



الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

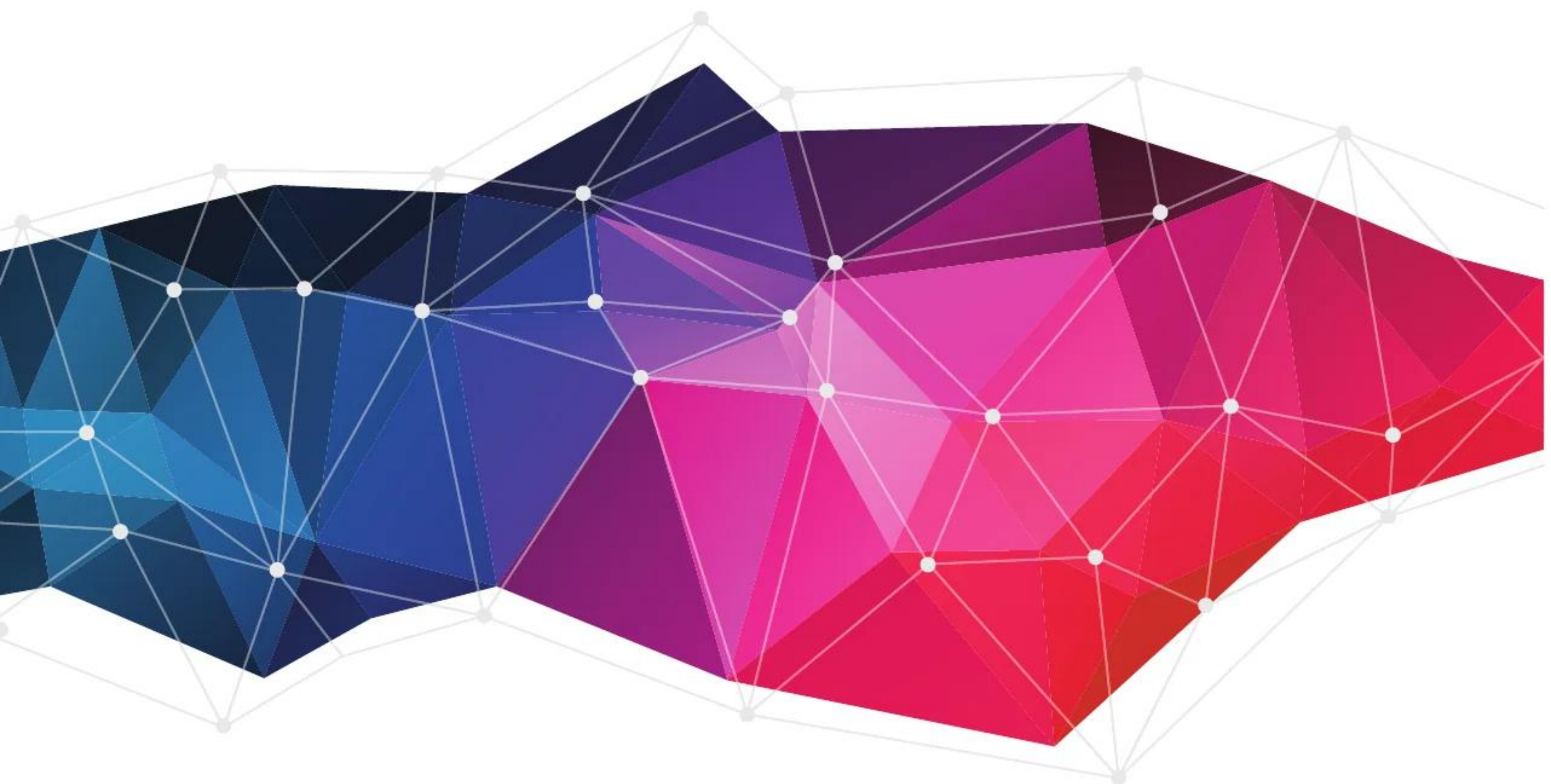
5
4
عام المجتمع
YEAR OF COMMUNITY
UAE

نحن
الإمارات
WE THE UAE
2031

2025-2026

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة



الصف
12
تطبيقي

Mc
Graw
Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار التطبيقي



McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 12 Applied Math Vol.1

FM. Front Matter, from Integrated Math III © 2012

1. Exponential and Logarithmic Functions and Relations , from Algebra 2 Chapter 7 © 2014

2. Rational Functions and Relations, from Integrated Math III Chapter 7 © 2012

3. Sequences and Series, from Integrated Math III Chapter 9 © 2012

EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math III © 2012

صورة الغلاف: Shanvood/shutterstock

mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعت له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

النسخة الإلكترونية

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709214-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709214-7 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-709215-5 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-709215-5 (نسخة المعلم)

رقم النشر الدولي: 978-1-44-709213-1 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-709213-9 (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

ملخص المحتويات

يتم تعريف المحتوى على تطبيق التعلم الذكي 

الوحدة 1	الدوال و العلاقات الأسية واللوغاريتمية
الوحدة 2	الدوال والعلاقات النسبية
الوحدة 3	المتتاليات والمتسلسلات
الوحدة 4	التحويلات الهندسية والتناظر
الوحدة 5	الدوال المثلثية
الوحدة 6	المتطابقات والمعادلات المثلثية
الوحدة 7	الدوال من منظور التفاضل والتكامل



الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

الوحدة 1

2	الاستعداد للوحدة 1
4	1-1 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
12	توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني اختيار النموذج الأمثل
14	1-2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
20	■ اختبار منتصف الوحدة
21	1-3 خواص اللوغاريتمات
28	1-4 اللوغاريتمات العادية
35	توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
37	1-5 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية
44	استكشف: مختبر ورقة البيانات المراجعة المركبة
45	1-6 استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية
	التقويم
53	■ دليل الدراسة والمراجعة
57	■ تدريب على الاختبار
58	■ التحضير للاختبارات المعيارية
60	■ تدريب على الاختبار المعياري



63 الاستعداد للوحدة 2

65 2-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

74 2-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

81 2-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

88 ■ اختبار منتصف الوحدة

89 2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

97 📊 توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني للدوال النسبية

98 2-5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

107 📊 توسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية

التقويم

109 ■ دليل الدراسة والمراجعة

113 ■ تدريب على الاختبار

114 ■ التحضير للاختبارات المعيارية

116 ■ تدريب على الاختبار المعياري



المتتاليات والمتسلسلات

3

الوحدة

119	الاستعداد للوحدة 3
121	3-1 المتتاليات كدوال
128	3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
136	3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
143	■ اختبار منتصف الوحدة
145	3-4 نظرية ذات الحدين
154	3-5 الاستقراء الرياضي

التقويم

159	■ دليل الدراسة والمراجعة
163	■ تدريب على الاختبار
164	■ التحضير للإختبارات المعيارية
166	■ تدريب على الاختبار المعياري

التحويلات الهندسية والتناظر

4

الوحدة

الاستعداد للوحدة 4

4-1 الإنعكاس

4-2 الإزاحة

4-3 الدوران

التوسع: مختبر الهندسة

■ اختبار منتصف الوحدة

4-4 تركيب التحويلات

التوسع: مختبر الهندسة

4-5 التناظر

التوسع: مختبر الهندسة

4-6 عمليات تغيير الأبعاد (التمدد)

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ التحضير للإختبارات المعيارية

الدوال المثلثية

5

الوحدة



الاستعداد للوحدة 5

الاستكشاف: مختبر ورقة البيانات استكشاف المثلثات القائمة الخاصة

5-1 النسب المثلثية في المثلثات القائمة

5-2 الزوايا وقياس الزوايا

التوسع: مختبر الهندسة مساحات متوازيات الأضلاع

5-3 النسب المثلثية للزوايا العامة

5-4 قانون الـ Sine

الاستكشاف: مختبر الهندسة المضلعات المنتظمة

5-5 قانون الـ Cosine

■ اختبار منتصف الوحدة

5-6 الدوال المثلثية الدائرية والدورية

5-7 التمثيل البياني للدوال المثلثية

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيلات البيانية المثلثية

5-8 إزاحة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

5-9 الدوال المثلثية العكسية

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ التحضير للإختبارات المعيارية

■ تدريب على الاختبار المعياري

المتطابقات والمعادلات المثلثية

6 الوحدة



الاستعداد للوحدة 6

- 6-1 المتطابقات المثلثية
- 6-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
- 6-3 متطابقات مجموع زوايتين والفرق بينهما
- اختبار منتصف الوحدة
- 6-4 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
- الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية
- 6-5 حل المعادلات المثلثية

التقويم

- دليل الدراسة والمراجعة
- تدريب على الاختبار
- التحضير للإختبارات المعيارية
- تدريب على الاختبار المعياري

الدوال من منظور التفاضل والتكامل

الوحدة

7

الاستعداد للوحدة 7

7-1 الدوال

7-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

7-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

7-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

■ اختبار منتصف الوحدة

7-5 الدوال الأصلية والتحويلات

■ التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات غير الخطية

7-6 العمليات على الدوال وتركيب الدوال

7-7 العلاقات والدوال العكسية

■ التوسع: معمل تكنولوجيا الرسم البياني تمثيل المعكوسات بيانيًا باستخدام المعادلات الوسيطة

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة

■ تدريب على الاختبار

■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدل التغير عند نقطة

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

EM-1	الرموز
EM-2	القياسات
EM-3	العمليات والعلاقات الحسابية
EM-3	الصيغ والمفاهيم الجبرية
EM-5	الصيغ والمفاهيم الهندسية
EM-6	الدوال والمتطابقات المثلثية
EM-7	الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال
EM-7	النهايات والتفاضل والتكامل
EM-8	الصيغ والمفاهيم الاحصائية

الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية



.. السابق

لقد مثلت الدوال وتحويلات الدوال بيانياً.

.. الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
- تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانياً.
- حلّ المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية.
- حل المسائل التي تتضمن نمواً وتضاملاً أسياً.

.. لماذا؟ ▲

العلوم إن الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواءً أكنت تتعاطى مع الكيمياء أم علم الحياء أم علم المتحجرات أم علم الحيوان أم علم الإنسان، فإنك ستحتاج إلى مهارات رياضية قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالفيروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونمو الجراثيم والانقسام الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.

الاستعداد للوحدة

1

الكتاب الدراسي الاختياري قم بحل التدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

تدريب سريع

مثال 1

حوّل العلاقة التالية لأبسط صورة: $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ وافترض أنّ أيّ من المتغيرات لا يساوي الصفر.

$$\begin{aligned} \frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3} &= \frac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8} \\ &= \frac{1}{bc^4} \text{ أو } b^{-1}c^{-4} \end{aligned}$$

حوّل البسط لأبسط صورة باستخدام قاعدة قوة القوة وحوّل المقام لأبسط صورة باستخدام قاعدة ناتج ضرب القوى.

بسّط العلاقة باستخدام قاعدة ناتج قسمة القوى.

حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي صفر.

- $a^4a^3a^5$
- $(2xy^3z^2)^3$
- $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$
- $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t^4}\right)^2$

5. الكثافة كثافة جسم تساوي كتلة الجسم مقسومة على حجمة. لدينا جسم كتلته $7.5 \times 10^3 \text{ g}$ وحجمه $1.5 \times 10^3 \text{ cm}^3$ ما هي كثافة الجسم؟

مثال 2

جد معكوس $f(x) = 3x - 1$

الخطوة 1 استبدل $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية:
 $f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

الخطوة 2 بدّل بين x و y : $x = 3y - 1$

الخطوة 3 حلّ لإيجاد قيمة y .

$$\begin{aligned} x &= 3y - 1 && \text{بالعكس} \\ x + 1 &= 3y && \text{بإضافة 1 إلى كل طرف.} \\ \frac{x+1}{3} &= y && \text{بقسمة كل طرف على 3.} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} &= y && \text{بسّط.} \end{aligned}$$

الخطوة 4 استبدل y بـ $f^{-1}(x)$:
 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

جد معكوس كلّ من الدوال التالية. ثمّ مثل الدالة ومعكوسها بيانياً.

- $f(x) = 2x + 5$
- $f(x) = x - 3$
- $f(x) = -4x$
- $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
- $f(x) = \frac{x-1}{2}$
- $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إن كان كل زوج من الدوال التالية دالتين متعاكستين.

- $f(x) = x - 6$
 $g(x) = x + 6$
- $f(x) = 2x + 5$
 $g(x) = 2x - 5$

14. الطعام تسعيرة قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجبن في مطعم البيتزا 12 AED إضافةً إلى 2 AED لكل طبقة إضافية. فإذا كانت العلاقة $f(x) = 2x + 12$ تمثّل كلفة البيتزا المتوسطة التي تضم x طبقات، فجد $f^{-1}(x)$ وشرح معناها.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمة ونظّم مواردك.

المفردات الجديدة

اللوغاريتم logarithm
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function
المعادلة اللوغاريتمية logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية logarithmic inequality
اللوغاريتم العادي common logarithm
تغيير الأساس Change of Base
الصيغة Formula
الأساس الطبيعي e. natural base e.
الأساس الطبيعي natural base
الدالة الأسية exponential function
اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm

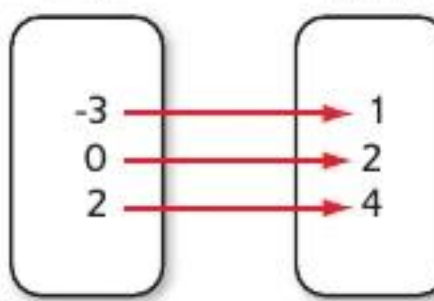
مراجعة المفردات

المجال مجموعة جميع الإحداثيات x في الأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يفترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

المدى مجموعة جميع الإحداثيات y في الأزواج المرتبة في علاقة ما

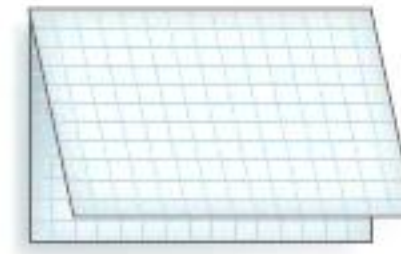
{(-3,1), (0, 2), (2, 4)}



مطويات منظّم الدراسة

الدّوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية

شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بهذه الوحدة عن الدّوال الأسية واللوغاريتمية. وابدأ بورقتي مربّعات.



1 اطو الورقتين إلى نصفين بالعرض.



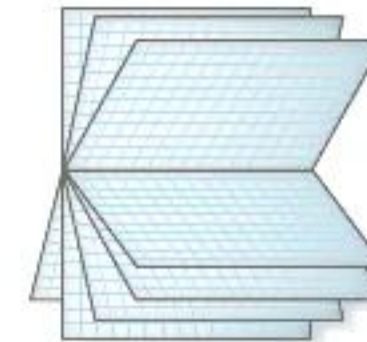
الورقة الأولى

2 على الورقة الأولى، قصّ لمسافة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.



الورقة الثانية

3 على الورقة الثانية، قصّ في منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قصّ.



4 أدخل الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاّذ بين الطيّتين، ثمّ سمّ الصفحات بأرقام الدروس.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

السابق ..

الحالي ..

لماذا؟ ..

لقد وجدت معكوس دالة.

1 إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية.
2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

يعتقد كثير من العلماء أن انقراض الديناصورات نتج عن كويكب ضرب كوكب الأرض. ويستخدم العلماء مقياس باليرمو لتصنيف الأجسام القريبة من الأرض بناءً على احتمالية اصطدامها بها. ولتسهيل مقارنة عدّة أجسام. طوّر هذا المقياس باستخدام لوغاريتمات. يمكن إيجاد قيمة أي جسم على مقياس باليرمو باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$. وفيها R هي الخطورة النسبية التي يشكّلها الجسم.

المفردات الجديدة

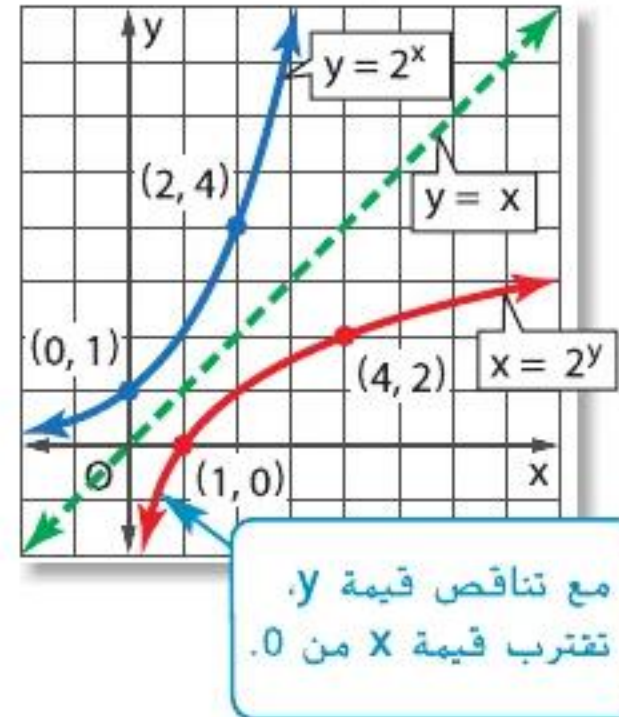
اللوغاريتم logarithm
الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.



1 الدوال والتعابير اللوغاريتمية خذ الدالة الأسية التالية $f(x) = 2^x$ ومعكوسها. تذكر أنك تستطيع تمثيل دالة عكسية بيانياً بالتبديل بين قيمتي x و y في الأزواج المرتبة للدالة.

يمكن تعريف معكوس الدالة $y = 2^x$ على أنه $x = 2^y$ وبصورة عامة، معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$ في $x = b^y$ يدعى المتغير y **لوغاريتم** x . وهو يكتب في العادة بالصورة $y = \log_b x$ والتي تُقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .



$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

المفهوم الأساسي اللوغاريتم ذو الأساس b

الشرح
ليكن b و x عددين موجبين $b \neq 1$. يرمز للوغاريتم x الذي أساسه b بالرمز $\log_b x$ ويعرّف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.
الرموز
على فرض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. من أجل $x > 0$. هناك عدد ما y بحيث يتحقق

$$\log_b x = y \text{ إذا وفقط إذا كان } b^y = x.$$

مثال
إذا كان $\log_3 27 = y$. فإن $3^y = 27$.

يمكن استخدام تعريف اللوغاريتمات للتعبير عن لوغاريتمات بالصورة الأسية.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

a. $\log_2 8 = 3$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$$

b. $\log_{4256} \frac{1}{256} = -4$

$$\log_{4256} \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$$

تمرين موجّه

1A. $\log_4 16 = 2$

1B. $\log_3 729 = 6$

يمكن استخدام تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة معادلات أسية بالصيغة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسية إلى اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

a. $15^3 = 3375$

$$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$$

b. $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

تمرين موجّه

2A. $4^3 = 64$

2B. $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

مثال 3 إيجاد قيمة التعبيرات اللوغاريتمية

جد قيمة $\log_{16} 4$.

$\log_{16} 4 = y$ ليكن اللوغاريتم يساوي y .

$4 = 16^y$ تعريف اللوغاريتم

$4^1 = (4^2)^y$ $16 = 4^2$

$4^1 = 4^{2y}$ قوة القوة

$1 = 2y$ خاصية المساواة في الدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ بقسمة كل طرف على 2.

وهكذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

تمرين موجّه

جد قيمة كل تعبير.

3A. $\log_3 81$

3B. $\log_{\frac{1}{2}} 256$

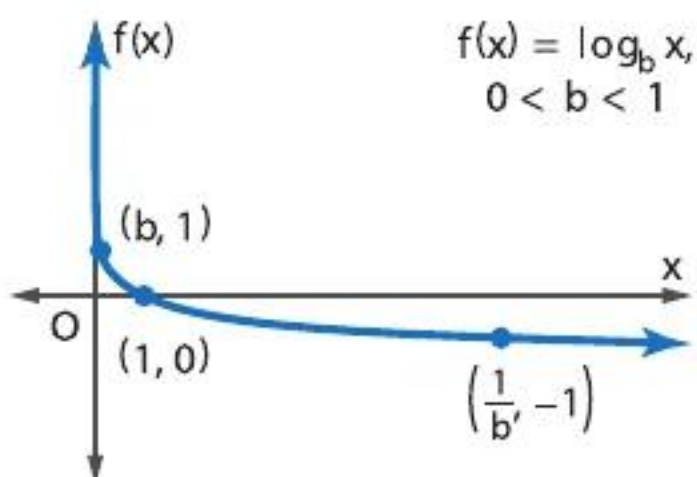
انتبه!

الأساس اللوغاريتمي من الوارد جدًا أن يخلط المرء بين العدد الذي يمثل الأساس والعدد الذي يمثل الأس في المعادلات اللوغاريتمية. ضع في حسابك تظليل كل عدد أثناء الحل للمساعدة في تنظيم حساباتك.

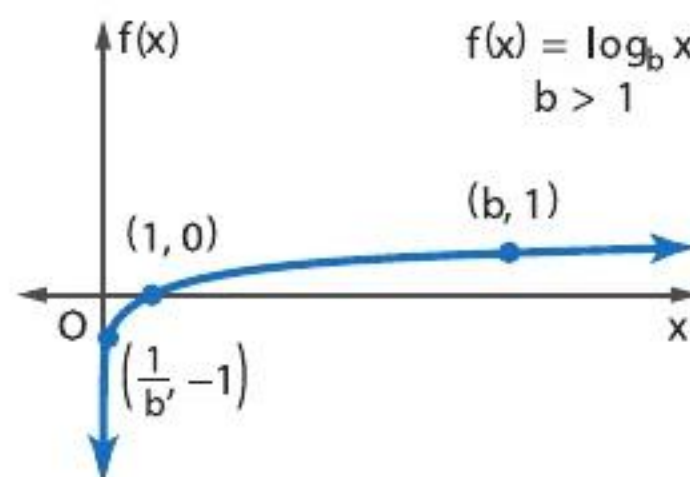
2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تدعى الدالة $y = \log_b x$ والتي فيها $b \neq 1$. **دالة لوغاريتمية.** ويكون التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_b x$ تمثيلًا بيانيًا رئيسيًا للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي الدالة اللوغاريتمية

نوع التمثيل البياني: متصل. واحد إلى واحد
المدى: جميع الأعداد الحقيقية
نقطة التقاطع: $(1, 0)$



الدالة الأصلية: $f(x) = \log_b x$
المجال: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة
خط التقارب: المحور $f(x)$



مثال 4 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

مثّل كل دالة بيانيًا.

a. $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1 حدد الأساس.

$$b = 5$$

الخطوة 2 حدّد نقاطًا على المستوى البياني.

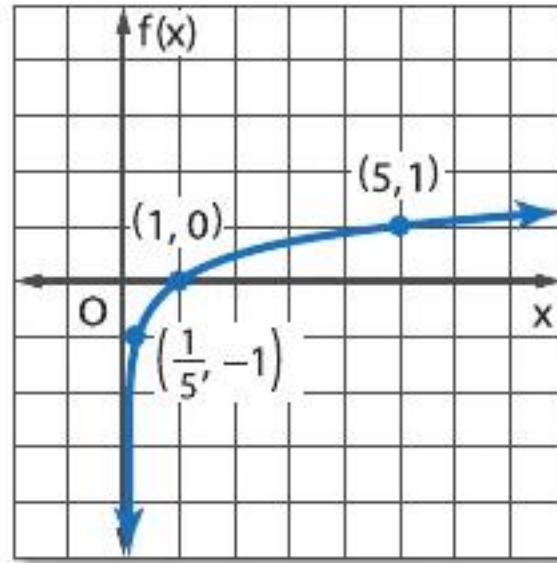
نظرًا إلى أن $5 > 1$. استخدم النقاط $(1, 0)$ و $(\frac{1}{5}, -1)$ و $(b, 1)$.

الخطوة 3 مثل النقاط وارسم التمثيل البياني.

$$(\frac{1}{b}, -1) \rightarrow (\frac{1}{5}, -1)$$

$$(1, 0)$$

$$(b, 1) \rightarrow (5, 1)$$



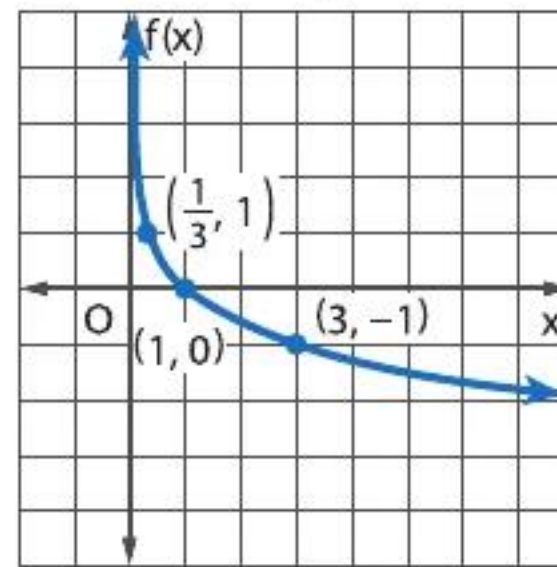
b. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1 $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2 $1 > \frac{1}{3} > 0$. إذا استخدم النقاط

$$(\frac{1}{3}, 1) \text{ و } (1, 0) \text{ و } (3, -1)$$

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.



نصيحة دراسية

الأس الصفري تذكر أنه من أجل أي قيمة $b \neq 0$. $b^0 = 1$. لذلك، $\log_2 0$ غير معرّف لأن $2^x \neq 0$ من أجل أي قيمة x .

تمرين موجّه

4A. $f(x) = \log_2 x$

4B. $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

يُمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال اللوغاريتمية

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

الإزاحة الرأسية k	الإزاحة الأفقية h
k وحدة إلى الأعلى إذا كان k موجبًا K وحدة إلى الأسفل إذا كان k سالبًا	h وحدة يمينًا إذا كان h موجبًا h وحدة يسارًا إذا كان h سالبًا
a الاتجاه والشكل	
إذا كانت $ a > 1$ ، يتمدد التمثيل البياني رأسيًا. وإذا كانت $0 < a < 1$ ، ينضغط التمثيل البياني رأسيًا.	
إذا كان $a < 0$ ، ينعكس التمثيل البياني بالنسبة للمحور الأفقي x.	

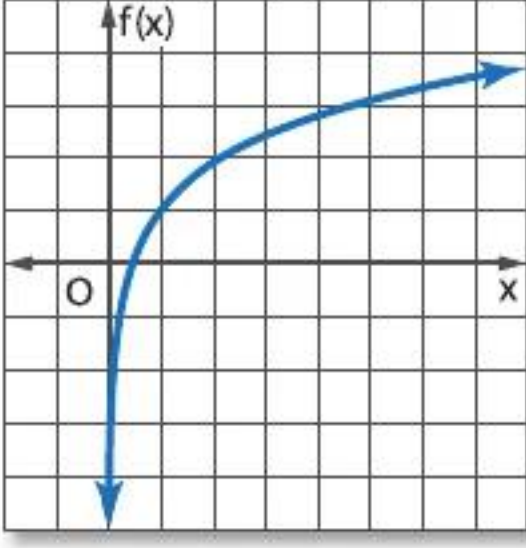
المثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً.

مثّل كل دالة بيانياً.

a. $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$

يمثل هذا تحويلاً للتمثيل البياني لـ $f(x) = \log_{10} x$

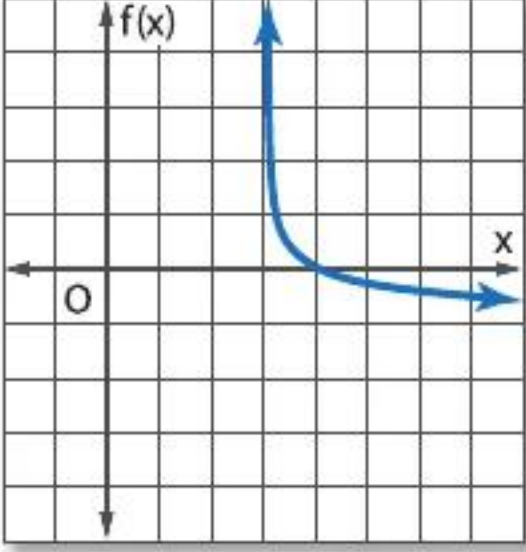
- $|a| = 3$: يتمدد التمثيل البياني رأسياً
- $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.
- $k = 1$: أزيح التمثيل البياني بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.



b. $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x - 3)$

هذا هو تحويل التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

- $|a| = \frac{1}{2}$: انضغط التمثيل البياني رأسياً.
- $h = 3$: أزيح التمثيل البياني وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية.



تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانياً.

5A. $f(x) = 2 \log_3(x - 2)$

5B. $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 5$

المثال 6 من الحياة اليومية إيجاد معكوسات الدوال الأسية

الزلازل يقيس مقياس ريختر شدة الزلازل. وتساوي الزيادة في الشدة بين كل عددين 10 أمثال الدرجة التي تسبقها. فعلى سبيل المثال، الزلزال الذي تقديره على مقياس ريختر 7 تساوي شدته 10 أمثال شدة الزلزال الذي تقديره 6. ويمكن تمثيل شدة زلزال من خلال المعادلة $y = 10^{x-1}$ ، حيث x تمثل التقدير على مقياس ريختر.

a. استخدم المعلومات الموجودة في الجهة اليسرى لإيجاد شدة أقوى زلزال مسجل في الولايات المتحدة الأمريكية.

$$\begin{aligned} y &= 10^{x-1} && \text{المعادلة الأصلية} \\ &= 10^{9.2-1} && \text{بتعويض 9.2 بدلاً من } x \\ &= 10^{8.2} && \text{بسط.} \\ &= 158,489,319.2 && \text{باستخدام آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

b. اكتب معادلةً على الصورة $y = \log_{10} x + c$ لإيجاد معكوس الدالة.

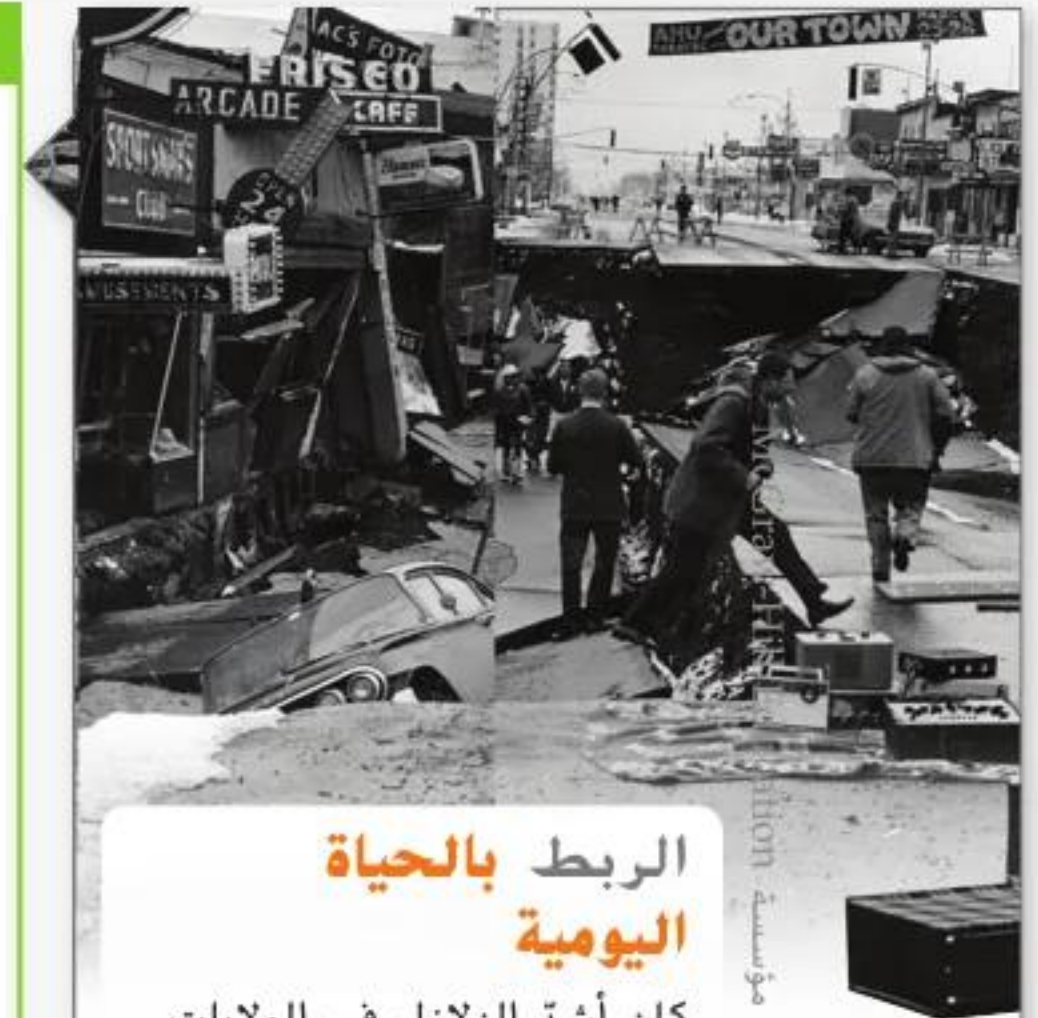
$$\begin{aligned} y &= 10^{x-1} && \text{المعادلة الأصلية} \\ x &= 10^{y-1} && \text{استبدل } x \text{ بـ } y, \text{ واستبدل } y \text{ بـ } x, \text{ وجد الحل لإيجاد } y. \\ y - 1 &= \log_{10} x && \text{حسب تعريف اللوغاريتم} \\ y &= \log_{10} x + 1 && \text{بإضافة 1 إلى كل طرف.} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

6. اكتب معكوس الدالة $y = 0.5^x$

نصيحة دراسية

السلوك الطرفي في المثال 5a. عندما تتناهي x إلى اللانهاية، تتناهي $f(x)$ إلى اللانهاية.



الربط بالحياة اليومية

كان أشدّ الزلازل في الولايات المتحدة الزلزال الذي ضرب برينس ويليام ساوند في ألاسكا يوم الجمعة الحزينة في 28 مارس 1964، وقد بلغت شدته 9.2 درجات على مقياس ريختر.

المصدر: الولايات المتحدة المسح الجيولوجي

التحقق من فهمك

مثال 1

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

1. $\log_8 512 = 3$

2. $\log_5 625 = 4$

مثال 2

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

3. $11^3 = 1331$

4. $16^{\frac{3}{4}} = 8$

مثال 3

جد قيمة كل تعبير.

5. $\log_{13} 169$

6. $\log_2 \frac{1}{128}$

7. $\log_6 1$

المثالان 4-5

مثل كل دالة بياناً.

8. $f(x) = \log_3 x$

9. $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

10. $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$

11. $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

مثال 6

12. **العلوم** استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس. يمكن إيجاد القيمة الخاصة بأي جسم على باليرمو باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$. حيث تمثل R الخطورة النسبية التي يشكلها الجسم. اكتب معادلة بالصورة الأسية للتعبير عن معكوس الدالة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة الأسية.

13. $\log_2 16 = 4$

14. $\log_7 343 = 3$

15. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

16. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

17. $\log_{12} 144 = 2$

18. $\log_9 1 = 0$

مثال 2

اكتب كل معادلة مما يلي بالصورة اللوغاريتمية.

19. $9^{-1} = \frac{1}{9}$

20. $6^{-3} = \frac{1}{216}$

21. $2^8 = 256$

22. $4^6 = 4096$

23. $27^{\frac{2}{3}} = 9$

24. $25^{\frac{3}{2}} = 125$

مثال 3

جد قيمة كل تعبير.

25. $\log_3 \frac{1}{9}$

26. $\log_4 \frac{1}{64}$

27. $\log_8 512$

28. $\log_6 216$

29. $\log_{27} 3$

30. $\log_{32} 2$

31. $\log_9 3$

32. $\log_{121} 11$

33. $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

34. $\log_{\frac{1}{8}} 512$

35. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$

36. $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

المثالان 4-5

الدقة مثل كل دالة بياناً.

37. $f(x) = \log_6 x$

38. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

39. $f(x) = 4 \log_2 x + 6$

40. $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

41. $f(x) = \log_{10} x$

42. $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$

43. $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

44. $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$

45. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

46. $f(x) = \log_5 (x - 4) - 5$

47. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

48. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} (x + 2) - 5$

49. التصوير الفوتوغرافي تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة التغيير في النسبة البؤرية n التي ينبغي

استخدامها بوجود إضاءة خافتة بينما يمثل p كسر ضوء الشمس.

- a. ضَبَطَ خالد إعدادات آلة التصوير التي بحوزته لتلتقط صورًا تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن اليوم غائم. فإذا كانت كمية ضوء الشمس في يوم غائم تساوي $\frac{1}{4}$ بالنسبة للسطوع تحت ضوء الشمس الطبيعي، فكم درجة ينبغي تعديل البعد البؤري لاستقبال كمية أقل من الضوء؟
b. مثل الدالة بيانيًا.

c. استخدم التمثيل البياني الذي شكّلته في القسم B للتنبؤ بانكسار الضوء الذي ستستقبله آلة تصوير خالد إذا عدّل البعد البؤري بمقدار 3 درجات. وهل يسمح في هذه الحالة بدخول كمية أقل أو أكثر من الضوء إلى آلة التصوير؟

50. التعليم لقياس قدرة الطلاب على الاحتفاظ بالمعرفة، يُختبر الطالب بعد مرور فترة زمنية محددة على تعلمه المعرفة. ويمكن تقدير نتيجة الطالب في اختبار الرياضيات بعد t شهرًا من العام الدراسي تقريبًا من خلال العلاقة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$. حيث $y(t)$ نتيجة الطالب بصيغة نسبة مئوية.

- a. كم كانت نتيجة الطالب عند انتهاء العام الدراسي ($t = 0$)؟
b. كم كانت نتيجة الطالب بعد 3 أشهر؟
c. كم كانت نتيجة الطالب بعد 15 شهرًا؟

مثل كل دالة بيانيًا.

51. $f(x) = 4 \log_2 (2x - 4) + 6$
52. $f(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$
53. $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$
54. $f(x) = 10 \log_5 (x - 4) - 5$
55. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$
56. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_6 (6x + 2) - 5$

57. التمثيل بالنماذج بصورة عامة، كلما أنفقت شركة مبلغًا أكبر من المال على الإعلانات، كلما ارتفعت المبيعات. ويمكن تمثيل مبلغ المال الذي تجنيه الشركة من المبيعات، مقدّرًا بالآلاف، بالمعادلة $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$. حيث a مبلغ المال الذي تنفقه الشركة على الإعلانات بالآلاف، حيث $a \geq 0$.

- a. تساوي قيمة $S(0) \approx 10$ تقريبًا، ويعني ذلك أنه عند إنفاق AED 10 على الإعلانات، فسيكون العائد AED 10,000 في المبيعات. جد قيم $S(3)$ و $S(15)$ و $S(63)$.
b. فسر معنى كل قيمة للدالة في سياق المسألة.
c. مثل الدالة بيانيًا.
d. استخدم التمثيل البياني في القسم c وإجاباتك في القسم a لشرح السبب في أن المال المنفق في الإعلانات يصبح أقل "كفاءة" عند استخدامه بكميات أكبر.

58. علم الأحياء إن زمن جيل الجراثيم هو الزمن الذي يستغرقه عدد الجراثيم كي يتضاعف. ويمكن إيجاد زمن الجيل G لنوع محدد من الجراثيم باستخدام البيانات التجريبية والقانون $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$. حيث t المدة الزمنية و b عدد الجراثيم في بداية التجربة، و f عدد الجراثيم عند نهاية التجربة.

- a. زمن الجيل للمتفطرة السلية 16 ساعة. فكم ستستغرق أربعة من هذه الجراثيم كي تتضاعف إلى 1024 جرثومة؟
b. بيّنت تجربة خضعت لها مجموعة من الجرذان، وعرضت خلالها لجراثيم السلمونيلا، أن زمن جيل السلمونيلا كان يساوي 5 ساعات. فكم سيستغرق تضاعف 20 جرثومة من هذا النوع إلى 8000؟
c. تعدّ الإشريكية القولونية إحدى أنواع الجراثيم سريعة التكاثر. فإذا علمت أن 6 من جراثيم الإشريكية القولونية تستطيع التكاثر إلى 1296 خلال 4.4 ساعات، فما هو زمن جيل الإشريكية القولونية؟

59 **المعرفة المالية** أنفقت هدى مبلغ AED 2000 من بطاقتها الائتمانية. وتفرض شركة بطاقة الائتمان فائدة مركبة شهريًا بنسبة 24%. تستخدم الشركة المعادلة $\log_{\left(1+\frac{0.24}{12}\right)} \frac{A}{2000} = 12t$ لتحديد الزمن المستغرق إلى أن يبلغ دين هدى مبلغًا محددًا. فإذا كان A هو مبلغ الدين بعد مدة من الزمن، و t هو الزمن بالسنوات.

- a. مثل الدالة الخاصة بدين هدى بيانيًا.
b. كم سيستغرق دين هدى تقريبًا كي يتضاعف مرتين؟
c. كم سيستغرق دين هدى تقريبًا ليزداد ثلاثة أمثال؟

مسائل مهارات التفكير العليا

60. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي ينبغي أن تراعيه عند استخدام النماذج اللوغاريتمية لاتخاذ القرارات؟

61. **براهين** ليكن $y = \log_b x$ حيث b و x و y أعداد حقيقية. يمكن أن يوجد الصفر في المجال أحيانًا أو دائمًا أو يمكن ألا يوجد مطلقًا. علّل إجابتك.

62. **تحليل الخطأ** تقول سعاد أن التمثيلات البيانية لجميع الدوال اللوغاريتمية تقطع المحور الرأسي y في النقطة (0, 1) لأن أي عدد يرفع إلى القوة صفر يساوي 1. ولكن شيخة تخالفها الرأي. فهل أيّ منهما محقة؟ اشرح استنتاجك.

63. **التبرير** قارن دون استخدام الآلة الحاسبة $\log_7 51$ و $\log_8 61$ و $\log_9 71$. أيّها أكبر؟ اشرح استنتاجك.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لوغاريتمية بالصورة $y = \log_b x$ لكل من الشروط التالية.

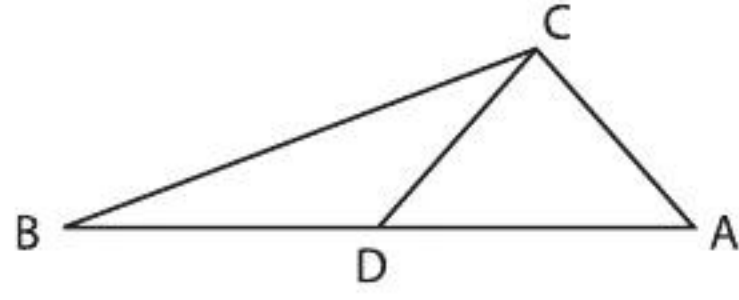
- a. y يساوي 25.
b. y سالب.
c. y بين 0 و 1.
d. x يساوي 1.
e. x يساوي 0.

65. **تحليل الخطأ** يوجد ناصر ويوسف قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

يوسف	ناصر
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$\frac{1^y}{7} = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

66. **الكتابة في الرياضيات** أحد تحويلات $\log_{10} x$ هو $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$. اشرح عملية التمثيل البياني لهذا التحويل.

تمرين على الاختبار المعياري



69. إذا كان $4x = 2 - y$ و $6x - 3y = 30$ جد $y + x$.

- A -4
- B -2
- C 2
- D 4

67. لديك مستطيل طووله يساوي مثلي عرضه. فإذا كان عرض المستطيل 3 m، فكم تساوي مساحته بالامتار المربعة؟

- A 9
- B 12
- C 15
- D 18

68. SAT/ACT لدى طارق بعض البيتزا. وقد باع 40% أكثر من الشرائح التي أكلها. فإذا كان قد باع 70 شريحة من البيتزا، فكم عدد الشرائح التي أكلها؟

- | | |
|------|-------|
| F 25 | J 98 |
| G 50 | K 100 |
| H 75 | |

مراجعة شاملة

حلّ كل من أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

70. $y = 3x - 4$
 $y = -2x + 16$

71. $2x + 5y = 1$
 $6y - 5x = 16$

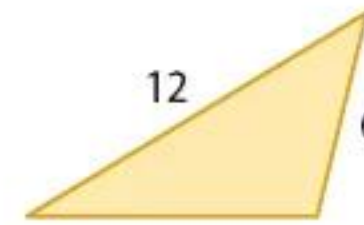
72. $4x + 3y = -30$
 $3x - 2y = 3$

جد قيمة كل دالة.

75. $f(x) = 3x^2 + x$ إذا كان $f(4)$

74. $f(x) = -4x^2 + x - 8$ إذا كان $f(-2)$

73. $f(x) = x^2 - 4x + 12$ إذا كان $f(3)$



76. سؤال هندسي تعطى مساحة مثلث أطوال أضلاعه a و b و c بالعلاقة

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ، حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. إذا كانت أطوال أضلاع 6 و 9 و 12، فما مساحة المثلث معبراً عنها بصورة جذرية؟

77. سؤال هندسي يمكن كتابة حجم صندوق مستطيل بالصيغة $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ حيث الارتفاع يساوي $x + 2$.

a. ما طول الصندوق وما عرضه؟

b. هل ستكون نسبة أبعاد الصندوق هي نفسها على الدوام بغض النظر عن قيمة x؟ اشرح.

78. ميكانيك السيارات يعمل عمر مديراً للمخزون في أحد محالّ الصيانة المحلية. يطلب عمر 6 بطاريات و 5 علب شمعات احتراق و عشرين زوجاً من شفرات الماسحات ويدفع مقابل ذلك مبلغ AED 830. ويطلب 3 بطاريات و 7 علب شمعات احتراق و أربعة أزواج من شفرات الماسحات ويدفع مقابل ذلك مبلغ AED 820. سعر البطاريات أقل بـ AED 22 من مثلي سعر عشر شفراتٍ للماسحات. استخدم مصفوفاتٍ ممتدة لتحديد كلفة كل مادة.

مراجعة المهارات

حلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثمّ تحقق من حلك.

79. $9^x = \frac{1}{81}$

80. $2^{6x} = 4^{5x+2}$

81. $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$

82. $9^{x^2} \leq 27^{x^2-2}$



مختبر تقنية التمثيل البياني اختيار النموذج الأمثل

1-1

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

يمكننا إيجاد الدوال الأسية واللوغاريتمية ذوات الملائمة الأفضل باستخدام
حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus.

النشاط

الكثافة السكانية في الولايات المتحدة الأمريكية			
عدد السكان في الميل المربع	العام	عدد السكان في	العام
21.5	1900	4.5	1790
26.0	1910	6.1	1800
29.9	1920	4.3	1810
34.7	1930	5.5	1820
37.2	1940	7.4	1830
42.6	1950	9.8	1840
50.6	1960	7.9	1850
57.5	1970	10.6	1860
64.0	1980	10.9	1870
70.3	1990	14.2	1880
80.0	2000	17.8	1890

المصدر: معهد نورث إيست ميد إيست

لقد تغير تعداد السكان في الميل المربع في الولايات المتحدة بصورة كبيرة خلال بضعة أعوام. يبين الجدول عدد السكان في الميل المربع لعدة أعوام.

a. استخدم حاسبة تمثيل بياني لإدخال البيانات. ثم ارسم مخطط تشتت يعرض كيفية ارتباط عدد السكان في الميل المربع الواحد بالعام.

الخطوة 1 أدخل العام في L1 وعدد السكان في الميل المربع في L2.

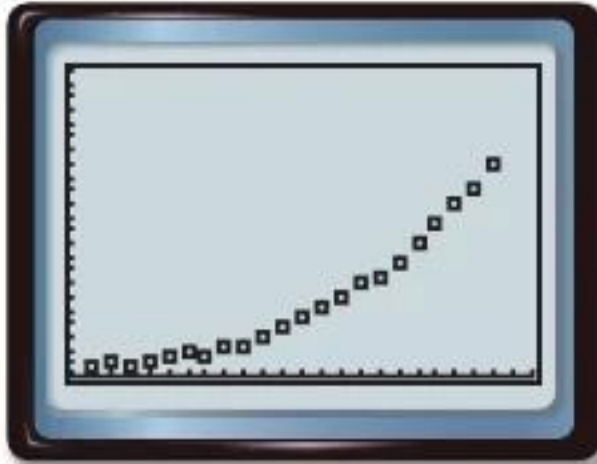
خطوات العملية على الحاسبة:

تحقق من مسح القائمة = Y. استخدم المفتاح $\blacktriangleright$ لتحريك المؤشر من L1 إلى L2.

الخطوة 2 ارسم مخطط الانتشار.

خطوات العملية على الحاسبة:

تحقق من تفعيل Plot 1. ومن اختيار مخطط الانتشار، ومن كون Xlist عند L1. ومن كون Ylist عند L2.



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5

الخطوة 3 جد معادلة انحدار.

لإيجاد معادلة ثلاث البيانات بالصورة الفضلى، استخدم سمة الانحدار في الحاسبة. وادرس الانحدارات المتعددة لتحديد النموذج الأفضل.

تذكر أن الحاسبة ترجع معامل الارتباط r ، والذي يستخدم للإشارة إلى مدى حسن ملائمة النموذج للبيانات. وكلما كان r أقرب إلى 1 أو إلى -1، كلما كانت الملاءمة أفضل.

الانحدار الخطي والانحدار التربيعي

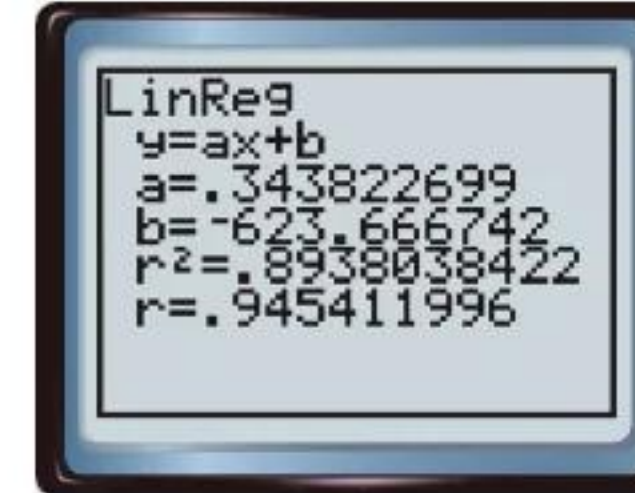
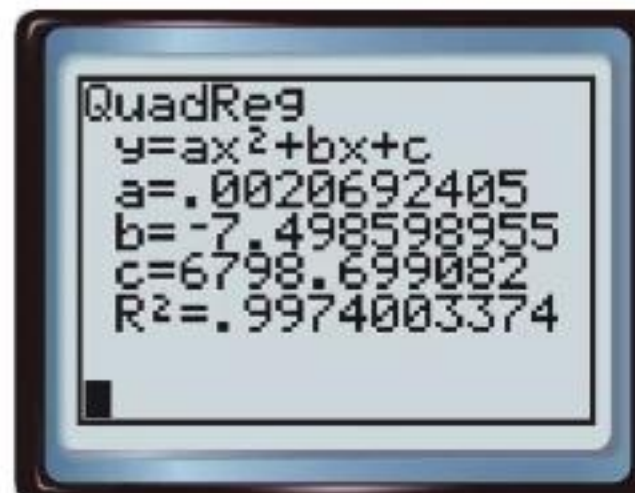
خطوات العملية على الحاسبة: STAT $\blacktriangleright$ 5 ENTER

خطوات العملية على الحاسبة: STAT $\blacktriangleright$ 4 ENTER

$$r^2 = 0.9974003374$$

$$r = \sqrt{0.9974003374}$$

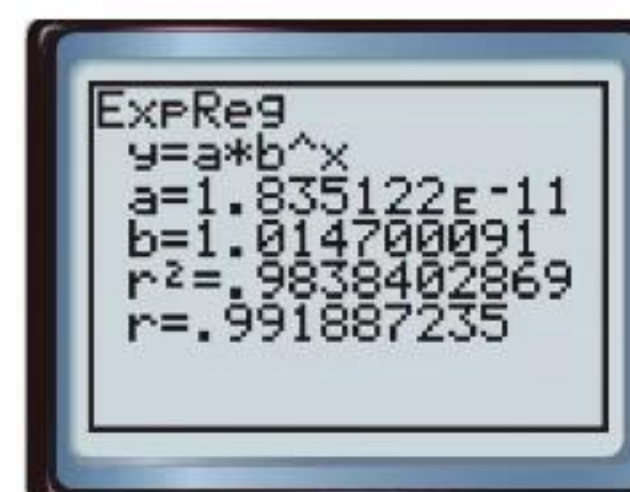
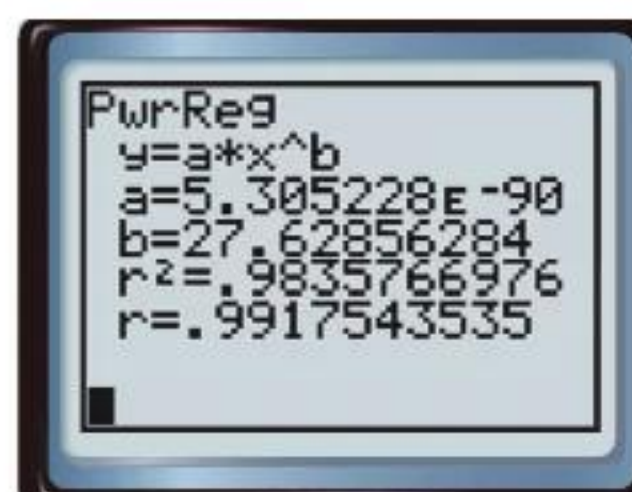
$$r \approx 0.9986993228$$



الانحدار الأسّي

انحدار القوة

خطوات العملية على الحاسبة: **STAT** **▶** **0** **ENTER** **STAT** **▶** **ALPHA** **[A]** **ENTER** خطوات العملية على الحاسبة:

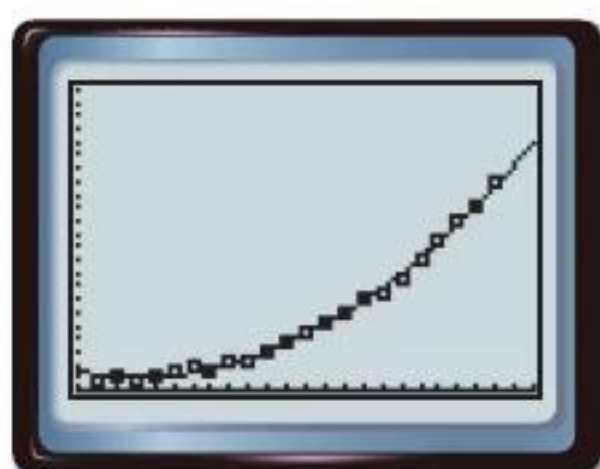


قارن قيم r .

خطي: 0.945411996
أسّي: 0.991887235

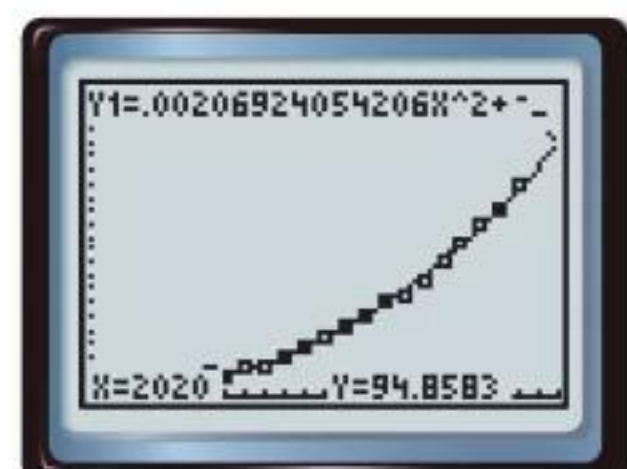
تربيعي: 0.9986993228
قوة: 0.9917543535

إن قيمة r الخاصة بالانحدار التربيعي أقرب إلى 1. ولذلك يبدو أنه يمثل البيانات بالصورة الفضلى. ويمكنك دراسة المعادلة بالنظر عبر التمثيل البياني لمعادلة الانحدار بواسطة مخطط التشتت.



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5

خطوات العملية على الحاسبة: **STAT** **▶** **5** **ENTER** **Y=** **VARS** **5** **▶** **▶** **1** **GRAPH**



[1780, 2020] scl: 10 by [0, 115] scl: 5

b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم سيبلغ تعداد السكان في الميل المربع عام 2020؟

لتحديد تعداد السكان في الميل المربع عام 2020، جد قيمة y عند $x = 2020$.

خطوات العملية على الحاسبة: **2nd** **[CALC]** **ENTER** 2020

إذا استمر هذا الاتجاه، سيكون هنالك قرابة 94.9 شخصاً في الميل المربع.

تمارين

بالنسبة للتمارين 1-5، أودع محمود 50 AED في أحد الحسابات، ثم نسي الأمر ولم يقم بأي عمليات إيداع أو سحب. يبين الجدول الرصيد في الحساب لقعدة أعوام.

الرصيد	الزمن المنقضي (أعوام)
AED 50.00	0
AED 55.80	2
AED 64.80	4
AED 83.09	6
AED 101.40	8
AED 123.14	10
AED 162.67	12

1. استخدم حاسبة تمثيل بياني لرسم مخطط تشتت للبيانات.
2. احسب منحنى للملاءمة ومثله بيانياً باستخدام انحدار أسّي.
3. اكتب معادلة الملاءمة الفضلى. ما هما المجال والمدى؟
4. بناءً على النموذج، كم سيبلغ رصيد الحساب بعد 25 عامًا؟
5. هل النموذج الأسّي هو نموذج الملاءمة الأفضل للبيانات؟ اشرح.
6. **حان دورك!** أكتب معادلة يمكن الإجابة عليها عبر دراسة بيانات نموذج لوغاريتمي. واختر أولاً موضوعاً ثم اجمع البيانات ذات الصلة عبر البحث في شبكة الإنترنت أو عبر إجراء استطلاع. وبعد ذلك، صمّم مخطط تشتت وجد معادلة انحدار لبياناتك. ثم أجب عن سؤالك.

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1-2

لماذا؟

الحالي

السابق

توثق الدائرة الوطنية للأرصاد الجوية كل عام 1000 إعصار تقريباً في الولايات المتحدة. وتقاس شدة الإعصار على مقياس فوجيتا. وتقسم الأعاصير إلى ست فئات تبعاً لسرعة الرياح وطول المسار وعرضه إضافة إلى الضرر المترتب عن الإعصار.

1 حل المعادلات اللوغاريتمية.
2 حل المتباينات اللوغاريتمية.

جاءت قيم تعابير لوغاريتمية.

نوع الأضرار	سرعة الرياح (mph)	مقياس فوجيتا (F)
المداخل، الأغصان	72-40	F-0 عاصفة
انقلاب المنازل المتحركة	112-73	F-1 إعصار متوسط
تمزق الأسقف	157-113	F-2 عالي
اقتلاع الأشجار	206-158	F-3 شديد
تسوية المنازل بالأرض، تطاير السيارات	260-207	F-4 مدمر
تطاير المنازل	318-261	F-5 هائل
لم يسبق أن سُجِّل أي إعصار من هذا المستوى	379-319	F-6 رهيب

1 حل المعادلات اللوغاريتمية إن المعادلة اللوغاريتمية تضم لوغاريتمًا واحدًا أو أكثر. ويمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لمساعدتك في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 1 حل المعادلة اللوغاريتمية

حل المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

$$\log_{36} x = \frac{3}{2}$$

المعادلة الأصلية

$$x = 36^{\frac{3}{2}}$$

تعريف اللوغاريتم

$$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$$

$36 = 6^2$

$$x = 6^3 = 216$$

قوة القوة

تمرين موجّه

حل كل من المعادلات التالية.

1A. $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B. $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

استخدم الخاصية التالية لحل معادلات لوغاريتمية تضم لوغاريتمات متماثلة الأساس على الطرفين.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان b عددًا موجبًا لا يساوي 1، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$. وإذا كان $x = 8$ ، فإن $\log_5 x = \log_5 8$.

المفردات الجديدة
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

مثال 2 على الاختبار المعياري حل المعادلة اللوغاريتمية

حلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 B -1 C 2 D 4

قراءة فقرة الاختبار

إنك بحاجة إلى إيجاد x للمعادلة اللوغاريتمية.

حلّ فقرة الاختبار

$$\begin{aligned} \log_2 (x^2 - 4) &= \log_2 3x && \text{المعادلة الأصلية} \\ x^2 - 4 &= 3x && \text{خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية} \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 && \text{ب طرح } 3x \text{ من كل طرف} \\ (x - 4)(x + 1) &= 0 && \text{ب التحليل إلى العوامل} \\ x - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 1 = 0 && \text{خاصية ناتج الضرب بصفر} \\ x = 4 &\quad x = -1 && \text{بحلّ كل معادلة} \end{aligned}$$

التحقق عوّض كل قيمة في المعادلة الأصلية.

$$\begin{aligned} x = 4 &\quad x = -1 \\ \log_2 (4^2 - 4) &= \log_2 3(4) && \log_2 [(-1)^2 - 4] = \log_2 3(-1) \\ \log_2 12 &= \log_2 12 \quad \checkmark && \log_2 (-3) = \log_2 (-3) \quad \times \end{aligned}$$

لا يمكن أن يكون مجال دالة لوغاريتمية يساوي 0. إذا $\log_2 (-3)$ غير معرّف و -1 هو حل دخيل. الإجابة هي D.

تمرين موجّه

2. حلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

F -3 G -1 H 5 J 15

نصيحة عند حل الاختبار

التعويض لتوفير الوقت. يمكنك تعويض كل إجابة في الخيارات المعروضة في المعادلة الأصلية إلى أن تتوصل إلى الإجابة التي تعطى إجابة صحيحة.

2 حل المتباينات اللوغاريتمية المتباينة اللوغاريتمية عبارة عن متباينة تضم لوغاريتمات. ويمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في اللوغاريتمات

إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$.

إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$.

وتنطبق هذه الخاصية أيضًا على $\geq$ و $\leq$.

الربط بتاريخ الرياضيات

تشانغ هونغ (ميلادي. 139-78) يعود اختراع أول مقياس معروف للزلازل إلى الصيني تشانغ هونغ عام 132 قبل الميلاد وكان عبارة عن وعاء كبير من النحاس مزود بنواس ثقيل وعدة أذرع تسقط عند حدوث هزة زلزالية. وكان هذا الجهاز يساعد في تحديد اتجاه الزلزال.

مثال 3 حل المتباينة اللوغاريتمية

حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$.

$$\begin{aligned} \log_3 x &> 4 && \text{المتباينة الأصلية} \\ x &> 3^4 && \text{خاصية التباين في اللوغاريتمات} \\ x &> 81 && \text{بسّط} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

حلّ كل متباينة.

3A. $\log_4 x \geq 3$

3B. $\log_2 x < 4$

يمكن استخدام الخاصية التالية لحل متباينات لوغاريتمية تضم لوغاريتمات متماثلة الأساس على الطرفين. استبعد من حلك مجموعة القيم التي تؤدي إلى أخذ لوغاريتم عدد أقل من أو يساوي الصفر في المعادلة الأصلية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ ويكون $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$

وتنطبق هذه الخاصية أيضًا على $\geq$ و $\leq$.

مثال 4 حلّ متباينات تضم لوغاريتمات في كل طرف

حلّ المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$.

$$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$$

المتباينة الأصلية

$$x + 3 > 2x + 1$$

خاصية التباين في اللوغاريتمات

$$2 > x$$

اطرح 1 من كل طرف

استبعد قيم x التي تحقق $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ، فإن $x > -3$ و $x > -\frac{1}{2}$ و

$x < 2$. مجموعة الحل هي $-\frac{1}{2} < x < 2$ أو $(-\frac{1}{2}, 2)$.

تمرين موجّه

4. حلّ المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، وتحقق من حلك.

التحقق من فهمك

حلّ كل من المعادلات التالية.

$$1. \log_8 x = \frac{4}{3}$$

$$2. \log_{16} x = \frac{3}{4}$$

3. الاختيار من متعدد جد حلّ $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 3x$

مثال 2

A 10

B 2

C 5

D 2, 5

حلّ كل من المتباينات التالية.

$$4. \log_5 x > 3$$

$$5. \log_8 x \leq -2$$

$$6. \log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$$

$$7. \log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 البنية حلّ كل من المعادلات التالية.

$$8. \log_{81} x = \frac{3}{4}$$

$$9. \log_{25} x = \frac{5}{2}$$

$$10. \log_8 \frac{1}{2} = x$$

$$11. \log_6 \frac{1}{36} = x$$

$$12. \log_x 32 = \frac{5}{2}$$

$$13. \log_x 27 = \frac{3}{2}$$

$$14. \log_3 (3x + 8) = \log_3 (x^2 + x)$$

$$15. \log_{12} (x^2 - 7) = \log_{12} (x + 5)$$

$$16. \log_6 (x^2 - 6x) = \log_6 (-8)$$

$$17. \log_9 (x^2 - 4x) = \log_9 (3x - 10)$$

$$18. \log_4 (2x^2 + 1) = \log_4 (10x - 7)$$

$$19. \log_7 (x^2 - 4) = \log_7 (-x + 2)$$

العلوم تُعطي معادلة سرعة الرياح w ، بالميل في الساعة، بالقرب من مركز إعصار بالعلاقة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d هي المسافة التي يقطعها الإعصار.

20. اكتب المعادلة بالصورة الأسية.

21. ضرب إعصار عام 1999 مدينة أوكلاهوما بريح هي الأسرع على الإطلاق. فإذا قطع الإعصار 525 mph. قُدِّر سرعة الرياح بالقرب من مركز الإعصار.

حلّ كل من المتباينات التالية.

22. $\log_6 x < -3$

23. $\log_4 x \geq 4$

24. $\log_3 x \geq -4$

25. $\log_2 x \leq -2$

26. $\log_5 x > 2$

27. $\log_7 x < -1$

28. $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

29. $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

30. $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

31. $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$

32. $\log_{11} (3x - 24) \geq \log_{11} (-5x - 8)$

33. $\log_9 (9x + 4) \leq \log_9 (11x - 12)$

المثالان 3 و 4

34. **التمثيل بالنماذج** تقاس شدة الزلازل على مقياس لوغاريتمي يدعى مقياس ريختر. وتعطى شدة الزلزال M بالعلاقة $M = \log_{10} x$ ، حيث x تمثل سعة الموجة الزلزالية التي تسبب الحركة الأرضية.

a. كم ضعفًا تزيد السعة الناتجة عن زلزالٍ تقدير شدته 8 على مقياس ريختر عن سعة هزة ارتدادية تقدير شدتها 5 على مقياس ريختر؟

b. كادت مدينة سان فرانسيسكو عام 1906 تُدمر عن بكرة أبيها نتيجةً لزلزالٍ شدته 7.8. وفي عام 1911. حدث زلزالٌ قُدِّر شدته 8.1 على طول صدع نيو مدريد في وادي نهر الميسيسيبي. فكم ضعفًا تزيد شدة زلزال نيو مدريد عن زلزال سان فرانسيسكو؟

35. **الموسيقى** يقابل المفتاح الأول على لوحة مفاتيح البيانو طبقةً صوتيةً ترددها 27.5 دورة في الثانية. ومع كل انتقال إلى المفتاح التالي، صعودًا إلى المفاتيح السوداء وهبوطًا إلى البيضاء، تضرب طبقة الصوت بـ 2. ثابته. يعطى قانون حساب تردد طبقة الصوت الصادر

عند العزف على المفتاح ذي الترتيب n على اللوحة الموسيقية من خلال العلاقة $f = 27.5 \cdot 2^{n/12}$.

a. لنغمة أحد المفاتيح التردد 220 دورة في الثانية. فكم رقم هذا المفتاح على لوحة مفاتيح البيانو؟

b. لطبقة صوتية أخرى على لوحة المفاتيح التردد 880 دورة في الثانية. فبعد كم مفتاح على لوحة المفاتيح توجد هذه الطبقة؟

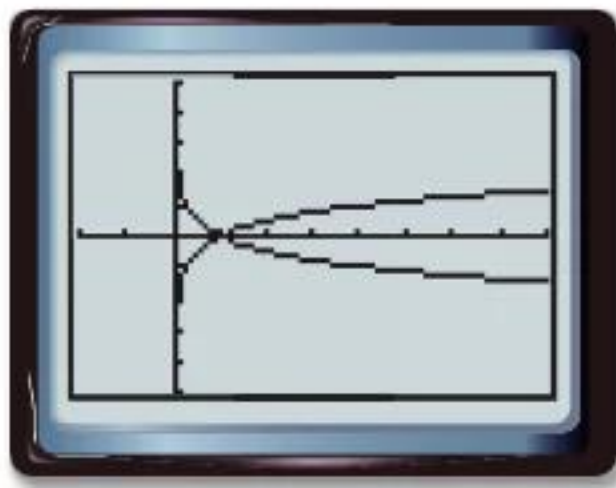
36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف

تستكشف التمثيلين البيانيين الموضحين: $y = \log_4 x$ و $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

a. **سؤال تحليلي** ما وجه المقارنة بين التمثيلين البيانيين؟ وما وجه المقارنة بين الخطين المقاربتين ونقاط التقاطع مع المحور الأفقي x في التمثيلين البيانيين؟

b. **سؤال لفظي** صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين.

c. **التمثيل البياني** استخدم ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية لمقارنة التمثيل البياني لكل دالة ومقابلته مع التمثيل البياني للدالة $y = \log_4 x$.



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

1. $y = \log_4 x + 2$

2. $y = \log_4 (x + 2)$

3. $y = 3 \log_4 x$

d. **سؤال تحليلي** صف العلاقة بين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ واذكر مجالاً ومدى معقولين لكل دالة.

e. **سؤال تحليلي** اكتب معادلةً لدالة تمثيلها البياني هو التمثيل البياني لـ $y = \log_3 x$ مزاحًا 4 وحداتٍ إلى الجهة اليسرى ووحدةً واحدةً إلى الأعلى.

37 الصوت تعطى العلاقة بين شدة الصوت I وعدد وحدات الديسيبل β من خلال $\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$ حيث I تمثل شدة الصوت بالواط في المتر المربع.

عدد وحدات الديسيبل	شدة الصوت	الصوت
0	100	رنة الإبرة
1	101	التنفس الطبيعي
6	106	آلة جفيف الملابس
10	1010	قطار الأنفاق
12	1012	الألعاب النارية

- a. جد عدد وحدات الديسيبل لصوت شدته واطاً واحداً في المتر المربع.
- b. جد عدد وحدات الديسيبل لصوت شدته 10^{-2} واطاً في المتر المربع.
- c. تساوي شدة صوت مقدارها واطاً واحداً في المتر المربع 100 ضعف من شدة صوت مقدارها 10^{-2} واطاً في المتر المربع. فلماذا لا توازي ذلك زيادة في عدد وحدات الديسيبل مقدارها 100 ضعف؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38. النقد يحلّ سالم وجمال $\log_3 x \geq -3$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

جمال	سالم
$\log_3 x \geq -3$	$\log_3 x \geq -3$
$x \leq 3^{-3}$	$x \geq 3^{-3}$
$0 < x \leq \frac{1}{27}$	$x \geq \frac{1}{27}$

39. التحدي جد $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$.

40. التبرير تنص خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية أنه عندما يكون $b > 1$. فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. فما هو الحال عندما $0 < b < 1$ ؟ اشرح استنتاجك.

41. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية ارتباط مجال الدوال اللوغاريتمية ومداهما بمجال الأسية ومداهما.

42. سؤال غير محدد الإجابة أعط مثلاً لمعادلة لوغاريتمية لا حل لها.

43. التبرير اختر مصطلحاً مناسباً. وشرح استنتاجك. جميع المعادلات اللوغاريتمية لها الصورة $y = \log_b x$.

- a. إذا كان أساس معادلة لوغاريتمية أكبر من 1 وكانت قيمة x بين 0 و 1، فإن قيمة y (أصغر، أكبر، تساوي) 0.
- b. إذا كان أساس معادلة لوغاريتمية بين 0 و 1 وكانت قيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y (أصغر من، أكبر من، تساوي) 0.
- c. هناك (حلّ معدومة، حلّ وحيد، عدد لا نهائي من الحلول) لـ $y = \log_b 0$.
- d. هناك (حلّ معدومة، حلّ وحيد، عدد لا نهائي من الحلول) لـ $y = \log_b 1$.

44. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في أن لأي دالة لوغاريتمية صيغتها $y = \log_b x$ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x هي (0,1) دون أن تكون لها أي نقطة تقاطع مع المحور الرأسي y .

تمرين على الاختبار المعياري

45. جد قيمة x إذا كان $\frac{6.4}{x} = \frac{4}{7}$.

- A 3.4
B 9.4
C 11.2
D 44.8

46. يعرض الجدول الهطول المطري الشهري خلال جزء من العام.

الشهر	الهطول المطري (in.)
أبريل	3.60
مايو	5.15
يونيو	5.35
يوليو	3.18
أغسطس	3.83

جد الهطول المطري الوسطي

- F 4.25 in. H 3.83 in.
G 4.22 in. J 3.60 in.

47. مُنحت خديجة زيادةً في الراتب بنسبة 10% لـ 3 سنوات متتالية. فكم بلغ راتبها بعد الزيادات الثلاث إذا كان راتبها الابتدائي AED 12,000 في العام؟

- A AED 14,520
B AED 15,972
C AED 16,248
D AED 16,410

48. SAT/ACT بحوزة أحد الباعة 14 بالونًا مملوءًا بالهيليوم للبيع: 9 من البالونات صفراء، و 3 حمراء و 2 خضراوان. اختير بالون عشوائي وبيع. فإذا كان لون البالون المباع أصفر، فما احتمال أن يكون البالون التالي، والمختار عشوائيًا، أصفر أيضًا؟ J

- F $\frac{1}{9}$ H $\frac{36}{91}$ K $\frac{9}{14}$
G $\frac{1}{8}$ J $\frac{8}{13}$

مراجعة شاملة

جد قيمة كل تعبير. (الدرس 1-1)

49. $\log_4 256$ 50. $\log_2 \frac{1}{8}$ 51. $\log_6 216$
52. $\log_3 27$ 53. $\log_5 \frac{1}{125}$ 54. $\log_7 2401$

55. **السفر** ترافق وفاء النادي الإماراتي إلى كوستاريكا. حيث تشتري 10 شيكاتٍ سياحيةٍ من الفئات AED 20 و AED 50 و AED 100 مجموعها AED 370. فإذا علمت أن بحوزتها عددًا متساويًا من الشيكات التي فئتها AED 20 و AED 50. فكم عدد كل نوعٍ من أنواع الشيكات السياحية التي معها؟

56. **الشحن** يزيد ارتفاع أسطوانة شحن البضائع 4 أقدام عن نصف قطرها. فإذا كان حجم الأسطوانة $5\pi \text{ ft}^3$. فكم طولها؟ استخدم الصيغة $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

57. **علم الآثار** تُنصب شبكة إحدائية فوق حفرة للتنقيب عن الآثار لتحديد موقع الآثار. وقد كشف جزئيًا عن ثلاث من زوايا أحد المباني عند النقاط $(-1, 6)$ و $(4, 5)$ و $(-2, -1)$. فإذا كان قياس كل مربع في الشبكة يساوي قدمًا مربعة واحدة، فقدر مساحة أرضية المبنى.



58. **الفن** يُسمح لرنّا أن تنفق مبلغًا لا يزيد عن AED 225 لتوريد فراش وألوانٍ إلى نادي الفنون. وهي بحاجة على الأقل إلى 20 فرشاة و 56 علبة ألوان. مثل بيانها المنطقة التي تعبّر عن عدد الصناديق التي يمكن شراؤها من كل مادة.

مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغير يساوي صفر.

59. $x^5 \cdot x^3$ 60. $a^2 \cdot a^6$ 61. $(2p^2n)^3$
62. $(3b^3c^2)^2$ 63. $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ 64. $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-1 إلى 1-2

جد قيمة كل من التعابير الآتية. (الدرس 1-1)

5. $\log_4 32$

6. $\log_5 5^{12}$

7. $\log_{16} 4$

8. اكتب $\log_9 729 = 3$ بالصورة الأسية. (الدرس 1-1)

حلّ كل معادلة أو متباينة في ما يلي. وتحقق من صحة الحل.
(الدروس 1-2)

9. $\log_4 x = \frac{3}{2}$

10. $\log_7 (-x + 3) = \log_7 (6x + 5)$

11. $\log_2 x < -3$

12. $\log_8 (3x + 7) = \log_8 (2x - 5)$

مثّل كل دالة بيانياً. أذكر المجال والمداى. (الدرس 1-1)

1. الاختيار من متعدد جد قيمة x في المعادلة $\log_3 (x^2 + 2x) = \log_3 (x + 2)$ (الدرس 1-1)

$x = -2, 1$ F

$x = -2$ G

$x = 1$ H

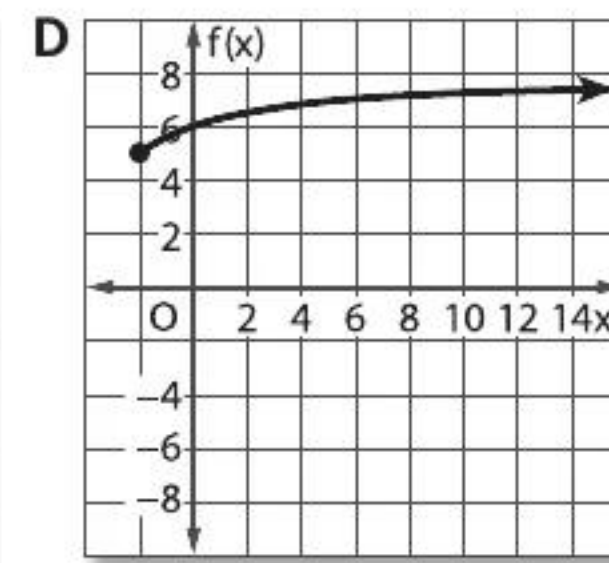
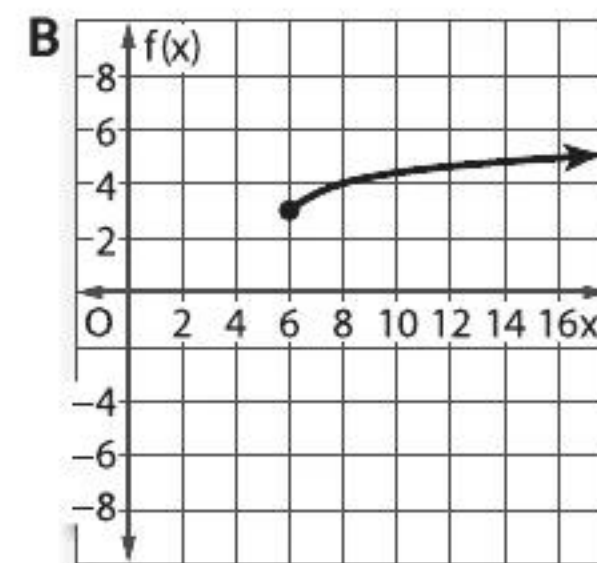
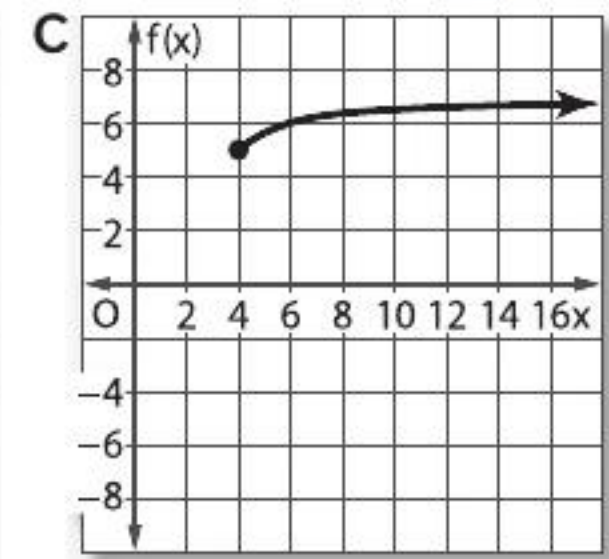
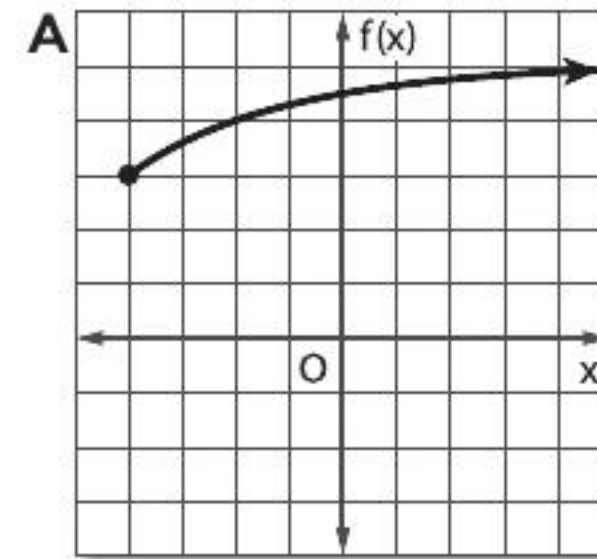
J لا يوجد حل

مثّل كل دالة بيانياً. (الدرس 1-1)

2. $f(x) = 3 \log_2 (x - 1)$

3. $f(x) = -4 \log_3 (x - 2) + 5$

4. الاختيار من متعدد أيّ من التمثيلات البيانية المبينة أدناه هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_3 (x + 5) + 3$ ؟
(الدرس 1-1)



خواص اللوغاريتمات

1-3

الدرس

مستوى درجة الحموضة	ناتج الضرب
2.1	عصير الليمون
3.5	الملفوف الخلل
4.2	الطماطم
5.0	القهوة السوداء
6.4	الحليب
7.0	الماء النقي
7.8	البيض
10.0	حليب المغنيسيا

لماذا:

إن مستوى الحموضة في الطعام هامٌ بالنسبة لبعض المستهلكين ذوي المعدة الحساسة. وتميل معظم الأطعمة التي تتناولها إلى الحموضة أكثر من الأساسية. يقيس مقياس درجة الحموضة الحموضة؛ حيث يشير انخفاض مستوى pH إلى أن الوسط حمضي، بينما يشير ارتفاعها إلى أن الوسط أساسي. وهذا المقياس مثالٌ عن المقاييس اللوغاريتمية القائمة على قوى العدد عشرة. للقهوة السوداء درجة حموضة pH تساوي 5، بينما يملك الماء الحيادي درجة الحموضة 7. وتنفق حموضة القهوة السوداء حموضة الماء المحايد بمائة ضعف، وذلك لأن $10^2 = 10^7 - 5$ أو 100.

الحالي:

1 تبسيط التعابير وإيجاد قيمها باستخدام خواص اللوغاريتمات.
2 حل معادلات لوغاريتمية باستخدام خواص اللوغاريتمات.

السابق:

لقد وجدت قيم تعابير لوغاريتمية وحللت معادلات لوغاريتمية.

1 خواص اللوغاريتمات نظرًا إلى أن اللوغاريتمات هي أسس، فيمكن اشتقاق خواصها من خواص الأسس. يمكن اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية ضرب الأسس.

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

المفهوم الأساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

الشرح إن لوغاريتم ناتج الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.
الرموز لجميع الأعداد الموجبة a و b و x ، حيث $x \neq 1$ ، يكون $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.
مثال $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

ولتوضيح صحة هذه الخاصية، ليكن لديك $b^x = a$ و $b^y = c$. إذا، باستخدام تعريف اللوغاريتم، يكون $x = \log_b a$ و $y = \log_b c$.

بالتعويض
ناتج ضرب الأسس
خاصية التباين في اللوغاريتمات
خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
بإستبدال x بـ $\log_b a$ و y بـ $\log_b c$.
يمكنك استخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقدير التعابير اللوغاريتمية تقريبًا.

مثال 1 استخدام خاصية الضرب

استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقدير تقريبًا قيمة $\log_4 192$.

بإستبدال 192 بـ 64×3 أو $4^3 \times 3$.
خاصية الضرب
خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
بإستبدال $\log_4 3$ بـ 0.7925.

$$\begin{aligned}\log_4 192 &= \log_4 (4^3 \times 3) \\ &= \log_4 4^3 + \log_4 3 \\ &= 3 + \log_4 3 \\ &\approx 3 + 0.7925 \text{ or } 3.7925\end{aligned}$$

تمرين موجّه

1. استخدم $\log_4 2 = 0.5$ لتقدير تقريبًا قيمة $\log_4 32$.

تذكر أنه يتم إيجاد ناتج قسمة القوى عبر طرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات مشابهة لذلك أيضًا. ليكن $b^x = a$ و $b^y = c$. وبالتالي $\log_b a = x$ و $\log_b c = y$

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$$

$$b^{x-y} = \frac{a}{c}$$

$$\log_b b^{x-y} = \log_b \frac{a}{c}$$

$$x - y = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

خاصية القسمة

خاصية المساواة في المعادلات اللوغاريتمية

خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات

بإستبدال x بـ $\log_b a$ و y بـ $\log_b c$.

المفهوم الأساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمي البسط والمقام.

الرموز لكل الأعداد الموجبة a و b و x ، حيث $x \neq 1$.

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثال $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام خاصية القسمة

العلوم تعرف درجة الحموضة pH لمادة على أنها تركيز شوارد الهيدروجين $[H^+]$ بالمول. وهي تعطى من خلال الصيغة $pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$. جد كمية الهيدروجين الموجودة في لتر واحد من المطر الحمضي الذي درجة حموضته pH تساوي 4.2.

الاستيعاب لديك الصيغة الخاصة بإيجاد درجة الحموضة pH ولديك درجة حموضة المطر. وأنت بحاجة لإيجاد كمية الهيدروجين الموجودة في لتر من هذا المطر.

التخطيط اكتب المعادلة، ثم حلّها لإيجاد $[H^+]$.

$$pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$$

المعادلة الأصلية

جد حلّ

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$$

بتعويض 4.2 بدلاً من pH.

$$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} H^+$$

خاصية القسمة

$$4.2 = 0 - \log_{10} H^+$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$4.2 = -\log_{10} H^+$$

بسّط.

$$-4.2 = \log_{10} H^+$$

بضرب كل طرف بـ -1.

$$10^{-4.2} = H^+$$

تعريف اللوغاريتم

هناك $10^{-4.2}$ ، أو حوالي 0.000063 مولاً من الهيدروجين في اللتر الواحد من المطر.

$$4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$$

$$pH = 4.2$$

التحقق

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$$

$$H^+ = 10^{-4.2}$$

$$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$$

خاصية القسمة

$$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$$

بسّط.

$$\checkmark 4.2 = 4.2$$

تمرين موجّه

2. **الصوت** تعطى جهازة الصوت L ، والمقاسة بوحدة الديسيبل، من خلال العلاقة $L = 10 \log_{10} R$ ، والتي فيها R الشدة النسبية للصوت. افترض أن شخصًا يتكلم بشدّة نسبية تساوي 10^6 أو 60 ديسيبل. فكم سيكون صوت 100 شخص أكثر جهازةً علماً أنّ كلّ منهم يتحدث بالشدة نفسها؟



الربط بالحياة اليومية

المطر الحمضي أكثر حموضة من المطر العادي. حيث يتصاعد الدخان والبخار الصادر عن حرق الوقود الأحفوري في الجو ويختلطان مع الرطوبة الموجودة في المطر ليشكّلا المطر الحمضي. وقد يكون المطر الحمضي مسؤولاً عن تآكل التماثيل. كما توضح الصورة المبينة أعلاه.

تذكر أنه يتم إيجاد قوة القوة عبر ضرب الأسس. وخاصية القوة في اللوغاريتمات مشابهة لذلك.

المفهوم الأساسي خاصية القوة في اللوغاريتمات

الشرح	إن لوغاريتم قوة هو ناتج ضرب اللوغاريتم بالقوة.
الرموز	لأي عدد حقيقي p ولأي عددين موجبين m و b حيث $b \neq 1$ يكون $\log_b m^p = p \log_b m$
مثال	$\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

نصيحة دراسية

الأدوات يمكنك التحقق من هذه الإجابة عبر إيجاد قيمة $2^{4.6438}$ على الحاسبة. وينبغي أن تعطيك الحاسبة نتيجة تساوي تقريباً 25. وذلك نظراً لكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ يعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.

مثال 3 خاصية القوة في اللوغاريتمات

لديك $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، جد بصورة تقريبية $\log_2 25$.

$$\begin{aligned} \log_2 25 &= \log_2 5^2 \\ &= 2 \log_2 5 \\ &\approx 2(2.3219) \text{ أو } 4.6438 \end{aligned}$$

استبدل العدد 25 بـ 5^2 .
 خاصية القوة
 استبدل $\log_2 5$ بـ 2.3219.

تمرين موجّه

3. لديك $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، جد على وجه تقريبي قيمة $\log_3 49$.

2 حل المعادلات اللوغاريتمية

يمكنك استخدام خواص اللوغاريتمات لحلّ معادلات تضم لوغاريتمات.

مثال 4 حل المعادلات باستخدام خواص اللوغاريتمات

حلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$.

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x - 9) &= 2 \\ \log_6 x (x - 9) &= 2 \\ x(x - 9) &= 6^2 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \\ (x - 12)(x + 3) &= 0 \\ x - 12 = 0 \text{ or } x + 3 &= 0 \\ x = 12 \quad x = -3 \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
 خاصية الضرب
 تعريف اللوغاريتم
 بطرح 36 من كل طرف.
 بالتحليل إلى العوامل.
 خاصية الضرب بصفر
 بحلّ كلّ معادلة.

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x - 9) &= 2 \\ \log_6 12 + \log_6 (12 - 9) &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 12 + \log_6 3 &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 (12 \times 3) &\stackrel{?}{=} 2 \\ \log_6 36 &\stackrel{?}{=} 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

التحقق
 $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$
 $\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$
 $\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$
 نظراً لكون $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين، فإن -3 حل دخيل.

إذاً الحلّ هو $x = 12$.

تمرين موجّه

4A. $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

4B. $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقدير قيمة كل تعبير مما يلي تقريباً.

1. $\log_4 18$

2. $\log_4 15$

3. $\log_4 \frac{5}{3}$

4. $\log_4 \frac{3}{4}$

الارتفاع (m)	البلد	الجبل
8850	نيبال/التبت	إيفرست
7074	الهند	تريسولي
6872	الأرجنتين/تشيلي	بونيتي
6194	الولايات المتحدة	ماكينلي
5959	كندا	لوغان

مثال 2 5. تسلق الجبال مع زيادة الارتفاع. ينخفض الضغط الجوي للهواء. ويعطى قانون حساب الضغط بناءً على الارتفاع بالعلاقة $a = 15,500 (5 - \log_{10} P)$ حيث a يمثل الارتفاع بالأمتار و P يمثل الضغط بالباسكال (باسكال $1 \text{ psi} \approx 6900$). فما قيمة ضغط الهواء عند القمة بالباسكال لكل من الجبال المدرجة في الجدول على الجهة اليمنى؟

مثال 3 إذا كان لديك $\log_3 5 \approx 1.465$ و $\log_5 7 \approx 1.2091$ ، قدر قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

6. $\log_3 25$

7. $\log_5 49$

مثال 4 حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

8. $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

9. $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

10. $3 \log_2 x = \log_2 8$

11. $\log_{10} a + \log_{10} (a - 6) = 2$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 استخدم $\log_4 2 = 0.5$ ، $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقدير قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

12. $\log_4 30$

13. $\log_4 20$

14. $\log_4 \frac{2}{3}$

15. $\log_4 \frac{4}{3}$

16. $\log_4 9$

17. $\log_4 8$

الشدة	الموقع	العام
8.3	سان فرانسيسكو	1906
8.3	طوكيو، اليابان	1923
7.6	جانشو، الصين	1932
9.5	تشيلي	1960
9.2	ألاسكا	1964
5.6	سان فرانسيسكو	2007

المصدر: TLC

مثال 2 18. العلوم سجل عام 2007 وقوع زلزال بالقرب من سان فرانسيسكو بشدة 5.6 على مقياس ريختر. وكانت شدة زلزال سان فرانسيسكو الشهير الذي وقع عام 1906 8.3.
 a. فبكم تزيد شدة الزلزال الذي وقع عام 1906 عن الزلزال الذي وقع عام 2007؟
 b. صنف ريختر نفسه الزلزال الذي وقع عام 1906 على أن شدته كانت 8.3. ولكن إحدى الدراسات الحديثة أشارت إلى أن شدته كانت على الأرجح 9.7. فما الفرق في الشدتين؟

مثال 3 إذا كان لديك $\log_6 8 \approx 1.1606$ و $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، قدر قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

19. $\log_6 48$

20. $\log_7 81$

21. $\log_6 512$

22. $\log_7 729$

مثال 4 4. المشاركة حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

23. $\log_3 56 - \log_3 n = \log_3 7$

24. $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

25. $5 \log_2 x = \log_2 32$

26. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

27 الاحتمالات أثبت الدكتور فرانك بنفورد في الثلاثينات من القرن الماضي طريقة لتحديد ما إن كانت مجموعة من الأعداد قد اختيرت عشوائيًا أو يدويًا. فإذا لم تُختر مجموعة من الأعداد عشوائيًا، فإن قانون بنفورد المبين بالعلاقة $P = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d}\right)$ يتنبأ باحتمال كون رقم ما d هو الرقم الأول في مجموعة. فعلى سبيل المثال، هناك احتمال يساوي 4.6% بأن يكون العدد الأول هو 9.

a. أعد كتابة القانون لإيجاد العدد إذا أعطيت الاحتمال.

b. جد العدد الذي احتمال اختياره يساوي 9.7%.

c. جد احتمال أن يكون العدد الأول يساوي $(\log_{10} 2 \approx 0.30103)$.

استخدم $\log_5 3 \approx 0.6826$ و $\log_5 4 \approx 0.8614$ لتقدير قيمة كل تعبير على وجه التقريب.

28. $\log_5 40$

30. $\log_5 \frac{3}{4}$

32. $\log_5 9$

34. $\log_5 12$

29. $\log_5 30$

31. $\log_5 \frac{4}{3}$

33. $\log_5 16$

35. $\log_5 27$

حل كل معادلة مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

36. $\log_3 6 + \log_3 x = \log_3 12$

38. $\log_{10} 18 - \log_{10} 3x = \log_{10} 2$

40. $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

37. $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$

39. $\log_7 100 - \log_7 (y + 5) = \log_7 10$

41. $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

حل لإيجاد قيمة n .

42. $\log_a 6n - 3 \log_a x = \log_a x$

43. $2 \log_b 16 + 6 \log_b n = \log_b (x - 2)$

حل كل معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل.

44. $\log_{10} z + \log_{10} (z + 9) = 1$

46. $\log_2 (15b - 15) - \log_2 (-b^2 + 1) = 1$

48. $\log_6 0.1 + 2 \log_6 x = \log_6 2 + \log_6 5$

45. $\log_3 (a^2 + 3) + \log_3 3 = 3$

47. $\log_4 (2y + 2) - \log_4 (y - 2) = 1$

49. $\log_7 64 - \log_7 \frac{8}{3} + \log_7 2 = \log_7 4p$

50. الاستنتاج يعدّ الحوت الأحدب أحد الأنواع المهددة بالانقراض. على فرض أنّ هناك 5000 حوتٍ أهدب على قيد الحياة اليوم، وأنّ تعداد هذه الحيتان يتناقص بنسبة 4% كل عام.

a. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالسنوات بناءً على تعداد الحيتان.

b. كم سنة سيستغرق انخفاض تعداد الحيتان إلى ما دون 1000؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب سنة.

حدد ما إذا كانت كل معادلة صحيحة أم خاطئة.

51. $\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3$

53. $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

55. $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

57. $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

52. $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

54. $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

56. $\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2$

58. $\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$

59. الموكب تعطى معادلة حساب الجهارة L مقدرةً بالديسيبل بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$. حيث R هي الشدّة النسبية للصوت.

a. جد حلّ $R = 10 \log_{10} 120$ لإيجاد الشدّة النسبية لموكب مهرجانٍ جهارته 120 ديسيبل وذلك بناءً على مدى القرب من الموكب.

b. يودّ بعض أولياء الأمور ذوي الأطفال الصغار أن يُخَفَّضَ مستوى الجهارة إلى 80 ديسيبل. فبكم ضعف تكون الشدّة أقل في تلك الحالة؟ بمعنى آخر، جد نسبة الشدّتين.

60. **المعرفة المالية** يبلغ الرصيد المدين للإماراتي في المتوسط على بطاقة الائتمان قرابة AED 8600 وذلك

$$m = \frac{b\left(\frac{r}{n}\right)}{1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}}$$

عند معدّل مئوي سنوي (APR) يساوي 18.3 % يمكن استخدام الصيغة m لحساب الدفعة الشهرية اللازمة لسداد رصيد بطاقة الائتمان b خلال عددٍ محدّدٍ من السنوات t . حيث r يمثّل المعدّل المئوي السنوي و n يمثّل عدد الدفعات في السنة.

a. ما هي الدفعة الشهرية التي ينبغي سدادها لسداد الرصيد المدين خلال ثلاثة سنوات بالضبط؟ وما المبلغ الإجمالي المسدّد؟

الدفعة (m)	عدد السنوات (t)
AED 50	
AED 100	
AED 150	
AED 200	
250 AED	
300 AED	

b. يمكن استخدام المعادلة $t = \frac{\log\left(1 - \frac{br}{mn}\right)}{-n \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$ من أجل حساب عدد السنوات اللازم لجدول سدادٍ ما. انسخ الجدول وأكمله.

c. مثّل بيانيًا المعلومات في الجدول الوارد في القسم b.

d. إذا كنت تستطيع سداد مبلغ AED 100 في الشهر، فهل سيكون بوسعك سداد الرصيد المدين؟ وكم سيستغرق ذلك؟ وإن لم يكون بوسعك سداد، فما السبب؟

e. ما هي الدفعة الصغرى التي يمكن دفعها لسداد الدّين؟

مسائل مهارات التفكير العليا

61. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا لوغاريتميًا لكلّ حالةٍ مما يلي. ثم اكتب التعبير الموسّع.

a. ناتج ضرب وناتج قسمة

b. ناتج ضرب وقوة

c. ناتج ضرب وناتج قسمة وقوة

62. **براهين** استخدم خواص الأسس لإثبات خاصية القوة في اللوغاريتمات.

63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في صحة ما يلي.

a. $\log_b 1 = 0$

b. $\log_b b = 1$

c. $\log_b b^x = x$

64. **التحدي** حوّل العلاقة $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$ لأبسط صورةٍ من أجل إيجاد قيمتها العددية المحدّدة.

65. **أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟** جد التعبير الذي لا ينتمي، مع الشرح.

$$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$$

$$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$$

$$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$$

$$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$$

66. **التبرير** استخدم خواص اللوغاريتمات لإثبات أنّ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

67. **التحدي** حوّل العلاقة $\log_{x^3} 2 - \log_{x^5} 5$ لأبسط صورة لإيجاد قيمتها العددية المحدّدة.

68. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الرابط بين خواص الأسس واللوغاريتمات. واشتمل على أمثلةٍ مشابهةٍ للمثال الوارد في بداية الدرس والذي يوضح خاصية الضرب، ولكن في حالة خاصية القسمة وخاصية القوى في اللوغاريتمات.

تمرين على الاختبار المعياري

69. جد النمط الذي تأخذه البيانات.

22, 11, 12, 23, 7, 6, 17, 15, 21, 19

11 A 16 C

15 B D لا يوجد نمط.

70. SAT/ACT ما الأثر الذي يصيب التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$ ؟

F يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.

G يتضيق التمثيل البياني.

H يتوسع التمثيل البياني عرضاً.

J التمثيل البياني للعلاقة $y = 2x^2$ هو انعكاس للتمثيل البياني للعلاقة $y = 4x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x .

K لا تغيير يصيب التمثيل البياني.

71. إجابة قصيرة:

إذا كان $\ln y = 6.5(1.07)^x$ حيث x يمثل

عدد السنوات منذ عام 2000، و y يمثل العدد التقريبي من ملايين الأمريكيين البالغة أعمارهم 7 سنوات وأكثر، والذين ذهبوا في رحلة للتخييم مرتين أو أكثر في ذلك العام. صف كيف يتغير عدد الأمريكيين الذين يذهبون للتخييم بمرور الزمن مقدراً بالملايين.

72. ما نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل

البياني الخاص بـ $y = 4x^2 - 3x - 1$ ؟

A $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ C -1 و 1

B -1 و $\frac{1}{4}$ D 1 و $-\frac{1}{4}$

مراجعة شاملة

حل كل معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل. (الدرس 1-2)

73. $\log_5 (3x - 1) = \log_5 (2x^2)$

74. $\log_{10} (x^2 + 1) = 1$

75. $\log_{10} (x^2 - 10x) = \log_{10} (-21)$

جد قيمة كل تعبير. (الدرس 1-1)

76. $\log_{10} 0.001$

77. $\log_4 16^x$

78. $\log_3 27^x$

79. الكهرباء يمكن حساب مقدار التيار الكهربائي الذي يستهلكه جهاز ما بالأمبير I باستخدام القانون $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وفيه P هي الاستطاعة بالواط و R هي المقاومة بالأوم. فما مقدار التيار الكهربائي الذي يستهلكه جهاز إذا كانت 120 واطاً و $P = 3$ أوم؟ $R =$ ؟ قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

حدّد ما إن كان كل زوج من الدوال التالية دالتين متعاكستين. اكتب نعم أو لا.

80. $f(x) = x + 73$

$g(x) = x - 73$

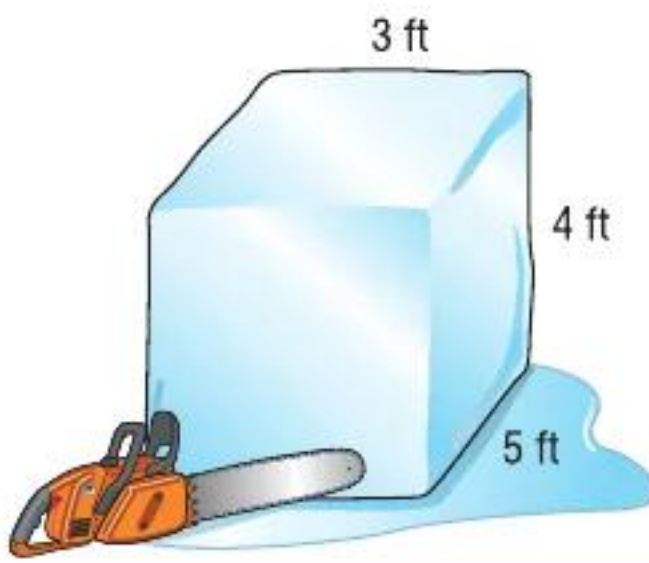
81. $g(x) = 7x - 11$

$h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

82. التّحت يصنع حمد تمثالاً من التّج. حيث يستخدم كتلة من التّج. ويرغب بالتقليل من حجمها عبر اقتطاع الكمية نفسها من الاتجاه الطولي والعرضي ومن الارتفاع. حيث يؤدّ إنقاص حجم كتلة التّج إلى 24 ft^3 .

a. اكتب معادلة كثيرة حدود لتمثيل هذه الحالة.

b. كم ينبغي أن يقطع من كلّ بعد؟



مراجعة المهارات

حل كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثمّ تحقق من صحة الحل.

83. $3^{4x} = 3^{3-x}$

84. $3^{2n} \leq \frac{1}{9}$

85. $3^{5x} \times 81^{1-x} = 9^{x-3}$

86. $49^x = 7^{x^2-15}$

87. $\log_2 (x + 6) > 5$

88. $\log_5 (4x - 1) = \log_5 (3x + 2)$

اللوغاريتمات العادية

1-4

لماذا..

الحالي..

السابق..

عدد ريختر	الشدة
1	10^1 دقيق
2	10^2 خفيف جدًا
3	10^3 خفيف جدًا
4	10^4 خفيف
5	10^5 معتدل
6	10^6 قوي
7	10^7 كبير
8	10^8 عظيم

يستخدم علماء الزلازل مقياس ريختر لقياس قوة الزلازل أو شدتها. وتُحدّد شدة الزلزال باستخدام لوغاريتم اتساع الأمواج الذي تسجله أجهزة رصد الزلازل. يعتمد المقياس اللوغاريتمي الذي يستخدمه مقياس ريختر على قوى 10. فعلى سبيل المثال، فإن زلزال بشدة 6.4 يمكن تمثيله بـ $\log_{10} x = 6.4$.

1 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية.
2 إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية باستخدام قانون تغيير الأساس.

حولت التعابير لأبسط صورة، وحللت المعادلات باستخدام خواص اللوغاريتمات.

1 اللوغاريتمات العادية تبين لك أن الدالة اللوغاريتمية $y = \log_{10} x$ تُستخدم في العديد من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات قوى العدد 10 **باللوغاريتمات العادية**. وتُكتب اللوغاريتمات العادية عادةً دون العدد 10 أسفل اللوغاريتم.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تتضمن معظم الآلات الحاسبة العلمية على الزر **LOG** لإيجاد قيمة اللوغاريتمات العادية.

المفردات الجديدة
لوغاريتم عادي
common logarithm
قانون تغيير الأساس
Change of Base Formula

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

مثال 1 إيجاد اللوغاريتم العادي

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $\log 5$

خطوات العملية على الحاسبة: **LOG** 5 **ENTER** 6989700043.
 $\log 5 \approx 0.6990$

b. $\log 0.3$

خطوات العملية على الحاسبة: **LOG** 0.3 **ENTER** 5228787453.-
 $\log 0.3 \approx -0.5229$

تمرين موجّه

1A. $\log 7$

1B. $\log 0.5$

ترتبط اللوغاريتمات العادية لأعداد تختلف بقوى العدد عشرة الصحيحة، ببعضها بشكل وثيق. تذكر أن اللوغاريتم هو أس. على سبيل المثال في المعادلة $y = \log x$ تكون y هي القوة التي يُرفع إليها 10 للحصول على قيمة x .

$$\begin{array}{lll} \log x = y & \rightarrow & 10^y = x \\ \log 1 = 0 & \rightarrow & 10^0 = 1 \\ \log 10 = 1 & \rightarrow & 10^1 = 10 \\ \log 10^m = m & \rightarrow & 10^m = 10^m \end{array}$$

تُستخدم اللوغاريتمات العادية في قياس الصوت. وتصل الموسيقى المُسجلة الهادئة إلى حوالي 36 ديسيبل (dB).

مثال 2 من الحياة اليومية حل المعادلات اللوغاريتمية

المحركات النفاثة إذا كان غُلو الصوت L ، بالديسيبل، لصوت ما هو $L = 10 \log \frac{I}{m}$ ، حيث I هي شدة الصوت و m هو الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية. فإن السائقين على بعد عدة أميال من مطار يمكنهم سماع الطائرات وهي تُقْلَع عند شدة 66.6 ديسيبل، فكم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في ذلك الصوت، إذا كان m مُعرفاً بأنه 1؟

$$L = 10 \log \frac{I}{m} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$66.6 = 10 \log \frac{I}{1} \quad \text{عوض عن } L \text{ بـ } 66.6 \text{ و } m \text{ بـ } 1.$$

$$6.66 = \log I \quad \text{اقسم كل طرف على 10 وبسط}$$

$$I = 10^{6.66} \quad \text{الصيغة الأسية}$$

$$I \approx 4,570,882 \quad \text{استخدم آلة حاسبة}$$

كان الصوت الذي سمعه السكان يساوي حوالي 4,570,000 مرة من الحد الأدنى لشدة الصوت المسموع بالأذن البشرية.

تمرين موجّه

2. **الزلازل** كمية الطاقة E ، مقدرةً بالأرغ، التي تنبعث من زلزال ما ترتبط بشدة مقياس ريختر M لهذا الزلزال من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد كمية الطاقة المنبعثة من زلزال جزيرة سومطرة عام 2004 الذي كانت شدته 9.0 بمقياس ريختر مما أدى لحدوث تسونامي.

إذا تعذر كتابة طرفي المعادلة الأسية بسهولة في صورة قوى لها نفس الأساس، فإنك تستطيع حل المعادلة عن طريق أخذ اللوغاريتم من كل طرف.

مثال 3 حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

حلّ المعادلة $4^x = 19$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$4^x = 19 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

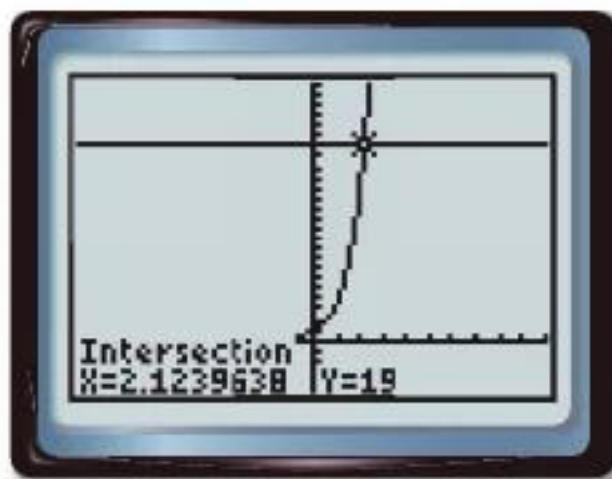
$$\log 4^x = \log 19 \quad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

$$x \log 4 = \log 19 \quad \text{خاصية القوى للوغاريتمات}$$

$$x = \frac{\log 19}{\log 4} \quad \text{اقسم كل طرف على } \log 4$$

$$x \approx 2.1240 \quad \text{استخدم آلة حاسبة}$$

إذاً الحل هو 2.1240 تقريباً.



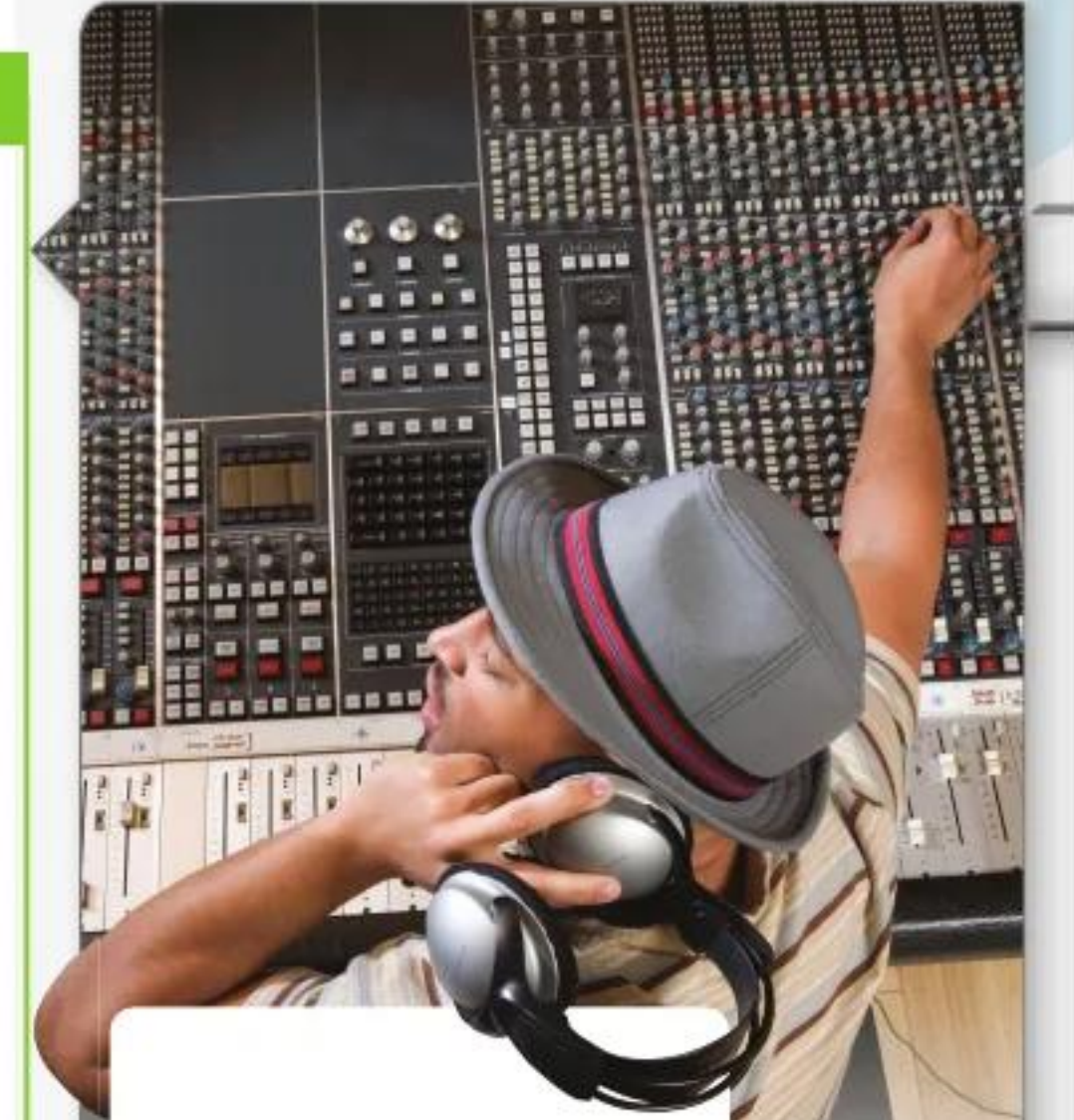
$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-5, 25]$ scl: 1

التحقق يمكنك التحقق من هذه الإجابة بيانياً باستخدام حاسبة التمثيل البياني. مثل المستقيم $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$ ثم استخدم القائمة **CALC** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. إن نقطة التقاطع قريبة جداً من الإجابة التي حصلنا عليها جبرياً. ✓

تمرين موجّه

3A. $3^x = 15$

3B. $6^x = 42$



الربط بالحياة اليومية

مهندس صوتي المهندسون الصوتيون معنيون بحد الأصوات غير المرغوب فيها والتحكم في الضوضاء وعمل الأصوات المفيدة. وتتضمن أمثلة الأصوات المفيدة الأشعة فوق الصوتية، والسونار، واستنساخ الأصوات، ويتطلب العمل في هذا المجال درجة البكالوريوس في الحد الأدنى.

يمكن استخدام نفس الإستراتيجيات المستخدمة في حل المعادلات الأسية لحل المتباينات الأسية.

مثال 4 حل المتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

حلّ المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 3^{5y} &< 7^{y-2} && \text{المتباينة الأصلية} \\ \log 3^{5y} &< \log 7^{y-2} && \text{خاصية التباين في اللوغاريتمات} \\ 5y \log 3 &< (y-2) \log 7 && \text{خاصية القوى للوغاريتمات} \\ 5y \log 3 &< y \log 7 - 2 \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ 5y \log 3 - y \log 7 &< -2 \log 7 && \text{اطرح } y \log 7 \text{ من كل طرف.} \\ y(5 \log 3 - \log 7) &< -2 \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ y &< \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7} && \text{اقسم كل طرف على } 5 \log 3 - \log 7 \\ \{y \mid y &< -1.0972\} && \text{استخدم آلة حاسبة} \end{aligned}$$

التحقق اختبر $y = -2$.

$$\begin{aligned} 3^{5y} &< 7^{y-2} && \text{المتباينة الأصلية} \\ 3^{5(-2)} &\geq 7^{(-2)-2} && \text{عوض عن } y \text{ بـ } -2. \\ 3^{-10} &\geq 7^{-4} && \text{بسّط} \\ \frac{1}{59,049} &< \frac{1}{2401} && \text{خاصية الأس السالب} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

حلّ كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B. $4^y < 5^{2y+1}$

نصيحة دراسية

حل المتباينات

تذكر أن اتجاه المتباينة يجب تبديله إذا كان كل طرف مضروبًا أو مقسومًا على عدد سالب. بما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فإن المتباينة لن تتغير.

2 قانون تغيير الأساس

يسمح **قانون تغيير الأساس** لك بكتابة التعبيرات اللوغاريتمية المكافئة التي تختلف في الأساس.

مفهوم أساسي قانون تغيير الأساس

الرموز لكل الأعداد الموجبة a ، و b ، و n ، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

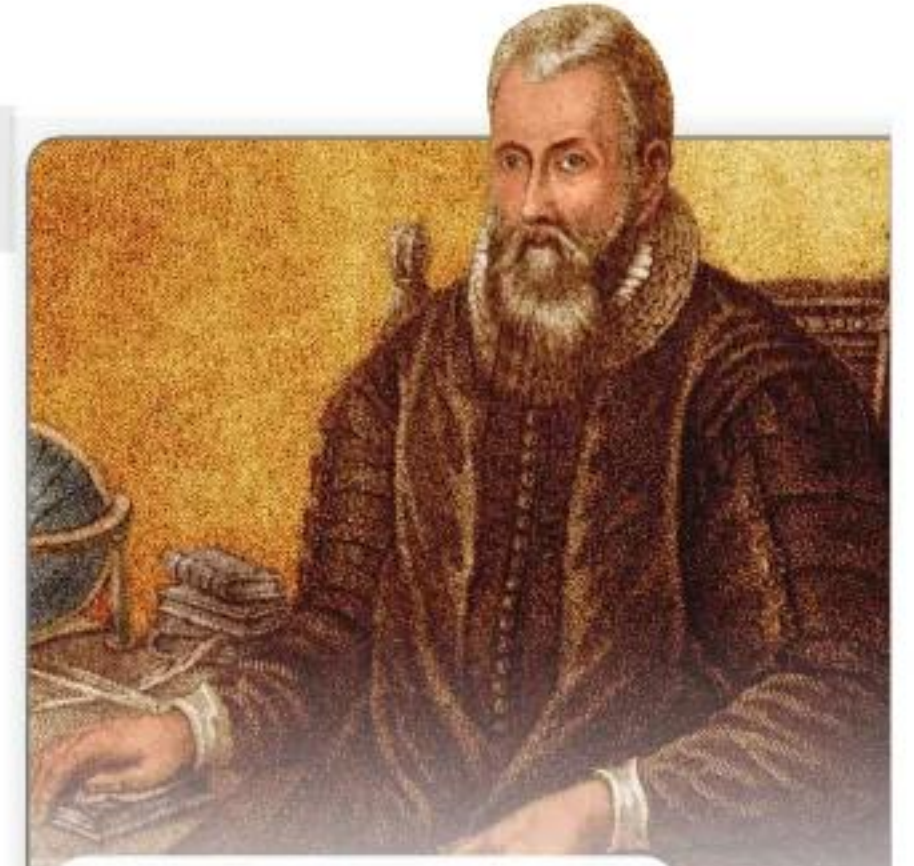
$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

أساس اللوغاريتم b للعدد الأصلي ←
أساس اللوغاريتم b للأساس القديم ←

مثال $\log_3 11 = \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 3}$

لإثبات هذا القانون، افرض أنّ $\log_a n = x$.

$$\begin{aligned} a^x &= n && \text{تعريف اللوغاريتم} \\ \log_b a^x &= \log_b n && \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية} \\ x \log_b a &= \log_b n && \text{خاصية القوى للوغاريتمات} \\ x &= \frac{\log_b n}{\log_b a} && \text{اقسم كل طرف على } \log_b a \\ \log_a n &= \frac{\log_b n}{\log_b a} && \text{عوض عن } x \text{ بـ } \log_a n \end{aligned}$$



الربط بتاريخ الرياضيات

جون نابير (1550-1617) كان جون نابير عالم رياضيات وعالمًا لاهوتيًا من إسكتلندا. وهو من بدأ باستخدام اللوغاريتمات للمساعدة في إجراء الحسابات. وهو يُعرف أيضًا بتعميمه لاستخدام النقطة العشرية.

قانون تغيير الأساس يجعل من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي لأي أساس عن طريق تحويل التعبير إلى تعبير آخر يشتمل على لوغاريتمات عادية.

مثال 5 قانون تغيير الأساس

عبر عن $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3} \quad \text{قانون تغيير الأساس}$$

$$\approx 2.7268 \quad \text{استخدم آلة حاسبة}$$

تمرين موجّه

5. عبر عن $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

التحقق من فهمك

مثال 1 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

1. $\log 5$ 2. $\log 21$ 3. $\log 0.4$ 4. $\log 0.7$

مثال 2 5. علوم كمية الطاقة E ، مقدرة بالأرغ، التي تنبعث من زلزال ما ترتبط بشدة مقياس ريختر M لهذا الزلزال من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد كمية الطاقة المنبعثة من زلزال تشيلي عام 1960 الذي بلغ 8.5 على مقياس ريختر.

مثال 3 حلّ كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

6. $6^x = 40$ 7. $2.1^{a+2} = 8.25$ 8. $7^{x^2} = 20.42$ 9. $11^{b-3} = 5^b$

مثال 4 حلّ كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

10. $5^{4n} > 33$ 11. $6^{p-1} \leq 4^p$

مثال 5 عبر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

12. $\log_3 7$ 13. $\log_4 23$ 14. $\log_9 13$ 15. $\log_2 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل تعبير مما يلي مع التقريب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

16. $\log 3$ 17. $\log 11$ 18. $\log 3.2$
19. $\log 8.2$ 20. $\log 0.9$ 21. $\log 0.04$

مثال 2 22. التبرير المنطقي ركبّت نجاة كاتما جديدا للصوت في سيارتها. وانخفض مستوى ضوضاء المحرك من 85 ديسيبل إلى 73 ديسيبل.

- a. كم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في صوت السيارة بكام الصوت القديم، إذا كان m مُعرّفاً بأنه 1؟
b. كم عدد مرات الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالأذن البشرية المتمثلة في صوت السيارة بكام الصوت الجديد؟ اكتشف النسبة المئوية للانخفاض في شدة الصوت مع استخدام كاتم الصوت الجديد.

مثال 3

حلّ كل معادلة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

23. $8^x = 40$

24. $5^x = 55$

25. $2.9^{a-4} = 8.1$

26. $9^{b-1} = 7^b$

27. $13^{x^2} = 33.3$

28. $15^{x^2} = 110$

مثال 4

حلّ كل متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

29. $6^{3n} > 36$

30. $2^{4x} \leq 20$

31. $3^{y-1} \leq 4^y$

32. $5^{p-2} \geq 2^p$

مثال 5

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

33. $\log_7 18$

34. $\log_5 31$

35. $\log_2 16$

36. $\log_4 9$

37. $\log_3 11$

38. $\log_6 33$

39 حيوانات أليفة يمكن تمثيل عدد n أصحاب الحيوانات الأليفة بالآلاف بعد t أعوام باستخدام المعادلة $n = 35[\log_4(t + 2)]$. افترض أن $t = 0$ يمثل 2000. استخدم قانون تغيير الأساس للإجابة على الأسئلة التالية.

a. كم عدد أصحاب الحيوانات الأليفة في 2010؟

b. ما طول الفترة حتى يصل عدد أصحاب الحيوانات الأليفة إلى 80,000؟ متى سيحدث ذلك؟

40. الدقة منذ خمسة سنوات ماضية، كان تعداد الدببة الشهباء في حديقة وطنية معينة 325 دبًا. وبلغ التعداد اليوم 450 دبًا. وأظهرت الدراسات أن الحديقة يمكنها دعم تعداد من 750 دبًا.

a. ما متوسط المعدل السنوي للنمو في التعداد إذا كانت الدببة الشهباء تتناسل مرة في السنة؟

b. كم عدد السنوات التي ستستغرق لبلوغ الحد الأقصى للتعداد إذا استمر التعداد في النمو بنفس متوسط المعدل؟

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $3^x = 40$

42. $5^{3p} = 15$

43. $4^{n+2} = 14.5$

44. $8^{z-4} = 6.3$

45. $7.4^{n-3} = 32.5$

46. $3.1^{y-5} = 9.2$

47. $5^x \geq 42$

48. $9^{2a} < 120$

49. $3^{4x} \leq 72$

50. $7^{2n} > 52^{4n+3}$

51. $6^p \leq 13^{5-p}$

52. $2^y + 3 \geq 8^{3y}$

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

53. $\log_4 12$

54. $\log_3 21$

55. $\log_8 2$

56. $\log_6 7$

57. $\log_5 (2.7)^2$

58. $\log_7 \sqrt{5}$

59. موسيقى السنت الموسيقي هو وحدة في مقياس لوغاريتمي لحدة الصوت أو الفترات النسبية. الجواب الموسيقي الواحد يساوي 1200 سنت. يمكن استخدام الصيغة $\left(\log_2 \frac{a}{b}\right) n = 1200$ لتحديد الفرق بالسنتات بين نوتتين موسيقيتين لهما التردد a و b .

a. جد الفترة بالسنتات عندما يتغير التردد من 443 هرتز (Hz) إلى 415 Hz.

b. إذا كانت الفترة 55 سنًا وتردد البداية هو 225 Hz، فجد التردد النهائي.

حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

60. $10^{x^2} = 60$

61. $4^{x^2 - 3} = 16$

62. $9^{6y - 2} = 3^{3y + 1}$

63. $8^{2x - 4} = 4^{x + 1}$

64. $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$

65. $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

66. **العلوم البيئية** مهندس بيئي يختبر عن وجود تلوث في آبار مياه الشرب في المجتمعات الساحلية، وبالأخص المستويات غير الآمنة من الزرنيخ. ويبلغ المستوى الآمن من الزرنيخ 0.025 جزء في المليون (ppm). كذلك، يجب أن يكون العدد الهيدروجيني pH لمستوى الزرنيخ أقل من 9.5. صيغة تركيز أيون الهيدروجين هي $\text{pH} = -\log H$ (إرشاد: كيلوجرام واحد من الماء يحتل تقريباً مساحة لتر واحد. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$).

a. افترض أن تركيز أيون الهيدروجين للبئر هو 1.25×10^{-11} . هل ينبغي أن يقلق المهندس البيئي بشأن الارتفاع العالي في محتوى الزرنيخ؟

b. وجد المهندس البيئي ميليجراماً واحداً من الزرنيخ في عينة من 3 لترات. فهل البئر آمن؟

c. ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل المستوى المطلق من الأس الهيدروجيني 9.5 pH؟

67. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، ستجد حل المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a. **جدولياً** أدخل الدالة $y = 4^x$ إلى حاسبة التمثيل البياني، وأنشأ جدولاً لقيم الدالة، ومرر عبر الجدول لإيجاد x عندما يكون $y = 13$.

b. **بيانياً** مثل $y = 4^x$ و $y = 13$ بيانياً على الشاشة نفسها. استخدم خاصية intersect لإيجاد نقطة التقاطع.

c. **عددياً** جد حل المتباينة جبرياً. هل كل الطرق تؤدي إلى الناتج نفسه؟ اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

68. **التفكير النقدي** حل عائشة وسالي $4^{3p} = 10$. هل إحداهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سالي

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$3p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$$

عائشة

$$4^{3p} = 10$$

$$\log 4^{3p} = \log 10$$

$$p \log 4 = \log 10$$

$$p = \frac{\log 10}{\log 4}$$

69. **التحدي** حل المعادلة $\log_a x = \log \sqrt{a}$ لإيجاد x و اشرح كل خطوة.

70. **التبرير** اكتب $\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$ في صورة لوغاريتم منفرد.

71. **البرهان** جد قيمة $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. ضع استنتاجاً بشأن العلاقة بين $\log_a b$ و $\log_b a$ وقم بإثباته.

72. **الكتابة في الرياضيات** اشرح العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات. اذكر أمثلة مثل كيفية حل معادلة لوغاريتمية باستخدام الأسس وكيفية حل معادلة أسية باستخدام اللوغاريتمات.

التمرين على الاختبار المعياري

75. هندسة إذا زادت مساحة السطح لمكعب بمعامل بمقدار 9. فما التغير في طول أضلاع المكعب؟

- F يبلغ الطول مثلي الطول الفعلي.
G يبلغ الطول 3 أمثال الطول الفعلي.
H يبلغ الطول 6 أمثال الطول الفعلي.
J يبلغ الطول 9 أمثال الطول الفعلي.

76. SAT/ACT أي مما يلي يعبر عن أدق وصفًا لتحوّل التمثيل البياني لـ $y = (x + 4)^2 - 3$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$ ؟

- A إلى الأسفل بمقدار 1 وإلى اليمين بمقدار 3
B إلى الأسفل بمقدار 6 وإلى اليسار بمقدار 5
C إلى الأعلى بمقدار 1 وإلى اليسار بمقدار 3
D إلى الأعلى بمقدار 1 وإلى اليمين بمقدار 3
E إلى الأعلى بمقدار 6 وإلى اليمين بمقدار 5

73. اكتب تعبيرًا يمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = x - 5$ ؟

- A $x^2 + 4x - 2$
B $x^2 - 6x + 8$
C $x^2 - 9x + 23$
D $x^2 - 14x + 6$

74. الإجابة الموسعة استأجرت هيام 3 أفلام وثائقية، ولعبتي فيديو، وفيلمين. وبلغت التكلفة AED 16.29. وفي الأسبوع التالي، استأجرت فيلمًا وثائقيًا و 3 ألعاب فيديو، و 4 أفلام بتكلفة إجمالية AED 19.84. وفي الأسبوع الثالث، استأجرت فيلمين وثائقيين، ولعبة فيديو، وفيلمًا واحدًا بتكلفة إجمالية AED 9.14.

a. اكتب نظام معادلات لتحديد تكلفة استئجار كل عنصر.

b. ما تكلفة استئجار كل عنصر؟

مراجعة شاملة

حلّ كل معادلة مما يلي، وتحقق من صحة الحل. (الدرس 1-3)

77. $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

79. $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

78. $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

80. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

حلّ كل معادلة أو متباينة. (الدرس 1-2)

81. $\log_4 x = \frac{1}{2}$

83. $\log_8 (x^2 + x) = \log_8 12$

82. $\log_{81} 729 = x$

84. $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

85. الإبحار إذا كانت مساحة شراع على شكل مثلث هي $16x^4 - 60x^3 - 28x^2 + 56x - 32$ أمتار مربعة. وقاعدة المثلث هي $x - 4$ أمتار. فما ارتفاع الشراع؟

86. الإصلاحات المنزلية تُركب أقفال جديدة لدى عامر. وتبلغ رسوم عامل الأقفال AED 85 مقابل طلب الخدمة و AED 25 لكل باب، و AED 30 لكل قفل.

a. اكتب معادلة تمثل تكلفة x عدد الأبواب.

b. يريد عامر تغيير الأقفال في الباب الأمامي والجانبى والخلفى وباب الكراج. فكم ستبلغ تكلفة ذلك؟

مراجعة المهارات

اكتب معادلة أسيّة مكافئة لكل معادلة لوغاريتمية.

87. $\log_2 5 = x$

88. $\log_4 x = 3$

89. $\log_5 25 = 2$

90. $\log_7 10 = x$

91. $\log_6 x = 4$

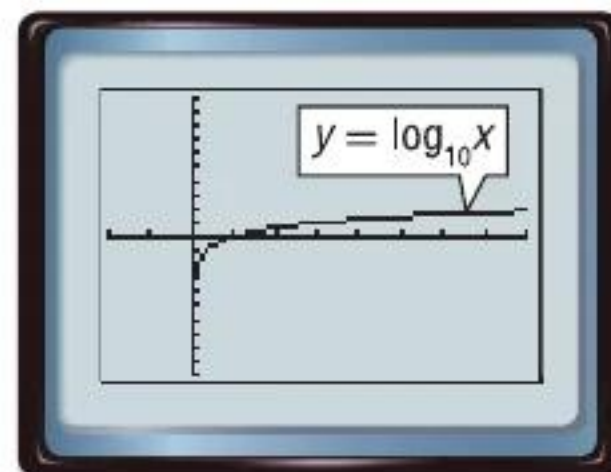
92. $\log_4 64 = 3$



مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1-4

لقد حللت سابقًا معادلات لوغاريتمية جبريًا. ويمكنك حل معادلات لوغاريتمية كذلك عن طريق التمثيل البياني أو استخدام الجدول. وتتضمن حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus $y = \log_{10} x$ باعتبارها دالة مدمجة. أدخل $\boxed{\text{GRAPH}} \boxed{\text{X,T,}\theta,n} \boxed{\text{LOG}} \boxed{Y=}$ لعرض هذا التمثيل البياني. لتمثيل دوال لوغاريتمية أساسها مغاير للعدد 10، بيانيًا، يجب عليك استخدام قانون تغيير الأساس. $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$



$[-2, 8] \text{ scl: } 1 \text{ by } [-10, 10] \text{ scl: } 1$

النشاط 1

حلّ المعادلة $\log_2(6x - 8) = \log_3(20x + 1)$

الخطوة 1

تمثيل طرفي المعادلة بيانيًا.

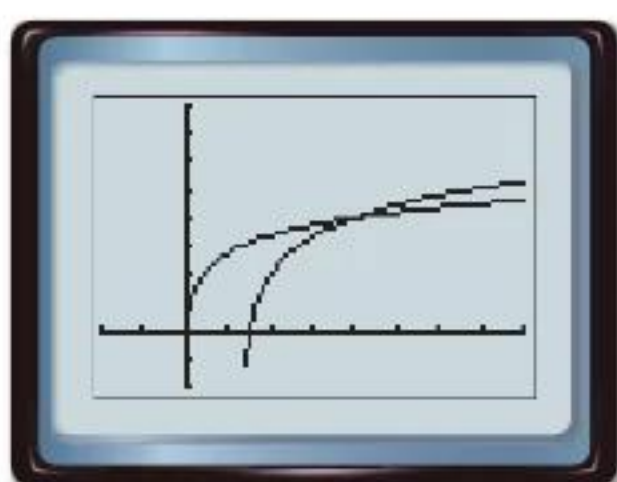
مثّل كل طرف من طرفي المعادلة باعتباره دالة منفصلة. أدخل $\log_2(6x - 8)$ في صيغة $Y1$ و $\log_3(20x + 1)$ في صيغة $Y2$. ثم

مثّل المعادلتين بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة:

$\boxed{Y=} \boxed{\text{LOG}} \boxed{6} \boxed{\text{X,T,}\theta,n} \boxed{-} \boxed{8} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{\text{LOG}} \boxed{2} \boxed{)}$

$\boxed{\text{ENTER}} \boxed{\text{LOG}} \boxed{20} \boxed{\text{X,T,}\theta,n} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{\text{LOG}} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{\text{GRAPH}}$



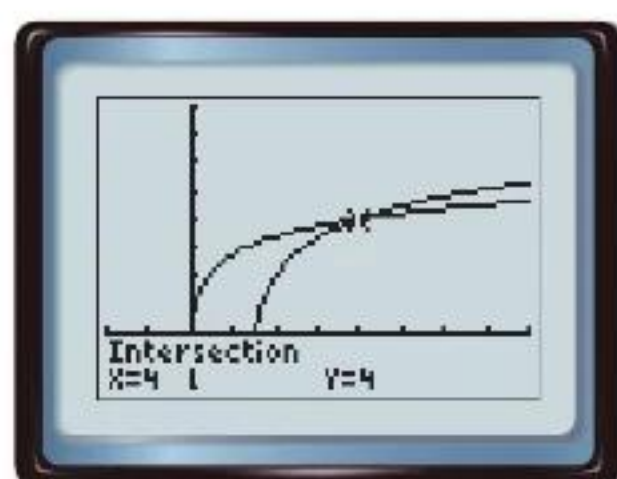
$[-2, 8] \text{ scl: } 1 \text{ by } [-2, 8] \text{ scl: } 1$

الخطوة 2

استخدام خاصية **intersect**.

استخدم خاصية **intersect** من القائمة **CALC** لتقريب الزوج المرتب للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 4. لذا، حل المعادلة هو 4.



$[-2, 8] \text{ scl: } 1 \text{ by } [-2, 8] \text{ scl: } 1$

الخطوة 3

استخدام خاصية **TABLE**.

تفحص الجدول لإيجاد قيمة x التي تتساوى معها قيم y في التمثيلين البيانيين. عند $x = 4$ ، تكون قيمة y هي 4 في كلتا الدالتين. لذا، حل المعادلة هو 4.

X	Y1	Y2
0	ERR	0
1	ERR	2.7712
2	ERR	3.3802
3	3.3219	3.7419
4	4	4
5	4.4584	4.2009
6	4.6074	4.3653
X=0		

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات اللوغاريتمية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

(يُتبع في الصفحة التالية)

مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

النشاط 2

حلّ المتباينة $\log_4(10x + 1) < \log_5(16 + 6x)$.

الخطوة 1

أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \log_4(10x + 1)$ وأ $y < \log_4(10x + 1)$. بما أن هذه المتباينة تتضمن رمز أكبر من، فظلل فوق المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم مفتاحي السهم و **ENTER** لاختيار

التظليل أعلى الرمز.

المتباينة الثانية هي $y < \log_5(16 + 6x)$. ظلل أسفل المنحنى بما أن هذه المتباينة تحتوي على رمز أصغر من.

خطوات العملية على الحاسبة: **Y=** **LOG** **10** **X,T,θ,n** **+** **1** **)** **÷** **LOG** **4** **)** **ENTER** **LOG** **16** **+** **6** **X,T,θ,n** **)** **÷** **LOG** **5** **)**



$[-2, 4]$ scl: 1 by $[-2, 4]$ scl: 1

الخطوة 2

تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: **GRAPH**

الحد الأيسر من مجموعة الحل هو حيث تكون المتباينة الأولى غير معرفة. وهي تكون غير معرفة حيث $10x + 1 \leq 0$.

$$10x + 1 \leq 0$$

$$10x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{10}$$

استخدم خاصية **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحد الأيمن. يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3

استخدام خاصية **TABLE** للتحقق من حلك.

ابدأ الجدول عند -0.1 ووضّح أن قيم x تزداد بمعدل 0.1 . مرر عبر الجدول.

خطوات العملية على الحاسبة: **2nd** **[TBLSET]** -0.1 **ENTER** 0.1 **ENTER** **2nd** **[TABLE]**

الجدول يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

X	Y1	Y2
-0.1	1.7297	1.9206
0.1	1.7925	1.9273
0.2	1.8502	1.9336
0.3	1.9037	1.9394
0.4	1.9534	1.9449
0.5	2.0000	1.9500
0.6	2.0437	2.0147

تمارين

حلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

- $\log_2(3x + 2) = \log_3(12x + 3)$
- $\log_2 3x = \log_3(2x + 2)$
- $\log_4(9x + 1) > \log_3(18x - 1)$
- $\log_5(2x + 1) < \log_4(3x - 2)$

- $\log_6(7x + 1) = \log_4(4x - 4)$
- $\log_{10}(1 - x) = \log_5(2x + 5)$
- $\log_3(3x - 5) \geq \log_3(x + 7)$
- $\log_2 2x \leq \log_4(x + 3)$

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

1-5

الدرس

لماذا

الحالي

السابق

- يمثل قوس جيت واي في ميزوري شكل منحنى السلسلة. ويوجه منحنى السلسلة قوة وزنه على نفسه. بحيث:
- إذا كان عبارة عن سلسلة أو حبل يتدلى. فإنه يكون مشدودًا آخذًا هذا الشكل.
- إذا كانت السلسلة قائمة بشكل مستقيم. فإنها تستطيع دعم نفسها.
- تشتمل معادلة منحنى السلسلة على e . وهو عدد خاص يظهر في جميع نواحي الرياضيات والعلوم.

- 1 إيجاد قيم التعابير المشتتة على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.
- 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

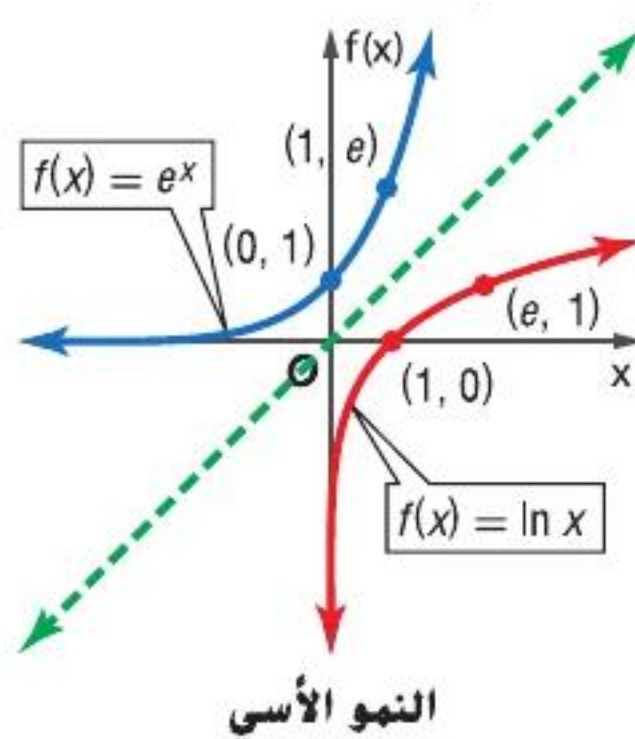
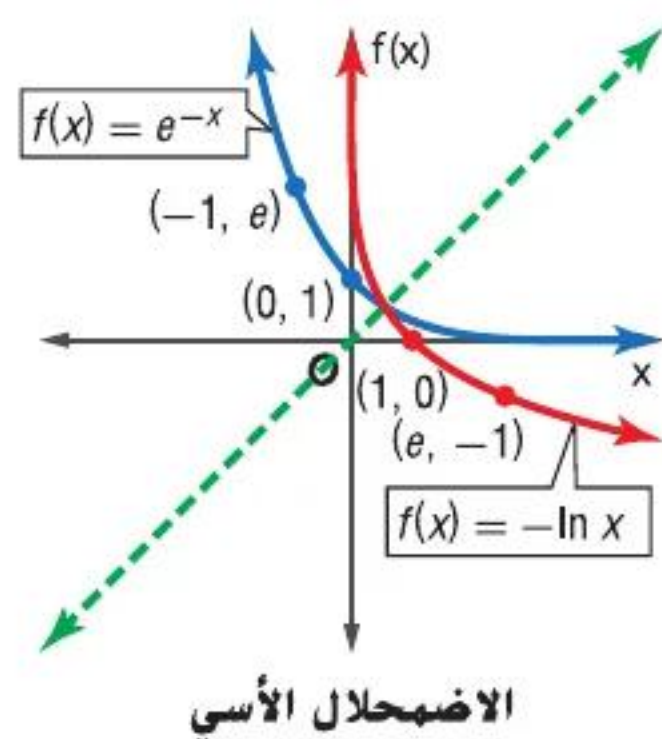
- تعاملت مع اللوغاريتمات العادية.

1 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية كما هو الحال مع π و $\sqrt{2}$. فإن العدد e هو عدد غير نسبي. وقيمة e تساوي 2.71828... ويشار إليه بالأساس الطبيعي، e . ويُطلق على الدالة الأسية التي لها أساس e الدالة الأسية للأساس الطبيعي.

المفهوم الأساسي دوال الأساس الطبيعي

تُستخدم الدالة $f(x) = e^x$ في تمثيل النمو الأسّي المتصل. تُستخدم الدالة $f(x) = e^{-x}$ في تمثيل الاضمحلال الأسّي المتصل.

معكوس الدالة الأصلية للأساس الطبيعي يُطلق عليه اللوغاريتم الطبيعي. ويمكن كتابة هذا اللوغاريتم في الصيغة $\log_e x$. ولكن في كثير من الأحيان يُختصر في الصيغة $\ln x$.



يمكنك كتابة معادلة أسية للأساس e مكافئة للمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية عن طريق استخدام حقيقة أن $\ln x = \log_e x$.

$$\ln 4 = x \rightarrow \log_e 4 = x \rightarrow e^x = 4$$

مثال 1 كتابة التعابير المكافئة

اكتب كل معادلة أسية مما يلي في صيغة لوغاريتمية.

a. $e^x = 8$

$$e^x = 8 \rightarrow \log_e 8 = x$$

$$\ln 8 = x$$

b. $e^5 = x$

$$e^5 = x \rightarrow \log_e x = 5$$

$$\ln x = 5$$

تمرين موجّه

1A. $e^x = 9$

1B. $e^7 = x$

المفردات الجديدة

الأساس الطبيعي،

natural base

الدالة الأسية للأساس

natural base

exponential function

لوغاريتم طبيعي

natural logarithm

مهارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية

واستخدامها.

يمكنك كذلك كتابة معادلة لوغاريتم طبيعي مكافئة للمعادلة الأسية للأساس الطبيعي e .
 $e^x = 12 \rightarrow \log_e 12 = x \rightarrow \ln 12 = x$

مثال 2 كتابة التعابير المكافئة

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يلي في صيغة أسية.

a. $\ln x \approx 0.7741$

$$\ln x \approx 0.7741 \rightarrow \log_e x = 0.7741$$

$$x \approx e^{0.7741}$$

b. $\ln 10 = x$

$$\ln 10 = x \rightarrow \log_e 10 = x$$

$$10 = e^x$$

تمرين موجّه

2A. $\ln x \approx 2.1438$

2B. $\ln 18 = x$

خواص اللوغاريتمات التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على اللوغاريتمات الطبيعية. ويمكن تبسيط التعبيرين اللوغاريتميين التاليين إلى حد لوغاريتمي منفرد.

مثال 3 تبسيط التعابير المشتملة على الأساس e واللوغاريتم الطبيعي

اكتب كلّ تعبير مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

a. $3 \ln 10 - \ln 8$

$$3 \ln 10 - \ln 8 = \ln 10^3 - \ln 8$$

$$= \ln \frac{10^3}{8}$$

$$= \ln 125$$

$$= \ln 5^3$$

$$= 3 \ln 5$$

خاصية القوى للوغاريتمات

خاصية ناتج القسمة للوغاريتمات

بسط.

$$5^3 = 125$$

خاصية القوى للوغاريتمات

استخدم آلة حاسبة للتحقق من الحل.

التحقق

خطوات العملية على الحاسبة: 3 [LN] 10 [)] [-] [LN] 8 [)] [ENTER] 4.828313737

خطوات العملية على الحاسبة: 3 [LN] 5 [)] [ENTER] 4.828313737 ✓

b. $\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x$

$$\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x = \ln 40 + \ln \frac{1}{4} + \ln x$$

$$= \ln \left(40 \times \frac{1}{4} \times x \right)$$

$$= \ln 10x$$

خاصية القوى للوغاريتمات

خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات

بسط.

تمرين موجّه

3A. $6 \ln 8 - 2 \ln 4$

3B. $2 \ln 5 + 4 \ln 2 + \ln 5y$

نظرًا لأن الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي دالتان متعاكستان، فإنه من الممكن استخدامهما لعكس عمل بعضهما البعض أو إلغائه.

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

نصيحة دراسية

التحويل لأبسط صورة
عندما تحول التعابير اللوغاريتمية لأبسط صورة، تحقق من عدم احتواء اللوغاريتم على أي عمليات وقوى.

2 المعادلات والمتباينات المشتقة على e و $\ln$ تعد المعادلات والمتباينات المشتقة على الأساس e أسهل في الحل عن طريق استخدام اللوغاريتمات الطبيعية عن استخدام اللوغاريتمات العادية لأن $\ln e = 1$.

مثال 4 حل معادلات الأساس e

حلّ المعادلة $4e^{-2x} - 5 = 3$. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 4e^{-2x} - 5 &= 3 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 4e^{-2x} &= 8 && \text{اجمع 5 إلى كل طرف.} \\ e^{-2x} &= 2 && \text{اقسم كل طرف على 4.} \\ \ln e^{-2x} &= \ln 2 && \text{خاصية المساواة للوغاريتمات} \\ -2x &= \ln 2 && \ln e^x = x \\ x &= \frac{\ln 2}{-2} && \text{اقسم كل طرف على -2.} \\ x &\approx -0.3466 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

خطوات العملية على الحاسبة: $\boxed{\text{LN}} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{-2} \boxed{\text{ENTER}} = -0.34657359$

تمرين موجّه

حلّ كل معادلة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3e^{4x} - 12 = 15$

4B. $4e^{-x} + 8 = 17$

مثلما يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لحذف e^x ، يمكن استخدام الدالة الأسية للأساس الطبيعي لحذف $\ln x$.

مثال 5 حل معادلات ومتباينات اللوغاريتم الطبيعي

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $3 \ln 4x = 24$

$$\begin{aligned} 3 \ln 4x &= 24 && \text{المعادلة الأصلية} \\ \ln 4x &= 8 && \text{اقسم كل طرف على 3.} \\ e^{\ln 4x} &= e^8 && \text{خاصية المساواة للدوال الأسية} \\ 4x &= e^8 && e^{\ln x} = x \\ x &= \frac{e^8}{4} && \text{اقسم كل طرف على 4.} \\ x &\approx 745.2395 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

b. $\ln (x - 8)^4 < 4$

$$\begin{aligned} \ln (x - 8)^4 &< 4 && \text{المعادلة الأصلية} \\ e^{\ln (x - 8)^4} &< e^4 && \text{اكتب كل طرف باستخدام الأسس والأساس e.} \\ (x - 8)^4 &< e^4 && e^{\ln x} = x \\ |x - 8| &< e && \text{خاصية المساواة للدوال الأسية} \\ -e &< x - 8 < e && \text{حل القيمة المطلقة} \\ 8 - e &< x < 8 + e && \text{اجمع 8 إلى كل طرف.} \\ 5.1945 &< x < 10.7183 && \text{استخدم آلة حاسبة.} \end{aligned}$$

تمرين موجّه حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

5A. $5 \ln 6x = 8$

5B. $\ln (2x - 3)^3 > 6$

نصيحة دراسية

الآلات الحاسبة تتضمن معظم الآلات الحاسبة e^x والزر LN لإيجاد قيمة تعابير الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

يمكن إيجاد المربحة التي تكون مركبة على نحو مستمر، باستخدام e .

المفهوم الأساسي المربحة المركبة المستمرة

احسب المربحة المركبة المستمرة باستخدام الصيغة التالية:

$$A = Pe^{rt}$$

حيث A هو المبلغ بعد t من السنوات، و P هو المبلغ الأصلي المُستثمر، و r هو معدل المربحة السنوي.

مثال 6 من الحياة اليومية حل متباينات الأساس e

المعرفة المالية عندما وُلدت فوزية، أودع جدها AED 3000 في حساب توفير لغرض التعليم الذي يحقق مربحة مركبة مستمرة نسبتها 4%.

a. بافتراض عدم وجود أي عمليات سحب أو إيداع أخرى من الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 10 أعوام؟

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ &= 3000e^{(0.04)(10)} \\ &= 3000e^{0.4} \\ &\approx 4475.47 \end{aligned}$$

الصيغة المركبة المستمرة
بسط.
استخدم آلة حاسبة.

سيكون الرصيد AED 4475.47.

b. كم سيستغرق الأمر ليصل الرصيد إلى AED 10,000 على الأقل؟

$$\begin{aligned} A &< Pe^{rt} \\ 10,000 &< 3000e^{(0.04)t} \\ \frac{10}{3} &< e^{0.04t} \\ \ln \frac{10}{3} &< \ln e^{0.04t} \\ \ln \frac{10}{3} &< 0.04t \\ \frac{\ln \frac{10}{3}}{0.04} &< t \\ 30.099 &< t \end{aligned}$$

الصيغة المركبة المستمرة
 $P = 3000$ و $r = 0.04$ و $A = 10,000$
اقسم كل طرف على 3000.
خاصية المساواة للوغاريتمات
 $\ln e^x = x$
اقسم كل طرف على 0.04
استخدم آلة حاسبة.

سيستغرق الأمر حوالي 30 عامًا ليصل الرصيد إلى AED 10,000 على الأقل.

c. إذا أراد الجد أن تحصل فوزية على AED 10,000 بعد 18 عامًا، فكم المبلغ المطلوب منها استثماره؟

$$\begin{aligned} 10,000 &= Pe^{(0.04)18} \\ \frac{10,000}{e^{0.72}} &= P \\ 4867.52 &\approx P \end{aligned}$$

$A = 10,000$ و $r = 0.04$ و $t = 18$
اقسم كل طرف على $e^{0.72}$.
استخدم آلة حاسبة.

يحتاج الجد إلى استثمار AED 4867.52.

تمرين موجّه

6. استخدم المعلومات المبينة في مثال 6 للإجابة على ما يلي.

A. إذا استثمر الجد AED 8000 بمربحة مركبة مستمرة نسبتها 3.75% فكم المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 30 عامًا؟

B. إذا تمكنا فقط من إيداع AED 10,000 في الحساب أعلاه، فما معدل نمو الحساب المطلوب لكي نحصل فوزية على AED 30,000 بعد 18 عامًا؟

C. إذا وجد جد فوزية حسابًا يحقق مربحة مركبة مستمرة بنسبة 5% وأراد أن تحصل فوزية على AED 30,000 بعد 18 عامًا، فما المبلغ الذي يجب عليهما إيداعه؟

الربط بالحياة اليومية

متوسط تكلفة الالتحاق بالكلية العامة بنظام الأعوام الأربعة يبلغ حوالي AED 6185 في العام.
المصدر: CNN

نصيحة دراسية

التبرير لكي تتجنب الوقوع في أي خطأ عند التقريب، لا تُقرّب حتى النهاية الفعلية لحساباتك.

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 اكتب دالة أسية أو لوغاريتمية مكافئة.

1. $e^x = 30$

2. $\ln x = 42$

3. $e^3 = x$

4. $\ln 18 = x$

اكتب كلاً مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

مثال 3

5. $3 \ln 2 + 2 \ln 4$

6. $5 \ln 3 - 2 \ln 9$

7. $3 \ln 6 + 2 \ln 9$

8. $3 \ln 5 + 4 \ln x$

حلّ كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال 4

9. $5e^x - 24 = 16$

10. $-3e^x + 9 = 4$

11. $3e^{-3x} + 4 = 6$

12. $2e^{-x} - 3 = 8$

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال 5

13. $\ln 3x = 8$

14. $-4 \ln 2x = -26$

15. $\ln (x + 5)^2 < 6$

16. $\ln (x - 2)^3 > 15$

17. $e^x > 29$

18. $5 + e^{-x} > 14$

19. علوم فيروس ينتشر عبر شبكة حاسوب وفقاً للصيغة $v(t) = 30e^{0.1t}$. حيث v هو عدد الحواسيب المصابة بالفيروس و t هو الزمن بالدقائق. كم سيستغرق الفيروس لإصابة 10,000 حاسوب؟

مثال 6

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 اكتب دالة أسية أو لوغاريتمية مكافئة.

20. $e^{-x} = 8$

21. $e^{-5x} = 0.1$

22. $\ln 0.25 = x$

23. $\ln 5.4 = x$

24. $e^{x-3} = 2$

25. $\ln (x + 4) = 36$

26. $e^{-2} = x^6$

27. $\ln e^x = 7$

اكتب كلاً مما يلي في صيغة لوغاريتم منفرد.

مثال 3

28. $\ln 125 - 2 \ln 5$

29. $3 \ln 10 + 2 \ln 100$

30. $4 \ln \frac{1}{3} - 6 \ln \frac{1}{9}$

31. $7 \ln \frac{1}{2} + 5 \ln 2$

32. $8 \ln x - 4 \ln 5$

33. $3 \ln x^2 + 4 \ln 3$

حلّ كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

34. $6e^x - 3 = 35$

35. $4e^x + 2 = 180$

36. $3e^{2x} - 5 = -4$

37. $-2e^{3x} + 19 = 3$

38. $6e^{4x} + 7 = 4$

39. $-4e^{-x} + 9 = 2$

40. التبرير المنطقي قيمة سيارة معينة تضمحل وفقاً للصيغة $v(t) = 18500e^{-0.186t}$. حيث t هو عدد السنوات بعد شراء السيارة جديدة.

الأمثلة 5-6

a. ماذا ستكون قيمة السيارة بعد 18 شهراً؟

b. متى ستصبح قيمة السيارة نصف قيمتها الأصلية؟

c. متى ستصبح قيمة السيارة أقل من AED 1000؟

حلّ كل متباينة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $e^x \leq 8.7$

42. $e^x \geq 42.1$

43. $\ln (3x + 4)^3 > 10$

44. $4 \ln x^2 < 72$

45. $\ln (8x^4) > 24$

46. $-2 [\ln (x - 6)^{-1}] \leq 6$

a. إذا أودعت AED 800 في حساب يحقق 4.5% مربحة مركبة مستمرة، فكم سيكون المبلغ في الحساب بعد 5 سنوات؟

b. كم سيستغرق الأمر ليصل مالك إلى الضعف؟

c. إذا أردت مضاعفة مالك في 9 أعوام، فما معدل المربحة الذي تحتاج إليه؟

d. إذا أردت فتح حساب يحقق مربحة مركبة مستمرة بنسبة 4.75% وأن يكون لديك AED 10,000 في الحساب بعد 12 عامًا، فما المبلغ الذي تحتاج إلى إيداعه؟

اكتب التعبير في صورة مجموع أو فرق لوغاريتمات أو مضاعفات للوغاريتمات.

48. $\ln 12x^2$

49. $\ln \frac{16}{125}$

50. $\ln \sqrt[5]{x^3}$

51. $\ln xy^4z^{-3}$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة.

52. $8^x = 24$

53. $3^x = 0.4$

54. $2^{3x} = 18$

55. $5^{2x} = 38$

56. **التمثيل** قانون نيوتن للتبريد الذي يمكن استخدامه لتحديد مدى سرعة برودة جسم ما في أوساط محيطية معطاة، تمثله المعادلة $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$. حيث T_0 هي درجة الحرارة الأولية للجسم، و T_s هي درجة حرارة الوسط المحيط، و t هو الزمن بالدقائق، و k هو قيمة ثابتة تعتمد على نوع الجسم.

a. إذا وُضع كوب قهوة درجة حرارته الأولية 180° في غرفة ذات درجة حرارة 70° وبردت القهوة إلى 140° بعد 10 دقائق، فجد قيمة k .

b. استخدم قيمة k هذه لتحديد درجة حرارة القهوة بعد 20 دقيقة.

c. متى ستصل درجة حرارة القهوة إلى 75° ؟

57. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم $f(x) = e^x$ و $g(x) = \ln x$.

a. **بيانيًا** مثل بيانيًا كلاً من الدالتين ومحور التماثل لهما، $y = x$. حيث $-5 \leq x \leq 5$. ثم مثل $a(x) = e^{-x}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه.

b. **تحليليًا** التمثيلان البيانيان لـ $a(x)$ و $f(x)$ منعكستان على أي محور؟ ما الدالة التي ستكون انعكاسًا لـ $f(x)$ على المحور الآخر؟

c. **بيانيًا** حدد الدالتين اللتين تكونان منعكستين لـ $g(x)$. مثل هاتين الدالتين الجديدتين بيانيًا.

d. **لفظيًا** نحن نعلم أن $f(x)$ و $g(x)$ متعاكستان. هل أي من الدوال الأخرى التي مثلناها بيانيًا متعاكستان أيضًا؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا

58. **التحدي** حلّ المعادلة $4^x - 2^{x+1} = 15$ لإيجاد x .

59. **البرهان** أثبت أن $\ln ab = \ln a + \ln b$ للوغاريتمات الطبيعية.

60. **التبرير** حدد إذا ما كانت $x > \ln x$ صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

61. **مسألة غير محددة الإجابة** عبّر عن القيمة 3 باستخدام e^x واللوغاريتم الطبيعي.

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لحل معادلة أسية لأساس طبيعي.

تمارين على الاختبار المعياري

63. باعتبار الدالة $y = 2.34x + 11.33$ ، أي عبارة مما يلي تعد أفضل وصفًا لتأثير إزاحة التمثيل البياني لأسفل بمقدار وحدتين؟

- A يتناقص التقاطع مع المحور x .
- B يتناقص التقاطع مع المحور y .
- C يبقى التقاطع مع المحور x كما هو.
- D يبقى التقاطع مع المحور y كما هو.

64. الإجابة الشبكية يبيع محمد إطارات صور خشبية عبر الإنترنت. وهو يشتري مواد بسعر AED 85 ويدفع AED 19.95 نظير الموقع الإلكتروني. فإذا حصل على AED 15 مقابل كل إطار، فكم عدد الإطارات التي يحتاج إلى بيعها لكي يحقق ربحًا لا يقل عن AED 270؟

65. حلّ المعادلة $|2x - 5| = 17$.

- F -6, -11
- G -6, 11
- H 6, -11
- J 6, 11

66. متجر محلي لطعام الحيوانات الأليفة يبيع طعام أرانب. تكلفة العبوتين ذات 5 kg تساوي AED 7.99. يمكن إيجاد إجمالي تكلفة C شراء n عبوات عن طريق:

- A ضرب n في C .
- B ضرب n في 5.
- C ضرب n في تكلفة العبوة الواحدة.
- D ضرب n في C .

مراجعة شاملة

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف. (الدرس 1-4)

- 67. $2^x = 53$
- 68. $2.3^{x^2} = 66.6$
- 69. $3^{4x-7} < 4^{2x+3}$
- 70. $6^{3y} = 8^{y-1}$
- 71. $12^{x-5} \geq 9.32$
- 72. $2.1^{x-5} = 9.32$

73. الصوت استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث L هو علو الصوت و R هي حدة الصوت النسبية. افترض أن صوت ساعة تنبيه واحدة يساوي 80 ديسيبل. اكتشف مقدار علو صوت 10 ساعات تنبيه بالمقارنة مع الساعة المنبهة الواحدة. (الدرس 1-3)

باستخدام كثيرة حدود وأحد عواملها، جد باقي عوامل كثيرة الحدود هذه. قد لا تكون بعض العوامل من كثيرات الحدود.

- 74. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4; x + 1$
- 75. $x^3 + 4x^2 + 7x + 6; x + 2$

76. تمارين راجع الصورة.

a. لكل خيار، اكتب معادلة تمثل تكلفة الانضمام إلى صالة الألعاب الرياضية.

b. مثل المعادلات بيانيًا. قدر نقطة التعادل لعضوية صالة الألعاب الرياضية.

c. اشرح ما تعنيه نقطة التعادل.

d. إذا كنت تخطط لزيارة صالة الألعاب الرياضية مرة في الأسبوع على الأقل خلال العام، فأأي خيار ستختار؟

نادي الجميع الرياضي

يبدأ الأمر من هنا!

الخيار 1:	الخيار 2:
AED 400/yr	AED 150/yr
زيارات غير محدودة	AED 5 للزيارة

مراجعة المهارات

حلّ كل من المعادلات التالية.

- 77. $2^{3x+5} = 128$
- 78. $5^{n-3} = \frac{1}{25}$
- 79. $\left(\frac{1}{9}\right)^m = 81^{m+4}$
- 80. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$
- 81. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$
- 82. $36^{2p} = 216^{p-1}$



مختبر ورقة البيانات المربحة المركبة

1-6

الاستكشاف

يمكنك استخدام ورقة البيانات لتنظيم البيانات وعرضها. وتعتبر ورقة البيانات طريقة سهلة لتتبع مبلغ المربحة المكتسبة خلال مدة زمنية.

لا يتم كسب المربحة المركبة على المبلغ الأصلي فقط، وإنما على أية مرابحات تمت إضافتها على المال الأساسي أيضًا.

النشاط

جد المبلغ المالي الكلي بعد 5 سنوات إذا كنت قد أودعت AED 100 بمعدل مربحة مركبة سنوية 7%.

الخطوة 1 قم بتسمية الأعمدة كما هو موضح. المدة عام واحد. أدخل قيم البدء والمعدل.

الخطوة 2 سيتم إنشاء كل صف باستخدام الصيغ. أدخل الصيغ كما هو موضح.

حساب توفير					
	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المربحة	الرصيد	المعدل خلال الفترة
2	0			AED 100.00	7%
3	=A2+1	=D2	=B3*\$E\$2	=C3+D2	
4					

الخطوة 3 استخدم وظيفة **تعبئة لأسفل** لملء 4 صفوف إضافية.

حساب توفير					
	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المربحة	الرصيد	المعدل خلال الفترة
2	0			AED 100.00	7%
3	1	AED 100.00	AED 7.00	AED 107.00	
4	2	AED 107.00	AED 7.49	AED 114.49	
5	3	AED 114.49	AED 8.01	AED 122.50	
6	4	AED 122.50	AED 8.58	AED 131.08	
7	5	AED 131.08	AED 9.18	AED 140.26	
8					

إذا كنت قد أودعت AED 100 بمعدل مربحة سنوية 7% لمدة 5 سنوات، فسيكون معك AED 140.26 بنهاية السنوات الخمس.

تمارين

جد الرصيد الإجمالي في كل حالة.

- إيداع AED 500 لمدة 7 سنوات بمعدل مربحة 5%
- إيداع AED 1000 لمدة 5 سنوات بمعدل مربحة 6%
- إيداع AED 200 لمدة سنتين بمعدل مربحة 10%
- إيداع AED 800 لمدة 3 سنوات بمعدل مربحة 8%
- اقتراض AED 10,000 لمدة 5 سنوات بمعدل مربحة 05.5%
- اقتراض AED 25,000 لمدة 30 سنة بمعدل مربحة 8%

استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

1-6

السابق

الحالي

لماذا

• استخدمت قوانين النمو والاضمحلال الأسي.

1 • استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموًا واضمحلالًا أسيًا.

2 • استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن نموًا لوجيستيًا.

• يُعتقد أن آثار الأقدام الأثرية للأكاولينكا التي تم اكتشافها في ماناغوا بنيكاراجوا هي آثار الأقدام البشرية الأقدم في العالم. وباستخدام التأريخ بالكربون، يقدر العلماء أن عمر آثار الأقدام هذه يبلغ 6000 عام.



1 النمو والاضمحلال الأسي يستخدم العلماء والباحثون في حالات كثيرة صورًا بديلة لقوانين النمو والاضمحلال التي تعلمتها في الدرس 1-1.

المفهوم الأساسي النمو والاضمحلال الأسي

النمو الأسي	الاضمحلال الأسي
يمكن تمثيل النمو الأسي بالدالة $f(x) = ae^{kt}$	يمكن تمثيل الاضمحلال الأسي بالدالة $f(x) = ae^{-kt}$
حيث a هي القيمة الأولية، و t هو الزمن بالسنوات، و k هو الثابت الذي يمثل معدل النمو المستمر .	حيث a هي القيمة الأولية، و t هو الزمن بالسنوات، و k هو الثابت الذي يمثل معدل الاضمحلال المستمر .

المفردات الجديدة

معدل النمو المستمر
rate of continuous growth
معدل الاضمحلال المستمر
rate of continuous decay
نموذج النمو اللوجيستي
logistic growth model

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة
في حلها.

مثال 1 من الحياة اليومية الاضمحلال الأسي

العلوم عمر النصف لأي مادة مشعة هو الزمن الذي تستغرقه المادة حتى يتحلل نصف ذراتها. فعمر النصف للكربون 14 هو 5730 عامًا. حدد قيمة k ومعادلة تحليل الكربون 14.

إذا كانت a هي الكمية الأولية للمادة، فإن y هي الكمية المتبقية بعد 5730 عامًا والتي يمكن تمثيلها بـ $\frac{1}{2}a$ أو $0.5a$.

$y = ae^{-kt}$	قانون الاضمحلال الأسي
$0.5a = ae^{-k(5730)}$	$t = 5730$ و $y = 0.5a$
$0.5 = e^{-5730k}$	بقسمة كل طرف على a .
$\ln 0.5 = \ln e^{-5730k}$	خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية
$\ln 0.5 = -5730k$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.5}{-5730} = k$	بقسمة كل طرف على -5730.
$0.00012 \approx k$	استخدام الآلة الحاسبة.

وبالتالي، تكون معادلة تحليل الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$.

تمرين موجّه

1. عمر النصف للبلوتونيوم 239 يبلغ 24,000 عام. حدد قيمة k .



الآن بمعرفة قيمة k للكربون 14، يمكن استخدامها لتحديد تاريخ الحفريات.

مثال 2 من الحياة اليومية التأريخ بالكربون

العلوم يقوم عالم حفريات بفحص عظام حيوان من عصر ما قبل التاريخ ويقدر أنها تحتوي على 2% من كمية الكربون 14 التي احتوت العظام عليها في حياة الحيوان.

a. منذ متى عاش ذلك الحيوان؟

الفهم قانون تحليل الكربون 14 هو $y = ae^{-0.00012t}$. وتريد إيجاد منذ متى عاش هذا الحيوان.

التخطيط افترض أن a هي الكمية الأولية من الكربون 14 في جسم الحيوان. وأن الكمية y المتبقية بعد عدد t من السنوات هي 2% من a أو $0.02a$.

الحل

$y = ae^{-0.00012t}$	قانون تحليل الكربون 14
$0.02a = ae^{-0.00012t}$	$y = 0.02a$
$0.02 = e^{-0.00012t}$	بقسمة كل طرف على a
$\ln 0.02 = \ln e^{-0.00012t}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$\ln 0.02 = -0.00012t$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.02}{-0.00012} = t$	بقسمة كل طرف على -0.00012
$32,600 \approx t$	باستخدام الآلة الحاسبة.

عاش الحيوان منذ ما يقرب من 32,600 عام مضى.

التحقق استخدم القانون لإيجاد مقدار العينة المتبقية بعد 32,600 عام. استخدم الكمية الأصلية في 1.

$y = ae^{-0.00012t}$	المعادلة الأصلية
$= 1e^{-0.00012(32,600)}$	$t = 32,600$ و $a = 1$
≈ 0.02 or 2% ✓	باستخدام الآلة الحاسبة.

b. إذا أشار بحث سابق إلى أن الحيوان عاش منذ حوالي 20,000، فما مقدار الكربون 14 الذي ينبغي أن يوجد في الحيوان؟

$y = ae^{-0.00012t}$	قانون تحليل الكربون 14
$= 1e^{-0.00012(20,000)}$	$t = 20,000$ و $a = 1$
$= e^{-2.4}$	بسط.
$= 0.09$ or 9%	باستخدام الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

2. استخدم المعلومات الواردة في المثال 2 للإجابة عن الأسئلة التالية.

A. عينة احتوت في الأساس على 42 mg من الكربون تحتوي الآن على 8 mg. فكم عمر الأحفورة؟

B. يُظن أن عمر عينة من الماموث الصوفي يبلغ 12,000 عام. فما كمية الكربون 14 التي ينبغي أن توجد في الحيوان؟

تتطابق معادلة النمو الأسّي $y = ae^{kt}$ مع صيغة المربحة المركبة المستمرة التي تعلمتها في الدرس 1-5.

النمو السكاني

$$y = ae^{kt}$$

a = التعداد الأولي

y = التعداد في المدة t

k = معدل النمو المستمر

المربحة المركبة المستمرة

$$A = Pe^{rt}$$

P = الكمية الأولية

A = الكمية في المدة t

r = معدل المربحة



الربط بالحياة اليومية

يبلغ عمر أقدم أحفورة للإنسان الحديث، تم العثور عليها في إثيوبيا، 160,000 عام تقريبًا.
المصدر: الإذاعة الوطنية العامة

نصيحة دراسية

التأريخ بالكربون عندما يكون لديك نسبة مئوية أو كسر من التحلل، استخدم المقدار الأصلي من 1 مع a .

مثال 3 من الحياة اليومية النمو الأسّي المستمر

التعداد السكاني في 2007، وصل تعداد سكان ولاية جورجيا إلى 9.36 ملايين نسمة. وفي 2000، وصل إلى 8.18 ملايين.

a. حدد قيمة k ، معدل النمو النسبي لجورجيا.

$$y = ae^{kt} \quad \text{قانون النمو الأسّي المستمر}$$

$$9.36 = 8.18e^{k(7)} \quad y = 9.36 \text{ و } a = 8.18 \text{ و } t = 2007 - 2000 = 7$$

$$\frac{9.36}{8.18} = e^{7k} \quad \text{بقسمة كل طرف على 8.18}$$

$$\ln \frac{9.36}{8.18} = \ln e^{7k} \quad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

$$\ln \frac{9.36}{8.18} = 7k \quad \ln e^x = x$$

$$\frac{\ln \frac{9.36}{8.18}}{7} = k \quad \text{بقسمة كل طرف على 7}$$

$$0.01925 = k \quad \text{باستخدام الآلة الحاسبة}$$

يبلغ معدل النمو النسبي لولاية جورجيا حوالي 0.01925 أو 2% تقريبًا.

b. متى سيبلغ التعداد السكاني لجورجيا 12 مليون نسمة؟

$$y = ae^{kt} \quad \text{قانون النمو الأسّي المستمر}$$

$$12 = 8.18e^{0.01925t} \quad y = 12 \text{ و } a = 8.18 \text{ و } k = 0.01925$$

$$1.4670 = e^{0.01925t} \quad \text{بقسمة كل طرف على 8.18}$$

$$\ln 1.4670 = \ln e^{0.01925t} \quad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

$$\ln 1.4670 = 0.01925t \quad \ln e^x = x$$

$$\frac{\ln 1.4670}{0.01925} = t \quad \text{بقسمة كل طرف على 0.01925}$$

$$19.907 \approx t \quad \text{باستخدام الآلة الحاسبة}$$

سيبلغ التعداد السكاني لجورجيا 12 مليون نسمة بحلول عام 2020.

c. بلغ التعداد السكاني لميتشجن في عام 9.9 2000 مليون ويمكن تمثيله بالآتي $y = 9.9e^{0.0028t}$. حدد متى سيتجاوز تعداد سكان ولاية جورجيا تعداد ميشيغن.

$$8.18e^{0.01925t} > 9.9e^{0.0028t} \quad \text{قانون النمو الأسّي}$$

$$\ln 8.18e^{0.01925t} > \ln 9.9e^{0.0028t} \quad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

$$\ln 8.18 + \ln e^{0.01925t} > \ln 9.9 + \ln e^{0.0028t} \quad \text{خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية}$$

$$\ln 8.18 + 0.01925t > \ln 9.9 + 0.0028t \quad \ln e^x = x$$

$$0.01645t > \ln 9.9 - \ln 8.18 \quad \text{ب طرح } (0.0028t + \ln 8.18) \text{ من كل طرف}$$

$$t > \frac{\ln 9.9 - \ln 8.18}{0.01645} \quad \text{بقسمة كل طرف على 0.01645}$$

$$t > 11.6 \quad \text{باستخدام الآلة الحاسبة}$$

تجاوز التعداد السكاني لجورجيا تعداد ميشيغن في 2012.

تمرين موجّه

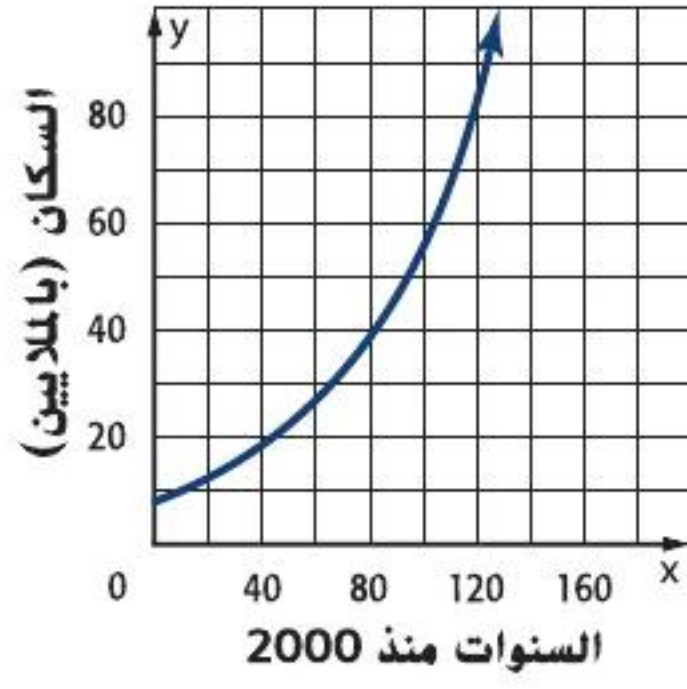
3. الأحياء تنمو أحد أنواع الجراثيم أسّيًا وفق التمثيل $y = 1000e^{kt}$. حيث t هي الزمن بالدقائق.

A. إذا كان هناك 1000 خلية بشكل أولي و 1650 خلية بعد 40 دقيقة، فجد قيمة k للجراثيم.

B. افترض أن هناك نوعًا آخر من الجراثيم ينمو أسّيًا وفق التمثيل $y = 50e^{0.0432t}$. فحدد مقدار الزمن الذي سيمر قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذا النوع من الجراثيم عدد خلايا النوع الآخر منها.

نصيحة في حل المسائل

استخدام القوانين عند التعامل مع التعداد السكاني، يلزم دائمًا تقريبًا استخدام قانون النمو والاضمحلال الأسّي.



2 النمو اللوجستي ارجع إلى المعادلة التي تمثل التعداد السكاني لجورجيا في المثال 3. وفقًا للتمثيل البياني على اليسار، سيصل تعداد جورجيا إلى حوالي واحد مليار نسمة بحلول 2130. فهل يبدو ذلك منطقيًا؟

لا يمكن أن ينمو تعداد السكان بصورة لانهائية. فهناك قيود مثل إمدادات الغذاء والحروب ومكان المعيشة والأمراض والموارد المتوفرة، وما إلى ذلك.

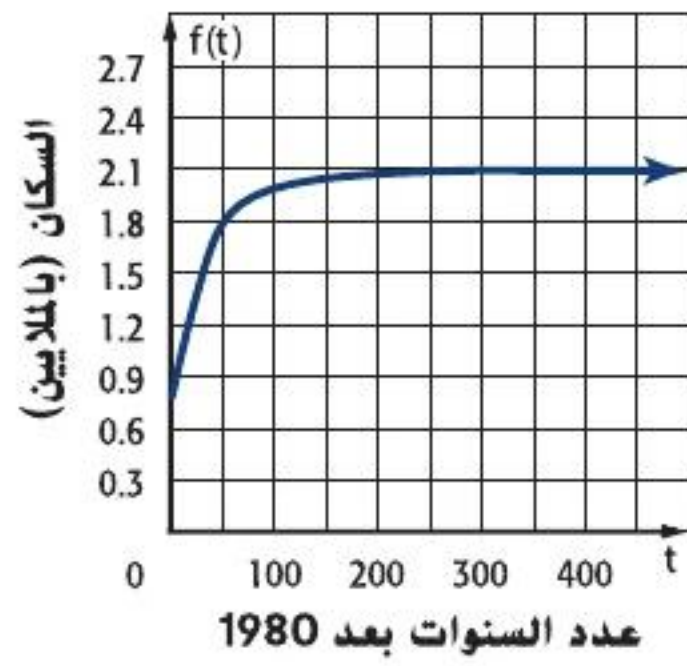
النمو الأسّي غير مقيد، بمعنى أنه يتزايد دون توقف. أما **نموذج النمو اللوجستي**، فيمثل النمو الذي له عامل مُحدّد. وتعد النماذج اللوجستية النماذج الأدق لتمثيل النمو السكاني.

المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجستي

افترض أن a و b و c هي الثوابت الموجبة حيث $b < 1$. ويتم تمثيل دالة النمو اللوجستي بالآتي $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$ حيث t تمثل الزمن.

مثال 4 من الحياة اليومية النمو اللوجستي

يمكن تمثيل التعداد السكاني لمدينة فينيكس بأريزونا بالملايين بالدالة اللوجستية $f(t) = \frac{2.0666}{1 + 1.66e^{-0.048t}}$ حيث t هي عدد السنوات بعد 1980.



a. مثل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 500$.

b. ما خط التقارب الأفقي؟

يقع خط التقارب الأفقي عند $y = 2.0666$.

c. هل سيزداد تعداد مدينة فينيكس بصورة لانهائية؟ إذا كانت الإجابة لا، فما سيكون أقصى تعداد سكاني لها؟ لا، ستكون ذروة التعداد السكاني أقل من 2.0666 نسمة بقليل.

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد مدينة فينيكس إلى 1.8 نسمة؟

يشير التمثيل البياني إلى أن التعداد سيصل 1.8 مليون نسمة في $t \approx 50$. وباستبدال $f(t)$ بـ 1.8 وإيجاد قيمة t في المعادلة ينتج $t = 50.35$ عامًا. إذًا، سيبلغ تعداد مدينة فينيكس 1.8 مليون في 2031.

الربط بالحياة اليومية

تعتبر مدينة فينيكس خامس أكبر مدينة في الولايات المتحدة ولها تعداد سكاني يصل إلى 1.5 مليون نسمة.

نصيحة دراسية

التقاطعات لتحديد الموضع الذي يتقاطع فيه التمثيل البياني مع 1.8 على الآلة الحاسبة، مثل بيانيًا النقطة $y = 1.8$ على التمثيل البياني نفسه وحدد $intersection$ من قائمة CALC.

تمرين موجّه

4. يمكن تمثيل تعداد أحد أنواع الأسماك في بحيرة ما بعد t من السنوات بالدالة $P(t) = \frac{1880}{1 + 1.42e^{-0.037t}}$ حيث $t \geq 0$.

A. مثل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 500$.

B. ما خط التقارب الأفقي؟

C. ما أقصى تعداد للسماك في البحيرة؟

D. متى سيصل التعداد 1875؟

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2

1. **علم الأحياء القديمة** يبلغ عمر النصف للبوتاسيوم 40 حوالي 1.25 مليار عام.
 - a. حدد قيمة k ومعادلة تحليل البوتاسيوم 40.
 - b. تحتوي عينة حاليًا على 36 mg من البوتاسيوم 40. فكم من الزمن ستستغرقه العينة في التحلل لتصل إلى 15 mg فقط من البوتاسيوم 40؟
 - c. كم عدد مللي جرامات البوتاسيوم 40 التي سوف تبقى بعد 300 مليون عام؟
 - d. كم الزمن الذي سيستغرقه البوتاسيوم 40 للتحلل إلى ثمن مقداره الأصلي؟

مثال 3

2. **العلوم** سقط نوع معين من الطعام على الأرض. وتنمو عليه الجراثيم أُسّيًا وفق النموذج $y = 2e^{kt}$. حيث t الوقت بالثواني.
 - a. إذا كان هناك خليتان بشكل أولي و 8 خلايا بعد 20 ثانية، فجد قيمة k للجراثيم.
 - b. تنص "قاعدة الثواني الخمس" على أنه إذا تناول شخص طعامًا قد أسقطه على الأرض في غضون 5 ثوانٍ فلن يكون هناك ضرر. ما مقدار الجراثيم التي ستكون على الطعام بعد 5 ثوانٍ؟
 - c. هل ستتناول طعامًا سقط على الأرض لمدة 5 ثوانٍ؟ لِمَ أو لِمَ لا؟ هل تعتقد أن المعلومات التي لديك في هذا التمرين معقولة؟ اشرح.

مثال 4

3. **علم الحيوان** افترض أن تعداد الثعالب الحمراء في موطنها المحدد يتبع الدالة $P(t) = \frac{16,500}{1 + 18e^{-0.085t}}$ حيث t تمثل الزمن بالسنوات.
 - a. مثل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 200$.
 - b. ما خط التقارب الأفقي؟
 - c. ما الحد الأقصى للتعداد؟
 - d. متى سيصل التعداد إلى 16,450؟

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2

4. **المثابرة** يبلغ عمر النصف للروبيديوم 87 حوالي 48.8 مليار عام.
 - a. حدد قيمة k ومعادلة تحليل الروبيديوم 87.
 - b. تحتوي عينة حاليًا على 50 mg من الروبيديوم 87. فكم من الزمن ستستغرقه العينة في التحلل لتصل إلى 18 mg فقط من الروبيديوم 87؟
 - c. كم عدد مللي جرامات الروبيديوم 87 التي سوف تبقى بعد 800 مليون عام؟
 - d. كم الزمن الذي سيستغرقه الروبيديوم 87 للتحلل إلى سدس مقداره الأصلي؟

مثال 3

5. **الأحياء** ينمو نوع محدد من الجراثيم أُسّيًا وفق النموذج $y = 80e^{kt}$. حيث t هي الزمن بالدقائق.
 - a. إذا كان هناك 80 خلية بشكل أولي و 675 خلية بعد 30 دقيقة، فجد قيمة k للجراثيم.
 - b. متى سيصل تعداد الجراثيم إلى 6000 خلية؟
 - c. إذا كان هناك نوع آخر من الجراثيم ينمو أُسّيًا وفق النموذج $y = 35e^{0.0978t}$ فحدد مقدار الزمن الذي سيمر قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذا النوع من الجراثيم عدد خلايا النوع الآخر منها.

مثال 4

6. **الغابات** يتبع عدد الأشجار في غابة معينة الدالة $f(t) = \frac{18000}{1 + 16e^{-0.084t}}$ حيث t هو الزمن بالسنوات.
 - a. مثل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \leq t \leq 100$.
 - b. متى سيصل العدد إلى 17500 شجرة؟

7. **علم الأحياء القديمة** عثر أحد علماء الأحياء القديمة على عظمة بشرية وحدد أن مقدار الكربون 14 الموجود في العظمة يساوي 85% من ذلك الذي كان في أنسجة العظم الحية. فما عمر هذه العظمة؟

8. **أنثروبولوجيا** حدد أحد علماء الأنثروبولوجيا أن عمر عظمة بشرية مكتشفة حديثاً يبلغ 8000 عام. فما مقدار الكربون 14 الموجود في العظمة مقارنة بالمقدار الأصلي؟

9. **الاضمحلال الإشعاعي** تم تخزين 100 mg من اليورانيوم 238 في حاوية. فإذا كان عمر النصف لليورانيوم 238 يبلغ 4.47 مليارات عام، فبعد كم عام سيوجد 10 mg فقط؟

10. **النمو السكاني** نمت عدد سكان مدينة أوريغون من 3.4 ملايين في عام 2000 إلى 3.7 ملايين في عام 2006.
 a. اكتب معادلة نمو أُسي بالصورة $y = ae^{kt}$ لأوريغون، حيث t هو عدد الأعوام بعد عام 2000.
 b. استخدم معادلتك للتنبؤ بتعداد سكان أوريغون في عام 2020.
 c. وفقاً للمعادلة، متى ستصل مدينة أوريغون إلى 6 ملايين نسمة؟

11. **نصف العمر** مادة يتحلل 9.99% من إجمالي كتلتها بعد 200 عام. حدد نصف العمر للمادة.

12. **النمو اللوجستي** يمكن تمثيل تعداد سكان ولاية أوهايو بالملايين بعد عام 1900 بالآتي $P(t) = \frac{12.95}{1 + 2.4e^{-kt}}$ حيث t هي عدد الأعوام بعد 1900 و k هي الثابت.
 a. إذا كان تعداد سكان أوهايو 10 ملايين في عام 1970، فجد قيمة k .
 b. وفقاً للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوهايو إلى 12 مليون؟

13. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف نمو التعداد السكاني. يتبع النمو السكاني لبلد ما الدالة الأسية $f(t) = 8e^{0.075t}$ أو الدالة اللوجستية $g(t) = \frac{400}{1 + 16e^{-0.025t}}$. يتم قياس التعداد السكاني بالملايين وتكون t الزمن بالسنوات.
 a. **بيانياً** مثل الدالتين بيانياً عندما يكون $0 \leq t \leq 100$.
 b. **تحليلياً** حدد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. ما أهمية هذا التقاطع؟
 c. **تحليلياً** أي دالة تعد تقريباً أكثر دقة لتعداد البلد بعد 100 عام من الآن؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا

14. **مسألة غير محددة الإجابة** قدّم مثلاً على كمية تنمو أو تضمحل بمعدل ثابت. واكتب مسألة من الحياة اليومية تتضمن ذلك المعدل وجد حلها باستخدام اللوغاريتمات.

15. **التحدي** حلّ $\frac{120,000}{1 + 48e^{-0.015t}} = 24e^{0.055t}$ عندما تكون t .

16. **فرضيات** اشرح رياضياً لماذا تقترب $f(t) = \frac{c}{1 + 60e^{-0.5t}}$ من القيمة c بينما $t \rightarrow +\infty$ ولكن لا تصل إليها أبداً.

17. **مسألة غير محددة الإجابة** قدّم مثلاً على كمية تنمو لوجيستياً ومحدودة النمو، واطرح لماذا تنمو الكمية بهذه الطريقة.

18. **الكتابة في الرياضيات** كيف تُستخدم الدوال الأسية والأسية المستمرة اللوجستية في تمثيل المواقف المختلفة من الحياة اليومية؟

تمارين على الاختبار المعياري

21. SAT/ACT صنع بدر لعبة من أجل فعالية في مدرسة ابنته. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 in، فما المساحة التقريبية للقطاع الواحد؟

- A 4 in^2 D 127 in^2
B 14 in^2 E 254 in^2
C 32 in^2

22. إحصائيات في استقصاء شمل 90 مدرب لياقة بدنية، قال 15 منهم أنهم مارسوا الركض على الأقل 5 مرات في الأسبوع. ومن تلك المجموعة، قال 5 أنهم مارسوا السباحة أيضًا خلال الأسبوع، ويوجد على الأقل 25% من جميع مدربي اللياقة البدنية من يمارس الركض والسباحة كل أسبوع. فما النتيجة الصحيحة بناءً على المعلومات المعطاة؟

- F التقرير دقيق لأن 15 من 90 يساوي 25%.
G التقرير دقيق لأن 5 من 15 يساوي 33%. أي على الأقل 25%.
H التقرير غير دقيق لأن 5 من 90 يساوي 6.5% فقط.
J التقرير غير دقيق لأنه لا أحد يعرف ما إذا كانت السباحة ممارسة رياضية بالفعل أم لا.

19. يرسم ناصر تمثيلًا بيانيًا دائريًا يوضح نكهات المثلجات المفضلة لدى العملاء في متجره. يلخص الجدول البيانات. ما الزاوية المركزية التي ينبغي على ناصر استخدامها مع الجزء الذي يمثل الشيكولاتة؟

النكهة	العملاء
الشيكولاتة	35
الفانيليا	42
الفراولة	7
نعناع بقطع الشيكولاتة	12
الجوز والزبد	4

- A 35° C 126°
B 63° D 150°

20. احتمالية مع هالة 6 كتب في مكتبتها. اثنان منها كتب أدبية، وواحد كتاب علمي، واثنان كتب رياضيات، وواحد قاموس. ما احتمال أن تختار عشوائيًا الكتاب العلمي والقاموس؟

- F $\frac{1}{3}$ H $\frac{1}{12}$
G $\frac{1}{4}$ J $\frac{1}{15}$

مراجعة شاملة

اكتب معادلة أسية أو لوغاريتمية مكافئة. (الدرس 1-5)

23. $e^7 = y$ 24. $e^{2n-4} = 36$ 25. $\ln 5 + 4 \ln x = 9$

السدة	الموقع	العام
6.0	يوغوسلافيا	1963
7.8	بيرو	1970
7.0	أرمينيا	1988
6.4	المغرب	2004
8.4	إندونيسيا	2007
7.0	هايتي	2010

26. زلازل يبين الجدول جسامه بعض أقوى الزلازل. (تلميح: زلزال بجسامه x له شدة 10^x). (الدرس 1-3 و 1-4)
- a. أي زلازل كانت شدة أحدهما تساوي 10 مرات شدة الآخر؟ أي زلازل كانت شدة أحدهما تساوي 100 مرة شدة الآخر؟
- b. ماذا ستكون جسامه زلزال تبلغ شدته 1000 مرة مثل شدة زلزال 1963 في يوغوسلافيا؟
- c. افترض أنك تعرف أن $\log_7 2 \approx 0.3562$ و $\log_7 3 \approx 0.5646$. صف طريقتين مختلفتين يمكنك استخدامهما لتقريب $\log_7 2.5$. (يجوز لك استخدام الآلة الحاسبة بالطبع.) ثم صف كيف يمكنك التحقق من النتيجة.

مراجعة المهارات

حل كل معادلة واكتبها في أبسط صورة.

27. $\frac{8}{5}x = \frac{4}{15}$ 28. $\frac{27}{14}n = \frac{6}{7}$ 29. $\frac{3}{10} = \frac{12}{25}a$ 30. $\frac{6}{7} = 9p$
31. $\frac{9}{8}b = 18$ 32. $\frac{6}{7}y = \frac{3}{4}$ 33. $\frac{1}{3}z = \frac{5}{6}$ 34. $\frac{2}{3}q = 7$

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 1-1 إلى 1-4)

- افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. حيث $x > 0$. هناك عدد y مثل $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$.
- لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات عوامله.
- لوغاريتم ناتج القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمي البسط والمقام..
- لوغاريتم القوة يساوي ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس.
- قانون تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية (الدرس 1-5)

- بما أن دالة الأساس الطبيعية ودالة اللوغاريتم الطبيعية دالتان عكسيتان، يمكن استخدام هاتين الدالتين في "إلغاء" بعضهما البعض.

استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية (الدرس 1-6)

- يمكن تمثيل النمو الأسي بالدالة $f(x) = ae^{kt}$. حيث k هو ثابت يمثل معدل النمو المستمر.
- يمكن تمثيل الاضمحلال الأسي بالدالة $f(x) = ae^{-kt}$. حيث k هو ثابت يمثل معدل الاضمحلال المستمر.

المفردات الأساسية

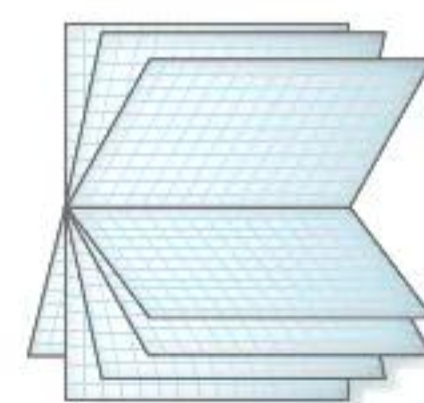
الأساس الطبيعي، e (natural base)	صيغة تغيير الأساس Change of Base Formula
الدالة الأسية للأساس الطبيعي	لوغاريتم عادي common logarithm
natural base exponential function	اللوغاريتم logarithm
لوغاريتم طبيعي natural logarithm	المعادلة اللوغاريتمية logarithmic equation
معدل الاضمحلال المستمر rate of continuous decay	الدالة اللوغاريتمية logarithmic function
معدل النمو المستمر rate of continuous growth	المتباينة اللوغاريتمية logarithmic inequality
	نموذج النمو اللوجيستي (logistic growth model)

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه الكلمة أو المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

1. في $x = b^y$ ، المتغير y يُسمى _____ لـ x .
2. تُسمى لوغاريتمات الأساس 10 _____.
3. يتيح لك _____ كتابة التعابير اللوغاريتمية المتكافئة ذات الأسس المختلفة.
4. الدالة $y = \log_b x$ ، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ ، تُسمى $a(n)$ _____.
5. الدالة الأسية ذات الأساس e تُسمى _____.
6. اللوغاريتم ذو الأساس e يُسمى _____.
7. العدد e يُشار إليه بالاسم _____.

مطويات منظّم الدراسة



تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

1-1 اللوغاريتمات والدوال اللوغارتمية

مثال 1

جد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$ ليكن اللوغاريتم يساوي y

$64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم

$2^6 = 2^y$ $64 = 2^6$

$6 = y$ خاصية المساواة في الدوال الأسية

8. اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ في صيغة أس.

9. اكتب $10^2 = 100$ في صورة لوغاريتم.

جد قيمة كل تعبير.

10. $\log_4 256$

11. $\log_2 \frac{1}{8}$

ارسم التمثيل البياني لكل دالة.

12. $f(x) = 2 \log_{10} x + 4$ 13. $f(x) = \frac{1}{6} \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$

1-2 حل المعادلات والمتباينات اللوغارتمية

مثال 2

حلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$ المتباينة الأصلية

$x < 27^{\frac{2}{3}}$ لوغاريتم متباينة أسية

$x < 9$ ببسط

مثال 3

حلّ المعادلة $\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$.

$\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$ المتباينة الأصلية

$p^2 - 2 = p$ خاصية المعادلة

$p^2 - p - 2 = 0$ من كل طرف p اطرح

$(p - 2)(p + 1) = 0$ العامل

$p - 2 = 0$ أو $p + 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب صفر

$p = 2$ $p = -1$ جد حل كل معادلة

الحل يساوي $p = 2$. حيث $\log_5 p$ غير معرّف عندما $p = -1$.

حلّ كل معادلة أو متباينة.

14. $\log_4 x = \frac{3}{2}$

15. $\log_2 \frac{1}{64} = x$

16. $\log_4 x < 3$

17. $\log_5 x < -3$

18. $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$

19. $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$

20. $\log_3 (3x + 4) \leq \log_3 (x - 2)$

21. **الزلازل** تُقاس شدة الزلازل بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر. ويتم الحصول على الشدة M باستخدام $M = \log_{10} x$. حيث x تمثل سعة موجة الزلازل المتسبب في حركة الأرض. ما مقدار شدة السعة الناتجة عن زلزال شدته 10 على مقياس ريختر بالنسبة إلى موجة ارتدادية شدتها 7 على مقياس ريختر؟

1-3 خواص اللوغاريتمات

مثال 4

استخدم $\log_5 16 \approx 1.7227$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب $\log_5 32$.

$$\begin{aligned}\log_5 32 &= \log_5 (16 \cdot 2) && \text{استبدل 32 بـ 16} \\ &= \log_5 16 + \log_5 2 && \text{خاصية الضرب} \\ &\approx 1.7227 + 0.4307 && \text{استخدم حاسبة} \\ &\approx 2.1534\end{aligned}$$

مثال 5

حلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$.

$$\begin{aligned}\log_3 3x + \log_3 4 &= \log_3 36 && \text{المعادلة الأصلية} \\ \log_3 3x(4) &= \log_3 36 && \text{خاصية الضرب} \\ 3x(4) &= 36 && \text{تعريف اللوغاريتم} \\ 12x &= 36 && \text{اضرب} \\ x &= 3 && \text{اقسم كل طرف على 12}\end{aligned}$$

استخدم $\log_5 16 \approx 1.7227$ and $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل تعبير.

$$\begin{aligned}22. \log_5 8 & & 23. \log_5 64 \\ 24. \log_5 4 & & 25. \log_5 \frac{1}{8} \\ 26. \log_5 \frac{1}{2}\end{aligned}$$

حلّ كل معادلة مما يلي. وتحقق من حلّك.

$$\begin{aligned}27. \log_5 x - \log_5 2 &= \log_5 15 \\ 28. 3 \log_4 a &= \log_4 27 \\ 29. 2 \log_3 x + \log_3 3 &= \log_3 36 \\ 30. \log_4 n + \log_4 (n - 4) &= \log_4 5\end{aligned}$$

31. **الصوت** استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$ حيث L هو ارتفاع الصوت و R هو الشدّة النسبية للصوت. في إيجاد كم سيكون مقدار ارتفاع صوت 20 شخصًا يتحدثون عن صوت شخص واحد. افترض أن صوت الشخص المتحدث تساوي الشدّة النسبية له 80 ديسيبل.

1-4 اللوغاريتمات العادية

مثال 6

حلّ المتباينة $5^{3x} > 7^{x+1}$.

$$\begin{aligned}5^{3x} &> 7^{x+1} && \text{المتباينة الأصلية} \\ \log 5^{3x} &> \log 7^{x+1} && \text{خاصية متباينة} \\ 3x \log 5 &> (x+1) \log 7 && \text{خاصية القوى} \\ 3x \log 5 &> x \log 7 + \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ 3x \log 5 - x \log 7 &> \log 7 && \text{اطرح } x \log 7 \\ x(3 \log 5 - \log 7) &> \log 7 && \text{خاصية التوزيع} \\ x &> \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7} && \text{اقسم على } 3 \log 5 - \log 7 \\ x &> 0.6751 && \text{استخدم الحاسبة} \\ \text{مجموعة الحل هي } &\{x \mid x > 0.6751\}\end{aligned}$$

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned}32. 3^x &= 15 & 33. 6^{x^2} &= 28 \\ 34. 8^{m+1} &= 30 & 35. 12^{r-1} &= 7r \\ 36. 3^{5n} &> 24 & 37. 5^{x+2} &\leq 3^x\end{aligned}$$

38. **المودرات** لقد أودعت AED 1000 في حساب بنكي يدفع معدل فائدة سنوي r بنسبة 5% مركبة في كل فصل. باستخدام $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. ما المدة المستغرقة لتمتلك مبلغ AED 1500 في حسابك؟

b. ما المدة التي سيتضاعف خلالها مالك؟

دليل الدراسة والمراجعة تابع

1-5 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

مثال 7

حلّ المعادلة $3e^{5x} + 1 = 10$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\begin{aligned} 3e^{5x} + 1 &= 10 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3e^{5x} &= 9 && \text{اطرح 1 من كلا الطرفين} \\ e^{5x} &= 3 && \text{اقسم كل طرف على 3} \\ \ln e^{5x} &= \ln 3 && \text{خاصية المعادلة} \\ 5x &= \ln 3 && \ln e^x = x \\ x &= \frac{\ln 3}{5} && \text{اقسم كل طرف على 5} \\ x &\approx 0.2197 && \text{استخدم الحاسبة} \end{aligned}$$

حلّ كل معادلة أو متباينة. قرّب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

$$39. 4e^x - 11 = 17 \quad 40. 2e^{-x} + 1 = 15$$

$$41. \ln 2x = 6 \quad 42. 2 + e^x > 9$$

$$43. \ln(x + 3)^5 < 5 \quad 44. e^{-x} > 18$$

45. **المودرات** إذا أودعت AED 2000 في حساب يقدم نسبة فائدة مركبة 6.4%، فما المدة المستغرقة حتى يصبح المبلغ ثلاثة أضعاف القيمة الأصلية؟ استخدم $A = Pe^{rt}$.

1-6 استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

مثال 8

تزيد سلالة من البكتريا من 250 إلى 2000 خلال 1.5. جد قيمة الثابت k في صيغة النمو. باستخدام $y = ae^{kt}$.

$$\begin{aligned} y &= ae^{kt} && \text{صيغة النمو الأسّي} \\ 2000 &= 250e^{k(1.5)} && \text{استبدل } y \text{ بـ } 2000, \text{ و } a \text{ بـ } 250, \\ &&& \text{و } t \text{ بـ } 1.5 \\ 8 &= e^{1.5k} && \text{اقسم كل طرف على 250} \\ \ln 8 &= \ln e^{1.5k} && \text{خاصية المعادلة} \\ \ln 8 &= 1.5k && \text{خاصية المعكوس} \\ \frac{\ln 8}{1.5} &= k && \text{اقسم كل طرف على 1.5} \\ 1.3863 &\approx k && \text{استخدم الحاسبة} \end{aligned}$$

46. **سيارات** اشترى أيوب سيارة مستعملة بمبلغ AED 2500. ومن المتوقع أن تنخفض قيمتها بنسبة 25% سنوياً. كم ستكون قيمة السيارة بعد 3 سنوات؟

47. **علم الأحياء** في سلالة معينة من البكتريا، k تساوي 0.728. عند قياس t بالأيام. باستخدام الصيغة $y = ae^{kt}$ ، ما المدة التي ستستغرقها 10 من البكتريا ليزيد عددها وتصبح 675؟

48. **تعداد السكان** كان تعداد سكان المدينة منذ 20 عاماً يبلغ 24,330 نسمة. ومنذ ذلك الحين، يزداد تعداد السكان بمعدل ثابت كل عام. إذا كان تعداد السكان حالياً 55,250، فجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة.

تدريب على الاختبار

7. **المدخرات** لقد وضعت AED 7500 في حساب إيداع يقدم فائدة نسبة مركبة قيمتها 3%.

a. بافتراض عدم وجود أي عمليات سحب أو إيداع أخرى من الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 5 أعوام؟

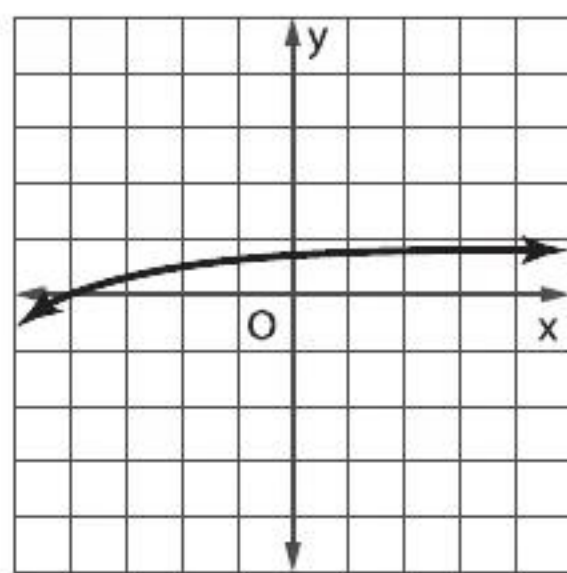
b. ما المدة التي ستتضاعف خلالها المدخرات؟

c. كم سنة ستمر حتى يصبح لديك AED 10.000 في حسابك؟

8. **اختيار من متعدد** ما حل $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$ ؟

- F $\frac{1}{2}$
- G 2
- H 4
- J 8

9. **اختيار من متعدد** ما الدالة المُمثلة في التمثيل البياني أدناه؟



- A $y = \log_{10} (x - 5)$
- B $y = 5 \log_{10} x$
- C $y = \log_{10} (x + 5)$
- D $y = -5 \log_{10} x$

10. اكتب $2 \ln 6 + 3 \ln 4 - 5 \ln \left(\frac{1}{3}\right)$ في صورة لوغاريتم مفرد.

استخدم $\log_5 11 \approx 1.4899$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب القيمة في كل تعبير.

- 1. $\log_5 44$
- 2. $\log_5 \frac{11}{2}$

3. **تعداد السكان** كان تعداد سكان إحدى المدن من 10 سنوات 150,000. ومنذ ذلك الحين، كان تعداد السكان يزيد بمعدل ثابت كل عام. وبلغ تعداد السكان حاليًا 185,000.

a. اكتب معادلة أسية يمكن استخدامها في تمثيل تعداد السكان بعد x سنوات إذا كان تعداد السكان يتغير بالمعدل نفسه.

b. كم سيصبح تعداد السكان بعد 25 عامًا؟

4. اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ في صيغة أسية.

5. **زراعة** المعادلة التي تمثل انخفاض عدد المزارع الأمريكية هي $y = 3,962,520(0.98)^x$. حيث x هو عدد السنوات منذ عام 1960 و y هو عدد المزارع.

a. كيف يمكنك تحديد أن العدد ينخفض؟

b. ما المعدل السنوي لانخفاض العدد؟

c. توقع متى سيكون عدد المزارع أقل من مليون.

6. **اختيار من متعدد** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$ ؟

- A -3
- B $-\frac{1}{3}$
- C $\frac{1}{3}$
- D 3

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام التقنية

سيفيدك استخدام الحاسبة في الاختبارات المعيارية. فقد تجد بعض المسائل التي تشتمل على خطوات أو عمليات حسابية تتطلب استخدام الحاسبة. وتفيد الحاسبة أيضًا في حل المسألة بسرعة أكبر.

إستراتيجيات استخدام التقنية

الخطوة 1

الحاسبة أداة مفيدة، ولكن ينبغي ألا تفرط في استخدامها. ولقد وضعت الاختبارات المعيارية لقياس قدرتك على التفكير وحل المسائل، وليس لقياس قدرتك على الضغط على مفاتيح الحاسبة.

اسأل نفسك قبل أن تستخدم الحاسبة:

- كيف يمكنني حل هذا النوع من المسائل بالطريقة العادية؟
- هل هناك أي خطوات لا يمكنني أداؤها ذهنيًا أو باستخدام الورقة والقلم؟
- هل الحاسبة ضرورية حقًا لحل هذه المسألة؟
- هل ستساعدني الحاسبة في حل هذه المسألة بطريقة أسرع أو بطريقة أكثر كفاءة؟

الخطوة 2

متى يكون استخدام الحاسبة مفيدًا؟

- حل المسائل التي تتضمن عمليات حسابية مطولة ومعقدة
- حل مسائل معينة تتضمن دالات تمثيل بياني، ودالات تقويم، وحل المعادلات وهكذا
- التحقق من حلول المسائل

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

تتكون علبة المشروبات الغازية من 60 mg من الكافيين. يتخلص الجسم من الكافيين بمعدل 15% في الساعة. ما عمر النصف للكافيين؟ أي، كم ساعة يأخذ الجسم ليتخلص من نصف الكافيين؟

A 4 ساعات C 4.5 ساعة

B 4.25 ساعات D 4.75 ساعة

اقرأ المسألة بعناية. يمكنك حل المسألة باستخدام الدالة الأسية. استخدم قانون الاضمحلال الأسّي في تمثيل المسألة وإيجاد عمر النصف للكافيين.

$$y = a(1 - r)^t$$

$$y = 60(1 - 0.15)^t$$

نصف 60 mg يساوي 30. إذا، افترض أن $y = 30$ وجد قيمة t .

$$30 = 60(1 - 0.15)^t$$

$$0.5 = (0.85)^t$$

خذ $\log$ كل طرف واستخدم خاصية القوى.

$$\log 0.5 = \log (0.85)^t$$

$$\log 0.5 = t \log 0.85$$

$$\frac{\log 0.5}{\log 0.85} = t$$

من الضروري عند هذه النقطة أن تستخدم الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتمات وحل المسألة. ويبين ذلك أن $t \approx 4.265$. إذا، عمر النصف للكافيين يساوي 4.25 تقريبًا. الإجابة الصحيحة هي B.

تمارين

3. أودعت خديجة AED 2500 في بنك CD حسب الشروط المذكورة أدناه.

CD الخارق!
اكسب 4.25% مريحة مركبة يوميًا
(ودبعة لا تقل عن AED 1000 لمدة 12 شهرًا على الأقل)

استخدم الصيغة المذكورة أدناه لإيجاد t . عدد السنوات اللازمة لكسب AED 250 كفايدة من بنك CD.

$$2750 = 2500 \left(1 + \frac{0.0425}{365}\right)^{365t}$$

A 2.15 سنة تقريبًا

B 2.24 سنة تقريبًا

C 2.35 سنة تقريبًا

D 2.46 سنة تقريبًا

اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. اشترى عمر مؤخرًا شاحنة جديدة سعرها AED 34750. وتنخفض قيمة الشاحنة بنسبة 12% سنويًا. كم ستكون القيمة التقريبية للشاحنة بعد 7 سنوات من شرائها؟ D

A AED 13,775

B AED 13,890

C AED 14,125

D AED 14,200

2. A رُميت كرة السلة لأعلى بسرعة 105 ft/sec. وتم رمي الكرة عندما كانت على بُعد 5 ft من الأرض. يمكن الحصول على ارتفاع كرة السلة t بعد ثوانٍ من رميها من الصيغة $h(t) = -16t^2 + 105t + 5$. جد زمن وصول الكرة إلى أقصى ارتفاع لها.

F 1.0 s

H 6.6 s

G 3.3 s

J 177.3 s

تدريب على الاختبار المعياري

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها لك معلمك أو في ورقة أخرى.

1. افترض أن هناك 3500 طائر فقط من نوع مهدد بالانقراض تعيش على إحدى الجزر، ولكن ينخفض تعداد تلك الطيور بمعدل يبلغ 5% تقريباً سنوياً.

توقع الدالة الخوارزمية $\log_{0.95} 3500$ عدد السنوات التي سينخفض خلالها التعداد إلى العدد . ما الفترة التي سيصل خلالها تعداد الطيور إلى 3000 طائر؟

- F 2 سنتين
G 3 سنوات
H 5 سنوات
J 8 سنوات

2. وجد عبد الرحمن أن إجمالي تكلفة تأجير سيارة يمكن تمثيلها بالمعادلة $125 + 0.35x$ ، حيث عدد الأميال التي قادها. إذا كان إجمالي تأجير السيارة AED 363، فكم ميلاً قادها عبد الرحمن؟

- F 125
G 238
H 520
J 680

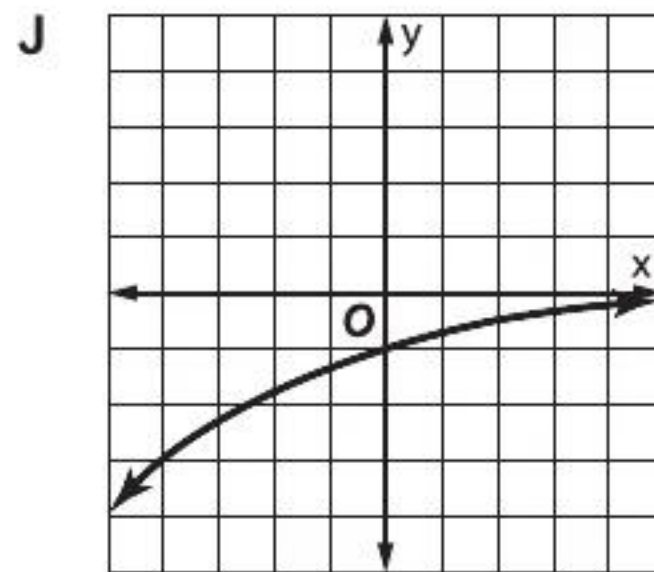
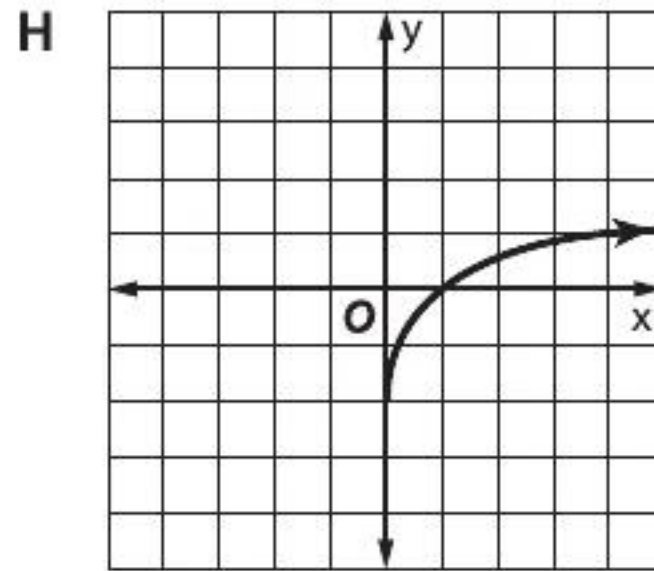
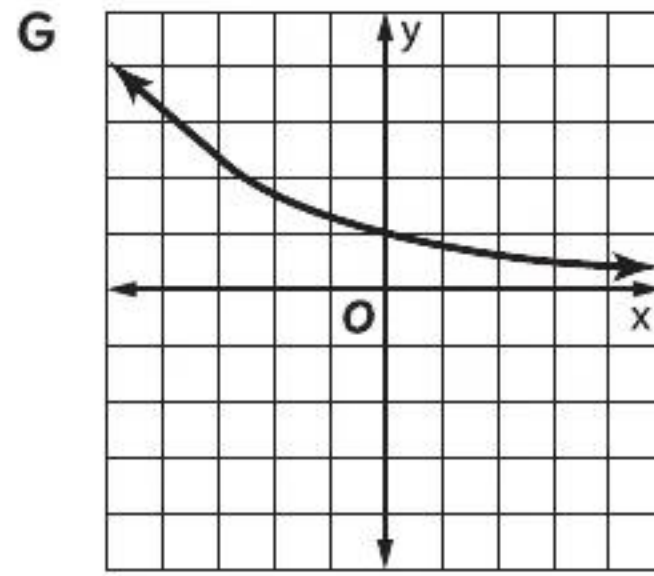
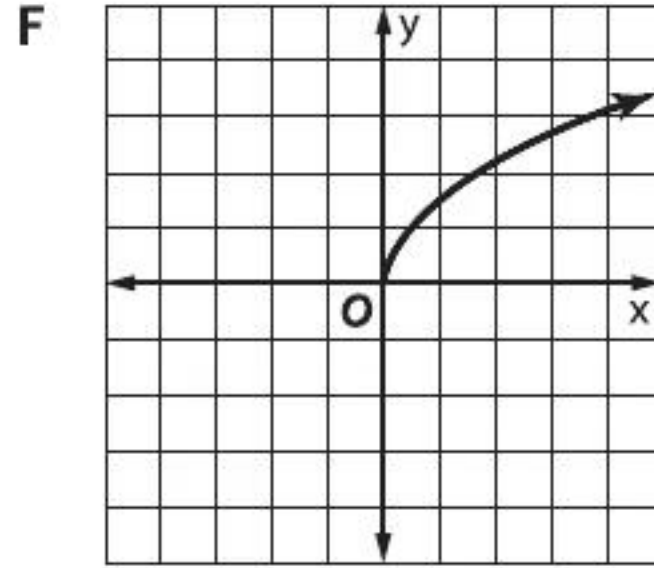
3. أي مما يلي يقدم أفضل وصف للتمثيل البياني $3y = 4x - 3$ و $8y = -6x - 5$ ؟

- A الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور .
B الخطوط لها نقطة التقاطع نفسها مع المحور .
C الخطوط متعامدة.
D الخطوط متوازية

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 استخدم التقنية وخصائص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة t عندما تكون $p = 3000$.

4. ارسم التمثيل البياني $\log_5 =$.



5. تبيع مكتبة رايان كتابين مستخدمين بسعر AED 7.99. إجمالي تكلفة شراء من الكتب يمكن إيجادها من —

- A ضرب في .
B ضرب في 5.
C ضرب في تكلفة الكتاب الواحد.
D قسمة على

الإجابة الموسعة

سجل إجاباتك في ورقة، واكتب الحل هنا.

10. افترض أن عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض في منطقة معينة قد يزيد بمعدل سنوي 10% تقريباً منذ عام 1995. وكان عدد تلك الغزلان 135.000 عام 1995.

a. اكتب معادلة لتمثيل عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض بعد t من السنوات.

b. كم تقريباً عدد الغزلان ذات الذيل الأبيض التي كانت تعيش في هذه المنطقة عام 2000؟ قَرّب إجابتك إلى أقرب مئة غزال.

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

6. اشترت سوزان سيارة جديدة هذا العام بسعر AED 33.750. ويتوقع أن تنخفض قيمة هذه السيارة بمعدل 10.5% سنوياً. كم ستكون القيمة **التقريبية** للسيارة بعد 6 سنوات من شرائها؟ اكتب الحل هنا.

7. يحل أيوب نظام المعادلات $8x - 2y = 12$ و $-15x + 2y = -19$ باستخدام الاختزال. وستجد حله أدناه.

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 12 \\ -15x + 2y = -19 \\ \hline -7x = 7 \\ x = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 12 \\ 82 - (1 - y) = 12 \\ -8 - 2y = 12 \\ -2y = 20 \\ y = -10 \end{array}$$

الحل هو $(-1, -10)$.

a. ما الخطأ الذي ارتكبه أيوب؟

b. ما الحل الصحيح لنظام المعادلات؟ اكتب الحل هنا.

8. **إجابة شبكية** إذا كان $f(x) = 3x$ وكان $g(x) = x^2 - 1$. فما قيمة $f(g(-3))$ ؟

9. حوّل لأبسط صورة $(-2a^{-2}b^{-6})(-3a^{-1}b^8)$.

الدوال والعلاقات النسبية



Chapter 5: Rational Functions and Relations, from Integrated Math III Chapter 7 © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة

السابق ..

استخدام التحليل إلى العوامل لحل المعادلات التربيعية وتمثيل المعادلات التربيعية بيانياً.

الحالي ..

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
 - تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة.
 - تمثيل الدوال النسبية بيانياً.
 - حل مسائل التغير الطردي والمشتك والعكسي.
 - حل المعادلات والمتباينات النسبية.

لماذا؟ ▲

السفر سواء إذا كنت تسافر بركب أو سيارة أو دراجة أو طائرة، يمكن استخدام الدوال النسبية لإيجاد المسافة المقطوعة والوقت المستغرق في السفر والسرعة. إذا كنت ترغب في الوصول إلى وجهة ما في الوقت المحدد، فيمكن العلاقات النسبية إخبارك بالسرعة التي تحتاجها في السفر للوصول إلى هدفك. وعند تمثيل الدوال النسبية بيانياً فإنك ترى بوضوح السرعة التي تسافر بها وتأثيرها على الزمن المستغرق للوصول.

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ التناسب $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$. اكتب في أبسط صورة.

$$\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$$

$$\frac{72}{11} = 7r$$

بضرب كل طرف في 8.

$$\frac{72}{77} = r$$

بقسمة كل طرف على 7.

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 72 و 77 هو 1. فإن الحل في أبسط صورة.

تدريب سريع

حُلّ كل من المعادلات التالية. اكتب في أبسط صورة.

$$1. \frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$$

$$2. \frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$$

$$3. \frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$$

$$4. \frac{10}{9}p = 7$$

5. **شاحنات** استهلك مازن $\frac{1}{3}$ خزان الوقود في شاحنته للذهاب إلى العمل. بدأ مازن طريقه بخزان وقود ممتلئ. فإذا كان قد تبقى لديه 18 L من البنزين، فكم عدد اللترات التي يسعها الخزان؟

مثال 2

حوّل لأبسط صورة $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$$

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 3 و 4 و 6 هو 12.

$$= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$$

بسّط.

$$= \frac{3}{12}$$

بالجمع والطرح.

$$= \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$$

بسّط.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$6. \frac{3}{4} - \frac{7}{8}$$

$$7. \frac{8}{9} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3}$$

$$8. \frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$$

$$9. \frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$$

10. **الخبز** قامت ياسمين بخبز كعك لبيع المخبوزات. لقد استخدمت $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لإحدى الوصفتين و $4\frac{1}{2}$ أكواب من الدقيق للوصفة الأخرى. فكم عدد الأكواب التي استخدمتها إجمالاً؟

مثال 3

جد حل $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$.

$$\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$$

كتابة المعادلة.

$$5(11) = 8u$$

بالضرب التبادلي.

$$55 = 8u$$

بسّط.

$$\frac{55}{8} = u$$

بقسمة كل طرف على 8.

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 55 و 8 هو 1. فإن الحل في أبسط صورة.

$$u = \frac{55}{8} \text{ أو } 6\frac{7}{8}$$

حُلّ كلاً من التناسبات التالية.

$$11. \frac{9}{12} = \frac{p}{36}$$

$$12. \frac{9}{18} = \frac{6}{m}$$

$$13. \frac{2}{7} = \frac{5}{k}$$

14. **ضريبة المبيعات** تدفع سهيلة AED 4.40 ضريبة على الملابس بقيمة 55 AED. فما مقدار الضريبة التي ستدفعها على ملابس بقيمة 35 AED؟

البدء في هذه الوحدة

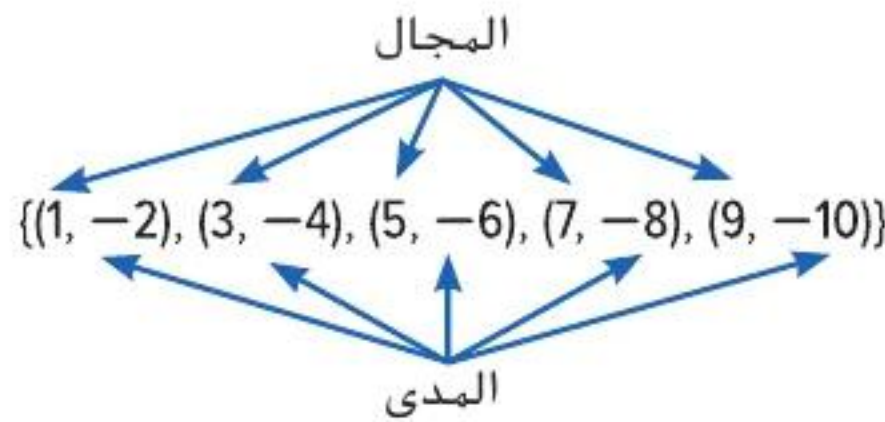
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة.
للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.
قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المفردات الجديدة

تعبير نسبي rational expression
كسر مركب complex fraction
دالة المقلوب reciprocal function
القطع الزائد hyperbola
دالة نسبية rational function
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
نقطة انفصال discontinuity point
تغير طردي direct variation
ثابت التغير constant of variation
التغير المشترك joint variation
التغير العكسي inverse variation
التغير المتوافق combined variation
معادلة نسبية rational equation
المتوسط الحسابي المرجح weighted average
متباينة نسبية rational inequality

مراجعة المفردات

الدالة علاقة يقرن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من عناصر المدى



المضاعف المشترك الأصغر هو أصغر عدد مضاعف مشترك لعددين أو أكثر

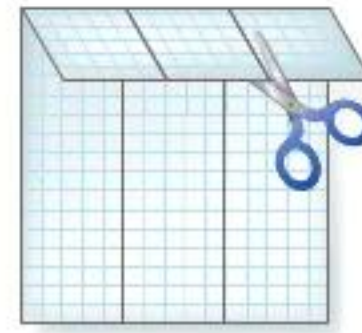
العدد النسبي هو عدد يمكن كتابته بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$

مطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات النسبية اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 2 عن الدوال والعلاقات النسبية. ابدأ بورقة رسم بياني مقاس $11'' \times 8\frac{1}{2}''$.



1 اطوها إلى ثلاثة بالطول.



2 اطو الطرف العلوي للأسفل بحيث تصنع تبويباً بالأعلى طوله 2". قص التبويبات بالطول.



3 سمّ التبويبات الخارجية بالمصطلحات التعابير، والدوال، والمعادلات. استخدم التبويبات الداخلية لكتابة التعاريف والملاحظات.



4 اكتب مثلاً عن كل موضوع في المساحة أسفل كل تبويب.

ضرب التعابير النسبية وقسمتها

2-1

لماذا؟

الحالي

السابق

إذا نزل غواص إلى أعماق أكبر من 10 متراً، فإن الدالة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d-10}$ تمثل أقصى مدة يستطيع الغواص خلالها البقاء في هذه الأعماق والصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف. تمثل $T(d)$ مدة الغطس بالدقائق، وتمثل d العمق بالمتر.

1 تبسيط التعابير النسبية.
2 تبسيط الكسور الجبرية المركبة المتضمنة تعابير نسبية.

التحليل إلى عوامل كثيرات الحدود.

1 تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة يطلق على النسبة بين تعبيرين كثيري الحدود مثل $\frac{1700}{d-33}$ اسم **تعبير نسبي**.

ونظراً لأن المتغيرات في الجبر غالباً ما تمثل أعداداً حقيقية، فإن العمليات على الأعداد النسبية والتعابير النسبية متشابهة. ومثلما هو الأمر مع اختزال الكسور، فإنك تقوم بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لتحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

العامل المشترك الأكبر = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{(x-5)\cancel{(x-1)}} = \frac{(x-3)}{(x-5)}$$

العامل المشترك الأكبر = $(x-1)$

مثال 1 تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة

a. حوّل لأبسط صورة $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)}$

$$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$

تحليل البسط والمقام إلى العوامل.

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$

بسط

b. تحت أي ظروف يكون هذا التعبير غير معرف؟

المقام الأصلي الذي تم تحليله إلى عوامله هو $(x-6)(x+3)(x-3)$.

حدد القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر.

هذه القيم هي 6 أو -3 أو 3. إذاً يكون التعبير غير معرف عندما تكون $x = 6$ أو -3 أو 3.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. تحت أي ظروف يكون التعبير غير معرف؟

1A. $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

1B. $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

مفردات جديدة

التعبير النسبي
(rational expression)
الكسر المركب
(complex fraction)

ممارسات في الرياضيات

8 البحث عن التوافق في
الاستنتاجات المتكررة
والتعبير عن ذلك.



مثال 2 على الاختبار المعياري استخدام الاستبعاد

لأي قيم تكون $\frac{x^2(x^2 - 5x - 14)}{4x(x^2 + 6x + 8)}$ غير معرفة؟

- A -2, -4
B -2, 7
C 0, -2, -4
D 0, -2, -4, 7

قراءة فقرة الاختبار

أنت تريد تحديد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

حل فقرة الاختبار

بوجود $4x$ في المقام، لا يمكن أن تساوي x صفرًا. إذا، يمكن استبعاد الخيارين A و B. بعد ذلك، حلل عوامل المقام.
 $4x(x + 2)(x + 4)$ إذا يكون المقام $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.
نظرًا لأن المقام يساوي 0 عندما تكون $x = 0, -2, -4$. فإن الإجابة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

استبعاد الخيارات

في بعض الأحيان، يمكنك توفير الوقت بالنظر إلى الإجابات الممكنة واستبعاد الخيارات.

تمرين موجّه

2. لأي قيم x تكون $\frac{x(x^2 + 8x + 12)}{-6(x^2 - 3x - 10)}$ غير معرفة؟

- F 0, 5, -2
G 5, -2
H 0, -2, -6
J 5, -2, -6

يمكنك في بعض الأحيان استبعاد -1 في البسط أو المقام للمساعدة في تحويل التعبير النسبي لأبسط صورة.

مثال 3 التحويل لأبسط صورة باستخدام -1

حوّل لأبسط صورة $\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$

$$\frac{(4w^2 - 3wy)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{w(4w - 3y)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)}$$

التحليل إلى العوامل.

$$= \frac{w(-1)(3y - 4w)(w + y)}{(3y - 4w)(5w + y)} = \frac{(-w)(w + y)}{5w + y}$$

$$4w - 3y = -1(3y - 4w)$$

بسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$3A. \frac{(xz - 4z)}{z^2(4 - x)}$$

$$3B. \frac{ab^2 - 5ab}{(5 + b)(5 - b)}$$

تصلح الطريقة المستخدمة في ضرب الكسور وقسمتها مع التعابير النسبية أيضًا. نذكّر أنك لضرب كسرين تقوم بضرب البسطين معًا والمقامين معًا. لقسمة كسرين، فإنك تضرب في المعكوس الضربي أو مقلوب الكسر المقسوم عليه.

الضرب

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{15}^3 \cdot 5}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{3}^1 \cdot \cancel{2}^1 \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

القسمة

$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{35}^7 \cdot 5}{\cancel{5}^1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}^1} = \frac{7}{2}$$

يلخص الجدول التالي قواعد ضرب التعابير النسبية وقسمتها.

المفهوم الأساسي	
ضرب التعابير النسبية	
الشرح	لضرب التعابير النسبية، اضرب البسوط معًا واضرب المقامات معًا.
الرموز	لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
قسمة التعابير النسبية	
الشرح	لقسمة التعابير النسبية، اضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.
الرموز	لجميع التعابير النسبية $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ عندما تكون $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، و $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

نصيحة دراسية

حذف العوامل المشتركة
تأكد من حذف العوامل
المشتركة من البسط والمقام.

مثال 4 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

التحليل إلى العوامل.

$$= \frac{\overset{1}{2} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{5} \cdot 3 \cdot c \cdot \overset{1}{d} \cdot d}{\cancel{5} \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{\overset{1}{3} \cdot \overset{1}{3} \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$

بسّط.

$$= \frac{9c^2d}{4a}$$

بسّط.

b. $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$

الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}$$

التحليل إلى العوامل.

$$= \frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{3} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \overset{1}{y} \cdot \overset{1}{y} \cdot y \cdot 5 \cdot \overset{1}{7} \cdot \overset{1}{a} \cdot \overset{1}{a} \cdot \cancel{b}}{\cancel{7} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}$$

اختصار العوامل المشتركة.

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot y \cdot y}{2 \cdot b \cdot x}$$

بسّط.

$$= \frac{15y^2}{2bx}$$

بسّط.

تمرين موجّه

4A. $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

4B. $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

4C. $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

4D. $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان، يتوجب عليك تحليل البسط و/أو المقام إلى العوامل أولاً قبل أن تتمكن من تحويل ناتج ضرب أو ناتج قسمة تعبير نسبي إلى أبسط صورة.

مثال 5 كثيرات الحدود في البسط والمقام

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 8)}^1 \cancel{(x + 2)}^1}{\cancel{(x - 8)}^1 \cancel{(x - 8)}^1} \cdot \frac{\cancel{x - 8}^1}{(x + 3)\cancel{(x + 2)}^1} = \frac{1}{x + 3}$$

التحليل إلى العوامل

اختصار العوامل المشتركة.

بسط.

b. $\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18}$

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$$

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$

$$= \frac{(x + 4)\cancel{(x - 4)}^1}{12\cancel{(y + 3)}^1} \cdot \frac{(y - 6)\cancel{(y + 3)}^1}{\cancel{(x - 4)}^1(x - 8)}$$

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$

الضرب في المعكوس الضربي.

التحليل إلى العوامل

اختصار العوامل المشتركة

بسط

تمرين موجّه

5A. $\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16}$

5B. $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42}$

2 تحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة الكسر المركب هو تعبير نسبي له بسط و/أو مقام عبارة عن تعبير نسبي أيضاً. التعابير الآتية عبارة عن كسور مركبة.

$$\frac{\frac{c}{6}}{5d} \quad \frac{\frac{8}{x}}{x - 2} \quad \frac{\frac{x - 3}{8}}{\frac{x - 2}{x + 4}} \quad \frac{\frac{4}{a} + 6}{\frac{12}{a} - 3}$$

لتحويل كسر مركب إلى أبسط صورة، أعد كتابته أولاً على هيئة تعبير قسمة.

مثال 6 تحويل الكسور المركبة لأبسط صورة.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $\frac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}}$

$$\frac{\frac{a + b}{4}}{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{a + b}{4} \div \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$= \frac{a + b}{4} \cdot \frac{4}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a + b}{\cancel{4}^1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{a^2 + b^2} \text{ or } \frac{a + b}{a^2 + b^2}$$

كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

الضرب في المعكوس الضربي.

بسط

نصيحة دراسية

الانتظام عند تحويل التعابير النسبية لأبسط صورة، فإن العوامل الموجودة إحدى كثيرات الحدود غالباً ما تظهر في كثيرات الحدود الأخرى. ففي المثال 5a، يظهر العامل $x - 8$ أربع مرات. استخدم هذه النصيحة كدليل عند تحليل عوامل كثيرات الحدود الصعبة.

b. $\frac{\frac{x^2}{x^2 - y^2}}{\frac{4x}{y - x}}$

$$\frac{\frac{x^2}{x^2 - y^2}}{\frac{4x}{y - x}} = \frac{x^2}{x^2 - y^2} \div \frac{4x}{y - x}$$

$$= \frac{x^2}{x^2 - y^2} \times \frac{y - x}{4x}$$

$$= \frac{x \cdot x}{(x + y)(x - y)} \times \frac{(-1)(x - y)}{4x}$$

$$= \frac{x \cdot \cancel{x}}{(x + y)\cancel{(x - y)}} \times \frac{(-1)\cancel{(x - y)}}{4\cancel{x}}$$

$$= \frac{-x}{4(x + y)}$$

كتابة التعبير على هيئة تعبير قسمة.

الضرب في المعكوس الضربي.

التحليل إلى العوامل.

اختصار العوامل المشتركة

بسط

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\frac{(x - 2)^2}{2(x^2 - 5x + 4)}}{\frac{x^2 - 4}{4x - 10}}$

6B. $\frac{\frac{x^2 - y^2}{y^2 - 49}}{\frac{y - x}{y + 7}}$

التحقق من فهمك

مثال 1 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $\frac{x^2 - 5x - 24}{x^2 - 64}$

2. $\frac{c + d}{3c^2 - 3d^2}$

مثال 2 3. الاختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي يكون عندها $\frac{x + 7}{x^2 - 3x - 28}$ غير معرفة.

A -7, 4

B 7, 4

C 4, -7, 7

D -4, 7

الأمثلة 3-6 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

4. $\frac{y^2 + 3y - 40}{25 - y^2}$

5. $\frac{a^2x - b^2x}{by - ay}$

6. $\frac{27x^2y^4}{16yz^3} \times \frac{8z}{9xy^3}$

7. $\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b}$

8. $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 6x + 8} \times \frac{x - 4}{x^2 - 2x - 35}$

9. $\frac{a^2 - b^2}{3a^2 - 6a + 3} \div \frac{4a + 4b}{a^2 - 1}$

10. $\frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

11. $\frac{\frac{4x}{x + 6}}{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x - 18}}$

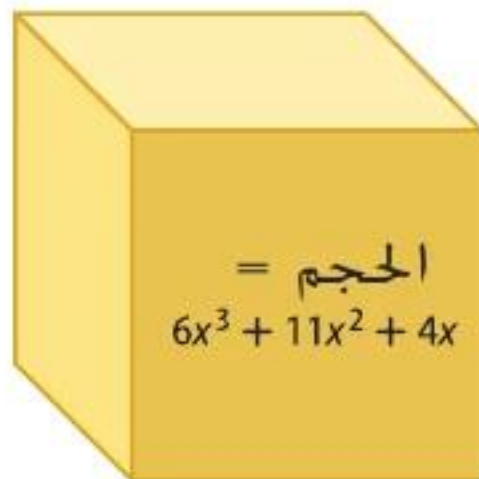
12. التبرير المنطقي يمكن تمثيل حجم حاويات الشحن ذات شكل متوازي

مستطيلات بكثيرة الحدود $6x^3 + 11x^2 + 4x$ حيث يكون الارتفاع x .

a. جد طول الحاوية وعرضها.

b. جد النسبة بين الأبعاد الثلاثة للحاوية عندما تكون $x = 2$.

c. هل ستكون النسبة بين الأبعاد الثلاثة واحدة لجميع قيم x ؟



مثال 1

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

13. $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

14. $\frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

15. $\frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

16. $\frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

17. $\frac{x^2(x+2)(x-4)}{6x(x^2+x-20)}$

18. $\frac{3y(y-8)(y^2+2y-24)}{15y^2(y^2-12y+32)}$

مثال 2

19. اختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي تكون عندها $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة.

F 3, -6

G 4, 6

H -6, 6

J -6, 3, 4, 6

مثال 3

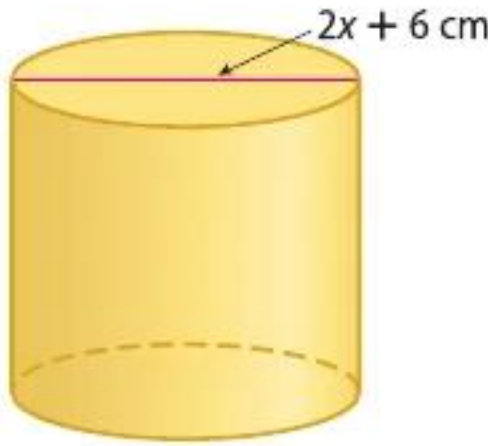
حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

20. $\frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

21. $\frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

22. $\frac{(x-4)(x^2+2x-48)}{(36-x^2)(x^2+4x-32)}$

23. $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$



24. الهندسة يبلغ حجم الأسطوانة الموضحة على اليسار $(x+3)(x^2-3x-18)\pi \text{ cm}^3$. جد ارتفاع الأسطوانة.

الأمثلة 4-6

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \times \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

26. $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

27. $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

28. $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

29. $\frac{15a^2b^2}{21ac} \times \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

30. $\frac{14c^2f^5}{9a^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

31. $\frac{y^2+8y+15}{y-6} \times \frac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

32. $\frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d}$

33. $\frac{x^2+9x+20}{8x+16} \times \frac{4x^2+16x+16}{x^2-25}$

34. $\frac{3a^2+6a+3}{a^2-3a-10} \div \frac{12a^2-12}{a^2-4}$

35. $\frac{\frac{x^2-9}{6x-12}}{\frac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

36. $\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}}$

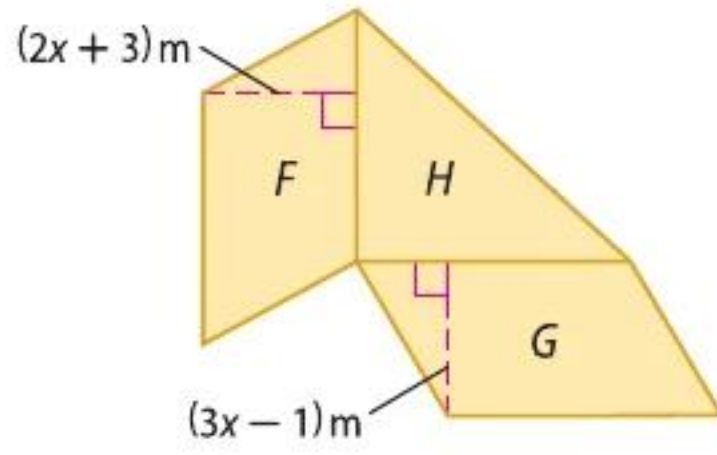
37. $\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}}$

38. $\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

39. التبرير في نهاية مسيرته من لعبة كرة السلة بالمدرسة الثانوية، أحرز مجيد 33 هدفًا من 121 محاولة.

a. اكتب نسبة تعبر عن النسبة بين عدد الأهداف المحرزة إلى محاولات التسديد لمجيد في نهاية مسيرته كلاعب بالمدرسة الثانوية.

b. افترض أن مجيد حاول إحراز عدد a من الأهداف ونجح في تسديد m أهداف خلال عامه الأول بالمدرسة. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين عدد الأهداف المحرزة في مسيرته إلى عدد الأهداف التي حاول تسديدها في نهاية عامه الأول بالمدرسة.



40. الهندسة مساحة متوازي الأضلاع F تبلغ $8x^2 + 10x - 3$ متر مربع وارتفاعه $2x + 3$ متر. أما متوازي الأضلاع G فتبلغ مساحته $6x^2 + 13x - 5$ متر مربع وارتفاعه $3x - 1$ متر. جـد مساحة المثلث H.

41. التلوث تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُكَّ تسرب نفطي من أنبوب مكسور بأحد الحفارات؛ حيث T هي سُكَّ البقعة النفطية بالمللتر، و x هي البُعد عن مكان الكسر بالأمتار.

a. حوّل الدالة لأبسط صورة.

b. كم يبلغ سُكَّ البقعة التي على بُعد 100 m من مكان الكسر؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

42. $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

43. $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

44. $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7} \right)^{-1}$

45. $\left(\frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 + 4x - 5} \right)^{-1} \cdot \frac{2x^3 - 8x}{x^2 - 2x - 35}$

46. $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2} \right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

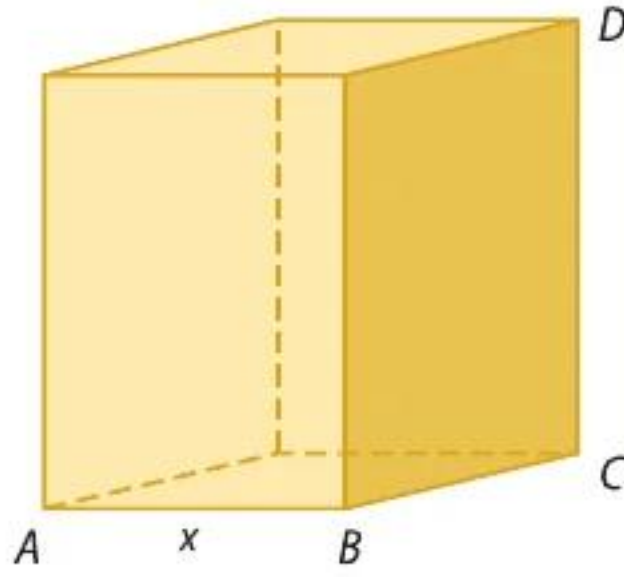
47. $\frac{20x^2y^6z^{-2}}{3a^3c^2} \cdot \left(\frac{16x^3y^3}{9acz} \right)^{-1}$

48. $\left(\frac{2xy^3}{3abc} \right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

49. $\frac{\frac{8x^2 - 10x - 3}{10x^2 + 35x - 20}}{\frac{2x^2 + x - 6}{4x^2 + 18x + 8}}$

50. $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

51. $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$



52. الهندسة تبلغ مساحة قاعدة متوازي المستطيلات الموجود على اليسار 20 cm^2

a. جـد طول $\overline{BC}$ بدلالة x.

b. إذا كان $DC = 3BC$ ؛ فحدد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c. حدد حجم المتوازي بدلالة x.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

53. $\frac{x^2 + 4x - 32}{2x^2 + 9x - 5} \cdot \frac{3x^2 - 75}{3x^2 - 11x - 4} \div \frac{6x^2 - 18x - 60}{x^3 - 4x}$

54. $\frac{8x^2 + 10x - 3}{3x^2 - 12x - 36} \div \frac{2x^2 - 5x - 12}{3x^2 - 17x - 6} \cdot \frac{4x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 40x + 24}$

55. $\frac{4x^2 - 9x - 9}{3x^2 + 6x - 18} \div \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 32} \div \frac{8x^2 + 10x + 3}{6x^2 - 6x - 12}$

56. المثابرة استخدم الصيغة $d = rt$ والمعلومات التالية.

تسافر طائرة بمعدل r من 500 km/h لمدة t من $(6 + x)$ ساعات.

وتسافر طائرة أخرى بمعدل r من $(540 + 90x)$ km/h لمدة t من 6 ساعات.

a. اكتب تعبيرًا نسبيًا يمثل النسبة بين المسافة المقطوعة d للطائرة الأولى والمسافة المقطوعة d للطائرة الثانية.

b. حوّل التعبير النسبي لأبسط صورة. ما الذي يخبرك به هذا التعبير عن المسافتين المقطوعتين لكلتا الطائرتين؟

c. تحت أي ظرف يكون التعبير النسبي غير معرف؟ صف ما يخبرك به هذا الظرف عن الطائرتين.

57. **القطارات** في محاولة للوصول إلى ساحة القطارات، كانت جميع القطارات متوقفة في صف لمسافة 3.2 km على طول نظام الخطوط. افترض أن كل عربة تشغل مسافة متوسطها 22.9 m من الخط وأن ساحة القطارات تضم 5 خطوط.

a. اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لتحديد عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين.

b. كم عدد عربات القطار الموجودة في صف التخزين؟

c. افترض أن هناك 8 مراقبين يقومون على إجراء فحوصات السلامة لكل عربة وأن فحص كل عربة يستغرق متوسط 45 ثانية. فكم عدد الساعات بالتقريب التي سيستغرقها فحص جميع العربات في الصف حتى يتم إخراجها؟

58. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف تمثيل الدالة النسبية بيانيًا.

a. **جبريًا** حوّل لأبسط صورة $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

b. **جدوليًا** افترض أن $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$. استخدم التعبير الذي كتبته في الجزء a لكتابة الدالة ذات الصلة $g(x)$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لعمل جدول لكلتا الدالتين عندما يكون $0 \leq x \leq 10$.

c. **تحليليًا** ما قيمة $f(4)$ و $g(4)$ ؟ اشرح أهمية هذه القيم.

d. **بيانيًا** مَثِّل بيانيًا الدالتين على حاسبة التمثيل البياني. استخدم وظيفة TRACE لاستكشاف كل تمثيل بياني مستخدمًا المفتاحين $\blacktriangle$ و $\blacktriangledown$ للتنقل بين التمثيلات البيانية. قارن بين التمثيلات البيانية وبيّن الفرق بينها.

e. **لفظيًا** ما الذي يمكنك استنتاجه عن التعابير والدوال؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

59. **التبرير** قارن بين $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$ ووضح الفرق بينهما.

60. **التفكير النقدي** قام حميد وحماد بتحويل $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$ لأبسط صورة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حماد	حميد
$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$ $= -\frac{x+y}{4}$	$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$ $= \frac{-4}{x+y}$

61. **التحدي** جد التعبير الذي يجعل العبارة التالية حقيقية.

$$\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{?}{x-6} = x-2$$

62. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟** حدد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\frac{1}{x-1}$	$\frac{x^2+3x+2}{x-5}$	$\frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$	$\frac{x^2+1}{3}$
-----------------	------------------------	--------------------------	-------------------

63. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم صحيحةً دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

تكون الدالة النسبية التي تحتوي على متغير في المقام مُعرّفة لجميع قيم x الحقيقية.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا ليصبح $\frac{x-1}{x+4}$ بعد تحويله لأبسط صورة.

65. **الكتابة في الرياضيات** تم تحويل التعبير النسبي $\frac{x^2+3x}{4x}$ لأبسط صورة فأصبح $\frac{x+3}{4}$. اشرح لماذا يكون التعبير الجديد غير مُعرّف لجميع قيم x .

تمرين على الاختبار المعياري

68. تبلغ تكلفة خطة الهاتف المحمول الشهرية AED 39.99 مقابل 300 دقيقة و 20 فلسًا لكل دقيقة بعد ذلك. أي مما يلي يمثل إجمالي الفاتورة الشهرية (بالدرهم) عند التحدث لمدة x دقيقة إذا كانت x أكبر من 300؟

- A $39.99 + 0.20(300 - x)$
B $39.99 + 0.20(x - 300)$
C $39.99 + 0.20x$
D $39.99 + 20x$

69. **إجابة مختصرة** بكم متر مربع تتجاوز مساحة دائرة يبلغ قطرها 6 m المساحة المجتمعة لدائرة قطرها 4 m ودائرة قطرها 2 m معًا؟

66. SAT/ACT ترغب عائلة ناصر في قطع مسافة متوسطها 250 km في اليوم أثناء إجازتهم.

في أول خمسة أيام، قطعوا 220 km و 300 km و 210 km و 275 km و 240 km. فكم عدد الكيلومترات التي يجب عليهم قطعها في اليوم السادس لتحقيق هدفهم؟

- A 235 km
B 251 km
C 255 km
D 275 km
E 315 km

67. أي من المعادلات التالية يعبر عن العلاقة بين T و N في الجدول؟

N	1	2	3	4	5	6
T	1	4	7	10	13	16

- F $T = 2 - N$
G $T = 4 - 3N$
H $T = 3N + 1$
J $T = 3N - 2$

مراجعة شاملة

70. **أنثروبولوجيا** وجد أحد علماء الأنثروبولوجيا الدارسين لعظام الإنسان الأول أن هناك كمية ضئيلة جدًا من (الكربون-14) متبقية في العظام بحيث لا تستطيع الأدوات قياسها. وهذا يعني أن هناك أقل من 5.0% من كمية (الكربون-14) التي احتوت عليها العظام عندما كان الإنسان على قيد الحياة. إذا كان عمر النصف (للكربون-14) هو 5760 عامًا، فمتى توفي ذلك الإنسان؟

حلّ كل من المعادلات التالية. قَرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

71. $3e^x + 1 = 5$
72. $2e^x - 1 = 0$
73. $-3e^{4x} + 11 = 2$
74. $8 + 3e^{3x} = 26$

75. **قانون الضوضاء** تم اقتراح قانون للمدينة بجرم إصدار صوت في منطقة سكنية بشدة تتجاوز 72 ديسيبل خلال النهار و 55 خلال الليل. بكم ضعف تزيد شدة مستوى الضوضاء المسموح به خلال النهار عن الليل؟

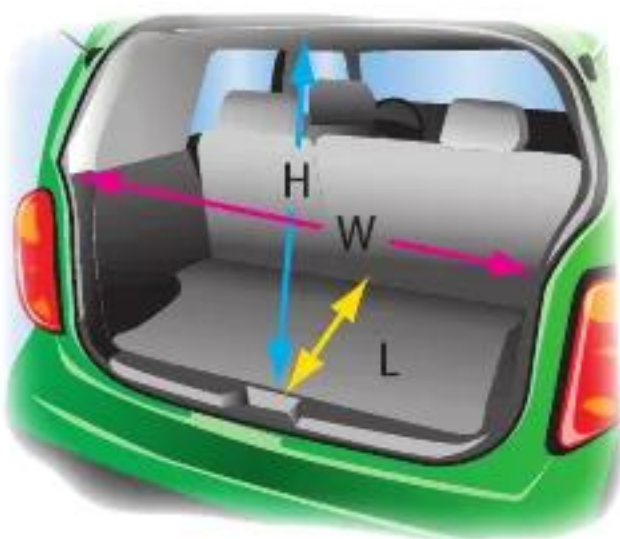
حوّل لأبسط صورة.

76. $\sqrt{50x^4}$

77. $\sqrt[3]{16y^3}$

78. $\sqrt{18x^2y^3}$

79. $\sqrt{40a^3b^4}$



80. **السيارات** طول مساحة الشحن في سيارة رياضية متعددة الأغراض أكبر من ارتفاع تلك المساحة بـ 10.16 cm. ويقل عرض المساحة عن ضعف الارتفاع بـ 40.6 cm إذا كان الحجم الإجمالي لمساحة الشحن $906,139.1 \text{ cm}^2$

a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم مساحة الشحن.

b. هل ستتسع مساحة الشحن لوضع صندوق طوله 61 cm وعرضه 111.8 cm وارتفاعه 86.4 cm؟ اشرح.

مراجعة المهارات

حوّل لأبسط صورة.

81. $(2a + 3b) + (8a - 5b)$
82. $(x^2 - 4x + 3) - (4x^2 + 3x - 5)$
83. $(5y + 3y^2) + (-8y - 6y^2)$
84. $2x(3y + 9)$
85. $(x + 6)(x + 3)$
86. $(x + 1)(x^2 - 2x + 3)$

جمع التعابير النسبية وطرحها

2-2

السابق ..

الحالي ..

لماذا ..

● جمع وطرح التعابير كثيرة الحدود.

● 1 تحديد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود.

2 جمع التعابير النسبية وطرحها.

● بينما تتحرك سيارة إطفاء تجاه شخص، فإن حدة صوت الصافرة تكون أعلى إلى ذلك الشخص عما تكون عليه عندما تكون السيارة ساكنة. وهذا يرجع إلى أن الموجات الصوتية تتضاغط مقتربة من بعضها البعض، وهو ما يُشار إليه باسم تأثير دوبلر. يمكن تمثيل تأثير دوبلر بالتعبير النسبي $p_0 \left(\frac{s_0}{s_0 - v} \right)$ ، حيث P_0 هو حدة الصوت الفعلية للصافرة، و v هو سرعة سيارة الإطفاء، و s_0 هو سرعة الصوت في الهواء.



مهارسات في الرياضيات

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.



1 المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود مثلما هو الحال مع الأعداد النسبية التي لها شكل كسري، يجب إيجاد المقام المشترك الأصغر لجمع أو طرح تعبيرين نسبيين لهما مقامان مختلفان. والمقام المشترك الأصغر هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

عند إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددتين أو أكثر أو لكثيري حدود، فحللها إلى عواملها. يحتوي المضاعف المشترك الأصغر على كل عامل بأكبر عدد مرات يمكن أن تظهر فيها كعامل.

كثيرات الحدود

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$$

أعداد

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$$

المضاعف المشترك الأصغر لـ $2x^2 - 2$ و $x^2 - 3x + 2$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$2x^2 - 2 = 2 \times (x - 1)(x + 1)$$

$$2(x - 1)(x - 2)(x + 1) = \text{المضاعف المشترك الأصغر}$$

المضاعف المشترك الأصغر لـ 6 و 9

$$6 = 2 \times 3$$

$$9 = 3 \times 3$$

$$2 \times 3 \times 3 = 18 = \text{المضاعف المشترك الأصغر}$$

مثال 1 المضاعف المشترك الأصغر لأحاديات الحدود وكثيرات الحدود

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

a. $6xy$ ، و $15x^2$ و $9xy^4$

$$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$$

$$15x^2 = 3 \times 5 \times x^2$$

$$9xy^4 = 3 \times 3 \times x \times y^4$$

استخدم كل عامل بأكبر عدد مرات يظهر به. $x^2 \times y^4 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 = 90x^2y^4$ المضاعف المشترك الأصغر
ثم بسّط.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الأولى.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الثانية.

التحليل إلى العوامل لأحادية الحدود الثالثة.

b. $y^4 + 8y^3 + 15y^2$ و $y^2 - 3y - 40$

$$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$$

$$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$$

$$y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8) = \text{المضاعف المشترك الأصغر}$$

التحليل إلى العوامل كثيرة الحدود الأولى.

التحليل إلى العوامل كثيرة الحدود الثانية.

استخدم كل عامل أكبر عدد مرات يظهر به.

تمرين موجه

1A. $12a^2b$, $15abc$, $8b^3c^4$

1B. $4a^2 - 12a - 16$ و $a^3 - 9a^2 + 20a$

2 جمع التعابير النسبية وطرحها مثلما هو الحال مع الكسور، يجب أن يكون للتعابير النسبية مقامات مشتركة لكي يمكن جمعها أو طرحها.

المفهوم الأساسي

جمع التعابير النسبية

الشرح لجمع التعابير النسبية، جـد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجرِ عملية الجمع.

الرموز لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

طرح التعابير النسبية

الشرح لطرح التعابير النسبية، جـد المقام المشترك الأصغر. أعد كتابة كل تعبير باستخدام المقام المشترك الأصغر. ثم أجرِ عملية الطرح.

الرموز لجميع $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ ، $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

مثال 2 المقامات أحادية الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

المقام المشترك الأصغر $8x^3y^2$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \times \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \times \frac{x^2}{x^2}$$

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$

ضرب الكسور.

جمع البسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

2A. $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$

2B. $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$

ويستخدم أيضًا المقام المشترك الأصغر لدمج تعابير نسبية ذات مقامات كثيرة الحدود.

مثال 3 المقامات كثيرة الحدود

حوّل لأبسط صورة $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

تحليل المقامين إلى عواملهما.

$$\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} = \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$

الضرب في العوامل المفقودة.

$$= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$

طرح البسط.

$$= \frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$

بسط.

$$= \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3A. $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$

3B. $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$

نصيحة دراسية

تبسيط التعابير النسبية بعد جمع أو طرح تعابير نسبية، قد يكون تبسيط التعبير الناتج أمرًا ممكنًا.

إحدى طرق تحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعابير الناتجة.

مثال 4 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى مختلفة

$$\text{حوّل لأبسط صورة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{y}{y} - \frac{x}{y}}$$

المقام المشترك الأصغر للبسط هو x .
المقام المشترك الأصغر للمقام هو y .

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

تحويل البسط والمقام لأبسط صورة.

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

الكتابة على هيئة تعبير قسمة.

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{y}{y-x}$$

الضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه.

$$= \frac{xy + y}{xy - x^2}$$

بسط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$4A. \frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}$$

$$4B. \frac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{d}{c} + 2}$$

طريقة أخرى لتحويل الكسر المركب إلى أبسط صورة هي إيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات. وبعد ذلك، يتم اختزال جميع المقامات بضربها في المقام المشترك الأصغر.

مثال 5 الكسور المركبة ذات مقامات مشتركة صغرى متماثلة

$$\text{حوّل لأبسط صورة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{xy}{xy}}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{xy}{xy}} = \frac{xy + y}{xy - x^2}$$

المقام المشترك الأصغر لجميع المقامات هو xy .
بالضرب في $\frac{xy}{xy}$.

توزيع xy .

لاحظ أن المسألة ذاتها قد حُلّت في المثالين 4 و 5 باستخدام طرق مختلفة، وكلتاها نتجت عنه الإجابة نفسها. وبالتالي، فإن طريقة حل المسائل المشابهة لتلك متروكة لاختيارك.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

$$5A. \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{y} - \frac{4}{x}}$$

$$5B. \frac{\frac{1}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{1}{c} + 6}$$

$$5C. \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$$

$$5D. \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{b}{a}}$$

نصيحة دراسية

حدود غير معرّفة تذكر أن هناك قيودًا على المتغيرات الموجودة في المقام.

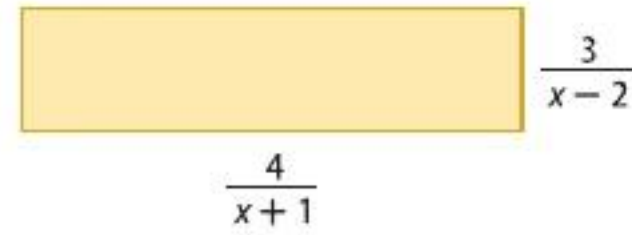
مثال 1 جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

1. $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$
2. $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$
3. $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$
4. $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 2-3 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

5. $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$
6. $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$
7. $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$
8. $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$
9. $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$
10. $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$
11. $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$
12. $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

13. هندسة جد محيط المستطيل.



المثالان 4-5 حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

14. $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$
15. $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$
16. $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$
17. $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تمرين وحل المسائل

مثال 1 جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

18. $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$
19. $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$
20. $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$
21. $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 2-3 المثابرة حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

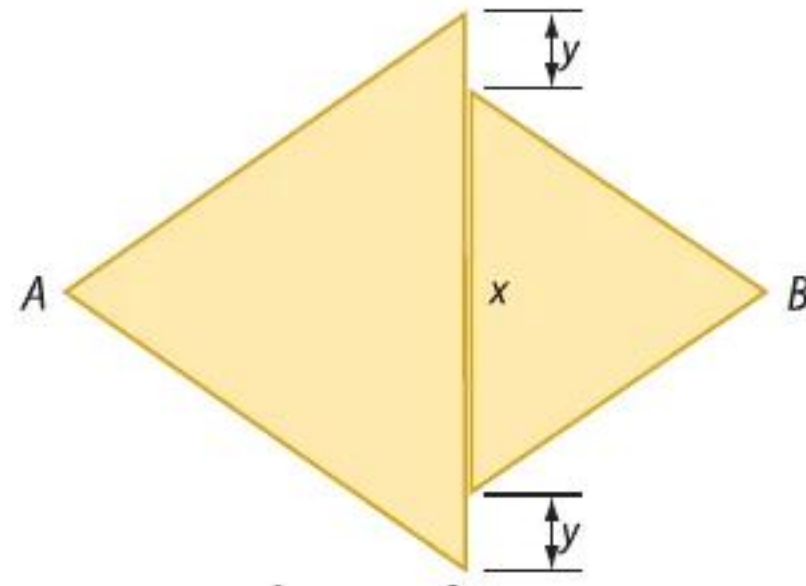
22. $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$
23. $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$
24. $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$
25. $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$
26. $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$
27. $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$
28. $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$
29. $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$
30. $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$
31. $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$
32. $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$
33. $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

34. علم الأحياء بعدما يتناول الشخص شيئاً ما، فإن الرقم الهيدروجيني أو مستوى الحامض A في الفم

يمكن تحديده بالصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$ ، حيث t هو عدد الدقائق المنقضية منذ أن تناول الطعام.

a. حوّل المعادلة لأبسط صورة.

b. ماذا سيكون مستوى الحامض بعد 30 دقيقة؟



35. **الهندسة** كلا المثلثين في الشكل الموجود باليسار متساوي الأضلاع. إذا كانت مساحة المثلث الأصغر 200 cm^2 وكانت مساحة المثلث الأكبر 300 cm^2 . فجد أقصر مسافة من A إلى B بدلالة x و y وحول لأبسط صورة.

المثالان 4-5 حول كل تعبير لأبسط صورة.

36.
$$\frac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2-9}}$$

37.
$$\frac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}}$$

38.
$$\frac{\frac{5}{x+6} - \frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+6}}$$

39.
$$\frac{\frac{8}{x-9} - \frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2} + \frac{4x}{x-9}}$$

40. **إنتاج النفط** قدّر مديرو إحدى شركات النفط بأنه سيتم ضخ النفط من بئر معينة بمعدل يستند إلى الدالة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2 + 20}$. حيث $R(x)$ هو معدل الإنتاج بآلاف البراميل في العام بعد مرور x أعوام من بدء الضخ. a. حول $R(x)$ لأبسط صورة.

b. ما معدل ضخ النفط من البئر بعد 50 عامًا؟

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مجموعة من كثيرات الحدود.

41. $12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$

42. $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

43. $x^2 - 3x - 28, 2x^2 + 9x + 4, x^2 - 16$

44. $x^2 - 5x - 24, x^2 - 9, 3x^2 + 8x - 3$

حول كل تعبير لأبسط صورة.

45.
$$\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$$

46.
$$\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$$

47.
$$\frac{5}{6x^2 + 46x - 16} + \frac{2}{6x^2 + 57x + 72}$$

48.
$$\frac{1}{8x^2 - 20x - 12} + \frac{4}{6x^2 + 27x + 12}$$

49.
$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x + y} - \frac{x}{x - y}$$

50.
$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 9x + 8} + \frac{4}{x - 1} - \frac{3}{x - 8}$$

51.
$$\frac{\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2 - 5a + 4}}$$

52.
$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x + y)}$$

53. **الهندسة** التعبير الذي يمثل طول أحد المستطيلات هو $\frac{x^2 - 9}{x - 2}$. ويُعبّر عن طول مستطيل مشابه بالتعبير $\frac{x + 3}{x^2 - 4}$. فما عامل قياس طولي المستطيلين؟ اكتبه في أبسط صورة.

54. **التمثيل بالنماذج** ذهب سعيد في رحلة تجديف مسافتها 20 km. قطع نصف المسافة بمعدل ما. وقطع المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 2 km/h.

a. إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة، فاكتب تعبيرًا يمثل الزمن المنقضي بهذه الوتيرة.
b. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الوقت المنقضي بالسرعة الأبطأ.
c. اكتب تعبيرًا يمثل مقدار الوقت الذي يحتاجه سعيد لإكمال رحلته.

جد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

55. $A\left(\frac{2}{p}, \frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{p}\right)$

56. $C\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{q}\right)$ و $D\left(\frac{5}{q}, \frac{1}{5}\right)$

57. $E\left(\frac{7}{w}, \frac{1}{7}\right)$ و $F\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{w}\right)$

58. $G\left(\frac{6}{n}, \frac{1}{6}\right)$ و $H\left(\frac{1}{6}, \frac{6}{n}\right)$

59. **التصوير الفوتوغرافي** يحدد الطول البؤري للعدسة مجال رؤية الكاميرا. فكلما قصر الطول البؤري، كان مجال الرؤية أكبر. فالتركيز بكاميرا لها طول بؤري ثابت 70 mm على جسم يبعد x mm من العدسة، يجب وضع الفيلم على مسافة y من العدسة. ويُمثل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$.

a. عبّر عن y كدالة لـ x .

b. ماذا يحدث لمسافة التركيز عندما يكون الجسم على بُعد 70 mm؟

60. **الصيدلة** يتناول أحد المرضى عقارين. يعبر عن تركيز كل عقار في مجرى الدم بالدالتين $f(t) = \frac{2t}{3t^2 + 9t + 6}$ و $g(t) = \frac{3t}{2t^2 + 6t + 4}$ حيث أن t تمثل الزمن المنقضي بالساعات بعد تناول العقارين.

a. اجمع الدالتين معاً لتحديد دالة تعبر عن التركيز الكلي للعقارين في مجرى الدم للمريض.

b. ما تركيز العقارين بعد مرور 8 ساعات؟

61. **تأثير دوبلر** راجع التطبيق في بداية الدرس. يقف أحمد على مسافة متساوية من سيارتي إطفاء تتحركان في اتجاهه من اتجاهين متعاكسين.

a. لنفرض أن x هي سرعة سيارة الإطفاء الأسرع، و y هي سرعة سيارة الإطفاء الأبطأ. اكتب تعبيراً نسبياً يمثل اختلاف حدة الصوت بين صافرتي السيارتين بالنسبة لأحمد وحوّله لأبسط صورة.

b. إذا كانت إحدى السيارتين تسير بسرعة 45 m/s، والأخرى تسير بسرعة 70 m/s، فما الاختلاف بين حدة الصوتين بالنسبة لأحمد؟ علماً بأن سرعة الصوت في الهواء 332 m/s، وكلتا السيارتين لها صافرة بحدّة 500 Hz.

62. **بحث** أجرى طالب يدرس سلوكيات التعلم تجربة أرسل خلالها فأراً إلى متاهة عدة مرات. تم تحديد الزمن الذي استغرقه الفأر لإكمال المتاهة بالدالة النسبية $T(x) = 4 + \frac{10}{x}$ حيث x تمثل عدد مرات المحاولة.

a. ما مجال الدالة؟

b. مثل الدالة بيانياً حيث $0 \leq x \leq 10$.

c. كوّن جدولاً للدالة حيث 400 و 200 و 100 و 50 و $x = 20$.

d. لو كان إجراء عدد لا نهائي من المحاولات أمراً ممكناً، ففي رأيك ماذا سيكون الزمن الأمثل للفأر؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **التحدي** حوّل لأبسط صورة $\frac{5x^{-2} - \frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}} + 6x^{-1}}$

64. **فرضيات** مجموع أي عددين نسبيين دائماً يساوي عدداً نسبياً. لذا، يقال إن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع. حدد ما إذا كانت مجموعة التعابير النسبية مغلقة تحت عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على تعبير نسبي غير صفري. علل استنتاجك.

65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاث أحاديّات الحدود بمضاعف مشترك أصغر $180a^4b^6c$.

66. **الكتابة في الرياضيات** اكتب دليلاً يشرح طريقة جمع التعابير النسبية ذات المقامات المختلفة. وكيف نقارن ذلك بجميع الأعداد النسبية؟

تمرين على الاختبار المعياري

67. الاحتمال سيتم إقامة سحب لاختيار الفائز بدراجة جديدة. يوجد 100 من طلاب الصف الثاني عشر و 150 من طلاب الصف العاشر و 200 من طلاب الصف الحادي عشر لديهم إدخلات صحيحة. سيحتوي السحب على 3 تذاكر لكل اسم من طلاب الصف الثاني عشر، وتذكرتين لكل طالب بالصف العاشر، وتذكرة لكل طالب بالصف الحادي عشر. فما احتمال اختيار تذكرة طالب من طلاب الصف الثاني عشر؟

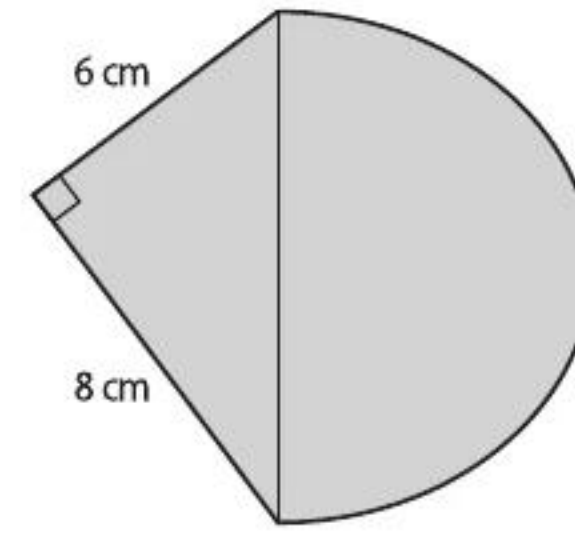
A $\frac{1}{8}$

C $\frac{2}{7}$

B $\frac{2}{9}$

D $\frac{3}{8}$

68. إجابة مختصرة جد مساحة الشكل.



69. SAT/ACT إذا حصل سعيد على عدد b من الكتب بالإضافة إلى عدد الكتب التي لديه بالفعل، فسيكون لديه t أضعاف العدد الذي لديه في الأساس. بدلالة b و t ، كم عدد الكتب التي كانت مع ناصر في البداية؟

F $\frac{b}{t-1}$

J $\frac{b}{t}$

G $\frac{b}{t+1}$

K $\frac{t}{b}$

H $\frac{t+1}{b}$

70. إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$ فإن $a =$ ____

A 2

C $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{2}$

D $-\frac{1}{8}$

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

71. $\frac{-4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2}$

72. $\frac{x^2 - y^2}{6y} \div \frac{x + y}{36y^2}$

73. $\frac{n^2 - n - 12}{n + 2} \div \frac{n - 4}{n^2 - 4n - 12}$

74. علم الأحياء تتكاثر الجراثيم عادة بعملية تعرف باسم الانقسام الثنائي. في هذا النوع من التكاثر، تنقسم الجرثومة الواحدة مكونة جرثومتين. في ظل الظروف المثالية، تتكاثر بعض الجراثيم كل 20 دقيقة.

a. جد الثابت k لهذا النوع من الجراثيم في ظل الظروف المثالية.

b. اكتب معادلة تمثل نموذجًا للنمو الأسّي لهذه الجراثيم.

مثّل كل دالة بيانياً. حدد المجال والمدى لكل دالة.

75. $y = -\sqrt{2x + 1}$

76. $y = \sqrt{5x - 3}$

77. $y = \sqrt{x + 6} - 3$

78. $y = 5 - \sqrt{x + 4}$

79. $y = \sqrt{3x - 6} + 4$

80. $y = 2\sqrt{3 - 4x} + 3$

حلّ كل من المعادلات التالية. اذكر عدد الجذور ونوعها

81. $3x + 8 = 0$

82. $2x^2 - 5x + 12 = 0$

83. $x^3 + 9x = 0$

84. $x^4 - 81 = 0$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانياً.

85. $y = 4(x + 3)^2 + 1$

86. $y = -(x - 5)^2 - 3$

87. $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$

88. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 5$

89. $y = x^2 + 6x + 2$

90. $y = x^2 - 8x + 18$

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

الدروس 2-3

السابق ..

- قمت بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً.

الحالي ..

- 1 تحديد خصائص دوال المقلوب.
- 2 تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

لماذا ..

يود فريق إنشاء مدرسة الخالدية الثانوية جمع 5000 AED لتمويل رحلة إلى المسابقة الوطنية في دبي. وقد قرروا بيع قطع الحلوى. سيحقق الفريق أرباحاً بمقدار 1 AED لكل قطعة حلوى يبيعونها. ولذا سيحتاجون إلى بيع 5000 قطعة حلوى.

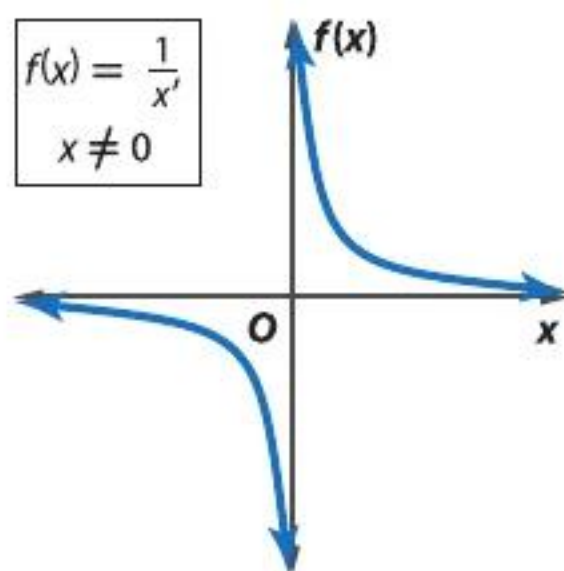
فإذا كانت c تمثل عدد قطع الحلوى التي ينبغي على الطلاب بيعها و n تمثل عدد الطلاب، فإن $c = \frac{5000}{n}$



1 خطوط التقارب الرأسية والأفقية تعتبر الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب. وتضم **دالة المقلوب** معادلة لها الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسية لدوال المقلوب

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

الدالة الرئيسية:

قطع زائد

نوع التمثيل البياني:

جميع الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر

المجال والمدى:

$$y=0 \text{ و } x=0$$

خطوط التقارب:

لا يوجد

نقاط التقاطع:

$$x=0$$

غير معرّفة:

مفردات جديدة

دالة المقلوب
reciprocal function
قطع زائد hyperbola

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية
وكمية.



$$f(x) = \frac{-3}{x+2}, x = -2$$

$$g(x) = \frac{4}{x-5}, x = 5$$

$$h(x) = \frac{3}{x}, x = 0$$

يتقيد مجال دالة المقلوب بالقيم التي تكون الدالة عندها معرّفة.

الدوال:

غير معرّفة عند:

مثال 1 القيود على المجال

حدد قيمة x التي تكون عندها $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرّفة.

جد القيمة التي تجعل مقام التعبير يساوي 0.

$$\frac{3}{2x+5} \rightarrow 2x+5=0$$

الدالة غير معرّفة عندما تكون $x = -\frac{5}{2}$

تمرين موجّه

حدد قيمة x التي تجعل كل دالة غير معرّفة.

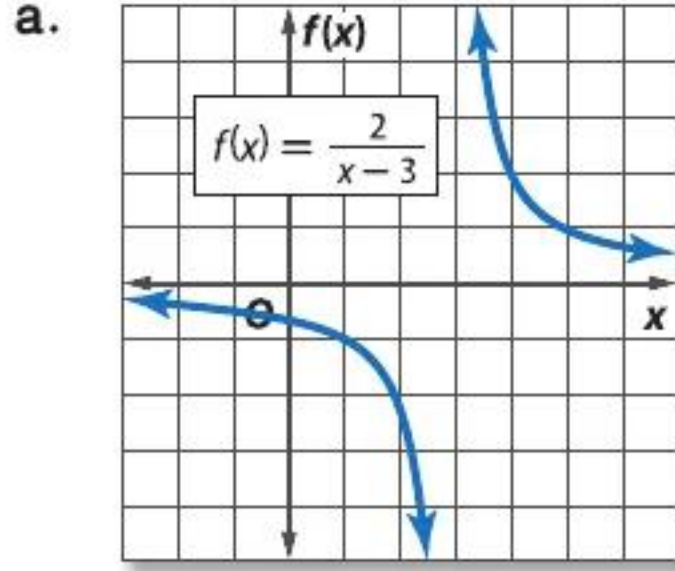
$$1A. f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$1B. f(x) = \frac{7}{3x+2}$$

قد يحتوي التمثيل البياني لدالة المقلوب على انفصالات عند القيم المستثناة. وقد يحتوي البعض على خط تقارب، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

مثال 2 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



حدد قيم x التي تكون فيها $f(x)$ غير معرّفة.

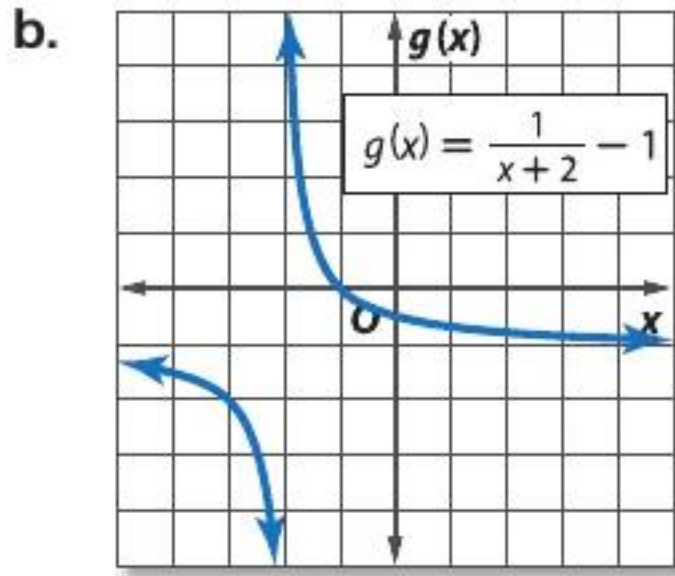
$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

تكون الدالة $f(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = 3$. إذاً، يوجد خط تقارب عند $x = 3$.

من $x = 3$ ، مع تناقص قيم x ، تقترب قيم $f(x)$ من 0. ومع تزايد قيم x ، تقترب قيم $f(x)$ من 0. إذاً، يوجد خط تقارب عند $y = 0$.

المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 3 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد 0.



حدد قيم x التي تكون فيها $g(x)$ غير معرّفة.

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

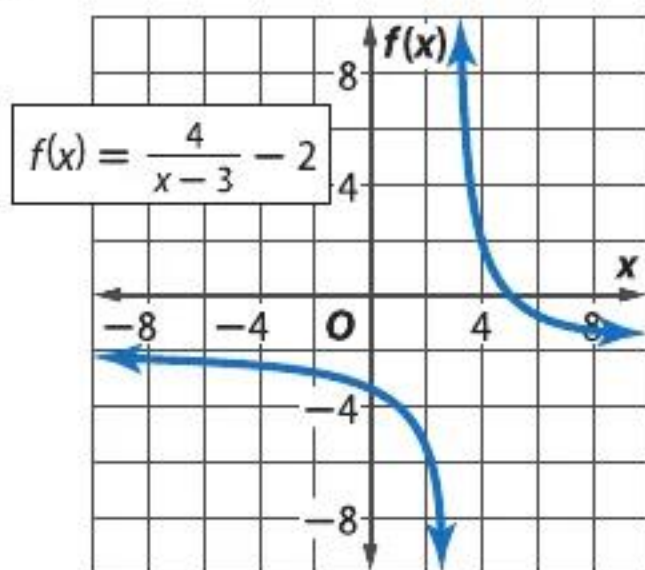
تكون الدالة $g(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = -2$. إذاً، يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

من $x = -2$ ، بينما تتناقص قيم x ، تقترب قيم $g(x)$ من -1. وبينما تتزايد قيم x ، تقترب قيم $g(x)$ من -1. إذاً، يوجد خط تقارب عند $y = -1$.

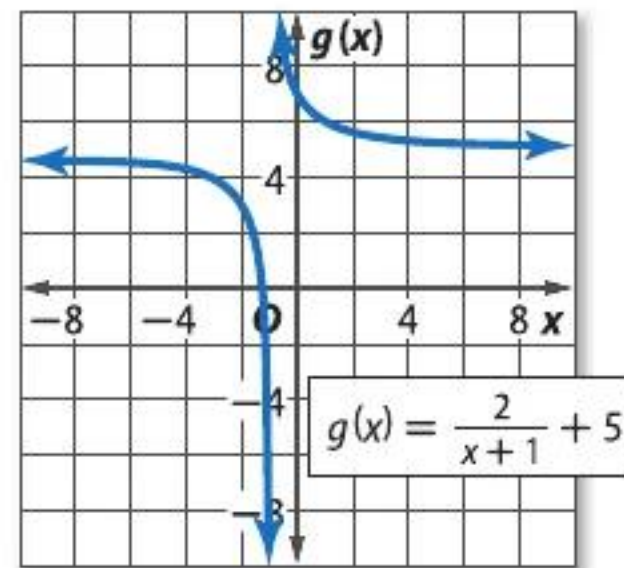
المجال هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -2 والمدى هو كافة الأعداد الحقيقية غير المساوية للعدد -1.

تمرين موجه

2A.



2B.



نصيحة دراسية

البنية توضح خطوط التقارب الرأسية متى تكون الدالة غير معرّفة، بينما توضح خطوط التقارب السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

2 تحويلات دوال المقلوب يُمكن تطبيق الأساليب ذاتها المستخدمة في تحويل منحنيات الدوال الأخرى التي درستها على منحنيات دوال المقلوب. في المثال 2، لاحظ أن خط التقارب تم تحريكه مع التمثيل البياني للدوال.

المفهوم الأساسي تحويلات دوال المقلوب

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

k - الإزاحة الرأسية

k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة
 $|k|$ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة
 يوجد خط تقارب أفقي عند $y = k$.

h - الإزاحة الأفقية

h وحدات جهة اليمين إذا كانت h موجبة
 $|h|$ وحدات جهة اليسار إذا كانت h سالبة
 يوجد خط تقارب رأسي عند $x = h$.

a - الاتجاه والشكل

إذا كانت $a < 0$ ، فإن المنحنى ينعكس حول المحور x .
 إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن المنحنى يمتد رأسيًا.
 إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن المنحنى ينضغط رأسيًا.

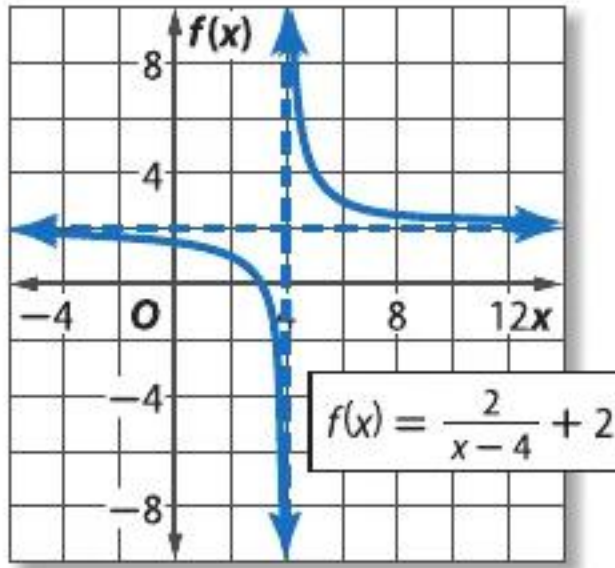
نصيحة دراسية

خطوط التقارب تتحرك خطوط التقارب لدالة المقلوب مع منحنى الدالة وتتقاطع عند النقطة (h, k) .

مثال 3 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

a. $f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

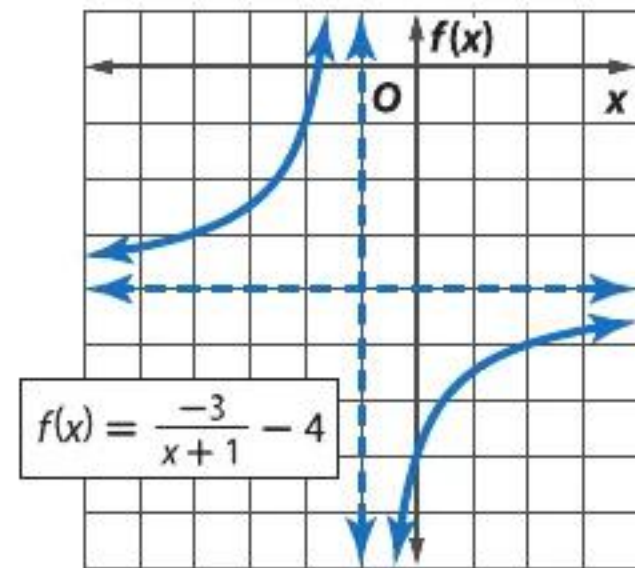
$a = 2$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا.

$h = 4$: تمت إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات لليمين.
 يوجد خط تقارب عند $x = 4$.

$k = 2$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدتين لأعلى.
 يوجد خط تقارب عند $y = 2$.

المجال: $\{x | x \neq 4\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$

b. $f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{1}{x}$.

$a = -3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًا وينعكس حول المحور x .

$h = -1$: تمت إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة لليسار.
 يوجد خط تقارب عند $x = -1$.

$k = -4$: تمت إزاحة الرسم البياني 4 وحدات لأسفل.
 يوجد خط تقارب عند $y = -4$.

المجال: $\{x | x \neq -1\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -4\}$

تمرين موجّه

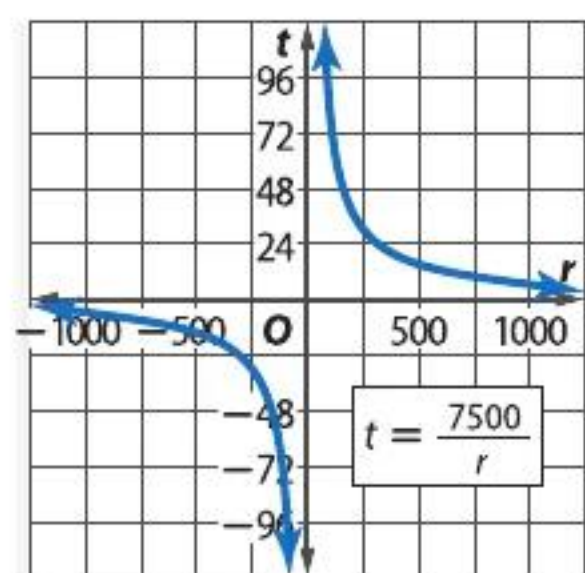
3A. $f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$

3B. $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة المعادلات

السفر لدى أحد خطوط الطيران رحلة يومية دون توقف بين مدينة A ومدينة B. وتبلغ مسافة رحلة الذهاب فقط نحو 7500 km.

a. اكتب معادلة لتمثل وقت السفر من A إلى B كدالة لسرعة الرحلة الجوية. ثم مثل المعادلة بيانياً.



جد حل $rt = d$ لإيجاد قيمة t .

المعادلة الأصلية

$$rt = d$$

اقسم كل طرف على r .

$$t = \frac{d}{r}$$

$$d = 7500$$

$$t = \frac{7500}{r}$$

مثل $t = \frac{7500}{r}$ بيانياً.

b. اشرح أي حدود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

في هذا الموقف، يكون المجال والمدى محددين بكافة الأعداد الحقيقية التي تزيد عن صفر لأن القيم السالبة ليس لها معنى. سيكون هناك المزيد من القيود على المجال لأن الطائرة لها حد أقصى وحد أدنى للسرعات التي يمكنها السفر بها.

تمرين موجّه

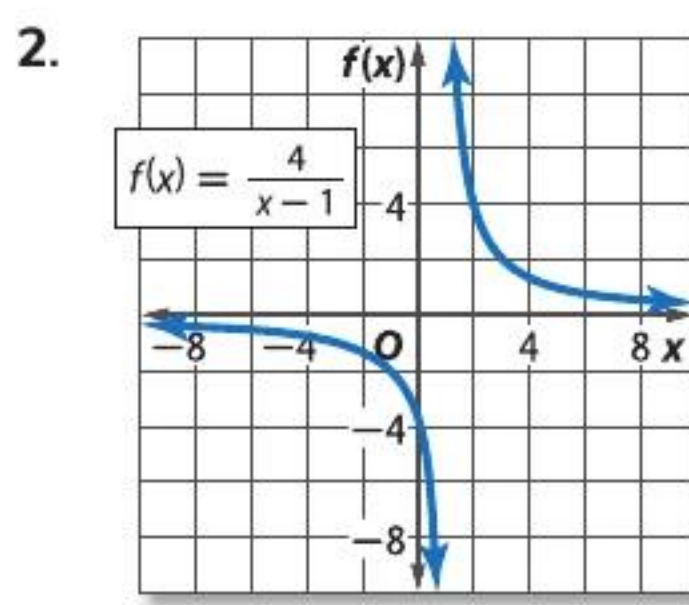
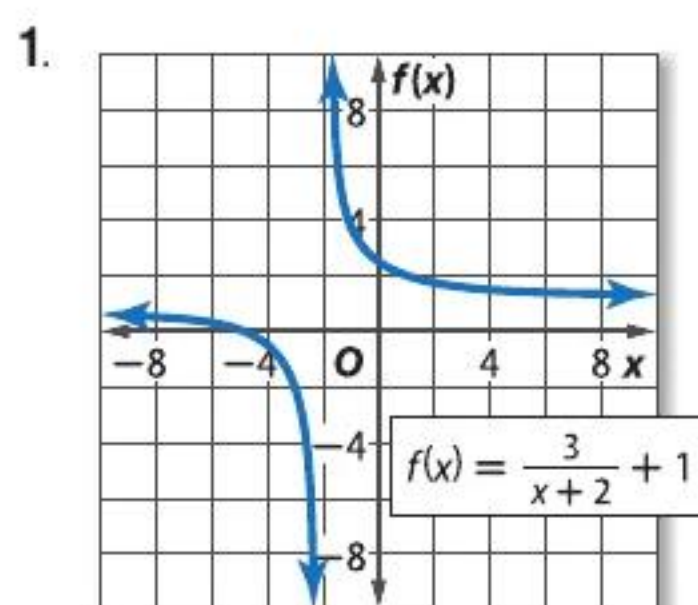
4. **التخرج** يمول مسؤولو الصفين العاشر والثاني عشر حفل تخرج. وتبلغ التكلفة الإجمالية للمرافق والطعام 45 AED للشخص بالإضافة إلى 2500 AED كمبلغ تأميني. اكتب معادلة تمثل متوسط التكلفة للشخص الواحد ومثلها بيانياً. ثم اشرح أي حدود على المجال والمدى.

مهنة من الحياة اليومية

وكيل الرحلات يقيّم وكلاء الرحلات احتياجات الشركات والأفراد ليساعدوهم على تنظيم أفضل ترتيبات سفر ممكنة. وقد تتنوع تخصصاتهم بحسب نوع السفر مثل السفر بغرض الترفيه أو العمل أو بحسب الوجهة مثل أوروبا وإفريقيا. يتطلب العمل شهادة مدرسة ثانوية، ويفضل الحصول على تدريب مهني.

التحقق من فهمك

المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



مثال 3 مثل كل دالة بيانياً. واذكر المجال والمدى.

3. $f(x) = \frac{5}{x}$

4. $f(x) = \frac{2}{x+3}$

5. $f(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$

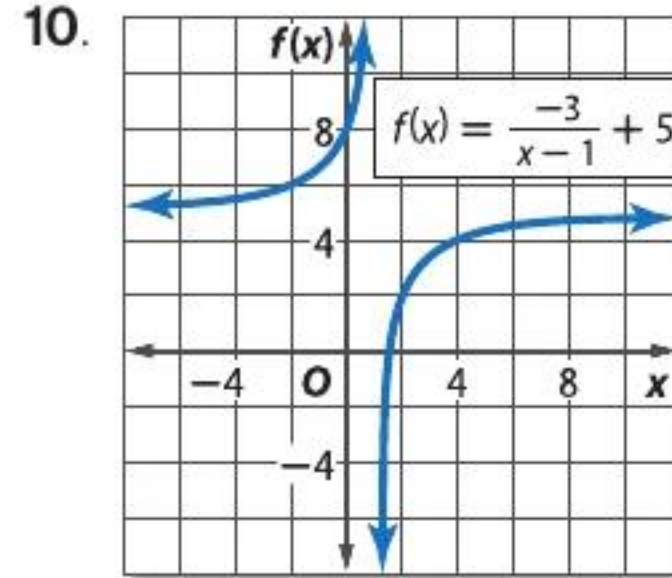
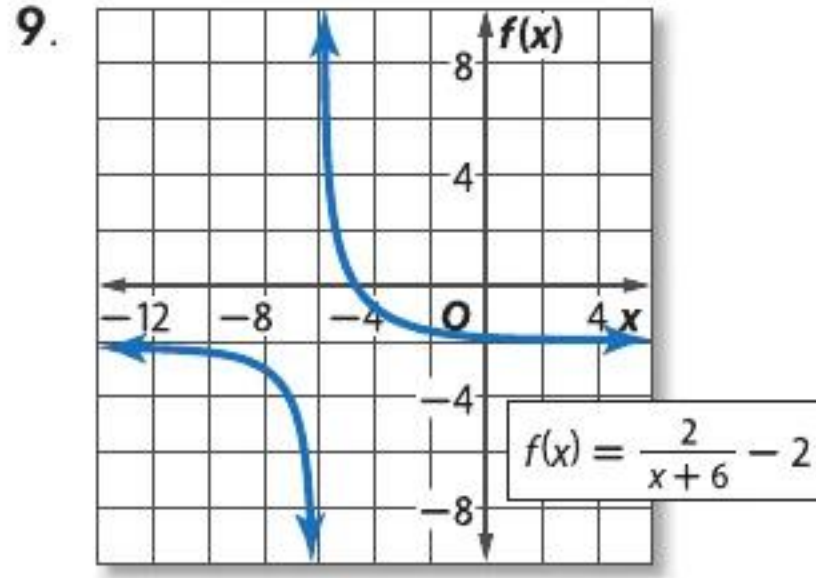
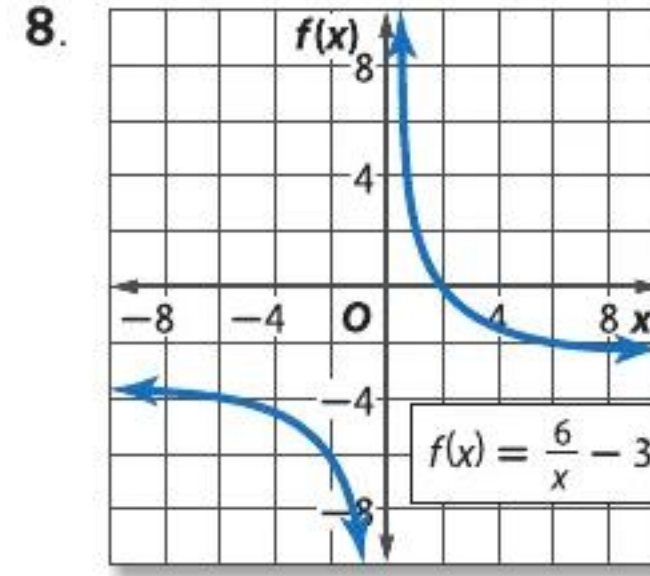
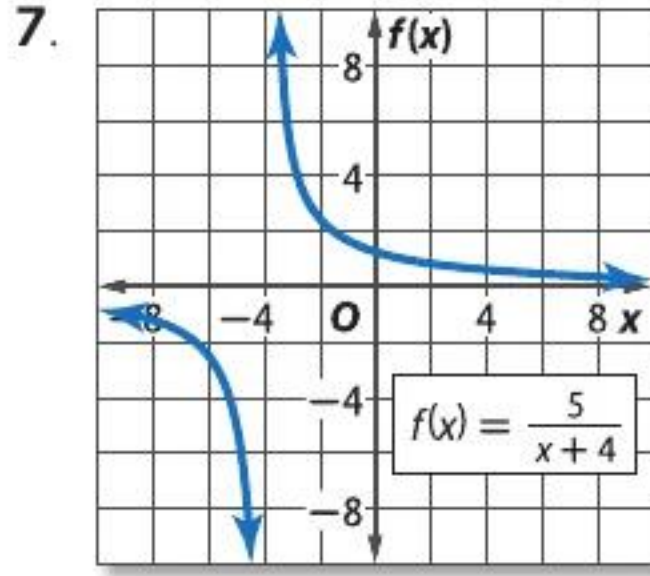
مثال 4 6. **التبرير المنطقي** تخطط مجموعة من الأصدقاء لتقديم قسيمة هدية لقائد المجموعة الشبابية لقضاء يوم في منتجع صحي. تبلغ تكلفة القسيمة 150 AED.

a. إذا كانت c تمثل التكلفة على كل صديق وكانت f تمثل عدد الأصدقاء، فاكتب معادلة لتمثيل التكلفة على كل صديق كدالة لعدد الأصدقاء الذين قدموا المال.

b. مثل الدالة بيانياً.

c. وضح أي قيود على المجال أو المدى في هذا الموقف.

المثالان 1-2 حدّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل دالة.



مثال 3 مَثِّلْ كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

11. $f(x) = \frac{3}{x}$

12. $f(x) = \frac{-4}{x+2}$

13. $f(x) = \frac{2}{x-6}$

14. $f(x) = \frac{6}{x} - 5$

15. $f(x) = \frac{2}{x} + 3$

16. $f(x) = \frac{8}{x}$

17. $f(x) = \frac{-2}{x-5}$

18. $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$

19. $f(x) = \frac{9}{x+3} + 6$

20. $f(x) = \frac{8}{x+3}$

21. $f(x) = \frac{-6}{x+4} - 2$

22. $f(x) = \frac{-5}{x-2} + 2$

المثال 4 23. قيادة الدراجات اتخذ أيوب قرارًا بالعام الجديد أن يقود دراجته 5000 km.

a. إذا كانت m تمثل عدد الكيلو مترات التي يقودها أيوب يوميًا وتمثل d عدد الأيام، فاكتب معادلة تمثل عدد الكيلو مترات يوميًا كدالة لعدد الأيام التي يقود فيها.

b. مثل الدالة بيانيًا.

c. إذا قاد منير دراجته في كل يوم من العام، فكم عدد الكيلو مترات التي ينبغي عليه أن يقطعها كل يوم لتحقيق هدفه.

24. التمثيل بالنماذج لدى منصور 200 g من سائل مجهول. ستساعده معرفة الكثافة على اكتشاف ماهية السائل.

a. يتم إيجاد كثافة أي سائل عن طريق قسمة الكتلة على الحجم. اكتب معادلة تمثل كثافة هذا السائل المجهول كدالة للحجم

b. مثل الدالة بيانيًا.

c. من التمثيل البياني، حدد خطوط التقارب ومجال ومدى الدالة.

مَثِّلْ كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

25. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$

26. $f(x) = \frac{5}{3x}$

27. $f(x) = \frac{2}{4x+1}$

28. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

29. **البيسبول** تبلغ المسافة بين مكان الرامي والقاعدة الرئيسية 18.4 m.
- a. إذا كانت r تمثل سرعة الرمي وكانت t تمثل الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى القاعدة، فاكتب معادلة لتمثيل السرعة كدالة للزمن.
- b. مثل الدالة بيانيًا.
- c. إذا وصلت كرة بيسبول مضروبة بطريقة الإصبعين في 0.48 ثانية، فماذا كانت سرعتها؟

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى وحدد خطوط التقارب.

$$\begin{array}{lll} 30. f(x) = \frac{-3}{x+7} - 1 & 31. f(x) = \frac{-4}{x+2} - 5 & 32. f(x) = \frac{6}{x-1} + 2 \\ 33. f(x) = \frac{2}{x-4} + 3 & 34. f(x) = \frac{-7}{x-8} - 9 & 35. f(x) = \frac{-6}{x-7} - 8 \end{array}$$

36. **المعرفة المالية** انطلقت سيارة لميس 440 mi مستهلكة خزانًا واحدًا من الوقود.
- a. إذا كانت g تمثل عدد الأميال بالنسبة إلى الجالون الذي استهلكته السيارة وكانت t تمثل حجم خزان الوقود، فاكتب معادلة لتمثيل النسبة بين الأميال والجالونات كدالة لحجم الخزان.
- b. مثل الدالة بيانيًا.
- c. كم عدد الأميال التي تقطعها السيارة لكل جالون إذا كان بها خزان وقود بسعة 15 gal؟

37. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستكشف أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة.

- a. **الجدولة** ضع جدولاً بالقيم لـ $a(x) = x^2$ و $b(x) = x^{-2}$ و $c(x) = x^3$ و $d(x) = x^{-3}$.
- b. **التمثيل البياني** مثل $a(x)$ و $b(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.
- c. **الصيغ اللفظية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $a(x)$ و $b(x)$.
- d. **التمثيل البياني** مثل $c(x)$ و $d(x)$ بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.
- e. **الصيغ اللفظية** قارن بين المجال والمدى والسلوك الطرفي والسلوك عندما تكون $x = 0$ لكل من $c(x)$ و $d(x)$.
- f. **التحليلات** ما الاستنتاجات التي توصلت إليها بشأن أوجه التشابه والاختلاف بين الدوال الأسية ذات الأسس السالبة والموجبة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

38. **مسألة غير محددة** الإجابة اكتب دالة مقلوب يحتوي فيها التمثيل البياني على خط تقارب رأسي عند $x = -4$ وخط التقارب الأفقي عند $y = 6$.

39. **التبرير** قارن وبين الفرق بين التمثيل البياني لكل زوجين من المعادلات.
- a. $y = \frac{1}{x}$ و $y - 7 = \frac{1}{x}$ b. $y = \frac{1}{x}$ و $y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ c. $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{1}{x+5}$
- d. بدون وضع جدول بالقيم، استخدم ما لاحظته في الأجزاء a-c لرسم تمثيل بياني لـ $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$.

40. **الفرضيات** جد الدالة التي لا تنتمي للمجموعة. اشرح.

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

$$h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$$

$$j(x) = \frac{20}{x-7}$$

41. **التحدي** اكتب دالتين مقلوب مختلفتين بحيث يحتوي تمثيلهما البياني على نفس خطوط التقارب الرأسية والأفقية. ثم مثل الدالتين بيانيًا.

42. **الكتابة في الرياضيات** راجع بداية الدرس. اشرح كيفية استخدام الدوال النسبية في جمع الأموال. اشرح السبب وراء كون جزء واحد من التمثيل البياني ذا معنى في سياق المسألة.

تمرين على الاختبار المعياري

46. SAT/ACT تتحرك سيارة مسافة m km بمعدل t km/h. فكم عدد الساعات التي تستغرقها الرحلة؟
- F $\frac{m}{t}$ J $\frac{t}{m}$
 G $m - t$ K $t - m$
 H mt
47. إذا كانت $-1 < a < b < 0$ ، فأَي مما يلي له القيمة الأكبر؟
- A $a - b$ C $a + b$
 B $b - a$ D $2b - a$

43. إجابة مختصرة ما قيمة $(x + y)(x + y)$ إذا كانت $xy = -3$ و $x^2 + y^2 = 10$ ؟

44. إجابة شكية إذا كانت $x = 2y$ و $y = 4z$ و $2z = w$ و $w \neq 0$ ، فإن $\frac{x}{w} = \underline{\hspace{1cm}}$.

45. إذا كانت $c = 1 + \frac{1}{d}$ و $d > 1$ ، فإن c قد تساوي $\underline{\hspace{1cm}}$.

- A $\frac{5}{7}$ C $\frac{15}{7}$
 B $\frac{9}{7}$ D $\frac{19}{7}$

مراجعة شاملة

48. الأعمال التجارية قررت شركة صغيرة تقسيم 8% من أرباحها على مديريها الستة. يوجد في الشركة مديرا مبيعات وأربعة مديرين آخرين. سيتم تقسيم خمسين بالمائة بالتساوي على المديرين الستة. بينما سيتم تقسيم الـ 50% الأخرى على المديرين الأربعة الذين لا يعملون في المبيعات. افترض أن P تمثل الأرباح. (الدرس 2-2)
- a. اكتب تعبيراً لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير لا يعمل في المبيعات.
 b. حوّل التعبير لأبسط صورة.
 c. اكتب تعبيراً في أبسط صورة لتمثيل حصة الأرباح التي سيتلقاها كل مدير مبيعات.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

49. $\frac{\frac{p^3}{2n}}{\frac{p^2}{4n}}$

50. $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$

51. $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

مثّل كل دالة بيانياً. واذكر المجال والمدى.

52. $y = 2(3)^x$

53. $y = 5(2)^x$

54. $y = 0.5(4)^x$

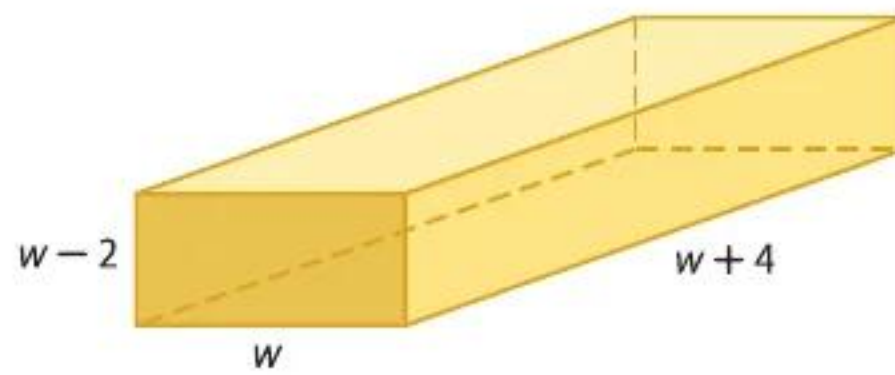
55. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

جد قيمة $(f + g)(x)$ ، و $(f - g)(x)$ ، و $(f \times g)(x)$ ، و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$.

56. $f(x) = x + 9$
 $g(x) = x - 9$

57. $f(x) = 2x - 3$
 $g(x) = 4x + 9$

58. $f(x) = 2x^2$
 $g(x) = 8 - x$



59. الهندسة يبلغ عرض متوازي المستطيلات w cm. ويقل ارتفاعه عن عرضه بـ 2 cm. ويزيد طوله عن عرضه بـ 4 cm. إذا كان حجم المتوازي يساوي 8 أمثال قياس طوله، فجد أبعاد المتوازي.

مراجعة المهارات

مثل بيانياً كل دالة كثيرة الحدود. قدّر إحداثيات المحور الأفقي x التي تحدث عندها القيمتان العظمى والصغرى النسبيتان. حدد المجال والمدى لكل من الدوال التالية.

60 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

61. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

اختبار منتصف الوحدة

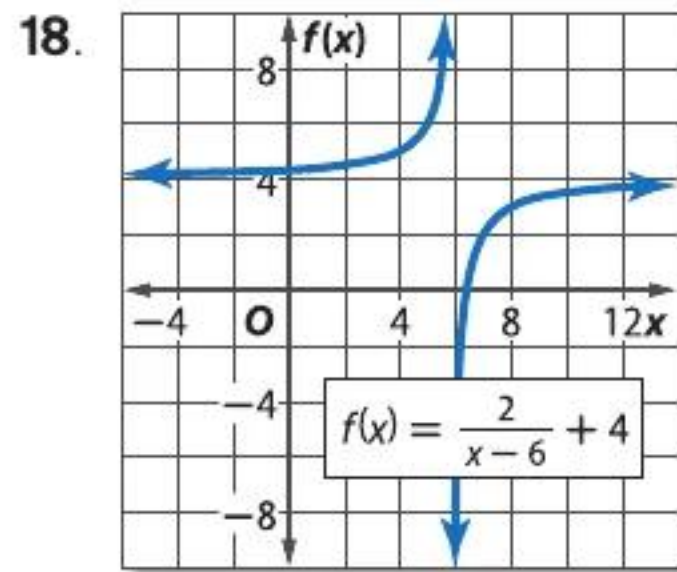
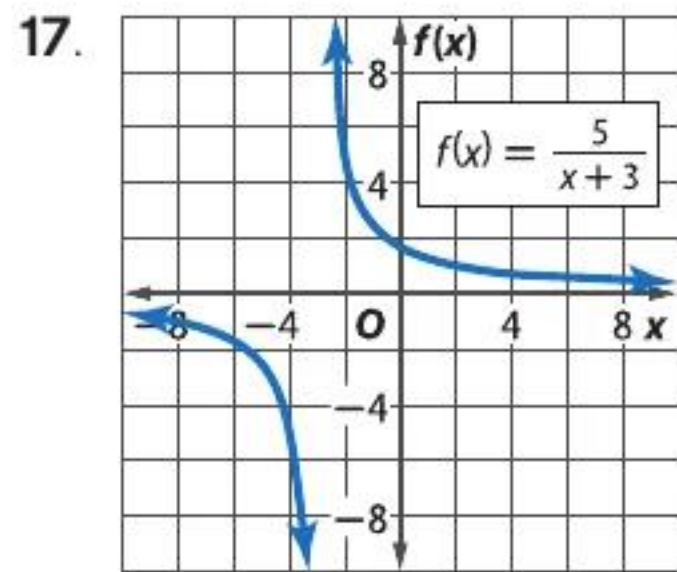
الدروس من 2-1 إلى 2-3

2

16. **السفر** تذهب وفاء إلى شاطئ يبعد 100 km. قطعت نصف المسافة بمعدل ما. وقطعت المسافة المتبقية بمعدل أبطأ بمقدار 15 km/h. (الدرس 2-2)

- a. إذا كانت x تمثل الوتيرة الأسرع بالكيلومتر في الساعة. فاكتب تعبيراً يمثل الوقت المنقضي بهذه الوتيرة.
b. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الزمن المنقضي بالسرعة الأبطأ.
c. اكتب تعبيراً يمثل مقدار الزمن الذي تحتاجه وفاء لإكمال رحلتها.

حدد خطوط التقارب والمجال والمدة لكل دالة. (الدرس 2-3)



مثل بيانياً كل دالة مقلوب. واذكر المجال والمدة. (الدرس 2-3)

19. $f(x) = \frac{4}{x}$ 20. $f(x) = \frac{1}{3x}$
21. $f(x) = \frac{6}{x-1}$ 22. $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$
23. $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$ 24. $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

25. **الشطائر** تصنع مجموعة 45 شطيرة لتناولها في نزهة. يعتمد عدد الشطائر التي يستطيع كل فرد تناولها على عدد الأشخاص المشاركين في الرحلة. (الدرس 2-3)

- a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة.
b. مثل الدالة بيانياً.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-1)

1. $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$ 2. $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$
3. $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$ 4. $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$
5. $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$ 6. $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7. الاختيار من متعدد لجميع قيم $r \neq \pm 2$. $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4} = \frac{r-2}{r+4}$ (الدرس 2-1)

- A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$
B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8. الاختيار من متعدد حدد جميع قيم x التي تكون عندها

$$\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$$

غير معرفة. (الدرس 2-1)

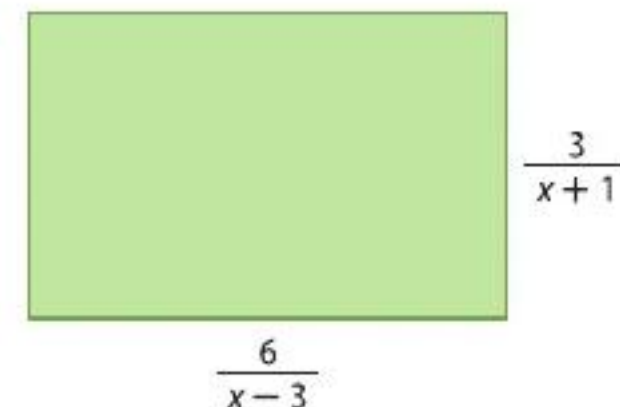
- F -3, -1 H -3, -1, 9
G 3, 1, -9 J -1

9. ما المضاعف المشترك الأصغر لكل من $3x^2 - x$ و $3 - 3x$ ؟ (الدرس 2-2)

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-2)

10. $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$
11. $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$
12. $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$
13. $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$
14. $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15. حدد محيط المستطيل. (الدرس 2-2)



التمثيل البياني للدوال النسبية

2-4

الدوال النسبية



لماذا؟

الحالي

السابق

اشترت رنا آلة تصوير ذات عدسة أحادية عاكسة وطابعة صور مقابل AED 350. ويزعم المصنع أن الحبر وورقة الصورة تكلف AED 0.47 للصورة الواحدة. ويمكن استخدام الدالة النسبية $C(p) = \frac{0.47p + 350}{p}$ لتحديد متوسط التكلفة $C(p)$ لطباعة p صورة.

1 تمثيل الدوال النسبية ذات خطوط التقارب الأفقية والرأسية بيانياً
2 تمثيل الدوال النسبية ذات خط التقارب المائل ونقطة الانفصال بيانياً.

• قمت بتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

1 خطوط التقارب الأفقية والرأسية لإحدى الدوال النسبية معادلة مكتوبة في الصيغة

$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث إن $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x) \neq 0$. ولتمثيل دالة نسبية بيانياً، فمن المفيد تحديد موقع الأصفار وخطوط التقارب. يقع صفر الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ عند أي قيمة x يكون فيها $a(x) = 0$.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الأفقية والرأسية

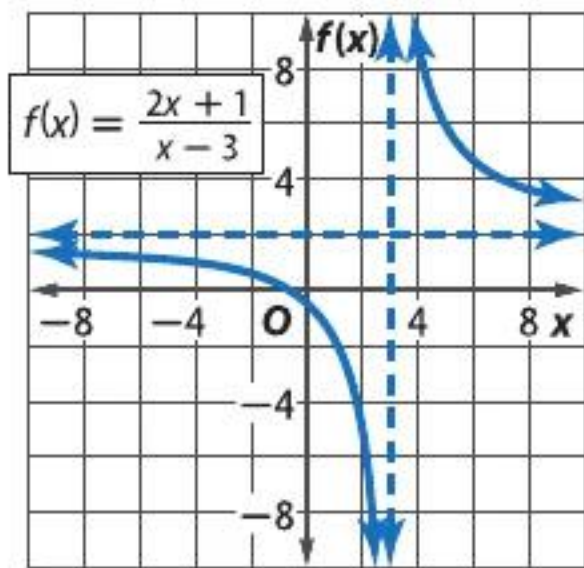
الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1، وكان $b(x) \neq 0$ ، فإن:

- $f(x)$ لها **خط تقارب رأسي** عندما تكون $b(x) = 0$.
- $f(x)$ لها **خط تقارب أفقي** واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ ، فسيكون خط التقارب الأفقي هو الخط $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ ، فسيكون خط التقارب

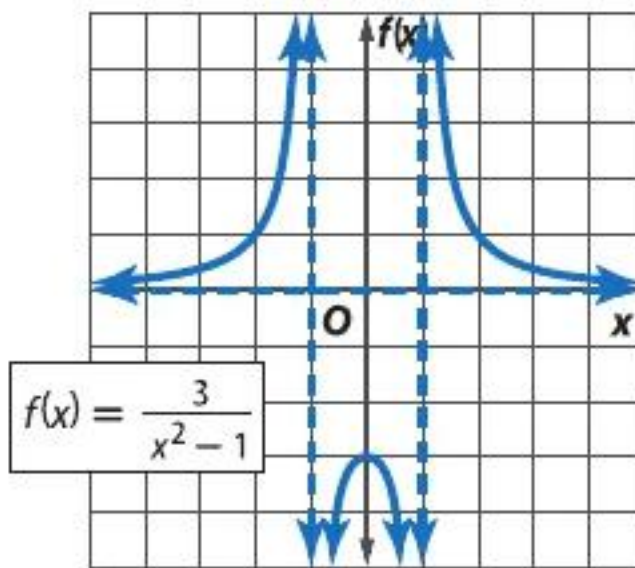
المعامل الرئيسي لـ $a(x)$ الأفقي هو الخط $y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}$

أمثلة

يوجد خط تقارب أفقي واحد

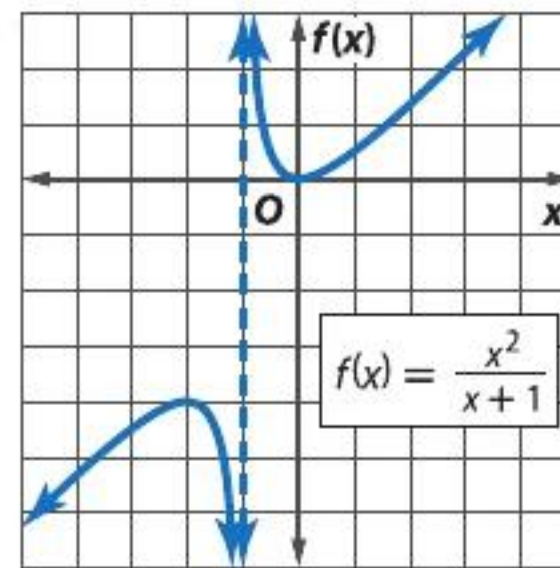


خط التقارب الرأسي:
 $x = 3$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 2$



خطوط التقارب الرأسية:
 $x = -1, x = 1$
خط التقارب الأفقي:
 $y = 0$

لا يوجد خط تقارب أفقي



خط التقارب الرأسي:
 $x = -1$

مفردات جديدة

دالة نسبية rational function
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
نقطة الانفصال (عدم الاتصال) point discontinuity

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها



يمكن استخدام خط التقارب للدالة النسبية لرسم التمثيل البياني للدالة. إضافة إلى ذلك، يمكن استخدام خطوط التقارب لقسم التمثيل البياني إلى مناطق لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني.

انتبه!

الأصفار مقابل خطوط التقارب الرأسية
الدالة النسبية عند القيم التي تجعل البسط مساوياً للصفر. وتقع خطوط التقارب الرأسية عند القيم التي تجعل المقام مساوياً للصفر.

مثال 1 التمثيل البياني بدون خط تقارب أفقي

مثّل $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ بيانياً.

الخطوة 1 جد الأصفار.

$$x^3 = 0$$

اجعل $a(x) = 0$.

$$x = 0$$

بأخذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

يوجد صفر عند $x = 0$.

الخطوة 2 ارسم خط التقارب.

جد خط التقارب الرأسي.

$$x - 1 = 0$$

افترض أن $b(x) = 0$.

$$x = 1$$

اجمع 1 إلى كل طرف.

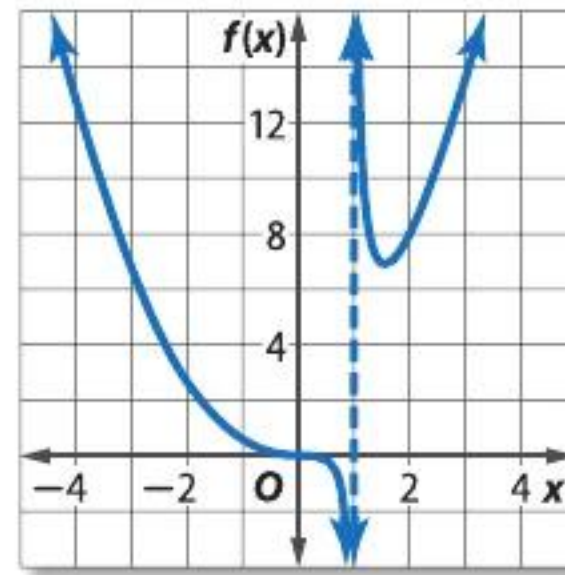
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 1$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام، إذاً، لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 ارسم التمثيل البياني.

استخدم الجدول لإيجاد الأزواج المرتبة على التمثيل البياني. ثم صل النقاط ببعضها البعض.

x	$f(x)$
-3	6.75
-2	2.67
-1	0.5
0	0
0.5	-0.25
1.5	6.75
2	8
3	13.5

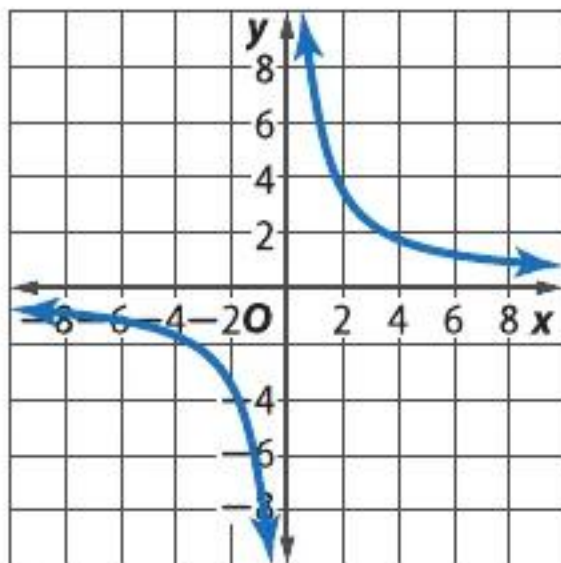


تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانياً.

1A. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$

1B. $f(x) = \frac{(x + 1)^3}{(x + 2)^2}$



وفي الحياة اليومية، في بعض الأحيان تكون القيم الموجودة على التمثيل البياني لدالة نسبية غير ذات معنى. في التمثيل البياني الموجود على اليسار، لا يمكن أن تكون قيم x مثل الزمن والمسافة وعدد الأشخاص سالبة في سياق المسألة. لذا لن نحتاج إلى اعتبار هذا الجزء من التمثيل البياني.

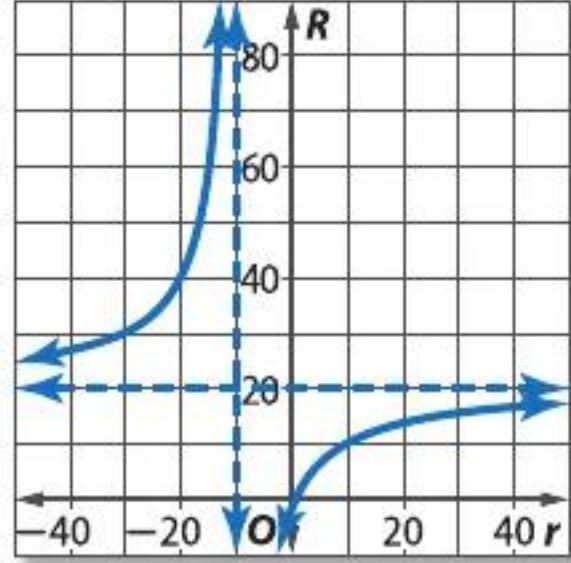
نصيحة دراسية

حاسبة التمثيل البياني يمكن استخدام خاصية TABLE في حاسبة التمثيل البياني لحساب قيم الكسور العشرية لكل من x و y .

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام التمثيل البياني للدوال النسبية

متوسط السرعة تحرك قارب عكس التيار بسرعة r_1 km/h. أثناء رحلة العودة إلى نقطة البدء الأصلية، تحرك القارب بسرعة r_2 km/h. وتقدم متوسط السرعة للرحلة كاملة R من خلال القانون $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a. افترض أن r_1 هو المتغير المستقل وافترض أن R هو المتغير التابع. ارسم التمثيل البياني إذا كان $r_2 = 10$ km/h.



تكون الدالة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + 10}$ أو $R = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$

ويكون خط التقارب الرأسي $r_1 = -10$.

مثل خط التقارب الرأسي والدالة بيانياً.

لاحظ أن خط التقارب الرأسي $R = 20$.

b. ما تقاطع R للتمثيل البياني؟

التقاطع مع R هو 0.

c. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، قيم السرعات غير سالبة. وبالتالي تكون جميع قيم r_1 الأكبر من أو تساوي 0 وقيم R التي تقع بين العددين 0 و 20 ذات معنى.

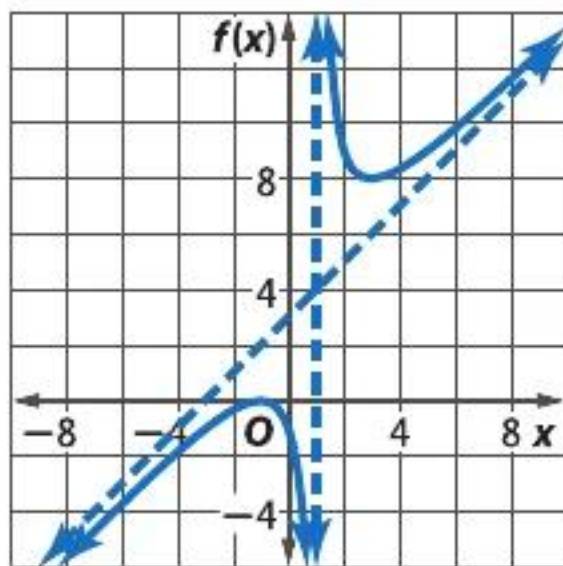
تمرين موجّه

2. **الرواتب** تستخدم إحدى الشركات القانون $S(x) = \frac{45x + 25}{x + 1}$ لتحديد الراتب السنوي بآلاف الدراهم للموظف أثناء عامه الـ x . مثل $S(x)$ بيانياً. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟ وما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني؟

2 **خطوط التقارب المائلة ونقطة عدم الاتصال** يعتبر **خط التقارب المائل** والذي يطلق عليه في بعض الأحيان خط التقارب المنحدر خطاً ليس أفقي ولا رأسي.

المفهوم الأساسي خط التقارب المائل

الشرح إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ وكان $a(x)$ و $b(x)$ دالتين كثيرتي الحدود ليس بينهما أي عوامل مشتركة سوى 1 وكانت $b(x) \neq 0$ ، فإن $f(x)$ لها خط تقارب مائل إذا كانت درجة $a(x)$ مطروحة منها درجة $b(x)$ تساوي 1. وتكون معادلة خط التقارب هي $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ بدون باقي.



$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3}{x^3 - 1}$$

خط التقارب الرأسي: $x = 1$
خط التقارب المائل: $y = x + 3$

مثال

مثال 3 تحديد خط التقارب المائل

مثّل $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x - 1}$ بيانيًا.

الخطوة 1 جد الأصفار.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= 0 & \text{اجعل } a(x) &= 0 \\ (x + 2)^2 &= 0 & \text{بالتحليل إلى العوامل.} \\ x + 2 &= 0 & \text{بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.} \\ x &= -2 & \text{اطرح 2 من كل طرف.} \end{aligned}$$

يوجد صفر عند $x = -2$.

الخطوة 2 جد خط التقارب.

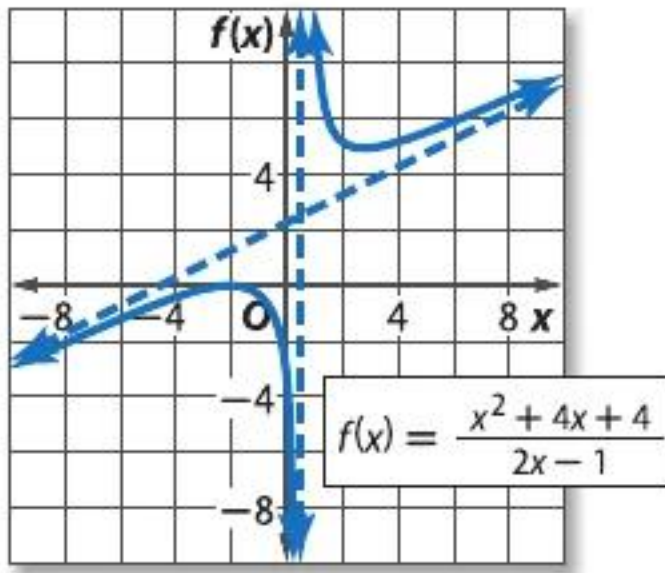
$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 & \text{اجعل } b(x) &= 0 \\ 2x &= 1 & \text{اجمع 1 إلى كل طرف.} \\ x &= \frac{1}{2} & \text{اقسم كل طرف على 2.} \end{aligned}$$

يوجد خط تقارب رأسي عند $x = \frac{1}{2}$.

حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام. إذا لا يوجد خط تقارب أفقي.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ 2x - 1 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{(-)x^2 - \frac{1}{2}x} \\ \frac{9}{2}x + 4 \\ \underline{(-)\frac{9}{2}x - \frac{9}{4}} \\ \frac{25}{4} \end{array}$$

حيث إن الفارق بين درجة البسط ودرجة المقام يساوي 1.
إذا يوجد خط تقارب مائل.
اقسم البسط على المقام لتحدد معادلة خط التقارب المائل.
إن معادلة خط التقارب هي ناتج القسمة باستثناء أي باق.
وبالتالي، فإن خط التقارب المائل هو الخط $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.



الخطوة 3 ارسم خط التقارب. ثم استخدم قيم الجدول لتمثيل الدالة بيانيًا.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

3A. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

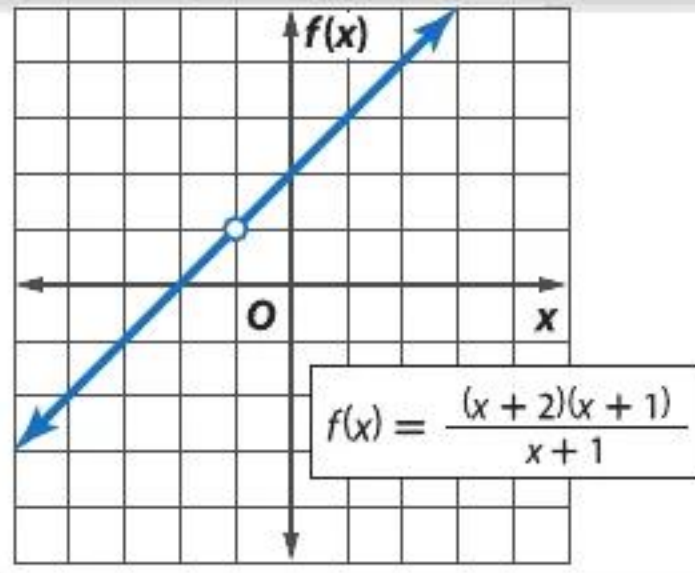
3B. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

وفي بعض الحالات، قد يحتوي التمثيل البياني للدوال النسبية على **نقطة انفصال**، والتي تشبه الفجوة في المنحنى. ويرجع ذلك إلى أن الدالة تكون غير محددة في هذه النقطة.

نصيحة دراسية

خط التقارب المائل يقع خط التقارب المائل في الدوال النسبية التي تشتمل على بسط كثير الحدود أعلى درجة واحدة من مقام كثير الحدود.

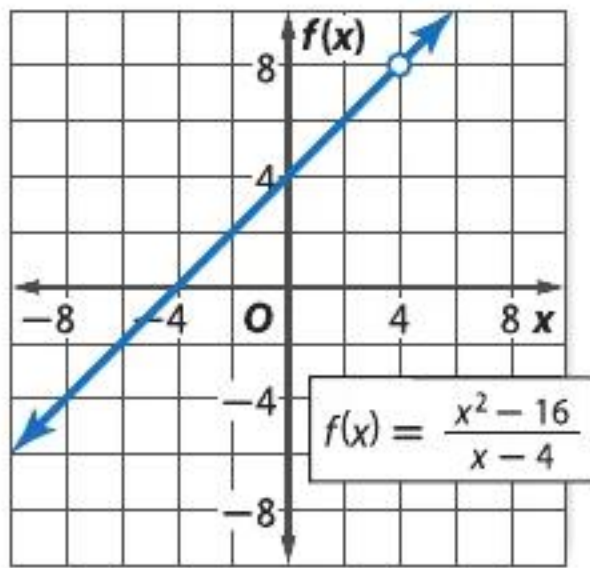
المفهوم الأساسي نقطة الانفصال



الشرح
إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x) \neq 0$ ، $x = c$ عامل لكل من $a(x)$ و $b(x)$ ، فسيوجد نقطة انفصال عند $x = c$.

مثال
$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x+2; x \neq -1$$

مثال 4 التمثيل بيانيًا مع نقطة الانفصال



مثال $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا.

لاحظ أن $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4$

وبالتالي، فإن التمثيل البياني $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو التمثيل البياني $f(x) = x+4$ مع فجوة عند $x = 4$.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

4A. $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

4B. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9}$

انتبه!

الفجوات تذكر أن العامل المشترك بين البسط والمقام يمكن أن يشير لوجود فجوة.

التحقق من فهمك

مثّل كل دالة بيانيًا.

مثال 1

1. $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x + 2}$

3. **التبرير** يتخذ فهد موقع المهاجم بفريق كرة القدم لمدرسته. وفي هذا الموسم، حقق حتى الآن 7 من 11 هدفًا. ويود تحسين نسبة الأهداف الخاصة به. فإذا كان بإمكانه تحقيق X هدفًا متتابعًا، فيمكن تحديد نسبة أهدافه باستخدام

الدالة $P(x) = \frac{7+x}{11+x}$

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذي معنى في سياق المسألة؟

c. اذكر معنى تقاطع المحاور الرأسي.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة أهداف فهد.

مثّل كل دالة بيانيًا.

الأمثلة 3-4

4. $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 2}{x}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 2}$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$

7. $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

مثال 1 مثل كل دالة بيانيًا.

$$8. f(x) = \frac{x^4}{6x + 12}$$

$$9. f(x) = \frac{x^3}{8x - 4}$$

$$10. f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3 + 64}{16x - 24}$$

مثال 2

12. **الروح المدرسية** بصفتها رئيسة لمجلس الطلاب، أمرت أمير بصنع قمصان لتجمع طلاب تشجيعي. ويكلف كل قميص AED 9.50، كما يوجد رسوم إدارية بمبلغ 75 AED. ويخطط مجلس الطلاب لبيع القمصان، ولكن سيحصل كل من أعضاء مجلس الطلاب البالغ عددهم 15 طالبًا على قميص مجانيًا.

- a. اكتب دالة لمتوسط تكلفة القميص الذي سيبيع. مثل الدالة بيانيًا.
b. ما متوسط التكلفة إذا تم طلب 200 قميص؟ وإذا تم طلب 500 قميص؟
c. كم عدد القمصان التي يجب طلبها ليصبح متوسط التكلفة أقل من 9.75 AED؟

مثال 3-2 مثل كل دالة بيانيًا.

الأمثلة 2-3

$$13. f(x) = \frac{x}{x + 2}$$

$$14. f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)}$$

$$15. f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2}$$

$$16. f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$$

$$17. f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2}$$

$$18. f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)}$$

$$19. f(x) = \frac{(x - 4)^2}{x + 2}$$

$$20. f(x) = \frac{(x + 3)^2}{x - 5}$$

$$21. f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$$

$$22. f(x) = \frac{4x^3}{2x^2 + x - 1}$$

$$23. f(x) = \frac{3x^2 + 8}{2x - 1}$$

$$24. f(x) = \frac{2x^2 + 5}{3x + 4}$$

$$25. f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 + 2}$$

$$26. f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 12}{x^3 - 6}$$

27. **المشاهدة** يوضح التيار بالأمبير في دائرة كهربائية بها ثلاثة أجهزة مقاومة موصولين على التوالي من خلال المعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث إن V هو الجهد بالفولت في الدائرة وكل من R_1 و R_2 و R_3 هي مقاومات أجهزة المقاومة الثلاثة بالأوم.

a. افترض أن R_1 هو المتغير المستقل وافترض أن I هو المتغير التابع. مثل الدالة بيانيًا إذا كان فولت $V = 120$ و $R_2 = 25$ أوم و $R_3 = 75$ أوم.

b. اذكر معادلة خط التقارب الرأسي ونقاط تقاطع R_1 و I للتمثيل البياني.

c. جد قيمة I عندما تكون قيمة R_1 140 أوم.

d. ما قيم المجال والمدى التي لها معنى في سياق المسألة؟

مثال 4 مثل كل دالة بيانيًا.

مثال 4

$$28. f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$

$$29. f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$$

$$30. f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

$$31. f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$$

$$32. f(x) = \frac{(x - 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 6x + 8}$$

$$33. f(x) = \frac{(x + 5)(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 8x + 15}$$

$$34. f(x) = \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$35. f(x) = \frac{2x^4 + 10x^3 + 12x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

36. **الأعمال التجارية** اشترى علي نافلة للسيارات الصغيرة مقابل AED 4500 ويعمل على نقل السيارات من مواقف المدينة. وفي كل مرة ينقل سيارة صغيرة من الموقف، يتكبد تكلفة قدرها AED 50 للبنزين والصيانة.

a. اكتب الدالة النسبية التي تمثلها متوسط التكلفة لكل سيارة كدالة لعدد السيارات ثم مثلها بيانيًا.

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد إجمالي السيارات التي يحتاج علي لنقلها ليصبح متوسط تكلفة النقل أقل من AED 80.

37. **المعرفة المالية** اشترت هنا هاتفًا خلويًا جديدًا يتوفر فيه الوصول إلى الإنترنت. وقد كانت تكلفة الهاتف AED 150. وقد كانت تكلفة الاستخدام الشهرية AED 30 بالإضافة إلى AED 10 تكلفة الوصول إلى الإنترنت.

a. اكتب الدالة النسبية التي تمثل متوسط التكلفة الشهرية كدالة لعدد الشهور التي استخدمت فيها هنا الهاتف ثم مثلها بيانيًا.

b. ما خط التقارب للتمثيل البياني؟

c. لماذا يعتبر الربع الأول من التمثيل البياني هو الربع الوحيد ذا الصلة؟

d. كم عدد الشهور التي سيصبح بعدها متوسط التكلفة الشهرية AED 45؟

38. **التبرير المنطقي** تلعب ليلي رياضة الكرة اللينة لمدرسة البرشاء الثانوية. وأثناء هذا الموسم حققت حتى الآن 4 ضربات من 12 من موقع الضارب. وهي عازمة على تحسين متوسط ضرباتها. فإذا كان بإمكانها الحصول على

$$x \text{ ضربة متتالية، يمكن تحديد متوسط ضرباتها باستخدام } B(x) = \frac{4+x}{12+x}$$

a. مثل الدالة بيانيًا.

b. أي جزء من التمثيل البياني يعتبر ذا معنى في سياق المسألة؟

c. اذكر معنى تقاطع المحور الرأسي.

d. ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ اشرح معناها فيما يتعلق بنسبة ضربات سالي.

مثل كل دالة بيانيًا.

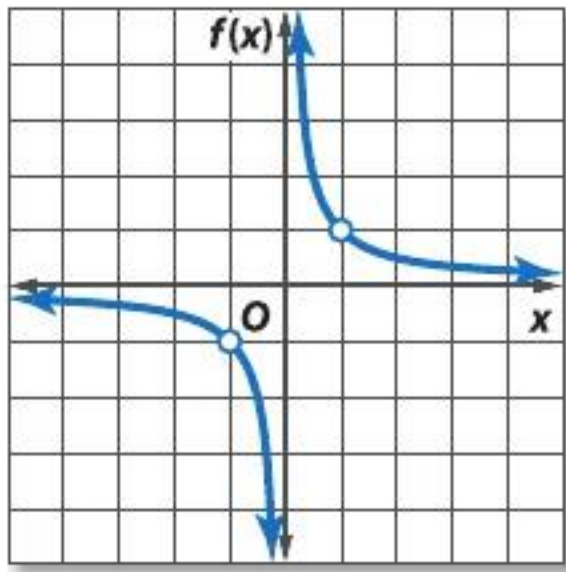
39. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+5}$

40. $f(x) = \frac{x^2-10x-24}{x+2}$

41. $f(x) = \frac{6x^2+4x+2}{x+2}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم منحنى الدالة النسبية بخط تقارب أفقي $y = 1$ وخط تقارب رأسي $x = -2$.



43. **التحدي** قارن وبين الفرق بين $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2-2)}$ و $g(x)$ الموضحة إلى اليسار.

44. **التبرير** ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالة $f(x) = x-2$ و $g(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$ ؟

45. **الإثبات** دالة نسبية تعطى بالصيغة

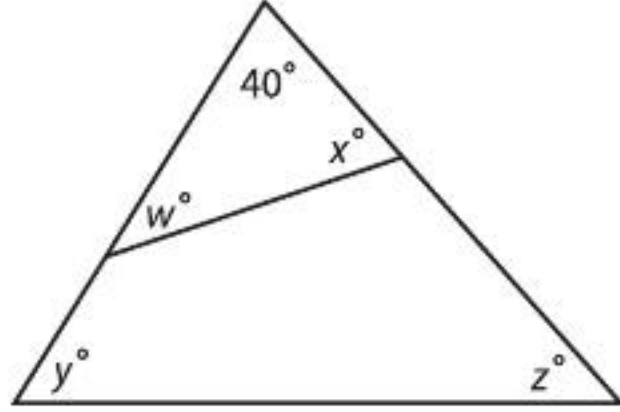
$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \text{ حيث إن } a(x) \text{ و } b(x) \text{ دالتان كثيرتا الحدود و } b(x) \neq 0. \text{ برهن أن } f(x) = \frac{x}{a-b} + c \text{ دالة نسبية.}$$

46. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكن استخدام التحليل إلى العوامل لتحديد خط التقارب الرأسي أو نقطة الانفصال للدالة النسبية؟

تمرين على الاختبار المعياري

49. **إجابة شبكية** تقع خمس نقاط مختلفة في مستوى بحيث كان 3 من النقاط على المستقيم ℓ و 3 من النقاط على مستقيم آخر m . ما إجمالي عدد المستقيمات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل مستقيم بنقطتين من النقاط
الـ 5؟

50. **الهندسة** في الشكل أدناه، ما قيمة $w + x + y + z$ ؟



- A 140
B 280
C 320
D 360

47. **الاحتمالات** من بين الدورات الست التي يقدمها قسم الموسيقى في مدرسة خولة، يجب أن تختار خولة اثنتين بالضبط منهما. فكم عدد التوافيق المحتملة للدورتين التي ستختارهما خولة إذا لم يكن هناك قيود على الدورات التي يمكنها اختيارها؟

- A 48
B 18
C 15
D 12

48. يتم تقديم المبيعات المتوقعة للعبة من خلال المعادلة $S(p) = \frac{3000}{2p + a}$ ، حيث إن $S(p)$ هو عدد اللعب المباعة بالآلاف، و p هو سعر اللعبة بالدراهم و a هو ثابت. إذا تم بيع 100,000 لعبة مقابل AED 10 للعبة، فكم عدد اللعب التي سيتم بيعها بمقابل AED 20 للعبة؟

- F 20,000
G 50,000
H 60,000
J 150,000

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانياً. واذكر المجال وال المدى. (الدرس 2-3)

51. $f(x) = \frac{-5}{x+2}$

52. $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

53. $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 2-2)

54. $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$

55. $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$

56. $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$

57. $\frac{d-4}{d^2+2d-8} - \frac{d+2}{d^2-16}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

58. $y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{7}{3}}$

59. $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{9}{4}}$

60. $\left(\frac{1}{b^3}\right)^{\frac{3}{5}}$

61. $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}}$

مراجعة المهارات

62. **الانتقال** يأخذ السيد أحمد ابنته مها إلى الكلية. يوضح الجدول مسافتهم من المنزل بعد أزمنة مختلفة.

a. جد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين ساعة واحدة إلى 3 ساعات بعد مغادرة المنزل.

b. جد متوسط معدل التغيير في مسافتهم من المنزل بين 0 ساعة واحدة إلى 5 ساعات بعد مغادرة المنزل.

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225



مختبر تقنية التمثيل البياني

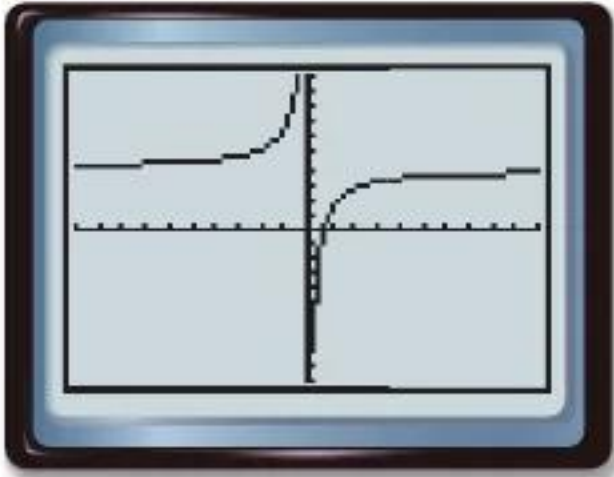
التمثيل البياني للدوال النسبية

2-4

يمكن استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف التمثيل البياني للدوال النسبية. تحتوي هذه التمثيلات البيانية على بعض الخواص التي لا تظهر مطلقاً على التمثيل البياني للدوال كثرات الحدود.

نشاط 1 مثل بيانياً مع خطوط التقارب

مثل $y = \frac{8x-5}{2x}$ بيانياً في نافذة العرض القياسية. جد معادلات أي خطوط تقارب. اذكر المجال والمدى للدالة.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

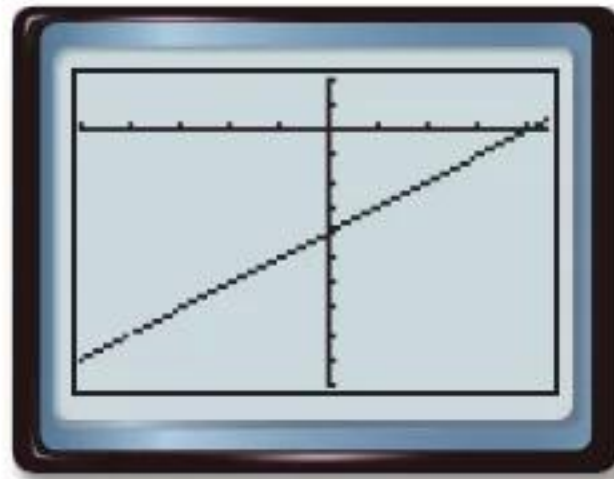
الخطوة 1 أدخل المعادلة في القائمة $Y=$ ثم مثل بيانياً.
خطوات العملية على الحاسبة: $Y= (8 X,T,θ,n - 5) ÷ (2 X,T,θ,n)$ **ZOOM** 6

الخطوة 2 تفحص التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا تحديد ما إذا كان $x = 0$ فإن الدالة غير محددة. تكون معادلة خط التقارب الرأسي هي $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y بينما تزيد x وبينما تقل x . تقترب قيمة y من 4. إذاً، فمعادلة خط التقارب الأفقي $y = 4$. المجال يساوي $\{x | x \neq 0\}$. والمدى يساوي جميع الأعداد الحقيقية.

النشاط 2 مثل بيانياً مع نقطة الإنفصال

مثل $y = \frac{x^2-16}{x+4}$ بيانياً في النافذة $[-5, 4.4]$ في $[-10, 2]$ بعوامل قياس 1.



$[-5, 4.4]$ scl: 1 by $[-20, 2]$ scl: 1

الخطوة 1 حيث إن الدالة غير متصلة، ضع الحاسبة على النمط DOT.
خطوات العملية على الحاسبة: **MODE** **ENTER** **▶** **▼** **▼** **▼** **▼**

الخطوة 2 تفحص التمثيل البياني.

يبدو هذا التمثيل البياني كمستقيم بدون فجوة في الاتصال $x = -4$. ويحدث ذلك لأن المقام يكون 0 عندما يكون $x = -4$. وبالتالي، تكون الدالة غير محددة عندما يكون $x = -4$. إذاً، فتتبع التمثيل البياني، عندما تصل إلى $x = -4$ ، فستجد أنه لا يوجد قيمة مطابقة لـ y .

تمارين

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل كل دالة بيانياً. اكتب الإحداثي x لأي نقاط انفصال و/أو معادلات لأي خط تقارب. اذكر المجال والمدى.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{x}{x+2}$

3. $f(x) = \frac{2}{x-4}$

4. $f(x) = \frac{2x}{3x-6}$

5. $f(x) = \frac{4x+2}{x-1}$

6. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

حل المعادلات والمتباينات النسبية

2-5

السابق

الحالي

لماذا؟

• حوّلت التعابير النسبية إلى أبسط صورة.

1 حل المعادلات النسبية.

2 حل المتباينات النسبية.

• تبلغ تكلفة العضوية لأحد النوادي الرياضية AED 20 في الشهر. وينبغي على الأعضاء كذلك دفع AED 5 في كل مرة يزورون فيها النادي. فإذا زار أحد الأعضاء النادي x مرات في شهر واحد، فستكون تكلفة هذا الشهر $20 + 5x$. وستكون التكلفة الفعلية لكل زيارة $\frac{20 + 5x}{x}$. لتحديد عدد الزيارات التي ينبغي القيام بها لتصبح تكلفة الزيارة AED 6. فستحتاج إلى حل المعادلة $\frac{20 + 5x}{x} = 6$.



1 حل المعادلات النسبية تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبير نسبي واحد أو أكثر باسم **المعادلات النسبية**. وتكون هذه المعادلات في أغلب الأحيان أسهل في الحل ما أن يتم التخلص من الكسور. ويمكن التخلص من الكسور بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حلّ المعادلة $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} = \frac{23}{18}$. **تحقق من حلك.**

المقام المشترك الأصغر يساوي $18(x+3)$.

المعادلة الأصلية

اضرب في المقام المشترك الأصغر.

اختصر العوامل المشتركة.

اضرب.

بسّط.

اطرح $15x$ و 69 .

اقسم.

المعادلة الأصلية

$x = 6$

بسّط.

بسّط.

اجمع.

التحقق

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} &= \frac{23}{18} \\ 18(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right) + 18(x+3)\left(\frac{5}{6}\right) &= 18(x+3)\left(\frac{23}{18}\right) \\ 18\cancel{(x+3)}\left(\frac{4}{\cancel{x+3}}\right) + \frac{18}{3}(x+3)\left(\frac{5}{\cancel{6}}\right) &= \frac{18}{1}(x+3)\left(\frac{23}{\cancel{18}}\right) \\ 72 + 15x + 45 &= 23x + 69 \\ 15x + 117 &= 23x + 69 \\ 48 &= 8x \\ 6 &= x \\ \frac{4}{x+3} + \frac{5}{6} &= \frac{23}{18} \\ \frac{4}{6+3} + \frac{5}{6} &= \frac{23}{18} \\ \frac{4}{9} + \frac{5}{6} &= \frac{23}{18} \\ \frac{8}{18} + \frac{15}{18} &= \frac{23}{18} \\ \frac{23}{18} &= \frac{23}{18} \checkmark \end{aligned}$$

تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

1A. $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10}$

1B. $\frac{7}{12} + \frac{9}{x-4} = \frac{55}{48}$

مفردات جديدة

معادلة نسبية

rational equation

المتوسط الحسابي

المرجح

weighted average

متباينة نسبية

rational inequality

ممارسات في الرياضيات

6 مراعاة الدقة.



قد يؤدي ضرب كل طرف من المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتعبير النسبية إلى نتائج لا تعتبر حلولاً للمعادلة الأصلية. وتسمى هذه بالحلول الدخيلة.

مثال 2 حل معادلة نسبية

حلّ $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$. تحقق من صحة الحل.

المقام المشترك الأصغر للحدود هو $(x+3)(x+5)$.

المعادلة الأصلية $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$

اضرب في المقام المشترك الأصغر. $\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2 - x - 10)}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$

إختصر العوامل المشتركة. $\frac{+3)(\cancel{x+5})(2x)}{\cancel{x+5}} - \frac{(\cancel{x+3})(\cancel{x+5})(x^2 - x - 10)}{\cancel{x^2 + 8x + 15}} = \frac{(x+5)(\cancel{x+3})3}{\cancel{x+3}}$

بسط. $(x+3)(2x) - (x^2 - x - 10) = 3(x+5)$

وزع. $2x^2 + 6x - x^2 + x + 10 = 3x + 15$

بسط. $x^2 + 7x + 10 = 3x + 15$

اطرح $3x + 15$. $x^2 + 4x - 5 = 0$

حلل إلى العوامل. $(x+5)(x-1) = 0$

خاصية ناتج الضرب الصفري $x+5=0$ أو $x-1=0$

$x = -5$ $x = 1$

التحقق جرب $x = -5$.

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$

$$\frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2} \quad \times$$

جرب $x = 1$.

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

عند حل المعادلة النسبية، فإن أي حل محتمل يؤدي إلى صفر في المقام يجب استثنائه من قائمة الحلول.

حيث إن $x = -5$ تؤدي إلى صفر في المقام، فهي حل دخيل. استبعد -5 من قائمة الحلول. الحل يساوي 1.

تمرين موجه

2A. $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

2B. $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

2C. $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

2D. $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

الربط بتاريخ الرياضيات

بروك تايلور (1685-1731)

عالم الرياضيات الذي وضع نظرية استخدمت في التفاضل والتكامل وتعرف بنظرية تايلور وتعتمد على الباقي بعد العمليات الحسابية على التعبيرات النسبية.

مراجعة المفردات

حل دخيل (extraneous solution) هو حل لا يحقق المعادلة الأصلية

المتوسط الحسابي المرجح هو طريقة لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد يكون لبعض العناصر فيها أهمية أكبر أو ترجيح عن الأخرى. تتضمن العديد من مسائل الحياة اليومية المزج والعمل والمسافات والفائدة والتي يمكن حلها باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 3 من الحياة اليومية مسائل المزج

الكيمياء تضيف موزة محلول حمضي بنسبة 70% إلى 12 mL نسبة المحلول الحمضي فيه 15%. كم ينبغي إضافته من المحلول الحمضي بنسبة 70% لعمل محلول حمضي بنسبة 60%؟

الفهم تحتاج موزة إلى أن تعرف المقدار اللازم إضافته من المحلول للمحلول الأصلي لصنع محلول جديد.

التخطيط يحتوي كل محلول على نسبة معينة من الحمض. يجب أن تكون نسبة الحمض في المحلول الأخير مساوية لمقدار الحمض مقسومًا على إجمالي المحلول.

الأصلي	المضاف	الجديد
0.15(12)	0.7(x)	0.15(12) + 0.7x
12	x	12 + x
كمية الحمض		
إجمالي المحلول		

نسبة الحمض في المحلول = نسبة الحمض / إجمالي المحلول

$$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{مقدار الحمض}}{\text{إجمالي المحلول}}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$

$$100(12 + x) \frac{60}{100} = 100(12 + x) \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$

$$\frac{100}{1}(12 + x) \frac{60}{100} = 100 \frac{1.8 + 0.7x}{12 + x}$$

$$(12 + x)60 = 100(1.8 + 0.7x)$$

$$720 + 60x = 180 + 70x$$

$$540 = 10x$$

$$54 = x$$

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7x}{12 + x}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{0.15(12) + 0.7(54)}{12 + 54}$$

$$\frac{60}{100} = \frac{37.8}{66}$$

$$0.6 = 0.6 \quad \checkmark$$

تحتاج موزة إلى إضافة 54 mL من المحلول الحمضي بنسبة 70%.

تمرين موجه

3. يضيف عبد الله محلول عصير فاكهة بتركيز 65% إلى 15 mL من شراب عصير فاكهة بتركيز 10%. فكم ينبغي إضافته من محلول عصير الفاكهة تركيز 65% لصنع عصير فاكهة بتركيز 35%؟

نصيحة دراسية

التمثيل بالنماذج تكون الجداول مثل المذكور في المثال 3 مفيدة في ترتيب وحل مسائل المزج والعمل والمتوسط الحسابي المرجح والمسافة.

يمكن استخدام القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل المعادلات النسبية. ويعتبر الاستخدام الأكثر شيوعاً هو $d = rt$. ومع ذلك يمكن تمثيلها عن طريق $r = \frac{d}{t}$ و $t = \frac{d}{r}$.

مثال 4 من الحياة اليومية مسائل المسافة

التجديف يجتدّف غايّة على زورق في خور دبي. ويبلغ معدل سرعته في الماء الراكد 6 km/h. ويستغرق غايّة 3 ساعات ليقوم برحلة ذهاب وإياب بمسافة 10 km. بفرض أن غايّة قام بالتجديف بمعدل ثابت للسرعة، فجد معدل التيار.

الفهم الآن لدينا سرعة ناصر في الماء الراكد والزمن الذي يستغرقه للتحرك مع التيار وضده. ونحتاج إلى تحديد سرعة التيار.

التخطيط تحرك ناصر 5 km في اتجاه التيار و 5 km عكسه. ويعتبر القانون الذي يربط بين المسافة والسرعة والزمن هو $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$.

إجمالي الزمن	الزمن المستغرق عكس التيار	الزمن المستغرق في اتجاه التيار
3 ساعات	$\frac{5}{6-r}$	$\frac{5}{6+r}$

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

$$(6+r)(6-r)\frac{5}{6+r} + (6+r)(6-r)\frac{5}{6-r} = (6+r)(6-r)3$$

$$(6-r)5 + (6+r)5 = (36-r^2)3$$

$$30 - 5r + 30 + 5r = 108 - 3r^2$$

$$60 = 108 - 3r^2$$

$$0 = -3r^2 + 48$$

$$0 = -3(r+4)(r-4)$$

$$0 = (r+4)(r-4)$$

$$r = 4 \text{ أو } -4$$

$$\frac{5}{6+r} + \frac{5}{6-r} = 3$$

$$\frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \checkmark$$

حيث إنه لا يمكن أن تكون السرعة سالبة، تكون سرعة التيار 4 km/h.

تمرين موجّه

4. **الطيران** تبلغ سرعة الرياح 20 km/h. فإذا استغرقت طائرة 7 ساعات لتقطع رحلة ذهاب وعودة بمسافة 2368 km، فحدد سرعة الطائرة في الهواء الساكن.

نصيحة دراسية

مسائل المسافة عندما تتضمن المسافة رحلة ذهاب وعودة، تساوي المسافة في إحدى الاتجاهين المسافة في الاتجاه المقابل.

الحل

اكتب المعادلة.

المقام المشترك الأصغر $(6+r)(6-r)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر.

إختصر العوامل المشتركة.

بسّط.

بسّط.

بسّط.

اطرح $10r$.

حلل إلى العوامل.

اقسم كل طرف على -3.

خاصية ناتج الضرب الصفري

التحقق

المعادلة الأصلية

$r = 4$

بسّط.

بسّط.

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية التي تتضمن العمل باستخدام المعادلات النسبية.

مثال 5 من الحياة اليومية مسائل العمل

الخدمة المجتمعية في كل عام، يبني طلاب الصفين الحادي والثاني عشر في مدرسة المنذر الثانوية منزلاً للحي. فإذا احتاج طلاب الصف الثاني عشر 24 يوماً لإكمال منزل و 18 يوماً إذا قاموا بالعمل مع طلاب الصف الحادي عشر، فكم سيستغرق الصف الثاني عشر لإكمال منزل إذا قاموا بالعمل وحدهم؟

الفهم تتلخص المعطيات التي لدينا في المدة المستغرقة عندما يعمل طلاب الصف الثالث الثانوي وحدهم والوقت المستغرق عندما يعمل الصفين معاً. ونحتاج لتحديد المدة المستغرقة عند عمل طلاب الصف الثاني وحدهم.

التخطيط يستطيع طلاب الصف الثاني عشر إكمال منزل واحد في 24 يوماً، وبالتالي يكون معدل إنجازهم $\frac{1}{24}$ منزل في اليوم. ويبلغ معدل إنجاز الصف الحادي عشر $\frac{1}{j}$. ويبلغ المعدل المركب لكلا الصفين $\frac{1}{18}$.

معدل طلاب الصف الثاني عشر	معدل طلاب الصف الحادي عشر	المعدل المركب
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{18}$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

اكتب المعادلة.

جد الحل

$$72j \frac{1}{24} + 72j \frac{1}{j} = 72j \frac{1}{18}$$

المقام المشترك الأصغر = 72j
اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$3 \frac{1}{24} + 72j \frac{1}{j} = 72j \frac{1}{18}$$

إختصر العوامل المشتركة.

$$3j + 72 = 4j$$

وزّع

$$72 = j$$

اطرح 3j.

التحقق يوجد طريقتان محتملتان.

استخدام الحاسبة.



الطريقة 2

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} = \frac{1}{18}$$

$$j = 72$$

$$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} = \frac{4}{72}$$

المقام المشترك الأصغر = 72

$$\frac{4}{72} = \frac{4}{72} \quad \checkmark$$

بسط.

سيستغرق طلاب الصف الحادي عشر 72 يوماً لإكمال المنزل وحدهم.

تمرين موجّه

- 5A. استغرق عدنان وطارق 6 ساعات لجرف الأوراق معاً في العام الماضي. وفي العام الماضي استغرق طارق 10 ساعات ليقوم بذلك وحده. فكم سيستغرق عدنان من الزمن ليقوم بذلك وحده هذا العام؟
- 5B. يقوم عمر وعلي بطلاء المنازل معاً. إذا تمكن عمر من طلاء أحد المنازل في 6 أيام وتمكن علي من طلاء نفس المنزل في 5 أيام، فكم سيستغرق طلاء المنزل إذا قاما بالطلاء معاً؟



الربط بالحياة اليومية

منذ 1997، يقضي طلاب مدرسة روك بوينت في برلنغتون بفيرمونت أسبوع في خدمة المجتمعات في جميع أنحاء العالم. وأثناء العمل مع مؤسسة هابيتات فور هيومانيتي، يقضي الطلاب الزمن في ريف تينيسي، حيث يبدؤون ويكملون سقف منزل من منازل هابيتات في أسبوع واحد.

المصدر: معهد المجتمع المحلي بولاية فيرمونت لشؤون العمل

2 حل المتباينات النسبية

أكثر، فاتبع هذه الخطوات.

المفهوم الأساسي حل المتباينات النسبية

- الخطوة 1** اذكر القيم المستثناة. وهي القيم التي تجعل المقام يساوي 0.
- الخطوة 2** حل المعادلة ذات الصلة.
- الخطوة 3** استخدم القيم المحددة بواسطة الخطوات السابقة لقسمه خط الأعداد إلى فترات.
- الخطوة 4** اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد أي الفترات تحتوي على قيم تحقق المتباينة.

مثال 6 حل متباينة نسبية

$$\text{حل المتباينة } \frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$$

الخطوة 1 القيمة المستثناة لهذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2 حل المعادلة ذات الصلة.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} &= \frac{x+1}{4} \\ 12(x-2) \cdot \frac{x}{3} - 12(x-2) \cdot \frac{1}{x-2} &= 12(x-2) \cdot \frac{x+1}{4} \\ 4x^2 - 8x - 12 &= 3x^2 - 3x - 6 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x-6)(x+1) &= 0 \\ x &= 6 \text{ or } -1 \end{aligned}$$

المعادلة ذات الصلة

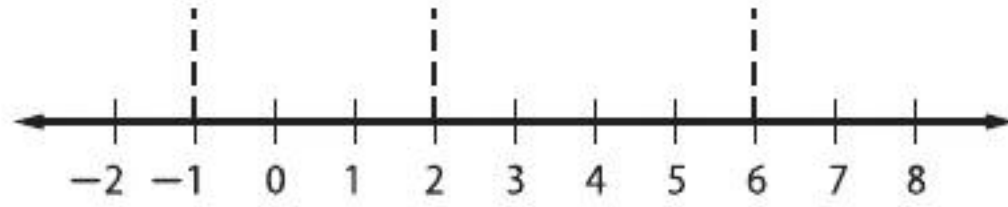
المقام المشترك الأصغر يساوي 12 (x-2) اضرب في المقام المشترك الأصغر. وزع.

اطرح 3x² - 3x - 6.

حلل إلى العوامل.

خاصية حاصل الضرب الصفري

الخطوة 3 ارسم مستقيمات رأسية عند القيم المستثناة وعند الحلول لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4 والآن اختبر إحدى القيم في كل فترة لتحديد ما إذا كانت القيم في الفترة تحقق المتباينة أم لا.

اختبر $x = -3$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 8$
$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$
$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$	$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$
$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$ ✓	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	$\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$ ✓	$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

تكون العبارة صحيحة لكل من $x = -3$ و $x = 4$. وبالتالي، فالحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تمرين موجّه حل كل متباينة مما يلي.

6A. $\frac{5}{x} + \frac{6}{5} > \frac{2}{3}$

6B. $\frac{4}{3} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية من المحتمل أن تؤدي جميع الفترات إلى عبارة صحيحة كما قد لا تؤدي منها إلى عبارة صحيحة.

المثالان 1-2

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

1. $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

2. $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

3. $\frac{10}{2x+1} + \frac{4}{3} = 2$

4. $\frac{11}{4} - \frac{5}{y+3} = \frac{23}{12}$

5. $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

6. $\frac{14}{x+3} + \frac{10}{x-2} = \frac{122}{x^2+x-6}$

7. $\frac{14}{x-8} - \frac{5}{x-6} = \frac{82}{x^2-14x+48}$

8. $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 3:

9. **البنية** لدى نورة 4.5 kg من الفاكهة المجففة وتبيع كل رطل منها مقابل AED 51. وتود أن تعرف كم تحتاج من رطل مزيج المكسرات المباعة مقابل AED 36.73 للرطل لتصنع مزيجًا من المكسرات والفاكهة المجففة يباع مقابل 28.04 AED للرطل.

a. افترض أن $m =$ عدد كيلوجرام مزيج المكسرات. أكمل الجدول التالي.

الأرطال	السعر لكل رطل	السعر الإجمالي
4.5	AED 51	51(4.5)

b. اكتب معادلة نسبية مستخدمًا العمود الأخير من الجدول.

c. جد حل المعادلة لتحدد عدد الأرطال من مزيج المكسرات اللازم.

مثال 4

10. **المسافة** يبلغ متوسط سرعة قيادة موزة لدراجتها 11.5 km/h. وتقوم برحلة ذهاب وعودة بمسافة 40 km. وتستغرق ساعة و 20 دقيقة في نفس اتجاه الرياح وساعتين و 30 دقيقة عكس اتجاه الرياح.

a. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة في اتجاه الرياح.

b. اكتب تعبيرًا يمثل الزمن الذي قضته موزة عكس اتجاه الرياح.

c. كم يستغرق إكمال الرحلة؟

d. اكتب معادلة نسبية لتحديد سرعة الرياح وجد حلها.

مثال 5

11. **العمل** يعمل نهله وفارس في تلميع السيارات. ويستطيع أيوب تلميع إحدى السيارات في 60 دقيقة بينما يستطيع فارس تلميع نفس السيارة في 80 دقيقة. ويخطط الاثنان إلى تلميع نفس السيارة معًا ويودان معرفة كم من الزمن سيستغرق ذلك.

a. ما المقدار الذي سيكمله نهله في دقيقة؟

b. ما المقدار الذي سيكمله نهله في x دقيقة؟

c. ما المقدار الذي سيكمله فارس في دقيقة؟

d. ما المقدار الذي سيكمله فارس في x دقيقة؟

e. اكتب معادلة نسبية تمثل عمل أيوب وفارس معًا على السيارة.

f. جد حل المعادلة لتحديد الزمن المستغرق لإكمال تلميع السيارة.

مثال 6

حلّ كل من المتباينات التالية. تحقق من صحة الحل.

13. $\frac{1}{4c} + \frac{1}{9c} < \frac{1}{2}$

15. $\frac{1}{3b} + \frac{1}{4b} < \frac{1}{5}$

12. $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$

14. $\frac{4}{3y} + \frac{2}{5y} < \frac{3}{2}$

المثالان 1-2 حل كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

$$16. \frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2 - 13x + 42}$$

$$18. \frac{14}{x-2} - \frac{18}{x+1} = \frac{22}{x^2 - x - 2}$$

$$20. \frac{x}{2x-1} + \frac{3}{x+4} = \frac{21}{2x^2 + 7x - 4}$$

$$17. \frac{13}{y+3} - \frac{12}{y+4} = \frac{18}{y^2 + 7y + 12}$$

$$19. \frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2 + 7a + 10}$$

$$21. \frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2 - 9y - 5}$$

الأمثلة 3-5 22. الكيمياء كم عدد ميليلترات محلول حمضي بتركيز 20% التي يجب إضافتها إلى 30 mL من محلول حمضي بتركيز 75% للحصول على محلول حمضي بتركيز 30%؟

23. البقالة اشترت سندية 1.4 kg من الموز مقابل AED 7.35 للرطل. فكم عدد كيلوجرام التفاح المباع بمبلغ AED 10.20 لكيولوجرام التي يجب أن تشتريها بحيث تكون تكلفة كيلوجرام الفاكهة AED 76.3؟

24. المباني تستطيع مجموعة بدر التطوعية بناء مرآب في 12 ساعة. وتستطيع مجموعة شيما بناء مرآب في 16 ساعة. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملاً معاً؟

حل كل من المتباينات التالية. تحقق من صحة الحل.

$$25. 3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$$

$$26. \frac{5}{3a} - \frac{3}{4a} > \frac{5}{6}$$

$$27. \frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$$

$$28. \frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$$

$$29. \frac{x}{5} + \frac{2}{3} < \frac{3}{x-4}$$

$$30. \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-1} < \frac{3}{2}$$

31. السفر جواً تستغرق إحدى الطائرات 20 ساعة لتطير إلى وجهتها عكس اتجاه الرياح. تستغرق رحلة العودة 16 ساعة. إذا كان متوسط سرعة الطائرة في الهواء الساكن 500 km/h، فما متوسط سرعة الرياح أثناء الرحلة؟

32. المعرفة المالية ترغب شيما في استثمار AED 10,000 في حسابين مختلفين. ويمكن للحساب المحفوف بالمخاطر أن يجني فائدة 9%، بينما يجني الحساب الآخر فائدة 5%. وتود أن تجني فائدة AED 750 هذا العام. من بين الجداول أو التمثيل البياني أو المعادلات، اختر أفضل طريقة تمثيل تلزمها لتحديد المقدار المفترض استثماره في كل حساب.

33. التمثيلات المتعددة فكر في $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$

a. الصيغ الجبرية جد حل المعادلة لإيجاد x. هل كانت أي من قيم x دخيلة؟

b. التمثيل البياني مثل $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$ و $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$ بيانياً على نفس التمثيل البياني لـ $0 < x < 5$.

c. التحليلات بأي قيم x تتقاطع؟ هل تتقاطع القيم عندما تكون x دخيلة بالنسبة لحل المعادلة الأصلية؟

d. الصيغ اللفظية استخدم المعرفة لذكر كيفية استخدام تمثيل بياني لتحديد إن كانت الحلول المحتملة لمعادلة نسبية دخيلة أم لا.

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

$$34. \frac{2}{y+3} - \frac{3}{4-y} = \frac{2y-2}{y^2 - y - 12}$$

$$35. \frac{2}{y+2} - \frac{y}{2-y} = \frac{y^2+4}{y^2-4}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

36. مسألة غير محددة الإجابة قدّم مثلاً على معادلة نسبية يمكن حلها بضرب كل طرف من طرفي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

37. التحدي جد حل $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$

38. الأدوات عند استخدام خاصية Table على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ ستظهر القيم -2 و 3 على الحاسبة "ERROR". وضح دلالتها.

39. الكتابة في الرياضيات لماذا ينبغي عليك التحقق من حلولك للمعادلات والمتباينات النسبية؟

تمرين على الاختبار المعياري

42. انطلقت حاملة طائرات في رحلة إلى مدينة ما ثم عادت. وقد استغرقت رحلة الذهاب ثلاث ساعات ورحلة العودة أربع ساعات. وقد كان متوسط السرعة في رحلة العودة 6 km/h. جد متوسط سرعة للرحلة إلى غوام.

- A 6 km/h C 10 km/h
B 8 km/h D 12 km/h

43. **إجابة قصيرة** إذا كان المستقيم l عموديًا على قطعة مستقيمة CD في النقطة F و $CF = FD$. فكم عدد النقاط على المستقيم l التي تكون مسافتها من النقطة C بنفس مسافتها من النقطة D؟ جميع النقاط

40. يحتوي 9 kg من مزيج المكسرات على 55% من الفول السوداني ممزوجًا بـ 6 kg من نوع آخر من مزيج المكسرات يحتوي على 40% من الفول السوداني. فكم نسبة الفول السوداني في المزيج الجديد؟

- A 58% B 51% C 49% D 47%

41. بالعمل وحده، يستطيع راشد حفر حفرة 10 ft في 10 ft في خمس ساعات. ويستطيع زايد حفر نفس الحفرة في ست ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملاً معًا؟

- F 1.5 ساعة H 25.2 ساعة
G 2.34 ساعة J 37.2 ساعة

مراجعة شاملة

حدد إن كانت كل علاقة توضح تغيرًا طرديًا أم عكسيًا أم لا توضح أيًا منها. (الدرس 2-5)

44.

x	y
12	18
24	36
36	18
72	9

45.

x	y
0.2	24
0.6	72
1.8	216
5.4	648

46.

x	y
14	3
28	1.5
56	0.75
112	0.375

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 2-4)

47. $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$

48. $f(x) = \frac{x^2-5x-14}{x-7}$

49. $f(x) = \frac{x^2+3x-6}{x-2}$

50. **المناخ** يعبر عن الضغط الجوي P . بالبار. لارتفاع معين عن الأرض من خلال

القانون $P = a \cdot e^{-\frac{k}{H}}$. في القانون، a تمثل الضغط على سطح الأرض، والذي يبلغ نحو 1 بار. ويمثل k الارتفاع الذي تود إيجاد الضغط عنده بالكيلومترات بينما تبلغ 7 H كيلومترات دائمًا.

a. جد الضغط عند ارتفاع 2 km و 4 km و 7 km

b. ما الذي تلاحظه حول الضغط مع تزايد الارتفاع؟

51. **أجهزة الكمبيوتر** منذ أن تم اختراع أجهزة الكمبيوتر، تضاعفت السرعة الحاسوبية بعامل من 4 كل ثلاث سنوات.

a. إذا كان جهاز الحاسب يعمل بسرعة حاسوبية s اليوم، فاكتب تعبيرًا للسرعة التي تتوقع أن يعمل بها جهاز حاسب مكافئ بعد x فترات من ثلاث سنوات.

b. افترض أن جهاز الحاسوب يعمل بسرعة معالجة 2.8 جيجا هرتز وترغب في جهاز حاسوب يمكنه العمل بسرعة 5.6 جيجا هرتز. كم تتوقع الانتظار حتى تستطيع شراء جهاز حاسب كهذا؟

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان التالي أطوال محتملة لأضلاع مثلث قائم.

52. 5, 12, 13

53. 60, 80, 100

54. 7, 24, 25



مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المعادلات والمتباينات النسبية

2-5

التوضيح

مهارسات في الرياضيات

5 استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية Table. مثل كلا طرفي المعادلة بيانياً، وحدد موضع نقطة (نقاط) التقاطع.

نشاط 1 معادلة نسبية

$$\text{حل المعادلة } \frac{4}{x+1} = \frac{3}{2}$$

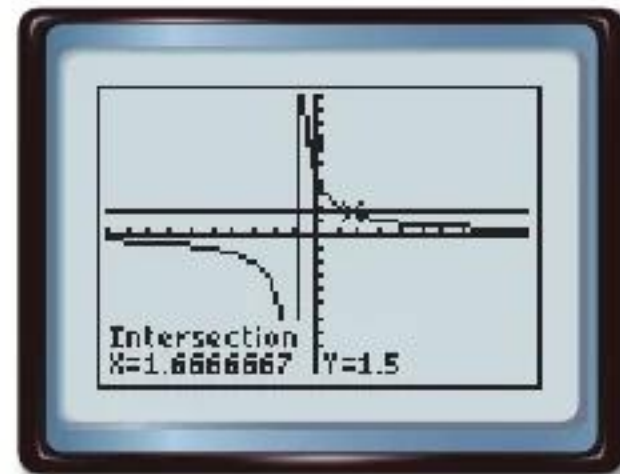
الخطوة 2 استخدم خاصية intersect (التقاطع).

تتيح لك خاصية intersect (التقاطع) من قائمة CALC (احسب) تقريب الزوج المرتب للنقطة التي تتداخل عندها التمثيلات البيانية.

خطوات العملية على الحاسبة: 5 [CALC] [2nd]

اختر تمثيلاً بيانياً واضغط [ENTER]. اختر

التمثيل البياني الآخر، واضغط [ENTER] ثم اضغط [ENTER] مجدداً.



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

الإجابة $1\frac{2}{3}$.

X	Y1	Y2
0	4	1.5
.333333	3	1.5
.666667	2.4	1.5
1	2	1.5
1.33333	1.7143	1.5
1.66667	1.5	1.5
2	1.3333	1.5

X=0

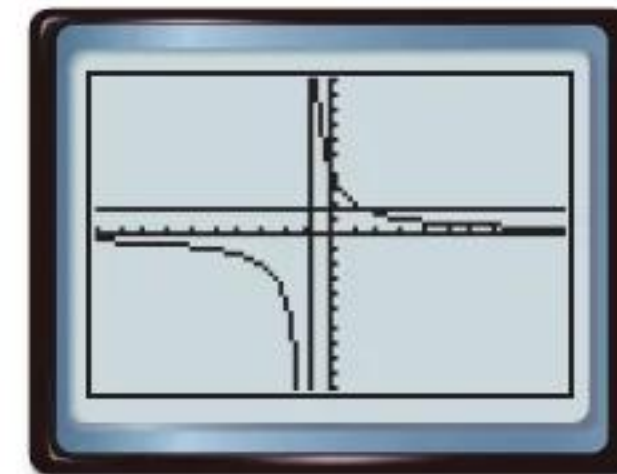
الخطوة 1 مثل كل طرف من أطراف المعادلة بيانياً.

مثل كل طرف من أطراف المعادلة بيانياً كما لو كان دالة منفصلة. أدخل $\frac{4}{x+1}$ بالشكل Y1 و $\frac{3}{2}$ بالشكل Y2. ثم مثل المعادلتين بيانياً في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= 4 ÷ (X,T,θ,n + 1)

ENTER 3 ÷ 2 ZOOM 6



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

وحيث إن الحاسبة في وضع الاتصال، فقد يظهر خط عمودي يربط بين فرعي القطع الزائد. هذا الخط ليس جزءاً من التمثيل البياني.

الخطوة 3 استخدم خاصية TABLE (الجدول).

تحقق من الحل باستخدام خاصية TABLE (الجدول). رتب الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي $1\frac{2}{3}$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2 [TBLSET] 0 [ENTER] 1 ÷ 3 [ENTER] 2 [TABLE]

يعرض الجدول قيم x وقيم y المقابلة لها في كل تمثيل بياني. عند $x = 1\frac{2}{3}$,

يكون لكلتا الدالتين قيمة y تساوي 1.5، لذلك، يكون حل المعادلة $1\frac{2}{3}$.

(يتبع في الصفحة التالية)

مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات النسبية

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات النسبية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

النشاط 2 المتباينة النسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y > \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ أو $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$. بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أصغر من، فظلّل تحت المنحنى. أدخل الحد أولاً ثم استخدم الأزرار والأسهم

ENTER لاختيار أيقونة "التظليل تحت".

المتباينة الثانية هي $y > 9$. ظلّل تحت المنحنى بما أن هذه المتباينة تحوي رمز أكبر من.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= **◀** **◀** **ENTER** **ENTER** **ENTER** **▶** **▶** 3 **÷** **X,T,θ,n** **+** 7 **÷** **X,T,θ,n**
ENTER **◀** **◀** **ENTER** **ENTER** **▶** **▶** 9

الخطوة 2 استخدم خاصية **TABLE** (الجدول).

تحقق باستخدام خاصية **TABLE** (الجدول). رتب الجدول

لإظهار قيم x بزيادات تساوي $\frac{1}{9}$.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd **[TBLSET]** 0 **ENTER** 1 **÷** 9 **ENTER**

2nd **[TABLE]**

X	Y1	Y2
.44444	22.5	9
.55556	18	9
.66667	15	9
.77778	12.857	9
.88889	11.25	9
1	10	9
1.11111	9	9

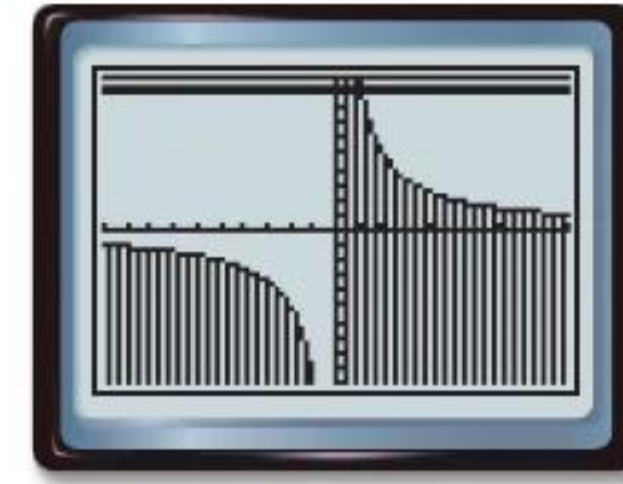
مرر عبر الجدول. لاحظ أنه في حالة قيم x .

الأكبر من 0 والأصغر من $1\frac{1}{9}$, $Y1 > Y2$. هذا

يؤكد بأن حل المتباينة هو $\{x | 0 < x < 1\frac{1}{9}\}$

الخطوة 1 تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: **GRAPH**



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هي مجموعة قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المنطقتان المظللتان.

باستخدام خاصية **intersect** (التقاطع) في الحاسبة، يمكنك

استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x | 0 < x < 1\frac{1}{9}\}$

تمارين

حل كل معادلة أو متباينة.

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$

4. $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$

7. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$

2. $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$

5. $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$

8. $1 + \frac{5}{x-1} \leq 0$

3. $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$

9. $2 + \frac{1}{x-1} \geq 0$

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التعابير النسبية (الدرسان 2-1 و 2-2)

- ضرب التعابير النسبية وقسمتها عمليتان مشابهتان لضرب الكسور وقسمتها.
- لتحويل الكسور المركبة إلى أبسط صورة، يمكن تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط التعبير الناتج.

الدوال النسبية ودوال المقلوب (الدروس 2-3 و 2-4)

- تأخذ دالة المقلوب الصيغة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ حيث $a(x) \neq 0$ دالة خطية و $a(x)$.
- تأخذ الدالة النسبية الصيغة $\frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$ و $b(x) \neq 0$ دالتان كثيرتا الحدود و $b(x)$.

المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 2-5)

- تخلص من الكسور في المعادلات النسبية عبر ضرب كل طرف من طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر.
- يجب ألا تشمل الحلول الممكنة للمعادلة النسبية القيم التي ينتج عنها صفر في المقام.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

تعريف	تعريف	تعريف
أمثلة	أمثلة	أمثلة

المفردات الأساسية

نقطة الانفصال point discontinuity	التغير المركب combined variation
معادلة نسبية rational equation	كسر مركّب complex fraction
التعبير النسبي rational expression	ثابت التغير constant of variation
دالة نسبية rational function	التغير الطردي direct variation
متباينة نسبية rational inequality	خط تقارب أفقي horizontal asymptote
دالة المقلوب reciprocal function	قطع زائد hyperbola
خط تقارب رأسي vertical asymptote	خط تقارب مائل oblique asymptote
المتوسط الحسابي المرجح weighted average	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه المصطلح الذي يكمل كل جملة أو عبارة بأفضل شكل.

- هو تعبيرٌ نسبي يحتوي بسطه و/ أو مقامه على تعبير نسبي.
- خط التقارب _____ هو خط تقارب خطي ليس أفقيًا ولا رأسيًا.
- تُعرف المعادلات التي تحتوي على تعبيرٍ نسبي واحدٍ أو أكثر باسم _____.
- يحتوي التمثيل البياني لـ $y = \frac{x}{x+2}$ على _____ عند $x = -2$.
- يحدث _____ عندما تختلف كمية واحدة بشكل مباشر بوصفها ناتج ضرب لاثنتين أو أكثر من الكميات الأخرى.
- تبدو _____ مثل فجوة في التمثيل البياني لأن التمثيل البياني غير معرّف عند تلك النقطة.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

2-1 ضرب التعابير النسبية وقسمتها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

11. $\frac{-16xy}{27z} \times \frac{15z^3}{8x^2}$
12. $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 12} \times \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 7x + 10}$
13. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 6x - 7}$
14. $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2 - y^2}{3x^2}$
15. $\frac{\frac{x^2 + 3x - 18}{x+4}}{\frac{x^2 + 7x + 6}{x+4}}$

16. الهندسة تبلغ مساحة مثلث $(3x^2 + 9x - 54) \text{ cm}^2$. إذا كان ارتفاع المثلث $(x + 6) \text{ cm}$ ، جد طول القاعدة.

مثال 1

حوّل $\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2}$ لأبسط صورة.

$$\frac{4a}{3b} \times \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \times 2 \times a \times 3 \times 3 \times b \times b \times b \times b}{3 \times b \times 2 \times a \times a} = \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

حوّل $\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12}$ لأبسط صورة.

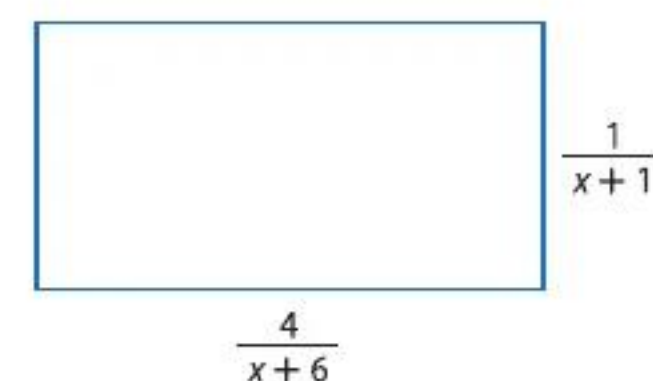
$$\begin{aligned} \frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12} &= \frac{r^2 + 5r}{2r} \times \frac{6r - 12}{r^2 - 25} \\ &= \frac{r(r+5)}{2r} \times \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)} \\ &= \frac{3(r-2)}{r-5} \end{aligned}$$

2-2 جمع التعابير النسبية وطرحها

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$
18. $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$
19. $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$
20. $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$
21. $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$
22. $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

23. الهندسة ما محيط المستطيل؟



مثال 3

حوّل $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$ لأبسط صورة.

$$\begin{aligned} \frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} &= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2} \\ &= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{3a - 2(a+2)}{(a-2)(a+2)} \quad \text{اطرح البسوط.} \\ &= \frac{3a - 2a - 4}{(a-2)(a+2)} \quad \text{خاصية التوزيع.} \\ &= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)} \quad \text{حوّل لأبسط صورة.} \end{aligned}$$

2-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

مثال 4

مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدي.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

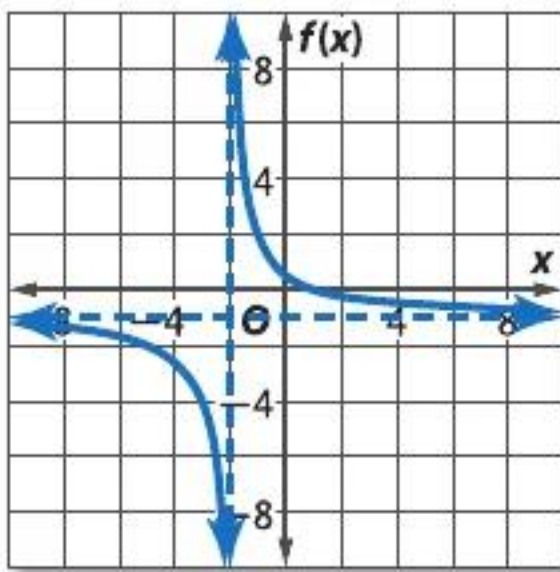
المدي: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

أزيج الرسم البياني وحدتين لأسفل.

يوجد خط تقارب عند $x = -2$.

أزيج الرسم البياني وحدة واحدة لأسفل.

يوجد خط تقارب عند $f(x) = -1$.



مثّل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدي.

$$24. f(x) = \frac{10}{x}$$

$$25. f(x) = -\frac{12}{x} + 2$$

$$26. f(x) = \frac{3}{x+5}$$

$$27. f(x) = \frac{6}{x-9}$$

$$28. f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$$

$$29. f(x) = \frac{4}{x+4} - 8$$

30. **الحفظ** يزرع مجلس الطلاب 28 شجرة لمشروع خدمي. ويعتمد عدد الأشجار التي سيزرعها كل شخص على عدد أعضاء مجلس الطلاب.

a. اكتب دالة لتمثيل هذه الحالة.

b. ارسم الدالة بيانيًا.

2-4 التمثيل البياني للدوال النسبية

مثال 5

حدد معادلات أي خطوط تقارب رأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالة غير معرّفة عندما $x = 1$ و $x = -3$.

بما أن $x = -3$ ، $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$ ، خط تقارب

رأسي، و $x = 1$ تمثل فجوة في التمثيل البياني.

مثال 6

مثّل $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًا.

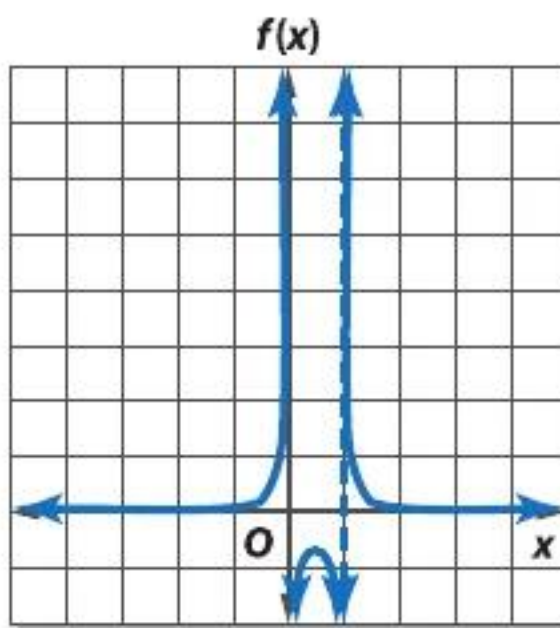
الدالة غير معرّفة عندما $x = 1$ و $x = 0$ لأن

$$\frac{1}{6x(x-1)}$$

صيغة. $x = 1$ و $x = 0$ خطان تقاربان رأسيان.

ارسم خطين تقاربين

وارسم التمثيل البياني.



حدد معادلات أي خطوط تقارب رأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني لكل دالة نسبية.

$$31. f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

$$32. f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$$

$$33. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$$

$$34. f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$$

$$36. f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$$

مثل كل دالة نسبية بيانيًا.

$$35. f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$37. f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$$

38. **المبيعات** تباع أمل اشتراكات لإحدى المجلات، من أول 15 منزلًا. باعت اشتراكات في 10 منها. لتفترض أن أمل ذهبت إلى مجموعة أخرى من المنازل يبلغ عددها x وباعت اشتراكات فيها جميعًا. يمكن تحديد نسبة المنازل التي باعت فيها من إجمالي المنازل باستخدام $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

a. ارسم الدالة بيانيًا.

b. ما قيم المجال والمدي التي لها معنى في سياق المسألة؟

دليل الدراسة والمراجعة تابع

2-5 حل المعادلات والمتباينات النسبية

مثال 7

حلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$
 المضاعف المشترك الأصغر هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$

$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$3(x) + 1(x+2) = 0$$

$$3x + x + 2 = 0$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

حلّ كل معادلة أو متباينة. تحقق من حلولك.

39. $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

40. $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

41. $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

42. $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

43. $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

44. $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

45. $\frac{1}{2x} - \frac{4}{5x} > \frac{1}{3}$

46. **أعمال الحديقة** تستطيع ياسمين أن تزرع حديقة خلال 3 ساعات. وتستطيع هالة زراعة الحديقة نفسها خلال 4 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معاً؟

تدريب على الاختبار

2

الوحدة

حل كل معادلة أو متباينة.

19. $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20. $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21. $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22. $r + \frac{6}{r} - 5 = 0$

23. $\frac{6}{7} - \frac{3m}{2m-1} = \frac{11}{7}$

24. $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

25. **ركوب الدراجات** عندما تتركب سها دراجتها، تتغير المسافة التي تقطعها طرديًا مع مقدار وقت ركوبها للدراجة. لنفترض أنها تقطع بالدراجة مسافة 50 km خلال 2.5 ساعة. وفق هذا المعدل، كم ساعة سيستغرقها قطع مسافة 80 km بالدراجة؟

26. **الطلاء** يستطيع عمر طلاء منزل خلال 10 ساعات، ويستطيع عامر طلاء المنزل نفسه خلال 9 ساعات. كم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

27. **الاختيار من متعدد** كم عدد لترات محلول حمضي بتركيز 25% التي يجب إضافتها إلى 30 L من محلول حمضي بتركيز 80% للحصول على محلول حمضي بتركيز 50%؟

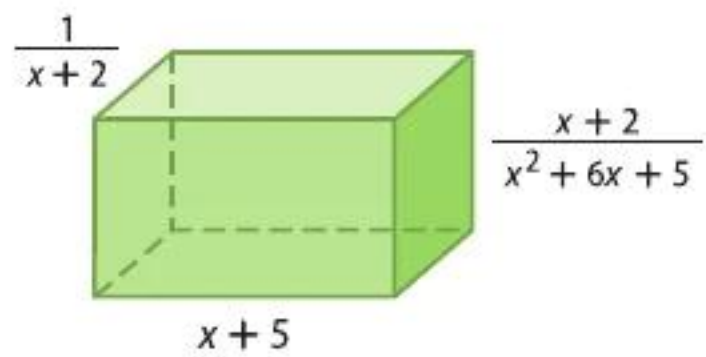
F 18

G 30

H 36

J 66

28. ما حجم المنشور المستطيل المرسوم أدناه؟



حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $\frac{r^2 + rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2. $\frac{m^2 - 4}{3m^2} \times \frac{6m}{2-m}$

3. $\frac{m^2 + m - 6}{n^2 - 9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4. $\frac{\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x - 15}}{\frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 20}}$

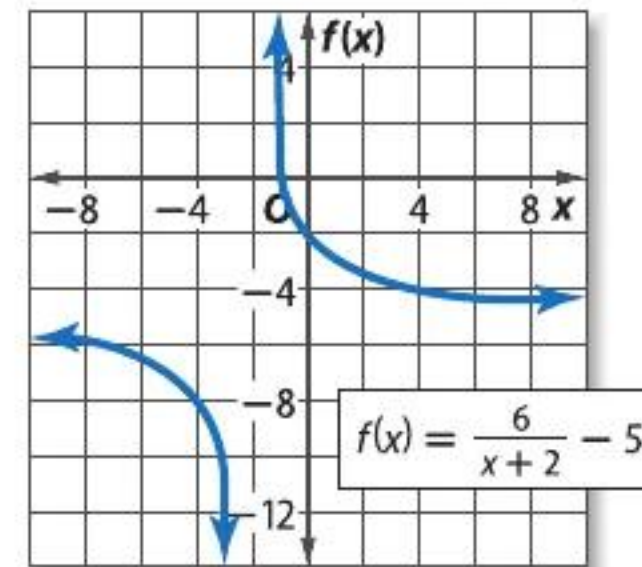
5. $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6. $\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{3}{2x+2}$

7. $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8. $\frac{2 + \frac{1}{x}}{5 - \frac{1}{x}}$

9. اذكر خطوط التقارب للدالة الممثلة بيانيًا ومجالها ومداها.



10. **اختيار من متعدد** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية

$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3x + 2}$ ؟

A $x = -2$

B $x = -1$

C $x = 1$

D $x = 2$

مثّل كل دالة بيانيًا.

11. $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12. $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13. $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14. $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15. $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x-1}$

17. حدد معادلات أي خطوط التقارب الرأسية وقيم x لأي فجوات في التمثيل البياني

للدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2 - 2x - 35}$

18. حدد معادلات أي خطوط التقارب المائلة في التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x+3}$

التحضير للاختبارات المعيارية

التخمين والتحقق

من المهم جدًا أن تتابع سرعتك وتتابع معها مقدار الوقت الذي يكون متاحًا لك عند إجراء اختبار معياري. إذا كان الوقت ينفد، أو إذا كنت غير متأكد من كيفية حل إحدى المسائل، فإن إستراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على تحديد الإجابة الصحيحة بسرعة.

إستراتيجيات للتخمين والتحقق

الخطوة 1

أمعن النظر في كل اختيار إجابة ممكنة، وقوّمه لمعرفة مدى صحته. ألغ الإجابات الخاطئة.

اسأل نفسك:

- هل هناك أي خيارات إجابة غير صحيحة بشكل واضح؟
- هل أي من خيارات الإجابة ليست بالشكل الصحيح؟
- هل توجد أي خيارات إجابة لا تحتوي الوحدات المناسبة للإجابة الصحيحة؟

الخطوة 2

لخيارات الإجابة المتبقية، استخدام أسلوب التخمين والتحقق.

- **المعادلات:** إذا كنت تحل معادلة، فاستبدل خيار الإجابة بالمتغير وانظر ما إذا كان هذا يؤدي إلى جملة عددية صحيحة.
- **نظام المعادلات:** في نظام المعادلات، استبدل خيار الإجابة بجميع المتغيرات وتأكد أن جميع المعادلات تؤدي إلى جملة عددية صحيحة.

الخطوة 3

- اختر خيار إجابة وانظر ما إذا كان يفي بقيود بيان المسألة. حدّد الإجابة الصحيحة.
- إذا كان خيار الإجابة الذي تختبره لا يحل المسألة، فانتقل إلى التخمين المعقول التالي، وتحقق منه.
- عندما تصل إلى خيار الإجابة الصحيح، توقف.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

$$\text{جد حل: } \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$$

- A -1
B 1

- C 5
D 7

حل المعادلة النسبية سيكون عددًا حقيقيًا. وبما أن جميع خيارات الإجابة الأربعة أعداد حقيقية، فهي جميعًا إجابات صحيحة ممكنة ويجب التحقق منها. ابدأ بخيار الإجابة الأول وتحقق منه في المعادلة النسبية. تابع حتى تجد خيار الإجابة الذي ينتج عنه جملة عددية صحيحة.

التحقق:	
$\frac{2}{(-1)-3} - \frac{4}{(-1)+3} = \frac{8}{(-1)^2 - 9}$	التخمين: -1
$-\frac{5}{2} \neq -1$ X	

التحقق:	
$\frac{2}{1-3} - \frac{4}{1+3} = \frac{8}{(1)^2 - 9}$	التخمين: 1
$-2 \neq -1$ X	

التحقق:	
$\frac{2}{5-3} - \frac{4}{5+3} = \frac{8}{(5)^2 - 9}$	التخمين: 5
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓	

إذا كانت $x = 5$ ، فالنتيجة جملة عددية صحيحة. إذًا، الإجابة الصحيحة هي C.

تمارين

3. حدد النقطة (أو النقاط) التي تتقاطع عندها الدالة النسبية التالية مع المحور x .

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+4}{3}$$

- A -5
- B 4
- C 2 أو 3
- D -5 or 2

4. تبيع شركة المسرح التي يملكها عيسى التذاكر بقيمة AED 10. وبهذا السعر يبيعون 400 تذكرة. يقدر عيسى بأن المبيعات ستخفض بمقدار 40 تذكرة مع كل زيادة في السعر تبلغ AED 2. ما السعر الذي سينتج عنه أكبر مقدار من الإيرادات؟

- | | |
|------|------|
| F 10 | H 15 |
| G 13 | J 20 |

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. جد حل: $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$.

- A $\frac{1}{10}$
- B $\frac{1}{5}$
- C $\frac{1}{4}$
- D $\frac{1}{2}$

2. مجموع أعمار خالد وأسماء ونورا يساوي 40. أسماء أكبر بعام واحد من مثلي عمر نورا. خالد أكبر من أسماء بـ 3 أعوام. كم عمر أسماء؟

- | | |
|------|------|
| F 7 | H 15 |
| G 14 | J 18 |

تدريب على الاختبار المعياري

2

الوحدة 2

3. أي مما يلي ليس خطأ مقاربًا

للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$ ؟

F $f(x) = 0$

H $x = 7$

G $x = -7$

J $f(x) = 1$

4. حوّل الكسر المجمع لأبسط صورة.

$$\frac{(x+3)^2}{x^2-16} \cdot \frac{x+3}{x+4}$$

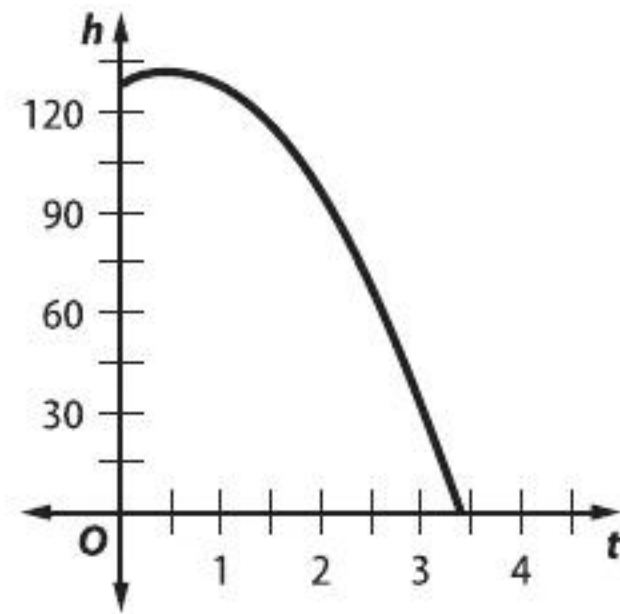
A $\frac{x+3}{x+4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

B $\frac{1}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5. تم قذف كرة لأعلى بسرعة ابتدائية 16 ft/s من أعلى بناية ارتفاعها 128 ft. ارتفاعها h بالقدم فوق سطح الأرض بعد t ثانية سيكون $h = 128 + 16t - 16t^2$.



فما الاستنتاج الأمثل عن حركة الكرة؟

F ظلت الكرة فوق ارتفاع 128 ft لأكثر من 3 ثوانٍ.

G عادت الكرة إلى سطح الأرض في أقل من 4 ثوانٍ.

H تحركت الكرة لأعلى مسافة أكبر من تحركها لأسفل.

J تحركت الكرة أقل من 128 ft في 3.4 ثوانٍ.

6. أي هذه المعادلات يصف علاقة بناظر فيها كل عدد حقيقي سالب x عددًا حقيقيًا غير سالب y ؟

A $y = -x$

C $y = \sqrt{x}$

B $y = x$

D $y = x^3$

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. تختلف التكلفة الإجمالية لحجز موقع تخيم بشكل مباشر حسب عدد ليالي استئجار الموقع، كما هو موضح بالجدول.

الأيام	التكلفة الإجمالية
1	AED 24
2	AED 48
3	AED 72
4	AED 96

أي معادلة تمثل الاختلاف المباشر؟

F $y = x + 24$

H $y = \frac{24}{x}$

G $y = 24x$

J $y = 96x$

2. في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ لينتج التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A الأعلى

B الأسفل

C اليمين

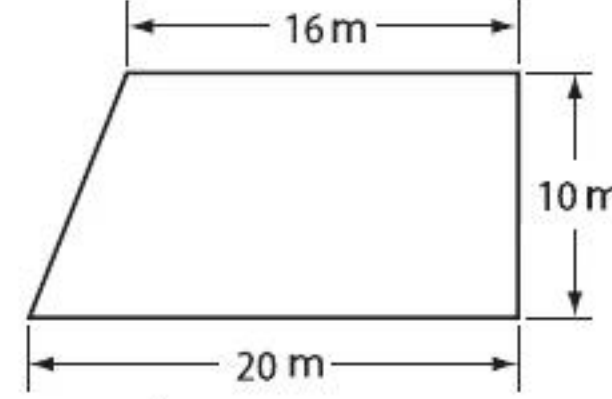
D اليسار

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 تحقق من الإجابة من خلال التعويض عن x بالأعداد 1 و 2 و 3 و 4 والتأكد من الحصول على القيم الموجودة بالجدول.

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

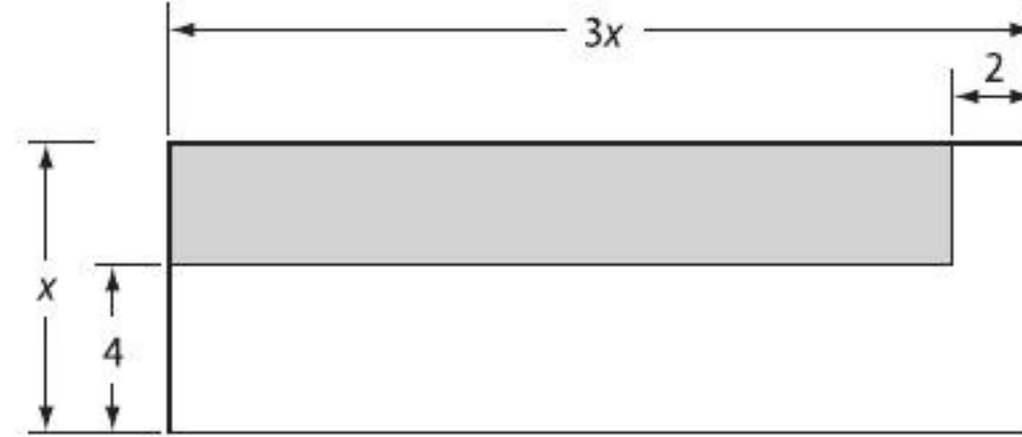


7. تحيط شريحة الحديقة الموضحة في الصورة بممر حجري. كم عدد أمتار الحجارة اللازمة تقريباً؟

8. **إجابة شبكية** ادخرت فاطمة بعض المال لعطلة مدتها أسبوع. أنفقت في اليوم الأول من العطلة 125 AED على الطعام والفندق. وفي اليوم الثاني، أعطتها أختها 80 AED كنفقات. وحينها تبقى لدى فاطمة 635 AED لباقي العطلة. فكم درهماً كان لديها في بداية العطلة؟

9 **إجابة شبكية** يمكن تمثيل عدد سكان دولة بالمعادلة $P(t) = 40e^{0.02t}$ ، حيث يمثل P عدد السكان بالمليون ويمثل t عدد الأعوام منذ 2005. متى سيكون عدد السكان 400 مليون؟

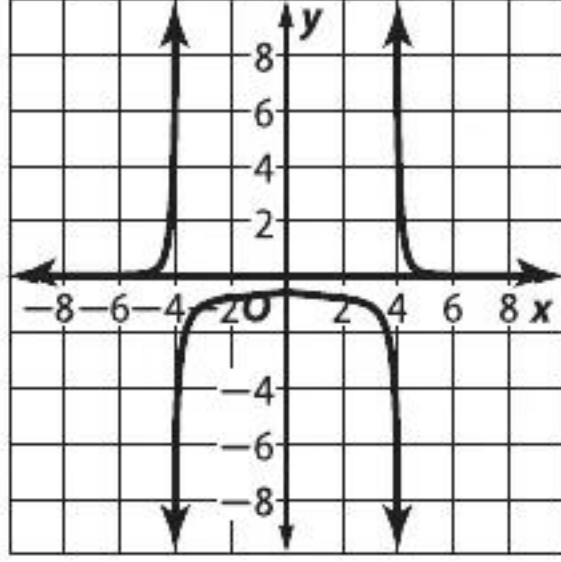
10. ما مساحة المنطقة المظللة من المستطيل المعبر عنها ككثيرة حدود في أبسط صورة؟



11. **إجابة شبكية** افترض أن y تتناسب عكسياً حيث x و $y = 4$ عندما $x = 12$. ما قيمة y عندما x تساوي 5؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.



12. استخدم التمثيل البياني للدالة النسبية الموضحة لحل كل معادلة.

a. صف خطي التقرب الرأسي والأفقي للتمثيل البياني.

b. اكتب معادلة الدالة النسبية. اشرح كيف توصلت لإجابتك.

13. فكّر في الدالة كثيرة الحدود

$$f(x) = 3x^4 + 19x^3 + 7x^2 - 11x - 2.$$

a. ما درجة الدالة؟

b. ما المعامل الرئيسي للدالة؟

c. جد قيمة $f(-2)$, $f(1)$ ، و $f(2a)$. اكتب الحل هنا.

المتتاليات والمتسلسلات



Chapter Sourced From: 3: Sequences and Series, from Integrated Math III Chapter 9 © 2012

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

● قمت بتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورها وجدت قيمتها.

الحالي

● بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- استخدام المتتاليات الخاصة ودوال التكرار.
- تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدين.
- استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة على عدد صحيح كوجب.

لماذا؟

● **حفظ الموارد والطبيعة** تظهر الرياضيات في جوانب الطبيعة بطرق مذهلة. وتتجلى متتالية فيبوناتشي في البذور والزهور ومخاريط الصنوبر والفواكه والخضراوات. كما يمكن للمتتاليات والمتسلسلات مساعدتنا في حفظ مواردنا الطبيعية من خلال رفع كفاءة أنظمة ترشيح المياه.

الاستعداد للوحدة

1

خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

مثال 1

$$25 = 3x^3 + 400$$

حلّ

المعادلة الأصلية

$$25 = 3x^3 + 400$$

اطرح 400 من كل طرف.

$$-375 = 3x^3$$

اقسم كل طرف على 3.

$$-125 = x^3$$

خذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

$$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$$

بسّط.

$$-5 = x$$

تدريب سريع

حلّ كل من المعادلات التالية.

$$1. -6 = 7x + 78$$

$$2. 768 = 3x^4$$

$$3. 23 - 5x = 8$$

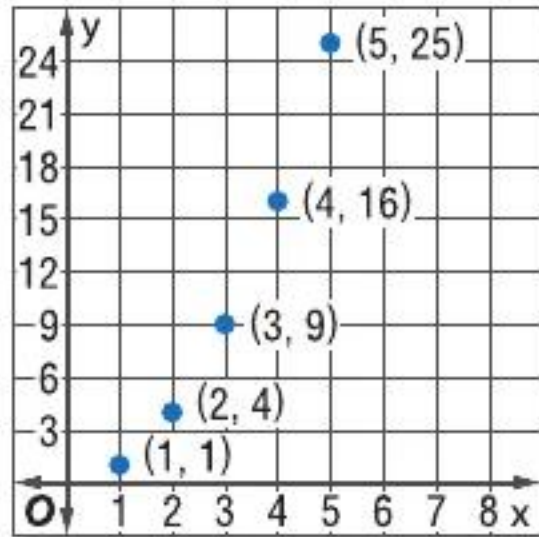
$$4. 2x^3 + 4 = -50$$

5. نباتات تمتلك رنا 48 نبتة للحديقتين اللتين تمتلكهما. وقد زرعت 12 نبتة في الحديقة الصغيرة. وفي الحديقة الأخرى، تريد وضع 4 نباتات في كل صف. فكم ستبلغ عدد الصفوف لديها؟

مثال 2

مثّل كل دالة بيانيًا.

مثّل الدالة بيانيًا $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$. واذكر المجال والمدى.



مجال الدالة هو مجموع كل قيم x الممكنة. إذاً، فمجال الدالة هو $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ومدى الدالة عبارة عن مجموع كل قيم y الممكنة. إذاً، يكون مدى الدالة هو $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

$$6. \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$$

$$7. \{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$$

$$8. \left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$9. \left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$$

10. الرعاية النهارية يُنفق مركز رعاية أطفال AED 125 في اليوم. ويحصل هذا المركز على AED 50 مقابل كل طفل في اليوم. الدالة $P(c) = 50c - 125$ تعطي كمية النقود التي يحققها المركز عندما يكون لديه c من الأطفال. فكم سيجني هذا المركز إذا كان لديه 8 أطفال؟

مثال 3

جد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة (قيم) المتغير (المتغيرات).

$$11. \frac{a}{3}(b + c) \text{ إذا كان } a = 9 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = -8$$

$$12. r + (n - 2)t \text{ إذا كان } r = 15 \text{ و } n = 5 \text{ و } t = -1$$

$$13. x \times y^{z+1} \text{ إذا كان } x = -2 \text{ و } y = \frac{1}{3} \text{ و } z = 5$$

$$14. \frac{a(1 - bc)^2}{1 - b} \text{ إذا كان } a = -3 \text{ و } b = -4 \text{ و } c = 1$$

جد قيمة $2 \times 3^{x+y}$ إذا كان $x = -2$ و $y = -3$.

$$2 \times 3^{x+y} = 2 \times 3^{-2+(-3)} \text{ عوّض.}$$

$$= 2 \times 3^{-5} \text{ بسّط.}$$

$$= \frac{2}{3^5} \text{ أعد الكتابة بأس موجب.}$$

$$= \frac{2}{243} \text{ جد قيمة الأس.}$$

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

المفردات الجديدة

sequence	متتالية
finite sequence	متتالية منتهية
infinite sequence	متتالية لانهائية
arithmetic sequence	متتالية حسابية
common difference	فرق مشترك
geometric sequence	متتالية هندسية
common ratio	نسبة مشتركة
arithmetic means	أوساط حسابية
series	متسلسلة
arithmetic series	متسلسلة حسابية
partial sum	المجموع الجزئي
geometric means	أوساط هندسية
geometric series	متسلسلة هندسية
mathematical induction	الاستقراء الرياضي
induction hypothesis	فرضية الاستقراء

مراجعة المفردات

المعامل **coefficient** العامل العددي لذات الحد

معامل

$$15x^3$$

الصيغة هي جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات معينها
الدالة هي علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد
بالتحديد في المدى

المطويات منظم الدراسة

المتتاليات والمتسلسلات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك على هذه الوحدة حول المتتاليات والمتسلسلات. ابدأ بقطعة ورق مقاس $8\frac{1}{2}$ في 11".



1 اطو الورقة إلى نصفين، مع مطابقة الأضلاع القصيرة.



2 افرد واطو الضلع الأطول لأعلى بمقدار بوصتين لعمل جيب.



3 دبّس الحواف الخارجية أو ألصقها لإكمال الجيب.



4 سمّ كل ضلع كما هو موضح. استخدم بطاقات فهرسة لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

المتتاليات كدوال

3-1



لماذا؟

الحالي

السابق

● أثناء العرض المعتاد للفرقة الموسيقية بمدرسة ثانوية، تمشي الفرقة في صفوف. ويكون هناك عازف واحد في الصف الأول وثلاثة في الثاني وخمسة في الثالث. ويستمر هذا النمط لبقية الصفوف.

1 ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.
2 ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

● قمت بتحليل الدوال الخطية والأسية.

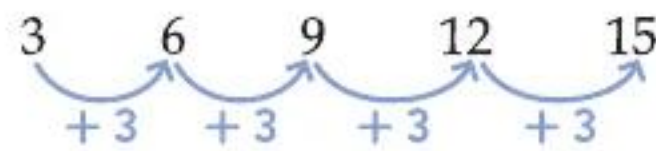
1 المتتاليات الحسابية إن **المتتالية** هي مجموعة من الأعداد بترتيب أو نمط معين. وكل عدد في المتتالية يُسمى **حدًا**. وقد تكون المتتالية **متتالية منتهية** وتحتوي على عدد محدود من الحدود، مثل $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$. أو تكون **متتالية لانهائية** والتي تستمر بلا نهاية، مثل $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. ويتم التعبير عن الحد الأول من متتالية بـ a_1 ، بينما يتم التعبير عن الحد الثاني بـ a_2 ، وهكذا.

المفهوم الأساسي المتتاليات في صورة دوال

الشرح	الرموز	أمثلة
المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.	المجال: المدى:	متتالية منتهية $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ متتالية لانهائية $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
رتبة الحد حدود المتتالية		المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ المجال: $\{y \mid y \text{ هو مضاعف لـ } 3, y \geq 3\}$ المدى: $\{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$

في **المتتالية الحسابية**، يتحدد كل حد من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة اسم **الفرق المشترك**.

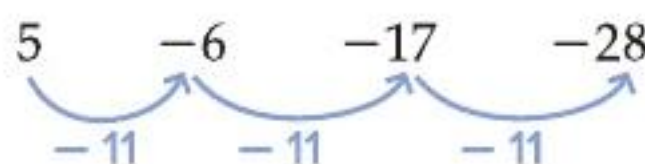
فكر في المتتالية 3, 6, 9, 12, 15. وهذه المتتالية حسابية لأن الحدود تشترك في فرق مشترك. ويكون كل حد أكبر من الحد السابق بقيمة 3.



مثال 1 تحديد المتتاليات الحسابية

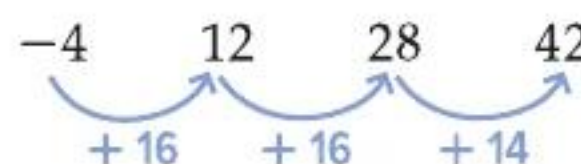
حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية.

a. 5, -6, -17, -28, ...



الفرق المشترك هو -11.
المتتالية حسابية.

b. -4, 12, 28, 42, ...



لا يوجد فرق مشترك.
هذه ليست متتالية حسابية.

تمرين موجّه

1A. 7, 12, 16, 20, ...

1B. -6, 3, 12, 21, ...

المفردات الجديدة

متتالية	sequence
حد	term
متتالية منتهية	finite sequence
متتالية لانهائية	infinite sequence
متتالية حسابية	arithmetic sequence
فرق مشترك	common difference
متتالية هندسية	geometric sequence
نسبة مشتركة	common ratio

مهارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.



يمكنك استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود متتالية حسابية.

مثال 2 تمثيل المتتالية الحسابية بيانياً

فكر في المتتالية الحسابية $18, 14, 10, \dots$

a. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية.

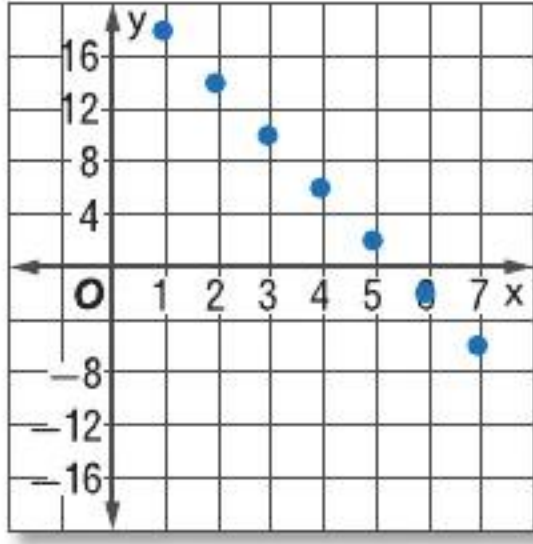
الخطوة 1 لتحديد الفرق المشترك، اطرح أي حد من الحد الذي يليه مباشرةً. والفرق المشترك هو $10 - 14$ أو -4 .

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، أضف -4 إلى الحد الأخير.

استمر في إضافة -4 لإيجاد الحدود التالية.

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & 6 & 2 & -2 & -6 \\ & +(-4) & +(-4) & +(-4) & +(-4) \end{array}$$

الحدود الأربعة التالية هي 6 و 2 و -2 و -6 .



b. مثل بيانياً الحدود السبعة الأولى للمتتالية.

يحتوي المجال على الحدود $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ويحتوي المدى على الحدود $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6\}$. إذا، مثل بيانياً الأزواج المرتبة المتوافقة.

تمرين موجّه

2. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية $18, 11, 4, \dots$. ثم مثل بيانياً الحدود السبعة الأولى.

لاحظ أن التمثيل البياني لحدود المتتالية الحسابية يستقر على خط مستقيم. وتعد المتتالية الحسابية دالة خطية يكون فيها رقم الحد n هو المتغير المستقل، والحد a_n هو المتغير التابع، والفرق المشترك هو الميل.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حد

الفرق الموسيقية ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن مدير الفرقة يرغب في تحديد عدد العازفين الذين سيكونون في الصف الرابع عشر أثناء العرض.

الفهم لأن الفرق بين أي صفين متتابعين هو 2، فإن الفرق المشترك للمتتالية هو 2.

التخطيط استخدم صيغة النقطة والميل لكتابة معادلة للمتتالية. افترض أن $m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$. ثم جد الحل باستخدام $x = 14$.

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب.
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كل طرف.
$y = 2(14) - 1$	استبدل x بـ 14.
$y = 28 - 1$ or 27	بسّط.

الحل

التحقق يمكنك إيجاد حدود المتتالية عن طريق جمع 2، بدايةً من الصف 1، وحتى تصل إلى الصف 14.

تمرين موجّه

3. **المال** يعرض صاحب العمل الذي يعمل لديه عمر عليه معدل أجر بقيمة 9 AED بالساعة مع علاوة بقيمة 0.15 AED كل ثلاثة أشهر. فكم الأجر الذي سيحصل عليه عمر في الساعة بعد 3 أعوام؟



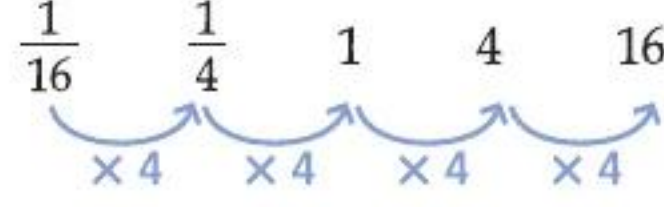
الربط بالحياة اليومية

كل عام، تتنافس قرابة 100 فرقة في البطولات الوطنية الكبرى التي تنظمها منظمة Bands of America (فرق أمريكا).

المصدر: منظمة Bands of America

2 المتتاليات الهندسية هناك نوع آخر من المتتاليات يُعرف باسم المتتالية الهندسية. وفي **المتتالية الهندسية**، يتحدد كل حد من خلال ضرب ثابت غير صفري في الحد السابق. ويُطلق على هذه القيمة الثابتة اسم **النسبة المشتركة**.

فكّر في المتتالية $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$. إن هذه المتتالية هندسية لأن الحدود تشترك في نسبة مشتركة. وكل حد أكبر من الحد السابق له بمقدار 4 مرات.



مثال 4 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية هندسية.

a. $-2, 6, -18, 54, \dots$

جد نسب الحدود المتتالية.

$$\frac{6}{-2} = -3 \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad \frac{54}{-18} = -3$$

النسب متساوية. إذا فالمتتالية هندسية.

b. $8, 16, 24, 32, \dots$

$$\frac{16}{8} = 2 \quad \frac{24}{16} = 1.5 \quad \frac{32}{24} = 1.\bar{3}$$

النسب ليست متساوية. إذا فالمتتالية ليست هندسية.

تمرين موجّه

4A. $-8, 2, -0.5, 0.125, \dots$

4B. $1, 3, 7, 15, \dots$

انتبه!

النسب إذا أوجدت نسبة حد إلى الحد السابق له، فأنشئ النسب المتبقية بالطريقة نفسها.

عند منحك مجموعة من المعلومات، يمكنك إنشاء مسألة ترتبط بقصة.

مثال 5 تمثيل متتالية هندسية بيانيًا

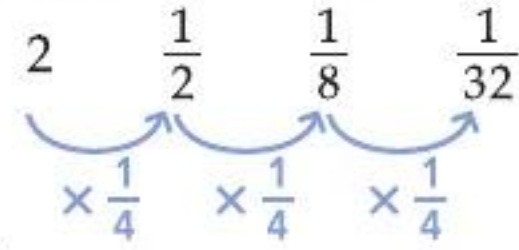
فكّر في المتتالية الهندسية $32, 8, 2, \dots$

a. جد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية.

الخطوة 1 جد قيمة النسبة المشتركة: $\frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{4}$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في $\frac{1}{4}$.

استمر في الضرب في $\frac{1}{4}$ لإيجاد الحدود التالية.

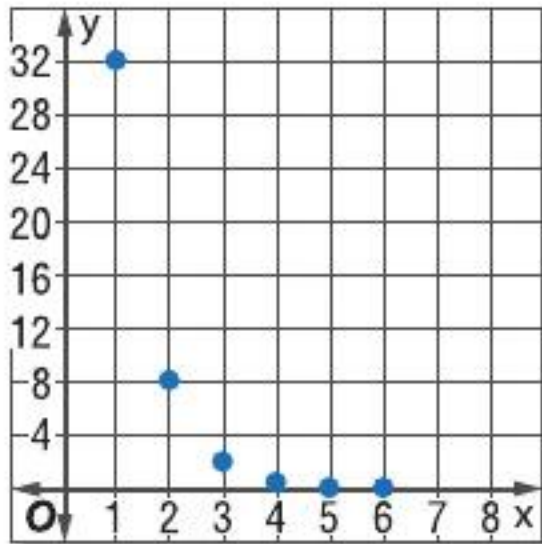


الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{32}$.

b. مَثِّلْ بيانيًا الحدود الستة الأولى للمتتالية.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

المدى: $\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}\}$



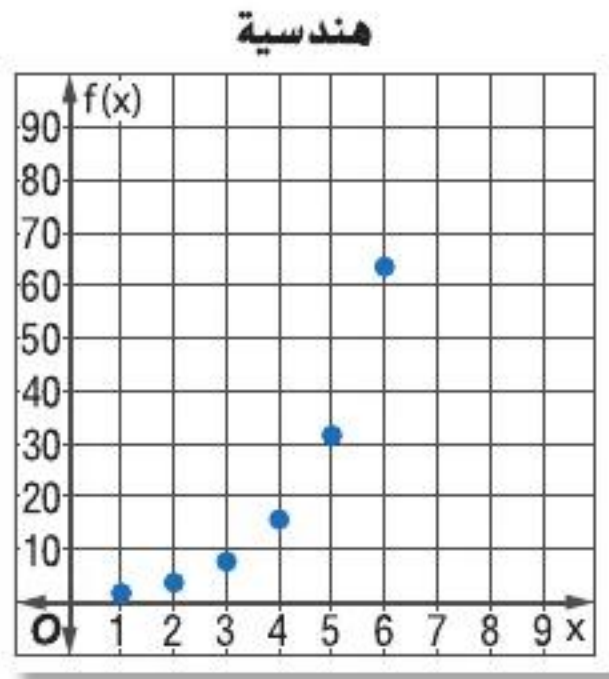
تمرين موجّه

5. جد الحدين التاليين لـ $7, 21, 63, \dots$

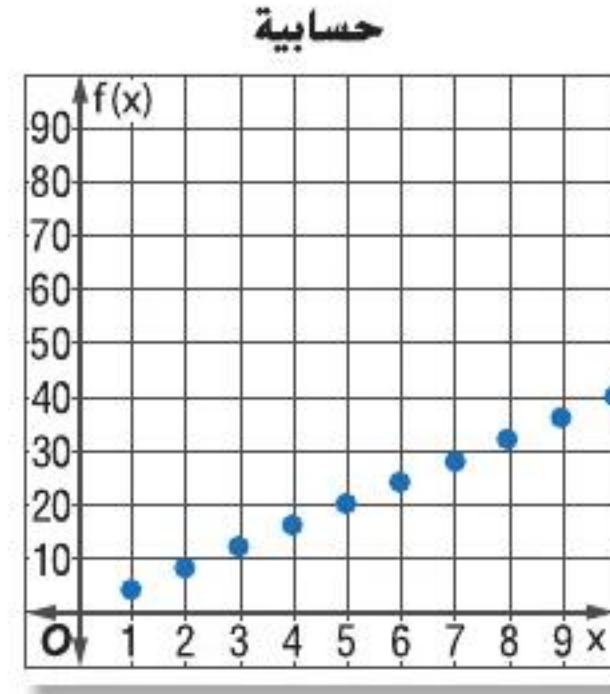
ثم مَثِّلْ بيانيًا الحدود الخمسة الأولى.

مراجعة المفردات
الدالة الأسية (exponential function)
 دالة في صورة $f(x) = b^x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$

افحص التمثيل البياني في المثال 5. في حين أن التمثيل البياني للمتتالية الحسابية يكون خطيًا، فإن التمثيل البياني للمتتالية الهندسية يكون أسياً ويمكن تمثيله بواسطة $f(x) = r^x$ حيث r هي النسبة المشتركة. و $r > 0$ و $r \neq 1$.



x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	4	8	16	32	64



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

إن المتتاليات الحسابية والهندسية هي دوال يحتوي فيها المجال، الذي يكون محدداً بواسطة رقم الحد n ، على مجموعة أو مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة الموجبة. ويمكن استخدام خصائص المتتاليات الحسابية والهندسية لتصنيف المتتاليات.

مثال 6 تصنيف المتتاليات

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

a. 16, 24, 36, 54, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$54 - 36 = 18$$

$$36 - 24 = 12 \quad \times$$

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

نظرًا لوجود نسبة مشتركة، فإن المتتالية هندسية.

b. 1, 4, 9, 16, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$16 - 9 = 7 \quad 9 - 4 = 5 \quad \times$$

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$$\frac{16}{9} = 1.\bar{7} \quad \frac{9}{4} = 2.25 \quad \times$$

نظرًا لعدم وجود فرق مشترك أو نسبة مشتركة، فإن المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

c. 23, 17, 11, 5, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$$5 - 11 = -6$$

$$11 - 17 = -6$$

$$17 - 23 = -6 \quad \checkmark$$

نظرًا لوجود فرق مشترك، فإن المتتالية حسابية.

تمرين موجّه

6A. $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots$

6B. $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \dots$

6C. $-4, 4, 5, -5, \dots$

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية. اكتب نعم أو لا.

1. 8, -2, -12, -22,
2. -19, -12, -5, 2, 9
3. 1, 2, 4, 8, 16
4. 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, ...

مثال 2

جد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

5. 6, 18, 30, ...
6. 15, 6, -3, ...
7. -19, -11, -3, ...
8. -26, -33, -40, ...

مثال 3

9. **المعرفة المالية** تدخر خديجة من أموالها لشراء سيارة. وهي تمتلك AED 250. وتخطط لادخار AED 75 في الأسبوع من عملها.

- a. كم ستكون خديجة قد ادخرت بعد 8 أسابيع؟
- b. إذا كانت السيارة تكلف AED 2000. فكم من الزمن ستستغرق لادخار مال كافٍ بهذا المعدل؟

مثال 4

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي هندسية. اكتب نعم أو لا.

10. -8, -5, -1, 4, ...
11. 4, 12, 36, 108, ...
12. 27, 9, 3, 1, ...
13. 7, 14, 21, 28, ...

مثال 5

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

14. 8, 12, 18, 27, ...
15. 8, 16, 32, 64, ...
16. 250, 50, 10, 2, ...
17. 9, -3, 1, $-\frac{1}{3}$, ...

مثال 6

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

18. 5, 1, 7, 3, 9, ...
19. 200, -100, 50, -25, ...
20. 12, 16, 20, 24, ...

التدريب وحل المسائل

مثال 1

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية. اكتب نعم أو لا.

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
22. -9, -3, 0, 3, 9
23. 14, -5, -19, ...
24. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \dots$

مثال 2

جد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيًا.

25. -4, -1, 2, 5, ...
26. 10, 2, -6, -14, ...
27. -5, -11, -17, -23, ...
28. -19, -2, 15, ...
29. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \dots$
30. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

مثال 3

31. **المسرح** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأمامي من المسرح. ويحتوي كل صف متعاقب على مقعدين إضافيين مقارنة بالصف السابق. فإذا كان هناك 24 صفًا. فكم عدد المقاعد في الصف الأخير من المسرح؟

32. **التبرير المنطقي** بدأ جمال برنامج تمارين رياضية ليسترجع لياقته. وهو يخطط لممارسة التمارين لمدة 5 دقائق على جهاز التمارين الخاص به في اليوم الأول، ومن ثم يقوم بزيادة زمن التمارين دقيقة واحدة وثلاثين ثانية كل يوم.

- a. كم من الزمن سيجد في اليوم الثامن عشر؟
- b. في أي يوم سيجد جمال لمدة ساعة أو أكثر لأول مرة؟
- c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح.

مثال 4

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي هندسية. اكتب نعم أو لا.

33. 21, 14, 7, ... 34. 124, 186, 248, ... 35. -27, 18, -12, ...
36. 162, 108, 72, ... 37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \dots$ 38. -4, -2, 0, 2, ...

مثال 5

جد الحدود الثلاثة التالية من المتتالية. ثم مثل المتتالية بيانياً.

39. 0.125, -0.5, 2, ... 40. 18, 12, 8, ... 41. 64, 48, 36, ...
42. 81, 108, 144, ... 43. $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$ 44. 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

مثال 6

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

45. 3, 12, 27, 48, ... 46. 1, -2, -5, -8, ... 47. 12, 36, 108, 324, ...
48. $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \dots$ 49. $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$ 50. 6, 9, 14, 21, ...

51. **القراءة** أخذت سهيلة كتابًا من 800 صفحة في عطلتها. فإذا كانت قد وصلت بالفعل إلى الصفحة 112 وستقضي في عطلتها لمدة 8 أيام، فما العدد الأدنى من الصفحات التي تحتاج إلى قراءتها كل يوم لتنتهي من قراءة الكتاب بنهاية عطلتها؟

52. **الإضحلال** من المتوقع أن تتعرض سيارة أميرة للإهلاك بمعدل 15% كل عام. فإذا كانت سيارتها تُقدر حاليًا بقيمة AED 24000، مقربة إلى أقرب درهم، فكم ستساوي قيمتها خلال 6 أعوام؟

53. **الانتظام** عندما يتم طي قطعة ورق على نفسها، فإن سُمكها يتضاعف. فإذا كان من الممكن طي قطعة ورق سُمكها 0.1 mm بمقدار 37 مرة، فكم سيكون سُمكها؟ حوالي

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **التبرير** اشرح السبب في أن المتتالية 8, 10, 13, 17, 22 ليست حسابية.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفًا من الحياة اليومية يمكن تمثيله باستخدام متتالية حسابية بها فرق مشترك قيمته 8.

56. **التحد** يبلغ مجموع ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية 6. ويبلغ ناتج ضرب الحدود -42. جد الحدود.

57. **تحليل الخطأ** حارب وحسام يحددان ما إذا كانت المتتالية 8, 8, 8, ... حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما أم كليهما. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حسام	حارب
المتتالية بها نسبة مشتركة بقيمة 1. متتالية هندسية.	المتتالية بها فرق مشترك قيمته 0. متتالية حسابية.

58. **مسألة غير محددة الإجابة** جد متتالية هندسية ومتتالية حسابية ومتتالية ليست هندسية ولا حسابية تبدأ على النحو 3, 9, ...

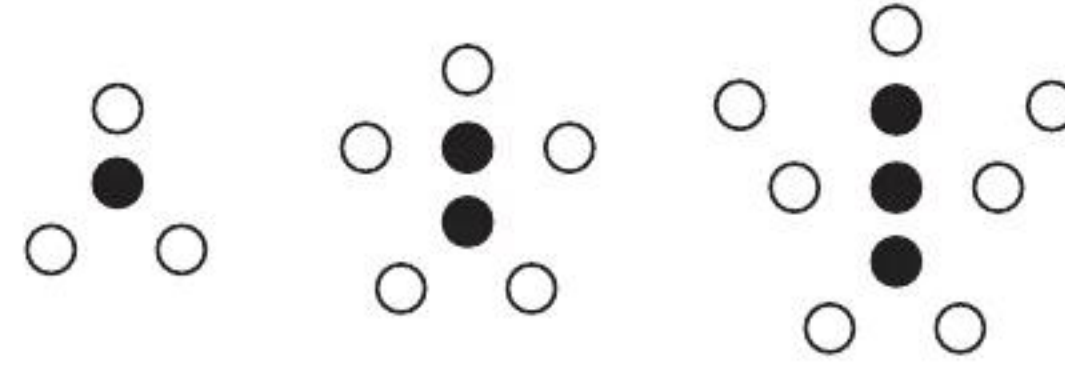
59. **التبرير** إذا كانت المتتالية الهندسية لها نسبة r بحيث يكون $|r| < 1$ ، فما الذي يحدث للحدود عند زيادة n ؟ ما الذي قد يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$ ؟

60. **الكتابة في الرياضيات** صف ما يحدث لحدود متتالية هندسية عند مضاعفة النسبة المشتركة. وما الذي يحدث عند قسمتها إلى النصف؟ اشرح استنتاجك.

تدريب على الاختبار المعياري

61. **إجابة قصيرة** تبلغ أبعاد غرفة استوديو منى ذات الشكل المستطيل 13 m في 11 m. وهي ترغب في شراء سجادة تكلف AED 10.84 لكل متر مربع. متضمنة الضريبة. فكم ستكون تكلفة فرش غرفة نومها بالسجاد؟

62. يمكن وصف نمط الدوائر المملوءة والدوائر البيضاء أدناه من خلال علاقة بين متغيرين.



أي علاقة تربط w وهو عدد الدوائر البيضاء، بـ f وهو عدد الدوائر الداكنة؟

- A $w = 3f$ C $w = 2f + 1$
B $f = \frac{1}{2}w - 1$ D $f = \frac{1}{3}w$

63. **SAT/ACT** رغبت ريهام في تحديد متوسط الدرجات الست التي حصلت عليها في الاختبار. فجمعت الدرجات بطريقة صحيحة لتحصل على T ، ولكنها قسمت على 7 بدلاً من 6. وكان متوسط درجاتها أقل بقيمة 12 درجة من المتوسط الفعلي. فأني معادلة يمكن استخدامها لتحديد قيمة T ؟

- F $6T + 12 = 7T$ J $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$
G $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$ K $\frac{T}{6} = 12 - \frac{T}{7}$
H $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

64. جد الحد التالي في المتتالية الهندسية $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$

- A $\frac{11}{8}$ C $\frac{9}{4}$
B $\frac{27}{16}$ D $\frac{81}{32}$

مراجعة شاملة

حلّ كل من أنظمة المعادلات التالية.

65. $y = 5$ 66. $y - x = 1$ 67. $3x = 8y^2$
 $y^2 = x^2 + 9$ $x^2 + y^2 = 25$ $8y^2 - 2x^2 = 16$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر ما إذا كان التمثيل البياني للمعادلة يمثل قطعاً مكافئاً أم دائرة أم قطعاً ناقصاً أم قطعاً زائداً. ثم مثل المعادلة بيانياً.

68. $6x^2 + 6y^2 = 162$ 69. $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ 70. $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 40$

مثل كل دالة بيانياً.

71. $f(x) = \frac{6}{(x-2)(x+3)}$ 72. $f(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ 73. $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$

74. **الصحة** يختفي دواء معين من مجرى الدم بمعدل ثابت. وهو يتحلل وفقاً للمعادلة $y = ae^{-0.1625t}$ حيث تكون قيمة t بالساعات. جد العمر النصفى لهذه المادة.

مراجعة المهارات

اكتب معادلة المستقيم في كل حالة مما يلي.

75. يمر بالنقطة (6, 4). وميله $m = 0.5$
76. يمر بالنقطة $(2, \frac{1}{2})$. وميله $m = -\frac{3}{4}$
77. يمر بالنقطة (0, -6). وميله $m = 3$
78. يمر بالنقطة (0, 4). وميله $m = \frac{1}{4}$
79. يمر بالنقطتين (1, 3). $(8, -\frac{1}{2})$
80. يمر بالنقطتين (5, 16). (-5, 1)

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

3-2

السابق

الحالي

لماذا؟

حددت ما إذا كانت المتتالية حسابية.

1 إيجاد الحد النوني والأوساط الحسابية للمتتاليات الحسابية.

2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية.

في القرن الثامن عشر، طلب معلم من طلاب صفه في المرحلة الابتدائية إيجاد مجموع الأعداد الحسابية من 1 إلى 100. وأجاب تلميذ اسمه كارل جاوس إجابة صحيحة في غضون ثوانٍ، مما أذهل المعلم. وأصبح جاوس عالم رياضيات عظيمًا. لقد حل هذه المسألة باستخدام المتسلسلات الحسابية.

المفردات الجديدة

أوساط حسابية
arithmetic means
متسلسلة
series
متسلسلة حسابية
arithmetic series
المجموع الجزئي
partial sum
الرمز سيجهما
sigma notation

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في
الاستنتاجات المتكررة والتعبير
عن ذلك.



1 المتتاليات الحسابية في الدرس 1-3. استخدمت صيغة النقطة والميل لإيجاد حد معين للمتتالية الحسابية. ومن الممكن وضع معادلة لأي حد خاص بمتتالية حسابية باستخدام العملية نفسها.

فكر في المتتالية الحسابية $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ التي فيها الفرق المشترك هو d .

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{صيغة النقطة والميل}$$

$$(a_n - a_1) = d(n - 1) \quad (x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{أضف } a_1 \text{ إلى كل طرف.}$$

يمكنك استخدام هذه المعادلة لإيجاد أي حد في متتالية حسابية عند معرفتك للحد الأول والفرق المشترك.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

يتم الحصول على الحد النوني a_n لمتتالية حسابية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والفرق المشترك هو d ، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التمرين 80.

مثال 1 إيجاد الحد النوني

جد الحد الثاني عشر للمتتالية الحسابية 9, 16, 23, 30, ...

الخطوة 1 جد الفرق المشترك.

$$16 - 9 = 7 \quad 23 - 16 = 7 \quad 30 - 23 = 7$$

إذًا، $d = 7$.

الخطوة 2 جد الحد الثاني عشر.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$$

$$= 9 + 77 \text{ أو } 86$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = 9, d = 7, n = 12$
بسط.

تمرين موجّه

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1A. $a_1 = -4, d = 6, n = 9$

1B. $a_1 = 15, d = -8$ بالنسبة إلى a_{20}

إذا أُعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية حسابية ما، فيمكنك كتابة معادلة للحد النوني للمتتالية.

مثال 2 كتابة معادلات للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

a. $5, -13, -31, \dots$

$d = -13 - 5$ أو $d = -18$ ؛ 5 هو الحد الأول.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_n &= 5 + (n - 1)(-18) \\ a_n &= 5 + (-18n + 18) \\ a_n &= -18n + 23 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = 5, d = -18$
خاصية التوزيع
بسّط.

b. $a_5 = 19, d = 6$

أولاً، جد a_1 .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 19 &= a_1 + (5 - 1)(6) \\ 19 &= a_1 + 24 \\ -5 &= a_1 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_5 = 19, n = 5, d = 6$
اضرب.
اطرح 24 من كل طرف.

ثم اكتب المعادلة.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_n &= -5 + (n - 1)(6) \\ a_n &= -5 + (6n - 6) \\ a_n &= 6n - 11 \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = -5, d = 6$
خاصية التوزيع
بسّط.

تمرين موجّه

2A. $12, 3, -6, \dots$

2B. $a_6 = 12, d = 8$

في بعض الأحيان، يتم إعطاؤك حدين لمتتالية ما، ولكنهما لا يكونان حدين متتابعين للمتتالية. ويُطلق على الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية اسم **أوساط حسابية**. ويمكن استخدامها لإيجاد الحدود المفقودة لمتتالية ما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

جد الأوساط الحسابية في المتتالية $22, \dots, _, _, _, _, -8$.

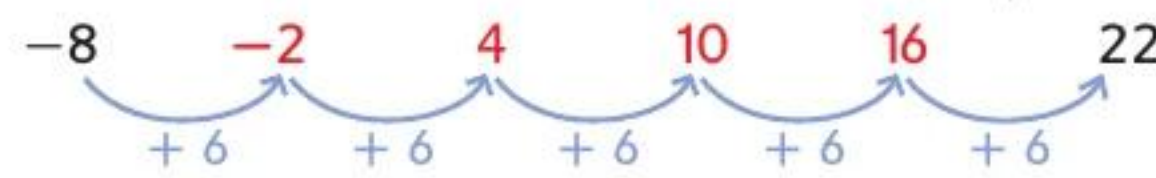
الخطوة 1 بما أن هناك أربعة حدود بين الحدين الأول والأخير المُعطيين، فهناك $4 + 2$ أو 6 حدود إجمالية. إذاً $n = 6$.

الخطوة 2 جد d .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 22 &= -8 + (6 - 1)d \\ 30 &= 5d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_1 = -8, a_6 = 22, n = 6$
خاصية التوزيع
اقسم كل طرف على 5.

الخطوة 3 استخدم d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.



الأوساط الحسابية هي -2 و 4 و 10 و 16 .

تمرين موجّه

3. جد الأوساط الحسابية الخمسة بين -18 و 36 .

قراءة في الرياضيات

الوسط الحسابي متوسط عددين أو أكثر
الأوساط الحسابية الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية

2 المتسلسلات الحسابية المتسلسلة تتكون عند جمع حدود متتالية ما. والمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية حسابية. ويطلق على مجموع الحدود النونية الأولى اسم **المجموع الجزئي**. ويُعبّر عنه بـ S_n .

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية		
الصيغة	المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى هو:
عامة	a_n و a_1	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$
بديلة	d و a_1	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$

في بعض الأحيان. يتعين تحديد a_1 أو a_n أو n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وعندما يحدث ذلك، استخدم صيغة الحد النوني.

مثال 4 استخدام صيغ المجموع

جد مجموع $12 + 19 + 26 + \dots + 180$.

الخطوة 1 $a_1 = 12$ و $a_n = 180$ و $d = 19 - 12$ أو 7 .

يتعين إيجاد n قبل أن نتمكن من استخدام إحدى الصيغ.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{الحد النوني لمتتالية حسابية}$$

$$180 = 12 + (n - 1)(7) \quad a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$$

$$168 = 7n - 7 \quad \text{بسط.}$$

$$25 = n \quad \text{جد قيمة } n.$$

الخطوة 2 استخدم أيًا من الصيغتين لإيجاد S_n .

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] \quad \text{صيغة المجموع}$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} [2(12) + (25 - 1)(7)] \quad n = 25, a_1 = 12, d = 7$$

$$S_{25} = 12.5(192) \text{ أو } 2400 \quad \text{بسط.}$$

تمرين موجّه

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

4A. $2 + 4 + 6 + \dots + 100$

4B. $n = 16, a_n = 240, d = 8$.

يمكنك استخدام صيغة المجموع لإيجاد حدود المتسلسلات.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

جد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$.

الخطوة 1 جد n .

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \quad \text{صيغة المجموع}$$

$$430 = n \left(\frac{7 + 79}{2} \right) \quad S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$$

$$430 = n(43) \quad \text{بسط.}$$

$$10 = n \quad \text{اقسم كل طرف على 43.}$$

انتبه!

الفرق المشترك لا تخلط علامة الفرق المشترك في المتتالية الحسابية. تحقق من أن القاعدة تنتج فعلاً حدود المتتالية.

الخطوة 2 جد d .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 79 &= 7 + (10 - 1)d \\ 72 &= 9d \\ 8 &= d \end{aligned}$$

الحد النوني لمتتالية حسابية
 $a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
 اطرح 7 من كل طرف.
 اقسم كل طرف على 9.

الخطوة 3

استخدم d لتحديد a_2 و a_3 .

$$\begin{aligned} a_2 &= 7 + 8 = 15 \\ a_3 &= 15 + 8 = 23 \end{aligned}$$

الحدود الثلاثة الأولى هي 7 و 15 و 23.

تمرين موجّه

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية مما يلي.

5A. $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$

5B. $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة باختصار عن طريق استخدام الرمز سيجمما.

المفهوم الأساسي الرمز سيجمما

$$\sum_{k=1}^n f(k)$$

صيغة حدود المتسلسلة

آخر قيمة لـ k

أول قيمة لـ k

الرموز

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{12} (4k + 2) &= [4(1) + 2] + [4(2) + 2] + [4(3) + 2] + \dots + [4(12) + 2] \\ &= 6 + 10 + 14 + \dots + 50 \end{aligned}$$

مثال

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجمما يأتي الاسم من الحرف اليوناني سيجمما، والذي يُستخدم في الرمز.

مثال 6 على الاختبار المعياري استخدام الرمز سيجمما

$$\text{جد } \sum_{k=4}^{18} (6k - 1)$$

A 846

B 910

C 975

D 1008

قراءة فقرة الاختبار

بتعين عليك إيجاد مجموع المتسلسلة. جد a_1 و a_n و n .

حل فقرة الاختبار

هناك $1 + 4 + 18$ أو 15 حدًا. لذلك $n = 15$.

$$a_1 = 6(4) - 1 = 23 \quad a_n = 6(18) - 1 = 107$$

جد المجموع.

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15 \left(\frac{23 + 107}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15(65) \text{ أو } 975$$

صيغة المجموع

$$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$$

الإجابة الصحيحة هي C.

تمرين موجّه

$$\text{6. جد } \sum_{m=9}^{21} (5m + 6)$$

F 972

G 1053

H 1281

J 1701

نصيحة عند حل

الاختبار

المثابرة

أحيانًا يلزم تقسيم مسألة ما إلى أجزاء، وحل كل جزء منفردًا، ثم دمج حلول الأجزاء.

التحقق من فهمك

مثال 1

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1. $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

2. a_{18} من أجل 12, 25, 38, ...

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

3. 13, 19, 25, ...

4. $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

5. 6, ?, ?, ?, 42

6. -4, ?, ?, ?, 8

مثال 4

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

7. أول 50 عددًا طبيعيًا $4 + 8 + 12 + \dots + 200$

8.

9. $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

10. $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

11. $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

12. $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6

13. اختيار من متعدد جد $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$

A 45

C 342

B 78

D 410

التدريب وحل المسائل

مثال 1

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

14. $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

15. $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

16. $a_1 = 9, n = 24, d = -6$

17. a_{15} من أجل -5, -12, -19, ...

18. a_{10} من أجل -1, 1, 3, ...

19. a_{24} من أجل 8.25, 8.5, 8.75, ...

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

20. 24, 35, 46, ...

21. 31, 17, 3, ...

22. $a_9 = 45, d = -3$

23. $a_7 = 21, d = 5$

24. $a_4 = 12, d = 0.25$

25. $a_5 = 1.5, d = 4.5$

26. 9, 2, -5, ...

27. $a_6 = 22, d = 9$

28. $a_8 = -8, d = -2$

29. $a_{15} = 7, d = \frac{2}{3}$

30. -12, -17, -22, ...

31. $a_3 = -\frac{4}{5}, d = \frac{1}{2}$

32. **البنية** بلغ متوسط إجمالي قوارير البولنج التي أحرزها مازن في كل مباراة في دوري البولنج لهذا الموسم 123 قارورة. ويأخذ مازن دروسًا بالبولنج ويأمل أن يزيد هذا المتوسط بمقدار 8 قوارير في كل موسم جديد.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي موسم سيحضر مازن متوسط 187 قارورة في المباراة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى أجل غير مسمى؟ اشرح.

مثال 3

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

33. 24, ?, ?, ?, ?, -1

34. -6, ?, ?, ?, ?, 49

35. -28, ?, ?, ?, ?, 7

36. 84, ?, ?, ?, ?, 39

37. -12, ?, ?, ?, ?, ?, -66

38. 182, ?, ?, ?, ?, ?, 104

مثال 4

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

39. أول 100 عدد طبيعي زوجي
40. أول 200 عدد طبيعي فردي
41. أول 100 عدد طبيعي فردي
42. أول 300 عدد طبيعي زوجي
43. $-18 + (-15) + (-12) + \dots + 66$
44. $-24 + (-18) + (-12) + \dots + 72$
45. $a_1 = -16, d = 6, n = 24$
46. $n = 19, a_n = 154, d = 8$

47. **مسابقات** بدأت الجوائز في إحدى المسابقات الإذاعية الأسبوعية بمبلغ AED 150 وازدادت بمقدار AED 50 لكل أسبوع استمرت فيه هذه المسابقة. وإذا كانت المسابقة قد استمرت أحد عشر أسبوعاً، فكم إجمالي المبلغ الممنوح؟

جد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

مثال 5

48. $n = 32, a_n = -86, S_n = 224$
49. $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$
50. $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$
51. $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$
52. $a_1 = -72, a_n = 453, S_n = 6858$
53. $n = 30, a_n = 362, S_n = 4770$
54. $a_1 = 19, n = 44, S_n = 9350$
55. $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

56. **جوائز** تقدم محطة إذاعية إجمالي جوائز بمبلغ AED 8500 على مدار عشر ساعات. وستزيد الجائزة كل ساعة بمقدار AED 100. أوجد مقدار أول وآخر جائزة.

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

مثال 6

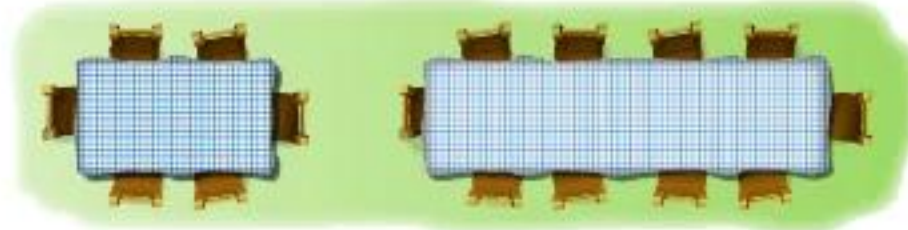
57. $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$
58. $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$
59. $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$
60. $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$

61. **المعرفة المالية** اقترضت سُهيلة بعض النقود من والديها. ووافقت على دفع AED 50 في نهاية الشهر الأول وزيادة تبلغ AED 25 لكل شهر بعد ذلك ولمدة 12 شهراً. فكم ستدفع إجمالاً بعد 12 شهراً؟

62. **الجاذبية** عندما يسقط جسم بشكل حر مع تجاهل مقاومة الهواء، فإنه يسقط بمعدل 4.9 m في الثانية الأولى، و 14.6 m إضافية خلال الثانية التالية، و 24.4 m خلال الثانية الثالثة. فكم عدد إجمالي الأقدام التي سيسقطها الجسم في غضون 10 ثوانٍ؟

استخدم المعلومات المعطاة لكتابة معادلة تمثل الحد النوني في كل متتالية حسابية

63. الحد رقم 100 في المتتالية هو 245. والفرق المشترك هو 13.
64. الحد الحادي عشر في المتتالية هو 78. والفرق المشترك هو -9.
65. الحد السادس في المتتالية هو -34. والحد الثالث والعشرون هو 119.
66. الحد الخامس والعشرون في المتتالية هو 121. والحد الثمانون هو 506.
67. **التمثيل بالنماذج** غالباً ما توضع الطاولة المستطيلة في ردهة الاستقبال إلى جانب بعضها البعض لتشكل طاولة واحدة طويلة. وتوضح الرسوم التخطيطية التالية عدد الأشخاص الذين يمكنهم الجلوس على كل من مجموعات الطاولات.



- a. قم بإعداد رسومات لإيجاد الأعداد الثلاثة التالية عند إضافة الطاولات بمعدل واحدة في المرة إلى المجموعة.
b. اكتب معادلة تمثل العدد النوني في هذا النمط.
c. هل من الممكن الحصول على مقاعد تكفي بالضبط 100 شخص في هذه المجموعة؟ اشرح.

68. **الأداء** هناك شركة ما تدفع لموظفيها وفقًا لمعدلات أدائهم. وتحصل إيمان على أجر ثابت يبلغ AED 200 في الأسبوع بالإضافة إلى AED 24 لكل وحدة تقوم بإنهائها. وإذا كانت قد جنت AED 512 في أسبوع واحد، فكم وحدة قد انتهت منها؟

69. **الراتب** يكسب يوسف حاليًا AED 28,000 سنويًا. وإذا كان يوسف يتوقع زيادة بالراتب كل عام بمقدار AED 4,000. فبعد كم عامًا سيحصل على راتب يبلغ AED 100,000 في العام؟

70. **الألعاب الرياضية** أثناء التدريب لخوض سباق الضاحية، تخطط وفاء للجري 3 km يوميًا في الأسبوع الأول، ثم زيادة المسافة بمقدار 0.5 km في كل من الأسابيع التالية.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية.

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي أسبوع ستجري 10 km في اليوم؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى أجل غير مسمى؟ اشرح.

71. **التمثيلات المتعددة** فكر في $\sum_{k=1}^x (2k + 2)$.

a. **جدوليًا** اصنع جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة المتعلقة بـ $1 \leq k \leq 10$.

b. **بيانيًا** مثل بيانيًا (k . مجموع جزئي).

c. **بيانيًا** مثل بيانيًا $f(x) = x^2 + 3x$ على نفس الشبكة.

d. **لفظيًا** ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين؟

e. **تحليليًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الدوال التربيعية ومجموع المتسلسلة الحسابية؟

f. **جبريًا** جد المتسلسلة الحسابية المرتبطة بـ $g(x) = x^2 + 8x$.

جد قيمة x .

$$72. \sum_{k=3}^x (6k - 5) = 928$$

$$73. \sum_{k=5}^x (8k + 2) = 1032$$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

74. **التفكير النقدي** يحدد كل من حارب وحسن صيغة الحد النوني للمتتالية $16, 7, -2, -11, \dots$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حسن

$$9, a_1 = -11 \text{ أو } d = 16 - 7 \\ a_n = 9n - 11$$

حارب

$$9, a_1 = -11 \text{ أو } d = 16 - 7 \\ a_n = -11 + (n - 1)9 \\ = 9n - 20$$

75. **التبرير** إذا كان a هو الحد الثالث في متتالية حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبر عن c بدلالة a و b .

76. **التحد** هناك ثلاثة أوساط حسابية بين a و b في متتالية حسابية ما. ومتوسط الأوساط الحسابية هو 16. فما متوسط a و b ؟

77. **التحد** جد S_n من أجل $(x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + \dots$.

78. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة حسابية بها 8 حدود ومجموع يبلغ 324.

79. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين المتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

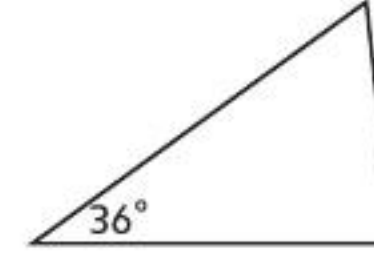
80. **البرهان** برهن على الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية حسابية.

81. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1 .

82. **البرهان** اشتق صيغة المجموع البديلة باستخدام صيغة المجموع العامة.

تدريب على الاختبار المعياري

83. SAT/ACT تُكوّن قياسات الزوايا الخاصة بأحد المثلثات متتالية حسابية. فإذا كان قياس الزاوية الأصغر هو 36° ، فما قياس الزاوية الأكبر؟



- A 54°
- B 75°
- C 84°
- D 90°
- E 97°

84. تبلغ مساحة مثلث ما $8 - q^2$ وبلغ الارتفاع $q + 4$. فأَي تعبير يصف قاعدة المثلث على نحو أدق؟

- F $(q + 1)$
- G $(q + 2)$
- H $(q - 3)$
- J $(q - 4)$
- 85. التعبير $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوي
- A $\sum_{k=1}^3 k^{\frac{1}{k}}$
- B $\sum_{k=1}^3 k^k$
- C $\sum_{k=1}^3 k^{-k}$
- D $\sum_{k=1}^3 \sqrt{k}$

86. إجابة مختصرة يمكن لهما كتابة مقال من 200 كلمة في 6 ساعات. ويمكن لهما كتابة نفس المقال في $4\frac{1}{2}$ ساعات. فإذا عملا معًا، فكم سيلزمهما من الساعات لكتابة المقال؟

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية. اكتب نعم أو لا. (الدرس 3-1)

89. 10, 8, 5, 1, ...

88. $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \dots$

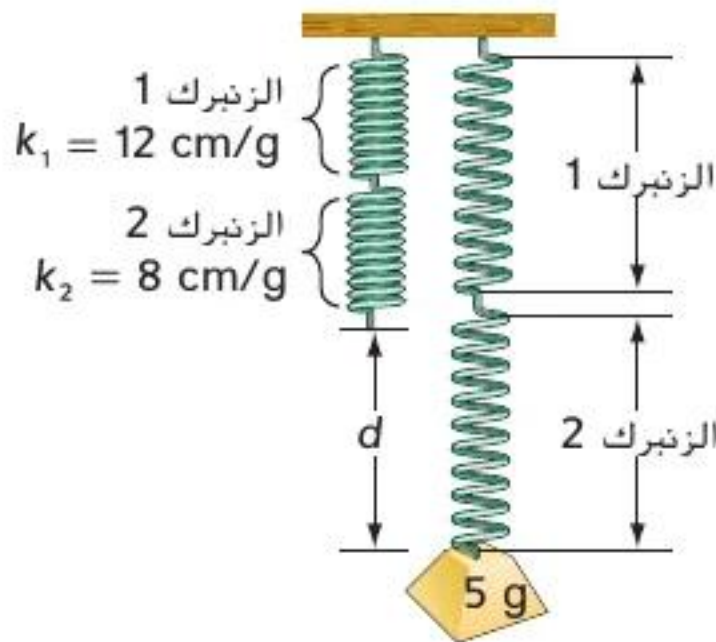
87. $-6, 4, 14, 24, \dots$

حلّ كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

90. $x + 2y > 1$
 $x^2 + y^2 \leq 25$

91. $x + y \leq 2$
 $4x^2 - y^2 \geq 4$

92. $x^2 + y^2 \geq 4$
 $4y^2 + 9x^2 \leq 36$



93. الفيزياء ترتبط المسافة التي يتمدها الزنبرك بالكتلة المعلقة به. ويمكن تمثيل هذا من خلال $d = km$ ، حيث d يمثل المسافة، و m يمثل الكتلة، و k هو ثابت الزنبرك. وعند ربط زنبركين مع ثابتي زنبرك k_1 و k_2 في متسلسلة، يتم إيجاد ثابت الزنبرك الناتج k باستخدام المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.
a. إذا كان هناك زنبرك بثابت يبلغ 12 cm/g معلق في سلسلة مع زنبرك آخر بثابت 8 cm/g ، فجد ثابت الزنبرك الناتج.

b. إذا كان هناك جسم وزن 5 g معلق بسلسلة الزنبركين، فلأي مدى سيتمدد الزنبركان؟ هل هذه الإجابة معقولة في هذا السياق؟

بسط.

94. $\frac{1}{y^{\frac{2}{5}}}$

95. $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}$

96. $\frac{3x + 4x^2}{x^{-\frac{2}{3}}}$

مراجعة المهارات

حلّ كل من المعادلات التالية. قَرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

97. $5^x = 52$

98. $4^{3p} = 10$

99. $3^{n+2} = 14.5$

100. $16^{d-4} = 3^{3-d}$

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

3-3



لماذا؟

الحالي

السابق

رأى محمد فرقة موسيقية جديدة بإحدى الحفلات الموسيقية. وأرسل بالبريد الإلكتروني رابطاً يتضمن عنوان موقع الويب الخاص بالفرقة إلى خمسة من أصدقائه. وقام كل من هؤلاء الأصدقاء بإعادة إرسال هذا الرابط إلى خمسة آخرين من أصدقائهم. ثم أعيد إرسال الرابط مرة أخرى باتباع نفس النمط. فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرابط في الجولة الثامنة من إرسال الرسائل الإلكترونية؟

1 إيجاد الحد النوني والأوساط الهندسية للمتتاليات الهندسية.

2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.

حددت ما إذا كانت المتتالية هندسية.

1 المتتاليات الهندسية كما هو الحال مع المتتاليات الحسابية، هناك صيغة للحد النوني للمتتالية الهندسية. ويمكن استخدام هذه الصيغة لتحديد أي حد للمتتالية.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية هندسية

يتم الحصول على الحد النوني a_n لمتتالية هندسية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r ، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التمرين 68.

المفردات الجديدة
أوساط هندسية
geometric means
متسلسلة هندسية
geometric series

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد الحد النوني

الموسيقى إذا استمر النمط، فكم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي ستُرسل في الجولة الثامنة؟

الفهم نحتاج إلى تحديد عدد رسائل البريد الإلكتروني المعاد إرسالها في الجولة الثامنة. وتم إرسال خمسة رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى. وكل مستلم من المستلمين الخمسة أرسل خمس رسائل في الجولة الثانية، وهكذا.

التخطيط هذه متتالية هندسية، والنسبة المشتركة هي 5. استخدم الصيغة المتعلقة بالحد النوني للمتتالية الهندسية.

الحل

الحد النوني للمتتالية الهندسية

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_8 = 5(5)^{8-1}$$

$$a_8 = 5(78,125) \text{ أو } 390,625$$

$$5^7 = 78,125$$

التحقق اكتب أول ثمانية حدود من خلال الضرب في النسبة المشتركة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15,625, 78,125, 390,625

سيكون هناك 390,625 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها في الجولة الثامنة.

تمرين موجّه

1. الرسائل الإلكترونية استلمت هدى دعابة في رسالة بريد إلكتروني تطلب منها أن تعيد إرسالها إلى أربعة من أصدقائها. وبالفعل أعادت إرسالها. ثم أرسلتها كل صديقة من صديقاتها إلى أربعة آخرين من الأصدقاء، وهكذا. وإذا استمر هذا النمط، فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون هذه الرسالة الإلكترونية في الجولة التاسعة من إعادة الإرسال؟

إذا أُعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية هندسية ما، فيمكنك تحديد معادلة لإيجاد الحد النوني للمتتالية.

مثال 2 كتابة معادلة للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

a. 0.5, 2, 8, 32, ...

هو الحد الأول. 0.5 أو 4: $r = 8 \div 2$
 $a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = 0.5(4)^{n-1}$ $r = 4, a_1 = 0.5$

b. $a_4 = 5$ و $r = 6$

الخطوة 1 جد a_1 .
 $a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني لمتتالية هندسية
 $5 = a_1 (6^{4-1})$ $n = 4, r = 6, a_n = 5$
 $5 = a_1 (216)$ جد قيمة الأس.
 $\frac{5}{216} = a_1$ اقسم كل طرف على 216.

الخطوة 2 اكتب المعادلة.
 $a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني لمتتالية هندسية
 $a_n = \frac{5}{216} (6)^{n-1}$ $r = 6, a_1 = \frac{5}{216}$

تمرين موجّه

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

2A. -0.25, 2, -16, 128, ...

2B. $a_3 = 16, r = 4$

ومثل الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الموجودة بين حدين غير متعاقبين لمتتالية هندسية. ويمكن استخدام النسبة المشتركة r لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

جد ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 1250.

الخطوة 1 بما أن هناك ثلاثة حدود بين الحد الأول والحد الأخير، فهناك $2 + 3$ أو 5 حدود إجمالية، إذا $n = 5$.

الخطوة 2 جد r .
 $a_n = a_1 r^{n-1}$ الحد النوني لمتتالية هندسية
 $1250 = 2r^{5-1}$ $n = 5, a_1 = 2, a_n = 1250$
 $625 = r^4$ اقسم كل طرف على 2.
 $\pm 5 = r$ استخرج الجذر الرابع لكل طرف.

الخطوة 3 استخدم r لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.
 2 $\xrightarrow{\times 5} -10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} -250 \xrightarrow{\times 5} 1250$ أو 2 $\xrightarrow{\times -5} 10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} 250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

الأوساط الهندسية هي 10 و 50 و 250 أو -10 و 50 و -250.

تمرين موجّه

3. جد أربعة أوساط هندسية بين 0.5 و 512.

الربط بتاريخ الرياضيات

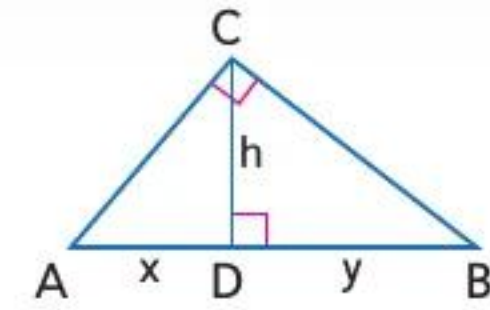
أرخيتاس (347-428 ق.م.)

تمت دراسة المتتاليات الهندسية أو المتعاقبات الهندسية لأول مرة بواسطة عالم الرياضيات اليوناني أرخيتاس. وجاءت دراساته لهذه المتتاليات بسبب شغفه بالموسيقى والجوابات الموسيقية.

قراءة في الرياضيات

الأوساط الهندسية يمكن

تمثيل الوسط الهندسي بطريقة هندسية أيضاً. في الشكل أدناه، يعد h الوسط الهندسي بين x و y .



2 المتسلسلات الهندسية إن **المتسلسلة الهندسية** هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. ويتم التعبير عن مجموع الحدود النونية الأولى لمتسلسلة من خلال S_n . ويمكنك استخدام أي من الصيغ التالية لإيجاد المجموع الجزئي S_n للحدود النونية لمتسلسلة هندسية.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية	
المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى هو:
n و a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
a_n و a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

الموسيقى راجع بداية الدرس. إذا استمر النمط، فما إجمالي عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في الجولات الثماني؟

يتم إرسال خمس رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى وهناك ثمانية جولات من عملية إرسال رسائل البريد الإلكتروني. إذاً، $a_1 = 5$ و $r = 5$ و $n = 8$.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

صيغة المجموع

$$S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5}$$

$n = 8, r = 5, a_1 = 5$

$$S_8 = \frac{-1,953,120}{-4}$$

حوّل البسط والمقام لأبسط صورهما.

$$S_8 = 488,280$$

اقسم.

سيكون هناك 488,280 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها بعد الجولات الثماني.

تمرين موجّه

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

4A. $a_1 = 2, n = 10, r = 3$

4B. $a_1 = 2000, a_n = 125, r = \frac{1}{2}$

وكما هو الحال مع المتسلسلات الحسابية، يمكن أيضًا استخدام الرمز سيجمما لتمثيل المتسلسلات الهندسية.

مثال 5 المجموع في الرمز سيجمما

جد $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^k - 1$

جد a_1 و r و n . في الحد الأول، $k = 3$ و $a_1 = 4 \cdot 2^3 - 1$ أو 16. وقاعدة الدالة الأسية هي r . إذاً $r = 2$. هناك $10 - 3 + 1$ أو 8 حدود. إذاً $n = 8$.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

صيغة المجموع

$$= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2}$$

$n = 8, r = 2, a_1 = 16$

$$= 4080$$

استخدم الحاسبة.

تمرين موجّه

جد مجموع كل مما يلي.

5A. $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

5B. $\sum_{k=2}^9 \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

انتبه!

الرمز سيجمما لاحظ أنه يُطلب منك في المثال 5 تقييم المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

يمكن استخدام الصيغة المتعلقة بمجموع المتسلسلة الهندسية للمساعدة في إيجاد حد معين للمتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحد الأول للمتسلسلة

جد a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = 13,116$ و $n = 7$ و $r = 3$.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

صيغة المجموع

$$13,116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$$

$n = 7$, $r = 3$, $S_n = 13,116$

$$13,116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$$

خاصية التوزيع

$$13,116 = \frac{-2186a_1}{-2}$$

اطرح.

$$13,116 = 1093a_1$$

بسط.

$$12 = a_1$$

اقسم كل طرف على 1093.

تمرين موجّه

6. جد a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = -26,240$ و $n = 8$ و $r = -3$.

التحقق من فهمك

1. **الانتظام** يصنع أحمد شجرة عائلة لجدّه. وقد تمكن من تتبع العديد من الأجيال. وإذا استطاع أحمد تتبع 10 أجيال سابقة من عائلته، بدءاً من والديه، فكم عدد الأسلاف الذين سيتمكن من تتبعهم؟

مثال 1

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

مثال 2

2. 2, 4, 8, ...

3. 18, 6, 2, ...

4. -4, 16, -64, ...

5. $a_2 = 4$, $r = 3$

6. $a_6 = \frac{1}{8}$, $r = \frac{3}{4}$

7. $a_2 = -96$, $r = -8$

جد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

مثال 3

8. 0.25, , , , 64

9. 0.20, , , , 125

10. **الألعاب** ترتب شيماء بعض صفوف قطع الدومينو بحيث عندما تضرب أول قطعة منها، تتساقط كل قطعة على قطعتين أخريين عندما تسقط. وإذا كان هناك عشرة صفوف، فكم عدد قطع الدومينو التي ستستخدمها شيماء؟

مثال 4

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

مثال 5

11. $\sum_{k=1}^6 3(4)^k - 1$

12. $\sum_{k=1}^8 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

جد a_1 لكل متسلسلة هندسية موصوفة.

مثال 6

13. $S_n = 85\frac{5}{16}$, $r = 4$, $n = 6$

14. $S_n = 91\frac{1}{12}$, $r = 3$, $n = 7$

15. $S_n = 1020$, $a_n = 4$, $r = \frac{1}{2}$

16. $S_n = 121\frac{1}{3}$, $a_n = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3}$

مثال 1

17. **الطقس** تسببت الأمطار الغزيرة في مدينة حلبمة في ارتفاع منسوب النهر. وقد ارتفع النهر 7.6 in في اليوم الأول. وكل يوم بعد ذلك كان يرتفع مثلي مقدار اليوم السابق. فكم ارتفع منسوب النهر خلال خمسة أيام؟

جد a_n لكل متتالية هندسية.

18. $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

19. $a_1 = 800, r = \frac{1}{2}, n = 6$

20. $a_1 = \frac{2}{9}, r = 3, n = 7$

21. $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

22. **علم الأحياء** تنمو بكتيريا محددة بمعدل 3 خلايا كل دقيقتين. وإذا كان هناك 260 خلية في بادئ الأمر، فكم سيكون عددها بعد 21 دقيقة؟

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

23. $-3, 6, -12, \dots$

24. $288, -32, 96, \dots$

25. $-1, 1, -1, \dots$

26. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$

27. $8, 2, \frac{1}{2}, \dots$

28. $12, -16, \frac{64}{3}, \dots$

29. $a_3 = 28, r = 2$

30. $a_4 = -8, r = 0.5$

31. $a_6 = 0.5, r = 6$

32. $a_3 = 8, r = \frac{1}{2}$

33. $a_4 = 24, r = \frac{1}{3}$

34. $a_4 = 80, r = 4$

جد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

35. $810, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 10$

36. $640, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 2.5$

37. $\frac{7}{2}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \frac{56}{81}$

38. $\frac{729}{64}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \frac{324}{9}$

39. جد وسطين هندسيين بين 3 و 375.

40. جد وسطين هندسيين بين 16 و -2.

مثال 4

41. **المشاهدة** يمكن لنظام ترشيح مياه أن يزيل 70% من الملوثات في كل مرة يتم تمرير عينة من المياه من خلاله. وإذا تم تمرير نفس كمية المياه عبر النظام أربع مرات، فكم النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من عينة المياه؟

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

42. $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

43. $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

44. $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

45. $a_1 = 360, r = \frac{4}{3}, n = 8$

46. **المكافئ الكهربائية** يُقال إن مكينة كهربائية تلتقط 80% من الأتربة والأوساخ في كل مرة يتم تمريرها فوق السجاد. ومع افتراض صحة ذلك، فما النسبة المئوية للكمية الأصلية من الأوساخ التي سيتم التقاطها وإزالتها بعد تمرير المكينة فوق السجاد سبع مرات؟

جد مجموع كل متسلسلة هندسية.

47. $\sum_{k=1}^7 4(-3)^{k-1}$

48. $\sum_{k=1}^8 (-3)(-2)^{k-1}$

49. $\sum_{k=1}^9 (-4)(1)^{k-1}$

50. $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 5

جد a_1 لكل متسلسلة هندسية موصوفة.

51. $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

52. $S_n = -10,922, r = 4, n = 7$

53. $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

54. $S_n = 4118, a_n = 128, r = \frac{2}{3}$

55. $a_n = 1024, r = 8, n = 5$

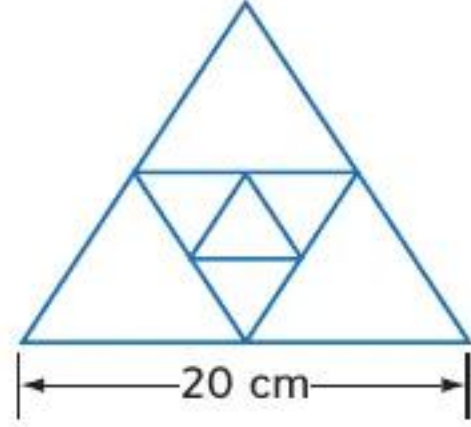
56. $a_n = 1875, r = 5, n = 7$

مثال 6

57. **العلوم** ارتفع بالون ممتلئ بالغاز لمسافة 100 ft بعد دقيقة من إطلاقه. وفي كل دقيقة بعد ذلك، يرتفع البالون 50% فقط من المسافة التي ارتفعها في الدقيقة السابقة. فكم سيرتفع بعد 5 دقائق؟

58. **الكيمياء** يبلغ نصف عمر عنصر الرادون حوالي 4 أيام. وهذا يعني أنه كل 4 أيام تقريبًا، تتحلل نصف كتلة عنصر الرادون إلى عنصر آخر. فكم جرامًا من الرادون سيتبقى من 60 g موجودين من البداية بعد 4 أسابيع؟

59. **الاستنتاج** ينتشر فيروس في جهاز كمبيوتر مصيبًا الملفات. وإذا أصيب ملف في بادئ الأمر مع تضاعف عدد الملفات المصابة كل دقيقة، فكم عدد الملفات التي ستصاب بعد 20 دقيقة؟



60. **الهندسة** في الشكل، تبلغ أضلاع كل مثلث متساوي الأضلاع مثلي قياس أضلاع المثلث المحيط الخاص به. وإذا استمر النمط، فجد مجموع محيطات أول ثمانية مثلثات.

61. **البندول** تبلغ المسافة المقطوعة لحركة الأرجحة الأولى للبندول 30 cm. وإذا بلغت مسافة كل حركة أرجحة تالية 95% من حركة الأرجحة السابقة، فجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول بعد الأرجحة الثلاثين.

62. **سلاسل اتصالات** أنشأت إحدى المدارس سلسلة اتصالات بحيث يمكن لكل موظف الاتصال باثنين آخرين من الموظفين لإخبارهم بمواعيد إغلاق المدرسة بسبب أحوال الطقس. وبدأت الجولة الأولى من الاتصالات عندما اتصل المشرف بكل مديري المدرسة. فإذا كان عدد الموظفين إجمالاً يبلغ 94 موظفًا بالمدرسة، فكم جولة من الاتصالات ستتم في هذا الخصوص؟

63. **أجهزة التلفاز** تعلن إحدى شركات الإلكترونيات الكبرى عن طرحها خطة تقسيط أسبوعية يمكن بموجبها شراء ماركة شهيرة من أجهزة التلفاز عالية الدقة. ويدفع المشتري 5 AED في نهاية الأسبوع الأول، و 5.50 AED في نهاية الأسبوع الثاني، و 6.05 AED في نهاية الأسبوع الثالث، وهكذا لمدة عام. (نفترض أن عامًا واحدًا = 52 أسبوعًا.)

a. كم ستبلغ المدفوعات في نهاية الأسبوع العاشر والعشرين والأربعين؟

b. جد التكلفة الإجمالية لجهاز التلفاز.

c. لماذا تعتبر التكلفة الموجودة في الجزء b غير دقيقة كليًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

64. **البرهان** اشتق صيغة المجموع العامة باستخدام صيغة المجموع البديلة.

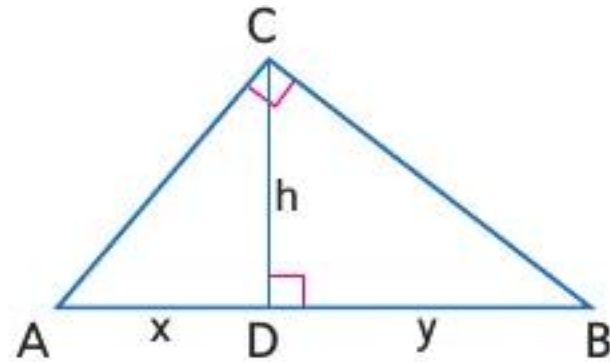
65. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1 .

66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بحيث $r = \frac{3}{4}$ و $n = 6$.

67. **التبرير** اشرح كيف أن $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$ تحتاج إلى التغيير للإشارة إلى نفس المتسلسلة إذا تم تغيير $k = 1$ إلى $k = 0$. اشرح استنتاجك.

68. **البرهان** برهن الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية هندسية.

69. **التحدي** الحد الخامس لمتتالية هندسية هو الحد رقم $\frac{1}{27}$ للحد الثامن. فإذا كان الحد التاسع هو 702، فما الحد الثامن؟



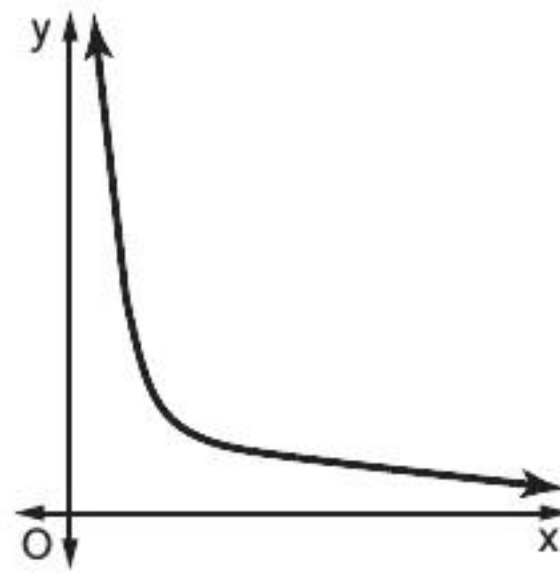
70. **التحدي** افترض أن h هو الوسط الهندسي بين x و y في الشكل الموجود على اليسار لإيجاد h^4 بدلالة كل من x و y .

71. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بها 6 حدود ومجموع يبلغ 252.

72. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك تصنيف متتالية؟ اشرح استنتاجك.

تدريب على الاختبار المعياري

76. SAT/ACT ما الدالة التي قد يكون المنحنى أدناه جزءًا من التمثيل البياني لها؟



- A $y = \sqrt{x}$
- B $y = x^2 - 5x + 4$
- C $y = -x + 20$
- D $y = \log x$
- E $xy = 4$

73. أي من التالي الأقرب إلى $\sqrt[3]{7.32}$ ؟

- A 1.8
- B 1.9
- C 2.0
- D 2.1

74. الحد الأول لمتسلسلة هندسية هو 5، والنسبة المشتركة هي -2. فكم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها -6825؟

- F 5
- G 9
- H 10
- J 12

75. إجابة مختصرة لدى هداية حساب ادخار. وهي تسحب نصف محتويات الحساب كل عام. وبعد 4 أعوام، تبقى لديها AED 2000. فكم كان لديها في حساب الادخار في الأصل؟

مراجعة شاملة

77. المال اشترت ياسمين تلفاز LCD عالي الدقة من متجر الإلكترونيات. ودفعت AED 200 على الفور و AED 75 شهريًا لمدة عام ونصف. فكم دفعت ياسمين إجمالًا مقابل التلفزيون؟ (الدرس 3-2)

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية أم هندسية أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك. (الدرس 3-1)

78. $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \dots$

79. $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \dots$

80. $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \dots$

جد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثل الدائرة بيانيًا.

81. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

82. $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 81$

83. $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 50$

84. التسوق اكتشف متجر ما أن عدد العملاء الذين سيحضرون أوكازيونا للبيع بأسعار مخفضة يمكن تمثيلهم باستخدام $N = 125\sqrt[3]{100Pt}$. حيث N هو العدد المتوقع للعملاء، و P هو النسبة المئوية للخصم، و t هو عدد ساعات سريان الخصم. جد عدد العملاء الذي يتوقع المتجر حضورهم لهذا الأوكازيون الذي ستصل نسبة الخصم فيه 50%. والذي سيستمر لأربع ساعات.

مراجعة المهارات

جد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$ ، و $b = \frac{1}{3}$ ، و $c = -12$.

85. $\frac{3ab}{c}$

86. $\frac{a - c}{a + c}$

87. $\frac{a^3 - c}{b^2}$

88. $\frac{c + 3}{ab}$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 3-1 إلى 3-3

3

10. الاختيار من متعدد ما مجموع أول 50 عددًا فرديًا؟
(الدرس 3-2)

- A 2550
- B 2500
- C 2499
- D 2401

جد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية. (الدرس 3-3)

- 11. $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$
- 12. $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

13. الاختيار من متعدد ما الأوساط الهندسية للمتتالية التالية؟ (الدرس 3-3)

0.5, _____, _____, _____, 2048

- F 512.375, 1024.25, 1536.125
- G 683, 1365.5, 2048
- H 2, 8, 32
- J 4, 32, 256

14. الدخل يعمل بلال لدى شركة لتشييد المنازل لمدة 4 أشهر في العام. وبدأ هذا العمل بجني AED 3000 في الشهر. وفي نهاية كل شهر، يزيد راتبه 5%. فكم سيجني من أموال في هذه الأشهر الأربعة؟ (الدرس 3-3)

جد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية. (الدرس 3-3)

- 15. $\sum_{k=1}^8 3 \times 2^{k-1}$
- 16. $\sum_{k=1}^9 4 \times (-1)^{k-1}$
- 17. $\sum_{k=1}^{20} -2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي حسابية، أم هندسية، أم ليست أيًا منهما. اشرح استنتاجك. (الدرس 3-1)

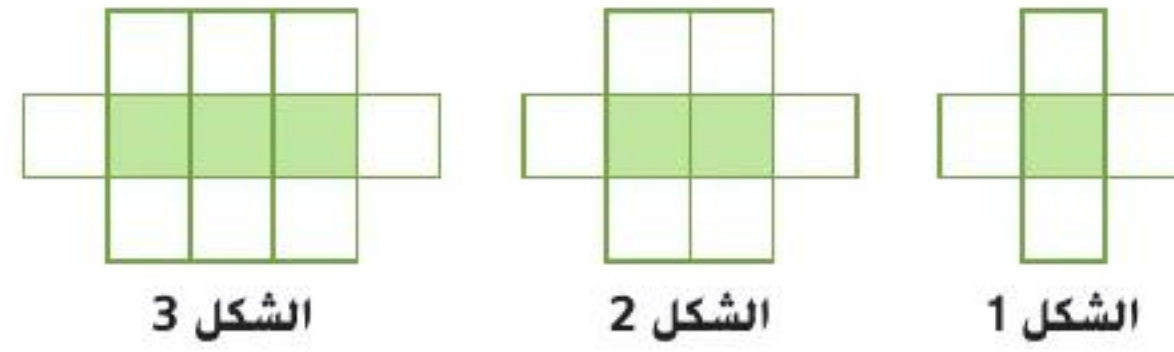
- 1. 5, -3, -12, -22, -33...
- 2. $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \dots$

3. الإسكان يعمل محمود وكيل عقارات. ويتعين عليه بيع 15 منزلًا خلال 6 أشهر. (الدرس 3-1)

a. بنهاية أول شهرين، باع 4 منازل. فإذا باع منزلين كل شهر خلال المدة المتبقية من الأشهر الستة، فهل سيحقق هدفه؟ اشرح.

b. إذا باع 5 منازل بنهاية الشهر الأول، فكم عليه أن يبيع في المتوسط كل شهر ليحقق هدفه؟

4. الهندسة توضح الأشكال التالية نمطًا من المربعات المظلمة والمربعات البيضاء. (الدرس 3-1)



a. اكتب معادلة تمثل العدد النوني (n) في هذا النمط، حيث n هو عدد المربعات البيضاء.

b. هل من الممكن الحصول على 84 مربعًا أبيض تمامًا في ترتيب ما؟ اشرح.

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية. (الدرس 3-2)

- 5. $a_1 = 10, d = -5, n = 9$
- 6. $a_1 = -8, d = 4, n = 99$

جد مجموع كل متسلسلة حسابية. (الدرس 3-2)

- 7. $-15 + (-11) + (-7) + \dots + 53$
- 8. $a_1 = -12, d = 8, n = 22$
- 9. $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$

نظرية ذات الحدين

السابق

تمثيل المتسلسلات
اللا نهائية باستخدام
ترميز سيجمما.

..الحالي

1 استخدام مثلث باسكال لكتابة التعبيرات ذات الحدين.

2 استخدام نظرية ذات الحدّين لكتابة وإيجاد معاملات حدود معينة في التعابير ذات الحدّين.

لماذا؟

افتراض أن عالم أحياء يدرس أحد الأنواع المهددة بالانقراض من فصيلة الجييون وقد اكتشف أن 80% من نسل الجييون من الإناث و 20% من الذكور. ويتوقع العاملون في حديقة الحيوان أن قرود الجييون في الحديقة سوف تنتج العدد n من النسل ويريدون معرفة احتمال عدم وجود ذكور ضمن النسل. ويستطيع عالم الأحياء استخدام حد من التعبير ذي الحدين $(0.8 + 0.2)^n$ لحل هذه المسألة.

المفردات الجديدة

معاملات ذات الحدين
binomial coefficients

مثلت باسكال

Pascal's triangle

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

1 مثلث باسکال

1 مثلث باسكال تذكر أن ذا الحدين هو تعبير جبري يتضمن مجموع حدين غير متشابهين. يتم إنتاج متسلسلة هامة من خلال تفكيك ذي حدين ثم رفعه لقوة أسية من عدد صحيح. افحص هذه السلسلة الناتجة عن تفكيك $(a + b)^n$ للعديد من القيم الصحيحة غير السالبة لـ n .

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1a^0b^0 \\(a+b)^1 &= 1a^1b^0 + 1a^0b^1 \\(a+b)^2 &= 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\(a+b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 \\(a+b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\(a+b)^5 &= 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5\end{aligned}$$

لاحظ الأنماط التالية في تفكيكات $(a + b)^n$ أعلاه.

- في كل تفكيك $n + 1$ حد.
- الحد الأول هو a^n ، والحد الأخير هو b^n .
- في الحدود المتتالية، يتناقص أس a بمقدار 1، ويزداد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسس في كل حد هو n .
- المعاملات - الموضحة أعلاه باللون الأحمر - تتزايد ثم تتناقص وفق نمط

إذا استخرجت معاملات عمليات التفكير هذه - والتي تعرف باسم **معاملات ذات الحدين**، وتم ترتيبها وفق مصفوفة مثلثية الشكل، فستُشكّل نموذجاً يدعى **مثلث باسكال**، والذي سمي هكذا على اسم عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال. يطلق على الصف العلوي في هذا المثلث اسم الصف الصفري لأنه يتوافق مع تفكيك تعبير ذات الحدين $(a + b)^0$.

الصف الصفري

1

الصف الأول

1 1

الصف الثاني

1 2 1

الصف الثالث

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

لاحظ أن الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف هي 1، ويتشكل كل عدد آخر عن طريق إضافة العددين الموجودين مباشرة فوق هذا العدد في الصف السابق. يمكن تمديد مثلث باسكال إلى ما لا نهاية باستخدام العلاقة التكرارية لدرجة أنه يمكن استخدام المعامل في الصف ذو الترتيب $(n - 1)$ لتحديد المعامل في الصف ذي الترتيب n .



من خلال تفكيك مثلث باسكال واستخدام الأنماط التي لوحظت في عمليات التفكيك الخمس الأولى لـ $(a + b)^n$. يمكنك تفكيك ذات حدّين مرفوعة إلى أي قوة أسية قوامها عدد كلي.

مثال 1 قوة مجموع ذات الحدين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

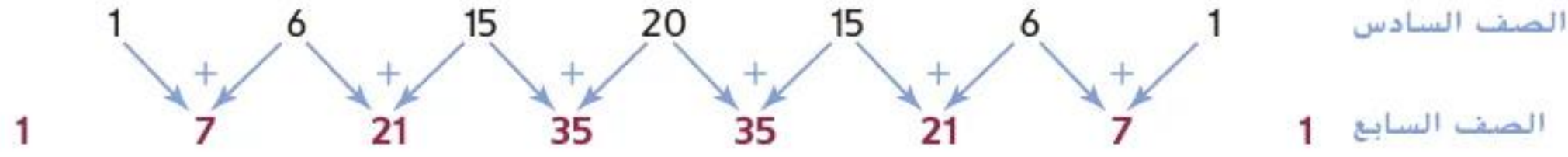
a. $(a + b)^7$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a + b)^7$ واحذف المعاملات. لأن القوة تساوي 7، يجب أن تحتوي هذه المتسلسلة على $1 + 7$ أو 8 حدود. استخدم نمط تزايد الأسس أو تناقصها لاستكمال المتسلسلة.

أسس a تتناقص من 7 إلى 0. أسس b تتزايد من 0 إلى 7.

$$a^7b^0 + a^6b^1 + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + a^1b^6 + a^0b^7$$

الخطوة 2 استخدم الأعداد في الصف السابع من مثلث باسكال كمعاملات للحدود. لإيجاد هذه الأعداد، وسّع مثلث باسكال إلى الصف السابع.



$$(a + b)^7 = 1a^7b^0 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + 1a^0b^7$$

$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

بسّط

b. $(3x + 2)^4$

الخطوة 1 اكتب متسلسلة $(a + b)^4$ واحذف المعاملات وعوّض a بـ $3x$ و b بـ 2. تحتوي هذه المتسلسلة على $1 + 4$ أو 5 حدود.

أسس $3x$ تتناقص من 4 إلى 0. أسس 2 تتزايد من 0 إلى 4.

$$(3x)^4(2)^0 + (3x)^3(2)^1 + (3x)^2(2)^2 + (3x)^1(2)^3 + (3x)^0(2)^4$$

الخطوة 2 الأعداد في الصف الرابع من مثلث باسكال هي 1 و 4 و 6 و 4 و 1. استخدم هذه الأعداد كمعاملات لحدود المتسلسلة، ثم بسّط.

$$(3x + 2)^4 = 1(3x)^4(2)^0 + 4(3x)^3(2)^1 + 6(3x)^2(2)^2 + 4(3x)^1(2)^3 + 1(3x)^0(2)^4$$

$$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$

تمرين موجّه

1A. $(a + b)^8$

1B. $(2x + 3y)^5$

لتفكيك طرح ذات حدّين، أعد كتابة التعبير في صورة مجموع ذات حدّين.

مثال 2 قوة طرح ذي الحدين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك $(x - 4y)^5$.

لأن $(x - 4y)^5 = [x + (-4y)]^5$ ، اكتب متسلسلة لـ $(a + b)^5$ مع التعويض عن a باستخدام x وعن b باستخدام $-4y$. استخدم أعداد الصف الخامس من مثلث باسكال، 1 و 5 و 10 و 10 و 5 و 1 كمعاملات ذات الحدين. ثم بسّط.

$$(x - 4y)^5 = 1x^5(-4y)^0 + 5x^4(-4y)^1 + 10x^3(-4y)^2 + 10x^2(-4y)^3 + 5x^1(-4y)^4 + 1x^0(-4y)^5$$

$$= x^5 - 20x^4y + 160x^3y^2 - 640x^2y^3 + 1280xy^4 - 1024y^5$$

تمرين موجّه

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

2A. $(2x - 7)^3$

2B. $(2x - 3y)^4$

نصيحة دراسية

إيجاد الصف الصحيح دائمًا ما يكون العدد الثاني في أي صف من مثلث باسكال هو ذاته القوة لذات الحدين. على سبيل المثال، العدد الثاني في الصف السابع من مثلث باسكال هو 7.

نصيحة دراسية

تبدل العلامات لاحظ أنه عند تفكيك قوة أسية لطرح ذات حدّين، تبدل علامات حدود المتسلسلة.

2 نظرية ذات الحدين بينما من الممكن تفكيك أي ذات حدين باستخدام مثلث باسكال، تؤدي الطريقة التكرارية لحساب معاملات ذات الحدين إلى جعل تفكيكات $(a + b)^n$ للقيم الكبيرة n مستهلكة للوقت. وقد تم وضع صيغة واضحة لحساب كل معامل من معاملات ذات الحدين من خلال النظر إلى $(a + b)^n$ باعتباره ناتج ضرب عوامل n التي يساهم فيها كل عامل بالرمز a أو b في كل ناتج ضرب في عملية التفكيك.

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ عوامل}} = \dots + \underbrace{a^n - r b^r}_{\text{إذا كان هناك عدد } r \text{ من الحرف } b, \text{ فإن هناك العدد } (n - r) \text{ من الحرف } a.} + \dots$$

فكر في $(a + b)^3$. هناك ثلاث طرق لاختيار a و $2b$ من كل عامل من العوامل الثلاثة لتكوين ناتج الضرب ab^2 . و 3 هو معامل ذات الحدين للحد ab^2 في التعبير.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\left. \begin{aligned} (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \\ (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \\ (a + b)(a + b)(a + b) &= \dots + ab^2 + \dots \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{3 طرق}}$$

لأن العوامل التي لا تساهم بحرف b سوف تساهم افتراضياً بحرف a ، فيمكن ببساطة النظر إلى عدد طرق تكوين ناتج الضرب $a^n - r b^r$ باعتباره عدد طرق اختيار عوامل r التي تساهم بحرف b في ناتج الضرب من بين عوامل n المتوفرة. هذا هو التوفيق المحدد بالعلاقة $n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$. ويكتب كذلك بالصورة $\binom{n}{r}$.

قراءة في الرياضيات

التوافيق الرمز $n C_r$ و $\binom{n}{r}$ يمكن قراءتها على أنها توفيق أشياء عددها n يؤخذ منها r في كل مرة. لمراجعة توافيق الحسابات.

المفهوم الأساسي صيغة معاملات ذات الحدين $(a + b)^n$

الشرح معامل ذات الحدين للحد $a^n - r b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ محدد بالعلاقة $n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$.

مثال

$$(a + b)^3 = {}_3C_0 a^3 b^0 + {}_3C_1 a^2 b^1 + {}_3C_2 a^1 b^2 + {}_3C_3 a^0 b^3$$

$$= \frac{3!}{(3-0)! 0!} a^3 + \frac{3!}{(3-1)! 1!} a^2 b + \frac{3!}{(3-2)! 2!} a b^2 + \frac{3!}{(3-3)! 3!} b^3$$

$$= 1a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + 1b^3$$

في المثال أعلاه، لاحظ أنه بالنسبة إلى الحد الأول $r = 0$ ، وبالنسبة إلى الحد الثاني $r = 1$ ، وبالنسبة إلى الحد الثالث $r = 2$ ، وهكذا. بشكل عام، لإيجاد معامل ذات الحدين للحد رقم k في تعبير بالصورة $(a + b)^n$ ، استخدم الصيغة $n C_r$ وافترض أن $r = k - 1$.

مثال 3 إيجاد معاملات ذات الحدين

جد معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$.

لإيجاد معامل الحد الخامس، جد قيمة $n C_r$ حيث $n = 7$ و $r = 5 - 1$ أو 4 .

$${}_7C_4 = \frac{7!}{(7-4)! 4!} = \frac{7!}{3! 4!}$$

أعد كتابة $7!$ بالصورة $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ واختصر المضروببات المشتركة.

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 35$$

بسط.

معامل الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو 53.

التحقق من المثال $1a$. تعلم أن الحد الخامس في تفكيك $(a + b)^7$ هو ${}^4b^3a53$. ✓

تمرين موجّه

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

3A. $(x + y)^9$. الحد السادس **3B.** $(a - b)^{13}$. الحد الثالث

مثال 4 معاملات ذات الحدين بخلاف 1

جد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x - 3y)^9$.

من أجل أن تكون $(4x - 3y)^9$ بالصورة $(a + b)^n$ ، افترض أن $a = 4x$ و $b = -3y$. معامل الحد الذي يحتوي على $a^n - r b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ محدد بالعلاقة nC_r . إذا، لإيجاد معامل ذات الحدين للحد الذي يحتوي على a^7b^2 في تفكيك $(a + b)^9$ ، جد قيمة nC_r حيث $n = 9$ و $r = 2$.

$$\begin{aligned} {}_9C_2 &= \frac{9!}{(9-2)!2!} & {}_nC_r &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{9!}{7!2!} & \text{اطرح.} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{7! \cdot 2!} & \text{أعد كتابة 9! بالصورة 9 \cdot 8 \cdot 7! واختصر المضروبوات المشتركة.} \\ &= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 & \text{بسط.} \end{aligned}$$

إذا، معامل ذات الحدين للحد a^7b^2 في $(a + b)^9$ هو 36. ضع $4x$ مكان a وضع $-3y$ مكان b لإيجاد معامل الحد x^7y^2 في تفكيك ذات الحدين الأصلية.

$$\begin{aligned} 36a^7b^2 &= 36(4x)^7(-3y)^2 & b = -3y \text{ و } a = 4x \\ &= 5,308,416x^7y^2 & \text{بسط.} \end{aligned}$$

إذا، معامل الحد x^7y^2 في تفكيك $(4x - 3y)^9$ هو 5,308,416.

تمرين موجّه

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك ذات حدين.

$$\text{4A. } (2x - 3y)^8 \text{ الحد } x^3y^5 \quad \text{4B. } (2p + 1)^{15} \text{ الحد الحادي عشر}$$

يمكنك استخدام معاملات تعابير ذات الحدين لحل مسائل من الحياة اليومية التي يكون فيها فقط مخرجات من حدث. والمسائل التي يمكن حلها باستخدام تفكيك ذات الحدين يُطلق عليها تجارب ذات حدين. وتوجد هذه التجارب فقط إذا كانت: (1) التجربة تتكون من عدد n من المحاولات المتطابقة و (2) كل محاولة ينتج عنها واحد من مخرجين و (3) المحاولات مستقلة.

بالنسبة إلى العدد n من المحاولات المستقلة لتجربة ما، إذا كانت احتمال النجاح p واحتمال الإخفاق $q = 1 - p$ ، فإن الحد $nC_x p^x q^{n-x}$ في التفكيك $(p + q)^n$ يعطي احتمال x من النجاحات في عدد n من المحاولات.

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام معاملات ذات الحدين

البيسبول احتمال تصدي ماجد لضربة في حالة استقبال الضربات هو $\frac{1}{5}$. فما احتمال تصدي ماجد لأربع ضربات خلال استقبال 10 ضربات تالية؟

النجاح في هذا الموقف هو تصدي ماجد لضربة. إذا $p = \frac{1}{5}$ و $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. كل استقبال يمثل محاولة. إذا $n = 10$. تريد إيجاد احتمال نجاح ماجد 4 مرات في 10 محاولات. إذا افترض أن $x = 4$. لإيجاد هذه الاحتمال. جد قيمة الحد $nC_x p^x q^{n-x}$ في تفكيك $(p + q)^n$.

$$\begin{aligned} {}_nC_x p^x q^{n-x} &= {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^{10-4} & p = \frac{1}{5} \text{ و } q = \frac{4}{5} \text{ و } n = 10 \text{ و } x = 4 \\ &= \frac{10!}{(10-4)!4!} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^6 & {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &\approx 0.088 & \text{استخدم الحاسبة.} \end{aligned}$$

إذا، احتمال تصدي ماجد لأربع ضربات خلال استقبال 10 ضربات تالية هي تقريبًا 0.088 أو 8.8%.

تمرين موجّه

5. **إلقاء قطع النقد المعدنية** تم إلقاء قطعة معدنية سليمة ومتوازنة 8 مرات. جد احتمال كل ناتج.

$$\text{A. 3 صور بالضبط} \quad \text{B. 6 أوجه كتابة بالضبط}$$

الربط بالحياة اليومية

استقبال الضربات هو أي وقت يواجه فيه لاعب المضرب رامي الكرة إلا عندما يقوم اللاعب بها يلي "أولاً" ضربة تضحية أو التضحية بإحراز هدف أو (ثانيًا) الفوز بالقاعدة الأولى في أربع كرات أو (ثالثًا) الاصطدام بكرة الرامي أو (رابعًا) الفوز بالقاعدة الأولى بسبب التدخل أو الاعتراض.

المصدر: Major League Baseball

صيغة إيجاد معاملات تفكيك ذات حدّين تقودنا إلى نظرية عن تفكيك القوى أو الأسس لذات الحدّين تُسمى **نظرية ذات الحدّين**.

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدّين

لأي عدد صحيح موجب n ، تفكيك $(b + a)^n$ يُعطى بالعلاقة

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_nC_n a^0 b^n,$$

حيث $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

ستثبت نظرية ذات الحدّين في التمرين 75.

تلميح تقني

التوافق لإيجاد قيمة ${}_{10}C_4$ باستخدام الحاسبة، أدخل 10 وحدد nCr من القائمة MATH ► PRB ثم أدخل 4.

مثال 6 تفكيك ذات حدّين باستخدام نظرية ذات الحدّين

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي.

a. $(3x - y)^4$

طبّق نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(a + b)^4$ ، حيث $a = 3x$ و $b = -y$.

$$\begin{aligned} (3x - y)^4 &= {}_4C_0 (3x)^4 (-y)^0 + {}_4C_1 (3x)^3 (-y)^1 + {}_4C_2 (3x)^2 (-y)^2 \\ &\quad + {}_4C_3 (3x)^1 (-y)^3 + {}_4C_4 (3x)^0 (-y)^4 \\ &= 1(81x^4)(1) + 4(27x^3)(-y) + 6(9x^2)(y^2) + 4(3x)(-y^3) + 1(1)(y^4) \\ &= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

b. $(2p + q^2)^5$

طبّق نظرية ذات الحدّين لتفكيك $(a + b)^5$ ، حيث $a = 2p$ و $b = q^2$.

$$\begin{aligned} (2p + q^2)^5 &= {}_5C_0 (2p)^5 (q^2)^0 + {}_5C_1 (2p)^4 (q^2)^1 + {}_5C_2 (2p)^3 (q^2)^2 + {}_5C_3 (2p)^2 (q^2)^3 + {}_5C_4 (2p)^1 (q^2)^4 \\ &\quad + {}_5C_5 (2p)^0 (q^2)^5 \\ &= 1(32p^5)(1) + 5(16p^4)(q^2) + 10(8p^3)(q^4) + 10(4p^2)(q^6) + 5(2p)(q^8) + 1(1)(q^{10}) \\ &= 32p^5 + 80p^4q^2 + 80p^3q^4 + 40p^2q^6 + 10pq^8 + q^{10} \end{aligned}$$

تمرين موجّه

6A. $(5m + 4)^3$

6B. $(8x^2 - 2y)^6$

لأن تفكيك ذات الحدّين هو مجموع، كثيرًا ما تتم كتابة نظرية ذات الحدّين باستخدام الرمز سيجما. بالإضافة إلى ذلك، الرمز ${}_nC_r$ يتم عادة استبداله بـ $\binom{n}{r}$.

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال 7 كتابة تفكيك ذات حدّين باستخدام الرمز سيجما

مثّل تفكيك $(5x - 7y)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما.

طبّق نظرية ذات الحدّين لتمثيل تفكيك $(a + b)^{20}$ باستخدام الرمز سيجما، حيث $a = 5x$ و $b = -7y$.

$$(5x - 7y)^{20} = \sum_{r=0}^{20} \binom{20}{r} (5x)^{20-r} (-7y)^r$$

تمرين موجّه

7. مثّل تفكيك $(3a + 12b)^{30}$ باستخدام الرمز سيجما.

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين.
(المثالان 1 و 2)

1. $(2 + x)^4$
2. $(n + m)^5$
3. $(4a - b)^3$
4. $(x + y)^6$
5. $(3x + 2y)^7$
6. $(n - 4)^6$
7. $(3c - d)^4$
8. $(m - a)^5$
9. $(a - b)^3$
10. $(3p - 2q)^4$

جد معامل الحد المشار إليه في كل مقدار.
(المثالان 3 و 4)

11. $(x - 2)^{10}$. الحد الخامس
12. $(4m + 1)^8$. الحد الثالث
13. $(x + 3y)^{10}$. الحد الثامن
14. $(2c - d)^{12}$. الحد السادس
15. $(a + b)^8$. الحد الرابع
16. $(2a + 3b)^{10}$. الحد الخامس
17. $(x - y)^9$. الحد السادس
18. $(x + y)^{12}$. الحد السابع
19. $(x + 2)^7$. الحد الرابع
20. $(a - 3)^8$. الحد الخامس
21. $(2a + 3b)^{10}$. الحد a^6b^4
22. $(2x + 3y)^9$. الحد x^6y^3
23. $(x + \frac{1}{3})^7$. الحد الرابع
24. $(x - \frac{1}{2})^{10}$. الحد السادس
25. $(x + 4y)^7$. الحد x^2y^5
26. $(3x + 5y)^{10}$. الحد x^6y^4

27. الاختبار يخضع علي لاختبار به قسم يحتوي على 16 من أسئلة صواب أم خطأ. (المثال 3)

- a. كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 12 إجابة "خطأ" صحيحة؟
- b. كم عدد مجموعات الإجابات المحتملة التي تحتوي بالضبط على 8 إجابة "صواب" صحيحة؟

28. الأعمال احتمال تحقيق مندوب مبيعات لصفقة بيع هي $\frac{1}{5}$ مندوب المبيعات لديه 12 موعدًا هذا الأسبوع. (المثال 5)

- a. جد احتمال عدم تحقيق مندوب المبيعات لأي صفقات هذا الأسبوع.
- b. ما احتمال تحقيق مندوب المبيعات 3 صفقات بالضبط هذا الأسبوع؟
- c. جد احتمال تحقيق مندوب المبيعات 10 صفقات هذا الأسبوع.

29. الأحياء ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن العاملين بحديقة الحيوان يتوقعون ولادة 30 من نسل الجييون هذا العام. (المثال 5)

- a. ما احتمال عدم وجود ذكور ضمن نسل الجييون هذا العام؟
- b. جد احتمال وجود ذكرين بالضبط ضمن نسل الجييون هذا العام.
- c. ما احتمال عدم وجود 23 من الإناث ضمن نسل الجييون هذا العام؟

30. البولينيغ نحرز سالي متوسط ضربتين في كل 10 إطارات. فما احتمال إحراز سالي 4 ضربات بالضبط في الإطارات العشرة التالية؟ (مثال 5)

لوحة نقاط صالة البولينيغ

الإجمالي	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	سالي
165	165	156	137	130	113	86	66	48	39	20	
الإجمالي	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين.
(مثال 6)

31. $(4t + 3)^5$
32. $(8 - 5y)^3$
33. $(2m - n)^6$
34. $(9h + 2j)^4$
35. $(3p + q)^7$
36. $(a^2 - 2b)^8$
37. $(7c^2 + 3d)^5$
38. $(2w - 4x^3)^7$

مثّل تفكيك كل تعبير باستخدام الرمز سيجهما.
(مثال 7)

39. $(2q + 3)^{15}$
40. $(m - 8n)^{25}$
41. $(11x + y)^{31}$
42. $(4a + 7b)^{19}$
43. $(3f - \frac{3}{4}g)^{22}$
44. $(\frac{1}{2}s - 5t)^{36}$

45. ألعاب الكمبيوتر في لعبة كمبيوتر. عند فتح صندوق كنز. يتم العثور على قطع ذهبية أو أحجار. واحتمال وجود قطع ذهبية هي $\frac{5}{6}$.

- a. يتم فتح صندوق الكنز 15 مرة في كل لعبة. في لعبة. بكم طريقة يمكن فتح الصندوق والعثور على قطع ذهبية 9 مرات بالضبط؟
- b. ما احتمال العثور ل لاعب على قطع ذهبية أكثر من 12 مرة؟

46. التواصل المجتمعي في مأوى تقديم أغذية. يتم استقبال الأغذية المعلبة وتوزيعها على المحتاجين في المجتمع. يتحقق متطوعون من جودة الطعام قبل توزيعه. واحتمال توزيع غذاء معلب على المحتاجين بعد استلامه في بنك الطعام هي $\frac{4}{5}$.

- a. يتحقق كل متطوع من جودة 30 علبة أغذية كل ساعة. في ساعة واحدة. بكم طريقة يمكن التحقق من جودة غذاء معلب والتبرع به 23 مرة بالضبط؟
- b. ما احتمال أن يقوم متطوع يتحقق من جودة المعلبات بالتخلص منها أقل من 4 مرات؟

استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك وتبسيط كل تعبير مما يلي.

47. $(2d + \sqrt{5})^4$
48. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^5$
49. $(4s + \frac{1}{2}t)^5$
50. $(\frac{1}{y} - 3z)^6$

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

51. $(k - \sqrt{5})^9$. الحد الخامس

52. $(\sqrt{2} + 2c)^{10}$. الحد الأوسط

53. $(\frac{1}{4}p + q)^{11}$. الحد السابع

54. $(\sqrt{h} - 3\sqrt{j})^{11}$. الحد السادس

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك وتبسيط كل قوة لعدد مركب.

55. $(i + 2)^4$

56. $(i - 3)^3$

57. $(1 - 4i)^5$

58. $(2 + \sqrt{7}i)^4$

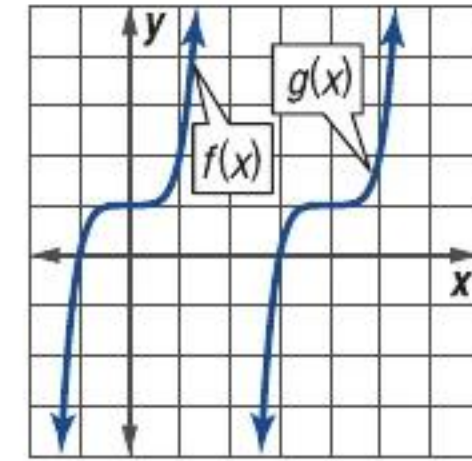
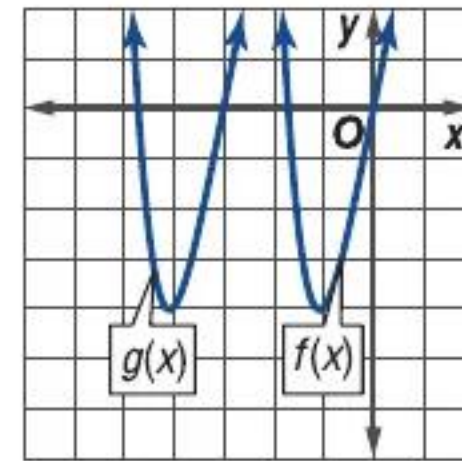
59. $(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{1}{2})^3$

60. $(\sqrt{-16}i + 3)^5$

التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x)$. استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد الدالة كثيرة الحدود لـ $g(x)$ بالصورة القياسية.

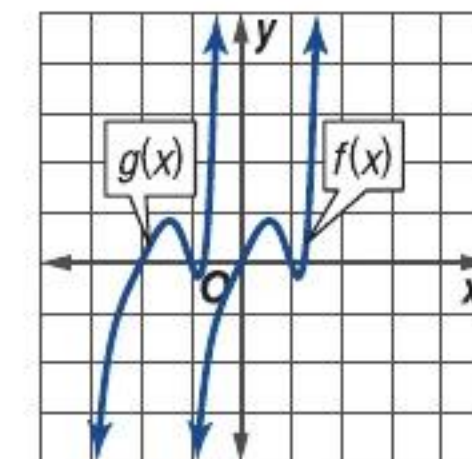
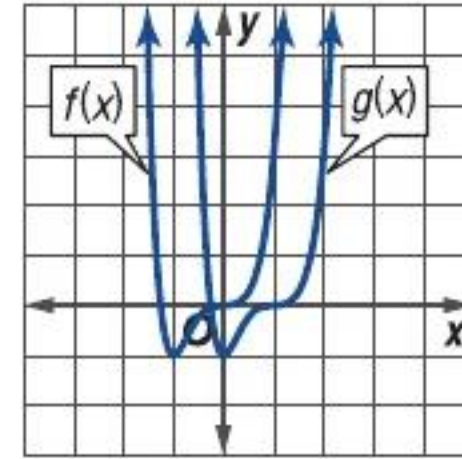
61. $f(x) = x^4 + 5x$
 $g(x) = f(x + 3)$

62. $f(x) = x^5 + 1$
 $g(x) = f(x - 4)$



63. $f(x) = x^6 + 2x^3$
 $g(x) = f(x - 1)$

64. $f(x) = x^7 - 3x^4 + 2x$
 $g(x) = f(x + 2)$



65. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستخدم نظرية ذات الحدين لاستكشاف ناتج قسمة فرق $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ لدوال القوة.

a. تحليليًا استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك وتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x) = x^3, f(x) = x^4, f(x) = x^5, f(x) = x^6$.
 $f(x) = x^7$. استخدم النمط لتبسيط ناتج قسمة فرق $f(x) = x^n$.

b. جدوليًا جد قيمة كل تعبير في الجزء a حيث $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ وسجل النتائج في جدول. ماذا تلاحظ؟

c. بيانيًا مثل بيانيًا مجموعة الدوال الناتجة من الجزء b حيث $f(x) = x^3$ على المستوى الإحداثي ذاته. ماذا تلاحظ؟

d. تحليليًا بينما تقترب h من 0. اكتب تعبير ناتج قسمة فرق $f(x) = x^n$. حيث n عدد صحيح موجب.

66. في تفكيك $(ax + b)^5$ المعامل العددي للحد الثاني هو 400 والمعامل العددي للحد الثالث هو 2000. جد قيمتي a و b .

67. البحث بالرغم من أن مثلث باسكال يُنسب إلى بليز باسكال، لكن قام غيره من علماء الرياضيات بتطبيق معرفتهم بالمثلثات قبل باسكال بمئات الأعوام. استخدم الإنترنت أو غيره من المصادر للبحث على الأقل عن شخص واحد استخدم خواص المثلثات قبل مولد باسكال. ثم صف الأنشطة الأخرى الموجودة في مثلث باسكال وليست مذكورة في هذا الدرس.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. تحليل الخطأ تحاول هناء وليلى إيجاد الحد السادس من تفكيك $(x + y)^{14}$. تقول هناء إن معامل الحد هو 3003. وتعتقد ليلى أنه 2002. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

69. التحدي صف إستراتيجية تُستخدم فيها نظرية ذات الحدين لتفكيك $(x + y + z)^n$. ثم اكتب وبسط تفكيك التعبير.

70. البرهان مجاميع المعاملات في الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال موضحة أدناه.

${}^0_2 =$	1	الصف 0
${}^1_2 =$	$1 + 1$	الصف 1
${}^2_2 =$	$1 + 2 + 1$	الصف 2
${}^3_2 =$	$1 + 3 + 3 + 1$	الصف 3
${}^4_2 =$	$1 + 4 + 6 + 4 + 1$	الصف 4
${}^5_2 =$	$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$	الصف 5

أثبت أن مجموع المعاملات في الصف رقم n من مثلث باسكال هو 2^n . (تلميح: اكتب 2^n بالصورة $(1 + 1)^n$. ثم استخدم نظرية ذات الحدين للتفكيك.)

71. الكتابة في الرياضيات صف كيفية إيجاد الأعداد في كل صف من مثلث باسكال. ثم اكتب بعض الجمل لوصف وجه الاختلاف بين تفكيك $(a + b)^n$ و $(a - b)^n$ وبين تفكيك $(a + b)^{n-1}$.

72. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

في حالة رفع ذات حدين إلى القوة 5، يكون للحدين الأوسطين من التفكيك المعاملات ذاتها.

73. التحدي اشرح كيفية إيجاد حد في تفكيك $(\frac{1}{2v} + 6v^7)^8$ بحيث لا يحتوي على المتغير v . ثم جد الحد.

74. البرهان استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات نظرية ذات الحدين.

مراجعة شاملة

برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n أو جد مثلاً مضاداً. (الدرس 3-4)

75. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ 76. $10^{2n-1} + 1$ تقبل القسمة على العدد 11.

77. علم الأنساب في كتاب الجذور، تتبع المؤلف تاريخ عائلة لعدة أجيال. إذا كان بإمكانك تتبع تاريخ عائلتك بمقدار 15 جيلاً، ابتداءً من والدك، فكم عدد من ستجد من أسلافك؟ (الدرس 3-3)

اكتب كل معادلة بالصورة القياسية، وحدد القطع المخروطي المرتبط.

78. $x^2 + y^2 - 16x + 10y + 64 = 0$ 79. $y^2 + 16x - 10y + 57 = 0$ 80. $x^2 + y^2 + 2x + 24y + 141 = 0$

الرصيد (AED)	الزمن المنتضي (أعوام)
30.00	0
41.10	5
56.31	10
77.16	15
105.71	20
144.83	25
198.43	30

81. **المبذخرات** أودع والد أمانى 30 AED في حساب بنكي لها. ثم نسيا أمر المال ولم يقوموا بعمليات إيداع أو سحب. ويوضح الجدول رصيد الحساب لعدة أعوام.

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. جد دالة أسية لتمثيل للبيانات.

c. استخدم الدالة لتوقع رصيد الحساب خلال 41 عامًا.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

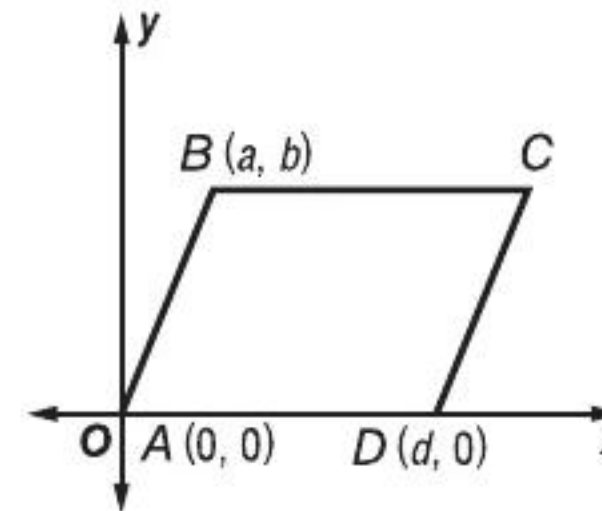
84. تقدم المعلمة ميسون اختباراً قصيراً من أربعة أسئلة للاختيار من متعدد. ويمكن الإجابة عن كل سؤال باختيار A أو B أو C أو D. بكم طريقة يمكن لطالب الإجابة عن الأسئلة باستخدام كل إجابة A أو B أو C أو D مرة واحدة؟

- A 20 C 24
B 22 D 26

85. **مراجعة** أي تعبير يكافئ $(2x - 2)^4$ ؟

- F $16x^4 + 64x^3 - 96x^2 - 64x + 16$
G $16x^4 - 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$
H $16x^4 - 64x^3 + 96x^2 - 64x + 16$
J $16x^4 + 32x^3 - 192x^2 - 64x + 16$

82. SAT/ACT في الشكل أدناه، $ABCD$ هو متوازي أضلاع. ما إحداثيات النقطة C؟



- A $(d + a, y)$
B $(d - a, b)$
C $(d + x, b)$
D $(d + a, b)$
E $(d + b, a)$

83. **مراجعة** ما قيمة $\frac{12}{8!4}$ ؟

- F 495 H 660
G 500 J 710

الاستقراء الرياضي

3-5 الدرس

لماذا؟

الحالي

السابق



يرسم عمر نقاطاً على دائرة ويربط كل زوج من النقاط بوتر، فيقسم الدائرة إلى مناطق. بعد رسم دوائر فيها 2 و 3 و 4 نقاط، يخمن عمر أنه عندما يكون هناك n على محيط دائرة، فإن توصيل كل زوج من النقاط سيقسم الدائرة إلى مناطق عددها 2^{n-1} . في حين قد يبدو تخمينه صحيحاً عندما $n = 2$ و 3 و 4، ولكن هل هذه الأمثلة الثلاثة كافية لإثبات صحة تخمينه؟

1 استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة صيغ الجمع وخصائص الأعداد القابلة للقسمة وتشتمل على عدد صحيح موجب n .

لقد وجدت الحد التالي في متتالية أو متسلسلة.

1 **الاستقراء الرياضي** عند البحث عن الأنماط وإيجاد التخمينات، يغلب علينا افتراض أنه إذا كان التخمين صحيحاً في عدة حالات، فإنه سيكون صحيحاً لجميع الحالات. في الحالة المذكورة أعلاه، قد يقتنع عمر أن افتراضه صحيح عندما يرى أنه ينطبق على $n = 5$ لأن 5 نقاط مترابطة تكوّن 16 أو 2^4 منطقة. لكن "البرهان بالمثال" ليس طريقة صحيحة منطقياً، لأنه لم يبين أن الافتراض صحيح بالنسبة لجميع الحالات. ويمكنك في الحقيقة أن ترى أن تخمين عمر فشل عندما كانت $n = 6$.

في حين أن المثال المضاد هو كل ما يلزمك لبرهنة خطأ التخمينات الرياضية، فإن برهنة صحة التخمين تتطلب طريقة ممنهجة أكثر. وتستخدم مثل تلك الطريقة **مبدأ الاستقراء الرياضي**، فالفكرة الأساسية من مبدأ الاستقراء الرياضي أنه يمكنك برهنة صحة التخمين إذا كان يمكنك فعل ما يلي:

1. توضيح أن هناك شيئاً ينطبق على الحالة الأولى (الأساس أو **خطوة المراكز**)، و
2. افتراض أن الطريقة تنطبق على أي حالة معينة (**فرضية الاستقراء**)، و
3. توضيح أن الطريقة تنطبق على الحالة التالية (**خطوة استقرائية**).

هذا المبدأ، الموضح بطريقة أكثر منهجية أدناه، أداة قوية في برهنة العديد من التخمينات عن الأعداد الصحيحة الموجبة.

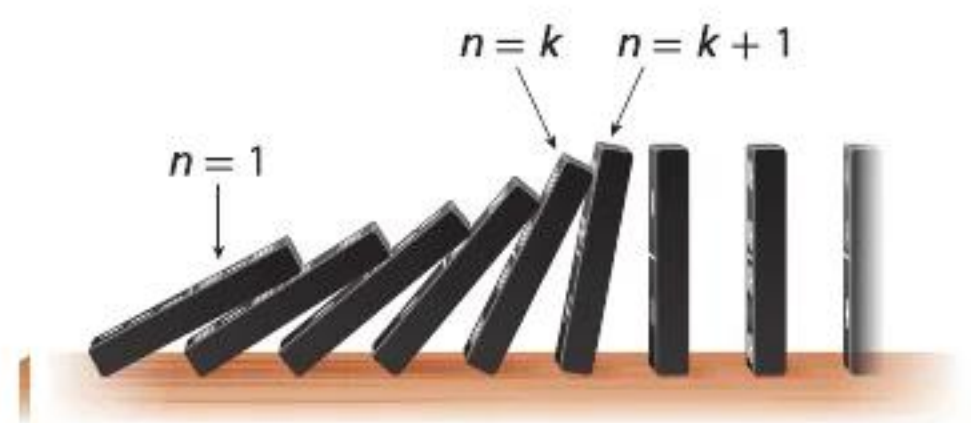
المفهوم الأساسي مبدأ الاستقراء الرياضي

إذا كانت P_n تمثل عبارة عن عدد صحيح n ، فإن P_n صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا كان، فقط إذا كان،

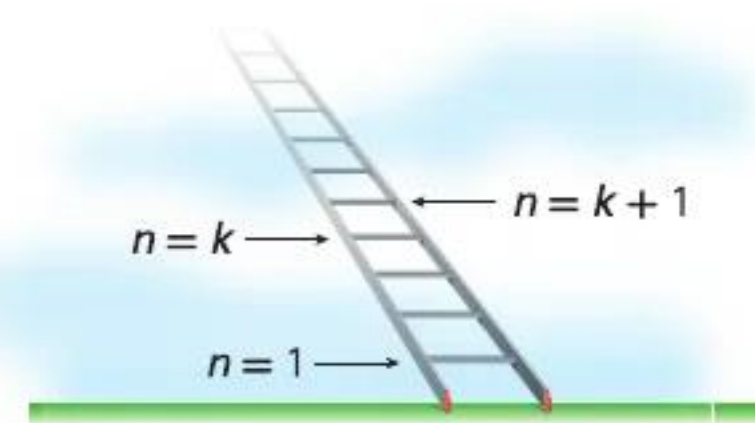
- P_1 صحيح، و
- لكل عدد صحيح موجب k ، إذا كان P_k صحيحاً، فإن P_{k+1} صحيح.

لتفهم السبب وراء تطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي، تخيل أن هناك سلماً من عدد لا نهائي من الدرجات (الشكل 10.1.1). إذا صعدت السلم (خطوة المراكز) ثم انتقلت من درجة إلى التالية (فرضية الاستقراء والخطوة)، فسيمكنك أن تصعد السلم بأكمله. وبالمثل، تخيل أن هناك خطاً لا نهائياً من قطع الدومينو (الشكل 10.1.2) المرتبة بحيث إذا سقطت أي قطعة k .

تسقط قطعة $(k+1)$ أيضاً (فرضية الاستقراء والخطوة). وعندما تدفع أول قطعة دومينو (خطوة المراكز)، فستبدأ سلسلة تفاعلات تُسقط خط قطع الدومينو كله.



الشكل 10.1.2



الشكل 10.1.1

المفردات الجديدة

مبدأ الاستقراء الرياضي

principle of mathematical induction

خطوة المراكز anchor step

فرضية الاستقراء inductive hypothesis

خطوة الاستقرائية inductive step

المبدأ الممتد للاستقراء الرياضي extended principle of mathematical induction

اتبع الخطوات التالية لتطبيق مبدأ الاستقراء الرياضي.

- الخطوة 1** تحقق من أن التخمين P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$. (خطوة المرنكز)
- الخطوة 2** افترض أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k$. (فرضية الاستقراء)
- الخطوة 3** استخدم هذا الافتراض في برهنة أن P_n صحيح أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$. (خطوة استقرائية)

مثال 1 برهنة صيغة الجمع

استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي $n^2 + n$. وبهذا، فإن برهنة أن $n^2 + n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

الافتراض على فرض أن P_n هي عبارة أن $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$.

خطوة المرنكز تحقق من أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

العبارة الأصلية P_n : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$

P_1 : $2 = 1^2 + 1$ P_n لـ $n = 1$. المجموع الجزئي الأول

بما أن $2 = 1^2 + 1$ عبارة صحيحة، فإن P_n صحيح لـ $n = 1$.

فرضية الاستقراء افترض أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k$.

لكتابة فرضية الاستقراء، عوّض عن n بـ k في P_n . وإذا كانت كذلك، فإن افتراض P_k : $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k^2 + k$ صحيح.

الخطوة الاستقرائية استخدم فرضية الاستقراء في برهنة أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k + 1$.

لبرهنة أن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k + 1$ ، ينبغي أن نبين أن P_{k+1} يجب أن يكون صحيحًا. ابدأ بفرضية الاستقراء ثم أضف الحد $(k + 1)$ لكل طرف.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k^2 + k$$

فرضية الاستقراء

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2(k + 1)$$

أضف الحد $(k + 1)$ إلى كل طرف.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k^2 + k + 2k + 2$$

بسّط الطرف الأيمن.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k^2 + 2k + 1) + (k + 1)$$

أعد كتابة 2 بالشكل $1 + 1$ ، ثم اجمع.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1)$$

العامل $k^2 + 2k + 1$

العبارة الأخيرة هي نفسها العبارة P_{k+1} . إذا P_{k+1} صحيحة، ويتبع ذلك أنه إذا كانت P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = k$ ، فإن P_n صحيحة أيضًا بالنسبة لـ $n = k + 1$.

الاستقراء بما أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$ و P_k ينطوي على أن P_{k+1} ، فإن P_n صحيحة بالنسبة لـ $n = 2, n = 3, n = 4, \dots$ وهكذا. إذا كانت كذلك، فبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، P_n : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$ صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تمرين موجّه

- استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأولى n يساوي n^2 . وإذا كان كذلك، فبرهن أن $(2n - 1) + 1 + 3 + 5 + \dots$ صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

نصيحة دراسية

تمثيل الحد التالي لتحديد الحد $(k + 1)$. عوّض بالكمية $k + 1$ عن k في التعبير الخاص بالصيغة العامة للحد التالي في المتسلسلة. في المثال 1، بما أن $2k$ تمثل الحد k ، فإن $2(k + 1)$ تمثل الحد $(k + 1)$.

انتبه!

استخدام فرضية الاستقراء لبيان أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = k + 1$. فإنك لن تعوّض بـ $k + 1$ عن n في كلا طرفي المعادلة P_n . حيث لن يعطيك ذلك شيئًا لتبرهن عليه. لإكمال الخطوة الاستقرائية، يجب أن نستخدم فرضية الاستقراء.

يمكن استخدام الاستقراء الرياضي في برهنة القابلية للقسمة. تذكر أن العدد الصحيح p يقبل القسمة على عدد صحيح q إذا كان $p = qr$ لبعض الأعداد الصحيحة r .

مثال 2 برهنة قابلية القسمة

برهن أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

التخمين وخطوة المراكز على فرض أن P_n هي عبارة أن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2. P_1 هي عبارة أن $3^1 - 1$ يقبل القسمة على 2. P_1 صحيحة لأن $3^1 - 1$ يساوي 2، التي تقبل القسمة على 2.

فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية افترض أن $3^k - 1$ يقبل القسمة على 2. إذا كانت كذلك، فافترض أن $3^k - 1 = 2r$ لبعض الأعداد الصحيحة r . استخدم هذا الافتراض لبيان أن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.

$$3^k - 1 = 2r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$3^k = 2r + 1 \quad \text{اجمع 1 إلى كل طرف.}$$

$$3 \cdot 3^k = 3(2r + 1) \quad \text{اضرب كل طرف في 3.}$$

$$3^{k+1} = 6r + 3 \quad \text{بسّط.}$$

$$3^{k+1} - 1 = 6r + 2 \quad \text{اطرح 1 من كل طرف.}$$

$$3^{k+1} - 1 = 2(3r + 1) \quad \text{العامل.}$$

بما أن r عدد صحيح، فإن $3r + 1$ عدد صحيح و $2(3r + 1)$ يقبل القسمة على 2. وبهذا، فإن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2.

الاستقراء بما أن P_n صحيح بالنسبة لـ $n = 1$ و P_k تنطوي على أن P_{k+1} صحيح بالنسبة لـ $n = 2$ و $n = 3$ وهكذا. وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تمرين موجّه

2. برهن أن $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لجميع الأعداد الصحيحة n .

نصيحة دراسية

الخطوة الاستقرائية ليست هناك طريقة "ثابتة" لإكمال الخطوة الاستقرائية للبرهنة على الاستقراء الرياضي. فلكل مسألة خصائصها المميزة التي تتطلب أسلوبًا مختلفًا في إكمال البرهان.

يمكنك أيضًا برهنة عبارات عدم التساوي مستخدمًا الاستقراء الرياضي.

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

21. $(xy)^n = x^n y^n$

22. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

23. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

24. $\cos n\pi = (-1)^n$

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . (المثال 1)

1. $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$

2. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

3. $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$

4. $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

5. $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

6. $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

7. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

10. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

برهن أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n . (المثال 2)

11. $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

12. $6^n + 4$ يقبل القسمة على 5.

13. $2^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 7.

14. $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3.

برهن أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n أو جد مثالاً مضاداً

15. $1 + 6 + 11 + \dots + (5n - 4) = n(2n - 1)$

16. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n + 2)} = \frac{n}{2(2n + 2)}$

17. $n^2 - n + 5$ عدد أولي.

18. $3^n + 4n + 1$ يقبل القسمة على 4.

19. $4^n + 6n - 1$ يقبل القسمة على 9.

20. $2^{2n} + 1 + 3^{2n} + 1$ يقبل القسمة على 5.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة درس بدرس

المفاهيم الأساسية

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدرس 3-1 و 3-2)

- الحد النوني في a_n من المتتالية الحسابية ذات الحد الأول a_1 والفرق المشترك d يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 + (n - 1)d$. حيث يشير n إلى أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متسلسلة حسابية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدرس 3-3)

- الحد النوني a_n من المتتالية الهندسية ذات الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 \times r^{n-1}$. حيث يكون n هو أي عدد صحيح موجب.
- المجموع S_n للحدود n الأولى في متتالية هندسية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$. حيث يكون $r \neq 1$.
- المجموع S لمتسلسلة هندسية لانهاية ذات $-1 < r < 1$ يتم الحصول عليه بواسطة $S = \frac{a_1}{1 - r}$.

نظرية ذات الحدين (الدرس 3-4)

- يمكن تفكيك التعبير $(a + b)^n$ باستخدام الصف رقم n من مثلث باسكال لتحديد معاملات كل حد.
- معامل ذات الحدين للحد $a^n - r b^r$ في تفكيك $(a + b)^n$ موضع بالعلاقة ${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)! r!}$.

الاستقراء الرياضي (الدرس 3-5)

- إذا كانت P_n عبارة بشأن عدد صحيح موجب n ، فإن P_n صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n إذا وفقط إذا كانت P_1 صحيحة، ولكل عدد صحيح موجب k ، إذا كانت P_k صحيحة، فإن P_{k+1} صحيحة.

المفردات الأساسية

فرضية الاستقراء induction hypothesis	أوساط حسابية arithmetic means
متتالية لا نهائية infinite sequence	متتالية حسابية arithmetic sequence
الاستقراء الرياضي mathematical induction	متسلسلة حسابية arithmetic series
المجموع الجزئي partial sum	فرق مشترك common difference
متتالية sequence	نسبة مشتركة common ratio
متسلسلة series	متتالية منتهية finite sequence
الرمز سيجهما sigma notation	أوساط هندسية geometric means
حد term	متتالية هندسية geometric sequence
متسلسلة أسية exponential series	متسلسلة هندسية geometric series
فرضية الاستقراء inductive hypothesis	خطوة المرتكز anchor step
خطوة استقرائية inductive step	معاملات ذات الحدين binomial coefficients
متسلسلة قوة power series	نظرية ذات الحدين Binomial Theorem
	صيغة أويلر Euler's Formula

مراجعة المفردات

- اذكر ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لتصحيح الجملة.
- إن الأوساط الحسابية لمتتالية هي الحدود الموجودة بين حدين غير متتابعين لمتتالية حسابية.
- الحد هو قائمة من الأعداد بترتيب معين.
- مجموع الحدود n الأولى لمتسلسلة يسمى المجموع الجزئي.
- المتتالية الهندسية هي متتالية يتحدد كل حد فيها من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق.
- أحد عشر و 17 هما وسطان هندسيان للعددين 5 و 23 في المتتالية 5, 11, 17, 23.
- باستخدام نظرية ذات الحدين، $(x - 2)^4$ يمكن فكه إلى $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.
- في الاستقراء الرياضي، افترض أن أحد التخمينات صحيح لأي حالة خاصة يُسمى فرضية الاستقراء.
- خطوة إثبات أن أحد الأشياء يصلح للحالة الأولى تُسمى الخطوة الاستقرائية في الاستقراء الرياضي.
- نظرية ذات الحدين هي متتالية متكررة تصف العديد من الأنماط الموجودة في الطبيعة.

المخطوطة منظم الدراسة



تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المخطوطة.

دليل الدراسة والمراجعة متابعة

مراجعة درس بدرس

3-1 المتتاليات كدوال

جد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

7. $a_1 = 9, d = 3, n = 14$
8. $a_1 = -3, d = 6, n = 22$
9. $a_1 = 10, d = -4, n = 9$
10. $a_1 = -1, d = -5, n = 18$

مثال 1

جد الحد الحادي عشر من متتالية حسابية إذا كان $a_1 = -15$ و $d = 6$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{صيغة للحد النوني}$$

$$a_{11} = -15 + (11 - 1)6 \quad n = 11, a_1 = -15, d = 6$$

$$a_{11} = 45 \quad \text{بسط.}$$

3-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

جد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

11. $-12, _, _, _, 8$
12. $15, _, _, 29$
13. $12, _, _, _, -8$
14. $72, _, _, _, 24$
15. **خدمات مصرفية** يدخر محمد AED 40 كل شهرين. فإذا كان يدخر بهذا المعدل لمدة عامين، فكم سيكون معه في نهاية العامين؟

جد S_n لكل متسلسلة حسابية.

16. $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$
17. $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$
18. $9 + 14 + 19 + \dots + 74$
19. $16 + 7 + -2 + \dots + -65$
20. **دراما** ستشارك ميسون في عرض درامي خلال 12 يومًا. وهي تخطط للتدرب على سطور دورها كل ليلة. وفي الليلة الأولى تتدرب على سطور دورها مرتين. وفي الليلة التالية تتدرب على سطور دورها 4 مرات. وفي الليلة الثالثة تتدرب على سطور دورها 6 مرات. ففي الليلة الحادية عشر، كم عدد المرات التي تكون فيها قد تدربت على سطور دورها؟

جد مجموع كل متسلسلة حسابية.

21. $\sum_{k=5}^{21} (3k - 2)$
22. $\sum_{k=0}^{10} (6k - 1)$
23. $\sum_{k=4}^{12} (-2k + 5)$

مثال 2

جد الوسطين الحسابيين بين 3 و 39.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{صيغة للحد النوني}$$

$$a_4 = 3 + (4 - 1)d \quad n = 4, a_1 = 3$$

$$39 = 3 + 3d \quad a_4 = 39$$

$$12 = d \quad \text{بسط.}$$

الوسطان الحسابيان هما $3 + 12$ أو 15 و $12 + 15$ أو 27 .

مثال 3

جد S_n للمتسلسلة الحسابية ذات $a_1 = 18$ و $a_n = 56$ و $n = 8$.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{صيغة المجموع}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56) \quad n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$$

$$= 296 \quad \text{بسط.}$$

مثال 4

جد قيمة $\sum_{k=3}^{15} 5k + 1$.

استخدم الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. هناك 13 حدًا. $a_1 = 5(3) + 1 = 16$ و $a_{13} = 5(15) + 1 = 76$.

$$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$$

$$= 598$$

3-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

جد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية.

24. $a_1 = 5, r = 2, n = 7$

25. $a_1 = 11, r = 3, n = 3$

26. $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, n = 5$

27. a_8 لـ $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \dots$

جد الأوساط الهندسية في كل متتالية.

28. 6, __, __, 162

29. 8, __, __, 648

30. -4, __, __, 108

31. **المذخرات** يمتلك عبد العزيز حسابًا ادخاريًا به رصيد حالي يبلغ AED 1500. فكم سيكون رصيد حساب عبد العزيز بعد 4 أعوام إذا كان سيحصل على مريحة سنوية بقيمة 5%؟

جد S_n لكل متسلسلة هندسية.

32. $a_1 = 15, r = 2, n = 4$

33. $a_1 = 9, r = 4, n = 6$

34. إلى 7 حدود $5 - 10 + 20 - \dots$

35. إلى 5 حدود $243 + 81 + 27 + \dots$

جد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

36. $\sum_{k=1}^7 3 \times (-2)^{k-1}$

37. $\sum_{k=1}^8 -1 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

38. **الدعاية** توزع مایسة نشرات دعائية للإعلان عن اجتماع مجلس الطلاب التالي. وقد وزعت نشرات على 4 أشخاص. بعد ذلك، وزع كل شخص من هؤلاء الأربعة 4 نشرات على 4 أشخاص آخرين. ثم وزع هؤلاء الأشخاص الأربعة 4 نشرات على 4 أشخاص جدد. فإذا اعتبرنا أن مایسة هي الجولة الأولى، فكم عدد الأشخاص الذين تم منحهم نشرات بعد 4 جولات؟

مثال 5

جد الحد السادس لمتتالية هندسية، والتي فيها $a_1 = 9$ و $r = 4$.

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$ صيغة للحد النوني

$a_6 = 9 \times 4^{6-1}$ $n = 6, a_1 = 9, r = 4$

$a_6 = 9216$

الحد السادس هو 9216.

مثال 6

جد وسطين هندسيين بين 1 و 27.

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$ صيغة للحد النوني

$a_4 = 1 \times r^{4-1}$ $n = 4$ و $a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بَسْط.

الوسطان الهندسيان هما 1(3) أو 3 و 3(3) أو 9.

مثال 7

جد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 3$ و $r = 5$ و $n = 11$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_{11} = \frac{3 - 3 \cdot 5^{11}}{1 - 5}$ $n = 11, a_1 = 3, r = 5$

$S_{11} = 36,621,093$ استخدم حاسبة.

مثال 8

جد قيمة $\sum_{k=1}^6 2 \times (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \times 4^6}{1 - 4}$ $n = 6, a_1 = 2, r = 4$

$= \frac{-8190}{-3}$ بَسْط.

$= 2730$ بَسْط.

مراجعة درس بدرس

3-4 نظرية ذات الحدين

استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

11. $(4x + 6)^5$

12. $(m - 5n)^6$

جد معامل الحد المشار إليه في كل تفكيك.

13. $(6x - 3y)^{10}$, x^4y^6

14. $(2y + 3)^{13}$, 8^{th}

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك كل ذات حدين مما يلي.

15. $(2p^2 - 7)^4$

16. $(4m + 3n)^7$

مثال 9

استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك $(3x + 10)^5$.

طبق نظرية ذات الحدين لتفكيك $(a + b)^5$. حيث $a = 3x$ و $b = 10$.

$$\begin{aligned}(3x + 10)^5 &= {}_5C_0(3x)^5(10)^0 + {}_5C_1(3x)^4(10)^1 + {}_5C_2(3x)^3(10)^2 + \\ &\quad {}_5C_3(3x)^2(10)^3 + {}_5C_4(3x)^1(10)^4 + {}_5C_5(3x)^0(10)^5 \\ &= 1(243x^5)(1) + 5(81x^4)(10) + 10(27x^3)(100) + \\ &\quad 10(9x^2)(1000) + 5(3x)(10,000) + 1(1)(100,000) \\ &= 243x^5 + 4050x^4 + 27,000x^3 + 90,000x^2 + \\ &\quad 150,000x + 100,000\end{aligned}$$

3-5 الاستقراء الرياضي

استخدم الاستقراء الرياضي للبرهنة على أن كل تخمين صحيح لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

4. $6^n - 9$ يقبل القسمة على 3.

5. $7^n - 5$ يقبل القسمة على 2.

6. $5^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

7. $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \dots + 2n(2n + 1) = \frac{n(n + 1)(4n + 5)}{3}$

8. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

أثبت كل متباينة لقيم n المعطاة.

9. $4^n \geq 4n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

10. $5n < 6^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

مثال 10

أثبت أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

التخمين وخطوة المراكز افترض أن P_n هي عبارة تنص على أن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4. عندما $n = 1$. فإن $5^1 - 1 = 4$ يقبل القسمة على 4. حيث إن 4 تقبل القسمة على 4. فالبعبارة P_1 صحيحة.

فرضية الاستقراء والخطوة الاستقرائية افترض أن $5^k - 1$ يقبل القسمة على 4. بمعنى، افترض أن $5^k - 1 = 4r$ للعدد الصحيح r . استخدم فرضية الاستقراء هذه لإثبات أن $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4.

$5^k - 1 = 4r$ **فرضية الاستقراء**

$5^k = 4r + 1$ **اجمع 1 إلى كل طرف.**

$5 \cdot 5^k = 5(4r + 1)$ **اضرب كل طرف في 5.**

$5^{k+1} = 20r + 5$ **بسّط.**

$5^{k+1} - 1 = 20r + 4$ **اطرح 1 من كل طرف.**

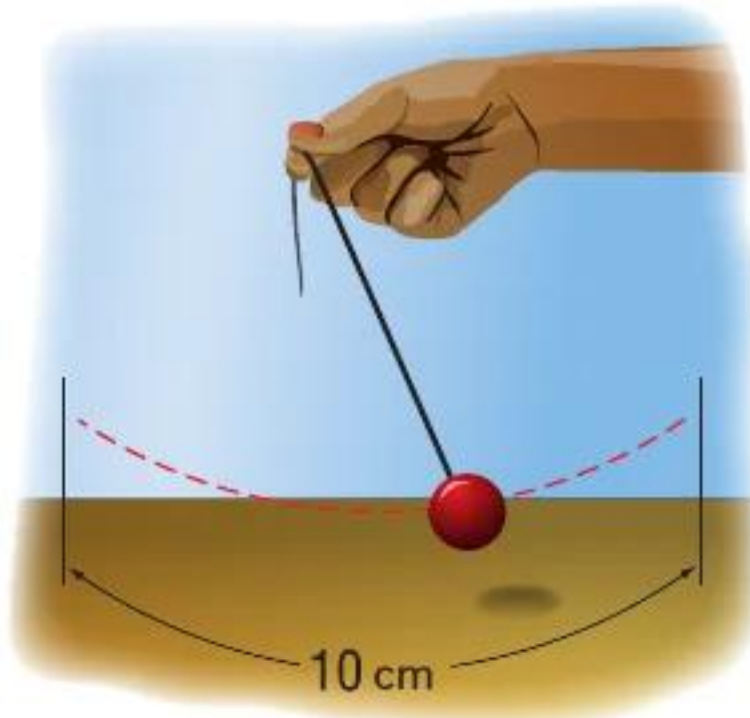
$5^{k+1} - 1 = 4(5r + 1)$ **حلل إلى العوامل.**

حيث إن r عدد صحيح، إذا $5r + 1$ عدد صحيح و $4(5r + 1)$ يقبل القسمة على 4. إذا، $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4.

الاستقراء حيث إن P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$ و P_k تنطوي على أن P_{k+1} . فإن P_n صحيحة بالنسبة إلى $n = 2$ و $n = 3$. وهكذا. وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n .

تدريب على الاختبار

14. **المدرسة** هناك عدد من البنات مساوٍ لعدد الأولاد في صف الأستاذ فهد للعلوم. وهو يحتاج إلى اختيار 8 طلاب لتمثيل صفه في معرض العلوم. فما احتمال أن يكون 5 منهم أولاداً؟
15. **البندول** تؤرجح لمياء بندولاً. والمسافة المقطوعة في كل حركة أرجحة تقل بنسبة 15% مع كل أرجحة. فإذا قطع البندول 10 سنتيمتر مبدئياً، فجد إجمالي المسافة المقطوعة عندما يتوقف البندول عن الحركة.



16. **نظرية الأعداد** فكر في العبارة $0.\overline{9} = 1$. (الدرس 3-5)
- a. أثبت أن $\frac{9}{10^n} = \frac{10^n - 1}{10^n}$ $0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots + \frac{9}{10^n}$ لأي عدد صحيح موجب n .
- b. استخدم استيعابك للنهيات والعبارة التي أثبتتها في الجزء a لشرح سبب صحة $0.\overline{9} = 1$.
17. **كرة السلة** عادة ما تسجل باسمين 4 من كل 6 محاولات للرميات الحرة. ما احتمال تسجيلها 5 من 6 في محاولاتها التالية للرميات الحرة؟ (الدرس 3-4)

1. جد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية 63, 72, 81, ...

2. جد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية فيها $a_1 = 9$ و $d = 5$.

3. **الاختيار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... 18, 20.2, 22.4, 24.6, ...

- A 26.8
B 29
C 31.2
D 33.4

4. جد الأوساط الحسابية الأربعة بين -9 و 11.

5. جد مجموع متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 11$ و $n = 14$ و $a_n = 22$

6. **الاختيار من متعدد** ما هو الحد التالي في المتتالية الهندسية التالية؟

$$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32}, \dots$$

- F $\frac{5}{8}$
G $\frac{5}{32}$
H $\frac{5}{128}$
J $\frac{5}{256}$

7. جد الأوساط الهندسية الثلاثة بين 6 و 1536.

8. فكك $(2a - 3b)^4$.

9. ما معامل الحد الخامس لـ $(m + 3n)^6$ ؟

10. جد الحد الرابع لمفكوك $(c + d)^9$.

برهن أن كل عبارة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة.

11. $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$.

12. $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10.

13. جد مثلاً مضاداً للعبارة التالية.

$2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4.

التحضير للاختبارات المعيارية

3

مادة الرياضيات

البحث عن نمط

تتمثل إحدى أكثر إستراتيجيات حل المسائل شيوعاً في البحث عن نمط. فالقدرة على التعرف على الأنماط، وتمثيلها جبرياً، وتوسعتها تعد أداة قيمة لحل المسائل.

إستراتيجيات البحث عن نمط

الخطوة 1

تحديد النمط.

- قارن بين الأعداد أو الأشكال أو التمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما مدى الصلة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل هناك أي عمليات مشتركة تؤدي إلى الانتقال من أحد الحدود إلى الحد التالي؟

الخطوة 2

تعميم النمط.

- اكتب قاعدة باستخدام الكلمات لوصف كيفية إنتاج حدود النمط.
- عيّن المتغيرات واكتب تعبيراً جبرياً لتمثيل النمط إن أمكن.

الخطوة 3

جد الحدود المفقودة، ووسّع النمط، وجد حل المسألة.

- استخدم النمط الخاص بك أو قاعدتك لإيجاد الحدود المفقودة و/أو وسّع النمط لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.
استخدم متتالية المربعات الموضحة. لايجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع المتتالية؟

الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

A 55

B 65

C 74

D 82

اقرأ المسألة بعناية. يتم إعطاؤك ثلاثة أشكال من متتالية ويُطلب منك إيجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع.

ابحث عن نمط في أشكال المربعات. احسب عدد المربعات في كل شكل.



اكتب تعبيرًا لتمثيل هذا النمط.

الشرح عدد المربعات يساوي مربع رقم الشكل بالإضافة إلى واحد.

المتغير لنفترض أن n تمثل رقم الشكل.

المعادلة $a_n = n^2 + 1$

استخدم التعبير الذي كتبته لتوسعة النمط وإيجاد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذًا، الشكل التاسع سيحتوي على 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين

اقرأ كل مسألة. استخدم نمطًا لحل المسألة.

1. الأعداد أدناه تُشكّل متتالية رياضية شهيرة من الأعداد تُعرف باسم متتالية فيبوناتشي. ما عدد فيبوناتشي التالي في المتتالية؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- A 36
- B 34
- C 31
- D 29

2. ما العدد الناقص في الجدول؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

- F 17
- G 18
- H 20
- J 21

تدريب على الاختبار المعياري

3

عدد الأشخاص	طول الخيمة (بالمتر)
7	2
28	5
39	6
67	8
147	12

5. يبين الجدول أبعاد خيمة مربعة الشكل وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة. لنفترض أن ℓ يمثل طول الخيمة وأن n يمثل عدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة. حدد المعادلة التي تمثل بشكل أفضل العلاقة بين طول الخيمة وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم.

F $\ell = n^2 + 3$

H $\ell = 3n + 1$

G $n = \ell^2 + 3$

J $n = 3\ell + 1$

6. مرشح هواء يُقال أنه يزيل 90% من الملوثات الموجودة بالهواء في كل مرة يُدَوَّر فيها الهواء عبر هذا المرشح. فإذا تم تدوير نفس كمية الهواء عبر المرشح ثلاث مرات، فما النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من الهواء؟

- A 0.01% B 0.1% C 99.9% D 99.9%

7. في دار السينما، تبلغ تكلفة علبتين من الفشار ومشروب غازي AED 11.50. وتكلفة 3 علب من الفشار و4 مشروبات غازية هي AED 27.25. فأَي زوج من المعادلات يمكن استخدامه لتحديد p وهو تكلفة علبة الفشار، و s وهو تكلفة المشروب الغازي؟

F $2p + s = 27.25$
 $3p + 4s = 11.50$

H $2p + s = 11.50$
 $3p + 4s = 27.25$

G $2p - s = 11.50$
 $3p - 4s = 27.25$

J $p + s = 11.50$
 $p + 4 = 27.25$

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو في ورقة أخرى.

1. جد الحد التالي في المتتالية الحسابية.

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36

C 38

B 37

D 39

2. تحصل عبير على تكبير لصورة بمقدار 4 cm في 6 cm. بحيث تكون الصورة الجديدة ذات أبعاد أكبر 4 مرات من أصلها. فما مساحة التكبير مقارنةً بمساحة الصورة الأصلية؟

F المساحة أكبر بمرتين.

G المساحة أكبر بأربع مرات.

G المساحة أكبر بثماني مرات.

G المساحة أكبر بست عشرة مرة.

3. جد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$.

A 119

C 945

B 826

D 1072

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

4. اكتب الصيغة الخاصة بالحد النوني للمتتالية الهندسية الموضحة بالجدول.

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

12. إجابة شبكية ما قيمة $f[g(6)]$ إذا كان $f(x) = 2x + 4$ وكان $g(x) = x^2 + 5$ ؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

13. برهن أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

14. النقطتان الطرفيتان لقطر دائرة يكونان عند $(-1, -3)$ و $(5, -5)$.

a. ما إحداثيات مركز الدائرة؟ اشرح طريقتك.

b. جد نصف قطر الدائرة. اشرح طريقتك.

c. اكتب معادلة للدائرة.

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

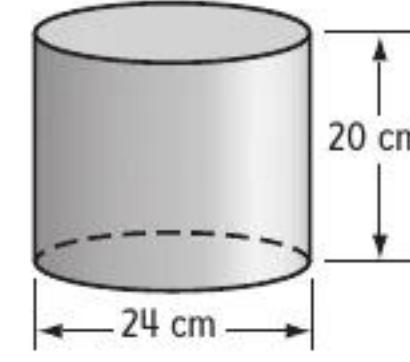
اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

8. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

9. استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك التعبير $(c + d)^6$.

10. إجابة شبكية تمتلك إيمان وعاء أسطوانيًا تحتاج إلى ملئه بالتراب حتى تتمكن من زرع بعض الزهور.



فما حجم الأسطوانة بالبوصات المكعبة مقربًا إلى أقرب بوصة مكعبة؟

11. البكتيريا في مزرعة بكتيريا تنمو بمعدل أسي مع مرور الزمن، كما هو موضح بالجدول.

عدد البكتيريا	الساعات
1000	0
2000	1
4000	2

اكتب معادلة للتعبير عن عدد البكتيريا، y ، بالنسبة للزمن، t .

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز	EM-1
القياسات	EM-2
العمليات والعلاقات الحسابية	EM-3
الصيغ والمفاهيم الجبرية	EM-3
الصيغ والمفاهيم الهندسية	EM-5
الدوال والمتطابقات المثلثية	EM-6
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال	EM-7
النهايات والتفاضل والتكامل	EM-7
الصيغ والمفاهيم الاحصائية	EM-8

الجبر		المجموعة الخالية
$\neq$	لا يساوي	$\emptyset$
$\approx$	تقريبًا يساوي	نفي p . ليس p
$\sim$	يشابه	ربط p و q
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي	فصل p أو q
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q
$ a $	القيمة المطلقة لـ a	
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	الهندسة
$a : b$	نسبة a إلى b	زاوية
(x, y)	زوج مرتّب	مثلث
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)	درجة
i	الوحدة التخيلية	باي π
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b	درجات
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية	قياس $\angle A$
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة	مستقيم نقطته الطرفيتان A و B
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة	الشعاع من النقطة A إلى النقطة B
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية	قياس $\overline{AB}$ ، المسافة بين A و B
∞	ما لا نهاية	يوازي
$-\infty$	سالب ما لا نهاية	لا يوازي
$[]$	تتضمن الأطراف	متعامد على
$()$	لا تتضمن الأطراف	مثلث
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b	متوازي أضلاع
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x	مضلع عدد أضلاعه n
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x	متجه a
ω	أوميغا، السرعة الزاوية	المتجه من A إلى B
α	ألفا، قياس الزاوية	مقدار متجه من A إلى B
β	بيتا، قياس الزاوية	صورة الصورة الأصلية A
γ	جاما، قياس الزاوية	موضوع على
θ	ثيتا، قياس الزاوية	دائرة مركزها A
λ	لامدا، طول الموجة	قوس أصغر نقطته الطرفيتان A و B
ϕ	فاي، قياس الزاوية	قوس أكبر نقطته الطرفيتان A و C
a	متجه a	قياس درجة القوس AB
$ a $	طول المتجه a	
المجموعات والمنطق		حساب المثلثات
$\in$	ينتمي إلى	$\sin x$
$\subset$	مجموعة جزئية من	$\cos x$
$\cap$	تقاطع	$\tan x$
$\cup$	اتحاد	$\sin^{-1} x$
		$\cos^{-1} x$
		$\tan^{-1} x$
		$\text{Arcsin } x$
		$\text{Arccos } x$
		$\text{Arctan } x$

الدوال	الاحصاء والاحتمالات
$f(x)$	احتمال a $P(a)$
$f(x) = \{$	تبادل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة $P(n, r)$ أو nPr
$f(x) = x $	توافق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة $C(n, r)$ أو nCr
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	احتمال A $P(A)$
$f(x, y)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل $P(A B)$
$[f \circ g](x)$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي) $n!$
$f^{-1}(x)$	سيجما، رمز المجموع $\sum$
النهايات والتفاضل والتكامل	
$\lim_{x \rightarrow c}$	متوسط مجتمع إحصائي μ
m_{sec}	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي σ
$f'(x)$	تباين المجتمع الإحصائي σ^2
Δ	الانحراف المعياري لعينة s
$\int$	تباين العينة s^2
$\int_a^b$	مجموع من $n = 1$ إلى k $\sum_{n=1}^k$
$F(x)$	متوسط x ، متوسط العينة $\bar{x}$
	فرضية العدم H_0
	الفرضية البديلة H_a

مترى	عُرْفِي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a . يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$. يمكن التعويض عن a باستخدام b .
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$. فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$. فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b . $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c . $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c . $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a . يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$. حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$. يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a . يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a = b$. فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a = b$. فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c . حيث $c \neq 0$. إذا كان $a = b$. فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a > b$. فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c . إذا كان $a > b$. فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c . 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$. فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$. فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b . إذا كان $ab = 0$. فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو كلاهما 0.
* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.	

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات	
الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$
الضرب في كمية عددية	$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$
كثيرات الحدود	
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مربع فرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
اللوغاريتمات	
خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$
خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$
تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الدوال الأسية واللوغاريتمية			
المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستثمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي المستثمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الأساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
المتتاليات والمتسلسلات			
الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهاية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, r < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$	المتسلسلة الأسية	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
نظرية ذات الحدين	$(a + b)^n = {}_nC_0 a^nb^0 + {}_nC_1 a^{n-1}b^1 + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_n a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$		
المتجهات			
الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	مستقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{v} ^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$ \mathbf{v} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي			
صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$		
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطع المخروطية		
قطع مكافئ	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ أو $(y - k)^2 = 4p(x - h)$	دائرة $x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
قطع ناقص	أو $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	قطع زائد أو $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطع المخروطية $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ و $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$		
المعادلات الوسيطة		
الموقع العمودي	$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	المسافة الأفقية $x = tv_0 \cos \theta$
الاعداد المركبة		
صيغة الضرب	$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$	صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}} \left(\cos \frac{\theta + 2n\pi}{p} + i \sin \frac{\theta + 2n\pi}{p} \right)$	نظرية دي موافر أو $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$ $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

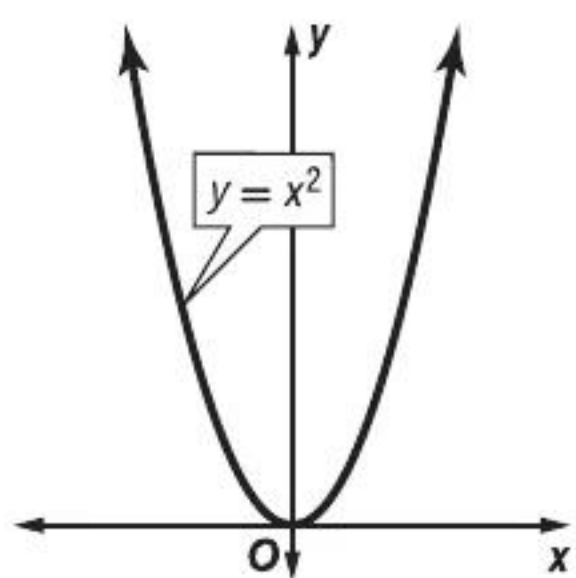
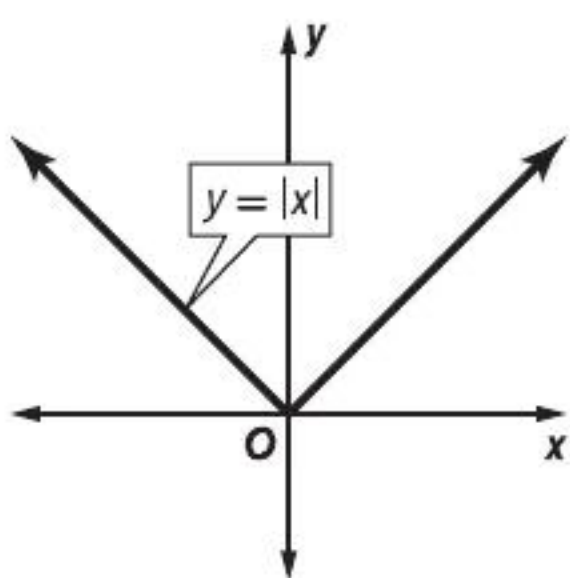
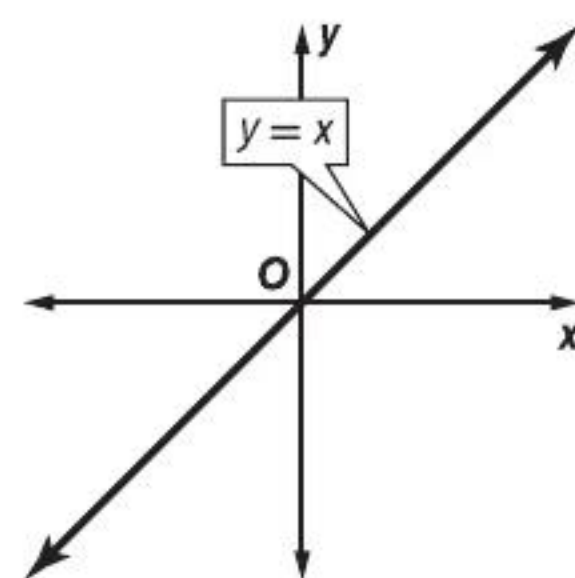
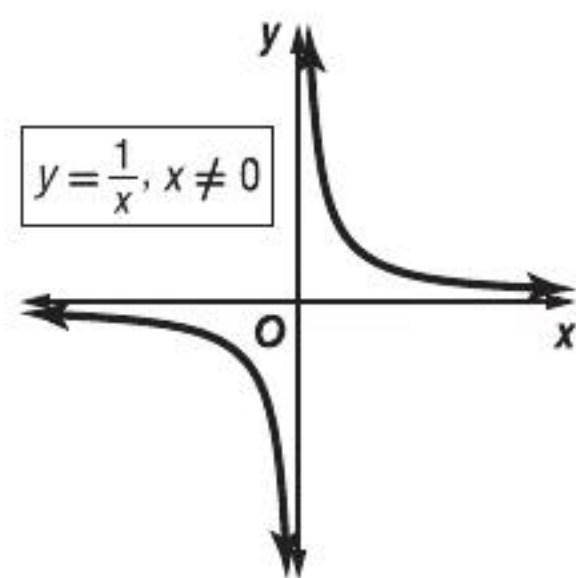
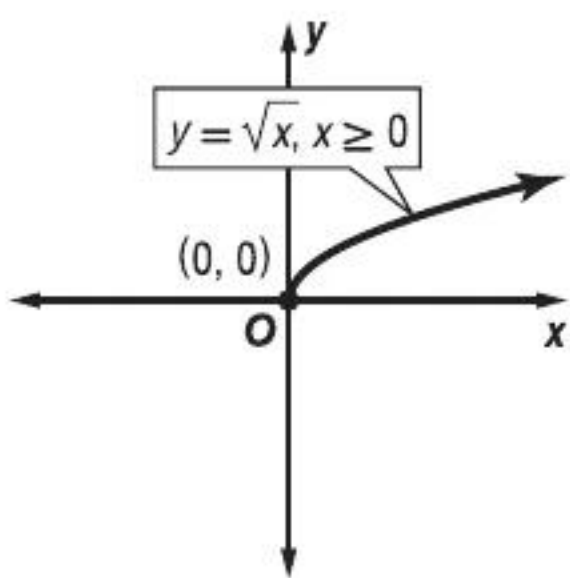
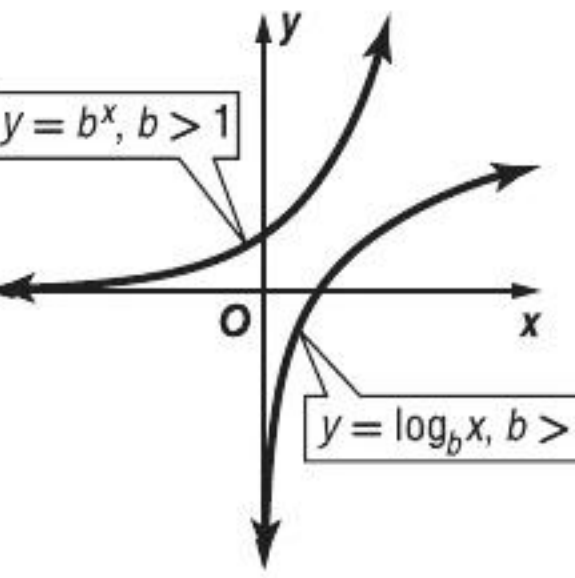
الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية		
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$	المسافة على خط الأعداد $d = a - b $
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	طول القوس $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	نقطة المنتصف على خط الأعداد $M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$	نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$
المحيط		
مربع	$P = 4s$	مستطيل $P = 2\ell + 2w$
		دائرة $C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$
مساحة السطح الجانبية		
منشور	$L = Ph$	هرم $L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط $L = \pi r\ell$
مساحة السطح الكلية		
منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط $S = \pi r\ell + \pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	كرة $S = 4\pi r^2$
		مكعب $S = 6s^2$
الحجم		
منشور	$V = Bh$	مخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	كرة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
		مكعب $V = s^3$
		إسطوانة $V = \pi r^2 h$
		متوازي مستطيلات $V = \ell wh$

الدوال المثلثية		
$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$
النسب المثلثية		
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
قانون جيبوس التمام		
$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	صيغة هيرون	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
قانون الجيوب		
$\omega = \frac{\theta}{t}$	السرعة الزاوية	$v = \frac{s}{t}$
السرعة الخطية		
المتطابقات المثلثية		
$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات المقلوب		
$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
متطابقات فيثاغورس		
$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$	$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$
متطابقات المتهمة		
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
متطابقات الفردي والزوجي		
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	متطابقات المجموع والفرق
$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
متطابقات ضعف الزاوية		
$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$
متطابقات تخفيض الأس		
$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$
متطابقات نصف الزاوية		
$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال التربيعية 	دوال القيمة المطلقة 	الدوال الخطية 
الدوال العكسية والنسبية 	دوال الجذر التربيعي 	الدوال الأسية واللوغاريتمية 

العمليات الحسابية على الدوال

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	الضرب	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	الجمع
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	القسمة	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	الطرح

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	نهاية طرح دالتين	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	نهاية مجموع دالتين
$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)^n] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$	نهاية دالة مرفوعة لأس	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$	نهاية قسمة دالتين
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ و n عدد زوجي	نهاية الجذر النوني لدالة	المتوسطة $v_{\text{avg}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	اللحظية $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

التفاضل

إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	المجموع أو الفرق	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	قاعدة القوة
$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة القسمة	$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	قاعدة الضرب

التكامل

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	$\int f(x) dx = F(x) + C$	التكامل غير المحدود
----------------------------------	--------------------------------------	---------------------------	---------------------

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}} \text{ or } z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E \text{ or } \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$

شكر وتقدير

نسخة الطلاب

viii ©Purestock/SuperStock;
 ix Ingram Publishing; x
 I. Rozenbaum & F. Cirou/
 PhotoAlto; xi J. Castro/Flickr/
 Getty Images; xii Dennis Welsh/
 UpperCut Images/Getty Images;
 xiii ZouZou/Shutterstock.com;
 xviii ra2studio/Shutterstock; 001
 ©Purestock/SuperStock; 004
 Petr Bonek/Shutterstock.com;
 007 Photo by U.S. Army, 1964.
 Figure 45, U.S. Geological Survey;
 014 ©COMSTOCK Images/
 Age Fotostock; 021 Ingram
 Publishing/SuperStock; 022
 Laurence Gough/Shutterstock.
 com; 029 UpperCut Images/
 Getty Images; 030 Photo
 Researchers, Inc./Alamy; 037
 Charles Knowles/Alamy Stock
 Photo; 040 ©Shutterstock/
 clicksahead; 045 sevenMaps7/
 Shutterstock.com; 046
 Pongsathorn Vipusmith/
 Shutterstock.com; 048
 McGraw-Hill Education; 058
 StockPhotosArt-Education/
 Alamy Stock Photo; 062 Ingram
 Publishing; 065 Darryl Leniuk/
 Pixtal/SuperStock; 074 Kris
 Legg/Alamy; 084 Zubin Shroff/
 Image Source; 089 Khomulo
 Anna/Shutterstock.com; 091
 ©Dennis MacDonald/Alamy;

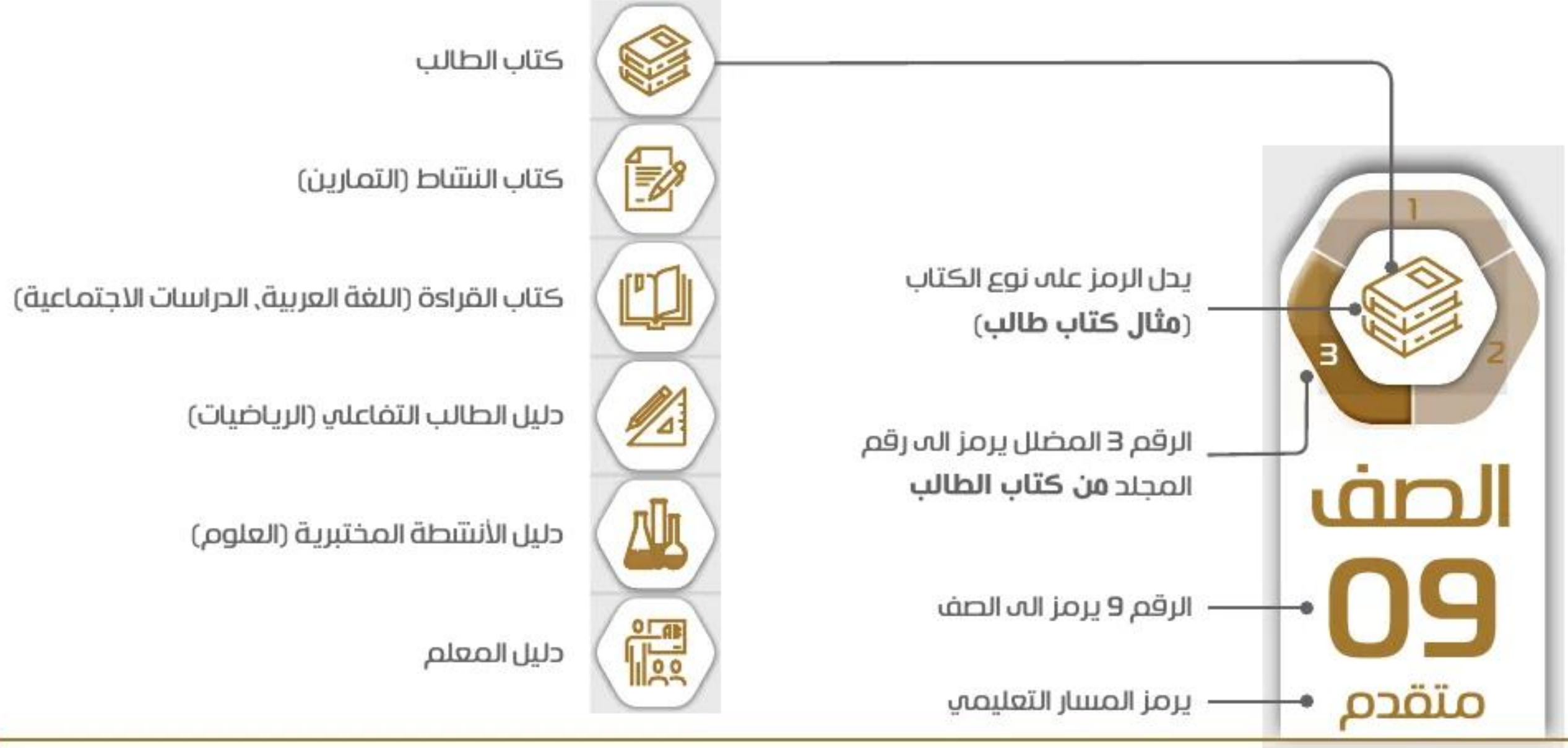
098 JGI/Blend Images LLC; 102
 John Lund/Marc Romanelli/
 Blend Images LLC; 114 Patricia
 Dulasi/Shutterstock.com; 118
 I. Rozenbaum & F. Cirou/
 PhotoAlto; 121 ThinkStock/
 SuperStock; 122 Pixtal/
 SuperStock; 136 ZouZou/
 Shutterstock.com; 145
 MedioliImages/SuperStock;
 148 Purestock/SuperStock; 164
 Digital Vision/Getty Images.

[illegible]

[illegible]

دلائل رموز الغلاف

لون الحلقة الثالثة



مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى



80051115



www.moe.gov.ae



Info@moe.gov.ae