يكون صحيحًا؟ اختر كل ما ينطبق.



- (A) $\overline{QR} \cong \overline{TU}$ (B) $PR = TV$
(C) $VW = AS$ (D) $PS = SR$

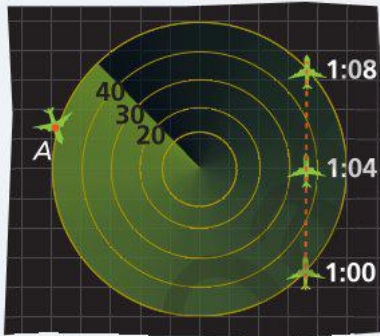
33. اختبار SAT/ACT طول نصف قطر الدائرة هو r ، و $CD = \frac{3}{4} \times AB$. ما المسافة بين الوتر $\overline{CD}$ والقطر $\overline{AB}$ ؟



- (A) $\frac{5}{4}r$ (B) $\frac{\sqrt{7}}{4}r$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}\pi r$ (D) $\frac{5}{4}\pi r$

34. مهمة أدائية طول نصف قطر مدى رادار يساوي 50 ميلاً.

عند الساعة 1:00 P.M. ظهرت طائرة على شاشة الرادار متجهة نحو الشمال، وعند الساعة 1:04 P.M. بدت الطائرة على شاشة الرادار متجهةً نحو الشرق، وعند الساعة 1:08 P.M. اختفت الطائرة عن الشاشة. إذا كانت الطائرة تطير بسرعة 8 mi/min



الجزء A أوجد المسافة التي قطعها الطائرة على شاشة الرادار.

الجزء B أوجد بُعد الطائرة عن الرادار عند الساعة 1:04 P.M.

الجزء C ظهرت طائرة أخرى على الشاشة عند النقطة A عند الساعة 1:12 P.M. وكانت تطير في خط مستقيم بسرعة 9 mi/min، إذا لم تقترب الطائرة أكثر من 40 mi من الرادار، ففي أي ساعة اختفت عن الشاشة؟ وضح إجابتك.

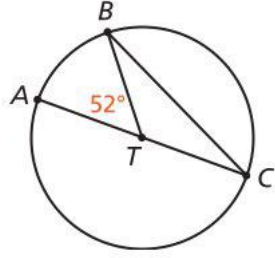
6-4

الزوايا المحيطية

Inscribed Angles

استكشف وبّر منطقياً

لتكن الدائرة T .



A. فُكّر وثابر في الحل نَظّم لائحة بسبعة أشياء على الأقل يمكنك استنتاجها من الشكل أعلاه.

B. كيف ترتبط $\angle ACB$ و $\angle ATB$ ؟ وضح إجابتك.

أستطيع... استعمال العلاقات بين الزوايا والأقواس في الدوائر لإيجاد قياساتها.

معايير الدرس

10.6.3 و 10.6.4

المصطلحات

• الزاوية المحيطية inscribed angle

كيف يرتبط قياس زاوية محيطية بالقوس المقابل لها ؟

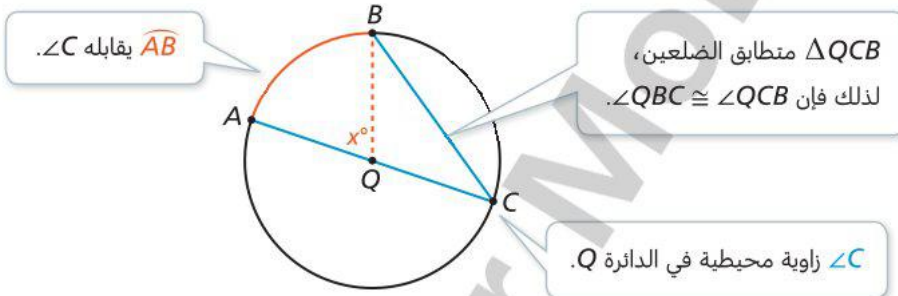
السؤال الأساس

الربط بين الزوايا المحيطية والأقواس المقابلة

مثال 1

ما العلاقة بين $\angle ACB$ و $\widehat{AB}$ ؟

الزاوية المحيطية هي زاوية يقع رأسها على دائرة ويتضمن ضلعاها وتران من الدائرة.



ارسم نصف القطر $\overline{QB}$ لتكوين $\triangle QCB$ والزاوية المركزية $\angle AQB$.

$$m\angle QBC + m\angle QCB = x$$

طبق نظرية الزوايا الخارجية.

$$2(m\angle QCB) = x$$

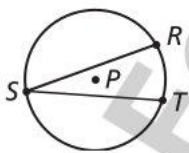
$$m\angle QCB = \frac{1}{2}x$$

بما أن $\angle QBC \cong \angle QCB$ ، إذن $m\angle QBC = m\angle QCB$.

$$m\angle ACB = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$$

$$x^\circ = m\widehat{AB} \text{ و } m\angle QCB = m\angle ACB$$

قياس الزاوية المحيطية $\angle ACB$ يساوي نصف قياس القوس المقابل $\widehat{AB}$.



1. لتكن $\angle S$ زاوية محيطية في الدائرة P .

إذا كان $m\widehat{RT} = 47^\circ$ ، أوجد $m\angle S$.

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

هناك عدد لانهائي من الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه. ويكون لجميع هذه الزوايا نفس القياس.

النظرية 6-8 نظرية الزوايا المحيطية

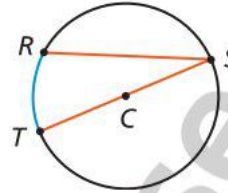
لفظيًا:

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها على الدائرة.

بمخطط:

الحالة 1

مركز الدائرة يقع على أحد ضلعي الزاوية.



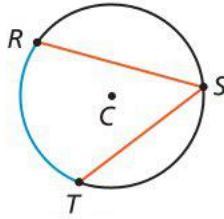
بالرموز:

$$m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$$

البرهان: انظر التمارين 19, 32, 33

الحالة 2

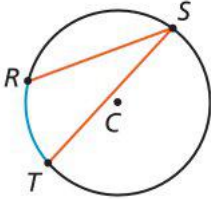
مركز الدائرة يقع داخل الزاوية.



$$m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$$

الحالة 3

مركز الدائرة يقع خارج الزاوية.

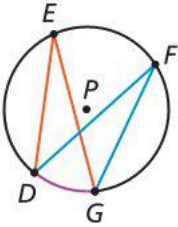


$$m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$$

مثال 2

استعمال نظرية الزوايا المحيطية

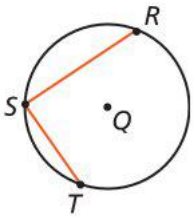
A. إذا كان $m\widehat{DG} = 45.6^\circ$ ، أوجد $m\angle E$ و $m\angle F$.



$$\begin{aligned} m\angle E &= \frac{1}{2} m\widehat{DG} \\ &= \frac{1}{2} (45.6^\circ) \\ &= 22.8^\circ \end{aligned}$$

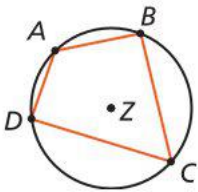
$$\begin{aligned} m\angle F &= \frac{1}{2} m\widehat{DG} \\ &= \frac{1}{2} (45.6^\circ) = 22.8^\circ \end{aligned}$$

B. إذا كان $\widehat{RT}$ نصف دائرة، أوجد $m\angle RST$.



$$\begin{aligned} m\angle RST &= \frac{1}{2} m\widehat{RT} \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ) = 90^\circ \end{aligned}$$

C. إذا كان $m\widehat{ABC} = 184^\circ$ و $m\widehat{BCD} = 242^\circ$ ، أوجد قياسات زوايا الشكل الرباعي ABCD.



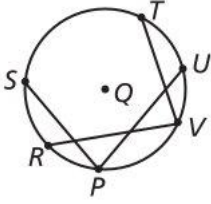
$$\begin{aligned} m\angle A &= \frac{1}{2} m\widehat{BCD} \\ &= \frac{1}{2} (242^\circ) = 121^\circ \\ m\angle D &= \frac{1}{2} m\widehat{ABC} \\ &= \frac{1}{2} (184^\circ) = 92^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle B &= \frac{1}{2} m\widehat{ADC} \\ &= \frac{1}{2} (360^\circ - 184^\circ) = 88^\circ \\ m\angle C &= 360^\circ - (121^\circ + 88^\circ + 92^\circ) \\ &= 59^\circ \end{aligned}$$

ابحث عن العلاقات

قطر دائرة ما عبارة عن زاوية مستقيمة. ما قياس القوس المقابل للقطر؟

يتبع في الصفحة التالية



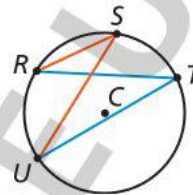
2. a. إذا كان $m\widehat{RST} = 164^\circ$ ، أوجد $m\angle RVT$.
 b. إذا كان $m\angle SPU = 79^\circ$ ، أوجد $m\widehat{STU}$.

نتائج من نظرية الزوايا المحيطية

النتيجة 1

الزاويتان المحيطيتان اللتان
تقابلان القوس نفسه هما زاويتان
متطابقتان.

إذا كان

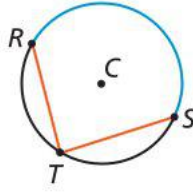


$$\angle S \cong \angle T$$

$$\angle U \cong \angle R$$

النتيجة 2

الزاوية المحيطية المرسومة
في نصف دائرة هي زاوية قائمة.

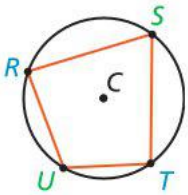
إذا كان $m\widehat{RS} = 180^\circ$ 

$$\angle T = 90^\circ$$

النتيجة 3

الزوايا المتقابلة في شكل
رباعي دائري هي زوايا متكاملة.

إذا كان



$$\angle R + \angle T = 180^\circ$$

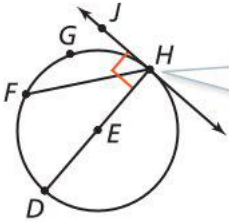
$$\angle S + \angle U = 180^\circ$$

إرشاد

الرباعي الدائري هو أي رباعي تقع
رؤوسه الأربعة على دائرة.

مثال 3

استكشاف الزوايا المتكوّنة من مماس ووتر (الزاوية المماسية)



$$m\angle DHJ = 90^\circ$$

إذا كان $\overline{FH}$ وترًا و $\overleftrightarrow{HJ}$ مماسًا للدائرة E عند النقطة H،
ما العلاقة بين $\angle FGH$ و $\angle FHJ$ ؟

أنظر إلى الزوايا والأقواس المتكوّنة بواسطة الوتر، والمماس، والقطر.

إذا كان $m\angle FHD = 90^\circ - x^\circ$ ، فإن $m\angle FGH = x^\circ$.

$$m\angle FHD = \frac{1}{2} m\widehat{DF}$$

$$90^\circ - x^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{DF}$$

$$m\widehat{DF} = 180^\circ - 2x^\circ$$

استعمل
نظرية
الزوايا المحيطية.

$$m\widehat{DF} + m\widehat{FGH} = m\widehat{DFH}$$

$$180^\circ - 2x^\circ + m\widehat{FGH} = 180^\circ$$

$$m\widehat{FGH} = 2x^\circ$$

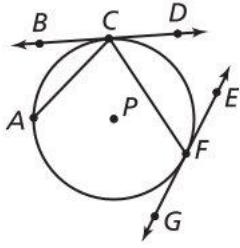
$$m\widehat{FGH} = 2m\angle FHJ$$

$$m\angle FHJ = \frac{1}{2} m\widehat{FGH}$$

يتبع في الصفحة التالية

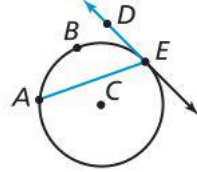
خطأ شائع

انتبه ألا تفترض قياسات أقواس
متساوية كافتراض $m\widehat{DF} = m\widehat{FH}$.
فكر في المفاهيم والنظريات
التي يمكنك تطبيقها عند كتابة
العبارات الرياضية.



3. **حاول أن تحل!** a. ليكن $\overleftrightarrow{BD}$ مماسًا للدائرة P عند النقطة C .
إذا كان $m\widehat{AC} = 88^\circ$ ، أوجد $m\angle ACB$.
b. ليكن $\overleftrightarrow{EG}$ مماسًا للدائرة P عند النقطة F .
إذا كان $m\angle GFC = 115^\circ$ ، أوجد $m\widehat{AC}$.

النظرية 6-9



إذا كان

$$m\angle AED = \frac{1}{2} m\widehat{ABE} \quad \text{فإن}$$

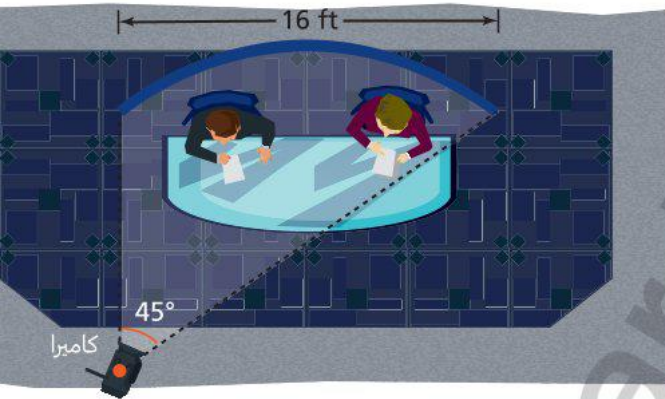
قياس الزوايا المتكوّنة من مماس ووتر
(الزاوية المماسية) يساوي نصف قياس القوس
المحصور بينهما.

البرهان: انظر التمرين 34

استعمال قياس القوس لحل مسائل من واقع الحياة

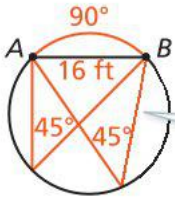
مثال 4

تطبيق



يرغب أحد المخرجين في تحديد موقعي
آلتي تصوير بحيث أنهما تلتقطان الخلفية
الواقعة وراء المذيعين بأكملها.
أين يتوجب عليه وضع آلتَي التصوير؟
مثل موقع التصوير بوتر $\overline{AB}$ على دائرة
تقطع قوسًا قياسه 90°

ضع

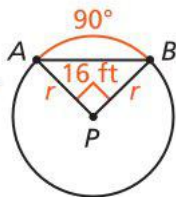


أي نقطة على القوس الأكبر $\widehat{AB}$ هي رأس لزاوية
محيطية قياسها 45° تقابل القوس الأصغر $\widehat{AB}$.

لإيجاد قياس الدائرة، أوجد طول نصف قطرها.
لتكن P مركز الدائرة.

احسب

$$m\angle APB = m\widehat{AB} = 90^\circ$$



يتبع في الصفحة التالية

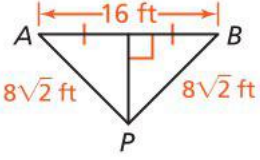
أوجد r .

$$\sqrt{2} \times r = 16$$

$$r = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$r = 8\sqrt{2}$$

$\triangle APB$ هو مثلث قائم الزاوية ومتطابق
الضلعين، ويبلغ طول وتره 16

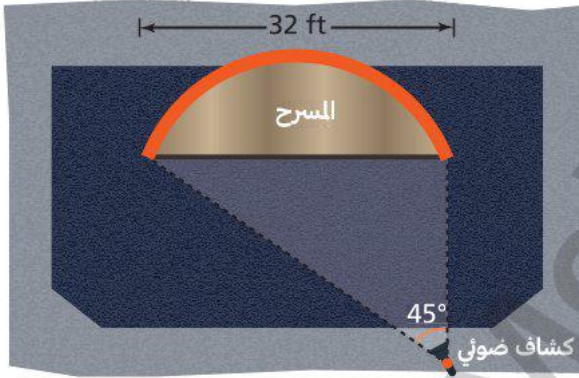


يقع مركز الدائرة P على المنصف العمودي للوتر $\overline{AB}$ ،
لذا تقع P على مسافة 8 ft من نقطة منتصف $\overline{AB}$

ضع إحدى آلي التصوير عند أي نقطة من دائرة نصف قطرها
 $8\sqrt{2}$ ft ومركزها يبعد 8 ft عن نقطة منتصف خلفية التصوير.

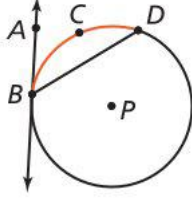
فشر

4. حاول أن تحل! يريد أحمد أن يحدد موقعاً لكشاف صوتي بحيث يضيء المسرح بكامله.
أين يجب عليه وضع الكشاف الصوتي؟



الزوايا المتكوّنة من مماس ووتر (الزاوية المماسية)

قياس الزاوية المتكوّنة من مماس ووتر يساوي نصف قياس القوس المحصور بينهما.



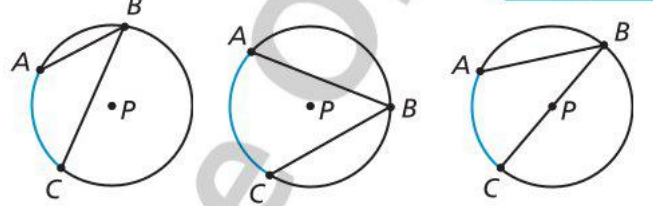
$$m\angle ABD = \frac{1}{2} m\widehat{BCD}$$

الزوايا المحيطية

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

لفظيًا

بمخطط



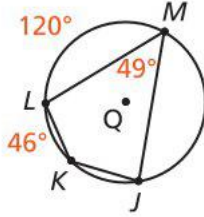
$$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$$

بالرموز

طبّق فهمك

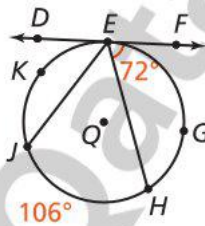
في التمارين 5-8، في $\odot Q$ أوجد كل قياس من القياسات التالية:

5. $m\widehat{JKL}$
6. $m\widehat{MJ}$
7. $m\angle KJM$
8. $m\angle KLM$



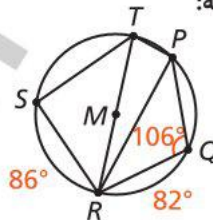
في التمارين 9-12، $\odot Q$ مماس $\overline{DF}$ عند النقطة E. أوجد كل قياس من القياسات التالية:

9. $m\widehat{EGH}$
10. $m\widehat{EKJ}$
11. $m\angle HEJ$
12. $m\angle DEJ$



في التمارين 13-16، في $\odot M$ ، أوجد كل قياس من القياسات التالية:

13. $m\angle PRQ$
14. $m\angle PTR$
15. $m\angle RST$
16. $m\angle SRT$

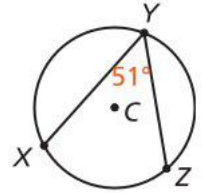


عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يرتبط قياس زاوية محيطية بالقوس المقابل لها ؟

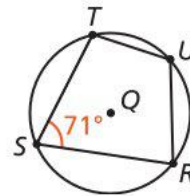
2. حلّ الخطأ طلب من جاسم إيجاد $m\widehat{XZ}$. بيّن خطأ جاسم ثم صحّحه.

$$\begin{aligned} m\widehat{XZ} &= \frac{1}{2} m\angle XYZ \\ &= \frac{1}{2} (51^\circ) \\ &= 25.5^\circ \end{aligned}$$

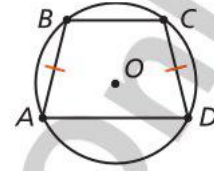


3. بزر منطقياً هل يمكن أن يكون قياس زاوية محيطية أكبر من قياس القوس المقابل ؟ وضح إجابتك.

4. فكّر وثابر في الحل هل المعلومات كافية في الشكل المجاور لإيجاد $m\widehat{RST}$ ؟ وضح إجابتك.

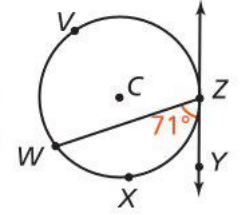


17. روابط في الرياضيات إذا كان $m\widehat{ABC} = x^\circ$ ، أوجد $m\widehat{DAB}$ بدلالة x ؟ وضح إجابتك.

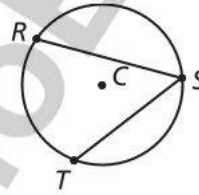


18. حل الخطأ طلب من العنود إيجاد $m\widehat{WVZ}$.
بين خطأ العنود وضح.

$$m\widehat{WVZ} = 360^\circ - 71^\circ = 289^\circ$$



19. مهارات التفكير العليا اكتب برهاناً لنظرية الزوايا المحيطية،
الحالة 2

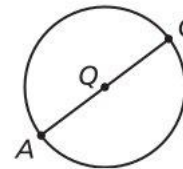
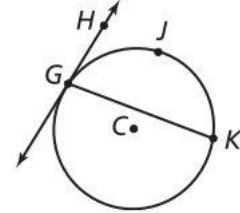


المعطيات: مركز الدائرة C

يقع داخل $\angle RST$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle RST = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$.

20. ابن الحجج الرياضية تقيس سامية $\angle HGK$ باستعمال منقلة
وتقول إنها تساوي 98° ، هل إجابة سامية معقولة ؟ وضح إجابتك.



21. استعمل البنية ليكن $\overline{AC}$ قطراً في $\odot Q$.

إذا كانت النقطة B تقع على $\odot Q$ ،

هل يمكن أن يكون قياس $\angle ABC$

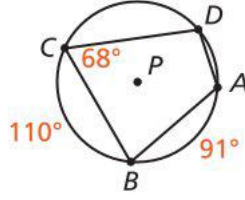
أقل من 90° ؟ وهل يمكن أن يكون قياسها

أكبر من 90° ؟ وضح إجابتك.

في التمارين 22-25، أوجد كل قياس في الدائرة $\odot P$ مما يلي:

انظر المثالين 1 و 2

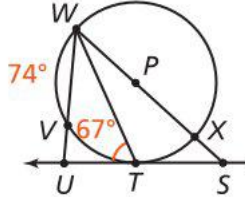
22. $m\widehat{AD}$
23. $m\widehat{BDC}$
24. $m\angle ADC$
25. $m\angle BAD$



في التمارين 26-28، $\overleftrightarrow{SU}$ مماس للدائرة $\odot P$ عند النقطة T.

أوجد كل قياس مما يلي: انظر المثالين 2 و 3

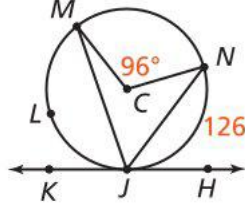
26. $m\widehat{TVW}$
27. $m\angle TWX$
28. $m\angle TWU$



في التمارين 29-31، $\overleftrightarrow{HK}$ مماس للدائرة $\odot C$ عند النقطة J.

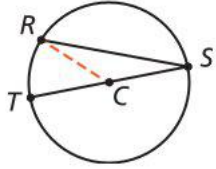
أوجد كل قياس مما يلي: انظر المثالين 3 و 4

29. $m\angle KJM$
30. $m\angle MJN$
31. $m\angle HJN$



32. اكتب برهاناً لنظرية الزوايا المحيطية،

الحالة 1 انظر المثال 1

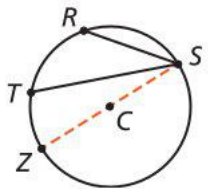


المعطيات: مركز $\odot C$ يقع على $\overline{ST}$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle RST = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$.

33. اكتب برهاناً لنظرية الزوايا المحيطية،

الحالة 3 انظر المثال 1

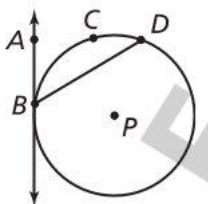


المعطيات: مركز $\odot C$ يقع خارج $\angle RST$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle RST = \frac{1}{2} m\widehat{RT}$.

34. اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 6-9

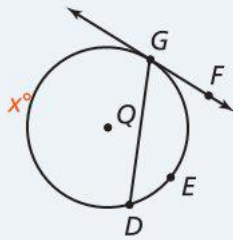
انظر المثال 3



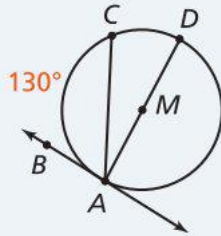
المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة $\odot P$ عند النقطة B.

المطلوب: إثبات أن $m\angle ABD = \frac{1}{2} m\widehat{BCD}$.

38. أوجد $m\angle DGF$ بدلالة x .

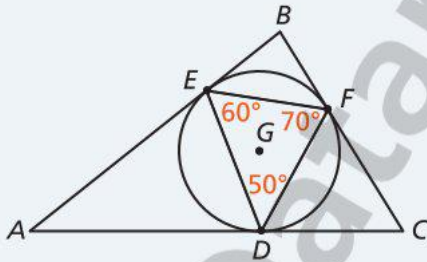


39. اختبار SAT/ACT أوجد $m\angle DAC$ مماس $\overline{AB}$ للدائرة M عند النقطة A .



- (A) 25°
- (B) 65°
- (C) 50°
- (D) 90°
- (E) 100°

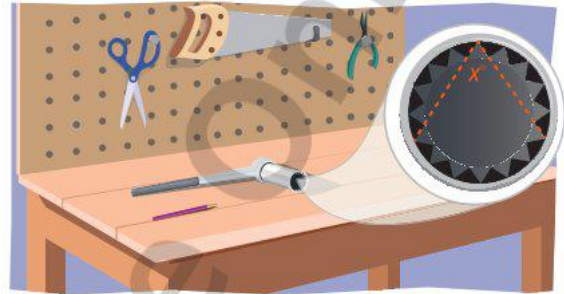
40. مهمة أدائية DEF مثلث تقع رؤوسه على $\odot G$ ، و $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ مماسات للدائرة G .



الجزء A هل ثمة مثلثات متطابقة الضلعين في المخطط أعلاه ؟ إذا كانت كذلك، وضح سبب كونها متطابقة الضلعين، وإذا لم تكن كذلك، وضح سبب ذلك أيضاً.

الجزء B هل $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان ؟ وضح إجابتك.

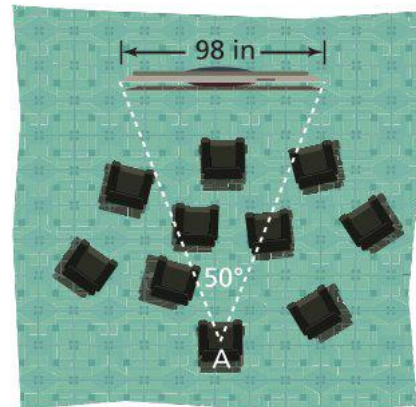
35. ابن الحجج الرياضية يحتاج إبراهيم إلى معرفة قياس زاوية كل ترس في مفتاح الربط المكوّن من 16 ترساً والذي يقوم بتصميمه. إذا كانت التروس بالمقاس نفسه، أوجد قياس زاوية الترس.



36. استعمل البنية تريد شيما صنع نسخة مطابقة للأصل من ساعة شمسية قديمة باستعمال قطعة من الساعة الشمسية التي حصلت عليها. هل ثمة معلومات كافية لتحديد قطر الساعة الشمسية ؟ وضح ذلك.



37. استعمل الأدوات المناسبة يقوم حسام بترتيب المقاعد لعرض مسرحي منزلي سيُعرض على التلفاز الخاص به. زاوية المشاهدة المثلى لديه هي 50° ، بالإضافة إلى المقعد A، ما المكان الآخر الذي يمكنه أن يجلس فيه بحيث تكون زاوية المشاهدة هي نفسها ؟ أنشئ مخططاً ووضح ذلك.

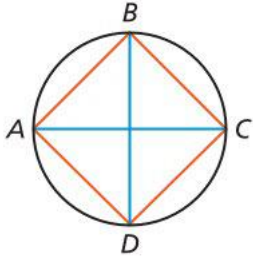


6-5

الأوتار المتقاطعة

Secant Lines and segments

استكشف وبزر منطقياً



أنشأ عادل التصميم المجاور. تقع النقاط A, B, C, D على مسافات متساوية على الدائرة.

A. باستعمال النقاط A, B, C, D كرؤوس، ما الزوايا المتطابقة التي يمكنك إيجادها؟ كيف يمكنك إثبات أنها متطابقة؟

B. **فكر وثابر في الحل** ما الطريقة التي استعملتها للتأكد من أنك أوجدت كل الزوايا المتطابقة؟

أستطيع... استعمال قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة المتكوّنة بواسطة المستقيمتين والدوائر المتقاطعة لحل المسائل.

معايير الدرس

10.6.3 و 10.6.4

المصطلحات

• الفاطح secant

الاستيعاب المفاهيمي

كيف ترتبط قياسات الزوايا والأقواس والقطع المستقيمة المتكوّنة بواسطة قواطع متقاطعة؟

السؤال الأساس

مثال 1

الربط بين القواطع وقياسات الزوايا

الفاطح هو مستقيم، أو شعاع، أو قطعة مستقيمة تتقاطع مع دائرة عند نقطتين. يتقاطع الفاطحان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ لتكوين $\angle 1$ كيف يمكنك استعمال قياسات الأقواس لإيجاد $m\angle 1$ ؟

ارسم $\overline{AB}$ لتكوين $\triangle AEB$.

بما أن $\angle BAC$ زاوية محيطية، فإن $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$

بما أن $\angle ABD$

زاوية محيطية، فإن

$$m\angle ABD = \frac{1}{2} m\widehat{AD}$$

طبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

$$m\angle 1 = m\angle ABD + m\angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} m\widehat{AD} + \frac{1}{2} m\widehat{BC}$$

$$= \frac{1}{2} (m\widehat{AD} + m\widehat{BC})$$

لذا فإن قياس الزاوية عبارة عن نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين للزاويتين المتكوّنتين من تقاطع المستقيمتين مع الدائرة.

حاول أن تحل! 1. إذا كان $m\widehat{AD} = 155^\circ$ و $m\widehat{BC} = 61^\circ$ ، أوجد $m\angle 1$.

فكر وثابر في الحل

فكر في العلاقات الأخرى الواردة في المخطط. ما الخطة البديلة التي يمكنك استعمالها لحل المسألة؟

النظرية 6-10

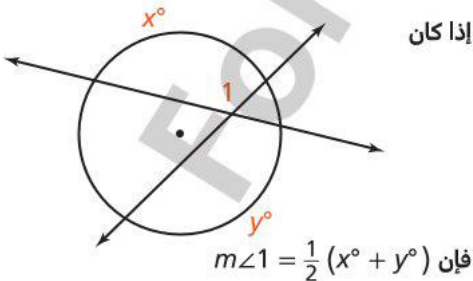
لفظياً:

قياس الزاوية المحصورة بين مستقيمتين متقاطعتين داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين للزاويتين المتكوّنتين من تقاطع المستقيمتين مع الدائرة.

البرهان: انظر التمرين 16

بمخطط:

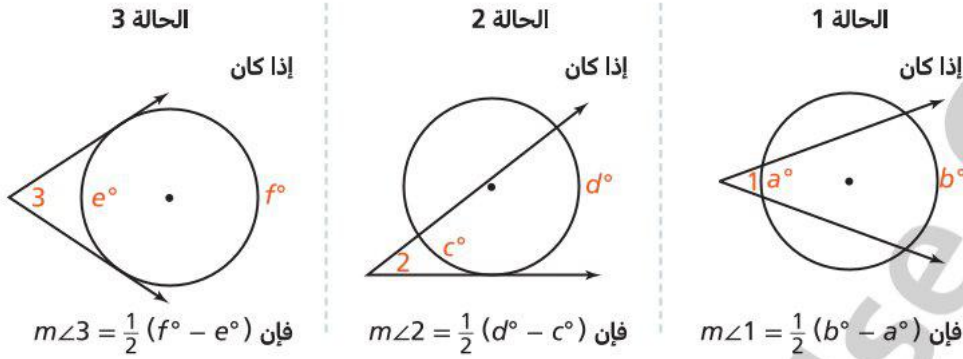
إذا كان



$$m\angle 1 = \frac{1}{2} (x^\circ + y^\circ)$$

النظرية 6-11

قياس الزاوية المحصورة بين مستقيمين يتقاطعان خارج دائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين المكوّنين من تقاطع المستقيمين مع الدائرة (المقصود بالفرق هو قياس القوس الأكبر ناقص القوس الأصغر).



البرهان: انظر المثال 2، وحاول أن تحلّ 2، والتمرين 18

مثال 2

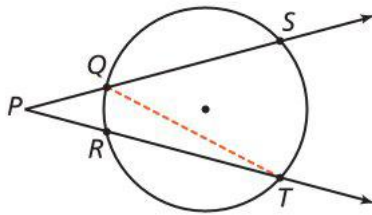
إثبات النظرية 6-11 (الحالة 1)

اكتب برهاناً للنظرية 6-11 (الحالة 1)

المعطيات: القاطعان $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PS}$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle P = \frac{1}{2} (m\widehat{ST} - m\widehat{QR})$

البرهان:



العبارة

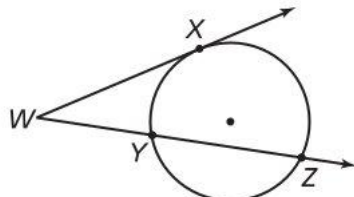
السبب

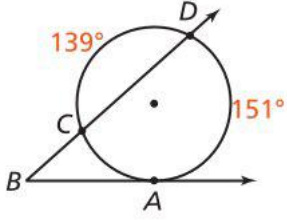
1. $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PS}$ قاطعان.	1. معطيات
2. ارسم $\overline{QT}$.	2. نقطتان تحدّدان قطعة مستقيمة.
3. $m\angle QTP = \frac{1}{2} m\widehat{QR}$	3. نظرية الزوايا المحيطية
4. $m\angle SQT = \frac{1}{2} m\widehat{ST}$	4. نظرية الزوايا المحيطية
5. $m\angle SQT = m\angle P + m\angle QTP$	5. نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
6. $m\angle P = m\angle SQT - m\angle QTP$	6. خاصية الطرح في المساواة
7. $m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{ST} - \frac{1}{2} m\widehat{QR}$	7. التعويض
8. $m\angle P = \frac{1}{2} (m\widehat{ST} - m\widehat{QR})$	8. خاصية التوزيع

نصيحة دراسية

تذكّر أن تُوجد العلاقات المفيدة التي يمكنك رسمها على الشكل المعطى عند إكمال البرهان. يكون رسم $\overline{QT}$ زوايا محيطية، وهي لازمة لهذا البرهان.

حاول أن تحلّ! 2. أثبت النظرية 6-11 (الحالة 2)



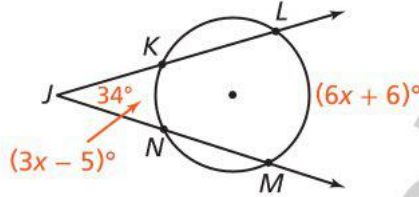
A. أوجد $m\angle ABD$.الخطوة 1 أوجد $m\widehat{AC}$.

$$\begin{aligned} m\widehat{AC} &= 360^\circ - m\widehat{AD} - m\widehat{CD} \\ &= 360^\circ - 151^\circ - 139^\circ \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

الخطوة 2 أوجد $m\angle ABD$.

$$\begin{aligned} m\angle ABD &= \frac{1}{2} (m\widehat{AD} - m\widehat{AC}) \\ &= \frac{1}{2} (151^\circ - 70^\circ) \\ &= 40.5^\circ \end{aligned}$$

بما أن الزاوية منكوّنة خارج الدائرة من قاطع ومماس، طبق النظرية (6-11)، الحالة 2

B. أوجد $m\widehat{LM}$.الخطوة 1 أوجد x .

$$\begin{aligned} m\angle LJM &= \frac{1}{2} (m\widehat{LM} - m\widehat{KN}) \\ 34 &= \frac{1}{2} ((6x + 6) - (3x - 5)) \\ 34 &= \frac{1}{2} (3x + 11) \\ 68 &= 3x + 11 \\ 19 &= x \end{aligned}$$

بما أن الزاوية محصورة بين قاطعين يتقاطعان خارج الدائرة ولا يمر أي منهما بمركز الدائرة، طبق النظرية (6-11)، الحالة 1

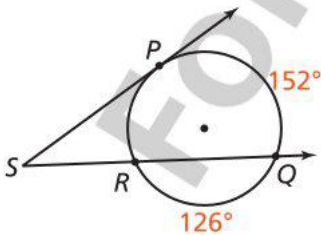
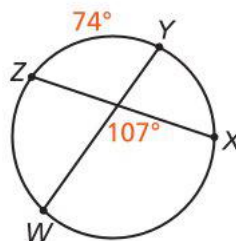
الخطوة 2 أوجد $m\widehat{LM}$.

$$\begin{aligned} m\widehat{LM} &= (6x + 6)^\circ \\ &= (6(19) + 6)^\circ \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

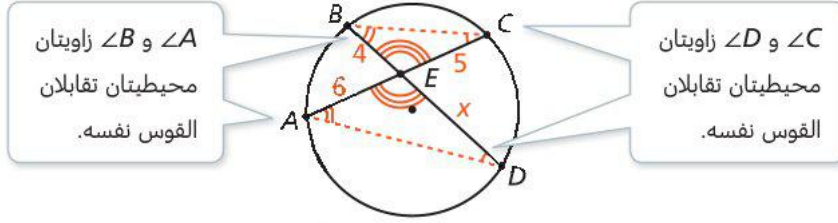
عوّض قيمة x التي تم إيجادها في الخطوة 1

نصيحة دراسية

تذكّر جمع قياسات الأقواس عندما يكون الرأس داخل الدائرة وطرحها عندما يكون خارج الدائرة.

b. أوجد $m\angle PSQ$.3. a. أوجد $m\widehat{WX}$.

أوجد قيمة x .



$\angle B$ و $\angle A$ زاويتان محيطيتان تقابلان القوس نفسه.

$\angle D$ و $\angle C$ زاويتان محيطيتان تقابلان القوس نفسه.

وفقاً لنظرية تشابه المثلثات $\triangle AED \sim \triangle BEC$ ، فإن $\triangle AED \sim \triangle BEC$ وينتج من تشابه المثلثين أن

$$\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{5}$$

$$6(5) = 4(x)$$

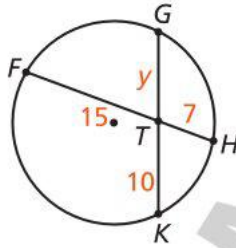
$$7.5 = x$$

خطأ شائع

انتبه إلى تحديد الأضلاع المتناظرة بشكل صحيح في المثلثات المتشابهة. الأضلاع التي تقابل الزوايا المتطابقة هي الأضلاع المتناظرة.

إذن، قيمة x تساوي 7.5

حاول أن تحل! 4. أوجد قيمة y .

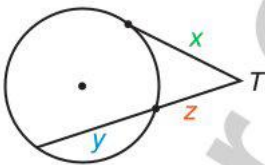


النظرية 6-12

لأي نقطة ودائرة معطاة، يكون ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين من النقطة إلى الدائرة ثابتاً على امتداد أي مستقيم يمر بكل من هذه النقطة والدائرة.

الحالة 3

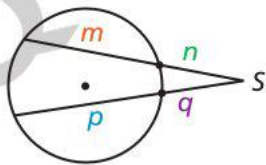
إذا كان



$$x^2 = (z + y)z \text{ فإن}$$

الحالة 2

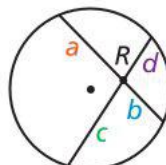
إذا كان



$$(n + m)n = (q + p)q \text{ فإن}$$

الحالة 1

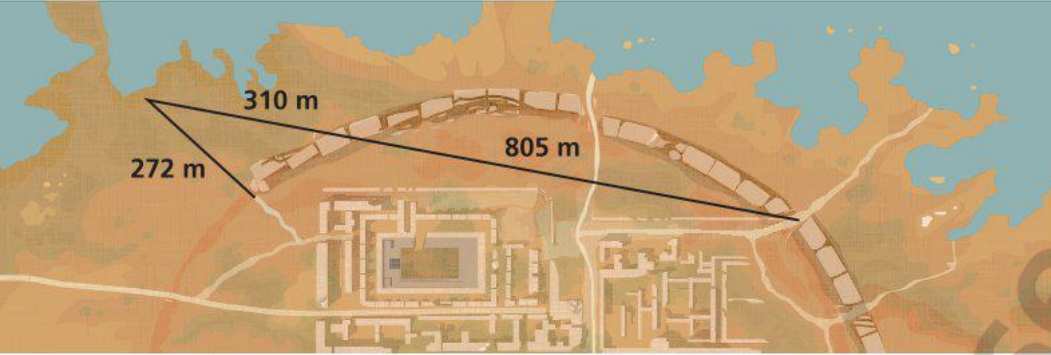
إذا كان



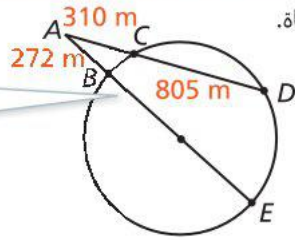
$$ab = cd \text{ فإن}$$

البرهان: انظر التمارين 11, 23, 24

عثر علماء الآثار على جزء من سور دائري لإحدى المدن القديمة، ولما قاسوا المسافات المبينة في الصورة أدناه لاحظوا أن ثمة قطعة مستقيمة طولها 272 m تقع على طول مستقيم يمر بمركز السور الدائري. ما طول قطر السور الدائري؟



ارسم مخططاً لتمثيل الحالة المعطاة.



يمتد المستقيم المار
خلال $\overline{AB}$ من جهة
النقطة B ليمر بمركز
الدائرة، لذلك فإن $\overline{BE}$ هو
قطر للدائرة.

اكتب معادلة تربط بين أطوال القطع المستقيمة.

$$(AB + BE)AB = (AC + CD)AC$$

$$(272 + BE)(272) = (310 + 805)(310)$$

طبق النظرية 6-12، الحالة 2 وعوض
بأطوال القطع المستقيمة المعروفة.

$$73\,984 + 272 \times BE = 345\,650$$

$$272 \times BE = 271\,666$$

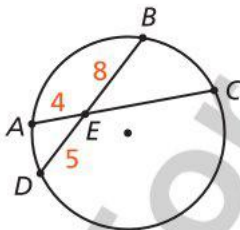
$$BE \approx 998.8$$

إذن، طول قطر السور الدائري يساوي 998.8 m تقريباً.

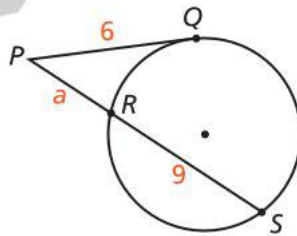
فكر وثابر في الحل

هل ثمة قياسات أخرى كان يمكن
لعلماء الآثار قياسها للمساعدة على
إيجاد القطر باستعمال وسيلة أخرى؟

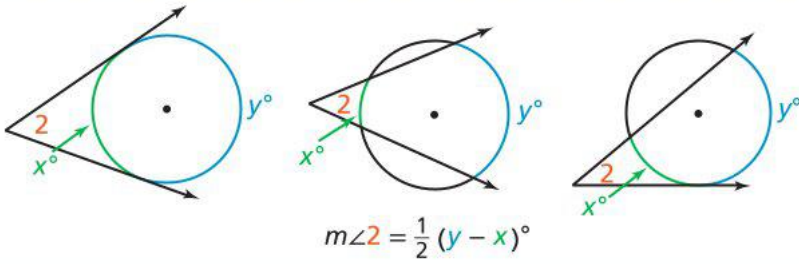
b. أوجد EC .



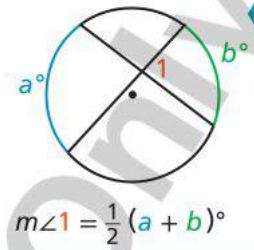
5. a. أوجد قيمة a.



الرأس خارج الدائرة

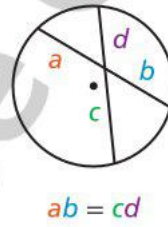
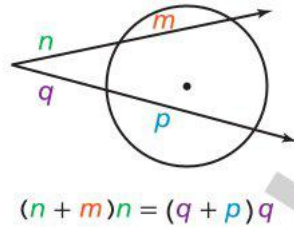
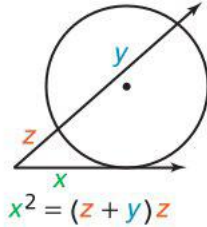


الرأس داخل الدائرة



الزوايا

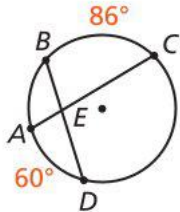
القطع المستقيمة



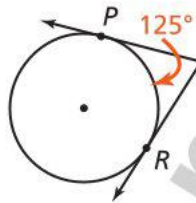
طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد قياسات الزوايا المطلوبة، علماً بأن $\overrightarrow{QP}$ و $\overrightarrow{QR}$ مماسان للدائرة في التمرين 6

5. $m\angle BEC$

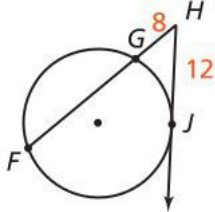


6. $m\angle PQR$

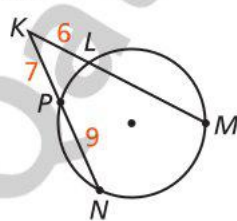


في التمرينين 7 و 8، أوجد الأطوال التالية المطلوبة، علماً أنه في التمرين 7 الشعاع HJ مماس للدائرة.

7. GF



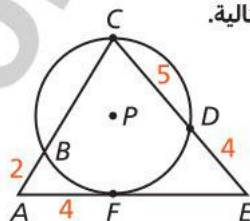
8. LM



في التمرينين 9 و 10، إذا كان $\overline{AE}$ مماساً للدائرة P ، أوجد الأطوال التالية.

9. BC

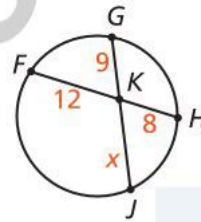
10. EF



عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف ترتبط قياسات الزوايا والأقواس والقطع المستقيمة المتكوّنة بواسطة قواطع متقاطعة؟

2. حلّ الخطأ طلب من خالد إيجاد قيمة x . أوجد خطأ خالد وصحّحه.

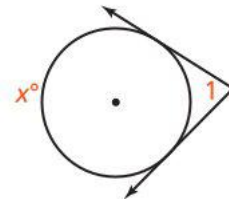


$$\begin{aligned} GK \cdot FK &= HK \cdot JK \\ 12 \cdot 9 &= 8 \cdot x \\ x &= 13\frac{1}{2} \end{aligned}$$

X

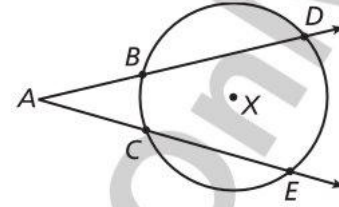
3. المصطلحات ما أوجه الشبه والاختلاف بين القواطع والمماسات لدائرة ما؟

4. ابن الحجج الرياضية الشعاعان المبينان أدناه هما مماسان للدائرة. أثبت أن $m\angle 1 = (x - 180)^\circ$.



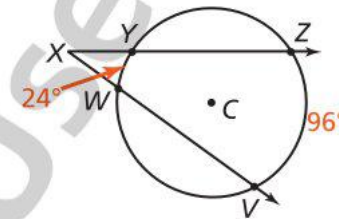
11. ابن الحجج الرياضية بمعلومية $\odot X$ ، اكتب برهاناً ذا عمودين

لنظرية 6-12، الحالة 2



12. حل الخطأ طلب من نورة إيجاد $m\angle VXZ$.

أوجد خطأ نورة و صححه.

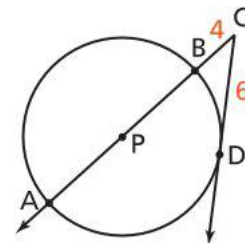


$$\begin{aligned} m\angle VXZ &= \frac{1}{2} (m\widehat{WY} + m\widehat{VZ}) \\ &= \frac{1}{2} (24 + 96) \\ &= 60 \end{aligned}$$

X

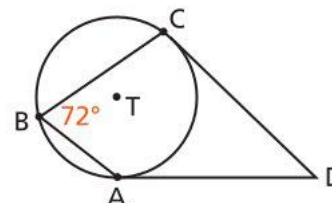
13. روابط في الرياضيات بمعلومية $\odot P$ ، والقاطع $\overrightarrow{CA}$ ،

والمماس $\overrightarrow{CD}$ ، أوجد مساحة $\odot P$.



14. مهارات التفكير العليا بمعلومية $\odot T$ ، والمماسين

$\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CD}$ ، أوجد قياس $\angle ADC$.

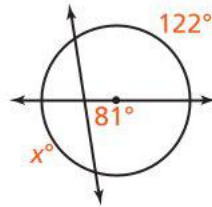
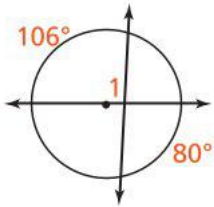


15. تواصل بدقة كيف تصف حالات النظرية 6-11 ؟

في التمرينين 16 و 17، أوجد القياسات التالية. انظر التمرين 1

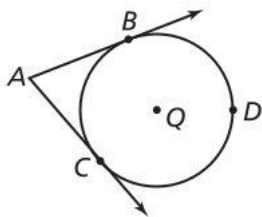
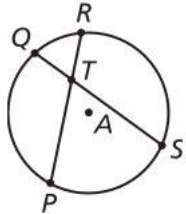
16. $m\angle 1$

17. x°



18. بمعلومية $\odot A$ والقاطعين $\overrightarrow{QS}$ و $\overrightarrow{PR}$ ،

اكتب برهاناً جزئاً للنظرية 6-10 انظر المثال 1

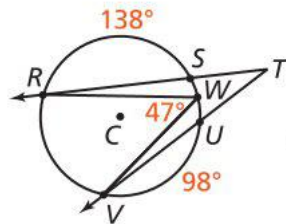


19. بمعلومية $\odot Q$

والمماسين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، اكتب

برهاناً ذا عمودين للنظرية 6-11،

الحالة 3 انظر المثال 2



20. بمعلومية $\odot C$ ، والزاوية

المحيطة $\angle RWV$ ،

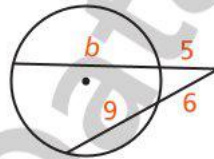
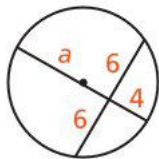
والقاطعين $\overrightarrow{TV}$ و $\overrightarrow{TR}$ ، أوجد قياس

$\angle RTV$. انظر المثال 3

في التمرينين 21 و 22، أوجد الأطوال التالية. انظر التمرين 4

21. a

22. b

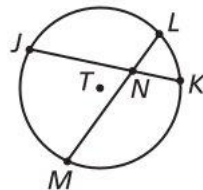


23. بمعلومية $\odot T$ والقاطعين

$\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{JK}$ اللذين يتقاطعان عند

النقطة N، اكتب برهاناً جزئاً للنظرية 6-12،

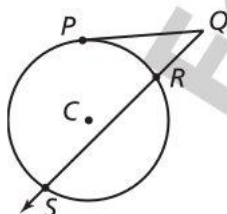
الحالة 1 انظر المثال 4



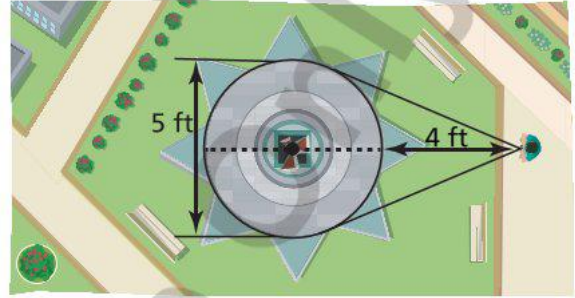
24. بمعلومية $\odot C$ ، والقاطع $\overrightarrow{QS}$

والمماس $\overrightarrow{PQ}$ ، اكتب برهاناً ذا عمودين

لنظرية 6-12، الحالة 3

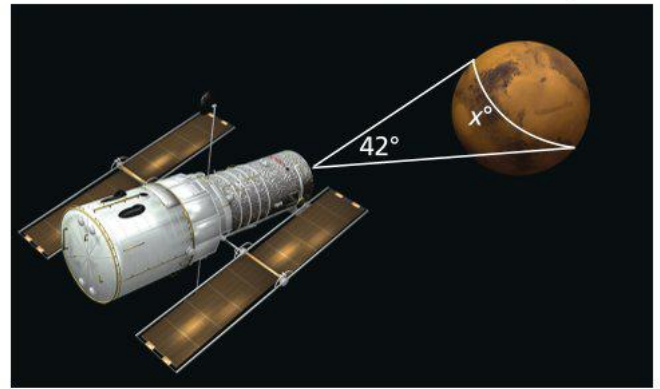


25. **استعمل البنية** وقف محمود في المكان المبين في الشكل ليلنقط صورة لسارية قاعدتها دائرية.

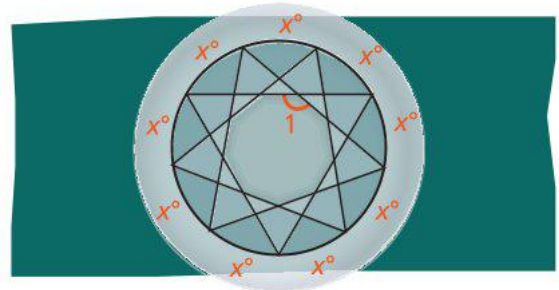


- a. محمود يصدد اتخاذ قرار بشأن العدسات التي يجب استعمالها. ما القيمة الصغرى لقياس زاوية الرؤيا حيث يجب أن يقف محمود ليحصل على أكبر صورة للقاعدة ؟
- b. إذا استعمل محمود عدسة ذات زاوية رؤيا قياسها 40° ، ما أقرب مسافة يستطيع محمود أن يلتقط منها صورة للسارية كاملة ؟

26. **بزر منطقيًا** يدور قمر صناعي فوق خط استواء كوكب المريخ كما هو موضح ويرسل صورًا للعالم الموجود في غرفة المراقبة. ما النسبة المئوية من خط الاستواء التي يمكن للعالم رؤيتها ؟ وضح اجابتك.

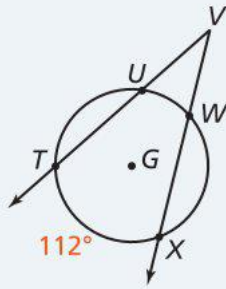


27. **استعمل البنية** تريد إيمان رسم التصميم المبين في الصورة أدناه على قطعة دائرية من الزجاج. بأي قياس ينبغي لها أن تقطع $\angle 1$ ؟ وضح اجابتك.

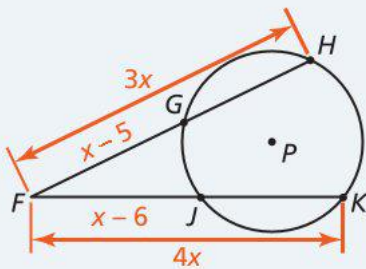


28. أوجد قياس $\widehat{UW}$ إذا كان $m\angle TVX = 34^\circ$ ؟

$m\widehat{UW} = \underline{\hspace{2cm}}$

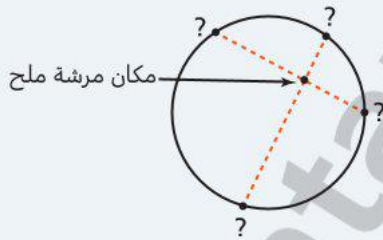


29. **اختبار SAT/ACT** بمعلومية $\odot P$ والقاطعين $\overline{FH}$ و $\overline{FK}$ ، أوجد $\overline{FG}$.



- (A) 3 (B) 4 (C) 9 (D) 27 (E) 36

30. **مهمة أدائية** جلس كل من حازم وراشد وسامر وسالم على طاولة غداء مستديرة قطرها 54 in، تبعد المملحة 27 in عن سامر، و 18 in عن راشد، و 20 in عن سالم، و 30 in عن حازم.



الجزء A بأي ترتيب يجلس الأشخاص الأربعة حول الطاولة ؟ وضح اجابتك.

الجزء B يغير كل من حازم وراشد وسامر وسالم أماكن مقاعدهم ويتوزعون بمسافات متساوية حول الطاولة. إذا لم يتغير مكان المملحة، فما أقرب مسافة من المملحة يمكن لأحدهم أن يجلس عندها ؟ وما أبعد مسافة ؟

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة ؟

1. ما علاقة الأشكال المتكونة نتيجة قطع مستقيم أو أكثر لدائرة، بكل من نصف قطر الدائرة ومحيطها ومساحتها ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. _____ هي منطقة في الدائرة محصورة بين نصفي قطر وقوس من الدائرة.
3. _____ هي زاوية يقع رأسها على الدائرة.
4. _____ والدائرة يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
5. _____ هو جزء من الدائرة محصور بين شعاعي زاوية يقطعان الدائرة.

- الزاوية المركزية
- الوتر
- الزاوية المحيطية
- القوس المحصور
- القاطع
- القطاع الدائري
- قطعة دائرية
- مماس الدائرة

مراجعة المفاهيم والمهارات

الأقواس والقطاعات الدائرية

الدرس 6-1

مراجعة سريعة

يتناسب طول قوس ومساحة قطاع دائري من دائرة مع قياس الزاوية المركزية المناظرة لهما.

يبلغ طول قوس $\frac{n}{360}$ من المحيط، حيث يمثل n قياس الزاوية المركزية بالدرجات، وتبلغ مساحة القطاع الدائري $\frac{n}{360}$ من مساحة الدائرة.

مثال

إذا كان نصف قطر الدائرة P يساوي 6 cm، أوجد مساحة قطاع دائري من الدائرة قياس زاويته المركزية 80°

اكتب صيغة مساحة القطاع الدائري:

$$A = \frac{n}{360} \cdot \pi r^2$$

$$A = \frac{80}{360} \cdot \pi (6)^2$$

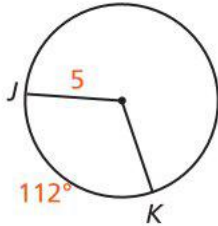
$$A \approx 25.1$$

إذن، مساحة القطاع الدائري 25.1 cm^2 تقريباً.

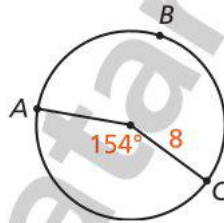
تدرب وحل مسائل

أوجد طول كل قوس من الدائرة بدلالة π في كل مما يلي.

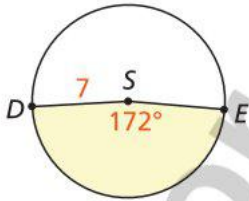
6. $\widehat{JK}$



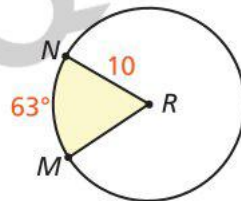
7. $\widehat{ABC}$



9. القطاع الدائري DSE



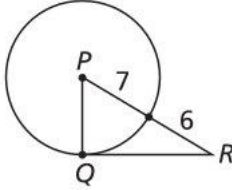
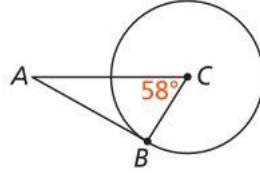
8. القطاع الدائري NRM



10. **بزر منطقيًا** إذا كنت تعلم طول محيط دائرة ومساحة قطاع دائري منها، كيف يمكن إيجاد قياس الزاوية المركزية لهذا القطاع الدائري؟ وضح إجابتك.

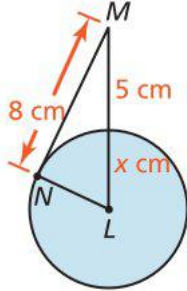
تدرب وحل مسائل

في التمرينين 11 و 12، المستقيمت مماسة للدائرة.
أوجد قيمة كل مما يلي.

11. QR 12. $m\angle CAB$ 

13. **ابن الحجج الرياضية** إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا لـ $\odot T$ ، فهل من الممكن أن نرسم مماسين لـ $\odot T$ عند G و H من النقطة الخارجية نفسها للدائرة T ؟ وضح إجابتك.

14. $\overline{NM}$ مماسًا للدائرة L . أوجد نصف قطر الدائرة. وضح إجابتك.

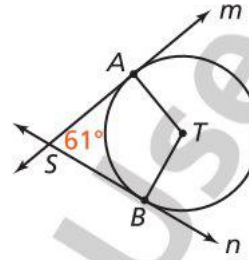


مراجعة سريعة

مماس الدائرة عمودي على نصف قطر الدائرة عند نقطة التماس.
يمكنك استعمال خواص الزوايا القائمة لحل مسائل تتضمن مماسات.

مثال

المستقيمان m و n مماسان لـ $\odot T$. أوجد $m\angle ATB$ ؟



بما أن المستقيمين m و n

مماسان، فإن

$$m\angle SAT = m\angle SBT = 90^\circ$$

تشكل النقاط A, T, B, S شكلًا رباعيًا،

لذلك استعمال مجموع زوايا الشكل

الرباعي لحل المسألة.

$$m\angle SAT + m\angle ASB + m\angle SBT + m\angle ATB = 360^\circ$$

$$90^\circ + 61^\circ + 90^\circ + m\angle ATB = 360^\circ$$

$$m\angle ATB = 119^\circ$$

إذن، $m\angle ATB = 119^\circ$

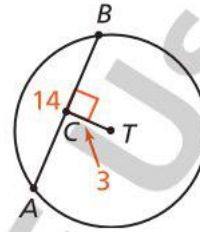
مراجعة سريعة

للأوتار في الدائرة الخصائص التالية:

- الوتران اللذان في الدائرة نفسها ومتساويان الطول يكون لهما زاويتان مركزيان متطابقتان، وقوسان متطابقان، ويكونا متساويين البعد عن مركز الدائرة.
- الأوتار ينصفها قطر الدائرة العمودي على الوتر.

مثال

أوجد نصف قطر الدائرة T ؟



استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد نصف القطر.

بما أن $\overline{CT} \perp \overline{AB}$ ، فإن $\overline{CT}$ ينصف $\overline{AB}$.
إذن، $CB = 7$.

$$(CT)^2 + (CB)^2 = (BT)^2$$

$$3^2 + 7^2 = (CB)^2$$

$$BT \approx 7.6$$

نصف قطر T يساوي 7.6 تقريبًا.

تدرب وحل مسائل

في التمارين 15-17،

نصف قطر T يساوي 7،

أوجد قيمة كل مما يلي. قَرِّب
الإجابات إلى أقرب جزء من عشرة.

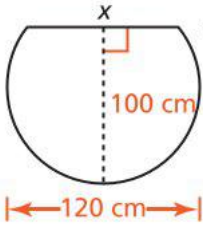
15. FH

16. CD

17. $m\angle BTA$

18. ابحث عن العلاقات الدائرتان T و S تتقاطعان عند

النقطتين A و B . ما العلاقة بين $\overleftrightarrow{TS}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ ؟ وضح إجابتك.



19. يقطع مفاول جزءًا من سطح مطبخ دائري

بحيث يتلاءم مع حائط.

كم ينبغي أن يكون طول القطعة x ؟

قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

مراجعة سريعة

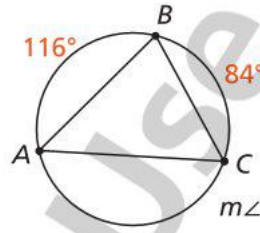
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها على الدائرة. ونتيجة لهذا:

- الزوايا المتقابلة في شكل رباعي دائري تكون متكاملة.
- قياس الزاوية المتكوّنة من مماس ووتر يساوي نصف قياس القوس المحصور بينهما.

مثال

أوجد قياس زوايا $\triangle ABC$.

استعمل الزاوية المحيطية:



$$m\angle BAC = \frac{1}{2}(84^\circ) = 42^\circ$$

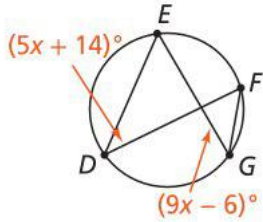
$$m\angle BCA = \frac{1}{2}(116^\circ) = 58^\circ$$

$$m\angle ABC = 180^\circ - 42^\circ - 58^\circ = 80^\circ$$

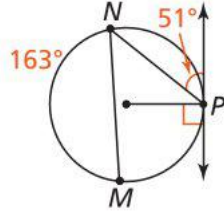
تدرب وحل مسائل

أوجد قيمة كل مما يلي.

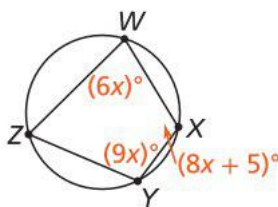
20. $m\widehat{EF}$



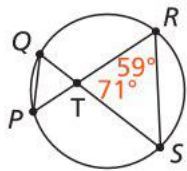
21. $m\angle MNP$



22. $m\angle WZY$



23. $m\angle QPR$



24. **عقم** إذا كانت دائرة تمر برؤوس مستطيل، ما الذي يجب أن ينطبق على قطري المستطيل؟ وضح إجابتك.

الأوتار المتقاطعة

الدرس 5-6

مراجعة سريعة

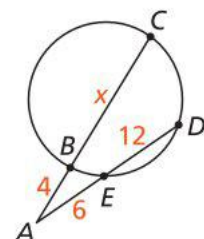
للأوتار المتقاطعة في الدائرة الخصائص التالية:

- قياس الزاوية المحصورة بين مستقيمين يتقاطعان داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين المكوّنين من تقاطع المستقيمين مع الدائرة.
- قياس الزاوية المحصورة بين مستقيمين يتقاطعان في نقطة خارج دائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابلين المكوّنين من تقاطع المستقيمين مع الدائرة.

مثال

ما قيمة x ؟

استعمل العلاقات بين القطع المستقيمة الفاطعة:



$$(AE)(AE + ED) = (AB)(AB + BC)$$

$$6(6 + 12) = 4(4 + x)$$

$$108 = 16 + 4x$$

$$92 = 4x$$

$$23 = x$$

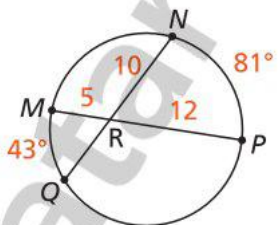
إذن، قيمة x تساوي 23

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 25 و 26، أوجد كل قيمة.

25. QR

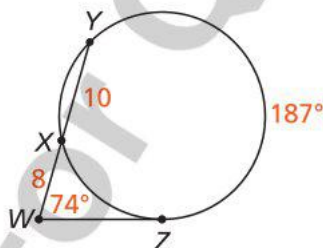
26. $m\angle NRP$



في التمرينين 27 و 28، $\overline{WZ}$ مماساً للدائرة. أوجد كل قيمة.

27. WZ

28. $m\widehat{XZ}$



29. **ابن الحجج الرياضية** قال أحد الطلاب إنه إذا كانت $\angle A$ متكوّنة من قاطعين يتقاطعان خارج الدائرة، فإن $m\angle A < 90^\circ$. هل توافقه الرأي؟ وضح إجابتك.

For Qatar MOE Use Only

السؤال الأساس

كيف يمكنك استعمال المصفوفات في حل المسائل ؟

نظرة عامة على الوحدة

7-1 Operations With Matrices

7-2 Matrix Multiplication

7-3 Vectors

7-4 Determinants the Inverses of a matrix

7-5 Solving Linear Equations Using Matrices

7-1 العمليات على المصفوفات

7-2 ضرب المصفوفات

7-3 المتجهات

7-4 المحددات والنظير الضربي للمصفوفة

7-5 حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال المصفوفات

Topic Vocabulary

- matrix
- matrix order
- equal matrices
- scalar multiplication
- scalar
- addition of matrices
- subtraction of matrices
- zero matrix
- additive inverse matrix
- commutative property
- identity matrix
- square matrix
- product matrix
- vector
- direction
- initial point
- terminal point
- magnitude
- component form
- inverse matrix
- determinant of a 2×2 matrix
- coefficient matrix
- variable matrix
- constant matrix

مصطلحات الوحدة

- مصفوفة
- رتبة مصفوفة
- المصفوفات المتساوية
- الضرب بعدد ثابت
- عدد ثابت
- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- المصفوفة الصفريّة
- مصفوفة النظير الجمعي
- خاصية الإبدال
- مصفوفة محايدة
- مصفوفة مربعة
- مصفوفة ناتج الضرب
- متجه
- اتجاه
- نقطة بداية
- نقطة نهاية
- مقدار
- صورة تركيبية
- النظير الضربي للمصفوفة
- محددة مصفوفة من الرتبة 2×2
- مصفوفة المعاملات
- مصفوفة المتغيرات
- مصفوفة الثوابت



	A	B	C	D
A	1	1	1	0
B	1	1	1	0
C	1	1	1	1
D	0	0	1	1

تُستعمل المصفوفات المربعة لتمثيل العلاقات بين تقاطعات الطرق في المدن الكبرى، حيث يُستعمل العدد 1 في حال كان تقاطعان موصولين بطريق، يُستعمل العدد 0 في حال لم يكونا موصولين بطريق.

لتمثيل العلاقات بين التقاطعات B, C, D الظاهرة في الرسم المجاور، يمكن استعمال المصفوفة أدناه. يوجد طريق يصل بين B و C وطريق آخر يصل بين C و D، ولا يصل أي طريق بين B و D.

	B	C	D
B	1	1	0
C	1	1	1
D	0	1	1

أما لتمثيل العلاقات بين التقاطعات A, B, C, D، يمكن استعمال المصفوفة المجاورة، حيث توجد طرق تصل التقاطع A بكل من التقاطعات B و C بينما لا يوجد طريق يصل بين A و D، ولا بين B و D.



يمكن تمثيل كل تقاطعات الطرق في مدينة معينة بمصفوفة كبيرة. إن رتبة المصفوفة هذه تساعد في تقدير الأنماط المرورية، بما في ذلك آثار إغلاق أو توسيع طريق معين.



مهمتك: تحليل حركة المرور

تختار أنت وزملاؤك أحد تقاطعات الطرق المزدهمة في مدينة من المدن القطرية. تحددون منطقة تتضمن هذا التقاطع وتمثلون خارطة التقاطعات فيها والطرق التي تصل بينها بمصفوفة وتقدرن الأنماط في حركة المرور عند هذا التقاطع. ضع فرضيات تحدد تغييراً في وضع طريق أو أكثر يؤدي إلى هذا التقاطع. تشمل التغيرات الحالات الثلاث التالية: إغلاق الطريق لسبب ما، الحد من حركة المرور عليها بسبب أشغال، توسيعها. تحللون بعد ذلك تأثير هذه الفرضيات على حركة المرور عند التقاطع الذي تم اختياره.

أستطيع... تفسير أجزاء المصفوفة
واستعمال المصفوفات للجمع
والطرح والضرب بعدد ثابت.

معايير الدرس

10.4.1 و 10.4.2 و 10.4.3

10.4.4 و 10.4.5

نمذج وناقش



تعرض لوحة إعلانات عدد القمصان المعروضة
للبيع في أحد المتاجر عبر الإنترنت باللونين:
الأحمر والأزرق، وبالمقاسات: S, M, L, XL .

A. أنشئ جدولاً يوضح القمصان المعروضة للبيع.

B. في نهاية اليوم الأول حقق المتجر المبيعات
التالية:

قمصان حمراء اللون: $4 S, 6 M, 3 L, 5 XL$

قمصان زرقاء اللون: $2 S, 8 M, 4 L, 0 XL$

أنشئ جدولين آخرين أحدهما يوضح مبيعات القمصان والآخر يوضح القمصان المتبقية.

C. **ابحث عن العلاقات** ما العلاقة التي استعملتها عند تنظيم جدولي القمصان المتبقية في الجزء B ؟

السؤال الأساس

كيف يمكنك تفسير المصفوفات وإجراء العمليات عليها ؟

مثال 1

تعريف المصفوفات وتفسير البيانات الواردة فيها

المصفوفة هي تنظيم بيانات على شكل مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية
محصورة بين قوسين.

يُرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال أحد الحروف الكبيرة $A, B, \dots$.

إذا كانت المصفوفة تتكوّن من r صف و c عمود فإن **رتبتها** تساوي $c \times r$.

A. **مثّل الجدول أدناه في مصفوفة مبيّنة رتبتها.**

	S	M	L
قمصان	5	3	0
سترات	2	1	4

عمود	5	3	0
صف	2	1	4

بما أن المصفوفة تتكوّن من صفين و 3 أعمدة

فإن رتبتها 2×3 وتكتب $A_{2 \times 3}$

تساعد المصفوفات على تنظيم المعلومات. على سبيل المثال،

تمثل أعمدة هذه المصفوفة المقاسات (S, M, L) ، بينما تمثّل

الصفوف نوع قطع الملابس (القمصان والسترات)،

إذن، "4" تمثّل 4 سترات ذات مقاسات كبيرة.

يتبع في الصفحة التالية

الاستيعاب المفاهيمي

المصطلحات

- مصفوفة matrix
- رتبة مصفوفة matrix order
- المصفوفات المتساوية equal matrices
- الضرب في عدد ثابت scalar multiplication
- عدد ثابت scalar
- جمع المصفوفات addition of matrices
- طرح المصفوفات subtraction of matrices
- المصفوفة الصفرية zero matrix
- مصفوفة النظير الجمعي additive inverse matrix
- خاصية الإبدال commutative property

B. كيف تشير إلى مصفوفة كاملة أو إلى عناصر المصفوفة ؟

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

يُستعمل الحرف الكبير A للإشارة إلى المصفوفة، وتُسمى عندئذ المصفوفة A ، أو A فقط.

يُشار إلى عنصر محدد a_{ij} باستعمال رموز سفلية للدلالة على الصف والعمود حيث يقع العنصر. عمومًا، يدل a_{ij} على العنصر الذي في الصف i والعمود j .
رقم الصف في الرمز السفلي يأتي أولاً ثم رقم العمود. في المصفوفة A ، يشير a_{32} إلى العنصر الذي في الصف 3 والعمود 2، وهو العدد 8

$$\begin{matrix} & j & k \\ g & \begin{bmatrix} a_{gj} & a_{gk} \end{bmatrix} \\ h & \begin{bmatrix} a_{hj} & a_{hk} \end{bmatrix} \\ i & \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{ik} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

تواصل بدقة

تذكر أن رتبة المصفوفة تعطي في الصورة $r \times c$ ، حيث r يمثل عدد الصفوف و c يمثل عدد الأعمدة. ما رتبة هذه المصفوفة ؟

C. ما قيم المتغيرات في معادلة المصفوفة ؟

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2x & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & y \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتساوية تكون لها نفس الرتبة، والعناصر المتناظرة فيها تكون متساوية.

$$a_{11}: 12 = 12$$

$$a_{12}: y = 0$$

$$a_{21}: 2x = 14, x = 7$$

$$a_{22}: 10 = 10$$

إذن، تكون هاتان المصفوفتان متساويتين عندما $x = 7$ و $y = 0$.

1. حاول أن تحل! في المصفوفة C جانبًا، تمثل العناصر عدد الموظفين في شركة.

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

يشير العمود الأول إلى النساء والعمود الثاني إلى الرجال،

ويشير الصف الأول إلى موظفي قسم المحاسبة والصف الثاني

إلى موظفي قسم المبيعات. أوجد c_{12} ، c_{21} ، c_{22} ثم اذكر ما يمثل كل عدد.

يستعمل أحد المتاجر المصفوفة التالية ليمثل أسعار الثياب.

$$C = \begin{bmatrix} 320 & 210 & 160 \\ 240 & 110 & 65 \end{bmatrix}$$

يمثل الصف الأول أسعار البنائيل والصف الثاني أسعار السترات وتمثل الأعمدة الأصناف: ملابس يومية وملابس رياضية وملابس رسمية على الترتيب. إذا كان معدل ضريبة المبيعات على الأسعار 5%، أوجد قيمة ضريبة المبيعات على كل قطعة باستعمال عملية على المصفوفة.

معدل ضريبة المبيعات هو 5%، يمكنك ضرب كل عنصر في المصفوفة C في العدد 0.05 لتحصل على المصفوفة S التي تمثل قيم ضريبة المبيعات على كل قطعة.

الضرب في عدد ثابت يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في العدد الحقيقي نفسه، ويُسمى **العدد الثابت**.

$$S = 0.05 \times C$$

$$= 0.05 \times \begin{bmatrix} 320 & 210 & 160 \\ 240 & 110 & 65 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 320(0.05) & 210(0.05) & 160(0.05) \\ 240(0.05) & 110(0.05) & 65(0.05) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10.50 & 8 \\ 12 & 5.50 & 3.25 \end{bmatrix}$$

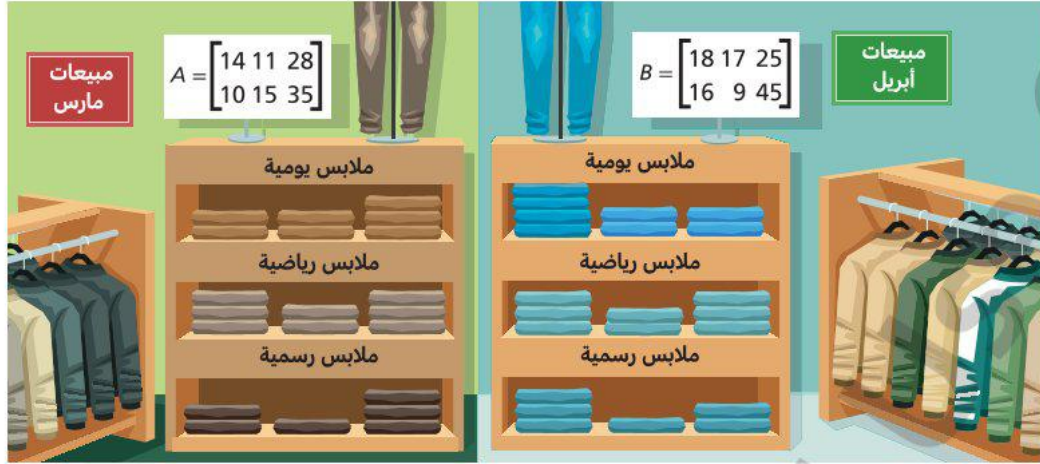
تمثل المصفوفة S قيمة الضريبة على مبيعات كل قطعة من أصناف الثياب.

الضرب في عدد ثابت لا يغيّر رتبة المصفوفة أو مواقع الصفوف والأعمدة في المصفوفة الأساسية.

حاول أن تحل! 2. في المصفوفة C أدناه، يمثل الصف الأول أسعار قمصان والصف الثاني أسعار بنائيل، وتمثل الأعمدة ملابس يومية وملابس رياضية وملابس رسمية على الترتيب. إذا كان معدل الضريبة على المبيعات 6%، أوجد ضريبة المبيعات على كل قطعة باستعمال عملية الضرب القياسي.

$$C = \begin{bmatrix} 75 & 40 & 25 \\ 100 & 60 & 30 \end{bmatrix}$$

يستعمل أحد المتاجر المصفوفات لمتابعة المبيعات الشهرية للثياب الجاهزة. يمثل الصف الأول في المصفوفتين A و B مبيعات البناتيل، ويمثل الصف الثاني في المصفوفتين مبيعات القمصان. تمثل الأعمدة في المصفوفتين الأصناف: ملابس يومية وملابس رياضية وملابس رسمية على الترتيب وذلك خلال شهري مارس وأبريل.



A. أوجد إجمالي المبيعات في الشهرين.

يمثل ناتج $A + B$ إجمالي المبيعات من كل صنف في الشهرين. اجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين.

يمثل العنصر 25 عدد البناتيل من الملابس الرسمية المباعة في شهر أبريل.

$$A + B = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 28 \\ 10 & 15 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 17 & 25 \\ 16 & 9 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+18 & 11+17 & 28+25 \\ 10+16 & 15+9 & 35+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 28 & 53 \\ 26 & 24 & 80 \end{bmatrix}$$

يمثل العنصر 26 عدد القمصان من الملابس اليومية المباعة في الشهرين.

B. أوجد الفرق في عدد العناصر المباعة كل شهر.

يمثل ناتج $A - B$ الفرق بين مبيعات الشهرين. اطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

$$A - B = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 28 \\ 10 & 15 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 17 & 25 \\ 16 & 9 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14-18 & 11-17 & 28-25 \\ 10-16 & 15-9 & 35-45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 \\ -6 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة $A - B$ ، العدد الموجب يعني أن الصنف أكثر مبيعاً في الشهر الأول (مارس). العدد السالب يعني أن الصنف أكثر مبيعاً في الشهر الثاني (أبريل).

C. هل من الممكن جمع وطرح أي مصفوفتين؟

يكون جمع أو طرح المصفوفات ممكناً فقط إذا كان لهما نفس الرتبة ويتم جمع أو طرح العناصر المتناظرة فيها. في الجزأين السابقين من المثال، استطعنا جمع وطرح المصفوفتين A و B لأن لهما نفس الرتبة وهي 2×3 . لذا تم جمع وطرح المصفوفتين A و B لأن رتبة كل منهما 2×3 .

نصيحة دراسية

جمع المصفوفات يشبه جمع الحدود المتشابهة. عند إيجاد $(a + bx) + (c + dx)$ يمكنك جمع $a + c$ و $bx + dx$ مثلما تجمع الأجزاء المتناظرة من المصفوفات.

3. حاول أن تحل! 3. يمثل الصف الأول في المصفوفتين M و N عدد الموظفين الذكور في الشركة M والشركة N على التوالي. يمثل الصف الثاني في المصفوفتين عدد الموظفين الإناث في الشركة M والشركة N . تمثل الأعمدة في المصفوفتين 3 دوائر في الشركة. الدائرة التقنية T والدائرة الإدارية A والدائرة التجارية C على الترتيب:

$$M = \begin{bmatrix} 143 & 150 & 90 \\ 120 & 130 & 84 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 135 & 137 & 87 \\ 140 & 98 & 95 \end{bmatrix}$$

- a. أوجد إجمالي الموظفين في الشركتين M و N .
b. أوجد الفرق في عدد الموظفين بين الشركتين M و N .

فهم النظرير الجمعي

مثال 4

الاستيعاب المفاهيمي

إذا كانت المصفوفات A, B, C, D كما في الترتيب أدناه، كيف يمكنك جمع هذه المصفوفات وطرحها ؟

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -3 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

A. كيف نفسر وجود المصفوفة الصفرية ؟

$$A + D = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 7 & -3 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

كل عنصر في $A + D$ يساوي صفراً، لذا تُسمى هذه المصفوفة **المصفوفة الصفرية**.

هذه المصفوفة تسمى المصفوفة الصفرية من الرتبة 2×3 ، كل العناصر في مصفوفة صفرية من الرتبة 2×3 تساوي الصفر، وكذلك المصفوفة الصفرية من الرتبة 3×2 جميع عناصرها تساوي الصفر ولكن لها ثلاثة صفوف وعمودين.

خطأ شائع

تقدم رتبة المصفوفة $r \times c$ دائماً عدد الصفوف أولاً ثم عدد الأعمدة.

B. ما النظرير الجمعي للمصفوفة B ؟

عندما يكون ناتج جمع مصفوفتين مصفوفة صفرية فإن كل مصفوفة تُسمى **مصفوفة النظرير الجمعي** للآخرى. حل المعادلة $B + X = 0$ ، حيث X و B هما مصفوفتان. بما أن $B + X = 0$ ، فإن المصفوفة X هي النظرير الجمعي للمصفوفة B .

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 0 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فكر في عناصر المصفوفة X التي تجعل كل عنصر في مصفوفة المجموع يساوي الصفر.

$$X = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

نحصل على النظرير الجمعي لمصفوفة بضرب هذه المصفوفة في العدد -1

C. ما العلاقة بين $A + C$ و $C + A$ ؟

$$A + C = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -7 & 3 \\ 4 & 23 & -11 \end{bmatrix}$$

$$C + A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -7 & 3 \\ 4 & 23 & -11 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من هذا المثال أن: $A + C = C + A$.

مصفوفة الجمع ناتجة عن جمع الأعداد الحقيقية كعناصر متناظرة في مصفوفتين، وبما أن جمع الأعداد الحقيقية عملية إبدالية فإن جمع مصفوفتين هي أيضاً عملية إبدالية وتُسمى **خاصية الإبدال**.

يتبع في الصفحة التالية

حاول أن تحل! 4. إذا كانت المصفوفات P, Q, R كما في الترتيب أدناه:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 6 & 0.5 \\ -3 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

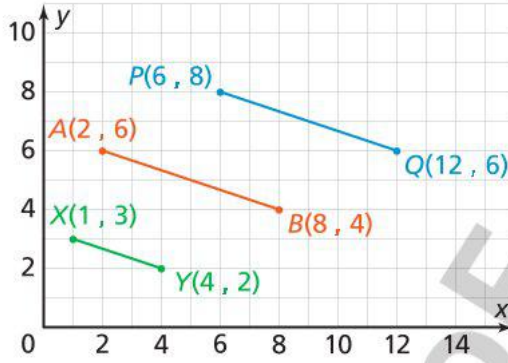
a. أوجد $R - Q$. ما مصفوفات المجاميع أو الفروق الأخرى التي يمكن حسابها؟

b. أوجد النظير الجمعي لكل من P و Q و R .

استعمال المصفوفات لإزاحة وتمدد الأشكال

مثال 5

في هذا المخطط، تراح $\overline{AB}$ بمقدار 4 وحدات إلى اليمين ووحدين إلى الأعلى وصولاً إلى $\overline{PQ}$. كذلك فإن $\overline{XY}$ ناتجة عن تمدد $\overline{AB}$ بمعامل يساوي $\frac{1}{2}$ ، ومركزه عند نقطة الأصل.



كيف تستعمل المصفوفات لتبَيّن الإزاحة والتمدد؟

A. وضح إزاحة $\overline{AB}$ إلى $\overline{PQ}$ باستعمال المصفوفات.

يمكن أن تمثل المصفوفة ذات العمود الواحد زوجاً مرتباً. يمكن أن تمثل المصفوفة ذات العمودين زوجين مرتبين، حيث يمثل الصف الأول إحداثيات x ويمثل الصف الثاني إحداثيات y .

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}: \text{أطراف } \overline{AB}$$

بما أن المصفوفة تتكون من صفين وعمود واحد فإن رتبته 2×1 وتسمى "مصفوفة عمود"

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}: \text{النقطة } A$$

يمكن تمثيل إزاحة في صورة مصفوفة. بما أن مصفوفة $\overline{AB}$ مكونة من عمودين، إذن مصفوفة إزاحة $\overline{AB}$ مكونة من عمودين أيضاً.

بما أن $\overline{PQ}$ نتجت عن إزاحة إحداثيات نقاط $\overline{AB}$ حيث ازدادت إحداثيات x بمقدار 4 وحدات وازدادت إحداثيات y بمقدار وحدثين، لذا اجمع المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ مع المصفوفة التي تمثل $\overline{AB}$.

لتوضيح إزاحة $\overline{AB}$ استعمال جمع المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة
النقاط الأصلية

مصفوفة
الإزاحة

مصفوفة
الصورة الناتجة

يمثل المجموع نقاط الأطراف $P(6, 8)$ و $Q(12, 6)$.

إذن، نقاط أطراف $\overline{PQ}$ هي: $P(6, 8)$ و $Q(12, 6)$

يتبع في الصفحة التالية

عَمَم

يمكن تمثيل إحداثيات رؤوس مضلع عدد أضلاعه n في صورة مصفوفة $2 \times n$ التي لها صفان و n أعمدة.

B. وضح تمدد $\overline{AB}$ إلى $\overline{XY}$ بمعامل قياس يساوي $\frac{1}{2}$

استعمل الضرب في عدد ثابت:

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

العدد الثابت مصفوفة مصفوفة
النقاط الأصلية الصورة الناتجة

يمكن استعمال هذه الطريقة فقط
للتمدد الذي مركزه عند نقطة الأصل.

إذن، نقاط أطراف $\overline{XY}$ هي: $X(1, 3)$ و $Y(4, 2)$

5. **حاول أن تحل!** قطعة مستقيمة طرفها $M(8, -7)$ و $N(1, 2)$.

a. استعمل المصفوفات لتمثيل إزاحة $\overline{MN}$ إلى $\overline{RS}$ بمقدار 6 وحدات إلى اليسار

و 3 وحدات إلى الأسفل. ما إحداثيات النقطتين R و S ؟

b. استعمل المصفوفات لتمثيل تمدد $\overline{MN}$ إلى $\overline{DE}$ بمعامل قياس يساوي 3 ومركزه

عند نقطة الأصل. ما إحداثيات النقطتين D و E ؟

الرتبة

تذكر رتبة المصفوفة في صورة ضرب عدد الصفوف (r) في عدد الأعمدة (c): $r \times c$.

$$A = \begin{bmatrix} t & u & v \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة A هي 2×3 لأنها مكونة من صفين و 3 أعمدة.

إن $a_{13} = v$ ، لأن v يقع في الصف الأول والعمود الثالث.

العمليات

لضرب مصفوفة في عدد ثابت، اضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد الثابت.

$$k \times \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kw & kx \\ ky & kz \end{bmatrix}$$

يكون جمع أو طرح المصفوفات ممكناً فقط إذا كان لهما نفس الرتبة.

اجمع العناصر المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

اطرح العناصر المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-w & q-x \\ r-y & s-z \end{bmatrix}$$

يمكن أن تمثل مصفوفة تحويلًا لشكل هندسي:

التمدد

$$3 \times \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & -8 \\ 6 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -9 & 0 & -24 \\ 18 & 15 & -6 & 21 \end{bmatrix}$$

تمدد شكل رباعي مركزه عند نقطة الأصل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

إزاحة لقطعة مستقيمة:

طبق فهمك

في التمرينين 6 و 7، حدّد العنصر المطلوب لكل مصفوفة.

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; a_{23}

7. $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$; a_{11}

في التمارين 8-11، احسب ناتج العملية في كل مما يلي إذا كانت:

$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A + B$

9. $B - A$

10. $4A$

11. $A - B$

12. طرفا $\overline{AB}$ ممثّلان بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

أوجد صورة القطعة المستقيمة بعد تمدد مركزه نقطة الأصل

بمعامل قياس يساوي 2

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك تفسير المصفوفات

وإجراء العمليات عليها ؟

2. حلّ الخطأ يقول محمود إن ناتج

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

بِتين خطأ محمود وصّحه.

3. تواصل بدقة اشرح كيف تعرف إذا كان بالإمكان جمع

مصفوفتين. ثم اشرح كيفية جمعهما.

4. المصطلحات ما المصفوفات المتساوية ؟ اذكر مثالاً عليها.

5. بزر منطقياً في مصفوفة A رتبته 3×4 ، هل العنصر a_{32}

هو نفسه العنصر a_{23} ؟ وضح إجابتك.

20. مثل الجدول التالي في مصفوفة مبيّنة رتبته. انظر المثال 1

عدد الطلاب		
الصف	شعبة A	شعبة B
الثامن	28	25
التاسع	26	23

21. في المصفوفة D أدناه، تمثّل العناصر عدد الموظفين في شركة.

يتضمن العمود الأول الرجال والعمود الثاني النساء، ويتضمن الصف الأول الموظفين المتزوجين والصف الثاني الموظفين غير المتزوجين. أوجد d_{11} ، d_{12} ، d_{22} واذكر ما يمثّله كل عدد.

انظر المثال 1

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

22. في مصفوفة الأسعار P أدناه، تمثّل الصفوف أسعار السترات

والبناطيل، وتمثّل الأعمدة ألوان القطن: بيضاء وحمراء ومتعددة

الألوان. إذا كان معدل ضريبة المبيعات 7%، أوجد ضريبة

المبيعات لكل قطعة. انظر المثال 2

$$P = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 25 & 35 & 55 \end{bmatrix}$$

في التمارين 23-26، إذا كانت:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

احسب ناتج العملية في كل مما يلي، وفي حال كانت عملية الحساب

غير ممكنة، اذكر ذلك. انظر المثال 3

23. $X + Y$

24. $Z - X$

25. $X + Z$

26. $X - Z$

في التمارين 27-30، أوجد النظير الجمعي للمصفوفة. انظر المثال 4

27. $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

28. $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -5 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$

29. $S = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

30. $T = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 10 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

في التمرينين 31 و 32، قطعة مستقيمة طرفها النقطتان

$F(6, 11)$ و $E(5, -1)$. انظر المثال 5

31. استعمل المصفوفات لتمثيل إزاحة $\overline{EF}$ إلى $\overline{YZ}$ بمقدار 5 وحدات

إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأسفل. ما إحداثيات Y و Z ؟

32. استعمل المصفوفات لتمثيل تمدد $\overline{EF}$ إلى $\overline{UV}$ بمعامل قياس

يساوي 4، ويكون مركزه نقطة الأصل. ما إحداثيات U و V ؟

13. تواصل بدقة اشرح كيفية الحل لإيجاد قيمة كل متغير.

ثم أوجد قيمة كل متغير.

$$\begin{bmatrix} a & b-3 \\ c & d+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

14. فكّر وثابر في الحل أوجد ناتج جمع المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

والتظير الجمعي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

15. حلّ الخطأ صف خطأ خالد عند إزاحة النقاط $A(1, -3)$

و $B(2, 1)$ و $C(-3, -2)$ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ووحدة

واحدة إلى الأعلى، وصّحه.

مصفوفة النقاط الأصلية $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

مصفوفة الإزاحة $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الصور الناتجة $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

16. ابن الحجج الرياضية افترض أن A و B مصفوفتان لهما نفس

الرتبة. اشرح كيفية إيجاد $A + B$ و $A - B$ والمصفوفة C بحيث

تكون $A + C$ هي المصفوفة الصفرية.

17. مهارات التفكير العليا اشرح لماذا النظير الجمعي للمصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1+3 \end{bmatrix}$$

هو نفسه.

18. روابط في الرياضيات في مجموعة الأعداد الحقيقية، إذا كان ناتج

جمع عددين يساوي العنصر المحايد للجمع فإن كل عدد منهما هو

نظير جمعي للآخر.

هل تنطبق هذه الخاصية على جمع المصفوفات؟ وضح إجابتك.

19. بزر منطقياً إحداثيات رؤوس مربع ممثلة في مصفوفة. ثم ضربت

هذه المصفوفة في العدد الثابت 3، ما الفرق بين مساحة المربع

الجديد ومساحة المربع الأصلي ؟

36. استعمل هاتين المصفوفتين لاختيار الإجابة الصحيحة التي تكمل الجملتين التاليتين.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة A ، قيمة العنصر a_{31} _____ قيمة العنصر a_{12} .

في المصفوفة B ، قيمة العنصر b_{31} _____ قيمة العنصر b_{12} .

Ⓐ أصغر من؛ أصغر من

Ⓑ أصغر من؛ أكبر من

Ⓒ أكبر من؛ أصغر من

Ⓓ أكبر من؛ أكبر من

37. اختبار SAT/ACT إذا كان $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة $a + b$ تساوي:

Ⓐ 29 Ⓑ $\frac{148}{5}$ Ⓒ $\frac{448}{5}$ Ⓓ $\frac{191}{4}$ Ⓔ $\frac{41}{5}$

38. مهمة أدائية يستعمل مصمّم رسوم متحركة شاشة عرضها 1 000 بكسل وارتفاعها 800 بكسل. يستعمل المصمّم مصفوفة عمود لتمثيل ثلاث نقاط محدّدة لموقع إحدى الشخصيات. يمثل الصف العلوي الإحداثي الأفقي لكل نقطة، ويمثل الصف السفلي الإحداثي الرأسي.

لتكن $P = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \\ 50 & 150 & 50 \end{bmatrix}$ تمثل الموقع الابتدائي للشخصية.



الجزء A يريد المصمّم أن تتحرك الشخصية إلى الأعلى بمعدل 100 بكسل في الثانية. استعمل جمع المصفوفات لتوضيح موقع الشخصية بعد ثانيتين وبعد 5 ثوان.

الجزء B يريد المصمّم أن تتحرك الشخصية إلى اليمين بمعدل 50 بكسل في الثانية. استعمل جمع المصفوفات لتوضيح موقع الشخصية بعد 3 ثوان وبعد 8 ثوان.

الجزء C كيف يمكن أن يستعمل المصمّم ضرب المصفوفات في عدد ثابت وجمع المصفوفات لتوضيح حركة الشخصية على الشاشة؟

33. نموذج استعمل شبكة أبعادها 10×10 لإنشاء لعبة لوحية عن معركة بحرية تتضمن 5 سفن. اكتب المصفوفة B للعبة المعركة البحرية اللوحية. استعمل 1 لتمثيل المساحة التي وضعت فيها سفينة و 0 لتمثيل المساحة الخالية من السفن.

34. فكر وتأثر في الحل يوضّح الجدول أدناه الزمن، بالثواني، الذي سجله بعض الرياضيين في بعض سباقات الجري.

الرقم القياسي الأولمبي	الرقم القياسي القطري	الرقم القياسي العالمي	المسافة (بالمتر)
9.63	9.91	9.58	100
19.30	19.97	19.19	200
43.03	44.07	43.03	400
212.07	211.04	206	1 500

a. اكتب مصفوفة عمود تمثّل الفرق بين الرقمين القياسيين الأولمبي والعالمي لكل مسافة.

b. إذا كانت كل الأرقام القياسية في الجدول بوحدة الثانية ممثلة بمصفوفة B ، ما المصفوفة التي يمكن استعمالها لتحويل كل البيانات إلى وحدة الدقيقة؟

35. استعمل البنية يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل المدن المتصلة ببعضها عبر طريق واحد على الخريطة. استعمل 1 لتمثيل كل مدينتين متصلتين ببعضهما و 0 لتمثيل كل مدينتين غير متصلتين ببعضهما. استعمل 0 لتوضيح أن الصف والعمود المشار إليهما يمثلان نفس المدينة. أنشئ المصفوفة X لتمثيل هذا الموقف.





المتجران A و B يبيعان ويشتریان
إلكترونيات مستعملة: هواتف وأجهزة
لوحية وحواسيب.

تبتن المصفوفات في الشكل المجاور
العائدات (R) وتكلفة المشتريات (C)
ونفقات التصليح (E) لكل وحدة
بالريال القطري.

R	المتجر A	150	100	400
	المتجر B	200	250	500
C	المتجر A	100	50	200
	المتجر B	125	75	300
E	المتجر A	25	20	50
	المتجر B	10	50	50

A. هل من المنطقي إيجاد ناتج جمع
أو ناتج طرح أي مصفوفتين من
المصفوفات الثلاث؟ وضح إجابتك.

B. **فكر وتأبر في الحل** يريد مدير كل من المتجر A والمتجر B تقدير التكلفة الإجمالية للمشتريات ونفقات
التصليح. يتوقع مدير كل من المتجرين شراء 100 هاتف و 100 جهاز لوحي و 100 حاسوب، وتصليح
50% من هذه الأجهزة. وضح ما يمكن عمله لإيجاد التكلفة الإجمالية.

أستطيع... إيجاد ناتج ضرب

المصفوفات أو توضيح سبب عدم
وجود ناتج الضرب.

معايير الدرس

10.4.3 و 10.4.4 و 10.4.5

المصطلحات

- مصفوفة محايدة identity matrix
- مصفوفة مربعة square matrix
- مصفوفة ناتج الضرب product matrix

ماذا يعني ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى؟

السؤال الأساس

مثال 1

فهم ضرب المصفوفات

يريد مُعلم حساب تقييم الدرجات النهائية بالاستناد إلى ثلاث مهمات: تقييم الوحدة ومشروع الفصل
الدراسي والاختبار النهائي، علماً أن الوزن النسبي الذي يحدد قيمة كل مهمة في الدرجة النهائية يختلف
من مهمة لأخرى. تمثل المصفوفتان أدناه الوزن النسبي لكل من المهمات الثلاث والدرجات التي نالها عمر
وراشد في كل مهمة.

الأوزان النسبية			الدرجات	
تقييم الوحدة (U)	مشروع الفصل (P)	الاختبار النهائي (F)	O	R
$W = [0.50 \quad 0.30 \quad 0.20]$			90	80
			95	70
			75	85

تقييم الوحدة
مشروع الفصل
الاختبار النهائي

أوجد الدرجة النهائية التي نالها كل من عمر وراشد.

الدرجة النهائية هي ناتج جمع الدرجات الجزئية النسبية.

$$0.50U + 0.30P + 0.20F = \text{الدرجة النهائية}$$

تبتن هذه المعادلة أنه لإيجاد الدرجة النهائية لكل طالب يجب ضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة W
(الأوزان النسبية) بالعناصر المناظرة لها في عمود كل طالب في مصفوفة الطلاب، ثم يتم إيجاد مجموع
نواتج الضرب. هذه الطريقة تشبه ضرب مصفوفتين.

أي إنه لإيجاد الدرجة النهائية لكل طالب، اضرب عناصر المصفوفة W من الرتبة 1×3 في عناصر مصفوفة
العمود التي تمثل درجات كل طالب من الرتبة 3×1 ثم اجمع.

يتبع في الصفحة التالية

الاستيعاب المفاهيمي

تواصل بدقة

لحساب الدرجة النهائية التي نالها
كل طالب تُضرب كل درجة في الوزن
النسبي المحدد لها، ثم تُجمع.

درجة راشد النهائية

مصفوفة الدرجة $\times$ مصفوفة الوزن

$$= [0.50 \ 0.30 \ 0.20] \begin{bmatrix} 80 \\ 70 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$= 0.50(80) + 0.30(70) + 0.20(85)$$

$$= 78$$

درجة عمر النهائية

مصفوفة الدرجة $\times$ مصفوفة الوزن

$$= [0.50 \ 0.30 \ 0.20] \begin{bmatrix} 90 \\ 95 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$= 0.50(90) + 0.30(95) + 0.20(75)$$

$$= 88.5$$

إذن، الدرجة النهائية لعمر هي 88.5 والدرجة النهائية لراشد هي 78.

يمكن تمثيل هذه الدرجات **بمصفوفة ناتج الضرب** F . يُمثل كل عنصر في المصفوفة F مجموع نواتج ضرب عناصر الصفوف في المصفوفة W في عناصر الأعمدة المناظرة لها في المصفوفة G .

$$F = WG = [0.50 \ 0.30 \ 0.20] \begin{bmatrix} 90 & 80 \\ 95 & 70 \\ 75 & 85 \end{bmatrix} = [88.5 \ 78]$$

بما أنك تضرب عناصر صفوف W في عناصر أعمدة G ، فمن الضروري أن يكون عدد العناصر في كل صف في المصفوفة W مساوياً لعدد العناصر في كل عمود في المصفوفة G .

بشكل عام، إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$ و B مصفوفة من الرتبة $n \times p$ فإن $A \times B = C$ مصفوفة من الرتبة $m \times p$.

$$\text{بالرموز: } A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى لا يطابق عدد الصفوف في المصفوفة الثانية، فإن مصفوفة ناتج الضرب تكون غير معرفة أي لا وجود لها.

بما أن الدرجة 88.5 تنتج عن ضرب عناصر الصف الأول في W في عناصر العمود الأول في G ، فإن هذه الدرجة تمثل العنصر f_{11} في المصفوفة F .

وبالمثل، بما أن الدرجة 78 تنتج عن ضرب عناصر الصف الأول في W في عناصر العمود الثاني في G ، فإن هذه الدرجة تمثل العنصر f_{12} في المصفوفة F . بالتالي، ستكون F مصفوفة من الرتبة 1×2 .

$$\text{إذن، المصفوفة التي توضح الدرجة النهائية لكلا الطالبين هي: } F = [88.5 \ 78]$$

حاول أن تحل! 1. كيف يمكنك تنظيم معطيات الأوزان النسبية والدرجات بصورة مختلفة للحصول على درجات عمر وراشد النهائية باستعمال GW ؟

خطأ شائع

غالبًا ما يخلط الطلاب بين ضرب مصفوفة في عدد ثابت وضرب المصفوفات. تذكر أن ضرب المصفوفات يعني ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى، في حين أن ضرب مصفوفة في عدد ثابت يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في العدد الثابت نفسه.

لدينا أدناه مصفوفتان مربعة A و B . حدد ما إذا كانت المعادلات المعطاة صحيحة بالنسبة لكل من A و B . ما الاستنتاجات التي يمكننا استخلاصها عن خاصيتي الإبدال والتوزيع بالنسبة لضرب المصفوفات المربعة من الرتبة 2×2 ؟

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A . هل $AB = BA$ ؟

أوجد ناتج الضرب في طرفي المعادلة.

حصلنا على العنصر $ab_{12} = 14$

بضرب عناصر الصف الأول في A

في عناصر العمود الثاني في B .

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(-1) + 1(0) & -2(-5) + 1(4) \\ -1(-1) + 0(0) & -1(-5) + 0(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(-2) + (-5)(-1) & -1(1) + (-5)(0) \\ 0(-2) + 4(-1) & 0(1) + 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA \quad \text{إذن} \quad \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

ابن الحجج الرياضية

وضح لماذا لا يمكن تطبيق خاصية الإبدال على ضرب المصفوفات.

المصفوفة المربعة هي مصفوفة يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.

بما أن $AB \neq BA$ أعلاه، إذن لا يمكن تطبيق خاصية الإبدال على كل المصفوفات المربعة.

B . هل $A(A + B) = AA + AB$ ؟

ما ناتج الضرب في كل طرف من المعادلة ؟

$$A(A + B) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(-3) + 1(-1) & -2(-4) + 1(4) \\ -1(-3) + 0(-1) & -1(-4) + 0(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

سيكون هناك دائمًا ناتج ضرب مصفوفتين مربعيتين بالرتبة نفسها، لأن عدد الصفوف في المصفوفة الأولى يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة الثانية.

$$AA + AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2(-2) + 1(-1) & -2(1) + 1(0) \\ -1(-2) + 0(-1) & -1(1) + 0(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2(-1) + 1(0) & -2(-5) + 1(4) \\ -1(-1) + 0(0) & -1(-5) + 0(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

إثبات صحة المعادلة في مثال محدد لا يكفي للقول إن المعادلة صحيحة بالنسبة لجميع المصفوفات.

بما أن $A(A + B) = AA + AB$ ، فإن خاصية التوزيع صحيحة بالنسبة لهذه الحالة.

يتبع في الصفحة التالية

2. حاول أن تحل: حدد ما إذا كانت كل معادلة صحيحة بالنسبة للمصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

a. $(AB)C = A(BC)$

b. $(A + B)C = AC + BC$

فهم المصفوفات المحايدة

مثال 3

الاستيعاب المفاهيمي

ما ناتج ضرب المصفوفات المربعة من الرتبة 3×3 إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix} \text{ و } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين وقارن بين AI و IA .

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1(1) + 0(-4) + 0(9) & 1(-3) + 0(5) + 0(-7) & 1(2) + 0(-6) + 0(8) \\ 0(1) + 1(-4) + 0(9) & 0(-3) + 1(5) + 0(-7) & 0(2) + 1(-6) + 0(8) \\ 0(1) + 0(-4) + 1(9) & 0(-3) + 0(5) + 1(-7) & 0(2) + 0(-6) + 1(8) \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

عند ضرب المصفوفات من الرتبة 3×3 ، استعمل العملية نفسها التي تستعملها في ضرب المصفوفات من الرتبة 2×2

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} 1(1) + (-3)(0) + 2(0) & 1(0) + (-3)(1) + 2(0) & 1(0) + (-3)(0) + 2(1) \\ -4(1) + (5)(0) + (-6)(0) & -4(0) + 5(1) + (-6)(0) & -4(0) + 5(0) + (-6)(1) \\ 9(1) + (-7)(0) + 8(0) & 9(0) + (-7)(1) + 8(0) & 9(0) + (-7)(0) + 8(1) \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

إذن، مصفوفتا ناتج الضرب IA و AI كلتاهما تساوي A .

$$A = AI = IA = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

مع أن المصفوفة المحايدة يمكنها أن تحل محل أي مصفوفة، إلا أن ضرب المصفوفات ليس إبدالياً دائماً.

تكون المصفوفة I مصفوفة محايدة لأن $MI = IM = M$ لكل مصفوفة M من الرتبة 3×3 ، المصفوفات المحايدة هي مصفوفات مربعة دائماً كل عنصر في القطر الرئيسي فيها هو 1 وكل العناصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ : الأخرى أصفار، كما في المصفوفة المقابلة:}$$

نصيحة دراسية

عند ضرب مصفوفة في العدد 1 بالصورة $1A = A$ فإنك تكون قد استعملت ضرب عدد في مصفوفة، بينما ضرب مصفوفة في المصفوفة المحايدة I هو عملية ضرب مصفوفتين، حيث: $AI = A$ و $IA = A$

3. حاول أن تحل: a. أوجد ناتج $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. أوجد ناتج $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

ناتج ضرب مصفوفتين هو مصفوفة جديدة. عناصر المصفوفة الجديدة هي مجاميع نواتج ضرب عناصر الصفوف في عناصر الأعمدة المناظرة لها.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix}$$

علماً بأنه يشترط في ضرب المصفوفات، أن يكون عدد الأعمدة للمصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

المصفوفة المحايدة

بالنسبة لأي مصفوفة A من الرتبة $n \times n$ ، والمصفوفة المحايدة I هي مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ قيمة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 وبقية عناصرها الأخرى قيمة كل منها تساوي الصفر فإن: $AI = IA = A$ ، مثال:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

طبق فهمك

5. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

أوجد BA و AB لتبين أن ضرب المصفوفات ليس إبدالياً. وضح عملك.

في التمرينين 6 و 7، أوجد ناتج الضرب في كل مما يلي :

6. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

8. مثلث إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 3)$, $B(1, 1)$, $C(2, -1)$.

صُربت الإحداثيات في المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ التي تنمذج الانعكاس

حول المحور X . أوجد إحداثيات صورة المثلث بعد التحويل.

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس ماذا يعني ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى ؟

2. استعمل البنية هل بالإمكان ضرب المصفوفة $A_{3 \times 5}$ في المصفوفة $B_{4 \times 5}$ ؟ وضح إجابتك.

3. المصطلحات وضح السبب في أن المصفوفة المربعة المكونة من العدد 1 لكل عنصر في القطر الرئيسي ومن الأصفار لكل العناصر الأخرى تُسمى "مصفوفة محايدة".

4. ابن الحجج الرياضية يقول حمد إن ناتج ضرب المصفوفة $A_{1 \times 5}$ في المصفوفة $B_{5 \times 1}$ يجب أن يحوي 5 عناصر. هل هو على صواب؟ إذا كانت الإجابة "لا"، أوجد عدد عناصر هذا الناتج.

14. يريد معلم الرياضيات احتساب الدرجة النهائية التي تقيّم عمل كل من طلابه في ثلاث مهمات، علماً أنّ الوزن النسبي الذي يحدّد قيمة كل مهمة في الدرجة النهائية يختلف من مهمة لأخرى. تمثّل المصفوفة W الوزن النسبي لكل نوع من المهمات وتمثّل المصفوفة G درجات الطالبين خالد وسالم. استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المصفوفة F التي تمثّل الدرجة النهائية للطالبين. انظر المثال 1

	واجب	مشروع	اختبار
$W =$	[0.20	0.50	0.30]

	سالم	خالد
$G =$	[95 85	80 90
	75 85]	واجب مشروع اختبار

- في التمرينين 15 و 16، حدّد ما إذا كانت المعادلة صحيحة بالنسبة للمصفوفات التالية: انظر المثال 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

15. $(A + B)C = AC + BC$

16. $A(BC) = (AB)C$

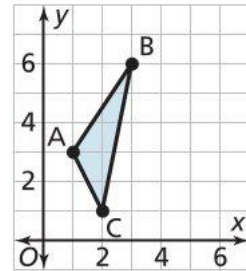
17. أوجد QI ، إذا كانت $Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ انظر المثال 3

9. **عمّم** افترض أن المصفوفتين المربعيتين A و B لهما الرتبة $n \times n$ حيث n عدد صحيح موجب أكبر من أو يساوي 2 أوجد رتبة ناتج ضربيهما $A \times B$.
10. **استعمل البنية** إذا كنت تريد إيجاد ناتج ضرب المصفوفتين أدناه، وضح لماذا يجب كتابتهما في هذا الترتيب.
- $$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 12 \\ 7 & 11 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 14 \\ 38 \end{bmatrix}$$
11. **حلّ الخطأ** بيّن خطأ جاسم عند ضرب المصفوفة A في المصفوفة B وصّحه.

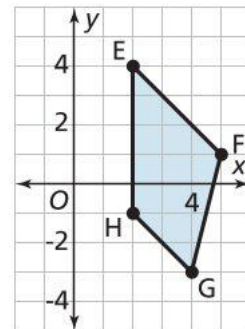
$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -12 & -10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

X

12. **مهارات التفكير العليا** تمّ تحويل المثلث أدناه باستعمال المصفوفتين $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ على الترتيب.



- a. ما التحويل الذي سيحدث نتيجة للضرب في المصفوفة A ؟
b. ما التحويل الذي سيحدث نتيجة للضرب في المصفوفة B ؟
13. **مهارات التفكير العليا** أنشئ المصفوفة A لتمثيل إحداثيات الشكل الرباعي $EFGH$.



- a. اضرب المصفوفة A في $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
b. مثّل بياناً الشكل الرباعي الممثل بالمصفوفة الناتجة، وصف حركة الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي.

18. **بزر منطقياً** تمثل المصفوفة التالية عدد الوجبات المتوفرة في ثلاثة مطاعم للوجبات السريعة في حديقة عامة.

دجاج لحم سلطة سمك

20	15	7	11
22	18	6	8
15	19	10	5

مطعم A

مطعم B

مطعم C

قائمة الطعام



QR 40

سمك.....



QR 20

سلطة.....



QR 48

لحم.....



QR 32

دجاج.....

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد القيمة الإجمالية للوجبات المتوفرة في كل مطعم.

19. **نمذج** يملك طلال متجرين للألبسة والأدوات الرياضية.

في المتجر A، ثمن الحذاء QR 180 و ثمن القميص QR 80.

في المتجر B، ثمن الحذاء QR 200 و ثمن القميص QR 60.

إذا باع كل متجر 20 حذاء و 25 قميصاً، استعمل ضرب

المصفوفات لإيجاد القيمة الإجمالية لمبيعات كل متجر.

20. **بزر منطقياً** أراد معلم العلوم إيجاد الدرجة النهائية لثلاثة

طلاب، أحمد وجاسم ومنصور، باستعمال أوزان نسبية محددة.

تمثل المصفوفة G درجات الطلاب الثلاثة في ثلاثة أنشطة.

الأوزان النسبية

الاختبار 45%

المشروع 30%

المشاركة 25%

منصور جاسم أحمد

$$G = \begin{bmatrix} 90 & 83 & 78 \\ 94 & 88 & 96 \\ 98 & 94 & 89 \end{bmatrix}$$

الاختبار

المشروع

المشاركة

a. اكتب المصفوفة W من الرتبة 1×3 لتمثل الوزن النسبي

للدرجات.

b. أوجد الدرجة النهائية لكل طالب باستعمال ضرب المصفوفات.

تدرب على اختبار

21. أوجد ناتج ضرب المصفوفتين التاليتين:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

22. **اختبار SAT/ACT** حدد لأي مما يلي لا يمكن إيجاد ناتج ضرب

المصفوفتين :

Ⓐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ⓑ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ⓒ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Ⓓ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

23. **مهمة أدائية** لدى هدى مؤسسة لصناعة الشموع، تنتج منها أربعة

أنصاف مختلفة. تكلفة صناعة الشمعة الواحدة من كل صنف:

QR 8, QR 9, QR 10, QR 12 بحسب ترتيب أحجامها.

يبين الجدول أدناه ثمن مبيع الشمعة الواحدة من كل صنف

وكميات الشموع المباعة على مدى ثلاث سنوات.

	معطرة QR 15	عائمة QR 17	كأس QR 20	أسطوانية QR 25
السنة 1	20	15	40	30
السنة 2	25	20	50	35
السنة 3	15	20	60	45

الجزء A اكتب مصفوفة C من الرتبة 4×1 لتمثيل تكلفة صناعة

الشمعة الواحدة من كل صنف، و اكتب مصفوفة P من الرتبة

4×1 لتمثيل ثمن مبيع الشمعة الواحدة من كل صنف، ثم اكتب

مصفوفة S من الرتبة 3×4 لتمثيل مبيعات مؤسسة هدى من

أنصاف الشموع على مدى السنوات الثلاث.

الجزء B استعمل طرح المصفوفات لإيجاد المصفوفة X التي تمثل

مقدار ربح هدى من بيع كل صنف من أنصاف الشمع .

الجزء C استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد ناتج ضرب

المصفوفتين S و X. وضح ما تمثله عناصر ناتج الضرب هذا.

يشارك جاسم وتميم في مسابقة البحث عن الكنز، وقد حصلوا على خارطة تبين خط الانطلاق وخط النهاية. كما حصلوا على قائمة بالتعليمات حول كيفية الوصول إلى خط النهاية. وكان عليهما اختيار طريقة اتباع التعليمات، فسلكا مسارين مختلفين.



مسار جاسم:

- 5 وحدات جنوباً
- 7 وحدات غرباً
- 3 وحدات شمالاً
- 4 وحدات غرباً

مسار تميم:

- 7 وحدات غرباً
- 3 وحدات شمالاً
- 4 وحدات غرباً
- 5 وحدات جنوباً

أستطيع... تفسير المتجهات واستعمالها للجمع، والطرح، والضرب في عدد ثابت.

معايير الدرس

10.4.8 و 10.4.9

المصطلحات

- متجه vector
- اتجاه direction
- نقطة بداية initial point
- نقطة نهاية terminal point
- مقدار magnitude
- صورة تركيبية component form

A. هل سيصل كل من جاسم وتميم إلى خط النهاية؟ وضح إجابتك.

B. أنشئ مجموعة مختلفة من التعليمات من شأنها إيصال أي شخص إلى خط النهاية.

C. تواصل بدقة هل يؤثر ترتيب التعليمات المكوّنة من أزواج من المسافات والاتجاهات في النتيجة؟ وضح إجابتك.

كيف يؤثر الجمع بين الاتجاه والكمية في طريقة إجراء العمليات على الكميات؟

السؤال الأساس

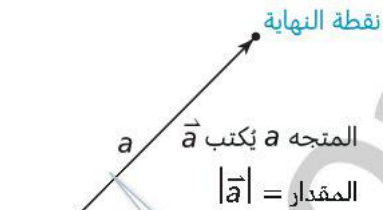
المفهوم المتجهات

المتجه، يُكتب في الصورة $\vec{a}$ ، وهو كمية

لها اتجاه ومقدار.

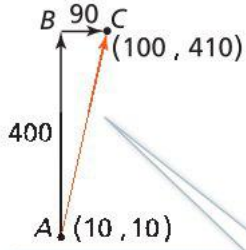
يُحدّد اتجاه المتجه من **نقطة البداية** إلى **نقطة النهاية**.

المقدار هو طول المتجه ويُكتب في الصورة $|\vec{a}|$.



نقطة البداية

يمكن استعمال المتجه لتحديد موقع نقطة في الفضاء بالنسبة إلى نقطة أخرى.



بما أن مسار الطائرة يتضمن
كلًا من المسافة والاتجاه،
فهو إذن متجه.

يفترض أن تحلق طائرة شمالًا، لكن الرياح التي هبت دفعتها شرقًا بعيدًا عن مسارها. عند الساعة 1 p.m. كانت الطائرة عند النقطة $(10, 10)$ ، وعند الساعة 2 p.m. كانت الطائرة عند النقطة $(100, 410)$.

A. أوجد سرعة الرياح وسرعة الطائرة بحسب قوة محركها.

كيف يمكنك تمثيل التغير في موقع صورة في صورة متجه يكتب في صورة تركيبية وفي صيغة مصفوفة؟
الرياح هي المسؤولة عن تغير موقع الطائرة في اتجاه الشرق.
إذن، اطرح الإحداثيين x لإيجاد مقدار التغير.

$$100 - 10 = 90$$

تقطع الطائرة 90 mi شرقًا خلال ساعة. سرعة الرياح 90 mph

محرك الطائرة هو المسؤول عن تغير موقع الطائرة شمالًا. إذن، اطرح الإحداثيين y لإيجاد مقدار التغير.

$$410 - 10 = 400$$

تقطع الطائرة 400 mi شمالًا في الساعة. إذن، سرعة الطائرة بحسب قوة محركها هي 400 mph

تمثل الصورة التركيبية للمتجه بالإحداثيين (x, y) .

فهما يصفان التغيرين الأفقي والراسي لموقع الطائرة من نقطة البداية إلى نقطة النهاية. في هذه الحالة، يتغير اتجاه المتجه نحو الشرق والشمال في الوقت نفسه.

يمثل المتجه $\overrightarrow{AC}$ تغيرًا أفقيًا بمقدار 90 mi وتغيرًا عموديًا بمقدار 400 mi

التغير في موقع الطائرة هو $(90, 400)$ في الصورة التركيبية و $\begin{bmatrix} 90 \\ 400 \end{bmatrix}$ في صورة المصفوفة.

B. كيف يمكنك وصف الاتجاه الذي تسلكه الطائرة؟ ما سرعة حركة الطائرة بالنسبة إلى الأرض؟

يمكن تحديد اتجاه المتجه باستعمال زاوية.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{90}{400}\right) \approx 12.7^\circ$$

احسب مقدار $\overrightarrow{AC}$ باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{90^2 + 400^2} \\ &= 410 \text{ mph} \end{aligned}$$

إذن، تطير الطائرة بزاوية قياسها 12.7° شرقًا باتجاه الشمال بسرعة 410 mph في ذلك الاتجاه.

نصيحة دراسية

يمكنك أيضًا استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد مقدار المتجه أو طوله.

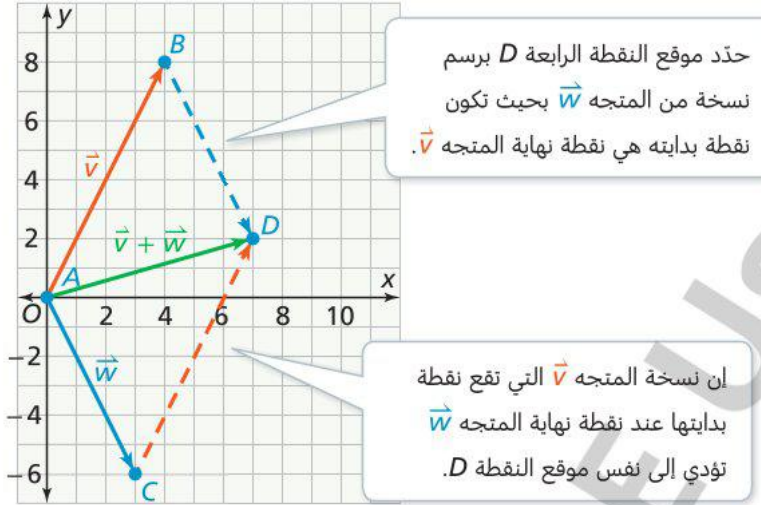
1. متجه نقطة بدايته عند $(2, 8)$ ونقطة نهايته عند $(6, 5)$.

اكتب هذا المتجه في الصورة التركيبية، ثم أوجد مقداره واتجاهه.

كيف يمكنك جمع المتجهين $\vec{v} = \langle 4, 8 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 3, -6 \rangle$ بيانيًا وجبريًا؟

لجمع متجهين بيانيًا، ارسمهما بحيث تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية لكليهما.

أنشئ متوازي أضلاع برسم نسخة من أحد المتجهين باستعمال نقطة نهاية المتجه الآخر نقطة بداية لهذه النسخة.



نقطة النهاية لهذه النسخة هي النقطة الرابعة D لمتوازي الأضلاع، أي $(7, 2)$.

تنص قاعدة متوازي الأضلاع على أن: إذا كان متجهان يمثلان ضلعين متجاورين لمتوازي الأضلاع، فإن ناتج جمع المتجهين يساوي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي نقطة بدايته هي نفس نقطة بداية المتجهين الآخرين.

إن نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{AD}$ هي نقطة الأصل، ونقطة نهايته هي $(7, 2)$.

إذن، ناتج جمع المتجهين $\vec{v}$ و $\vec{w}$ يساوي المتجه $\overrightarrow{AD}$ الذي صورته التركيبية $\langle 7, 2 \rangle$.

يمكن إيجاد مركبات المتجه $\overrightarrow{AD}$ جبريًا أيضًا، وذلك بجمع مركبات المتجهين $\vec{v} = \langle 4, 8 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 3, -6 \rangle$.

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{w} &= \langle 4 + 3, 8 + (-6) \rangle \\ &= \langle 7, 2 \rangle\end{aligned}$$

إذن، ناتج جمع المتجهين بيانيًا أو جبريًا هو نفسه، $\overrightarrow{AD} = \langle 7, 2 \rangle$.

خطأ شائع

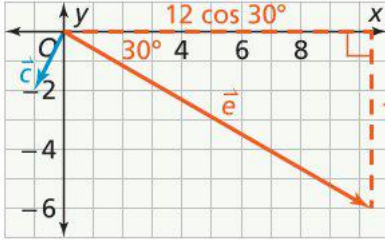
تذكر أن تتبّع الحدود x والحدود y عند جمع المتجهات. اجمع الحدود x معًا والحدود y معًا.

حاول أن تحل! 2. a. إذا كان $\overrightarrow{MN} = \langle 9, 12 \rangle$ و $\overrightarrow{NO} = \langle 2, 7 \rangle$ ، أوجد $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$.

b. إذا كان $\vec{v} = \langle -3, 4 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 5, -8 \rangle$ ، أوجد $\vec{v} + \vec{w}$.

يجتاز بدر نهذا بقارب سرعة محركه 12 mph بزاوية قياسها 30° في الاتجاه الجنوبي الشرقي. يجري تيار النهر بسرعة 2 mph وبزاوية قياسها 30° في الاتجاه الغربي الجنوبي. ما مقدار واتجاه مسار القارب الذي يستعمله بدر لاجتياز النهر؟

الخطوة 1 استعمل حساب المثلثات لإيجاد الصورة التركيبية للمتجهين.



يدور محرك القارب $\vec{e}$ بسرعة 12 mph
(المقدار) بزاوية قياسها 30° في الاتجاه
الجنوبي الشرقي.

$$12 \sin 30^\circ = 6$$

$$12 \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \approx 10.39$$

بما أن المركبة الرأسية تقع في الاتجاه

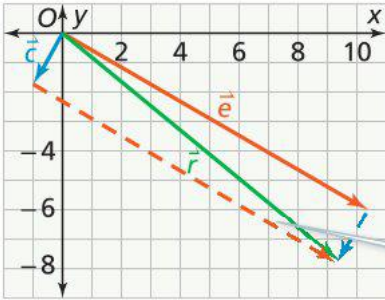
السالب، فإن $\vec{e} \approx \langle 10.39, -6 \rangle$.

ويتحرك تيار النهر $\vec{c}$ بسرعة 2 mph (المقدار) بزاوية قياسها 30° في الاتجاه الغربي الجنوبي. يشكل هذا المتجه زاوية قياسها 60° مع المحور الأفقي. أوجد الصورة التركيبية لهذا المتجه بالطريقة نفسها.

$$2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.73$$

$$2 \cos 60^\circ = 1$$

بما أن المركبتين تقعان في الاتجاه السالب، فإن $\vec{c} \approx \langle -1, -1.73 \rangle$.



الخطوة 2 أوجد مجموع المتجهين اللذين يمثلان سرعة القارب وتيار النهر.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{e} + \vec{c} \\ &= \langle 10.39 + (-1), -6 + (-1.73) \rangle \\ &= \langle 9.39, -7.73 \rangle\end{aligned}$$

السرعة الفعلية لحركة بدر هي مجموع هذين المتجهين، وهو يشكل قطر متوازي الأضلاع.

الخطوة 3 أوجد مقدار $\vec{r}$ باستعمال نظرية فيثاغورس.

$$|\vec{r}| = \sqrt{9.39^2 + (7.73)^2} \approx 12.2$$

الخطوة 4 استعمل مركبتي $\vec{r}$ لإيجاد قياس زاوية اتجاهه.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.73}{9.39}\right) \approx 39.5^\circ$$

تذكر أن المركبة الأولى لمجموع المتجهين عدد موجب

وأن المركبة الثانية عدد سالب. بالتالي، يقع المتجه الذي يمثل اتجاه قارب بدر في الربع الرابع.

إذن، انطلق قارب بدر بسرعة 12.2 mph بزاوية قياسها 40° تقريباً في الاتجاه الجنوبي الشرقي.

تتبع في الصفحة التالية

ابحث عن العلاقات

إن مقدار مجموع متجهين لا يساوي مجموع مقدازي هذين المتجهين. في هذه المسألة، $|\vec{r}| \neq |\vec{e}| + |\vec{c}|$

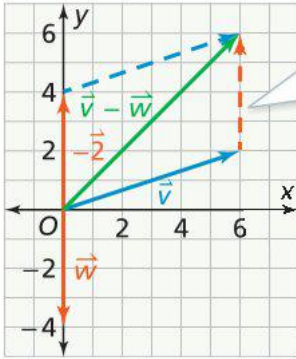
حاول أن تحل! 3. إذا كانت سرعة المحرك 9 mph، وكان القارب يبحر بزاوية قياسها 135° في الاتجاه الشمالي الغربي، وكانت مواصفات تيار النهر هي نفسها، فما مقدار واتجاه سرعة القارب؟ قرب المقدار وقياس زاوية الاتجاه إلى أقرب جزء من عشرة.

فهم طرح المتجهات

مثال 4

كيف يمكنك طرح $\vec{v} - \vec{w}$ بيانيًا وجبريًا، إذا كان $\vec{v} = \langle 6, 2 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 0, -4 \rangle$ ؟
ما هي مركبات $\vec{v} - \vec{w}$ وما مقداره واتجاهه؟

يمكن إيجاد التمثيل البياني للفرق $\vec{v} - \vec{w}$ بطريقة مشابهة لإيجاد التمثيل البياني لمجموع متجهين.



لطح $\vec{w}$ ، اجمعه مع نظيره
الجمعي، $-\vec{w}$ ، وهو متجه
له نفس المقدار لكنه في
الاتجاه المعاكس.

نقطة نهاية $\vec{v} - \vec{w}$ هي $(6, 6)$ ،
لذلك فإن صورته التركيبية هي $\langle 6, 6 \rangle$.

كذلك، يمكن إيجاد مركبات $\vec{v} - \vec{w}$ جبريًا بطرح مركبات المتجهين $\vec{v} = \langle 6, 2 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 0, -4 \rangle$.
 $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \langle 6 + 0, 2 + 4 \rangle = \langle 6, 6 \rangle$

اتجاه الفرق بين المتجهين هو $\theta = \tan^{-1} \frac{6}{6} = 45^\circ$.

مقدار $\vec{v} - \vec{w}$ هو $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8.5$.

إذن، ناتج طرح المتجهين بيانيًا أو جبريًا هو نفسه، $\vec{v} - \vec{w} = \langle 6, 6 \rangle$.

مقدار $\vec{v} - \vec{w}$ يساوي 8.5 تقريبًا واتجاهه هو 45° .

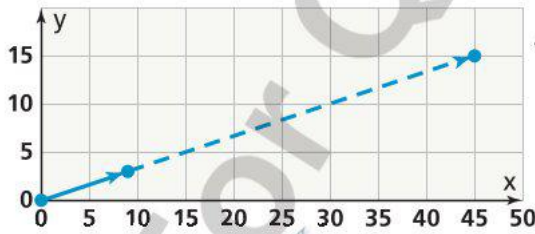
خطأ شائع

عندما توجد الاتجاه باستعمال
معكوس الظل، تأكد من أن الزاوية
تقع في الربع الصحيح. نواتج $\tan^{-1}$
 θ الممكنة هي $-90^\circ < \theta < 90^\circ$

حاول أن تحل! 4. a. أوجد مركبات ومقدار واتجاه $\vec{s} - \vec{t}$ ، حيث $\vec{s} = \langle 6, -3 \rangle$ و $\vec{t} = \langle 3, 2 \rangle$.
b. إذا كان $\vec{m} = \langle 1, -3 \rangle$ و $\vec{n} = \langle -2, 7 \rangle$ ، أوجد $\vec{m} - \vec{n}$.

ضرب متجه في عدد ثابت

مثال 5



اضرب كل متجه أدناه في العدد الثابت المعطى.
ما وجه المقارنة بين مقدار واتجاه كل من ناتج
الضرب والمتجه الأصلي؟

A. $\vec{r} = \langle 9, 3 \rangle$ ؛ العدد الثابت 5

لضرب متجه في عدد ثابت، اضرب مركبتي المتجه
في العدد الثابت:

$$5 \cdot \vec{r} = 5 \cdot \langle 9, 3 \rangle = \langle 5 \cdot 9, 5 \cdot 3 \rangle = \langle 45, 15 \rangle$$

لاحظ أن اتجاه المتجه الجديد
هو نفس اتجاه المتجه $\vec{r}$.

يتبع في الصفحة التالية

استعمل البنية

ما الذي تعلمته عن المصفوفات
والتعمدات ويمكنك تطبيقه على هذه
المسألة؟

رغم أن الاتجاه لا يتغير، يتزايد المقدار بما يساوي معامل العدد الثابت. تحقق من صحة ذلك جبريًا.

$$5|\vec{r}| = 5\sqrt{9^2 + 3^2} = 5\sqrt{90} \approx 47.4$$

$$|5\vec{r}| = \sqrt{45^2 + 15^2} = \sqrt{2250} \approx 47.4$$

$$\theta_r = \tan^{-1} \frac{3}{9} \approx 18.4^\circ \text{ و } \theta_{5r} = \tan^{-1} \frac{15}{45} \approx 18.4^\circ$$

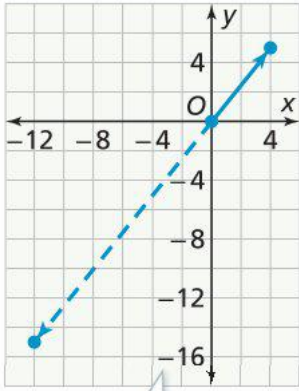
إذن، المتجه الذي يمثل ناتج ضرب r في العدد الثابت 5، $5\vec{r} = \langle 45, 15 \rangle$ ، له نفس اتجاه r ويساوي خمسة أمثال مقدار المتجه $\vec{r}$.

B. $\vec{s} = \langle 4, 5 \rangle$ ؛ العدد الثابت -3

أوجد مركبتي المتجه الجديد.

$$-3 \cdot \vec{s} = -3 \cdot \langle 4, 5 \rangle = \langle -3 \cdot 4, -3 \cdot 5 \rangle = \langle -12, -15 \rangle$$

قارن المقدارين والاتجاهين.



بما أن العدد الثابت سالب، يكون اتجاه المتجه الناتج معاكسًا لاتجاه $\vec{s}$.

$$|-3||\vec{s}| = 3\sqrt{4^2 + 5^2} = 3\sqrt{41} \approx 19.2$$

$$|-3\vec{s}| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2} = \sqrt{369} \approx 19.2$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.4$$

$$|-3||\vec{s}| \approx 3(6.4) = 19.2$$

$$\theta_s = \tan^{-1} \frac{5}{4} \approx 51.3^\circ$$

$$\theta_{-3s} = \tan^{-1} \frac{-15}{-12} \approx 231.3^\circ$$

إذن، اتجاه المتجه الذي يمثل ناتج ضرب s في

العدد الثابت 3، $3\vec{s} = \langle -12, -15 \rangle$ ، عكس

اتجاه المتجه s ، ومقداره يساوي ثلاثة أمثال مقدار

المتجه $\vec{s}$.

إن مقدار المتجه الناتج عن ضرب متجه في عدد ثابت يساوي ناتج ضرب مقدار المتجه الأصلي في القيمة المطلقة للعدد الثابت. ويكون اتجاه المتجه الناتج نفس اتجاه المتجه الأصلي إلا إذا كان العدد الثابت سالبًا، حيث يختلف اتجاه المتجه الناتج عن اتجاه المتجه الأصلي بزاوية قياسها 180° .

نصيحة دراسية

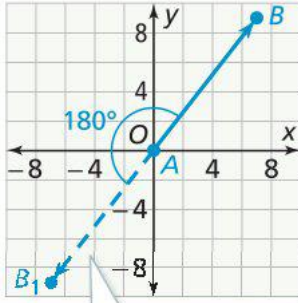
يقع المتجه الناتج عن ضرب المتجه الأصلي في عدد ثابت في الربع الثالث، لذا فإن زاوية اتجاهه أكبر بمقدار 180° عن معكوس ظل مركبته.

حاول أن تحل! 5. a. إذا كان $\vec{t} = \langle -5, -7 \rangle$ ، فما مركبتي، ومقدار، واتجاه ناتج الضرب $-4(\vec{t})$ ؟

b. ما مركبتي، ومقدار، واتجاه $2\vec{t}$ ؟

كيف يمكنك استعمال ضرب المصفوفات لتحويل كل متجه أدناه هندسيًا بموجب التحويل المعطى ؟

A. دَوِّر المتجه $\vec{AB} = \langle 7, 9 \rangle$ بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل باستعمال المصفوفات.



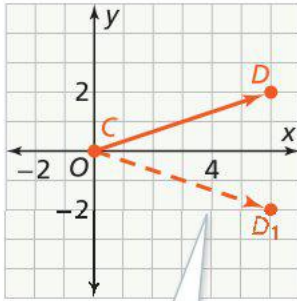
مقدار الصورة هو نفسه أما اتجاهها فهو عكس اتجاه المتجه الأصلي.

المصفوفة التي تُستعمل لتدوير متجه بزاوية قياسها 180° حول نقطة الأصل تُغيّر إحداثي كل نقطة من نقاط المتجه من (x, y) إلى $(-x, -y)$. المصفوفة التي تحقّق ذلك هي $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$T \cdot \vec{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 0 \\ 0 + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن تأثير عملية ضرب $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ يتمثل بضرب كلا مركبتي المتجه في -1 ، وينتج عن ذلك متجه آخر له نفس مقدار المتجه الأول، لكنه في الاتجاه المعاكس له.

B. اعكس المتجه $\vec{CD} = \langle 6, 2 \rangle$ حول المحور x باستعمال المصفوفات.



مقدار صورة المتجه هو نفس مقدار المتجه الأصلي، لكن اتجاهه تغيّر بفعل انعكاسه حول المحور x .

ارفع هذه الكلمة مع النقطة إلى نهاية السطر أعلاه.

المصفوفة التي تعكس متجهًا حول المحور x تُغيّر إحداثي كل نقطة من نقاطه من (x, y) إلى $(x, -y)$. المصفوفة التي تحقّق ذلك هي $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$T \cdot \vec{CD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 0 \\ 0 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن تأثير عملية ضرب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ يتمثل بضرب المركبة الثانية للمتجه في -1 ، وينتج عن ذلك متجه آخر مقداره يساوي مقدار المتجه الأول، لكنه انعكاس للمتجه الأول حول المحور x .

ابحث عن العلاقات

تذكّر ما تعلّمته من علم الهندسة عن تأثير هذه التحويلات الهندسية. كيف يؤثر الانعكاس في المقدار والاتجاه ؟

6. a. ليكن $\vec{EF} = \langle 5, 10 \rangle$. ماذا ينتج عن التحويل الهندسي للمتجه $\vec{EF}$ عند ضربه في

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ المصفوفة ؟}$$

b. ماذا ينتج عن التحويل الهندسي للمتجه $\vec{EF}$ عند ضربه في المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

لفظيًا

المتجه هو كمية لها اتجاه ومقدار.

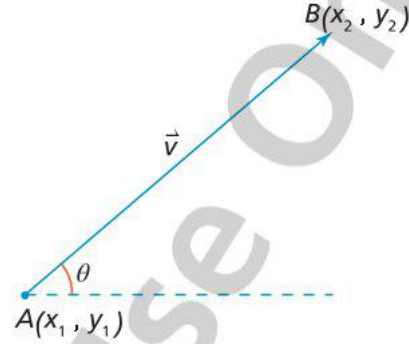
يمكن التعبير عن المتجهات في الصورة $\vec{v}$ أو الصورة $\overrightarrow{AB}$

مركبتا المتجه هما x و y ، أي $\vec{v} = \langle x, y \rangle$.

بيانيًا

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ :المقدار}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \text{ :الاتجاه}$$



العمليات

الضرب في عدد ثابت

إذا كان $\vec{t} = \langle c, d \rangle$

فإن $a \cdot \vec{t} = \langle a \cdot c, a \cdot d \rangle$

و $|a \cdot \vec{t}| = |a| \cdot |\vec{t}|$

الجمع

إذا كان $\vec{r} = \langle j, k \rangle$

و $\vec{s} = \langle m, n \rangle$

فإن $\vec{r} + \vec{s} = \langle j + m, k + n \rangle$

الطرح

إذا كان $\vec{r} = \langle j, k \rangle$ و $\vec{s} = \langle m, n \rangle$

فإن $\vec{r} - \vec{s} = \vec{r} + (-\vec{s}) = \langle j + (-m), k + (-n) \rangle$

أو $\vec{r} - \vec{s} = \langle j - m, k - n \rangle$

عبّر عن فهمك

السؤال الأساس

كيف يؤثر الجمع بين الاتجاه والكمية

في طريقة إجراء العمليات على الكميات ؟

2. **حلّل الخطأ** قال جاسم إن مجموع المتجهين

$\overrightarrow{AB} = \langle 5, 11 \rangle$ و $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -4 \rangle$ هو $\overrightarrow{AC} = \langle 7, 13 \rangle$

وضّح خطأ جاسم وصّحه.

3. **تواصل بدقة** اشرح خطوات طرح المتجهات.

4. **ابحث عن العلاقات** وضّح لماذا يمكنك استعمال ضرب

المصفوفات لتطبيق التحويلات الهندسية على المتجهات.

5. **بزر منطقياً** ينطلق قارب من نقطة الأصل متجهًا بزاوية قياسها

60° في الاتجاه الشمالي الغربي. في أي ربع يقع المتجه الذي

يمثل حركة القارب ؟

طبّق فهمك

في التمرينين 6 و 7، اكتب الصورة التركيبية للمتجه بمعلومية نقطتي البداية والنهاية.

6. نقطة البداية $(6, 2)$ ؛

نقطة النهاية $(3, -5)$

7. نقطة البداية $(4, -1)$ ؛

نقطة النهاية $(-8, 0)$

8. متجه نقطة بدايته $(6, 13)$ ونقطة نهايته $(3, 2)$.

اكتب هذا المتجه في الصورة التركيبية، ثم أوجد مقداره واتجاهه.

9. متجه اتجاهه هو 235° ومقداره 6

ما الصورة التركيبية لهذا المتجه ؟

عبّر عن إجابتك بوحدة مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

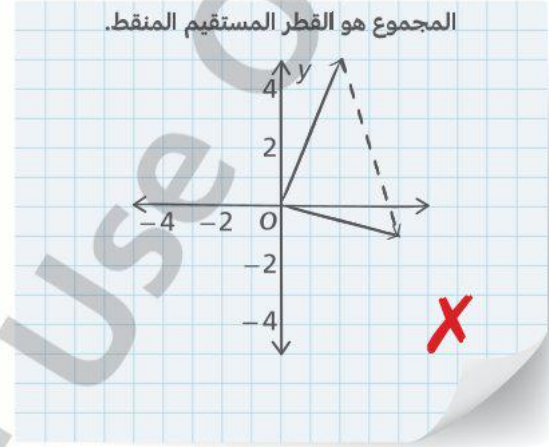
10. أوجد $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$ و $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NO}$ إذا كان

$\overrightarrow{NO} = \langle -3, 0 \rangle$ و $\overrightarrow{MN} = \langle 6, 10 \rangle$

عزز فهمك

11. تواصل بدقة وضح طريقتين يمكنك من خلالهما إيجاد مقادير المتجهات.

12. حل الخطأ وقع خالد في خطأ عند جمع المتجهين $\vec{AB} = \langle 2, 5 \rangle$ و $\vec{BC} = \langle 4, -1 \rangle$. صف هذا الخطأ بياناً، ثم صححه.

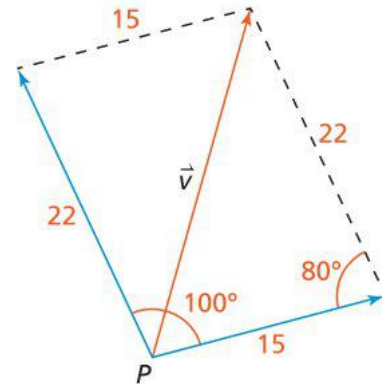


13. عقم لماذا مقدار المتجه يمثل دائماً بقيمة موجبة ؟

14. ابن الحجج الرياضية هل $\vec{MN}$ نفس $\vec{NM}$ ؟ وضح إجابتك.

15. فكر وتأبر في الحل إذا كان $\vec{EF} = \langle -2, 6 \rangle$ ، اكتب الصورة التركيبية لمتجه له نفس مقدار هذا المتجه ولكن عكس اتجاهه.

16. مهارات التفكير العليا مجموع متجهين يمثلان قوتين مطبقتين على جسم يساوي المتجه الذي يمثل القوة الكلية الصافية المطبقة على هذا الجسم. استعمل قانون جيب التمام لإيجاد مقدار $\vec{V}$ عند تطبيق قوتين مقدارهما 15 kg و 22 kg على النقطة P في المستوى الإحداثي.



تدرب

في التمارين 17-20، اكتب المتجه في الصورة التركيبية، ثم حدد مقداره واتجاهه. انظر المثال 1

17. نقطة البداية (5, 9)؛ نقطة النهاية (3, 4)
18. نقطة البداية (6, 0)؛ نقطة النهاية (2, -1)
19. نقطة البداية (0, 0)؛ نقطة النهاية (3, 7)
20. نقطة البداية (-2, 2)؛ نقطة النهاية (8, 1)

في التمارين 21-23، أوجد ناتج جمع المتجهين. انظر المثال 2

21. $\vec{NO} = \langle -5, 0 \rangle$ و $\vec{MN} = \langle 12, 4 \rangle$
22. $\vec{NO} = \langle -10, 6 \rangle$ و $\vec{MN} = \langle 2, 13 \rangle$
23. $\vec{NO} = \langle 14, -9 \rangle$ و $\vec{MN} = \langle -7, 10 \rangle$

24. يجتاز إبراهيم نهراً بقارب سرعة محركه 15 mph وبزاوية قياسها 45° في الاتجاه الجنوبي الغربي. يجري تيار النهر بسرعة 3 mph وبزاوية قياسها 45° في الاتجاه الجنوبي الشرقي. ما مقدار واتجاه المسار الذي يسلكه القارب الذي يستعمله إبراهيم لاجتياز النهر ؟

انظر المثال 3

في التمارين 25-27، أوجد مركبتي، ومقدار، واتجاه $\vec{t} - \vec{s}$ لكل زوج من المتجهات المعطاة. انظر المثال 4

25. $\vec{s} = \langle 6, 5 \rangle$ و $\vec{t} = \langle -8, 1 \rangle$
26. $\vec{s} = \langle -1, 10 \rangle$ و $\vec{t} = \langle 1, 1 \rangle$
27. $\vec{s} = \langle -3, 7 \rangle$ و $\vec{t} = \langle 0, 0 \rangle$

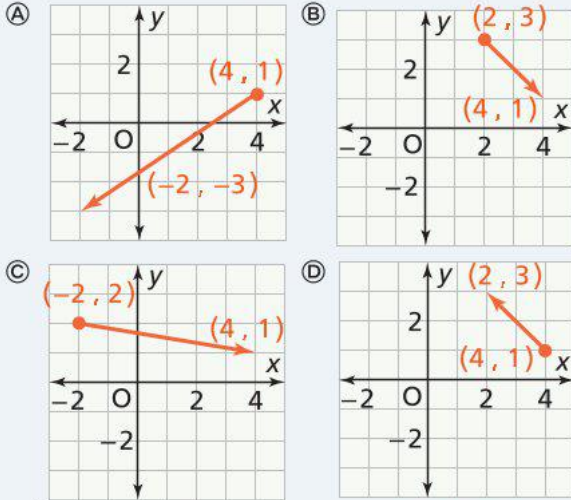
في التمارين 28-30، اضرب المتجه في العدد الثابت المعطى.

انظر المثال 5

28. $\vec{t} = \langle -7, -9 \rangle$ ؛ العدد الثابت = 4
29. $\vec{t} = \langle 4, 12 \rangle$ ؛ العدد الثابت = -6
30. $\vec{t} = \langle 6, -1 \rangle$ ؛ العدد الثابت = 2

31. ليكن $\vec{EF} = \langle 8, 4 \rangle$. كيف يمكنك عكس $\vec{EF}$ حول المحور y باستعمال المصفوفات؟ انظر المثال 6

35. أي من المتجهات التالية متساوية في المقدار؟ اختر كل ما ينطبق.



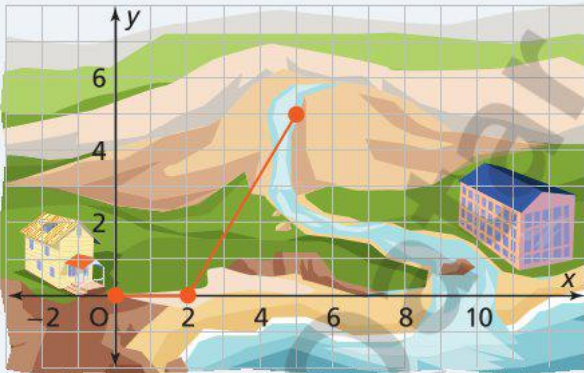
36. اختبار SAT/ACT إذا كان $\vec{s} = \langle -2, 8 \rangle$ و $\vec{t} = \langle 7, 11 \rangle$

أوجد $\vec{s} + \vec{t}$

- A $\langle -5, 3 \rangle$ B $\langle 9, 19 \rangle$ C $\langle 9, 3 \rangle$ D $\langle 5, 19 \rangle$

37. مهمة أدائية قطع مبارك سيزا على الأقدام من مقصورته مسافة

2 mi شرقًا باتجاه كهف، ثم انعطف بزاوية قياسها 60° باتجاه الشمال وقطع مسافة 6 mi وصولًا إلى الشلال. الصورة التركيبية للمتجه $\vec{v}$ ، الذي يمثل مسار مبارك إلى الكهف، هي $\langle 2, 0 \rangle$. يمثل المتجه $\vec{u}$ مسار مبارك من الكهف إلى الشلال.



الجزء A أوجد الصورة التركيبية للمتجه $\vec{u}$.

الجزء B استعمل جمع المتجهات لإيجاد الصورة التركيبية للمتجه الذي يمثل المسافة المستقيمة التي سيقطعها مبارك في طريق عودته من موقعه الحالي إلى مقصورته.

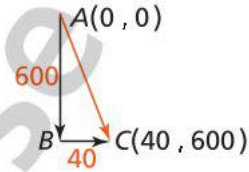
الجزء C أوجد المسافة المستقيمة الحالية التي قطعها مبارك من مقصورته من خلال إيجاد مقدار المتجه في الجزء B.

32. بزر منطقيًا ألقيت كرة بسرعة ابتدائية تساوي 20 mph في اتجاه

يشكل زاوية قياسها 30° مع محور x الموجب. عثر عن متجه السرعة $\vec{v}$ بدلالة الحركة الأفقية $\vec{AP}$ على طول المحور x والحركة الرأسية $\vec{AQ}$ على طول المحور y .

33. نمذج تحلق طائرة جنوبًا، لكن الرياح الجانبية التي تهب شرقًا

تبعدها عن مسارها. عند الساعة 7 a.m. كانت الطائرة عند النقطة A، وعند الساعة 8 a.m. كانت الطائرة عند النقطة C. بيّن المخطط أدناه حركة الطائرة وإحداثيات الموقعين.



a. أوجد الصورة التركيبية للمتجه $\vec{AC}$.

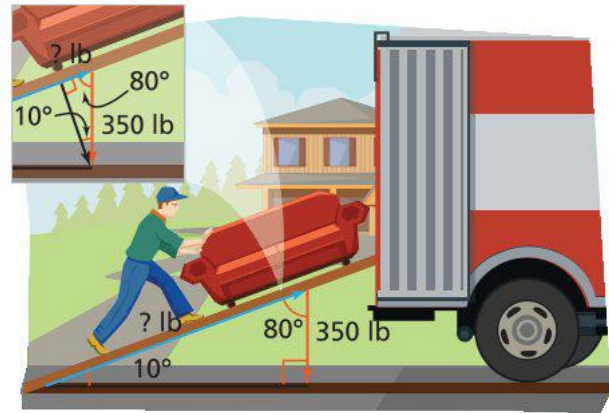
b. ماذا تمثل كل من مركبتي المتجه $\vec{AC}$.

c. أوجد مقدار $\vec{AC}$ وفسره.

d. إلى أي درجة يتغير مسار الطائرة الأصلي بفعل الرياح الجانبية؟

34. فكر وثابر في الحل تقوم بدفع أريكة بعجلات وزنها 350 lb

صعودًا على منحدر يشكل مع مستوى الأرض زاوية قياسها 10° أوجد الصورة التركيبية للمتجه الأزرق ومقداره في المخطط لإيجاد القوة اللازمة لمنع انزلاق الأريكة على طول المنحدر.



أستطيع... إيجاد النظير الضربي
لمصفوفة واستعماله.

معياري الدرس

10.4.6

المصطلحات

- النظير الضربي للمصفوفة
inverse matrix
- محددة مصفوفة من
الرتبة 2×2
determinant of a 2×2
matrix

الاستيعاب المفاهيمي

ابحث عن العلاقات

بالنسبة لمصفوفة A
ونظيرها الضربي B ،
 $AB = BA = I$ حيث I هي
المصفوفة المحايدة.

استكشف وبزر منطقيًا

كتب معلّم المعادلات الثلاث التالية على السبورة.

A. لاحظت سارة أن بالإمكان حل المعادلة الأولى بضربها

في $\frac{3}{2}$ ، وافترضت أن:

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} \text{ و } \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هل سارة على صواب ؟

B. **ابحث عن العلاقات** ما المشترك بين طرق حل

هذه المعادلات ؟

$$\frac{2}{3} \times m = 1$$

$$x - x\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

كيف توجد النظير الضربي لمصفوفة وكيف تستعمله ؟

السؤال الأساس

استكشف النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

مثال 1

A. أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو مصفوفة $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ حيث ناتج ضرب المصفوفتين هو المصفوفة المحايدة I .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1 اكتب معادلة النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب المصفوفتين اللتين في الطرف الأيسر من المعادلة.

$$\begin{bmatrix} 2w + y & 2x + z \\ 3w + 0y & 3x + 0z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 حل المعادلات الناتجة عن ضرب المصفوفتين.

اكتب المعادلات التي تمثل كل منها عنصرًا من المصفوفة الأولى والعنصر المناظر له من المصفوفة الثانية. ينتج عن ذلك نظام من أربع معادلات:

$$2w + y = 1$$

$$2x + z = 0$$

$$3w + 0y = 0$$

$$3x + 0z = 1$$

حل المعادلات التي تتضمن متغيرًا واحدًا أولًا.

$$3w + 0y = 0$$

$$3x + 0z = 1$$

$$3w = 0$$

$$3x = 1$$

$$w = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

يتبع في الصفحة التالية

بالتعويض عن w و x في أول معادلتين ينتج ما يلي:

$$2w + y = 1$$

$$2x + z = 0$$

$$2(0) + y = 1$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right) + z = 0$$

$$y = 1$$

$$z = -\frac{2}{3}$$

الخطوة 4 عوض قيم المتغيرات في المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5 تحقق من الحل:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(2) + \frac{1}{3}(3) & 0(1) + \frac{1}{3}(0) \\ 1(2) - \frac{2}{3}(3) & 1(1) - \frac{2}{3}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ إذن، النظير الضربي للمصفوفة } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ هو}$$

$$B. \text{ أوجد النظير الضربي للمصفوفة } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{أوجد مصفوفة } \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \text{ حيث } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ينتج عن ضرب المصفوفتين اللتين في الطرف الأيسر من المعادلة:

$$\begin{bmatrix} w - y & x - z \\ -w + y & -x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أنشئ نظامًا من أربع معادلات من المصفوفات المتساوية.

$$w - y = 1$$

$$-w + y = 0$$

$$x - z = 0$$

$$-x + z = 1$$

يؤدي حل هاتين المعادلتين لإيجاد

قيمة x و z إلى التناقض $0 = 1$.

لإيجاد الحل، حل المعادلتين اللتين تتضمنان نفس المتغيرات، ولاحظ أن حل هاتين المعادلتين يؤدي إلى تناقض في الحل.

لذا هذا النظام ليس له حل. بعض المصفوفات ليس لها نظير ضربي.

$$\text{إذن، المصفوفة } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ليس لها نظير ضربي.}$$

$$\text{حاول أن تحل! 1. أوجد النظير الضربي للمصفوفة } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ابحث عن العلاقات

هل لكل عدد حقيقي نظير ضربي؟

المفهوم النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

- لأي مصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، فإن **محددة المصفوفة A من الرتبة 2×2** ، التي يُرمز لها بالرمز $\det A$ ، هي القيمة $ad - bc$.
- يُرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} ويكون موجودًا إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$.
- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكان للمصفوفة A نظير ضربي، فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال 2

إيجاد النظير الضربي للمصفوفات المربعة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ أوجد النظير الضربي للمصفوفة } A.$$

المصفوفة هي مصفوفة مربعة، من الرتبة 2×2 ، لها نظير ضربي لأن:

$$\det A = ad - bc = 4(2) - 1(-1) = 9$$

بما أن $\det A \neq 0$ ، إذن لها نظير ضربي.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{إذن، النظير الضربي للمصفوفة } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ هو } \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

تحقق من الحل باستعمال الحاسبة لضرب A في المصفوفة A^{-1} التي أوجدتها.

إذا كانت إجابتك صحيحة، فسيكون ناتج الضرب هو المصفوفة المحايدة.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ أوجد النظير الضربي للمصفوفة } B.$$

المصفوفة هي مصفوفة مربعة، من الرتبة 2×2

بما أن $\det B = ad - bc = 6(4) - 8(3) = 0$ ، إذن المصفوفة ليس لها نظير ضربي.

حاول أن تحل! 2. هل لكل مصفوفة مما يلي نظير ضربي؟ إن كان كذلك، أوجد.

$$a. P = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b. Q = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

المصطلحات

"المحددة" هي عدد مرتبط بمصفوفة مربعة يحدد ما إذا كان للمصفوفة نظير ضربي أم لا.

مثال 3

تشفير الرسائل

تطبيق

الجدول التالي يمثل الأحرف الإنجليزية والعدد المناظر لكل حرف.

A	1	E	5	I	9	M	13	Q	17	U	21	Y	25
B	2	F	6	J	10	N	14	R	18	V	22	Z	26
C	3	G	7	K	11	O	15	S	19	W	23	*	27
D	4	H	8	L	12	P	16	T	20	X	24		

استعمل مصفوفة ونظيرها الضربي لتشفير وإعادة فك تشفير الرسالة التالية: "GET AWAY". يمكن استعمال ضرب المصفوفات لتشفير رسالة ثم إعادة فك التشفير.

الخطوة 1 استعمل الجدول أعلاه لتنظيم جدول مكون من صفين بحيث يمثل الصف الأول أحرف الرسالة والصف الثاني العدد المناظر لكل حرف.

G	E	T	*	A	W	A	Y
7	5	20	27	1	23	1	25

يتبع في الصفحة التالية

الخطوة 2 كَوْن مصفوفة الرسالة A والتي تتضمن صفين فقط بحيث يمثل العمود الأول العددين الأول والثاني والعمود الثاني العددين الثالث والرابع وهكذا...

إذن، $A = \begin{bmatrix} 7 & 20 & 1 & 1 \\ 5 & 27 & 23 & 25 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الرسالة "GET AWAY"

الخطوة 3 اختر مصفوفة تشفير غير منفردة تحقق شرط ضرب المصفوفات ثم شقّر الرسالة.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة التشفير}$$

لتشفير الرسالة، اضرب مصفوفة التشفير M في مصفوفة الرسالة A .

$$B = M \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 20 & 1 & 1 \\ 5 & 27 & 23 & 25 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 19 & 67 & 25 & 27 \\ 50 & 181 & 74 & 80 \end{bmatrix}$$

إذن، الرسالة المشفرة هي $B = \begin{bmatrix} 19 & 67 & 25 & 27 \\ 50 & 181 & 74 & 80 \end{bmatrix}$

الخطوة 4 لفك تشفير الرسالة، اضرب النظير الضربي M^{-1} لمصفوفة التشفير M في مصفوفة الرسالة المشفرة B .

محددة المصفوفة M

$$|M| = (2 \times 3) - (5 \times 1)$$

$$|M| = 1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{النظير الضربي لمصفوفة التشفير } M$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} \times B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 19 & 67 & 25 & 27 \\ 50 & 181 & 74 & 80 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 20 & 1 & 1 \\ 5 & 27 & 23 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

ولإيجاد محتوى الرسالة المشفرة بالمصفوفة A ، ابدأ بكتابة كل حرف مقابل العدد في الأعمدة باستعمال الجدول وذلك من اليسار إلى اليمين فتحصل على "GET AWAY".

حاول أن تحل! 3. إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 39 & -21 & 17 \\ 7 & 33 & -16 \end{bmatrix}$ مصفوفة رسالة مشفرة.

استعمل مصفوفة التشفير $M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ لفك الرسالة المشفرة وقراءة محتواها مستعملًا جدول التشفير في المثال السابق.

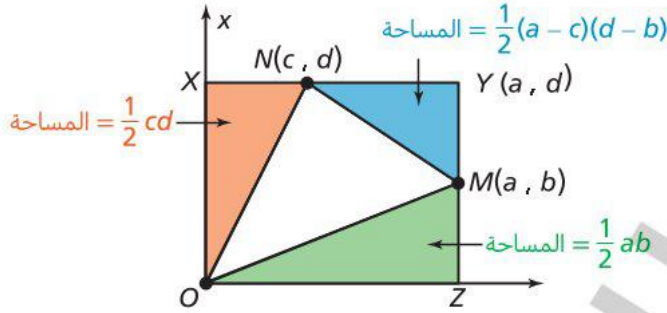
مساعدة رياضية

لفك التشفير عن مصفوفة الرسالة،
اضرب النظير الضربي لمصفوفة
التشفير بمصفوفة الرسالة المشفرة.

A. كيف تستعمل المتجهات والمحددات لإيجاد مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل ؟

وَجْه المثلث بحيث يكون أحد رؤوسه عند نقطة الأصل. استعمال المتجهين $\langle a, b \rangle$ و $\langle c, d \rangle$ اللذين ينتجان عن ضلعي المثلث، بحيث تكون لكل ضلع طرف عند نقطة الأصل. استعمال المتجهين لتكوين مصفوفة، بوضع نقطة واحدة في كل عمود.

$$T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



يمكن إيجاد مساحة المثلث بطرح مساحات المثلثات المحيطة من مساحة المستطيل.

إذا حسبنا المساحة بهذه الطريقة، فستكون النتيجة أن مساحة المثلث تساوي نصف القيمة المطلقة للمحددة:

$$A_{ONM} = \frac{1}{2} (ad - bc) = \frac{1}{2} |\det T|$$

B. ما مساحة المثلث المحدد بالمتجهين $\langle 3, 4 \rangle$ و $\langle -1, 2 \rangle$ ؟

مصفوفة المتجه هي $T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

$$|\det T| = |3(2) - (4)(-1)| = 10$$
 وبالتالي

$$\frac{1}{2} |\text{determinant}| = \frac{1}{2} (10) = 5$$

مساحة المثلث هي 5 وحدات مربعة.

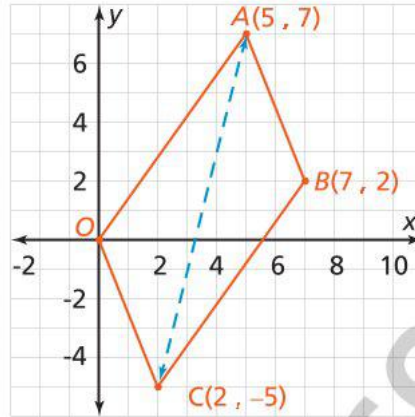
4. a. أوجد مساحة المثلث المحدد بالمتجهين $\langle -2, 10 \rangle$ و $\langle -1, -5 \rangle$.

b. أوجد مساحة المثلث المحدد بالمتجهين $\langle 8, 4 \rangle$ و $\langle 7, -3 \rangle$.

استعمل الأدوات المناسبة

يمكن استعمال المحددات لما هو أكثر من تحديد وجود نظير ضربي لمصفوفة، إذ يمكن استعمالها أيضًا لإيجاد مساحات المثلثات في المستوى الإحداثي.

A. ما مساحة متوازي أضلاع له رأس واحد عند نقطة الأصل ومحدد بالمتجهين $\langle 5, 7 \rangle$ و $\langle 2, -5 \rangle$ ؟



استخدم نقطة الأصل كنقطة بداية للمتجهين المعطيين. ثم مثل نسخة من كل متجه بيانًا تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية الآخر لإكمال متوازي الأضلاع.

مساحة متوازي الأضلاع الذي يشكله المتجهين هي ضعف مساحة المثلث، لذا فإن مساحة $P = |\det T|$.

باستخدام المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ ، تكون مساحة متوازي الأضلاع هي $|\det T|$.

$$|\det T| = |5(-5) - 7(2)| = 39$$

مساحة متوازي الأضلاع هي 39 وحدة مربعة.

خطأ شائع

تغيير إشارة المحددة وفقًا لترتيب النقاط التي تكون مصفوفتك. تذكر أن تستعمل القيمة المطلقة عند حساب المساحة.

B. لمتوازي أضلاع رأس واحد عند نقطة الأصل، ومحدد بالمتجهين $\langle -2, 1 \rangle$ و $\langle 1, a \rangle$ وله مساحة

قدرها 5 وحدات مربعة. ما قيم a المحتملة ؟

اكتب المصفوفة المحددة بالمتجهين

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

$$|-2a - 1(1)| = 5$$

$$|-2a - 1| = 5$$

$$-2a - 1 = 5 \text{ أو } -2a - 1 = -5$$

$$-2a = 6 \text{ أو } -2a = -4$$

$$a = -3 \text{ أو } a = 2$$

أوجد المحددة، وساوها بمساحة متوازي الأضلاع

بسط

أعد الكتابة باستعمال تعريف القيمة المطلقة

حل

تحقق من الحلول.

$$\left| \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right| = 5$$

$$|(-2)(3) - (1)(1)| = 5$$

$$5 = 5$$

$$\left| \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = 5$$

$$|(-2)(2) - (1)(1)| = 5$$

$$5 = 5$$

قيم a المحتملة هي -3 و 2

5. حاول أن تحل: أوجد مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالمتجهين $\langle 3, 8 \rangle$ و $\langle 1, 4 \rangle$.

المحددة

- محددة مصفوفة من الرتبة 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، يرمز لها بالرمز $\det A$ وتساوي $ad - bc$.
- إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times n$ حيث $n \geq 3$ ، استعمل التكنولوجيا لحساب المحددة.

النظير الضربي

- النظير الضربي لمصفوفة مربعة A ، يرمز له بالرمز A^{-1} ، ويكون موجودًا إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$.
- إنها مصفوفة فريدة حيث أن:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

بالنسبة لأي مصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، فإن النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2 هو $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times n$ ، حيث $n \geq 3$ ، استعمل التكنولوجيا لحساب النظير الضربي لمصفوفة.

التطبيقات

تساوي مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل والرأسان الآخران معزفان بالنقطتين $M(2, 3)$ و $N(6, -2)$ ، نصف القيمة المطلقة لمحدد المصفوفة $T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\frac{1}{2} |\det T| = \frac{1}{2} |-4 - 18| = \frac{1}{2} (22) = 11$$

مساحة المثلث هي 11 وحدة مربعة.

تساوي مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل والرأسان الآخران معزفان بالنقطتين $M(c, d)$ و $N(a, b)$ ، نصف القيمة المطلقة لمحددة المصفوفة $T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

$$A = \frac{1}{2} |\det T|$$

تساوي مساحة متوازي أضلاع أحد رؤوسه نقطة الأصل والرأسان الآخران معزفان بالنقطتين $M(4, -3)$ و $N(6, 7)$ ، القيمة المطلقة لمحددة المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$|\det P| = |28 - (-18)| = 46$$

مساحة متوازي الأضلاع هي 46 وحدة مربعة.

تساوي مساحة متوازي أضلاع أحد رؤوسه نقطة الأصل ورأسان آخران معزفان بالنقطتين $M(a, b)$ و $N(c, d)$ ، القيمة المطلقة لمحددة المصفوفة $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

$$A = |\det P|$$

طبق فهمك

في التمارين 5-8، أوجد النظير الضربي للمصفوفة، إن وجد.

5. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

7. **فكر وثابر في الحل** أوجد مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل والرأسان الآخران معزفان بالنقطتين $A(2, 3)$ و $B(6, -1)$.

8. أوجد مساحة متوازي أضلاع أحد رؤوسه نقطة الأصل والرؤوس الأخرى هي $U(5, 2)$ و $V(-1, -10)$ و $M(4, -8)$.

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف توجد النظير الضربي لمصفوفة وكيف تستعمله؟
2. المصطلحات ما محددة مصفوفة من الرتبة 2×2 ؟
3. **حلل الخطأ** يقول حسن إن للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ نظيرًا ضربيًا. يتن خطأ حسن وصححه.
4. **تواصل بدقة** وضح كيفية استعمال محددة مصفوفة لإيجاد مساحة مثلث، إذا علمت إحداثيات رؤوسه علقًا أن نقطة الأصل أحد رؤوسه.

في التمرينين 16 و 17، أوجد النظير الضربي للمصفوفة. انظر المثال 1

$$16. \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad 17. \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

في التمارين 18-21، هل للمصفوفة نظير ضربي؟ إذا كان كذلك،

أوجد. انظر المثال 2

$$18. P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad 19. Q = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$20. \text{المصفوفة } B = \begin{bmatrix} 22 & 101 & 49 & 65 \\ 39 & 175 & 83 & 116 \end{bmatrix} \text{ رسالة مشفرة}$$

$$\text{باستعمال المصفوفة } M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \text{ ما محتوى الرسالة؟}$$

انظر المثال 3

$$21. \text{المصفوفة } \begin{bmatrix} 49 & 145 & 173 & 124 & 76 & 215 \\ 18 & 50 & 62 & 46 & 30 & 78 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ كلمة سر مشفرة باستعمال المصفوفة}$$

ما هي كلمة السر؟ انظر المثال 3

في التمرينين 22 و 23، أوجد مساحة المثلث المحدد بالمتجهين

المعطيين. انظر المثال 4

$$22. \langle -1, 5 \rangle, \langle 2, 10 \rangle$$

$$23. \langle -6, -1 \rangle, \langle 9, -3 \rangle$$

في التمرينين 24 و 25، ما مساحة متوازي أضلاع له رأس واحد عند

نقطة الأصل ومحدد بالمتجهين المعطيين؟ انظر المثال 5

$$24. \langle -2, 12 \rangle, \langle -4, 16 \rangle$$

$$25. \langle 7, -2 \rangle, \langle -5, 3 \rangle$$

9. **استعمل البنية** اكتب مصفوفة من الرتبة 2×2 على أن لا يكون

لها نظير ضربي. وضح لماذا ليس لها نظير ضربي.

10. **ابن الحجج الرياضية** هل يمكن أن يكون لمصفوفة من الرتبة

2×3 نظير ضربي؟ وضح إجابتك.

11. **حلل الخطأ** تريد فوزية أن تجد مساحة متوازي أضلاع أحد

رؤوسه نقطة الأصل والرؤوس الثلاثة معروفة بالنقاط $A(3, 6)$

و $B(-4, -10)$ و $C(-1, -4)$. وضح خطأ فوزية عند إيجادها

مساحة متوازي الأضلاع، وصححه.

لتكن T المصفوفة المعرفة بالرأسين A و B

$$\text{حيث } T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

مساحة متوازي الأضلاع هي

$$A = \frac{1}{2} |\det T|$$

$$A = \frac{1}{2} |-6| = 3$$

مساحة متوازي الأضلاع هي 3 وحدات مربعة.

X

$$12. \text{بزر منطقياً} \text{ هل كل من المصفوفتين } \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

نظير ضربي للأخرى؟ وضح إجابتك.

$$13. \text{مهارات التفكير العليا} \text{ لتكن } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \text{ أوجد قيم}$$

$$A = A^{-1} \text{ حيث } a, b, c, d.$$

(تلميح: هناك أربع قيم مختلفة ممكنة).

14. **ابن الحجج الرياضية** تقول منى إنه لإيجاد $\det B$ حيث

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ يمكن استعمال } \det B = ad - bc$$

أو $\det B = bc - ad$. هل منى على صواب؟ وضح إجابتك.

$$15. \text{بزر منطقياً} \text{ إذا لم يكن للمصفوفة } A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ نظير ضربي،}$$

أوجد قيمة b . وضح كيف تعرف أن قيمة b صحيحة.

26. **بزر منطقياً** ثمة مسمى وظيفي مخفي في المصفوفة

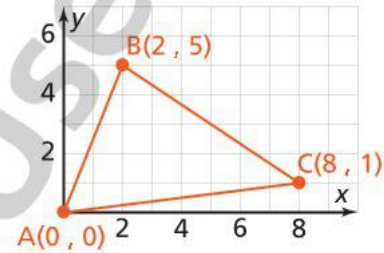
$$\begin{bmatrix} -28 & -46 & -70 & -26 & 16 \\ 54 & 21 & 3 & 39 & 54 \end{bmatrix}$$

باستعمال مصفوفة التشفير $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

يمكن للذين اكتشفوا المسمى فقط أن يتقدموا للوظيفة.
ما المسمى الوظيفي المعلن عنه ؟

27. **نمذج** يوضح المستوى الإحداثي أدناه موقع حديقة مثلثة الشكل،

حيث كل وحدة على الشبكة تمثل 10 ft



a. اكتب المصفوفة المكوّنة من إحداثيات الرأسين B و C من

الحديقة المثلثة الشكل ABC.

b. أوجد مساحة الحديقة.

c. يغطي كيس يحتوي 5 lb من بذور العشب 300 ft^2 تقريباً.

إذا كان سعر الكيس الواحد من البذور QR 71.92،

فما تكلفة تغطية كامل الحديقة ببذور العشب ؟

وضح إجابتك.

28. **فكر وثابر في الحل** يستعمل مهندس مدني مستوى إحداثي

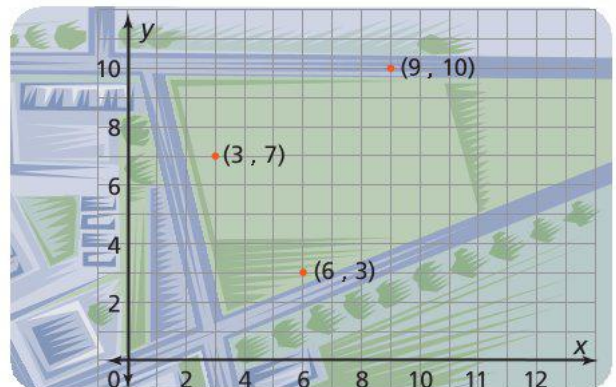
لتخطيط حي جديد. كل مربع على الشبكة يمثل 4000 قدم مربع.

يريد المهندس بناء حديقة متوازية الأضلاع تقريباً في الحي الجديد

بحيث يقع أحد رؤوس متوازي الأضلاع عند نقطة الأصل والرؤوس

الثلاثة الأخرى تقع عند النقاط (3, 7) و (6, 3) و (9, 10).

أوجد مساحة الحديقة.



29. هل للمصفوفة نظير ضربي ؟ اكتب نعم أو لا.

a. $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -12 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$

30. **اختبار SAT/ACT** مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل والرأسان

الآخران معزفان بالنقطتين (4, 7) و (2, y)، تساوي 11 وحدة

مربعة. ما قيم y الممكنة ؟

Ⓐ 2 و 9 Ⓑ -2 و -9 Ⓒ 2 و -9 Ⓓ -2 و 9

31. **مهمة أدائية** تقوم إحدى الشركات بتشفير أرقام بطاقات الائتمان

الصادرة عنها وتحويلها إلكترونياً قبل إرسالها حتى يصبح رقم الزبون

أكثر أماناً. تستعمل الشركة مصفوفات من الرتبة 2×8 لتمثيل 16

رقفاً في بطاقة الائتمان. يمثل العمود الأول الرقمين الأول والثاني

ويمثل العمود الثاني الرقمين الثالث والرابع وهكذا ...



الجزء A إذا كانت المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 450 & 450 & 280 & 30 & 10 & 330 & 100 & 370 \\ 945 & 945 & 580 & 75 & 25 & 685 & 210 & 765 \end{bmatrix}$$

تمثل رقم بطاقة ائتمان أحد العملاء مشفراً بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 25 & 80 \end{bmatrix}$.

ما رقم بطاقة ائتمان العميل صاحب هذه البطاقة ؟

الجزء B كوّن بطاقة ائتمانك الخاصة من 16 رقفاً واكتب مصفوفة

التشفير ثم قم بتشفير رقم بطاقتك. تبادل مع أحد أصدقائك

مصفوفات أرقام البطاقة المشفرة ومصفوفة التشفير التي

استعملتها، وليعمل كل منكما على فك تشفير رقم بطاقة الآخر.

الجزء C قرر رئيس الشركة أن مصفوفات التشفير من الرتبة

2×2 ليست آمنة بما يكفي ويريد استعمال مصفوفات من الرتبة

3×3 لتشفير أرقام بطاقات الائتمان. كيف سيؤثر ذلك في عملية

التشفير ؟

حل أنظمة المعادلات الخطية
باستعمال المصفوفاتSolving Linear
Equations Using
Matrices

أستطيع... استعمال المصفوفات
لتمثيل وحل أنظمة معادلات خطية.

معياري الدرس

10.4.7

المصطلحات

- مصفوفة المعاملات
coefficient matrix
- مصفوفة المتغيرات
variable matrix
- مصفوفة الثوابت
constant matrix

ابحث عن العلاقات

الضرب في النظير الضربي لمصفوفة
مشابه لعملية الضرب في النظير
الضربي لعدد حقيقي غير الصفر.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 5y = 25 \end{cases} \quad \text{ليكن نظام المعادلات:}$$

A. حل نظام المعادلات أعلاه بإحدى الطرق التي سبق وتعلمتها.

B. **بزر منطقياً** a. كيف تستعمل النظير الضربي لحل المعادلة: $4x = 9$ ؟ وضح إجابتك.

b. إذا كانت A مصفوفة معلومة من الرتبة 2×2 و B مصفوفة معلومة من الرتبة

2×1 و $A \cdot X = B$ على فرض أن 2×1 ،

وأن A ليس لها نظير ضربي، هل يمكن إيجاد المصفوفة X باستعمال $A \cdot A^{-1} = I$ ؟

هل يمكن إيجاد المصفوفة X ؟ وضح إجابتك.

كيف يمكن استعمال النظير الضربي لمصفوفة لتبسيط عملية حل أنظمة
معادلات خطية ؟

السؤال الأساس

حل معادلة مصفوفية

مثال 1

$$\text{أوجد حل المعادلة المصفوفية} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

افترض أن A تمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، وأن A^{-1} تمثل النظير الضربي للمصفوفة.

الهدف هو عزل مصفوفة المتغيرات لإيجاد قيمة كل من x و y.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B & \longrightarrow & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ X &= A^{-1} \cdot B & \longrightarrow & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{إذن، حل المعادلة هو} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

يمكنك التحقق من صحة الحل بضرب A في مصفوفة الحل للتأكد من أن ناتج الضرب هو B.

حاول أن تحل! 1. حل المعادلة المصفوفية $A \cdot X = B$

$$\text{إذا كانت} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

كيف تمثل نظام معادلات خطية في صورة معادلة مصفوفية ؟

A.
$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

معامل المتغير y في
المعادلة الثانية هو العدد 1

مصفوفة المعاملات لها صفوف تتضمن معاملات معادلة واحدة فقط
في كل صف، وكل عمود يتضمن معاملات متغير واحد فقط.

مصفوفة المتغيرات لها عمود واحد يمثل كل المتغيرات في نظام المعادلات الخطية.

استعمل القيم الثابتة الموجودة في الطرف الأيمن من نظام المعادلات الخطية لإنشاء **مصفوفة الثوابت**.

B.
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - 8z = -24 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

معامل المتغير غير
الموجود هو الصفر.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -24 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل! 2. اكتب كل نظام معادلات خطية مما يلي في صورة معادلة مصفوفية.

a.
$$\begin{cases} 10x - 9y = 1 \\ 7x + 6y = 13 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 14 \\ 2x - 3y + 5z = 20 \\ 3x - 6y = 8 \end{cases}$$

كيف تستعمل النظير الضربي لمصفوفة في حل نظام المعادلات الخطية ؟

A. إذا أمكن، استعمل النظير الضربي لمصفوفة لحل نظام المعادلات التالي:

$$\begin{cases} -3x + 2y = -2 \\ -x + 3y = 11 \end{cases}$$

الخطوة 1 اكتب نظام المعادلات الخطية في صورة معادلة مصفوفية.

$$\begin{cases} -3x + 2y = -2 \\ -x + 3y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات من الرتبة 2×2

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

يتبع في الصفحة التالية

استعمل البنية

اضرب المصفوفات التي في الطرف
الأيسر واستعمل خواص المصفوفات
المتكافئة لاستعادة نظام المعادلات
الخطية الأصلي من المعادلة
المصفوفية.

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية

لاحظ أن استعمال هذه الطريقة
يقتضي وجود نظير ضربي للمعادلة
الأصلية.

الخطوة 3 اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7}(-2) + \frac{2}{7}(11) \\ -\frac{1}{7}(-2) + \frac{3}{7}(11) \end{bmatrix}$$

تنتج عن ضرب مصفوفة في نظيرها الضربي مصفوفة محايدة.

تنتج عن ضرب النظير الضربي في مصفوفة الثوابت مصفوفة الحل.

الخطوة 4 اضرب في المصفوفة المحايدة، واكتب الحل.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

إذن، حل نظام المعادلات الخطية الأصلي هو (4, 5).

B. إذا أمكن، استعمل النظير الضربي لمصفوفة لحل النظام التالي:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{8}y = \frac{1}{2} \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$$

اكتب نظام المعادلات الخطية في صورة معادلة مصفوفية، $A \cdot X = D$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$$

لاستعمال الطريقة المستعملة في الجزء (A)، يجب أن يكون للمصفوفة نظير ضربي. أوجد محددة مصفوفة المعاملات A لتعرف إن كان لها نظير ضربي أم لا.

$$\det(A) = \frac{1}{4}(5) - \left(-\frac{5}{8}\right)(-2) = \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0$$

بما أن محددة مصفوفة المعاملات تساوي الصفر، إذن المصفوفة ليس لها نظير ضربي، وبالتالي يجب عليك حل نظام المعادلات هذا بطريقة أخرى، مثل التعويض أو الحذف أو تقليص عدد صفوف المصفوفة.

$$8\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{8}y = \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 2x - 5y = 4$$

$$\begin{array}{r} 2x - 5y = 4 \\ +(-2x + 5y = -4) \\ \hline 0 + 0 = 0 \end{array}$$

باستعمال طريقة الحذف تكون النتيجة $0 = 0$ ، وبالتالي لنظام المعادلات الخطية عدد لا نهائي من الحلول.

خطأ شائع

إذا لم يكن للمصفوفة نظير ضربي فهذا يعني أن نظام المعادلات هذا ليس له حل وحيد.

حاول أن تحل! 3. حل أنظمة المعادلات التالية باستعمال النظير الضربي للمصفوفة، إن أمكن.

a. $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ \frac{3}{2}x + 2y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 4y = -14 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$

أحذية رياضية نسائية	أحذية رياضية رجالية
	
تكلفة اليد العاملة: QR 40	تكلفة اليد العاملة: QR 56
	
ثمن المواد: QR 48	ثمن المواد: QR 72

تنتج إحدى الشركات أحذية رياضية رجالية ونسائية. تنفق الشركة يوميًا مبلغ QR 1 360 على اليد العاملة ومبلغ QR 1 680 على المواد اللازمة. تكلفة اليد العاملة وثمان المواد لإنتاج زوج واحد من الأحذية مبيّنة في الشكل المجاور. أوجد عدد الأحذية الرياضية التي تنتجها الشركة يوميًا.

لإيجاد الحل باستعمال النظير الضربي

للمصفوفة، حدّد المتغيرات أولًا.

ثم اكتب نظام معادلات لنمذجة الحالة.

بعد ذلك اكتب نظام المعادلات في صورة

معادلة مصفوفية.

w : عدد أزواج الأحذية الرياضية

النسائية المنتجة

m : عدد أزواج الأحذية الرياضية الرجالية المنتجة

المعادلة الأولى تمثل
تكلفة اليد العاملة.

$$40w + 56m = 1\,360$$

المعادلة الثانية
تمثل تكلفة المواد.

$$48w + 72m = 1\,680$$

$$\begin{bmatrix} 40 & 56 \\ 48 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,360 \\ 1\,680 \end{bmatrix}$$

اضرب نظام المعادلات في النظير الضربي للمصفوفة لإيجاد الحل.

المصفوفة هي مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 ، لها نظير ضربي لأن:

$$\det A = ad - bc = 40(72) - 48(56) = 192$$

بما أن $\det A \neq 0$ ، إذن لها نظير ضربي.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 72 & -56 \\ -48 & 40 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{192} \begin{bmatrix} 72 & -56 \\ -48 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{24} \end{bmatrix} \text{ هو } \begin{bmatrix} 40 & 56 \\ 48 & 72 \end{bmatrix} \text{ النظير الضربي للمصفوفة}$$

يتبع في الصفحة التالية

ضع

احسب

إرشاد

يمكنك استعمال التكنولوجيا لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة وذلك بهدف السرعة في الحل.

اضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 & 56 \\ 48 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1360 \\ 1680 \end{bmatrix}$$

تذكر أن ضرب مصفوفة
في نظيرها الضربي يعطي
المصفوفة المحايدة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}(1360) + \left(-\frac{7}{24}\right)(1680) \\ -\frac{1}{4}(1360) + \left(\frac{5}{24}\right)(1680) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

الحل هو (20 , 10). إذن، تنتج الشركة يوميًا 20 زوجًا من الأحذية الرياضية النسائية و 10 أزواج من الأحذية الرياضية الرجالية.

ففسر

4. حاول أن تحل! إذا خصصت نفس الشركة مبلغ QR 3 440 لليد العاملة ومبلغ QR 4 320 للمواد لمدة ثلاثة أيام، أوجد عدد الأحذية التي يمكن للشركة أن تنتجها خلال الأيام الثلاثة.

حل معادلة مصفوفية

لحل معادلة مصفوفية،

اضرب طرفي المعادلة في النظير

الضربي (A^{-1}) للمصفوفة في حال

كان محدد المصفوفة لا يساوي الصفر.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

اضرب الطرف الأيسر في النظير الضربي (A^{-1}) للمصفوفة لعزل مصفوفة المتغيرات.

نظام معادلات خطية

يمكن استعمال المصفوفات لحل أنظمة المعادلات الخطية.

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ dx + ey + fz = m \\ gx + hy + jz = n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

اكتب نظام المعادلات الخطية أدناه في صورة معادلة مصفوفية.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بالنسبة لمصفوفة من الرتبة 2×2 ، أوجد محدد مصفوفة المعاملات A . إذا كان $\det A \neq 0$ ، حل المعادلةالمصفوفية باستعمال النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. إذا كان $\det A = 0$ ، حل المعادلة المصفوفية بطريقة أخرى. استعمل التعويض مثلاً أو الحذف.بالنسبة لمصفوفة من الرتبة $n \times n$ حيث $n \geq 3$ ، استعمل التكنولوجيا لإيجاد النظير الضربي للمصفوفة. ثم اضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة لإيجاد الحل.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، اكتب نظام المعادلات الخطية في صورة معادلة مصفوفية.

$$5. \begin{cases} 5x + 3y = -21 \\ 2x - 4y = -24 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 6x - 8y + 2z = -46 \\ -x + 5y + 3z = 29 \\ 9x - z = -35 \end{cases}$$

7. لتكن المعادلة المصفوفية $A \cdot X = B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أوجد النظير الضربي A^{-1} ثم استعمله لحل المعادلة المصفوفية.

8. حل المعادلة المصفوفية التالية موضحاً خطوات الحل لإيجاد

 x و y حيث إن:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن استعمال النظير الضربي لمصفوفة لتبسيط عملية حل أنظمة معادلات خطية ؟

2. حلّ الخطأ يقول حمد إن المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 22 \end{bmatrix}$$

التالي:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -y + 4z = 13 \\ 2x + 6z = 22 \end{cases}$$

X

بيّن خطأ حمد ووضحه.

3. المصطلحات كيف توجد مصفوفة المعاملات لأي نظام معادلات خطية ؟ وضح إجابتك.

4. استعمل البنية وضح كيفية حل نظام معادلات خطية باستعمال النظير الضربي لمصفوفة.

في التمرينين 14 و 15، حل المعادلة المصفوفية $A \cdot X = B$ للمصفوفة المعطاة. انظر المثال 1

$$14. A = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 26 \\ -2 \end{bmatrix}$$

في التمرينين 16 و 17، اكتب نظام المعادلات الخطية في صورة معادلة مصفوفية. انظر المثال 2

$$16. \begin{cases} 8x + y = -1 \\ -12x - 2y = 6 \end{cases} \quad 17. \begin{cases} 2x + 3y + 7z = -4 \\ 10x + 8y - 2z = -12 \\ 6x - y = 30 \end{cases}$$

في التمارين 18-21، حل نظام المعادلات الخطية باستعمال النظير الضربي للمصفوفة، إذا أمكن. انظر المثال 3

$$18. \begin{cases} -x + 2y = 8 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases} \quad 19. \begin{cases} 9x + 2y = 1 \\ -8x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -3x + 4y = -4 \\ \frac{1}{2}x - 3y = -11 \end{cases} \quad 21. \begin{cases} 2x + y = -8 \\ x - \frac{1}{3}y = 6 \end{cases}$$

22. تصنع خولة عقودًا وأساور. إذا صنعت في الأسبوع الماضي 5 أساور وعقدين في 16 ساعة عمل، وصنعت في هذا الأسبوع 3 أساور و 5 عقود في 21 ساعة عمل، أوجد الزمن اللازم لصنع سوار واحد والزمن اللازم لصنع عقد واحد. انظر المثال 4



9. **ابن الحجج الرياضية** وضح لماذا لا يمكن استعمال المعادلة: $X = B \cdot A^{-1}$ لحل المعادلة المصفوفية في الصورة $A \cdot X = B$ حيث:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & 9 \\ -4 & 12 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

10. **تواصل بدقة** اذكر إحدى إيجابيات استعمال المصفوفات في حل أنظمة المعادلات الخطية بدلًا من حلها بطريقة التعويض أو الحذف (افترض أنك تستعمل التكنولوجيا لإيجاد النظير الضربي للمصفوفة).

11. **حلل الخطأ** بين خطأ سالم في حل المعادلة المصفوفية أدناه ثم صححه.

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -26 \\ 16 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ 16 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 14 \\ -100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

X

12. **ابحث عن العلاقات** افترض أن $a = c$ و $b = d$ في المعادلة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

المصفوفية ما نوع العلاقة بين e و f عندما يكون للمعادلة عدد لانهايتي من الحلول؟ ما نوع العلاقة بين e و f عندما لا يكون للمعادلة حل؟

13. **مهارات التفكير العليا** اكتب نظام معادلات خطية بأربع متغيرات

w, x, y, z على أن يكون الحل أعدادًا صحيحة، ثم اكتب معادلة مصفوفية لتمثيل نظام المعادلات الذي كتبته.

أخيرًا، حل المعادلة المصفوفية باستعمال التكنولوجيا لإثبات صحة أن الحل أعداد صحيحة.

23. استعمال البنية يعمل مالك في شركة لتعبئة الأدوية في قوارير من

الحجمين 0.25 L و 0.1 L، إذا كان مجموع أحجام القوارير

2.55 L، ولديه من القوارير ذات الحجم 0.25 L ثلاثة أضعاف عدد

القوارير ذات الحجم 0.1 L، اكتب معادلة مصفوفية لإيجاد عدد

القوارير ذات الحجم 0.25 L، x ، وعدد القوارير ذات الحجم

0.1 L، y ، التي يعينها مالك.

a. اكتب معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارير x ذات الحجم

0.25 L، وعدد القوارير y ذات الحجم 0.1 L،

التي يعينها مالك.

b. أوجد عدد القوارير من كلا الحجمين.

24. فكر وثابر في الحل يمارس منصور يوميًا رياضتي الجري

وركوب الدراجة. يبين الجدول أدناه عدد ساعات الجري وعدد ساعات

ركوب الدراجة والمسافة الإجمالية التي يجتازها منصور يوميًا

في النشاطين معًا. اكتب معادلة مصفوفية وحلها لتوجد متوسط

السرعة عند منصور في الجري وفي ركوب الدراجة.

اليوم	ركوب الدراجة	الجري	المسافة الإجمالية (mi)
1	2	2	46
2	2	1	40

25. نموذج يريد سالم تكوين مزيج من الحبوب ليحصل على خليط

يحتوي 50 g بروتين و 36 ألياف. تبين كل علبه حبوب أدناه كمية

البروتين وكمية الألياف في كل منهما.

اكتب معادلة مصفوفية تمثل الحالة. ثم أوجد الكمية اللازمة من

كل نوع من الحبوب ليحصل سالم على الخليط المطلوب.



سعرات حرارية: 300
بروتين: 11 g
ألياف: 8 g



سعرات حرارية: 300
بروتين: 7 g
ألياف: 5 g

26. اختر مما يلي المعادلة المصفوفية التي لها حل واحد فقط.

A $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 \\ 36 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$

27. اختبار SAT/ACT الإحداثيان (x, y) لنقطة في مستوى إحداثي

هما الحل للمعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

في أي ربع تقع هذه النقطة ؟

A الربع الأول B الربع الثاني C الربع الثالث D الربع الرابع

28. مهمة أدائية يتفاعل النيتروجين (N_2) والهيدروجين (H_2)

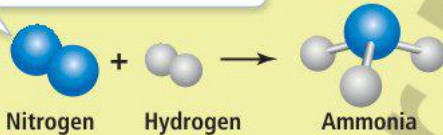
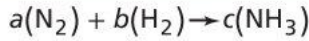
ليشكل الأمونيا (NH_3). لكتابة معادلة هذا التفاعل يجب أن يكون

عدد جزيئات كل من العنصرين المتفاعلين مساويًا لعدد جزيئات

نفس العنصر في المادة الناتجة.

يمكنك استعمال المصفوفات لمعرفة المعاملات التي توازن معادلة

التفاعل: $a(N_2) + b(H_2) = c(NH_3)$



الجزء A ليكن $c = 1$. اكتب نظام معادلات لهذا التفاعل يتضمن

a و b . كون معادلة واحدة تمثل N ومعادلة واحدة تمثل H ،

وفكر في التفاعل المعبر عنه بالسهم بأنه إشارة المساواة.

الجزء B أعد كتابة نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية ثم

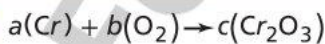
حلها لإيجاد a و b .

الجزء C عوض المعاملات في معادلة التفاعل. اضرب المعادلة في

المقام المشترك الأصغر لكل الكسور لتصبح كافة المعاملات أعدادًا

كلية. تحقق من توازن المعادلة.

الجزء D استعمال نفس العملية لموازنة التفاعل التالي:



مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة ؟

1. كيف يمكنك استعمال المصفوفات في حل المسائل ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- مصفوفة الثوابت
- المصفوفة المحايدة
- النظير الضربي للمصفوفة
- المقدار
- ضرب مصفوفة في عدد ثابت
- المصفوفة المربعة
- مصفوفة المتغيرات
- المتجه
- مصفوفة صفرية

2. _____ لها عمود واحد يمثل كل المتغيرات في نظام المعادلات الخطية.
3. _____ هي مصفوفة مربعة دائمة كل عنصر في القطر الرئيسي فيها هو 1 وكل العناصر الأخرى أصفار.
4. _____ يعني ضرب كل عنصر من المصفوفة في عدد حقيقي.
5. _____ هو طول المتجه.
6. ناتج ضرب مصفوفة في _____ هو المصفوفة المحايدة.
7. _____ لها عمود واحد يحتوي على الثوابت الموجودة في الطرف الأيمن من نظام المعادلات الخطية.
8. _____ هي مصفوفة فيها العدد نفسه من الصفوف والأعمدة.

مراجعة المفاهيم والمهارات

العمليات على المصفوفات

الدرس 7-1

مراجعة سريعة

- إذا كانت المصفوفة تتكون من m صف و n عمود تكون رتبته $m \times n$.
- لضرب مصفوفة في عدد ثابت، اضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد الثابت.
- لجمع (أو طرح) المصفوفات، نجمع (أو نطرح) العناصر المتناظرة فيها.

مثال

اجمع المصفوفتين A و B .

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 11 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

اجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 9 & 2 & 11 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9+4 & 2+(-1) & 11+7 \\ -3+8 & 5+12 & 6+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 1 & 18 \\ 5 & 17 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تدرب وحل مسائل

بعض نتائج دوري كرة سلة

الفريق	فاز	خسر
A	14	4
B	7	11
C	3	15

9. **نمذج** مثل الجدول المجاور فيمصفوفتين مختلفتين واكتب
رتبة كل مصفوفة.

الأسعار (QR)

المتجر	بنطال	حذاء	قميص
A	80	160	65
B	95	175	70

10. **فكر وثابر في الحل** يبينالجدول المجاور البسة
رجالية مع أسعارها
في متجرين.a. مثل الجدول في مصفوفة M من الرتبة 3×2

b. حدد ما يعنيه كل من العناصر:

$$m_{32}, m_{22}, m_{12}$$

في التمرينين 11 و 12، لتكن $C = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ،
احسب ناتج العملية.

11. $D - C$

12. $5D$

13. قطعة مستقيمة طرفاها هما النقطتان $A(5, -3)$ و $B(2, 4)$. استعمل المصفوفات لتمثيل إزاحة $\overline{AB}$ إلى $\overline{YZ}$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين و 7 وحدات إلى الأسفل.ما إحداثيات النقطتين Y و Z ؟14. **تواصل بدقة** افترض أن N مصفوفة من الرتبة 3×3 ،وَصَح كيفية إيجاد المصفوفة P بحيث تكون $N + P$ هي
المصفوفة الصفريّة.15. **فكر وثابر في الحل** سجّل 8 رجال و 6 نساء في البداية في

دورة تدريبية، ثم سجّل 12 رجلاً و 18 امرأة في الدورة التدريبية.

استعمل جمع المصفوفات لإيجاد العدد الكلي للرجال والنساء

الذين سجّلوا في الدورة التدريبية.

مراجعة سريعة

- ناتج ضرب مصفوفتين هو مصفوفة جديدة عناصرها هي مجاميع نواتج ضرب عناصر الصفوف في عناصر الأعمدة المناظرة لها.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix}$$

- بالنسبة إلى مصفوفة A من الرتبة $n \times n$ ، المصفوفة

المحايدة I هي مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ عناصر قطرها الرئيسي 1 وبقيها عناصرها أصفار: $AI = IA = A$

مثال

اضرب المصفوفتين A و B .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

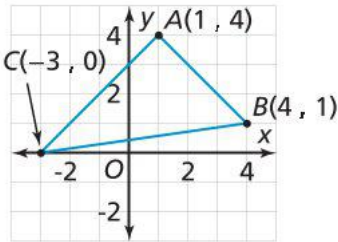
أوجد مجاميع نواتج ضرب عناصر الصفوف والأعمدة المناظرة.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (3)(-1) + (-2)(0) & (3)(6) + (-2)(5) \\ (1)(-1) + (-4)(0) & (1)(6) + (-4)(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تدرب وحل مسائل

في التمارين 16-21، لتكن $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ أوجد ناتج الضرب.

16. AB 17. AC 18. BC
19. BA 20. CA 21. CB



22. مثل إحداثيات المثلث

في صورة مصفوفة، ثم اضربها في $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لإيجاد إحداثيات صورة المثلث ABC بعد انعكاسه حول المحور x .

23. **ابحث عن العلاقات** وضح كيف يمكنك أن تعرف ما إذا كان بالإمكان ضرب مصفوفتين.

24. **فكر وثابر في الحل** في المتجر X ، سعر التلفاز A

هو QR 1 750 وسعر التلفاز B هو QR 2 400.

في المتجر Y ، سعر التلفاز A هو QR 1 600

وسعر التلفاز B هو QR 2 500. الشهر الماضي، باع كل متجر

25 تلفازًا A و 20 تلفازًا B . اكتب معادلة مصفوفية وخلصها

لإيجاد إجمالي المبيعات في كل متجر.

المتجهات

الدرس 7-3

مراجعة سريعة

ليكن $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ و $\vec{v} = \langle c, d \rangle$ مقدار $\vec{u}$ هو $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ واتجاه $\vec{u}$ هو $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.
 $k \cdot \vec{u} = \langle k \cdot a, k \cdot b \rangle$ و $k \cdot |\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
 $\vec{u} + \vec{v} = \langle a + c, b + d \rangle$
و $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \langle a - c, b - d \rangle$

مثال

اجمع المتجهين $\vec{AB} = \langle 6, -2 \rangle$ و $\vec{CD} = \langle 3, 7 \rangle$

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{CD} &= \langle 6, -2 \rangle + \langle 3, 7 \rangle \\ &= \langle 6 + 3, -2 + 7 \rangle \\ &= \langle 9, 5 \rangle \end{aligned}$$

تدرب وحل مسائل

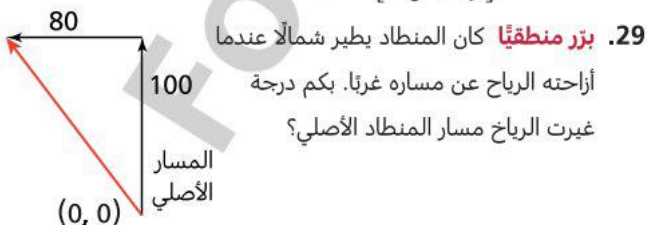
في التمرينين 25 و 26، أوجد ناتج جمع وطرح المتجهين.

25. $\vec{AB} = \langle 8, 10 \rangle$, $\vec{CD} = \langle -3, 2 \rangle$

26. $\vec{RC} = \langle -7, 9 \rangle$, $\vec{TU} = \langle 11, -5 \rangle$

27. أوجد ناتج ضرب المتجه $\vec{t} = \langle 13, -3 \rangle$ في العدد الثابت 4

28. **تواصل بدقة** صف تحويل $\vec{MN} = \langle 13, -3 \rangle$ عند ضربه في المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



مراجعة سريعة

يُرمز لمحددة مصفوفة من الرتبة 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\det A$ وتساوي $ad - bc$.

النظير الضربي للمصفوفة هو $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال

أوجد النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

$$\det A = ad - bc = (4)(6) - (2)(8) = 24 - 16 = 8$$

بما أن المحددة لا تساوي 0، إذن يوجد نظير ضربي للمصفوفة.

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 30 و 31، أوجد محددة المصفوفة.

$$30. \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$31. \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

في التمرينين 32 و 33، هل للمصفوفة نظير ضربي؟ إذا كان لها نظير ضربي، أوجده.

$$32. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$33. B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

34. **حل الخطأ** قالت نوال إن النظير الضربي للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ هو } \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}. \text{ بيّن خطأ نوال وصحّحه.}$$

35. **استعمل البنية** أوجد مساحة مثلث أحد رؤوسه نقطة الأصل

ورأساه الآخران معزّزان بالنقطتين $A(8, 6)$ و $B(2, -4)$.

مراجعة سريعة

يمكن استعمال المصفوفات لحل أنظمة المعادلات الخطية.

تتكون مصفوفة المعاملات من صفوف يتضمن كل منها معاملات معادلة واحدة، ومن أعمدة يتضمن كل منها معاملات متغير واحد.

مصفوفة المتغيرات تتكون من عمود واحد يمثل كل المتغيرات في نظام المعادلات الخطية.

مصفوفة الثوابت تتكون من عمود واحد يمثل الثوابت الموجودة في الطرف الأيمن من نظام المعادلات الخطية.

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ dx + ey + fz = m \\ gx + hy + jz = n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

مثال

حل نظام المعادلات
 $3x + 6y = 0$
 $-2x + 3y = -7$
 باستعمال المصفوفات.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ -2x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن، حل نظام المعادلات الخطية هو $(2, -1)$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 36 و 37، حل نظام المعادلات الخطية باستعمال النظير الضربي للمصفوفة.

$$36. \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ -3x - 7y = -4 \end{cases} \quad 37. \begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ 2x - 2y = -13 \end{cases}$$

38. **تواصل بدقة** وضح كيفية كتابة نظام معادلات خطية إذا كانت

المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \\ -7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

39. **بزر منطقياً** دخل أحمد وخالد إلى مكتبة المدرسة لشراء لوازم

العام الدراسي. اشترى أحمد 8 مجلدات و 6 دفاتر ودفع

QR 152، واشترى خالد مجلدين و 9 دفاتر ودفع

QR 188، أوجد ثمن المجلد الواحد والدفتر الواحد.

السؤال الأساس ؟

كيف تنشئ وتستعمل المنحنى التكراري التراكمي ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 8-1 Measures of Central Tendency
- 8-2 Measures of Spread
- 8-3 The Cumulative Frequency Graph

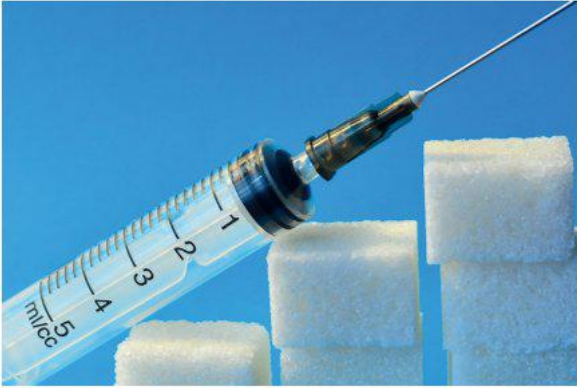
- 8-1 مقاييس النزعة المركزية
- 8-2 مقاييس التشتت
- 8-3 المنحنى التكراري التراكمي

Topic Vocabulary

- mean
- median
- order of the median
- median class
- mode
- modal class
- range
- variance
- standard deviation
- first quartile (Q_1)
- third quartile (Q_3)
- interquartile range (IQR)

مصطلحات الوحدة

- الوسط الحسابي
- الوسيط
- رتبة الوسيط
- الفئة الوسيطة
- المنوال
- الفئة المنوالية
- المدى
- التباين
- الانحراف المعياري
- الربع الأول
- الربع الثالث
- المدى الربعي



هل تعلم؟

إن الإفراط في تناول السكر يضرّ بصحة الإنسان، وتظهر الآثار الضارة لذلك بشكل خاص مع تقدمه في العمر. فالإكثار من تناول الأطعمة التي تحتوي على نسبة كبيرة من السكر تزيد من خطر السمنة، وتؤدي إلى نقص الفيتامينات الأساسية في الجسم. وقد يتعرض الإنسان للإصابة بالجلطات القلبية بسبب الإفراط في تناول السكر.

بيّنت الدراسات أن معدل كمية السكر في الدم يتغير خلال اليوم؛ فهو الأدنى عند الاستيقاظ صباحاً ويرتفع تلقائياً بعد تناول الطعام. يعتبر الأطباء أن المعدل الطبيعي لكمية السكر في الدم هو ذلك الذي يسجل عند الاستيقاظ صباحاً عندما يكون المرء قد امتنع عن تناول الطعام لمدة 8 ساعات على الأقل. لذا يطلبون إجراء الفحص المخبري في الصباح. يتراوح المعدل الطبيعي بين 70 mg/dl و 90 mg/dl.

تشخيص مرض السكري

يتم تشخيص مرض السكري عندما يكون معدل السكر في دم الإنسان، الذي أجرى الفحص بعد انقطاعه عن تناول الطعام مدة ثماني ساعات، أكبر من 200 mg/dl



مهمتك: تحديد معدلات السكر في الدم واستخلاص نتائج

ستقوم أنت وزملاؤك بزيارة مختبر طبي في مدينة الدوحة لجمع بيانات عن معدلات السكر لدى فئتين من الأشخاص: الفئة الأولى في الخمسين من العمر وما دون، والفئة الثانية فوق الخمسين من العمر. أنشئ جدولاً تكرارياً وسجل فيه معدلات السكر التالية في الدم: 80-100 ، 100-120 ، 120-140 ، 140-160 ، 160-180 ، 180-200 ، 200-220

استعمل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لمقارنة وتحليل بيانات المجموعتين لتحديد ما إذا كان هناك أشخاص مصابين بمرض السكري في أي من الفئتين. برر النتائج التي توصلت إليها وعقم هذه النتائج وحاول القيام بحملة توعية في الحي الذي تسكنه لتسليط الضوء على مخاطر الإفراط في تناول الأطعمة التي تحتوي كميات كبيرة من السكر، وذلك لتجنب الإصابة بمرض السكري أو بالجلطات القلبية.

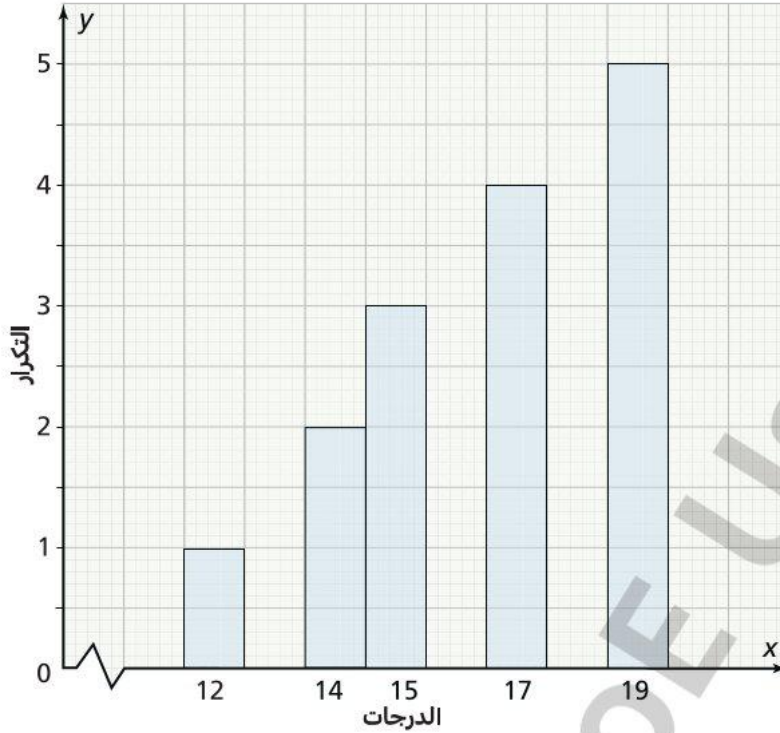
8-1

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

استكشف وبّر منطقياً

يبين التمثيل البياني بالأعمدة درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات حيث الدرجة القصوى التي يمكن للطلاب الحصول عليها 20



أستطيع... إيجاد مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري ذي فئات وتفسيرها.

معيّار الدرس

10.8.1

المصطلحات

- mean • الوسط الحسابي
- median • الوسيط
- رتبة الوسيط
- order of the median
- median class • الفئة الوسيطة
- mode • المنوال
- modal class • الفئة المنوالية

- A. يقول صالح إن الوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي 15 ، لأن عدد الأعمدة الواقعة إلى يسار العدد 15 يساوي عدد الأعمدة الواقعة إلى يمينه. هل صالح على صواب ؟ وضح إجابتك.
- B. **استعمل البنية** أوجد قيمة الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية للجدول التكراري ذات الفئات وتستعملها لوصف وتفسير البيانات ؟

السؤال الأساس

المفهوم الوسط الحسابي لجدول تكراري ذي فئات

لفظيًا: **الوسط الحسابي** ($\bar{x}$) لجدول تكراري ذي فئات هو القيمة التقديرية لمجموع ناتج ضرب مركز كل فئة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.

$$\text{مركز الفئة } (x) = \frac{\text{الحد الأعلى} + \text{الحد الأدنى}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$$

حيث

بالرموز:

حيث

$\bar{x}$: الوسط الحسابي

x : مركز الفئة

f : تكرار الفئة

مساعدة رياضية

يستعمل الرمز $\sum$ للتعبير عن المجموع.

يبين الجدول أدناه أطوال 30 طالبًا، مقربًا إلى أقرب سنتيمتر، في إحدى المدارس.

الفئات	154 - 158	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174
التكرار f	4	6	8	7	5

قدّر الوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب ثم فسر معناه.

الخطوة 1 كَوّن الجدول التالي:

بناءً على صيغة الوسط الحسابي، أكمل الجدول بإضافة العمودين:
مركز الفئة (x) ومركز الفئة • التكرار ($x \cdot f$) على التوالي.

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	مركز الفئة • التكرار $(x \cdot f)$
154 - 158	4	156	624
158 - 162	6	160	960
162 - 166	8	164	1 312
166 - 170	7	168	1 176
170 - 174	5	172	860
المجموع Σ	30		4 932

الخطوة 2 قدّر الوسط الحسابي.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f} \\ &= \frac{4\,932}{30} \\ &= 164.4\end{aligned}$$

صيغة الوسط الحسابي
عوض
بسط

إذن، الوسط الحسابي لأطوال الطلاب يساوي 164.4 cm تقريبًا.
يعني ذلك أن متوسط طول كل طالب هو 164.4 سنتيمترًا تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 1. يبين الجدول أدناه أعمار 20 موظفًا في إحدى الشركات.

الفئات	24 - 28	28 - 32	32 - 36	36 - 40	40 - 44
التكرار f	4	6	5	3	2

قدّر الوسط الحسابي لأعمار الموظفين في هذه الشركة، ثم فسر معناه.

المفهوم الوسيط لجدول تكراري ذي فئات

- **الوسيط:** هو القيمة التي يقلّ عنها 50% من البيانات.
- **رتبة الوسيط:** هي مجموع التكرارات مقسومًا على العدد 2
أي إنّ رتبة الوسيط $= \frac{\Sigma f}{2}$
- **الفئة الوسيطة:** هي الفئة التي يقع فيها الوسيط.

إرشاد

تمثل أطوال الطلاب بيانات متصلة.
على سبيل المثال الفئة 154 - 158
تعني جميع الأطوال الأكبر من أو
تساوي 154 سنتيمترًا وأقل من 158
سنتيمترًا.

يبين الجدول التكراري أدناه أطوال 40 طالباً لأقرب سنتيمتر. قَدِّر الوسيط لأطوال هؤلاء الطلاب وفشر معناه.

الفئات	160 - 164	164 - 168	168 - 172	172 - 176	176 - 180
التكرار f	6	12	10	9	3

الخطوة 1

كوّن الجدول التكراري التراكمي التصاعدي.
يتكوّن الجدول التكراري التراكمي التصاعدي من الحدود العليا للفئات والتكرار التراكمي التصاعدي.

الفئات	التكرار f	الحدود العليا	التكرار التراكمي التصاعدي
160 - 164	6	164	6
164 - 168	12	168	$6 + 12 = 18$
168 - 172	10	172	$18 + 10 = 28$
172 - 176	9	176	$28 + 9 = 37$
176 - 180	3	180	$37 + 3 = 40$

إرشاد

التكرار التراكمي التصاعدي لفئة ما هو مجموع التكرارات لجميع القيم التي هي أقل من الحد الأعلى لتلك الفئة.

الخطوة 2

حدد رتبة الوسيط ثم عَيّن الفئة الوسيطة.

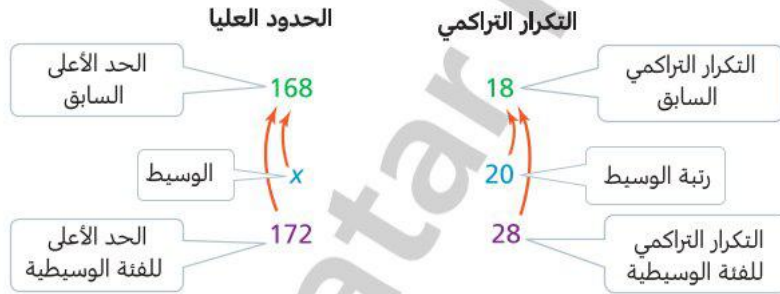
$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\sum f}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

بما أن رتبة الوسيط تساوي 20 وتقع بين التكرارين التراكميين 18 و 28

فإن الفئة الوسيطة هي: 168-172

الخطوة 3

أوجد الوسيط باستعمال التناسب.



$$\frac{x - 168}{172 - 168} = \frac{20 - 18}{28 - 18}$$

$$\frac{x - 168}{4} = \frac{2}{10}$$

$$5x - 840 = 4$$

$$5x = 844$$

$$x = 168.8$$

استعمل التناسب

بسط

بالضرب التبادلي

حل المعادلة

إذن، الوسيط لهذه البيانات يساوي 168.8 cm تقريباً، أي إن 50% من أطوال هؤلاء الطلاب

أقل من 168.8 cm

يتبع في الصفحة التالية

حاول أن تحلّ! 2. بيّن الجدول التكراري أدناه كتل 38 طفلًا، مقزبةً إلى أقرب كيلوجرام. قذّر الوسيط لكتل الأطفال مقزبًا إلى أقرب كيلوجرام، ثم فسر معناه.

الفئات	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13
التكرار f	9	14	10	5

المفهوم المنوال لجدول تكراري ذي فئات

المنوال للجدول التكراري ذي الفئات يساوي مركز **الفئة المنوالية**، وهي الفئة ذات أكبر تكرار.

تقدير المنوال لجدول تكراري ذي فئات

مثال 3

تمثّل البيانات في الجدول أدناه أطوال 50 تمارًا بالسنتيمتر. قذّر المنوال وفسّر معناه.

الفئات	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210
التكرار f	12	10	19	6	3

الفئة المنوالية: 180-190 لأنها تقابل أكبر تكرار.

$$\frac{180 + 190}{2}$$

مركز الفئة المنوالية:

$$\frac{180 + 190}{2} = 185$$

المنوال:

إذن، المنوال يساوي 185 cm تقريبًا، أي إن الطول الأكثر شيوعًا (تكرارًا) هو 185 cm تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 3. يمثّل الجدول أدناه أطوال 40 طفلًا حديثي الولادة بالسنتيمتر.

الفئات	40 - 44	44 - 48	48 - 52	52 - 56
التكرار f	11	17	9	3

قذّر المنوال لأطوال هؤلاء الأطفال وفسّر معناه.

لفظيًا

- الوسط الحسابي ($\bar{x}$) لجدول تكراري ذي فئات هو القيمة التقديرية لمجموع ناتج ضرب مركز كل فئة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.
- حيث: مركز الفئة (x) = $\frac{\text{الحد الأعلى} + \text{الحد الأدنى}}{2}$
- الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.
- المنوال لجدول تكراري ذي فئات يساوي مركز الفئة المنوالية، وهي الفئة ذات أكبر تكرار.

بالرموز

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$$

الوسط الحسابي:

حيث: x : مركز الفئة f : تكرار الفئة

$$\frac{\sum f}{2}$$

رتبة الوسيط هي:

عدديًا

تبين البيانات في الجدول أدناه مقدار تخطي حدود السرعة المسموح بها (km/h) والتي سجلها الرادار على 50 سيارة أثناء مرورها على إحدى الطرق.

الفئات	10 - 16	16 - 22	22 - 28	28 - 34	34 - 40
التكرار f	4	19	11	10	6

قدر الوسيط ثم فسر معناه.

الخطوة 1 كؤن الجدول التكراري التراكمي التصاعدي:

لتكوين الجدول التكراري التراكمي التصاعدي نضيف عمودي الحدود الفعلية العليا والتكرار التراكمي التصاعدي.

الفئات	التكرار f	الحدود العليا	التكرار التراكمي التصاعدي
10 - 16	4	16	4
16 - 22	19	22	$4 + 19 = 23$
22 - 28	11	28	$23 + 11 = 34$
28 - 34	10	34	$34 + 10 = 44$
34 - 40	6	40	$44 + 6 = 50$

الخطوة 2 حدد رتبة الوسيط ثم عيّن الفئة الوسيطة:

$$\frac{\sum f}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

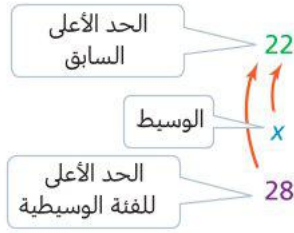
رتبة الوسيط:

بما أن رتبة الوسيط 25، وتقع بين التكرارين التراكميين 23 و 34

إذن، الفئة الوسيطة هي 22-28

يتبع في الصفحة التالية

الخطوة 3 أوجد الوسيط باستعمال التناسب:



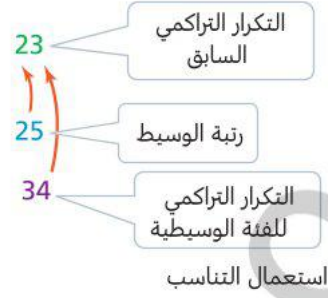
$$\frac{x - 22}{28 - 22} = \frac{25 - 23}{34 - 23}$$

$$\frac{x - 22}{6} = \frac{2}{11}$$

$$11x - 242 = 12$$

$$11x = 254$$

$$x \approx 23.1$$



بسط

بالضرب التبادلي

حل المعادلة

إذن، الوسيط لهذه البيانات يساوي 23.1 km/h تقريباً. أي إن 50% من السيارات كانت سرعتها الزائدة أقل من 23.1 km/h

طبّق فهمك

في التمارين 5-7، أوجد مقاييس النزعة المركزية مستعملاً الجدول أدناه

الفئات	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24	24 - 28
التكرار f	8	15	20	4	3

5. الوسيط الحسابي

6. الوسيط

7. المنوال

8. بيّن الجدول أدناه درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات

حيث الدرجة القصوى التي يمكن للطلاب الحصول عليها 20

الفئات	5 - 8	8 - 11	11 - 14	14 - 17	17 - 20
التكرار f	2	5	9	6	4

استعمل الجدول أعلاه لتقدير قيمة الوسيط. ماذا تلاحظ من قيمة

الوسيط بالنسبة لدرجات هؤلاء الطلاب؟ فسر إجابتك.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية للجدول التكراري ذات الفئات وكيف تستعملها لوصف وتفسير البيانات؟

2. حلّ الخطأ قال منصور إن الوسيط الحسابي لبيانات ذات فئات يساوي مجموع قيم مراكز الفئات مقسوماً على مجموع التكرارات. بيّن خطأ منصور وصحّحه.

3. المصطلحات عند تكوين الجدول التكراري التراكمي، اذكر الخطوات المطلوب اتباعها لتقدير قيمة الوسيط.

4. استعمل البنية هل يصح استعمال فئات غير متساوية عند تقدير مقاييس النزعة المركزية؟ وضح إجابتك.

عزز فهمك

9. **فكر وثابر في الحل** أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لفئة مركزها يساوي 30 وطولها يساوي 4

10. **استعمل البنية** إذا كان مجموع ناتج ضرب مركز كل فئة في تكرارها من مجموعة بيانات يساوي 2790 والوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي 13.95، أوجد مجموع تكرارات هذه البيانات.

11. **حل الخطأ** ليجد خالد مركز الفئة 17-25 كتب ما يلي:

$$x = \frac{25-17}{2}$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

X

بين خطأ خالد وضح.

12. **مهارات التفكير العليا** بين الجدول أدناه كتل مجموعة من الأطفال مقربة إلى أقرب كيلوجرام.

إذا كان الوسط الحسابي لهذه البيانات 13.56 kg تقريباً، أوجد قيمة x والتي تمثل تكرار الفئة 17-25

الفئات	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25
التكرار f	14	12	x	6	8

13. **فكر وثابر في الحل** بين الجدول أدناه درجات 30 طالباً في مادة التربية الإسلامية حيث الدرجة العظمى 20

الفئات	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20
التكرار f	4	8	10	5	3

قدر الوسيط لقيم هذه الدرجات.

14. **روابط في الرياضيات** يقيس مختبر لمراقبة الجودة مواصفات

أسلاك حديدية يصنعها معملان A و B. تنص مواصفات التصنيع

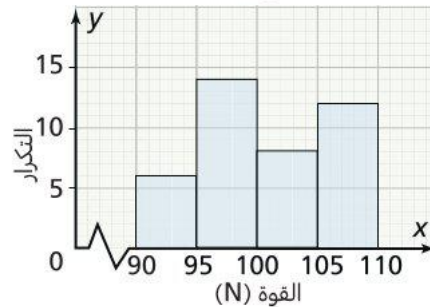
على أن الأسلاك تتحمل قوة مقدارها 100 N

أسفرت الاختبارات عن النتائج التالية:

المعمل A

المعمل B

$$\bar{x} = 96.5$$



a. أوجد الوسط الحسابي للقوة التي تتحملها الأسلاك التي

يصنعها المعمل A.

b. أي مصنع تتحمل أسلاكه قوة أقرب إلى 100 N ؟

وضح إجابتك.

تدرب

15. بين الجدول أدناه أعمار مجموعة من المنتسبين إلى أحد نوادي

اللياقة البدنية. انظر المثال 1

الفئات	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
التكرار f	25	30	35	10

استعمل الجدول أعلاه لتقدير قيمة الوسط الحسابي لأعمار منتسبي النادي ثم فسر معناه.

16. بين الجدول أدناه أعداد حبات التمر التي يخزنها أحد المتاجر في

أكياس صغيرة لبيعها. انظر المثال 2

الفئات	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26
التكرار f	12	11	10	9	8

استعمل الجدول أعلاه لتقدير قيمة الوسيط لعدد حبات التمر إلى أقرب عدد كلي ثم فسر معناه.

17. بين الجدول أدناه كتل 100 رزمة معكرونة إلى أقرب جرام.

انظر المثال 3

الفئات	495 - 497	497 - 499	499 - 501	501 - 503	503 - 505
التكرار f	15	32	36	14	3

استعمل الجدول لتقدير قيمة المنوال لهذه البيانات ثم فسر معناه.

طبق

فكر وثابر في الحل في التمارين 18-20، يبين الجدول أدناه كتل مجموعة من الحصى إلى أقرب جرام، قام خالد بجمعها عن شاطئ البحر.

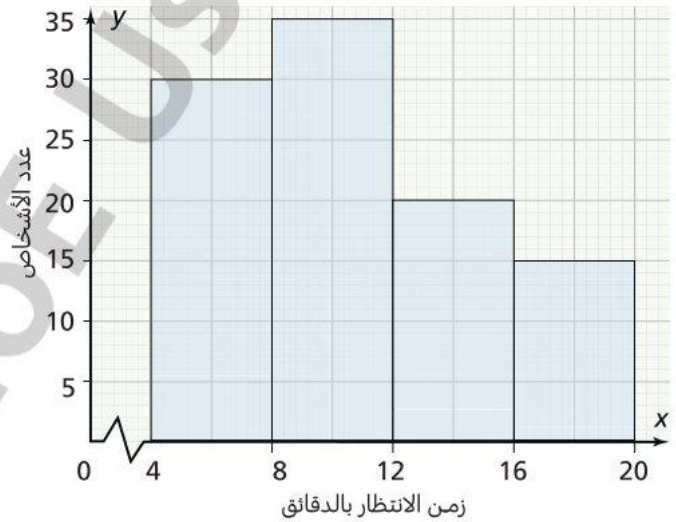
الفئات	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26
التكرار f	4	10	12	21	13

18. قدر قيمة الوسط الحسابي لكتل الحصى وفشر معناه.

19. قدر قيمة الوسيط لكتل الحصى وفشر معناه.

20. قدر قيمة المنوال لكتل الحصى وفشر معناه.

21. **استعمل البنية** يبين المدرج التكراري أدناه زمن الانتظار لمدة شخص في عيادة طبيب.



a. استعمل المدرج التكراري لتكوّن جدولًا يتضمن الفئات وتكرارها.

b. قدر الوسط الحسابي لعدد دقائق الانتظار وفشر معناه.

c. كوّن جدولًا تكراريًا تراكميًا وقدر وسيط دقائق الانتظار ثم فشر معناه.

22. **بزر منطقيًا** يبين الجدول أدناه الكتل إلى أقرب كيلوجرام لأشخاص يرتادون النادي A والنادي B.

الفئات	56 - 60	60 - 64	64 - 68	68 - 72
التكرار f	5	14	16	5

النادي A:

الفئات	56 - 60	60 - 64	64 - 68	68 - 72
التكرار f	5	17	11	7

النادي B:

ادعت إدارة النادي A أن نسبة مرتادي هذا النادي الذين كتلهم أقل من الوسط الحسابي لهذا النادي هي أكبر من نسبة مرتادي النادي B الذين كتلهم أقل من الوسط الحسابي لهذا النادي. هل توافق على ذلك ؟ وضح إجابتك.

تدرب على اختبار

في التمارين 23 و 24، استعمل الجدول أدناه.

الفئات	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26
التكرار f	7	6	12	10	5

23. الفئة الوسيطة هي:

A. 10-14 B. 14-18

C. 18-22 D. 22-26

24. **اختبار SAT/ACT** قيمة المنوال تساوي تقريبًا:

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18

25. **مهمة أدائية** يبين الجدول أدناه الرواتب الشهرية (بالآلاف الريالات القطرية) في مؤسستين P و Q. تتوزع هذه الرواتب على فئتين، مهندسين ومديري مشاريع.

جدول رواتب المؤسسة P

الراتب (QR)	10 - 16	16 - 22	22 - 28
عدد المهندسين	50	80	0
عدد مديري المشاريع	0	10	20

جدول رواتب المؤسسة Q

الراتب (QR)	10 - 16	16 - 22	22 - 28
عدد المهندسين	60	100	0
عدد مديري المشاريع	0	30	20

يدعي صاحب المؤسسة P أن رواتب المهندسين في مؤسسته أفضل من رواتب المهندسين في المؤسسة Q.

ويدعي صاحب كل مؤسسة أن رواتب المهندسين ومديري المشاريع معًا في مؤسسته هي الأفضل.

الجزء A قدر الوسط الحسابي لرواتب المهندسين في كل مؤسسة وقارن النتائج.

الجزء B قدر الوسط الحسابي لرواتب مديري المشاريع في كل مؤسسة وقارن النتائج.

الجزء C قدر الوسط الحسابي لرواتب المهندسين ومديري المشاريع معًا في كل مؤسسة وقارن النتائج.

الجزء D تحقق من صحة ادعاء صاحب كل مؤسسة. ووضح هذا تناقض.

يمثل الجدول أدناه درجات طلاب شعبتين في اختبار لمادة الرياضيات حيث الدرجة العظمى 100،

درجات طلاب الشعبة الأولى

الفئات	52 - 64	64 - 76	76 - 88	88 - 100
التكرار f	4	7	10	5

درجات طلاب الشعبة الثانية

الفئات	52 - 64	64 - 76	76 - 88	88 - 100
التكرار f	3	7	10	4

A. قدر الوسط الحسابي لدرجات طلاب كل شعبة.

B. **بزر منطقياً** هل يمكن تحديد الشعبة التي درجات طلابها أكثر تفرّقا باستعمال الوسط الحسابي؟ وضح إجابتك.

كيف تحسب مقاييس التشتت لجدول تكرارية ذات فئات وتستعملها في مقارنة البيانات؟

السؤال الأساس

المفهوم المدى لجدول تكراري ذي فئات

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى.

المدى لبيانات ذات فئات

مثال 1

يبين الجدول أدناه معدل السرعة بوحدة km/h لمجموعة من السيارات على إحدى الطرق.

الفئات	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
التكرار f	35	65	70	30

أوجد المدى لقيم هذه البيانات.

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة = 100

الحد الأدنى للفئة الأولى = 60

المدى: $100 - 60 = 40$

إذن، المدى يساوي 40 km/h

حاول أن تحل! 1. يبين الجدول أدناه أطوال بعض الأشخاص إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	168 - 172	172 - 176	176 - 180	180 - 184
التكرار f	7	9	5	4

أوجد المدى لقيم هذه البيانات.

أستطيع... حساب مقاييس التشتت لجدول تكراري ذي فئات واستخدامها للمقارنة بين مجموعتين من البيانات.

معيّار الدرس

10.8.1

المصطلحات

• المدى

range

• التباين

variance

• الانحراف المعياري

standard deviation

معلومة رياضية

عند إيجاد المدى لقيم البيانات نستعمل قيمتين فقط. ولكن سيكون من المفيد جداً دراسة مقاييس أخرى يتطلب إيجادها استعمال جميع البيانات.

المفهوم التباين لجدول تكراري ذي الفئات

لفظيًا: التباين هو الوسط الحسابي لمربعات الفرق بين مراكز الفئات ووسطها الحسابي.

بالرموز: يُرمز للتباين بالرمز σ^2

الصيغة الأولى للتباين

الصيغة الثانية للتباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (f \cdot x^2)}{\sum f} - (\bar{x})^2$$

x : مركز الفئة

حيث:

f : تكرار الفئة

$\bar{x}$: الوسط الحسابي

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

أي

الصيغة الأولى

الصيغة الثانية

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (f \cdot x^2)}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

إرشاد

يمكن اشتقاق الصيغة الثانية من الصيغة الأولى باستعمال المتطابقة:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

التباين والانحراف المعياري باستعمال الصيغة الأولى

مثال 2

يبين الجدول أدناه أطوال 20 طفلًا حديثي الولادة إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	34 - 36	36 - 38	38 - 40	40 - 42
التكرار f	4	5	8	3

أوجد التباين والانحراف المعياري لأطوال الأطفال.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum (x \cdot f)}{\sum f} \\ &= \frac{760}{20} \\ &= 38\end{aligned}$$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 38

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
34 - 36	4	35	140
36 - 38	5	37	185
38 - 40	8	39	312
40 - 42	3	41	123
المجموع $\sum$	20		760

يتبع في الصفحة التالية

الاستيعاب المفاهيمي

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناءً على الصيغة الأولى للتباين $\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$ تتم إضافة الأعمدة،
 $(x - \bar{x})^2$ ، $f \cdot (x - \bar{x})^2$ على التوالي

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
34 - 36	4	35	140	-3	9	36
36 - 38	5	37	185	-1	1	5
38 - 40	8	39	312	1	1	8
40 - 42	3	41	123	3	9	27
المجموع Σ	20		760			76

الخطوة 3 أوجد التباين باستعمال الصيغة الأولى.

$$\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$$

$$= \frac{76}{20}$$

$$= 3.8$$

الصيغة الأولى للتباين

عوض

بسط

إذن، التباين يساوي 3.8

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

صيغة الانحراف المعياري

عوض $\sigma^2 = 3.8$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{3.8}$$

$$\approx 1.95$$

إذن، الانحراف المعياري لأطوال الأطفال يساوي 1.95 سنتمتر تقريباً.

2. حاول أن تحل! 2. بيّن الجدول أدناه الاستهلاك الأسبوعي من الوقود لسيارات 20 عاملاً

في إحدى المؤسسات إلى أقرب لتر.

الفئات	34 - 36	36 - 38	38 - 40	40 - 42
التكرار f	8	5	6	1

أوجد التباين والانحراف المعياري لبيانات استهلاك الوقود.

يبين الجدول أدناه الزمن بالدقائق الذي استغرقه 40 متسابقاً في اجتياز مسافة 20 km

الفئات	80 - 100	100 - 120	120 - 140	140 - 160
التكرار f	4	20	10	6

أوجد التباين والانحراف المعياري لزمن السباق.

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
80 - 100	4	90	360
100 - 120	20	110	2 200
120 - 140	10	130	1 300
140 - 160	6	150	900
المجموع Σ	40		4 760

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي للبيانات.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f} \\ &= \frac{4\,760}{40} \\ &= 119\end{aligned}$$

إذن، الوسط الحسابي لقيم البيانات يساوي 119 min

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناءً على الصيغة الثانية للتباين $\sigma^2 = \frac{\Sigma(f \cdot x^2)}{\Sigma f} - (\bar{x})^2$ ، يتم إضافة الأعمدة x^2 و $f \cdot x^2$ على التوالي.

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	x^2	$f \cdot x^2$
80 - 100	4	90	360	8 100	32 400
100 - 120	20	110	2 200	12 100	242 000
120 - 140	10	130	1 300	16 900	169 000
140 - 160	6	150	900	22 500	135 000
المجموع Σ	40		4 760		578 400

إرشاد

يمكن الحصول على عمود $(f \cdot x^2)$ من ضرب العمود $(x \cdot f)$ مع عمود مراكز الفئات (x) .

الخطوة 3 أوجد التباين.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\Sigma(f \cdot x^2)}{\Sigma f} - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{578\,400}{40} - (119)^2 \\ &= 299\end{aligned}$$

الصيغة الثانية للتباين

عوض

بسط

إذن، التباين لقيم البيانات يساوي 299

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

صيغة الانحراف المعياري

عوض $\sigma^2 = 299$

بسط

إذن، الانحراف المعياري لهذه البيانات يساوي 17.3 min تقريباً.

يتبع في الصفحة التالية

3. حاول أن تحل! 3. بيّن الجدول أدناه كتل 40 شخصاً لأقرب كيلوجرام.

الفئات	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
التكرار f	8	12	16	4

أوجد التباين والانحراف المعياري لكتل الأشخاص.

مثال 4

تطبيق

مقارنة البيانات باستعمال الانحراف المعياري

بيّن الجدولان أدناه درجات شعبتين في مادة الرياضيات.

درجات طلاب الشعبة الأولى

الفئات	52 - 64	64 - 76	76 - 88	88 - 100	المجموع Σ
التكرار f	5	6	9	4	24

درجات طلاب الشعبة الثانية

الفئات	52 - 64	64 - 76	76 - 88	88 - 100	المجموع Σ
التكرار f	2	8	10	4	24

يريد معلم الصف معرفة في أي من الشعبتين درجات مادة الرياضيات أفضل وأكثر تقارباً فيما بينها، حيث الدرجة العظمى 100

استعمل المقاييس المناسبة لمعرفة أي شعبة منهما درجاتها أفضل وأكثر تقارباً من بعضها.

يوجد جدولان حيث فئات الدرجات هي نفسها ولكن التكرارات مختلفة: فاعتمد المعلم تقدير قيمة الوسط الحسابي وقيمة الانحراف المعياري لمقارنة الدرجات في كل شعبة.

الخطوة 1 كوّن جدولين لإيجاد الوسط الحسابي لدرجات كل شعبة.

ضع

احسب

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
52 - 64	5	58	290
64 - 76	6	70	420
76 - 88	9	82	738
88 - 100	4	94	376
المجموع Σ	24		1 824

الشعبة الأولى:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f} \\ &= \frac{1\,824}{24} \\ &= 76\end{aligned}$$

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الشعبة الأولى يساوي 76

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
52 - 64	2	58	116
64 - 76	8	70	560
76 - 88	10	82	820
88 - 100	4	94	376
المجموع Σ	24		1 872

الشعبة الثانية:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f} \\ &= \frac{1\,872}{24} \\ &= 78\end{aligned}$$

إذن، الوسط الحسابي لدرجات الشعبة الثانية يساوي 78

يتبع في الصفحة التالية

الخطوة 2 كَوْن جدولين لإيجاد الانحراف المعياري لدرجات كل شعبة.

الشعبة الأولى:

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	x^2	$f \cdot x^2$
52 - 64	5	58	290	3 364	16 820
64 - 76	6	70	420	4 900	29 400
76 - 88	9	82	738	6 724	60 516
88 - 100	4	94	376	8 836	35 344
المجموع Σ	24		1 824		142 080

التباين:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{\Sigma(f \cdot x^2)}{\Sigma f} - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{142\,080}{24} - (76)^2 \\ &= 5\,920 - 5\,776 \\ &= 144\end{aligned}$$

إذن، التباين لدرجات الشعبة الأولى هو $\sigma_1^2 = 144$

لذا الانحراف المعياري لدرجات الشعبة الأولى هو $\sigma_1 = \sqrt{144} = 12$

الشعبة الثانية:

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	x^2	$f \cdot x^2$
52 - 64	2	58	116	3 364	6 728
64 - 76	8	70	560	4 900	39 200
76 - 88	10	82	820	6 724	67 240
88 - 100	4	94	376	8 836	35 344
المجموع Σ	24		1 872		148 512

التباين

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\Sigma(f \cdot x^2)}{\Sigma f} - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{148\,512}{24} - (78)^2 \\ &= 6\,188 - 6\,084 \\ &= 104\end{aligned}$$

إذن، التباين لدرجات الشعبة الثانية هو $\sigma_2^2 = 104$

لذا الانحراف المعياري لدرجات الشعبة الثانية هو $\sigma_2 = \sqrt{104} \approx 10.2$

يتبع في الصفحة التالية

مساعدة رياضية

إذا اقتربت قيمة الانحراف المعياري من الصفر، فإن قيم البيانات تكون أكثر تقارباً بعضها إلى بعض وتتجمع أكثر حول قيمة الوسط الحسابي، وإذا ابتعدت قيمة الانحراف المعياري عن الصفر فإن قيم البيانات تكون في حالة تشتت ومتباعدة عن قيمة الوسط الحسابي.

- بما أن الوسط الحسابي لدرجات الشعبة الثانية، 78، أكبر من الوسط الحسابي لدرجات الشعبة الأولى، 76، فإن درجات طلاب الشعبة الثانية أفضل من درجات الشعبة الأولى.
- بما أن الانحراف المعياري لدرجات الشعبة الأولى (12) أكبر من الانحراف المعياري لدرجات الشعبة الثانية (10.2) فهذا يدل على أن درجات الشعبة الثانية أكثر تقيّنا، بينما درجات الطلاب في الشعبة الأولى أكثر تباعداً أو تشتتاً.

فشر

فكر وثابر في الحل

لماذا نستخدم الانحراف المعياري وليس التباين لتفسير النتيجة ؟

حاول أن تحلّ! 4. بيّن الجدول أدناه درجات بعض الطلاب في مادة العلوم حيث الدرجة القصوى التي يستطيع الطالب الحصول عليها هي 20

درجات طلاب الشعبة الأولى

الفئات	8 - 12	12 - 16	16 - 20
التكرار f	6	8	6

درجات طلاب الشعبة الثانية

الفئات	8 - 12	12 - 16	16 - 20
التكرار f	7	11	2

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات كل شعبة ثم استعملهما لمقارنة أداء الشعبتين.

لفظيًا

- المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى.
- التباين (σ^2) هو الوسط الحسابي لمرتعات الفرق بين مراكز الفئات ووسطها الحسابي.
- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.
- عند مقارنة بيانات ذات فئات لمجموعتين، تكون بيانات المجموعة ذات الانحراف المعياري الأصغر أكثر تقاربًا وتجمعًا حول الوسط الحسابي للبيانات. بينما تكون بيانات المجموعة ذات الانحراف المعياري الأكبر أكثر تشتتًا وتباعًا عن الوسط الحسابي للبيانات.

بالرموز

$$\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$$

الصيغة الأولى للتباين:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (f \cdot x^2)}{\sum f} - (\bar{x})^2$$

الصيغة الثانية للتباين:

حيث: x : مركز الفئة

$\bar{x}$: الوسط الحسابي

f : تكرار الفئة

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عدديًا

يمثل الجدول أدناه الزمن المستغرق بالدقائق أثناء مراقبة المكالمات التي يقوم بها مندوب مبيعات للهاتف.

الفئات	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16
التكرار f	6	5	7	2

أوجد التباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لزمن هذه المكالمات.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي للبيانات.

أضف عمودًا مركز الفئة x و $x \cdot f$ على التوالي.

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot f)}{\sum f}$$

قانون الوسط الحسابي

$$= \frac{140}{20}$$

عوض

$$= 7$$

بسط

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
0 - 4	6	2	12
4 - 8	5	6	30
8 - 12	7	10	70
12 - 16	2	14	28
المجموع $\sum$	20		140

الخطوة 2 أكمل الجدول بناءً على الصيغة الأولى للتباين $\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$ بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})^2$ ، $(x - \bar{x})$ ، $f \cdot (x - \bar{x})^2$ على التوالي.

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
0 - 4	6	2	12	-5	25	150
4 - 8	5	6	30	-1	1	5
8 - 12	7	10	70	3	9	63
12 - 16	2	14	28	7	49	98
المجموع $\sum$	20		140			316

الخطوة 3 أوجد التباين.

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f} \\ &= \frac{316}{20} \\ &= 15.8\end{aligned}$$

الصيغة الأولى للتباين

عوض

بسط

إذن، التباين يساوي 15.8

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

صيغة الانحراف المعياري

$$= \sqrt{15.8}$$

 $\sigma^2 = 15.8$ عوض

$$\approx 4$$

بسط

إذن، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات يساوي 4 دقائق تقريباً.

طبق فهمك

5. يبين الجدول أدناه درجات الحرارة المسجلة (إلى أقرب درجة مئوية) عند الساعة العاشرة صباحاً في مدينة الدوحة خلال شهر يونيو.

الفئات	30 - 32	32 - 34	34 - 36	36 - 38	38 - 40
التكرار f	2	8	12	4	4

أوجد المدى لهذه البيانات.

6. يبين الجدول أدناه أطوال 20 طالبة في مدرسة إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	160 - 168	168 - 176	176 - 184
التكرار f	8	9	3

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

7. يبين الجدول أدناه أعمار 100 شخص.

الفئات	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80
التكرار f	15	35	40	10

a. أوجد الوسط الحسابي لهذه الأعمار.

b. أوجد قيمة الانحراف المعياري.

عبر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف تحسب مقاييس التشتت لجدول تكراري ذات فئات وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

2. **حلل الخطأ** تقول خولة إن التباين لجدول تكراري ذي فئات هو مربع الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي. يبين الخطأ في قول خولة وصححه.

3. **المصطلحات** ما العلاقة بين التباين والانحراف المعياري لبيانات مبوبة في جدول تكراري ذي فئات ؟

4. **تواصل بدقة** وضح الخطوات المستعملة لإيجاد التباين والانحراف المعياري لجدول تكراري ذي فئات متساوية.

عزّز فهمك

في التمرينين 8 و 9، يبيّن الجدول أدناه نتائج دراسة لعدد نبضات القلب عند مجموعة من 60 لاعباً أثناء استراحتهم.

الفئات	62 - 66	66 - 70	70 - 74	74 - 78	78 - 82
التكرار f	5	15	25	5	10

8. ابن الحجج الرياضية أوجد الوسط الحسابي $(\bar{x})$.

هل تجد ترابطاً بين الوسط الحسابي $(\bar{x})$ وأحد مراكز فئات هذا الجدول؟ فسر معنى هذه النتيجة.

9. برّر منطقياً أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

10. فكّر وثابر في الحلّ يبيّن الجدول أدناه عدد البراعم التي ينتجها 50 موقعا في مختبر الأبحاث النباتية.

الفئات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
التكرار f	5	18	24	3

أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

11. حلّ الخطأ يبيّن الجدول أدناه درجات 20 طالبا في مادة العلوم حيث الدرجة القصوى التي يستطيع الطالب الحصول عليها 20

الفئات	8 - 12	12 - 16	16 - 20
التكرار f	3	9	8

طلب من لطيفة تقدير التباين لقيم هذه الدرجات، فكتبت:

الوسط الحسابي: $\bar{x} = 15$

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	$f \cdot x^2$
8 - 12	3	10	30	300
12 - 16	9	14	126	1 764
16 - 20	8	18	144	2 592
الجموع	20			4 656

$$\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot x^2 - (\bar{x})^2]}{\sum f}$$

$$= \frac{4\,656 - 225}{20}$$

$$\sigma^2 \approx 221.55$$

X

بيّن خطأ لطيفة وصحّحه.

تدرّب

في التمرينين 12 و 13، أراد بائع سيارات دراسة أعمار الزبائن الذين اشتروا من صالة العرض في أحد أشهر السنة، فحصل على الجدول التالي:

الفئات	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
التكرار f	10	12	14	4

12. أوجد المدى لقيم هذه البيانات. انظر المثال 1

13. أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات. انظر المثالين 2 و 3

14. الجدول التالي يمثّل أعمار 40 عاملاً في إحدى المؤسسات:

انظر المثال 4

الفئات	18 - 28	28 - 38	38 - 48	48 - 58
التكرار f	7	5	13	15

a. أوجد التباين والانحراف المعياري لأعمار هؤلاء العمال.

b. إذا كان الوسط الحسابي لأعمار 40 عاملاً في مؤسسة صناعية ثانية يساوي 39 سنة والانحراف المعياري يساوي 5.8، استعمل الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمقارنة أعمار العمال في المؤسستين.

18. يبين الجدول أدناه عدد الرسائل التي أرسلها 50 شخصاً إلى أصدقائهم.

الفئات	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
التكرار f	10	16	18	6

المدى لقيم هذه البيانات يساوي:

- A. 20
- B. 40
- C. 45
- D. 90

19. اختبار SAT/ACT إذا كان الانحراف المعياري لقيم مجموعة بيانات يساوي 9 فإن التباين يساوي:

- A 3
- B 4.5
- C 18
- D 81

20. مهمة أدائية كؤن جدولاً يتضمن أربع فئات ذات أطوال متساوية تمثل كتل طلاب صفك إلى أقرب كيلوجرام على أن يكون مركز الفئات عدداً صحيحاً.

الجزء A أوجد الوسط الحسابي للكتل.

الجزء B أوجد التباين والانحراف المعياري. هل كتل الطلاب قريبة أم بعيدة عن الوسط الحسابي؟ وضح إجابتك.

الجزء C ماذا يحدث للتباين وللانحراف المعياري إذا أضفت العدد 2 إلى حدود الفئات؟ فسر النتيجة التي حصلت عليها.

15. روابط في الرياضيات يبين الجدول أدناه المسافات التي يجتازها 60 عاملاً للوصول إلى مركز عملهم في إحدى المؤسسات إلى أقرب كيلومتر.

الفئات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
التكرار f	10	15	30	5

a. أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

b. إذا أضفنا العدد 2 إلى الحدود العليا والحدود الدنيا لفئات الجدول بحيث يصبح الجدول كما يلي:

الفئات	2 - 12	12 - 22	22 - 32	32 - 42
التكرار f	10	15	30	5

أوجد في هذه الحالة التباين والانحراف المعياري.

ماذا تلاحظ؟ فسر النتيجة التي حصلت عليها.

16. مهارات التفكير العليا يبين الجدول أدناه كتل 20 طفلاً إلى أقرب كيلوجرام.

الفئات	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
التكرار f	3	5	4	5	3

a. أوجد الانحراف المعياري للكتل.

b. ماذا يحدث للانحراف المعياري إذا ضربنا حدود الفئات في العدد 2؟ فسر النتيجة التي حصلت عليها.

17. برز منطقياً تعتمد المختبرات على التحاليل المخبرية لدراسة وتصحيح الأخطاء، لذلك تم تحليل الأملاح في البول لـ 20 شخصاً على مدى أسبوعين متتاليين وكانت النتائج بالملجرام في اللتر كما يبين الجدول أدناه:

جدول الأسبوع الأول

الفئات	260 - 280	280 - 300	300 - 320	320 - 340
التكرار f	4	6	6	4

جدول الأسبوع الثاني

الفئات	260 - 280	280 - 300	300 - 320	320 - 340
التكرار f	2	8	8	2

a. أوجد الوسط الحسابي لكل جدول. ماذا تلاحظ؟ وضح إجابتك.

b. أوجد الانحراف المعياري لكل جدول. ماذا تلاحظ؟ وضح إجابتك.

c. هل سيكون الوسط الحسابي هو المقياس الأفضل أم الانحراف المعياري لتحقيق المقارنة وتصحيح الأخطاء؟ ولماذا؟

يبين الجدول أدناه كتل 40 لاعب كرة سلة مقربة إلى أقرب كيلوجرام.

الفئات	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85	85 - 90
التكرار f	2	3	10	16	5	4

A. كَوْنْ جدول التكرار التراكمي.

B. **استعمل البنية** هل يساعدك هذا الجدول على إيجاد عدد اللاعبين الذين كتلتهم أقل من 80 kg ؟ وضح إجابتك.

C. أوجد عدد اللاعبين الذين تقع كتلتهم بين 75 kg و 85 kg

D. **بزر منطقيًا** هل يمكن إيجاد وسيط هذه القيم ؟ وضح إجابتك.

أستطيع... رسم واستخدام المنحنى التكراري التراكمي.

معايير الدرس

10.8.2

المصطلحات

- المنحنى التكراري التراكمي
- cumulative frequency curve
- الزبيع الأول
- first quartile (Q_1)
- الزبيع الثالث
- third quartile (Q_3)
- المدى الزبيعي
- interquartile range (IQR)

كيف يساعد المنحنى التكراري التراكمي على إيجاد الوسيط والمدى الزبيعي ؟

السؤال الأساس

مثال 1 إيجاد الوسيط باستعمال المنحنى التكراري التراكمي

يبين الجدول أدناه أعمار 30 شخصًا بالسنوات.

الفئات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
التكرار f	11	7	5	4	3

A. ارسم منحنى التكرار التراكمي.

الخطوة 1 كَوْنْ الجدول التكراري التراكمي التصاعدي بإضافة عمود الحدود العليا للفئات وعمود التكرار التراكمي التصاعدي.

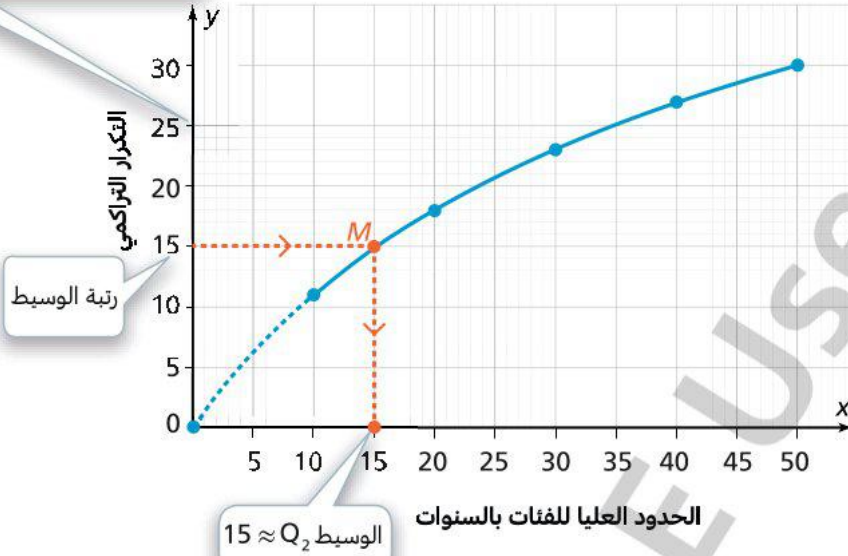
الفئات	التكرار f	الحدود العليا للفئات	التكرار التراكمي التصاعدي
0 - 10	11	10	11
10 - 20	7	20	18
20 - 30	5	30	23
30 - 40	4	40	27
40 - 50	3	50	30

الخطوة 2 ارسم المنحنى التكراري التراكمي.

ارسم محورين متعامدين بحيث يمثل المحور الأفقي الحدود العليا للفئات والمحور الرأسي التكرار التراكمي. عَيِّنْ على المستوى الإحداثي النقاط التي تمثل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول الحدود العليا للفئات ومسقطها الثاني التكرار التراكمي، ثم صل النقاط بمنحنى أملس لتحصل على **المنحنى التكراري التراكمي**.

يتبع في الصفحة التالية

بصورة عامة إذا كان مجموع التكرارات
عدداً كبيراً، من المفيد استعمال
التدريج على المحور y
5, 10, 15, ...
أو 10, 20, 30, ...
وهكذا ...



إرشاد

لكل منحنى تكراري تراكمي يوضع
الحد الأدنى للفئة الأولى ويُعَيَّن تكرارها
التراكمي. العدد 0 لإغلاق المنحنى.

B. قَدِّر قيمة الوسيط باستخدام المنحنى التكراري التراكمي.

الخطوة 1 أوجد رتبة الوسيط.

$$\frac{30}{2} = 15$$

إذن، رتبة الوسيط تساوي 15

الخطوة 2 قَدِّر قيمة الوسيط.

ارسم شعاعاً من العدد (15) على المحور الرأسي موازياً للمحور x ويتقاطع مع المنحنى
عند النقطة M ومنها ارسم عموداً على المحور x فتكون نقطة تقاطعه مع المحور x هي
الوسيط Q_2 وقيمته تساوي 15 تقريباً.

1. حاول أن تحل! يبيّن الجدول أدناه أقصى سرعة بوحدة km/h سجلها 60 متسابقاً في
سباق السيارات.

الفئات	160 - 170	170 - 180	180 - 190	190 - 200	200 - 210
التكرار f	15	18	16	7	4

a. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.

b. قَدِّر قيمة الوسيط باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

يبين الجدول أدناه درجات مجموعة من الطلاب حيث الدرجة العظمى تساوي 100

الفئات	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
التكرار f	8	24	26	12	10

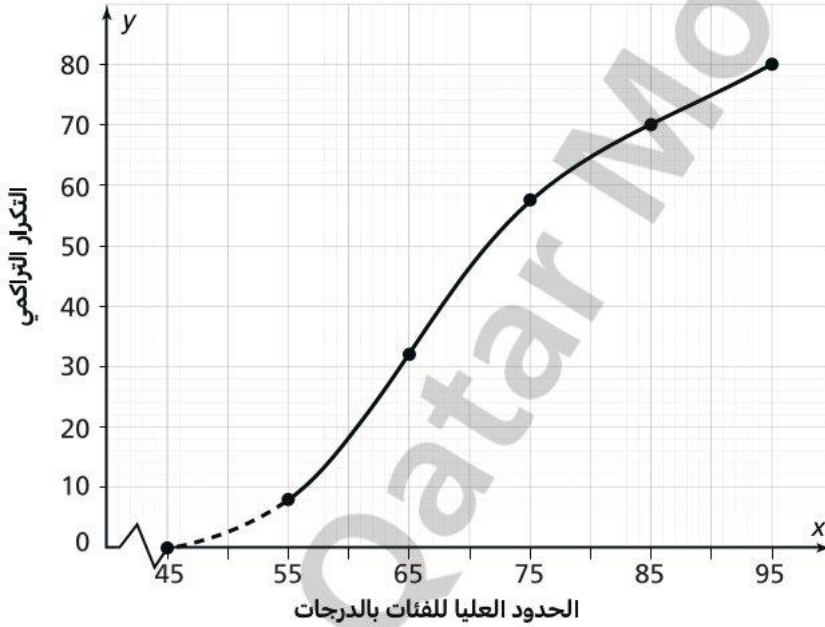
استعمل الجدول أعلاه للإجابة عن الأسئلة التالية.

A. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.

الخطوة 1 كوّن جدول التكرار التراكمي التصاعدي بإضافة عمود الحدود العليا للفئات وعمود التكرار التراكمي التصاعدي.

الفئات	التكرار f	الحدود العليا للفئات	التكرار التراكمي التصاعدي
45 - 55	8	55	8
55 - 65	24	65	32
65 - 75	26	75	58
75 - 85	12	85	70
85 - 95	10	95	80

الخطوة 2 ارسم المنحنى التكراري التراكمي.



فكر وثابر في الحل

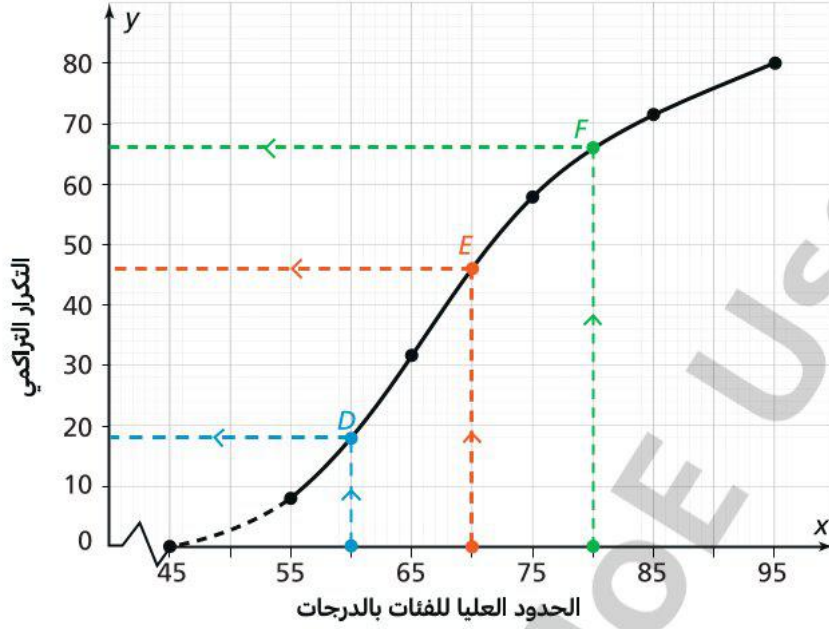
كيف يمكنك اختيار التدرج المناسب للمحور الرأسي عند تمثيل المنحنى التكراري التراكمي ؟

يتبع في الصفحة التالية

B. قَدِّر عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من أو تساوي 70

باستعمال منحنى التكرار التراكمي نرسم شعاعًا يمر بالعدد 70 على المحور X موازيًا للمحور Y ويتقاطع مع المنحنى عند النقطة E ، ومنها نرسم عمودًا على المحور Y فنجد أنه يتقاطع معه عند العدد 46 تقريبًا.

إذن، عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من أو تساوي 70 هو 46 طالبًا تقريبًا.

**C. قَدِّر عدد الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 60 و 80**

باستعمال منحنى التكرار التراكمي نرسم شعاعًا من العدد 80 على المحور X موازيًا للمحور Y ويتقاطع مع المنحنى عند النقطة F ، ومنها نرسم عمودًا على المحور Y فنجد أنه يتقاطع معه عند العدد 66 تقريبًا.

ثم نرسم شعاعًا من العدد 60 على المحور X موازيًا للمحور Y ويتقاطع مع المنحنى عند النقطة D ، ومنها نرسم عمودًا على المحور Y فنجد أنه يتقاطع معه عند العدد 18 تقريبًا. ولإيجاد العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 60 و 80 نوجد الفرق بين التكرارات التراكمية التي حصلنا عليها.

$$66 - 18 = 48$$

إذن، عدد الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 60 و 80 يساوي 48 طالبًا تقريبًا.

2. بيِّن الجدول أدناه أطوال مجموعة من سمك السلمون مقربة إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
التكرار f	2	5	9	8	11

استعمل الجدول للإجابة عن الأسئلة التالية:

- ارسم المنحنى التكراري التراكمي.
- قَدِّر قيمة الوسيط باستخدام المنحنى التكراري التراكمي.
- قَدِّر عدد الأسماك التي أطوالها بين 38 cm و 48 cm

المفهوم الزبيغ الأول والزبيغ الثالث والمدى الزبيغي

- **الزبيغ الأول (Q_1)** هو القيمة التي يقل عنها 25% من البيانات أي هو وسيط النصف الأدنى من البيانات.
- **الزبيغ الثالث (Q_3)** هو القيمة التي يقل عنها 75% من البيانات أي هو وسيط النصف الأعلى من البيانات.
- **المدى الزبيغي (IQR)** = الزبيغ الثالث - الزبيغ الأول.

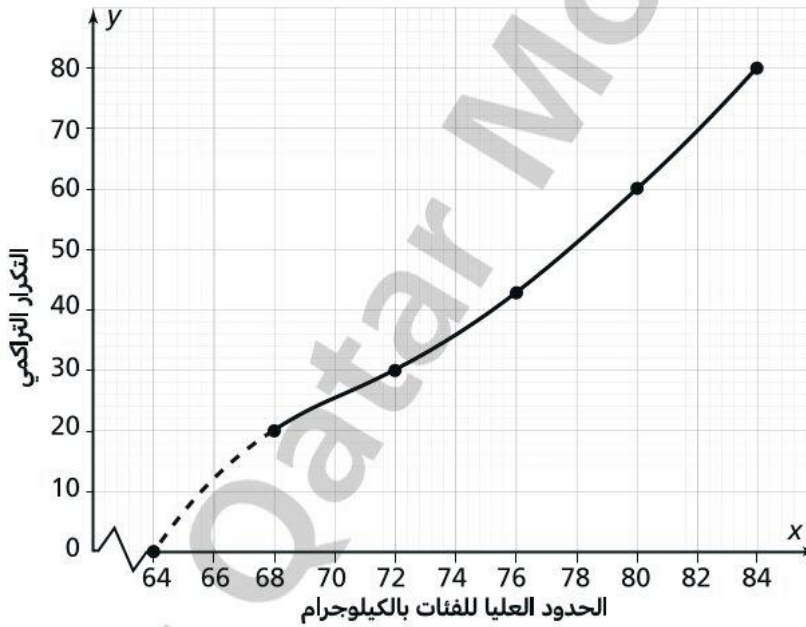
$$IQR = Q_3 - Q_1$$

يمكن تمثيل هذه المقاييس على خط رأسي أو خط أفقي كما يلي:



مثال 3 استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتقدير الزبيغيات والمدى الزبيغي

يمثل المنحنى التكراري التراكمي أدناه كتل 80 شخصاً إلى أقرب كيلوجرام.



قدّر باستعمال هذا المنحنى كلاً مما يلي:

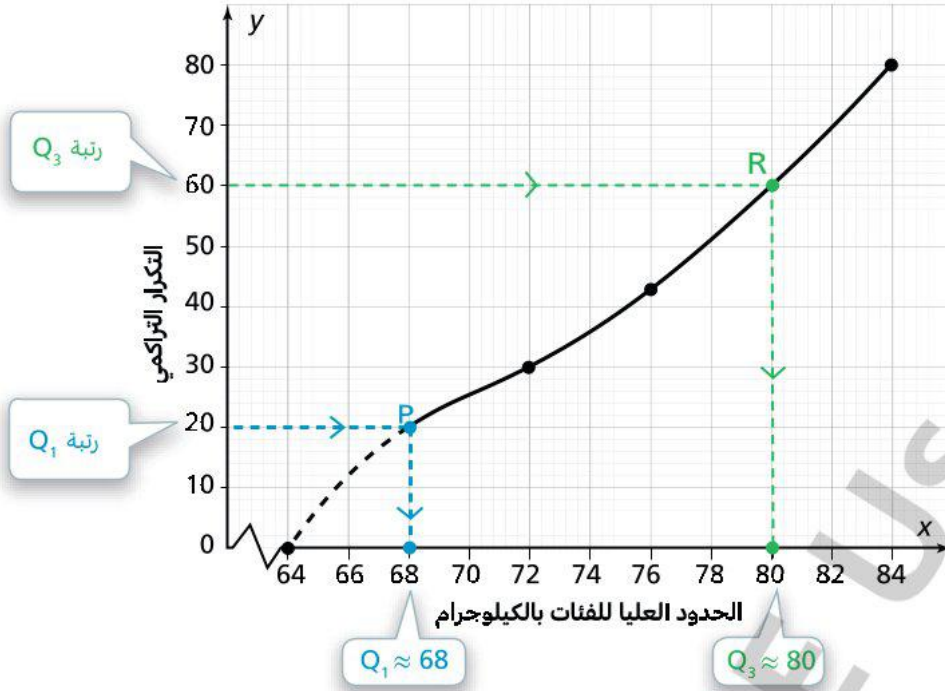
A. الزبيغ الأول

نوجد رتبة الزبيغ الأول.

$$\text{رتبة الزبيغ الأول هي } 80 \times 25\% = 20$$

يتبع في الصفحة التالية

عَبْن 20 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة لها على المحور الأفقي تساوي 68 تقريبًا.
إذن، الزبيج الأول يساوي 68 kg تقريبًا.



B. الزبيج الثالث

نوجد رتبة الزبيج الثالث.

$$\text{رتبة الزبيج الثالث تساوي } 80 \times 75\% = 60$$

عَبْن 60 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة لها على المحور الأفقي تساوي 80 تقريبًا.
إذن، الزبيج الثالث يساوي 80 kg تقريبًا.

C. المدى الزبيجي

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$= 80 - 68$$

$$= 12$$

صيغة المدى الزبيجي

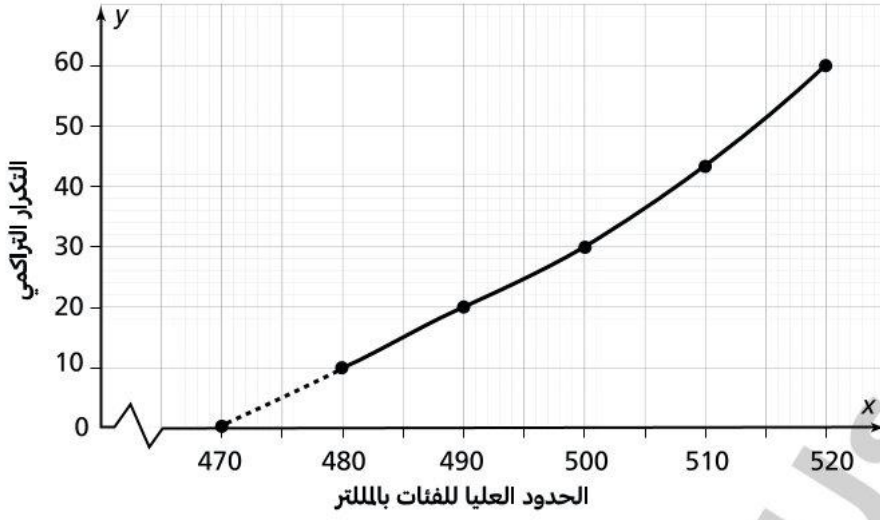
$$\text{عوض } Q_1 = 68, Q_3 = 80$$

بسط

إذن، المدى الزبيجي للكتل يساوي 12 kg تقريبًا.

يتبع في الصفحة التالية

حاول أن تحل! 3. يمثل المنحنى التكراري التراكمي التصاعدي أدناه كمية المياه التي تحتويها عبوة مياه معدنية سعة كل منها نصف لتر أنتجها أحد المصانع.



قدّر باستعمال هذا المنحنى كلاً مما يلي:

- a. الزبيح الأول b. الزبيح الثالث c. المدى الزبيعي

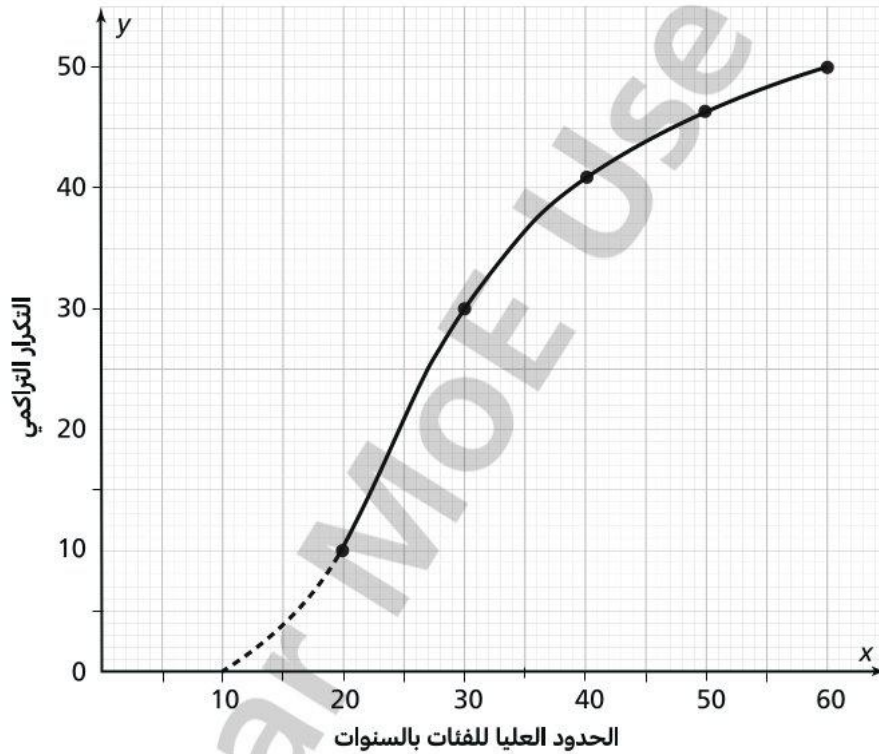
لفظيًا

- المنحنى التكراري التراكمي هو منحنى أملس يصل بين نقاط في المستوى الإحداثي مسقطها الأول الحد الأعلى للفئة ومسقطها الثاني التكرار التراكمي.
- يمكن استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتقدير قيمة وسيط البيانات والزبيع الأول والزبيع الثالث والمدى الزبوعي.
- الزبيع الأول (Q_1) هو القيمة التي يقل عنها 25% من البيانات أي هو وسيط النصف الأدنى من البيانات.
- الزبيع الثالث (Q_3) هو القيمة التي يقل عنها 75% من البيانات أي هو وسيط النصف الأعلى من البيانات.
- المدى الزبوعي (IQR) = الزبيع الثالث - الزبيع الأول.

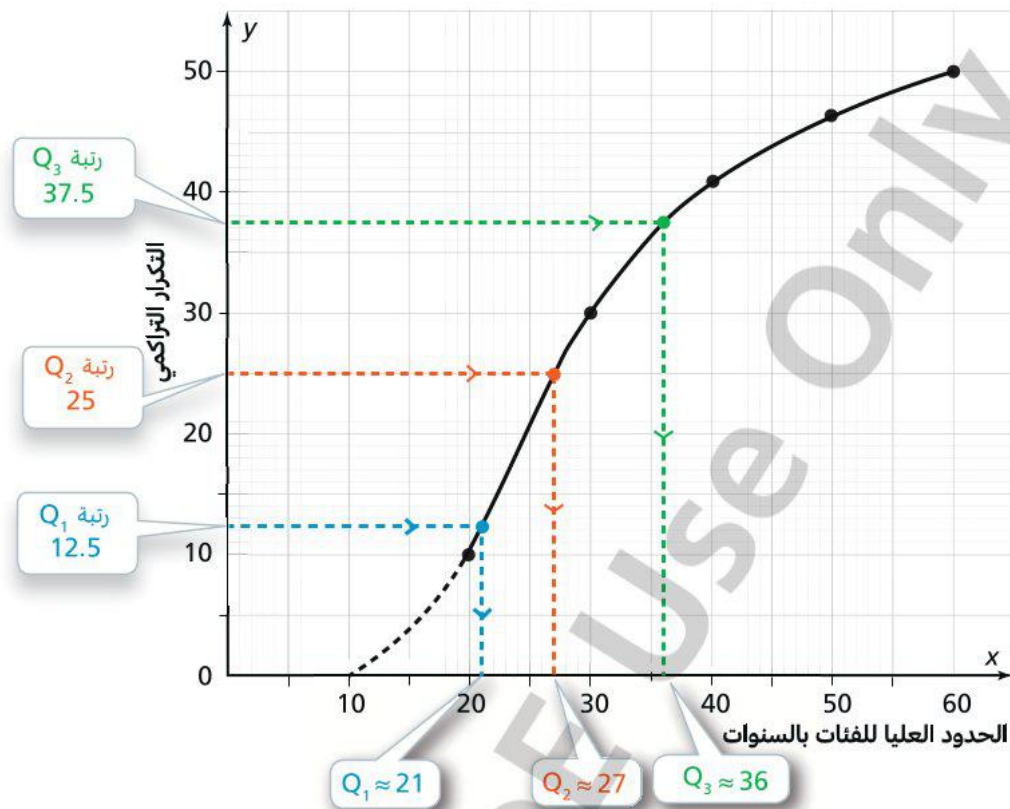
$$IQR = Q_3 - Q_1$$

عدديًا

يمثل المنحنى التكراري التراكمي أدناه أعمار 50 مشتركًا في أحد النوادي الرياضية.



يتبع في الصفحة التالية



A. فدر قيمة الوسيط لهذه البيانات.

$$\text{رتبة الوسيط: } \frac{50}{2} = 25$$

عُيِّن العدد 25 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة له على المحور الأفقي تساوي 27 تقريبًا.

إذن، الوسيط يساوي 27 تقريبًا.

B. فدر الربع الأول.

$$\text{رتبة الربع الأول: } 50 \times 0.25 = 12.5$$

عُيِّن العدد 12.5 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة له على المحور الأفقي تساوي 21 تقريبًا.

إذن، الربع الأول يساوي 21 تقريبًا.

C. فدر الربع الثالث.

$$\text{رتبة الربع الثالث: } 50 \times 0.75 = 37.5$$

عُيِّن العدد 37.5 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة له على المحور الأفقي تساوي 36 تقريبًا.

إذن، الربع الثالث يساوي 36 تقريبًا.

D. فدر المدى الربيعي.

صيغة المدى الربيعي

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$= 36 - 21$$

$$= 15$$

$$\text{عوض } Q_1 = 21, Q_3 = 36$$

بسط

إذن، المدى الربيعي يساوي 15 سنة تقريبًا.

عَبِّرْ عَنْ فَهْمِكَ

1. السؤال الأساس كيف يساعد المنحنى التكراري التراكمي على إيجاد الوسيط والمدى الزبيني ؟
2. حَلِّ الخَطَأ إذا كان $Q_1 = 48$ و $Q_3 = 72$ لمجموعة بيانات، أوجد منصور المدى الزبيني بالطريقة التالية:

$$\begin{aligned} IQR &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \\ &= \frac{72 - 48}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

X

يُتَبَن خطاً منصور وصَحَّحَه.

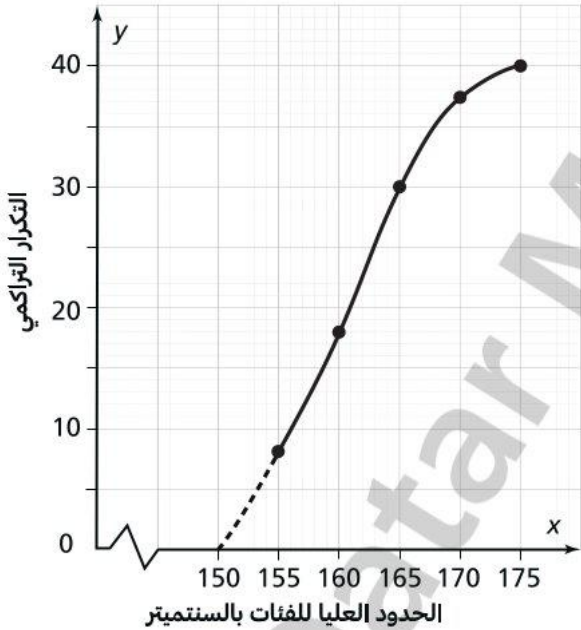
3. مصطلحات عرّف كلّ من: الوسيط والزبيغ الأول والزبيغ الثالث والمدى الزبيني.
4. تواصل بدقّة وضح خطوات رسم المنحنى التكراري التراكمي التصاعدي.
5. بَرِّز منطقياً وضح الفرق بين المدى والمدى الزبيني، ثم يَتَن أيهما أفضل لقياس التباعد بين البيانات.

طَبِّقْ فَهْمَكَ

في التمارين 6-10، يبيّن الجدول أدناه المسافات بالكيلومتر التي قطعتها 40 سيارة باستعمال لتر واحد من الوقود.

الفئات	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16
التكرار f	8	6	14	9	3

6. كوّن جدولاً تكرارياً تراكمياً.
 7. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.
 8. قَدِّر قيمة الوسيط باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
 9. قَدِّر عدد السيارات التي قطعت مسافة أقل من 12 km
 10. قَدِّر عدد السيارات التي قطعت مسافة بين 8 km و 14 km
- في التمارين 11-13، يبيّن المنحنى التكراري التراكمي أدناه أطوال 40 طالباً إلى أقرب سنتيمتر من القسم الثانوي في مدرسة.



استعمل المنحنى أعلاه للإجابة عن الأسئلة التالية:

11. قَدِّر الزبيغ الأول (Q_1).
12. قَدِّر الزبيغ الثالث (Q_3).
13. قَدِّر المدى الزبيني (IQR).

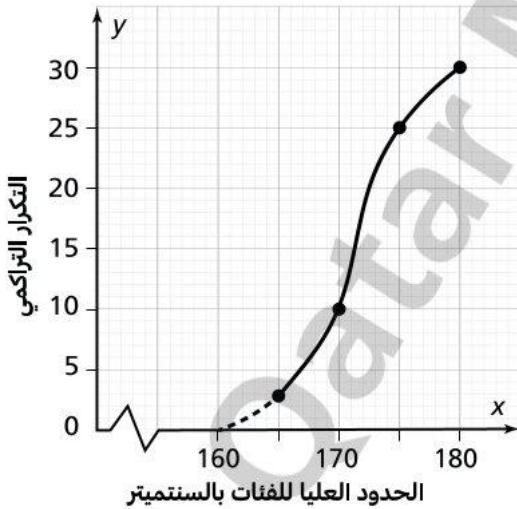
18. بيّن الجدول أدناه أطوال أقطار 80 نوعاً من جذوع الأشجار إلى أقرب سنتيمتر. انظر المثال 1

الفئات	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34
التكرار f	8	15	25	18	14

- a. كوّن جدولاً تكرارياً تراكمياً لأطوال أقطار جذوع الأشجار.
b. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.
c. قدر قيمة الوسيط باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
19. بيّن الجدول أدناه الأزمنة بالدقائق التي يستغرقها عدد من الطلاب للوصول إلى مدرستهم. انظر المثال 2

الفئات	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
التكرار f	15	27	39	12	7

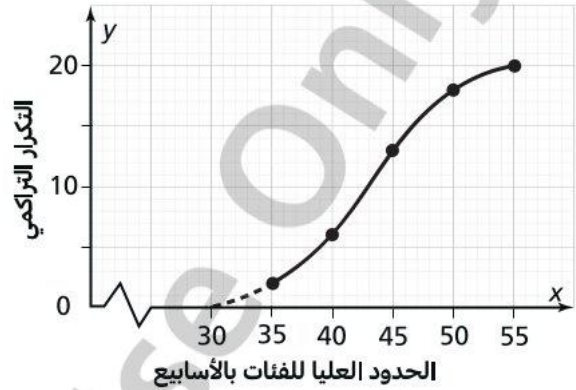
- a. كوّن جدولاً تكرارياً تراكمياً.
b. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.
c. قدر عدد الطلاب الذين يستغرق وصولهم إلى المدرسة 14 دقيقة أو أقل.
d. قدر عدد الطلاب الذين يقع زمن وصولهم إلى المدرسة بين 10 دقائق و 20 دقيقة.
20. يمثل المنحنى التكراري التراكمي أدناه أطوال 30 شخصاً إلى أقرب سنتيمتر اشتركوا في دراسة عنوانها "حجم الدماغ". انظر المثال 3



استعمل المنحنى التكراري التراكمي أعلاه لتقدير قيمة وتفسير معنى كل مما يلي:

- a. الزبيغ الأول (Q_1).
b. الزبيغ الثالث (Q_3).
c. المدى الزبيغي (IQR).

في التمرينين 14 و 15، بيّن المنحنى التكراري التراكمي الموضح أدناه الأعمار الافتراضية للأسابيع لعينة من 20 مصباحاً كهربائياً تمت مراقبتها بعد إنتاجها.



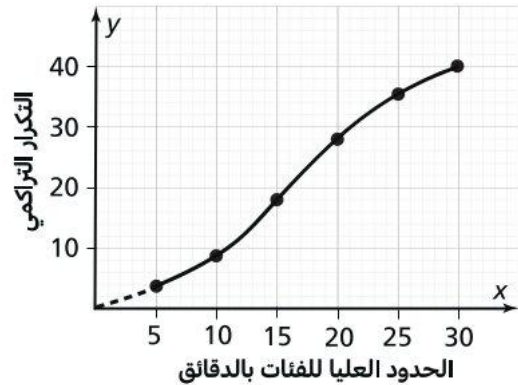
14. **حل الخطأ** أوجد خالد الزبيغ الثالث لأعمار المصابيح بالشكل التالي:

بما أن الزبيغ الثالث هو القيمة التي يقل عنها 75% من البيانات فإن $20 \times 0.75 = 15$ أي إن الزبيغ الثالث يساوي 15 أسبوعاً تقريباً.

بيّن خطأ خالد ثم صحّحه.

15. **ابن الحجج الرياضية** قدر الزبيغ الأول والزبيغ الثالث والمدى الزبيغي باستعمال المنحنى التكراري التراكمي لقيم هذه البيانات. ثم فسر قيمة المدى الزبيغي التي حصلت عليها.

في التمرينين 16 و 17، بيّن المنحنى التكراري التراكمي الموضح أدناه الزمن بالدقائق الذي انتظره 40 زبوناً أثناء المحاسبة في أحد المتاجر.



16. **فكر وثابر في الحل** استعمل المنحنى التكراري التراكمي لتقدير عدد الزبائن الذين استغرقوا مدة تقل عن 14 دقيقة أمام صندوق المحاسبة.
17. **مهارات التفكير العليا** كوّن جدولاً تكرارياً تراكمياً لقيم البيانات من المنحنى التكراري التراكمي.

في التمارين 21-23، يبين الجدول أدناه سرعة 80 مركبة بوحدة (km/h) تسافر على الطريق السريع، تم تسجيلها بواسطة جهاز ضبط السرعة (الرادار).

الفئات	50 - 65	65 - 80	80 - 95	95 - 110	110 - 125
التكرار f	7	11	28	24	10

21. استعمل البنية

a. كَوّن جدولًا تكراريًا تراكميًا لقيم هذه البيانات.

b. ارسم المنحنى التكراري التراكمي.

c. قَدّر قيمة الوسيط باستعمال المنحنى وفسّر معناه.

22. فُكّر وتأبّر في الحلّ

a. أوجد النسبة المئوية لعدد السيارات التي كانت سرعتها أكبر

من أو تساوي 90 km/h

b. أوجد النسبة المئوية لعدد السيارات التي كانت سرعتها بين

70 km/h و 100 km/h

23. روابط في الرياضيات

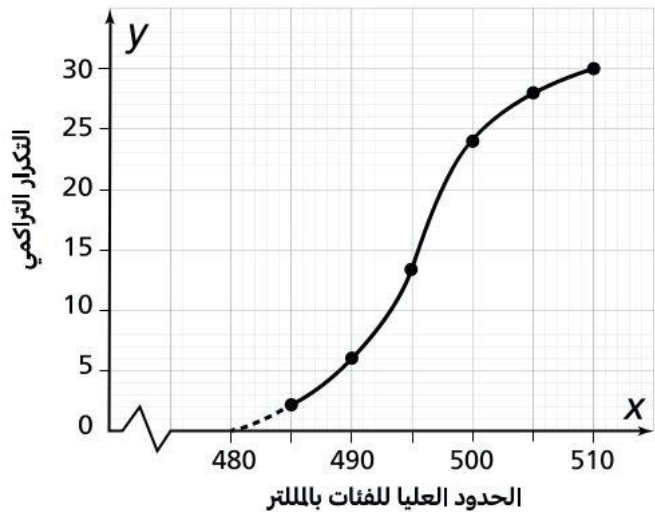
a. قَدّر قيمة الوسيط باستعمال التناسب.

b. قارن النتيجة التي حصلت عليها في السؤال (c - 21) مع

النتيجة في السؤال (a - 23)، ماذا تلاحظ؟

24. **بَزْر منطقيًا** يمثل المنحنى التكراري التراكمي أدناه كمية الماء (ml)

في 30 عبوة مياه معدنية.



استعمل المنحنى أعلاه للإجابة عن الأسئلة التالية:

a. قَدّر قيمة الوسيط وفسّر معناه.

b. قَدّر قيمة المدى الزبيني.

25. اختر كل ما هو صحيح.

عند احتساب الزبيع الثالث (Q_3) لقيم بيانات معطاة فإن:

A. 50% من القيم تكون أكبر من Q_3

B. 75% من القيم تكون أصغر من Q_3

C. 25% من القيم تكون أكبر من Q_3

D. 50% من القيم تكون أصغر من Q_3

26. **اختبار SAT/ACT** المدى الزبيني لقيم البيانات يتضمن:

A. 25% من قيم البيانات

B. 50% من قيم البيانات

C. 75% من قيم البيانات

D. 100% من قيم البيانات

27. **مهمة أدائية** يبين الجدول التكراري أدناه ساعات العمل الإضافية

لموظفي إحدى الشركات. قُذّرت إدارة الشركة منح جوائز لأفضل

20% من موظفيها الذين يعملون خارج أوقات الدوام.

الفئات	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
التكرار f	15	12	10	8	5

الجزء A ارسم المنحنى التكراري التراكمي.

الجزء B استعمل المنحنى التكراري التراكمي لتقدير أقل مدة من

الزمن تمنح فيها جائزة.

الجزء C قَدّر النسبة المئوية لعدد الموظفين الذين عملوا

أقل من 35 ساعة.

For Qatar MoE Use Only

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة ؟

1. كيف تنشئ وتستعمل المنحنى التكراري التراكمي ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي:

- الوسط الحسابي
- الوسيط
- الانحراف المعياري
- التباين
- المدى الربيعي
- المنوال
- المنحنى التكراري التراكمي
- الزبيع الأول
- الزبيع الثاني

2. القيمة التي يقل عنها 25% من البيانات تسمى _____ .
3. _____ هو مجموع ناتج ضرب تكرار كل فئة في قيمة مركزها مقسوماً على مجموع التكرارات.
4. _____ لجدول ذي فئات هو الوسط الحسابي لمربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي.
5. ناتج طرح الزبيع الأول من الزبيع الثالث يساوي _____ .
6. _____ هو مركز الفئة المنوالية للجدول التكراري ذي الفئات.
7. _____ هو منحنى أملس يصل بين نقاط في المستوى الإحداثي تمثل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول الحدود العليا للفئات ومسقطها الثاني التكرار التراكمي.

مراجعة المفاهيم والمهارات

مقاييس النزعة المركزية

الدرس 8-1

مراجعة سريعة

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} \text{ :الوسط الحسابي}$$

حيث: x : مركز الفئة

f : التكرار

الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.

$$\frac{\sum f}{2} \text{ :رتبة الوسيط}$$

المنوال للجدول التكراري ذي الفئات يساوي مركز الفئة المنوالية وهي الفئة ذات أكبر تكرار.

يبين الجدول أدناه الأطوال بالمليمترات لعينة عشوائية من الشتلات قام بقياسها مهندس زراعي خلال 8 أسابيع متتالية.

الفئات	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
التكرار f	5	15	20	10

أوجد الوسط الحسابي لأطوال الشتلات.

الخطوة 1 كَوْن الجدول بإضافة العمودين x و $x \cdot f$ على التوالي:

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
20 - 40	5	30	150
40 - 60	15	50	750
60 - 80	20	70	1400
80 - 100	10	90	900
المجموع Σ	50		3 200

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f} \\ &= \frac{3\,200}{50} \\ &= 64\end{aligned}$$

قانون الوسط الحسابي

عوض

بسط

إذن، الوسط الحسابي لأطوال الشتلات يساوي 64 mm تقريباً.

تدرب وحل مسائل

8. يبين الجدول التالي الأزمان التي استغرقها 40 سباحاً إلى أقرب ثانية في إحدى المباريات.

الفئات	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
التكرار f	7	10	15	8

أوجد الوسط الحسابي لقيم هذه البيانات وفشر معناه.

9. يبين الجدول أدناه أطوال 20 لاعب كرة طائرة إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	155-165	165-175	175-185	185-195
التكرار f	2	5	10	3

a. أوجد الوسيط وفشر معناه.

b. أوجد المنوال وفشر معناه.

10. **فكر وتأبر في الحل** تمثل البيانات في الجدول أدناه الزمن (بالدقائق) الذي أمضاه 50 مريضاً عند معاينتهم لدى أحد الأطباء.

الفئات	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
التكرار f	5	10	20	8	7

a. أوجد الوسط الحسابي للزمن الذي قضاه هؤلاء المرضى عند معاينتهم وفشر معناه.

b. أوجد الوسيط للزمن الذي قضاه هؤلاء المرضى عند معاينتهم وفشر معناه.

c. أوجد المنوال للزمن الذي قضاه هؤلاء المرضى عند معاينتهم وفشر معناه.

مراجعة سريعة

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{\sum [f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f} \quad \text{الصيغة الأولى:}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (f \cdot x^2)}{\sum f} - (\bar{x})^2 \quad \text{الصيغة الثانية:}$$

حيث x : مركز الفئة $\bar{x}$: الوسط الحسابي f : التكرارالانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

المدى: الحد الأعلى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى.

تدرب وحل مسائل

11. **فكر وثابر في الحل** يبين الجدول أدناه كتل 40 طالبًا في المرحلة الابتدائية إلى أقرب كيلوجرام. قدر الانحراف المعياري لكتل الطلاب.

الفئات	42 - 44	44 - 46	46 - 48	48 - 50
التكرار f	14	16	6	4

12. **بزر منطقيًا** يبين كل جدول أدناه عدد النقاط التي سجلها فريقان لكرة السلة خلال 20 مباراة. الفريق الأول:

الفئات	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
التكرار f	5	4	7	4

الفريق الثاني:

الفئات	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
التكرار f	7	3	3	7

- a. أوجد الوسط الحسابي لنقاط كل فريق. ماذا تلاحظ ؟
b. أوجد الانحراف المعياري لنقاط كل فريق. ماذا تلاحظ ؟
c. أي الفريقين ذو أداء أكثر ثباتًا من الآخر؟ وضح إجابتك.

13. يبين الجدول التالي أطوال 20 لاعب كرة قدم إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	165 - 170	170 - 175	175 - 180	180 - 185
التكرار f	2	8	7	3

أوجد المدى لأطوال اللاعبين.

مثال

يبين الجدول أدناه سرعة 20 سيارة بوحدة (km/h) عند عبورها أحد التقاطعات.

الفئات	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
التكرار f	4	7	6	3

قدر التباين والانحراف المعياري.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي من خلال الجدول التالي:

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$
20 - 30	4	25	100
30 - 40	7	35	245
40 - 50	6	45	270
50 - 60	3	55	165
المجموع	20		780

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot f)}{\sum f} = \frac{780}{20} = 39$$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 39 km/h تقريبًا.

الخطوة 2 أكمل الجدول بإضافة الأعمدة x^2 و $f \cdot x^2$

على التوالي.

الفئات	التكرار f	مركز الفئة x	$x \cdot f$	x^2	$f \cdot x^2$
20 - 30	4	25	100	625	2 500
30 - 40	7	35	245	1 225	8 575
40 - 50	6	45	270	2 025	12 150
50 - 60	3	55	165	3 025	9 075
المجموع	20		780		32 300

الخطوة 3 أوجد التباين.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (f \cdot x^2)}{\sum f} - (\bar{x})^2 \quad \text{الصيغة الثانية للتباين}$$

$$= \frac{32\,300}{20} - (39)^2$$

$$= 94$$

إذن، التباين يساوي 94 km/h.

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{94}$$

$$\approx 9.7$$

إذن، الانحراف المعياري لقيم البيانات يساوي 9.7 mm تقريبًا.

مراجعة سريعة

- **الزبيع الأول (Q_1):** هو القيمة التي يقل عنها 25% من البيانات.
- **الزبيع الثالث (Q_3):** هو القيمة التي يقل عنها 75% من البيانات.
- **المدى الربيعي = الزبيع الثالث (Q_3) - الزبيع الأول (Q_1).**
- بالرموز: $IQR = Q_3 - Q_1$

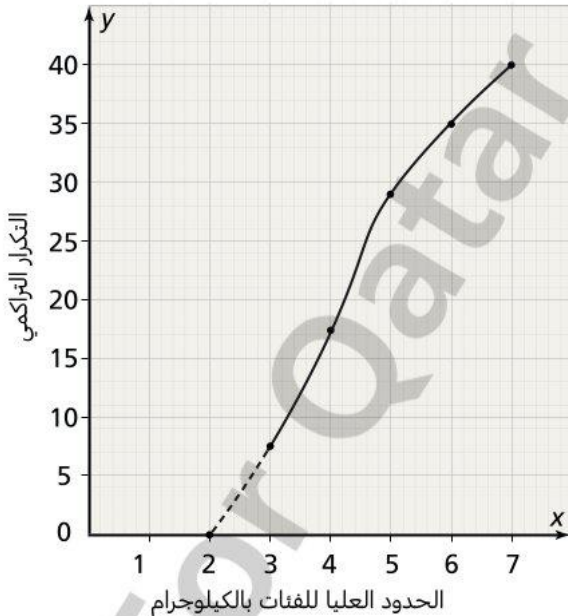
تدرب وحلّ مسائل

14. بيّن الجدول أدناه أطوال 40 شخصاً إلى أقرب سنتيمتر.

الفئات	168 - 172	172 - 176	176 - 180	180 - 184
التكرار f	12	15	9	4

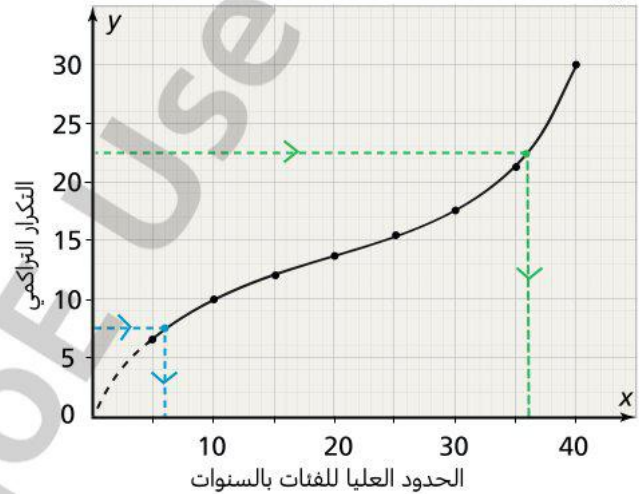
- ارسم المنحنى التكراري التراكمي.
 - قدّر عدد الأشخاص الذين أطوالهم أقل من 178 cm
 - قدّر عدد الأشخاص الذين أطوالهم بين 174 cm و 182 cm
 - قدّر قيمة الوسيط لهذه البيانات وفشر معناه.
15. **استعمل البنية** يمثل المنحنى التكراري التراكمي أدناه كتل 40 إوزة إلى أقرب كيلوجرام. استعمل المنحنى لتقدير:

- الوسيط للبيانات (Q_2)
- الزبيع الأول (Q_1) والزبيع الثالث (Q_3) والمدى الزبيعي (IQR)



مثال

بيّن المنحنى التكراري التراكمي أدناه أعمار 30 مشتركاً بالسنوات في نادٍ للسباحة.



قدّر المدى الربيعي لقيم البيانات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

- الخطوة 1** أوجد الربع الأول (Q_1)
رتبة الربع الأول: $30 \times 0.25 = 7.5$
عَيّن العدد 7.5 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة له على المحور الأفقي تساوي 6 تقريباً.
إذن الربع الأول (Q_1) يساوي 6 سنوات تقريباً.

- الخطوة 2** أوجد الربع الثالث (Q_3)
رتبة الربع الثالث: $30 \times 0.75 = 22.5$
عَيّن العدد 22.5 على المحور الرأسي فتكون القيمة المقابلة له على المحور الأفقي تساوي 36 تقريباً.
إذن الربع الثالث (Q_3) يساوي 36 سنة تقريباً.

- الخطوة 3** أوجد المدى الربيعي
صيغة المدى الربيعي
 $IQR = Q_3 - Q_1$
 $= 36 - 6$ بالتعويض
 $= 30$ بسط
إذن، المدى الربيعي يساوي 30 سنة تقريباً.

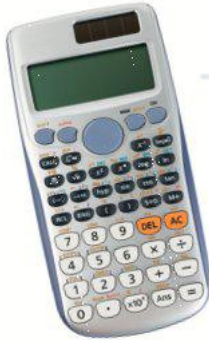
ENGLISH

العربية

direction	اتجاه
standard deviation	الانحراف المعياري
variance	التباين
nth root	الجذر النوني
like radicals	الجذور المتشابهة
first quartile (Q_1)	الزبيع الأول
third quartile (Q_3)	الزبيع الثالث
inscribed angle	الزاوية المحيطة
reduced radical form	الصيغة الجذرية المبسطة
scalar multiplication	الضرب بعدد ثابت
modal class	الفئة المنوالية
median class	الفئة الوسيطة
secant	القاطع
minor arc	القوس الأصغر
major arc	القوس الأكبر
radicand	المجذور
range	المدى
interquartile range (IQR)	المدى الزبيعي
equal matrices	المصفوفات المتساوية
zero matrix	المصفوفة الصفرية
equation with rational exponent	المعادلة الأسية
mode	المنوال
trigonometric ratios	النسب المثلثية
cofunction	النسب المثلثية للزوايا المتتامه
inverse matrix	النظير الضربي للمصفوفة
mean	الوسط الحسابي
median	الوسيط
rationalizing the denominator	إنطاق المقام
rational exponent	أس نسبي

pythagorean triple	ثلاثية فيثاغورس
addition of matrices	جمع المصفوفات
sine	جيب
cosine	جيب التمام
sine	جيب الزاوية
cosine	جيب تمام الزاوية
commutative property	خاصية الإبدال
index	دليل الجذر
radian	راديان
order of the median	رتبة الوسيط
matrix order	رتبة مصفوفة
radical symbol	رمز الجذر
angle of elevation	زاوية الارتفاع
angle of depression	زاوية الانخفاض
central angle	زاوية مركزية
component form	صورة تركيبية
subtraction of matrices	طرح المصفوفات
arc length	طول القوس
tangent	ظل
cotangent	ظل التمام
tangent	ظل الزاوية
scalar	عدد ثابت
secant	قاطع
cosecant	قاطع التمام
law of sine	قانون الجيب
law of cosine	قانون جيب التمام
sector of a circle	قطاع دائري
segment of a circle	قطعة دائرية
intercepted arc	قوس محصور
vector	متجه

cofunction identities	متطابقات النسب المثلثية للزوايا المتتامه
identity	متطابقة
determinant of a 2×2 matrix	محددة مصفوفة من الرتبة 2×2
matrix	مصفوفة
constant matrix	مصفوفة الثوابت
variable matrix	مصفوفة المتغيرات
coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
additive inverse matrix	مصفوفة النظير الجمعي
identity matrix	مصفوفة محايدة
square matrix	مصفوفة مربعة
product matrix	مصفوفة ناتج الضرب
inverse sine ratio	معكوس نسبة الجيب
magnitude	مقدار
reciprocal trigonometric ratios	مقلوبات النسب المثلثية
tangent to a circle	مماس الدائرة
point of tangency	نقطة التماس
initial point	نقطة بداية
terminal point	نقطة نهاية
chord	وتر



ملاحظة : تسلسل الضغط على الأزرار يكون دائماً من اليسار إلى اليمين.

مقدمة

عند تشغيل الآلة الحاسبة، وقبل البدء بأي عملية حسابية نقوم بمسح الذاكرة:



أولاً: استخدام الآلة الحاسبة غير البيانية

1. معامل الارتباط r و معادلة خط الانحدار $y = Bx + A$ التي تربط بين المتغيرين x و y .

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تكوين جدول	  	
ملء الجدول بقيم x المعطاة	القيمة الأولى x ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$	
الانتقال إلى العمود الذي يتضمن قيم y		
ملء الجدول بقيم y المعطاة	القيمة الأولى y ثم $=$ ، القيمة الثانية ثم $=$ ، ... ، القيمة الأخيرة ثم $=$	
مسح الشاشة		
لإيجاد قيمة r	    $=$	
لإيجاد قيمة B	    $=$	
لإيجاد قيمة A	    $=$	

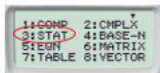
١١. الإحصاء بمتغير واحد.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تكوين جدول	الحالة الأولى: قيم بيانات عتية	
	الحالة الثانية: جدول تكراري	
ملء الجدول بقيم X المعطاة	الحالة الأولى: قيم بيانات عتية	
	الحالة الثانية: جدول تكراري	 
مسح الشاشة		
إيجاد عدد البيانات المدخلة n	    	
إيجاد قيمة الوسط الحسابي $\bar{X}$	    	
إيجاد قيمة الانحراف المعياري σ_x	    	
إيجاد قيمة الانحراف المعياري s_x	    	
إيجاد القيمة الصغرى	    	
إيجاد القيمة العظمى	    	

III. طرق العد.

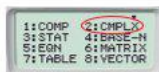
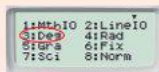
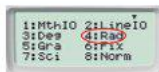
الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
لإيجاد مضروب عدد	  	
لإيجاد عدد التباديل nPr	   	
لإيجاد عدد التوافيق nCr	   	

IV. الاحتمال الطبيعي.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية التوزيع الطبيعي	  	
لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z < a)$	      	
لإيجاد قيمة الاحتمال $P(z > a)$	      	

لإيجاد قيمة الاحتمال $P(a \leq z \leq b)$ نوجد قيمة الفرق $P(z \leq b) - P(z \leq a)$

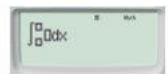
V. الأعداد المركبة والعمليات عليها.

الخطوات	الأزرار المستعملة		شكل الشاشة
الوصول إلى وضعية CMPLX	 		
اختيار المقياس	للقياس بال <i>degree</i>	  	
	للقياس بال <i>radian</i>	  	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيمة $(a + ib)^n$		
حل معادلة تربيعية $az^2 + bz + c = 0$	 	
إيجاد المقياس r والسعة θ للعدد المركب $a + ib$		
إيجاد مرافق العدد المركب $a + ib$		

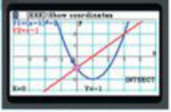
VI. الأوامر المباشرة.

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد قيم لوغاريتمية	إيجاد قيمة $\log a$: إيجاد قيمة $\ln a$: إيجاد قيمة $\log_a b$:	
إيجاد قيم أسية e^a		
إيجاد نسب مثلثية لزوايا معطاة بالدرجات	اختيار المقياس: إيجاد قيمة $\cos x^\circ$: إيجاد قيمة $\sin x^\circ$: إيجاد قيمة $\tan x^\circ$:	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
إيجاد الزوايا المرجعية (لإيجاد قياس الزاوية x بالراديان حيث $\cos x = a$)		
إيجاد التكامل المحدود	 صيغة الدالة  ملاحظة: لإدخال x نضغط على X ثم α	

ثانيًا: استخدام الآلة الحاسبة البيانية

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
تمثيل دالة بيانيًا	 صيغة الدالة ملاحظة: نستخدم X, Y, T لاختيار المتغير x وللحصول على $\sqrt{\quad}$ نضغط $\sqrt{\quad}$ ، X^2 ، SHIFT	
لرسم التمثيل البياني لدالة ثانية	 صيغة الدالة الثانية	
لإلغاء معادلة ومحو التمثيل البياني	 نختار الدالة المطلوبة	

الخطوات	الأزرار المستعملة	شكل الشاشة
دراسة المزايا الأساسية لدالة	 لإيجاد أصفار الدالة:	
	 لإيجاد القيمة العظمى للدالة:	
	 لإيجاد القيمة الصغرى للدالة:	
	 للحصول على المقطع y:	
	 للحصول على إحداثيات تقاطع منحنيين:	
	(ننتقل بالسهم لإيجاد باقي الإحداثيات عند وجود أكثر من نقطة) ملاحظة: عند ظهور <i>not found</i> يعني أن القيمة المطلوبة غير موجودة.	
الصيغة الحدودية	تفعيل وضعية Rad أو Deg: 	
	لتفعيل وضعية الصيغة الحدودية:  الصيغ الحدودية	
	(نستعمل  لإدخال المتغير T) ملاحظة: للتحكم بقياسات الرسم البياني والمتغير T نضغط على  إذا كانت الشاشة على لائحة المعادلات وندخل القيم التي تناسب مع المثال المعطى.	

For Qatar MOE Use Only

Photographs

4 Background Dmitry Kalinovsky/Shutterstock; 4 Background ixpert/Shutterstock;
4 Background HARAHi/Shutterstock; 4 Background Murad_Mammadov/Shutterstock;
20 Bottom Left Igor Kyrlytsya/Shutterstock; 56 Background Fototocam/Shutterstock;
56 Background Mariusz Szczygiel/Shutterstock; 56 Background TungCheung/Shutterstock;
56 Background konstantinos69/Shutterstock; 56 Background NikoNomad/Shutterstock;
56 Bottom Left Kitreel/Shutterstock; 56 Bottom Left Yeti studio/Shutterstock;
59 Center Right Willoughby Owen/Moment/Getty Images; 63 Top Left SalajeAN/Shutterstock;
73 Top Left Lefteris Papaulakis/Shutterstock; 73 Top Left Lefteris Papaulakis/Shutterstock;
73 Top Left Lefteris Papaulakis/Shutterstock; 80 Top Right Princess Anmitsu/Shutterstock;
80 Center Right Wanna Thongpao/Shutterstock; 80 Center Right Fitria Ramli/Shutterstock;
80 Center Right lucky luckyfarm/Shutterstock; 86 Top Center Olekcii Mach/Alamy;
86 Center Right Triff/Shutterstock; 86 Center Right 3Dsculptor/Shutterstock;
86 Center Right Algol/Shutterstock; 105 Center Right Fauzan/Shutterstock;
122 Center Right Vasilii Gubskii/Shutterstock; 130 Center Right Friedrich Saurer/Alamy;
138 Background Harvepino/Shutterstock; 138 Background David Lee/Shutterstock;
138 Background ImYanis/Shutterstock; 138 Background Guitar Photographer/Shutterstock;
138 Background J.D.S/Shutterstock; 138 Center Kirill Neiezhmakov/Shutterstock;
138 Bottom Left David U/Shutterstock; 138 Bottom Left Yeti studio/Shutterstock;
174 Bottom Left Pixel Embargo/Shutterstock; 190 Center vchal/Shutterstock;
190 Top Left GaViAl/Shutterstock; G4 Top Left Amankris/Shutterstock

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته



جميع الحقوق محفوظة

وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي

لدولة قطر

تم رفع الملف من قبله



مندیانت صقر الجنوب التعليمية

المنهاج القطري

كل ما تحتاجه في مكان واحد



WWW.JNOB-QA.COM