



# الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

11

إجابات التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب التمارين الصف الحادي عشر- المسار الأكاديمي- خطة جديدة ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات المتشعبة والمتاليات والمتسلسلات

أستعد لدراسة الوحدة

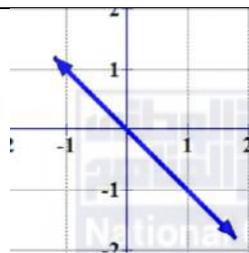
إيجاد قيمة اقتران عند قيمة معطاة صفحة 6	
1	$g(-5) = 10 - (-5) = 15$
2	$g(3) + 6 = 10 - (3) + 6 = 13$
3	$g(x) = -35 \Rightarrow 10 - x = -35 \Rightarrow x = 45$
4	$f(0) = 5(0) - 3 = -3$
5	$f(5) = 5(5) - 3 = 22$
6	$25 - f(-2) = 25 - (5(-2) - 3) = 38$
7	$f(2) + f(-1) = 5(2) - 3 + 5(-1) - 3 = -1$

تمثيل الاقتران الخطي بيانياً صفحة 7

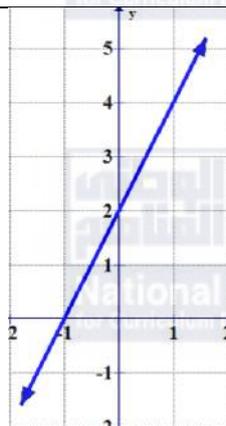
8	
9	
10	



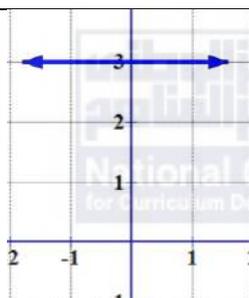
11



12

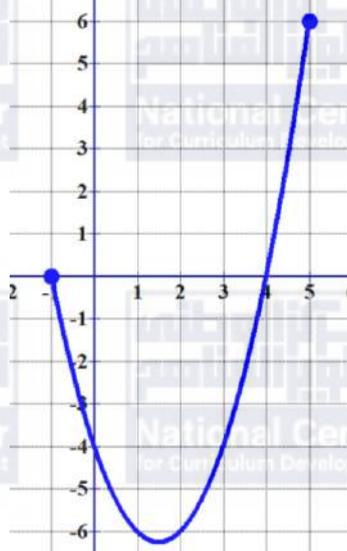


13



تمثيل كثير حدود معرف على فترة بيانياً وتحديد مجاله ومداه صفحة 8

14



المجال:  $[-1, 5]$  ، المدى  $[-6.25, 6]$

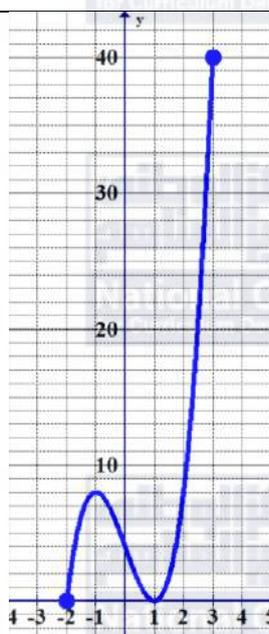


15



المجال:  $[0,3]$  ، المدى  $[-9,7]$

16



المجال:  $[-2,3]$  ، المدى  $[0,40]$



17	
المجال: $[-3, 4]$ ، المدى $[-9, 23]$	
إيجاد معادلة مستقيم ممثل بيانياً صفحة 10	
18	$y = -\frac{4}{5}x + 4$
19	$y = 2x$
إيجاد قيمة مقدار جبري يتضمن قيمة مطلقة عند قيمة معطاة صفحة 11	
20	$ -4 - 2  + 10 = 16$
21	$-2 3(-1) + 1  = -4$
22	$ 3(0) - 5  +  0 - 1  = 6$
23	$5 2 - 2  + 4 = 4$
24	$ -10  +  10  = 20$
25	$-4 - 4 2(-4) + 11  = -16$
إيجاد حدود متتالية معطى حدها العام صفحة 12	
26	$a_1 = 3(1) + 1 = 4$ $a_2 = 3(2) + 1 = 7$ $a_3 = 3(3) + 1 = 10$ $a_4 = 3(4) + 1 = 13$ $a_5 = 3(5) + 1 = 16$



27	$a_1 = (1)^2 - 1 = 0$ $a_2 = (2)^2 - 1 = 3$ $a_3 = (3)^2 - 1 = 8$ $a_4 = (4)^2 - 1 = 15$ $a_5 = (5)^2 - 1 = 24$
28	$a_1 = 4(1) + 2 = 6$ $a_2 = 4(2) + 2 = 10$ $a_3 = 4(3) + 2 = 14$ $a_4 = 4(4) + 2 = 18$ $a_5 = 4(5) + 2 = 22$
إكمال نمط عددي معطى صفحة 12	
29	4,6,8,10,12,14,16
30	3,6,9,12,15,18,21
31	2,4,8,16,32,64,128
إيجاد الحد العام للمتتاليات صفحة 13	
32	$a_n = 7n - 4$
33	$a_n = n^2 + 1$
34	$a_n = n^2 + 4$

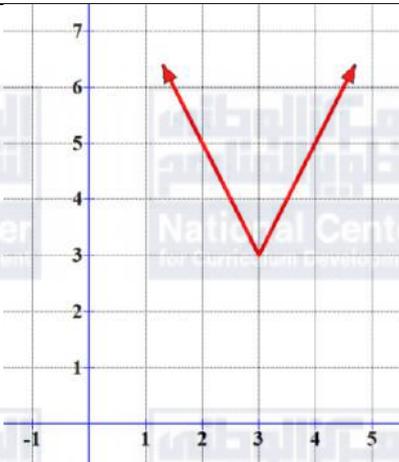


## الدرس الأول: الاقتترانات المتشعبة

1	$f(x) =  5x - 4  = \begin{cases} 4 - 5x, & x < \frac{4}{5} \\ 5x - 4, & x \geq \frac{4}{5} \end{cases}$
2	$f(x) =  3 - 2x  - 6 = \begin{cases} 3 - 2x - 6, & x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3 - 6, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} -3 - 2x, & x < \frac{3}{2} \\ 2x - 9, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$
3	$f(x) = \left  \frac{3}{2}x + 3 \right $
4	$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x + 2, & x > 0 \end{cases}$
5	<p>المجال <math>(-\infty, \infty)</math> ، المدى <math>(-\infty, 5) \cup [6, \infty)</math></p>
6	<p>المجال <math>(-\infty, \infty)</math> ، المدى <math>[3, \infty)</math></p>

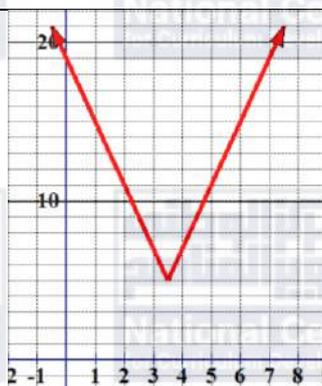


7



المجال  $(-\infty, \infty)$  ، المدى  $(3, \infty)$

8



المجال  $(-\infty, \infty)$  ، المدى  $(5, \infty)$

9

$$f(x) = \begin{cases} 1.2 + 0.121x, & x \leq 2000 \\ 1.2 + 0.121(2000) + 0.176(x - 2000), & x > 2000 \end{cases}$$

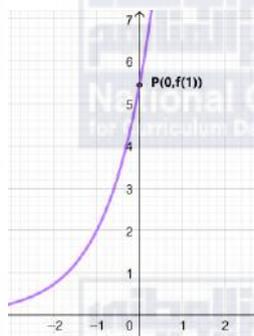


الدرس الثاني: التحويلات الهندسية للاقتوانات

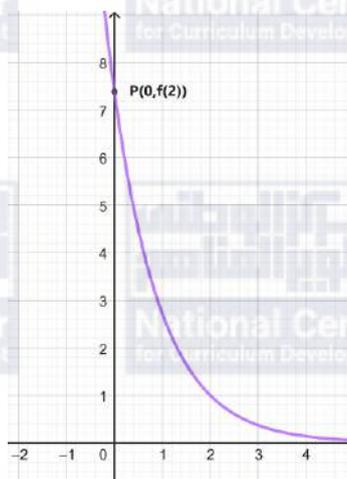
1  $g(x) = f(x) + 1$



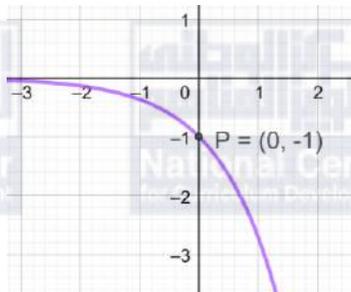
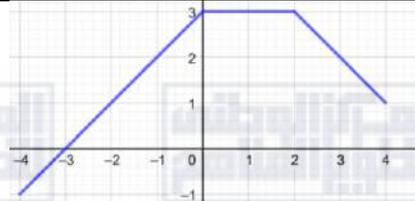
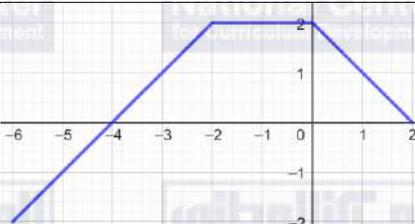
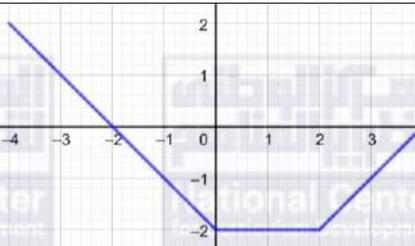
2  $h(x) = 2f(x + 1)$

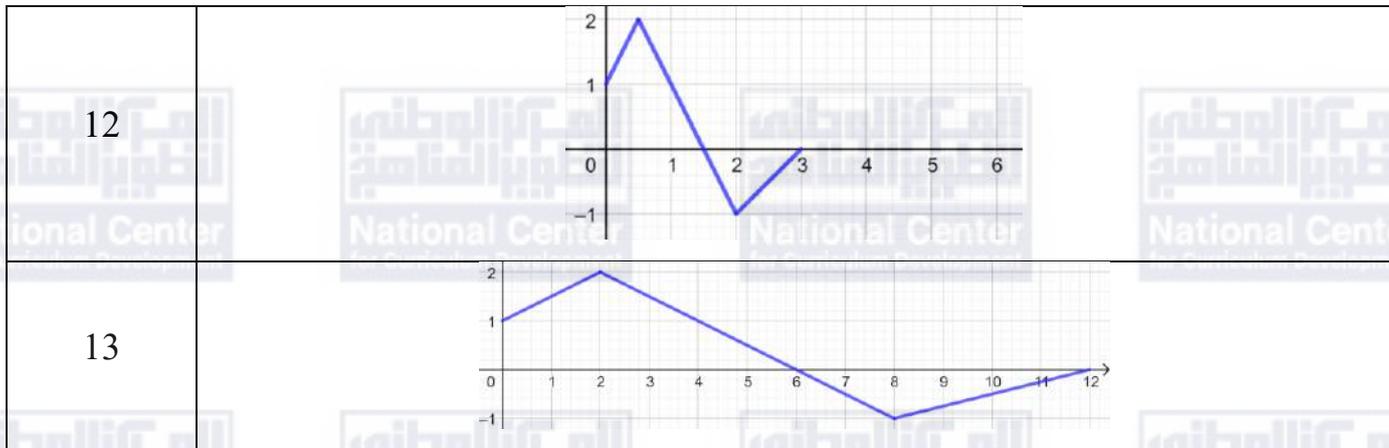


3  $m(x) = f(-x + 2)$





4	$p(x) = -f(x)$ 
5	انعكاس حول المحور x، تمدد رأسي معاملته 3، انسحاب نحو اليمين بمقدار وحدتين ونحو الأعلى بمقدار 5 وحدات.
6	انعكاس حول المحور y، تمدد رأسي معاملته 2، انسحاب نحو اليمين 4 وحدات ونحو الاسفل 3 وحدات.
7	
8	
9	
10	
11	تضييق رأسي معاملته 0.1 وانسحاب للأعلى مقداره 3000 وحدة





## الدرس الثالث: المتتاليات والمتسلسلات

1	$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}$
2	$4 + 10 + 18 + 28 + 40 + 54 + 70 + 88 + 108$
3	$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$
4	$a_n = 4n$
5	$\sum_{k=1}^{20} 4k = 840$
6	$a_n = (n - 1)^2$
7	$a_n = -6n + 28$ , $a_{20} = -92$
8	$a_n = 5n - 12$ , $a_{20} = 88$
9	$a_n = 1.5n + 23.5$ , $a_{20} = 53.5$
10	$S_{10} = \frac{10}{2}(6 + 60) = 330$
11	$S_{100} = \frac{100}{2}(2(1) + (100 - 1) \times 2) = 10000$
12	$14 - 12 = 2$ , $12 - 10 = 2$ المتتالية حسابية أساسها 2
13	$a_n = 2n + 8$
14	$S_{14} = \frac{14}{2}(10 + 36) = 322$
15	$S_{20} = 10(2a_1 + 19d) = 730 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 73$ $S_{30} = 15(2a_1 + 29d) = 1545 \Rightarrow 2a_1 + 29d = 103$ $\Rightarrow a_1 = 8$
16	$d = 3$
17	$a_n = 3n + 5$ $3n + 5 < 101 \Rightarrow n < 32$ $\Rightarrow n = 31$



18	$a_{10} = 2a_4 \Rightarrow a_1 + 9d = 2(a_1 + 3d)$ $\Rightarrow a_1 = 3d$ $a_{18} = 50 \Rightarrow a_1 + 17d = 50$ $\Rightarrow 3d + 17d = 50$ $\Rightarrow d = 2.5$ $\Rightarrow a_1 = 7.5$
19	$\dots, x, y, \dots$ $d = y - x$ $a = y + (y - x) = 2y - x$
20	$a_8 = a_1 + 7d = a_1 + 7(y - x)$ $x = a_1 + 7(y - x) \Rightarrow a_1 = 8x - 7y$



الوحدة الثانية: النهايات والمشتقات

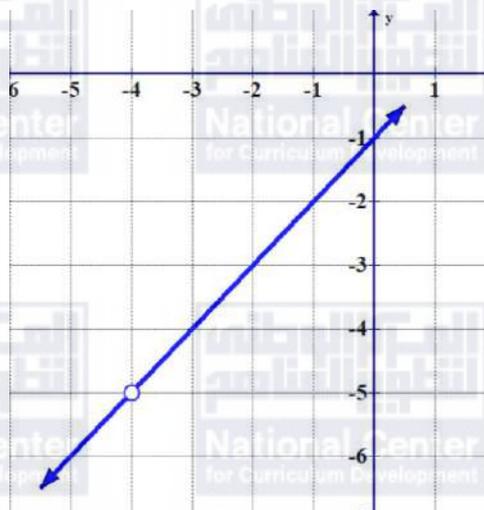
أستعد لدراسة الوحدة

1	$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
2	$x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$
3	$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$
4	$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
5	$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
6	$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$
7	$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
8	$2x^3 + 128 = 2(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$
9	$16 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$
10	$\frac{2x + 2}{2} = x + 1$
11	$\frac{16x^2 + 8x}{2x + 1} = \frac{8x(2x + 1)}{2x + 1} = 8x$
12	$\frac{x - 2x^2}{8 - 16x} = \frac{x(1 - 2x)}{8(1 - 2x)} = \frac{x}{8}$
13	$\frac{x^2 - 36}{x - 6} = \frac{(x - 6)(x + 6)}{x - 6} = x + 6$
14	$\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} = \frac{(x + 4)(x + 3)}{x + 3} = x + 4$
15	$\frac{9 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{3(3 - x)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{-3}{x + 3}$



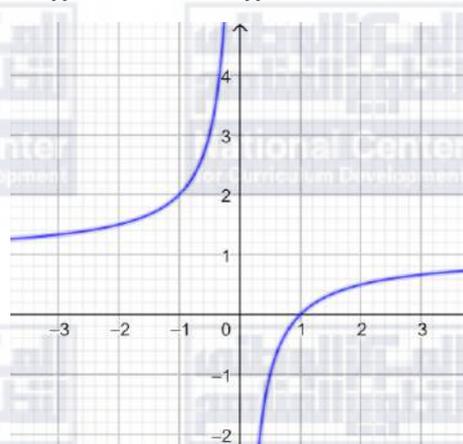
16

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{x + 4} = x - 1, \quad x \neq -4$$



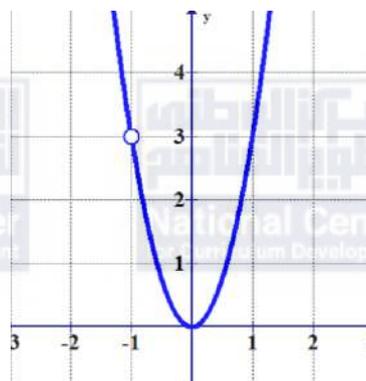
17

$$f(x) = \frac{-x^2 + x^3}{x^3} = \frac{x^2(-1 + x)}{x^3} = \frac{x - 1}{x}, \quad x \neq 0$$



18

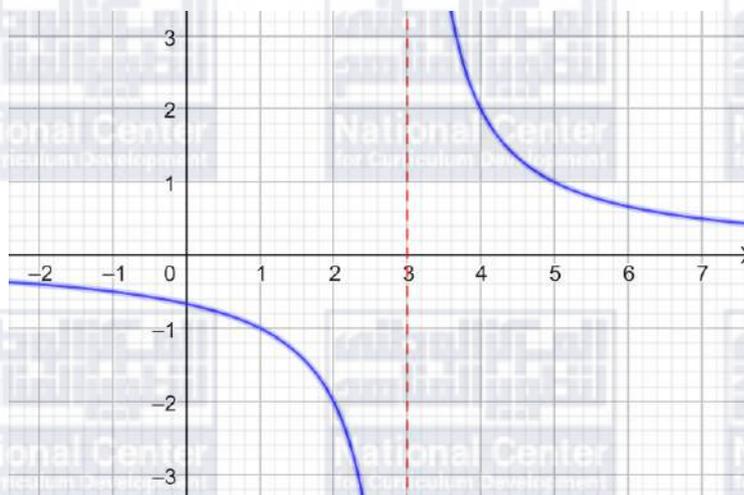
$$f(x) = \frac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{3x^2(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 2x + 1} = 3x^2, \quad x \neq -1$$





19

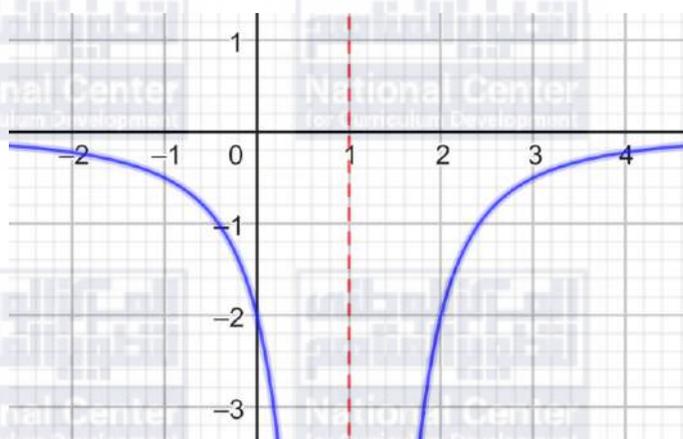
$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$



المجال  $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$  ، المدى  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

20

$$h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$



المجال  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$  ، المدى  $(-\infty, 0)$



21	$g(x) = \frac{4}{x+2} - 1$ <p>المجال <math>(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)</math> ، المدى <math>(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)</math></p>
22	$p^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{p}$
23	$\sqrt[8]{u} = u^{\frac{1}{8}}$
24	$9^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9}$
25	$\sqrt[5]{-8} = (-8)^{\frac{1}{5}}$
26	$w^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{w^8}$
27	$\sqrt[6]{v^5} = v^{\frac{5}{6}}$
28	$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3}$
29	$\sqrt[5]{(-35)^9} = (-35)^{\frac{9}{5}}$
30	$\frac{4^3 \times 8^4}{4^5 \times 8^2} = \frac{8^2}{4^2} = \frac{64}{16} = 4$
31	$3^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{3^5}{3^6} = \frac{1}{3}$
32	$(7-4)^3 \times 3^{-8} = 3^3 \times 3^{-8} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$



33	$\frac{4^2}{4^5} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
34	$f(x) = 2x^3 + 6$ $f'(x) = 6x^2$
35	$f(x) = x^5 - 5x^2 + 6x - 10$ $f'(x) = 5x^4 - 10x + 6$
36	$f(x) = x^4 + 8x^2$ $f'(x) = 4x^3 + 16x$
37	$f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ $f'(x) = 10x + 25$ $m = f'(-2) = -20 + 25 = 5$
38	$f'(x) = 0 \Rightarrow 10x + 25 = 0$ $\Rightarrow x = -2.5$
39	$g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$ $3(-2)^3 - (-2)^2 - 7(-2) + 4 = b \Rightarrow b = -2$
40	$g'(x) = 9x^2 - 2x - 7$ $g'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0$ $\Rightarrow (9x + 7)(x - 1) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{7}{9}, x = 1$
41	$x^2 + 5x - 24 = 0$ $(x + 8)(x - 3) = 0$ $x = -8, x = 3$
42	$15x^2 - 30x - 120 = 0$ $x^2 - 2x - 8 = 0$ $(x + 2)(x - 4) = 0$ $x = -2, x = 4$



43	$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ $x(x^2 - 5x + 6) = 0$ $x(x - 2)(x - 3) = 0$ $x = 0, x = 2, x = 3$												
44	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f'(x) = 2x - 4$ $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>إشارة الميل</td> <td>سالبة</td> <td></td> <td>موجبة</td> </tr> </tbody> </table> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = 2</math> من سالبة إلى موجبة، لذا توجد قيمة محلية صغرى هي:</p> $f(2) = -1$	$x$	1	2	3	$f'(x)$	-2	0	2	إشارة الميل	سالبة		موجبة
$x$	1	2	3										
$f'(x)$	-2	0	2										
إشارة الميل	سالبة		موجبة										
45	$f(x) = x^2 + 6x - 3$ $f'(x) = 2x + 6$ $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-4</td> <td>-3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>إشارة الميل</td> <td>سالبة</td> <td></td> <td>موجبة</td> </tr> </tbody> </table> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = -3</math> من سالبة إلى موجبة، لذا توجد قيمة محلية صغرى هي:</p> $f(-3) = -9$	$x$	-4	-3	0	$f'(x)$	-2	0	6	إشارة الميل	سالبة		موجبة
$x$	-4	-3	0										
$f'(x)$	-2	0	6										
إشارة الميل	سالبة		موجبة										



46

$$f(x) = 1 + 5x - x^2$$

$$f'(x) = 5 - 2x$$

$$5 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2.5$$

$x$	2	2.5	3
$f'(x)$	1	0	-1
إشارة الميل	موجبة		سالبة

تتغير إشارة الميل حول  $x = 2.5$  من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى هي:

$$f(2.5) = 7.25$$

47

$$f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 18$$

$$3x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, x = 2$$

$x$	-4	-3	0
$f'(x)$	18	0	-18
إشارة الميل	موجبة		سالبة

$x$	0	2	3
$f'(x)$	-18	0	18
إشارة الميل	سالبة		موجبة

تتغير إشارة الميل حول  $x = -3$  من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى هي:

$$f(-3) = 50.5$$

تتغير إشارة الميل حول  $x = 2$  من سالبة إلى موجبة، لذا توجد قيمة محلية صغرى هي:

$$f(2) = -22$$



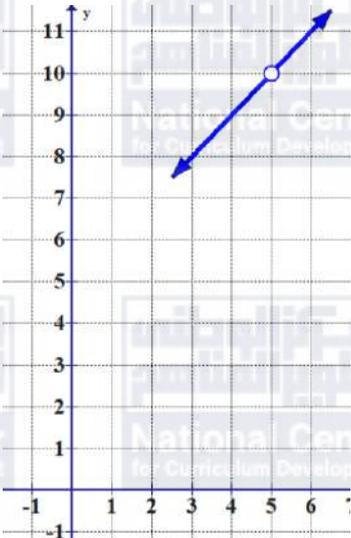
48	$f(x) = 18x^2 - x^4$ $f'(x) = 36x - 4x^3$ $36x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(9 - x^2) = 0$ $\Rightarrow 4x(3 - x)(3 + x) = 0$ $\Rightarrow x = -3, x = 0, x = 3$ <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td><math>x</math></td><td>-4</td><td>-3</td><td>-1</td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td>112</td><td>0</td><td>-32</td></tr> <tr><td>إشارة الميل</td><td>موجبة</td><td></td><td>سالبة</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td><math>x</math></td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td>-32</td><td>0</td><td>32</td></tr> <tr><td>إشارة الميل</td><td>سالبة</td><td></td><td>موجبة</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td>32</td><td>0</td><td>-112</td></tr> <tr><td>إشارة الميل</td><td>موجبة</td><td></td><td>سالبة</td></tr> </table> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = -3</math> من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى هي:  <math display="block">f(-3) = 36</math></p> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = 0</math> من سالبة إلى موجبة، لذا توجد قيمة محلية صغرى هي:  <math display="block">f(0) = 0</math></p> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = 3</math> من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى هي:  <math display="block">f(3) = 36</math></p>	$x$	-4	-3	-1	$f'(x)$	112	0	-32	إشارة الميل	موجبة		سالبة	$x$	-1	0	1	$f'(x)$	-32	0	32	إشارة الميل	سالبة		موجبة	$x$	1	3	4	$f'(x)$	32	0	-112	إشارة الميل	موجبة		سالبة
$x$	-4	-3	-1																																		
$f'(x)$	112	0	-32																																		
إشارة الميل	موجبة		سالبة																																		
$x$	-1	0	1																																		
$f'(x)$	-32	0	32																																		
إشارة الميل	سالبة		موجبة																																		
$x$	1	3	4																																		
$f'(x)$	32	0	-112																																		
إشارة الميل	موجبة		سالبة																																		
49	$f(x) = 2x^3 - 6x + 4$ $f'(x) = 6x^2 - 6$ $6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$ <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td><math>x</math></td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td>18</td><td>0</td><td>-6</td></tr> <tr><td>إشارة الميل</td><td>موجبة</td><td></td><td>سالبة</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td><math>f'(x)</math></td><td>-6</td><td>0</td><td>18</td></tr> <tr><td>إشارة الميل</td><td>سالبة</td><td></td><td>موجبة</td></tr> </table> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = -1</math> من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى هي:  <math display="block">f(-1) = 8</math></p> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = 1</math> من سالبة إلى موجبة، لذا توجد قيمة محلية صغرى هي:  <math display="block">f(1) = 0</math></p>	$x$	-2	-1	0	$f'(x)$	18	0	-6	إشارة الميل	موجبة		سالبة	$x$	0	1	2	$f'(x)$	-6	0	18	إشارة الميل	سالبة		موجبة												
$x$	-2	-1	0																																		
$f'(x)$	18	0	-6																																		
إشارة الميل	موجبة		سالبة																																		
$x$	0	1	2																																		
$f'(x)$	-6	0	18																																		
إشارة الميل	سالبة		موجبة																																		
50	$s(t) = t^3 - 6t + 3$ $v(t) = 3t^2 - 6$																																				
51	$v(3) = 3(3)^2 - 6 = 21 \text{ m/s}$																																				



52	$v(t) = 6 \Rightarrow 3t^2 - 6 = 6$ $\Rightarrow t^2 = 4$ $\Rightarrow t = -2, t = 2$												
53	$a(t) = 6t$												
54	$a(5) = 6 \times 5 = 30 \text{ m/s}^2$												
55	$12x + 10y = 180 \Rightarrow y = \frac{180 - 12x}{10} = 18 - 1.2x$												
56	$A = (4x)(2y) = 4x(36 - 2.4x)$ $\Rightarrow A(x) = 144x - 9.6x^2$ $A'(x) = 144 - 19.2x$ $144 - 19.2x = 0 \Rightarrow x = \frac{144}{19.2} = 7.5$												
57	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>7.5</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td><math>A'(x)</math></td> <td>144</td> <td>0</td> <td>-9.6</td> </tr> <tr> <td>إشارة الميل</td> <td>موجبة</td> <td></td> <td>سالبة</td> </tr> </tbody> </table> <p>تتغير إشارة الميل حول <math>x = 7.5</math> من موجبة إلى سالبة، لذا توجد قيمة محلية عظمى عند <math>x = 7.5</math> فتكون المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن عندما <math>x = 7.5</math> أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر هي: <math>A(7.5) = 540 \text{ m}^2</math></p>	$x$	0	7.5	8	$A'(x)$	144	0	-9.6	إشارة الميل	موجبة		سالبة
$x$	0	7.5	8										
$A'(x)$	144	0	-9.6										
إشارة الميل	موجبة		سالبة										
58													



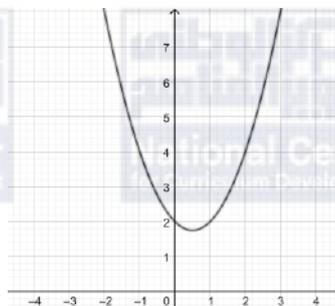
### الدرس الأول: النهايات والاتصال

1	$\lim_{t \rightarrow -2} f(t) = 0$																																
2	$\lim_{t \rightarrow -1} f(t) = -1$																																
3	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) =$ غير موجودة																																
4	$\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) = 10$  <table border="1" data-bbox="694 1310 1484 1612"> <tbody> <tr> <td></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">اليسار ←</td> <td style="text-align: center;"><b>5</b></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">→ اليمين</td> </tr> <tr> <td><math>x</math></td> <td>4.9</td> <td>4.99</td> <td>4.999</td> <td style="background-color: #f4a460;"></td> <td>5.001</td> <td>5.01</td> <td>5.1</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>9.9</td> <td>9.99</td> <td>9.999</td> <td style="background-color: #f4a460;"></td> <td>10.001</td> <td>10.01</td> <td>10.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">← اليسار</td> <td style="text-align: center;"><b>10</b></td> <td colspan="3" style="text-align: center;">→ اليمين</td> </tr> </tbody> </table>		اليسار ←			<b>5</b>	→ اليمين			$x$	4.9	4.99	4.999		5.001	5.01	5.1	$f(x)$	9.9	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1		← اليسار			<b>10</b>	→ اليمين		
	اليسار ←			<b>5</b>	→ اليمين																												
$x$	4.9	4.99	4.999		5.001	5.01	5.1																										
$f(x)$	9.9	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1																										
	← اليسار			<b>10</b>	→ اليمين																												



5

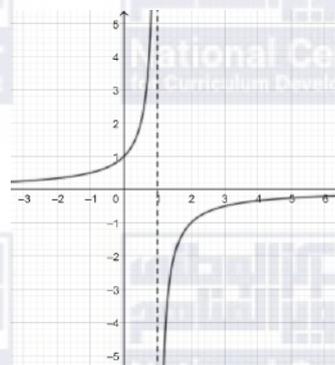
$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 2) = 8$$



	اليسار →			-2	اليمين ←			
$x$	-2.1	-2.01	-2.001		-1.999	-1.99	-1.9	
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1	
	اليسار →			8	اليمين ←			

6

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} \right) \text{ غير موجودة}$$



	اليسار →			1	اليمين ←			
$x$	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1	
$f(x)$	10	100	1000		-1000	-100	-10	
	اليسار →				اليمين ←			



7	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 6 - x, & x > 2 \end{cases}$
8	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0$
9	$\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5) = -14 + 5 = -9$
10	$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2) = -4 + 10 - 2 = 4$
11	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 6} = \frac{2 + 3}{2 + 6} = \frac{5}{8}$
12	$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x - 2}{1 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2(x - 1)}{1 - x} \right) = -2$
13	$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x - 6}{x + 5} \right) = \frac{6 - 6}{3 + 5} = 0$
14	$\lim_{z \rightarrow -4} \sqrt[3]{2z - 8} = \sqrt[3]{-16}$
15	$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - 18}{x^3 - 27} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{2(3 + 3)}{(9 + 9 + 9)} = \frac{4}{3}$
16	$\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x^2 - 7x + 10}{25 - 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x - 2)}{5(5 - x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x - 2)}{5} = \frac{-3}{5}$



17	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3x+1}-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(\sqrt{3x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{(\sqrt{3x+1}+1)} = \frac{3}{2}$
18	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x}, & x < 2 \\ x-6, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x-2, & x < 2 \\ x-6, & x \geq 2 \end{cases}$ $f(2) = 2 - 6 = -4$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x - 2) = -4$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 6) = -4$ <p>بما أن <math>f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4</math> إذن <math>f</math> متصل عند <math>x = 2</math></p>



الدرس الثاني: مشتقة اقتران القوة

1	$f(x) = 5x, x = 0$ $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - 0}{h}$ $= 5$
2	$f(x) = x, x = -3$ $f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+h+3}{h}$ $= 1$
3	$f(x) = 6x + 3, x = 2$ $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(2+h) + 3 - 15}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h}$ $= 6$



4	$f(x) = 5x^2, x = 1$ $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1 + 2h + h^2) - 5}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 10h + 5h^2 - 5}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} (10 + 5h)$ $= 10$
5	$f(x) = 3x^2 + 4x, x = 1$ $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 + 4(1+h) - 7}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1 + 2h + h^2) + 4 + 4h - 7}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + 3h^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} (10 + 3h)$ $= 10$



6	$f(x) = x^2 - 5x + 7, x = 2$ $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 5(2+h) + 7 - 1}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 10 - 5h + 6}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} (h - 1)$ $= -1$
7	$s = 10\sqrt{t} = 10t^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 5t^{-\frac{1}{2}}$
8	$s = \frac{50}{t} + 10 = 50t^{-1} + 10$ $\Rightarrow \frac{ds}{dt} = -50t^{-2} = -\frac{50}{t^2}$
9	$s = 10t^2 - \frac{10}{t^2} = 10t^2 - 10t^{-2}$ $\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 20t + 20t^{-3} = 20t + \frac{20}{t^3}$
10	$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$ $x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1} = 1$ $(1,1)$



11	$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
12	$y = \frac{(x+a)^2}{x} = \frac{x^2 + 2ax + a^2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2ax}{x} + \frac{a^2}{x} = x + 2a + a^2x^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = 1 - a^2x^{-2} = 1 - \frac{a^2}{x^2}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$ $x = a \Rightarrow y = \frac{(a+a)^2}{a} = 4a$ $(a, 4a)$ $x = -a \Rightarrow y = \frac{(-a+a)^2}{-a} = 0$ $(-a, 0)$
13	$f(x) = \frac{2x+5}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{5}{x} = 2 + 5x^{-1}$ $\frac{dy}{dx} = -5x^{-2} = -\frac{5}{x^2}$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=10} = -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$



14	$\frac{dy}{dx} = -5 \Rightarrow -\frac{5}{x^2} = -5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{2+5}{1} = 7$ $(1, 7)$ $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{-2+5}{-1} = -3$ $(-1, -3)$
15	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad x = 8$ $f(8) = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow (8, 2)$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8)$ $y - 2 = \frac{1}{12}x - \frac{2}{3}$ $y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$ <p style="text-align: right;">معادلة المماس:</p>



16

$$f(x) = \frac{4+x}{x} = \frac{4}{x} + \frac{x}{x} = 4x^{-1} + 1$$

$$f(8) = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(8, \frac{3}{2}\right)$$

$$f'(x) = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

$$f'(8) = \frac{-4}{(8)^2} = \frac{-4}{64} = -\frac{1}{16}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{16}(x - 8)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}$$

معادلة المماس:

$$y = -\frac{1}{16}x + 2$$

17

$$f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(4) = \frac{8}{\sqrt{4}} = 4 \Rightarrow (4, 4)$$

$$f'(x) = -4x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{x^3}}$$

$$f'(4) = -\frac{4}{\sqrt{4^3}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x + 2$$

معادلة المماس:

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$



18	$f'(x) = 15x^2 + 2x$ $f'(-1) = 15 - 2 = 13$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y_1 = f(-1) = 5(-1)^3 + (-1)^2 - 2 = -6$ $y - (-6) = -\frac{1}{13}(x + 1)$ $y + 6 = -\frac{1}{13}x - \frac{1}{13}$ $y = -\frac{1}{13}x - \frac{79}{13}$ <p style="text-align: right;">معادلة العمودي على المماس:</p>
19	$f(5) = 2(5)^2(6 - 5) = 50 \rightarrow (5, 50)$ $f'(x) = (2x^2)(-1) + (6 - x)(4x)$ $f'(5) = (50)(-1) + (6 - 5)(20) = -30$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 50 = \frac{1}{30}(x - 5)$ $y - 50 = \frac{1}{30}x - \frac{1}{6}$ $y = \frac{1}{30}x + \frac{299}{6}$ <p style="text-align: right;">معادلة العمودي على المماس:</p>



مماس المنحنى أفقي أي  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 12x^5 - 4x^3$$

$$12x^5 - 4x^3 = 0$$

$$4x^3(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

20

$$f(0) = 2(0)^6 - (0)^4 - 2 = -2$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$$

النقاط هي  $(0, -2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{55}{27}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{55}{27}\right)$

لإيجاد إحداثيي نقاط التقاطع بين  $f(x)$  و  $g(x)$  نحل المعادلة  $f(x) = g(x)$

المستقيم الذي معادلته  $2y = x + 5$  تصبح  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$$x^2 - 4x + 7 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ أو } x = 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 7 = \frac{9}{4} - 6 + 7 = \frac{13}{4}$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 7 = 9 - 12 + 7 = 4$$

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right), B(3, 4)$



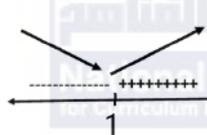
22	<p>معادلة المماس لمنحنى الاقتران <math>f(x)</math> عند النقطة <math>A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)</math></p> $f'(x) = 2x - 4$ $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = -1$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - \frac{13}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$ $y - \frac{13}{4} = -x + \frac{3}{2}$ $y = -x + \frac{19}{4}$ <p>معادلة المماس:</p> <p>معادلة المماس لمنحنى الاقتران <math>f(x)</math> عند النقطة <math>B(3,4)</math></p> $f'(3) = 2(3) - 4 = 2$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 4 = 2(x - 3)$ $y - 4 = 2x - 6$ <p>معادلة المماس:</p> $y = 2x - 2$
23	<p><math>f(x) = x^2 - 5x + 10</math></p> $f'(x) = 2x - 5$ $m = f'(1) = 2(1) - 5 = -3$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 6 = -3(x - 1)$ $y - 6 = -3x + 3$ <p>معادلة المماس:</p> $y = -3x + 9$ <p>نحسب المقطع <math>x</math> لهذا المماس:</p> $y = -3(0) + 9 = 9$ <p>نحسب المقطع <math>y</math> لهذا المماس:</p> $0 = -3x + 9 \Rightarrow x = 3$ <p>مساحة المثلث المطلوبة هي:</p> $A = \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{27}{2}$



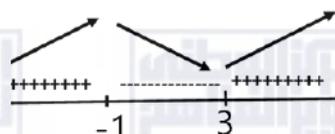
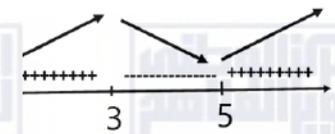
## الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى

1	$f(x) = x^2 - 8x$ $f'(x) = 2x - 8$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0$ $\Rightarrow x = 4$	النقطة الحرجة للاقتران $f$ هي: $(4, -16)$
2	$f(x) = 3x^2 + 6x + 4$ $f'(x) = 6x + 6$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$ $\Rightarrow x = -1$	النقطة الحرجة للاقتران $f$ هي: $(-1, 1)$
3	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ $f'(x) = 3x^2 - 12x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0$ $\Rightarrow 3x(x - 4) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 4$	النقاط الحرجة للاقتران $f$ هي: $(0, 6), (4, -26)$
4	$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ $f'(x) = 4 - 2x^2$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0$ $\Rightarrow x^2 = 2$ $\Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$	النقاط الحرجة للاقتران $f$ هي: $(-\sqrt{2}, -\frac{10\sqrt{2}}{3}), (\sqrt{2}, \frac{10\sqrt{2}}{3})$

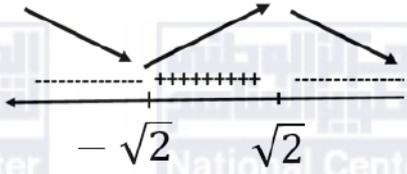


5	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 3, x = -1$	<p>النقاط الحرجة للاقتران <math>f</math> هي: <math>(-1, \frac{20}{3}), (3, -4)</math></p>
6	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$ $\Rightarrow x = 1, x = 3$	<p>النقاط الحرجة للاقتران <math>f</math> هي: <math>(1, 5), (3, 1)</math></p>
7	$f(x) = 2x^2 - 4x$ $f'(x) = 4x - 4$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0$ $\Rightarrow x = 1$	 <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على <math>(-\infty, 1)</math> و متزايد على <math>(1, \infty)</math></p>



8	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 3, x = -1$  <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على <math>(-1, 3)</math> و متزايد على <math>(-\infty, -1), (3, \infty)</math></p>
9	$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ $f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$ $\Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0$ $\Rightarrow x = 5, x = 3$  <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على <math>(3, 5)</math> و متزايد على <math>(-\infty, 3), (5, \infty)</math></p>



10	$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ $f'(x) = 4 - 2x^2$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0$ $\Rightarrow x^2 = 2$ $\Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$  <p>الاقتران <math>f</math> متزايد على <math>(-\infty, -\sqrt{2})</math> و <math>(\sqrt{2}, \infty)</math> و متناقص على <math>(-\sqrt{2}, \sqrt{2})</math></p>
11	$f(x) = x^3 + kx^2 - 8x + 3$ $f'(x) = 3x^2 + 2kx - 8$ $f'(-2) = 0 \Rightarrow 3(-2)^2 + 2k(-2) - 8 = 0$ $\Rightarrow 12 - 4k - 8 = 0$ $\Rightarrow 4 - 4k = 0$ $\Rightarrow k = 1$
12	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$ $\Rightarrow x = 1, x = 3$ $x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4 \Rightarrow A(1,4)$



## الدرس الرابع: المشتقة الثانية وتطبيقاتها

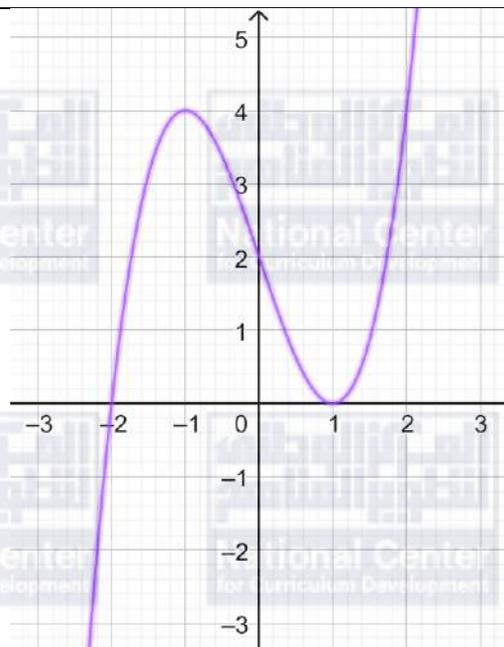
1	$f'(x) = 15x^2 + 4$ $f''(x) = 30x$
2	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$
3	$f(x) = (x-1)(2x+3) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$ $f'(x) = 4x + 1$ $f''(x) = 4$
4	$f(x) = \frac{4}{3x} = \frac{4}{3}x^{-1}$ $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-2}$ $f''(x) = \frac{8}{3}x^{-3} = \frac{8}{3x^3}$ $f''(2) = \frac{8}{3(2)^3} = \frac{1}{3}$
5	$f'(x) = -14x$ $f''(x) = -14$ $f''(-3) = -14$
6	$f'(x) = 4ax^3 - 6x$ $f''(x) = 12ax^2 - 6$ $f''(2) = 12a(2)^2 - 6$ $42 = 48a - 6$ $48 = 48a$ $a = 1$



7	$f(x) = (x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 - 3x + 2$ $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$ $\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$ $\Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0$ $\Rightarrow x = -2, x = 1$ $(-2, 0), (1, 0)$
8	$f'(x) = 3x^2 - 3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$ $\Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0$ $\Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 1, x = -1$ $x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$ $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ <p>النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: <math>(-1, 4), (1, 0)</math></p> $f''(x) = 6x$ $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$ <p>إذن، <math>(-1, 4)</math> نقطة عظمى محلية</p> $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$ <p>إذن، <math>(1, 0)</math> نقطة صغرى محلية</p>



9



10

$$f'(x) = 4x + 4$$

$$4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = -1$

$$f''(x) = 4$$

$$f''(-1) = 4 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما  $x = -1$  هي:

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$$



$$f(x) = x^3(x - 2) = x^4 - 2x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$2x^2(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{3}{2}$$

توجد قيمتان حرجتان هما  $x = 0$  و  $x = \frac{3}{2}$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

11

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى عندما  $x = \frac{3}{2}$  ، هي  $-\frac{27}{16}$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 12(0) = 0$$

يفشل اختبار المشتقة الثانية في تحديد نوع النقطة الحرجة  $(0, 0)$  لذلك نلجأ لاختبار المشتقة الأولى:

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 6(-1)^2 = -4 - 6 = -10 < 0$$

$$f'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 = 4 - 6 = -2 < 0$$

إشارة  $f'(x)$  سالبة على يسار  $x = 0$  وعلى يمينها، فالنقطة  $(0, 0)$  ليست نقطة قيمة قصوى.



12	$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ $3x^2 - 10x + 3 = 0$ $(3x - 1)(x - 3) = 0$ $x = \frac{1}{3} \text{ أو } x = 3$ <p style="text-align: right;">توجد قيمتان حرجتان هما <math>x = \frac{1}{3}</math> و <math>x = 3</math></p> $f''(x) = 6x - 10$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 10 = -8 < 0$ $f''(3) = 6(3) - 10 = 8 > 0$ <p>إذن توجد قيمة صغرى عندما <math>x = 3</math> ، هي: <math>f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) + 1 = -8</math></p> <p>وتوجد قيمة عظمى عندما <math>x = \frac{1}{3}</math> هي: <math>f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{40}{27}</math></p>
13	$v(t) = 12t - 2$ $v(5) = 12(5) - 2 = 58 \text{ m/s}$
14	$a(t) = 12$ $a(5) = 12 \text{ m/s}^2$
15	<p>تكون السيارة في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعتها 0</p> $v(t) = 12t - 2 = 0 \rightarrow 12t = 2 \rightarrow t = \frac{1}{6}$



## الدرس الخامس: تطبيقات القيم القصوى

1	$V = lwh = yx(2x) = 2x^2y$ $A = 2xy + (2x + 2y)(2x) = 6xy + 4x^2$ $600 = 6xy + 4x^2$ $600 - 4x^2 = 6xy$ $y = \frac{600 - 4x^2}{6x}$ $V(x) = 2x^2 \left( \frac{600 - 4x^2}{6x} \right)$ $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$	<p>حجم القالب:</p> <p>مساحة سطح القالب:</p> <p>حجم القالب بدلالة <math>x</math>:</p>
2	$V'(x) = 200 - 4x^2$ $200 - 4x^2 = 0$ $200 = 4x^2$ $x^2 = \frac{200}{4} = 50 \rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$ $x = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ <p>لكن الطول لا يكون سالبا، لذا فإن <math>x = 5\sqrt{2} \text{ cm}</math></p> $V''(x) = -8x$ $V''(5\sqrt{2}) = -40\sqrt{2} < 0$ <p>توجد قيمة عظمى عندما <math>x = 5\sqrt{2}</math> ، ويكون حجم القالب أكبر ما يمكن عندما <math>x = 5\sqrt{2} \text{ cm}</math></p>	
3	$s(x) = 150 - 0.5x$ $R(x) = x(150 - 0.5x) = 150x - 0.5x^2$	<p>سعر البذلة الواحدة</p> <p>اقتران الإيراد:</p>
4	$R'(x) = 2C'(x)$ $150 - x = 2(0.5x)$ $150 - x = x$ $2x = 150$ $x = 75$	<p>الإيراد الحدي:</p> $R'(x) = 150 - x$ <p>التكلفة الحدية:</p> $C'(x) = 0.5x$
5	$P(x) = R(x) - C(x)$ $= 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$	اقتران الربح:



6	$P'(x) = 150 - 1.5x$ $150 - 1.5x = 0$ $150 = 1.5x$ $x = \frac{150}{1.5} = \frac{1500}{15} = 100$ <p>توجد قيمة حرجة واحدة هي <math>x = 100</math></p> $P''(x) = -1.5$ $P''(100) = -1.5 < 0$ <p>توجد قيمة عظمى لهذا الاقتران عندما <math>x = 100</math> ويكون أكبر ربح ممكن عندما تكون عدد البدلات المباعة 100، ويكون أكبر ربح ممكن هو:</p> $P(100) = 150(100) - 0.75(100)^2 - 4000$ $= 15000 - 7500 - 4000 = 3500$
7	$s(100) = 150 - 0.5(100) = 100$ <p>ويكون حينها سعر البدلة الواحدة:</p>
8	$8 = 2x + 2y + \pi x \Rightarrow y = \frac{8 - 2x - \pi x}{2}$ $A = 2xy + \frac{1}{2}\pi r^2 = 2x \left( \frac{8 - 2x - \pi x}{2} \right) + \frac{1}{2}\pi x^2 = 8x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$ $A'(x) = 8 - 4x - 2\pi x + \pi x = 8 - x(4 + \pi)$ $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4 + \pi}$ $A''(x) = -4 - \pi$ $A''\left(\frac{8}{4 + \pi}\right) = -4 - \pi < 0$ <p>يمر الحد الأقصى من الضوء عندما <math>x = \frac{8}{4 + \pi}, y = \frac{8}{4 + \pi}</math></p>



حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور  
مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$V = \frac{1}{2}x^2l$$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2l$$

$$2000 = x^2l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين المستطيلين اللذين إحدى حافتيهما ضلع القائمة  $x$

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$9 \quad A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(\sqrt[3]{2000}) = 2 + \frac{8000}{(\sqrt[3]{2000})^3} = 2 + \frac{8000}{2000} = 2 + 4 = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما  $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}, \quad l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{(\sqrt[3]{2000})^2} = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}$$



## الدرس السادس: قاعدة السلسلة

1	$y = (1 - x + x^2 - x^3)^4$ $\frac{dy}{dx} = 4(1 - x + x^2 - x^3)^3 \times (-1 + 2x - 3x^2)$
2	$y = (x + x^2)^{\frac{3}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(x + x^2)^{\frac{1}{2}} \times (1 + 2x)$
3	$y = \frac{\sqrt{5 + 4x^2}}{2} = \frac{1}{2}(5 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(5 + 4x^2)^{-\frac{1}{2}} \times 8x = \frac{2x}{\sqrt{5 + 4x^2}}$
4	$y = \sqrt{1 + \sqrt{3x + 4}} = \left(1 + (3x + 4)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 + (3x + 4)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} (3x + 4)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{4\sqrt{3x + 4}\sqrt{1 + \sqrt{3x + 4}}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right _{x=0} = \frac{3}{4\sqrt{0 + 4}\sqrt{1 + \sqrt{0 + 4}}} = \frac{3}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$
5	$y = (2x - 3)^3$ $\frac{dy}{dx} = 6(2x - 3)^2$ $\frac{dy}{dx} = 24 \Rightarrow 6(2x - 3)^2 = 24 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 4 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 2$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}$ $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = (1 - 3)^3 = -8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -8\right)$ $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = (5 - 3)^3 = 8 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 8\right)$



6	$y = f(x^2 + 3x - 5)$ $\frac{dy}{dx} = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - 5)$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=1} = 5f'(-1) = 5 \times 2 = 10$
7	$y = (x^3 - 7)^5$ <p>نقطة التماس <math>(2,1)</math> <math>x = 2 \Rightarrow y = (8 - 7)^5 = 1 \Rightarrow (2,1)</math></p> $\frac{dy}{dx} = 15x^2(x^3 - 7)^4$ $m_{\text{التماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = 60$ $y - 1 = 60(x - 2)$ $y - 1 = 60x - 120$ $\Rightarrow y = 60x - 119 \text{ معادلة التماس}$



8	$y = \sqrt{x+9} = (x+9)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x+9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+9}}$ $m_{\text{المماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=16} = \frac{1}{2\sqrt{16+9}} = \frac{1}{10}$ $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 16)$ $y - 5 = \frac{1}{10}x - \frac{8}{5}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{10}x + \frac{17}{5} \quad \text{معادلة المماس}$ $y = 0 \Rightarrow \frac{1}{10}x + \frac{17}{5} = 0 \Rightarrow x = -34 \Rightarrow A(-34, 0)$ $m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = -10$ $y - 5 = -10(x - 16)$ $y - 5 = -10x + 160$ $\Rightarrow y = -10x + 165 \quad \text{معادلة العمودي}$ $y = 0 \Rightarrow -10x + 165 = 0 \Rightarrow x = \frac{165}{10} \Rightarrow A\left(\frac{165}{10}, 0\right)$ $AB = \frac{165}{10} + 34 = \frac{505}{10}$	
9	$\frac{dr}{dt} = 0.3 \text{ cm/s}$ $\left. \frac{dA}{dt} \right _{r=5 \text{ cm}}$ $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$ $= 10\pi \times 0.3 = 3\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$	<p>معدل التغير المعطى:</p> <p>معدل التغير المطلوب:</p> <p>العلاقة التي تربط مساحة الدائرة بطول نصف قطرها:</p>
10	$\frac{dV}{dA} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dA} = 4\pi r^2 \times \frac{1}{\frac{dA}{dr}} = 4\pi r^2 \times \frac{1}{8\pi r} = \frac{r}{2}$	



## الدرس الأول: قاعدة السلسلة

1	$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$
2	$f(x) = 3(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = -\frac{3}{2}(3-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{3x}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$
3	$f'(x) = \frac{5}{2}(3+4x)^{\frac{3}{2}}(4) = 10(3+4x)^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{(3+4x)^3}$
4	$f'(x) = 100(8-x)^{99}(-1) = -100(8-x)^{99}$
5	$f'(x) = 2x + 2(200-x)^1(-1) = 2x - 2(200-x)$ $= 2x - 400 + 2x$ $= 4x - 400$
6	$f(x) = (x^2-3)^{-3}$ $f'(x) = -3(x^2-3)^{-4}(2x) = \frac{-6x}{(x^2-3)^4}$
7	$f'(x) = 12x^2 + 4(x-2)^3$ $f'(2) = 12(4) + 4(2-2)^3 = 48$
8	$f'(x) = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$ $f'(8) = \frac{8+4}{\sqrt{64+64}} = \frac{12}{\sqrt{128}} = \frac{12}{8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
9	$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 14u$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (3u^2 - 14u) \times 2x$ $= 6x(x^2 + 3)^2 - 28x(x^2 + 3)$



10	$\frac{dy}{du} = \frac{-3}{2\sqrt{7-3u}}$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{-3}{2\sqrt{7-3u}} \times 2x$ $= \frac{-3x}{\sqrt{7-3(x^2-9)}} = \frac{-3x}{\sqrt{34-3x^2}}$
11	$P'(t) = 3 \left( t^{\frac{1}{4}} + 3 \right)^2 \times \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} = \frac{3 \left( t^{\frac{1}{4}} + 3 \right)^2}{4t^{\frac{3}{4}}} = \frac{3 \left( t^{\frac{1}{4}} + 3 \right)^2}{4^4 \sqrt{t^3}}$
12	$P'(16) = \frac{3(2+3)^2}{4(8)} = \frac{75}{32} \approx 2.34$
13	$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$ $f'(5) = g'(h(5)) \times h'(5)$ $= g'(-2) \times 6$ $= 4 \times 6 = 24$
14	$f'(x) = 8(h(x)) \times h'(x)$ $f'(5) = 8(h(5)) \times h'(5)$ $= 8 \times -2 \times 6 = -96$



الوحدة الثالثة: الاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

استعمال مخطط الشجرة لعد النواتج الممكنة لتجربة عشوائية صفحة 38

$(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)$   
 $(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)$   
 $(1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H)$   
 $(1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)$

استعمال مخطط الاحتمال لعد النواتج الممكنة لتجربة عشوائية صفحة 38

أحمر	×	×	×	×
أزرق	×	×	×	×
أبيض	×	×	×	×
	1	2	3	4

إيجاد احتمال الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة صفحة 39

$$1 \quad \frac{43}{91}$$

$$2 \quad \frac{48}{91}$$

إيجاد احتمال متممة الحادث صفحة 39

$$5 \quad P(\text{تتأخر الحافلة}) = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$$

$$6 \quad P(\text{عدم الإصابة بالسكري}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$7 \quad P(\text{لا يخسر الفريق المباراة}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$8 \quad P(\text{لا ترتدي نظارة}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$9 \quad P(\text{لا يفوز الفريق}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$10 \quad P(\text{لديه إخوة}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

إيجاد احتمال الحوادث المتنافية صفحة 40



11	0
12	$0.5 + 0.3 = 0.8$
	إيجاد احتمال الحوادث المتنافية الشاملة صفحة 41
13	$x = 1 - (0.3 + 0.4) = 0.3$
14	$x = 1 - (0.2 + 0.25 + 0.15 + 0.15 + 0.1) = 0.15$





### الدرس الأول: التباديل والتوافيق

1	$\frac{8!}{4!} = 1680$
2	${}_7P_3=210$
3	${}_7C_3=35$
4	${}_9C_0=1$
5	${}_5P_5=120$
6	$\frac{6! 4C2}{10C3} = 36$
7	192
8	${}_{20}C_2=190$
9	${}_8C_2 \times {}_{12}C_2 + {}_8C_1 \times {}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 = 4103$
10	${}_7C_3 \times {}_{12}C_5 + {}_7C_4 \times {}_{12}C_4 + {}_7C_5 \times {}_{12}C_3 = 49665$
11	$P(A) = \frac{7}{168}$
12	$P(A) = \frac{144}{720} = 0.2$
13	$P(A) = \frac{240}{720} \approx 0.3$



## الدرس الثاني: المتغيرات العشوائية

1	$X = \{1, 2, 3, 4\}$						
2	$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$						
3	$X = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14\}$						
4	X	0	1	2			
	P(X)	$\frac{121}{144}$	$\frac{22}{144}$	$\frac{1}{144}$			
5	$b + 0.4 + 2b + 0.12 = 1 \rightarrow b = 0.16$						
6	$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 1) = 1 - 0.16 = 0.84$						
7	$P(1 < Y \leq 7) = 1 - P(Y = 1) = 1 - 0.16 = 0.84$						
8	$E(X) = -1 \times 0.15 + 0 \times 0.25 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.25 = 1.3$						
	$Var(X) = 1 \times 0.15 + 0 \times 0.25 + 4 \times 0.35 + 9 \times 0.25 - (1.3)^2 = 2.11$						
9	X	1	2	3	4	5	6
	P(X)	$\frac{35}{520}$	$\frac{55}{520}$	$\frac{105}{520}$	$\frac{140}{520}$	$\frac{110}{520}$	$\frac{75}{520}$
10	$E(X) = \frac{35}{520} + \frac{110}{520} + \frac{315}{520} + \frac{560}{520} + \frac{550}{520} + \frac{450}{520} = \frac{2020}{520} = 3.88$						