9 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

السابق

في السابق، قمت بتحديد المعادلات المتعامدة للقطوع المخروطية وتمثيلها بيانيا.

الحالي

في **الوحدة 9**، ستقوم بما يلي:

- التمثيل البياني للإحداثيات القطبية والمعادلات القطبية.
- التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة وبين المعادلات القطبية والمعادلات المتعامدة.
- تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
- تحويل الأعداد المركبة بين الصورة القطبية والصورة المتعامدة.

لماذا؟ ▲

حفلات موسيقية يمكن استخدام المعادلات القطبية لتمثيل أنماط الصوت للمساعدة في تحديد ترتيب المسرح ووضع المتحدث والميكروفون ومستوى الصوت ومستويات التسجيل. يمكن أيضا استخدام المعادلات القطبية في الإضاءة وزوايا الكاميرات عند تصوير الحفلات الموسيقية.

قراءة مسبقة استخدم مقدمات دروس الوحدة 9 للتوصل إلى توقعين أو ثلاثة بشأن الدروس المستفادة من هذه الوحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

مثل كل دالة بيانيا. قم بتحليل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أو فردية أو ليست أيا منهما. قم بتأكيد إجابتك جبريا. إذا كانت فردية أو زوجية، فصف تناظر التمثيل البياني للدالة.

1. $f(x) = x^2 + 10$
2. $f(x) = -2x^3 + 5x$
3. $g(x) = \sqrt{x + 9}$
4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
5. $g(x) = 3x^5 - 7x$
6. $h(x) = \sqrt{x^2} - 5$
7. **منطاد** يمكن تمثيل المسافة بالأمتار بين منطاد وشخص عن طريق $d(t) = \sqrt{t^2 + 3000}$، حيث تمثل t الوقت بالثواني. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أم فردية، أم ليست أيا منهما.

قرب إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى النسبية أو المطلقة لكل دالة. حدد قيم x حيث تظهر.

8. $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$
9. $g(x) = -2x^2 + 9x - 1$
10. $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
11. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$
12. **صاروخ** تم إطلاق صاروخ في الهواء. تمثل الدالة $h(t) = -5t^2 + 11t + 5$ الارتفاع h للصاروخ بالأمتار بعد t الثواني. أوجد القيم القصوى لهذه الدالة.

حدد كل الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المذكورة. ثم أوجد وارسم زاوية واحدة موجبة وواحدة سالبة مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المذكورة.

13. $165°$
14. $205°$
15. $-10°$
16. $\frac{\pi}{6}$
17. $\frac{4\pi}{3}$
18. $-\frac{\pi}{4}$

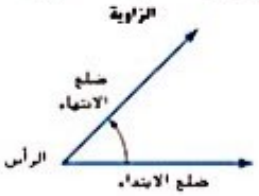
المفردات الجديدة

polar coordinate system	نظام إحداثي قطبي
pole	قطب
polar axis	محور قطبي
polar coordinates	الإحداثيات القطبية
polar equation	معادلة قطبية
polar graph	تمثيل بياني قطبي
limaçon	منحنى قلبي الشكل
cardioid	قلبي الشكل
rose	منحنى الوردة
lemniscate	منحنى ذو عروتين
spiral of Archimedes	حلزون أرشميدس
complex plane	مستوى مركب
real axis	محور حقيقي
imaginary axis	محور تخيلي
Argand plane	مستوى أرجاند
absolute value of a complex number	قيمة مطلقة لعدد مركب
polar form	صورة قطبية
trigonometric form	صيغة مثلثية
modulus	معامل
argument	إزاحة زاوية

مراجعة المفردات

ضلع ابتداء الزاوية الوضع المبدئي للشعاع

ضلع الانتهاء للزاوية وضع الشعاع بعد الدوران



قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري لتتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

9-1 الإحداثيات القطبية

السابق	الحالي	لماذا؟
• قست برسم الزوايا الموجبة والسالبة المعطاة بالدرجة والراديان في الوضع القياسي.	1 التمثيل البياني للنقاط باستخدام الإحداثيات القطبية. 2 تمثيل المعادلات القطبية بيانيا.	• لتوفير مسارات آمنة وسفر آمن، يستخدم موظفو التحكم في المرور الجوي نظم رادار متطورة لتوجيه حركة مرور الطائرات. يضمن هذا أن تحافظ الطائرات على مسافة كافية من الطائرات والعلامات الأخرى. يستخدم الرادار قياس الزاوية والمسافة الاتجاهية لتعيين أوضاع الطائرة. بعد ذلك يستطيع موظفو التحكم نقل هذه المعلومات إلى الطيارين.

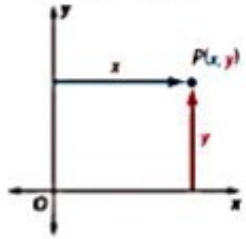
المفردات الجديدة

نظام إحداثي قطبي
polar coordinate system
قطب pole
محور قطبي polar axis
الإحداثيات القطبية
polar coordinates
معادلة قطبية
polar equation
تمثيل بياني قطبي
polar graph

1 تمثيل الإحداثيات القطبية بيانيا

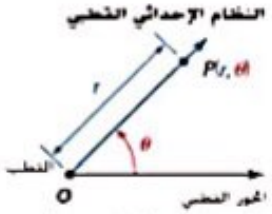
لتحقيق هذا الهدف. مثلت المعادلات بيانيا في نظام إحداثي متعامد. عندما يسجل موظفو التحكم في المرور الجوي مواقع الطائرات باستخدام المسافات والزوايا. يستخدمون **نظاما إحداثيا قطبيا** أو مستوى قطبيا.

النظام الإحداثي المتعامد



في النظام الإحداثي المتعامد، يأتي المحوران x و y على شكل مستقيمين أفقي ورأسي على التوالي. وتسمى نقطة تقاطعهم O نقطة الأصل. يتحدد موقع النقطة P بالإحداثيات المتعامدة بالصورة (x, y)، حيث x و y هما المسافتان الأفقية والرأسية الموجهتان، على التوالي إلى النقطة. على سبيل المثال، تقع النقطة $(3, -4)$ على بعد 3 وحدات إلى يمين المحور y وعلى بعد 4 وحدات أسفل المحور x.

النظام الإحداثي القطبي



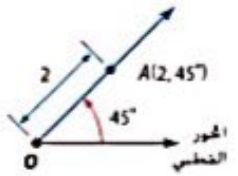
في النظام الإحداثي القطبي، نقطة الأصل نقطة ثابتة O تسمى **القطب**. **المحور القطبي** شعاع ابتداء من القطب، ويكون أفقيا في العادة وموجها نحو اليمين. يمكن تحديد موقع النقطة P في النظام الإحداثي القطبي عن طريق **الإحداثيات القطبية** بالصورة (r, θ)، حيث r هو المسافة الموجهة من القطب إلى النقطة و θ تمثل *الزاوية الموجهة* من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

لتمثيل نقطة في الإحداثيات القطبية، تذكر أن قيمة θ الموجبة تشير إلى دوران عكس حركة عقارب الساعة من المحور القطبي، بينما تشير القيمة السالبة إلى دوران في اتجاه حركة عقارب الساعة. إذا كانت r موجبة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء في θ. إذا كانت r سالبة، تقع P على الشعاع المقابل للضلع الطرفي في θ.

مثال 1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

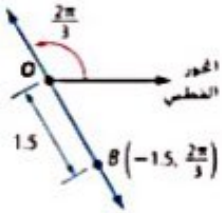
مثل كل نقطة بيانيا.

a. $A(2, 45°)$



بما أن $\theta = 45°$. فارسم ضلع الانتهاء بزاوية 45 درجة مع المحور القطبي كضلع ابتداء له. بما أن $r = 2$. فعين نقطة على مسافة وحدتين من القطب على ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.

b. $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

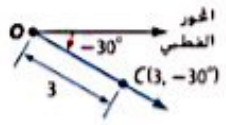


بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$. فارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{2\pi}{3}$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن r سالبة. فقم بتوسيع ضلع الابتداء في الزاوية في الاتجاه المعاكس وعين نقطة على مسافة 1.5 وحدة من القطب على هذا الشعاع الموسع.

حقوق الطبع والتأليف © محدودة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

Scanned by CamScanner

c. $C(3, -30°)$



بما أن $\theta = -30°$. فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن $r = 3$. فعين نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.

تمرين موجّه

مثل كل نقطة بيانيا.

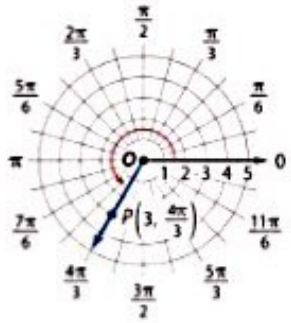
1A. $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B.** $E(2.5, 240°)$ **1C.** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

كما يتم التمثيل البياني للإحداثيات المتعامدة على شبكة متعامدة، يتم التمثيل البياني للإحداثيات القطبية على شبكة دائرية أو قطبية تمثل المستوى القطبي.

مثال 2 التمثيل البياني للنقاط على شبكة قطبية

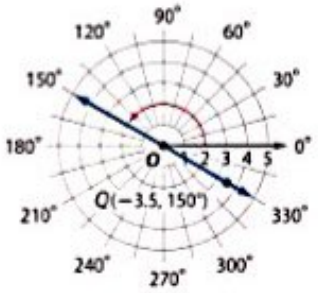
مثل كل نقطة بيانيا على شبكة قطبية.

a. $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$



بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$. فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن $r = 3$. فعين نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

b. $Q(-3.5, 150°)$



بما أن $\theta = 150°$. فارسم ضلع الانتهاء لزاوية $150°$ حيث المحور القطبي هو ضلع ابتداء لها. بما أن r سالبة، فقم بتوسيع ضلع الابتداء في الزاوية في الاتجاه *المعاكس* وعين نقطة على مسافة 3.5 وحدات من القطب على هذا الشعاع الموسع.

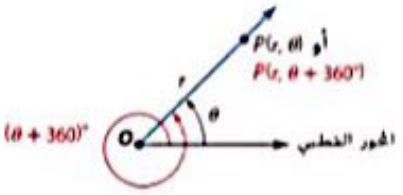
تمرين موجّه

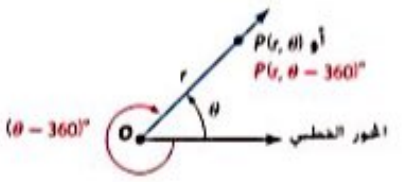
2A. $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B.** $S(-2, -135°)$

نصيحة دراسية

القطب يمكن تمثيل القطب بواسطة $(0, \theta)$، حيث θ هي أي زاوية.

في النظام الإحداثي المتعامد، لكل نقطة مجموعة متفردة من الإحداثيات. لا ينطبق هذا على النظام الإحداثي القطبي. في الدرس 2-4، تعلمت أن لكل زاوية زوايا كثيرة لانهائية مشتركة في ضلع الانتهاء. لذلك، إذا كانت الاحداثيات القطبية لنقطة معينة هي (r, θ)، فإن لها أيضا الاحداثيات القطبية $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما هو موضح.

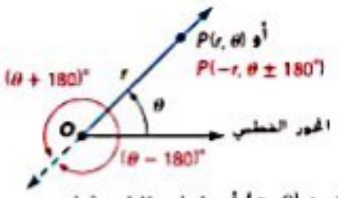




حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

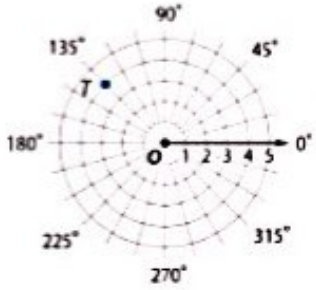
كما أنه بما أن r مسافة موجهة، فتمثل (r, θ) و$(-r, \theta \pm 180°)$ أو $(-r, \theta \pm \pi)$ النقطة نفسها كما هو موضح.



بشكل عام، إذا كان n أي عدد صحيح، فيمكن تمثيل النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ) أيضا بإحداثيات قطب بالصورة $(r, \theta + 360n°)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ معطاة بوحدة الراديان وكانت n هي أي عدد صحيح، فإن التمثيلات الأخرى لـ (r, θ) تأتي بالصورة $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

مثال 3 التمثيلات المتعددة للإحداثيات القطبية

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعين النقطة T إذا علمت أن $-360° \le \theta \le 360°$.



أحد أزواج الإحداثيات القطبية التي تحدد النقطة T الإحداثي $(4, 135°)$. تأتي التمثيلات الثلاثة الأخرى كالتالي.

$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ — اطرح $360°$ من θ

$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ — استبدل r بـ $-r$

$= (-4, 315°)$ — واجمع $180°$ مع θ.

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ — استبدل r بـ $-r$

$= (-4, -45°)$ — واطرح $180°$ من θ.

تمرين موجه

أوجد ثلاثة أزواج إضافية من الإحداثيات القطبية التي تعين النقطة المعطاة إذا كان $-360° \le \theta \le 360°$ أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

3A. $(5, 240°)$

3B. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

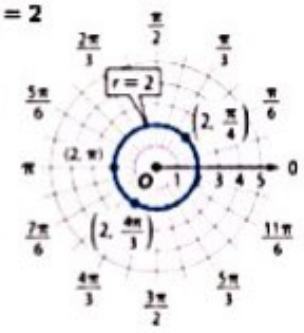
معادلة قطبية على سبيل المثال، $r = 2 \sin \theta$ معادلة قطبية. **التمثيل البياني القطبي** هو مجموعة كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معينة.

سبق أن تعرفت على كيفية التمثيل البياني للمعادلات في النظام الإحداثي الديكارتي أو "المتعامد". تعتبر التمثيلات البيانية للمعادلات التي تتضمن قيما ثابتة مثل $x = 2$ و $y = -3$ أساسية في النظام الإحداثي الديكارتي. وعلى المنوال نفسه، تعتبر التمثيلات البيانية للمعادلتين القطبيتين $r = k$ و $\theta = k$، حيث k قيمة ثابتة، أساسية في النظام الإحداثي القطبي.

مثال 4 تمثيل المعادلات القطبية بيانيا

مثل كل معادلة قطبية بيانيا.

a. $r = 2$



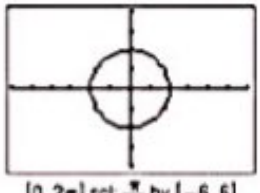
حلول $r = 2$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد وحدتين عن القطب، بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2.

تلميح تقني

تمثيل المعادلات القطبية بيانيا

لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ بيانيا على حاسبة تمثيل بياني، اضغط أولا على MODE وقم بتغيير إعداد التمثيل البياني من FUNC إلى POL. عندما تضغط على Y=، لاحظ أن المتغير التابع قد تغير من Y إلى r وتغير المتغير المستقل من x إلى θ. مثل بيانيا $r = 2$.

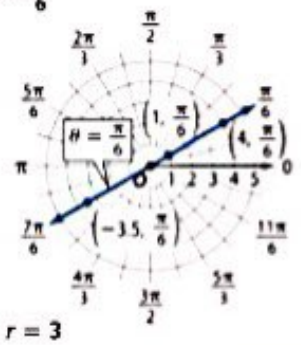


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{16}$ by $[-6, 6]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

b. $\theta = \frac{\pi}{6}$



حلول $\theta = \frac{\pi}{6}$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r هي أي عدد حقيقي. يتألف التمثيل البياني من كل النقاط على المستقيم التي تصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.

تمرين موجّه

مثل كل معادلة قطبية بيانيا.

4A. $r = 3$

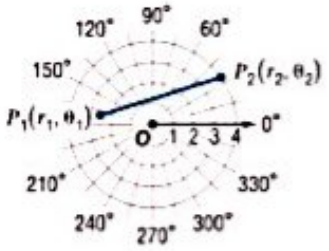
4B. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستخدام الصيغة التالية.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة القطبية

إذا كانت $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ are نقطتين في المستوى القطبي، فإن المسافة P_1P_2 تتحدد بالعلاقة

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



انتبه!

الوضع عند استخدام صيغة المسافة القطبية، إذا تم إعطاء θ بالدرجة، فتأكد من ضبط حاسبة التمثيل البياني على وضع الدرجات.

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 63

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد المسافة بين الإحداثيات القطبية

الحركة الجوية يتتبع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على ارتفاع واحد. إحداثيات الطائرتين هي $A(8, 310°)$ و $B(10, 345°)$، حيث تقاس المسافة الموجهة بالكيلومتر.

a. اصنع تمثيلا بيانيا لهذا الموقف.

تقع الطائرة A على مسافة 8 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 310°. وتقع الطائرة B على مسافة 10 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 345°. كما هو موضح.

b. إذا كانت اللوائح تحظر على الطائرات المرور ضمن مسافة خمسة كيلومترات من بعضها البعض، فهل تنتهك الطائرتان اللوائح؟ اشرح.

استخدم صيغة المسافة القطبية.

صيغة المسافة القطبية

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$
و $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$

$$= \sqrt{8^2 + 10^2 - 2(8)(10)\cos(345° - 310°)} = 5.65$$ حوالي

بين الطائرتين مسافة 5.65 كيلومترات. إذا فهما لا تنتهكان هذه اللائحة.

تمرين موجّه

5. قوارب يعمل رادار بحري على تعقب حاملتي طائرات. إحداثيات الحاملتين هي $(13, 150°)$ و $(5, 65°)$، مع قياس r بالكيلومترات.

A. اصنع تمثيلا بيانيا لهذا الموقف.

B. ما المسافة بين حاملتي الطائرات؟

الربط بالحياة اليومية

ابتكرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 بإمكانه أن يتتبع الطائرات في دائرة يبلغ نصف قطرها 128 كيلومترا. في العام التالي، كانت ألمانيا أول بلد يزود سفينة حربية، السفينة ضرائب سيبي، بأول نظام رادار.

المصدر: تاريخ صناعة أشياء الوصلات العالمية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

مثل كل نقطة على شبكة قطبية بيانيا. المثالان 1 ، 2

1. $R(1, 120°)$
2. $T(-2.5, 330°)$
3. $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4. $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $B(5, -60°)$
7. $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
8. $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
9. $C(-4, \pi)$
10. $M(0.5, 270°)$
11. $P(4.5, -210°)$
12. $W(-1.5, 150°)$

13. **الرماية** يتألف الهدف في مسافة رماية من 10 دوائر مشتركة في المركز وتقع على مسافات متساوية بقيم للدرجات من 1 إلى 10 نقاط من الدائرة الخارجية إلى المركز. افترض أن راميا يستخدم هدفا بنصف قطر يبلغ 60 سنتيمترا يطلق السهام بالإحداثيات $(45°, 57)$ و$(315°, 41)$ و$(240°, 15)$. المثالان 1 ، 2

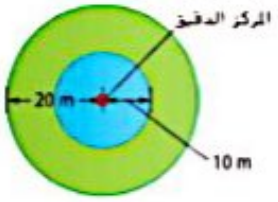
a. عين نقاط إصابة الهدف التي يحققها الرامي على شبكة قطبية.

b. كم عدد النقاط التي يحرزها الرامي؟

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \leq 360°$ أو $-2\pi < \theta \leq 2\pi$. المثال 3

14. $(1, 150°)$
15. $(-2, 300°)$
16. $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
17. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
19. $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
20. $(2, -30°)$
21. $(-1, -240°)$

22. **القفز الحر** في منافسات الهبوط الدقيق، يحاول لاعبو القفز الحر الهبوط في أقرب نقطة ممكنة من "المركز الدقيق". مركز هدف علامته قرص قطره متران. المثال 4



a. اكتب المعادلات القطبية التي تمثل الحدود الثلاثة للهدف.

b. مثل المعادلات بيانيا على شبكة قطبية.

مثل كل معادلة قطبية بيانيا. المثال 4

23. $r = 4$
24. $\theta = 225°$
25. $r = 1.5$
26. $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
27. $\theta = -15°$
28. $r = -3.5$

29. **لوح تصويب** يبلغ نصف قطر لوح تصويب 225 ملليمترا. تنقسم النقطة المركزية إلى قسمين. قسم يعطي 50 نقطة بنصف قطر 6.3 ملليمترات. يحيط قسم الـ 25 نقطة بقسم الـ 50 نقطة بعد مسافة 9.7 ملليمترات أخرى. المثال 4

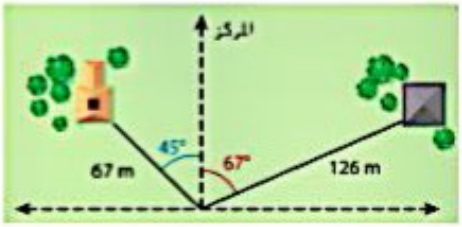
a. اكتب مع التمثيل البياني المعادلات القطبية التي تمثل حدود لوح التصويب وهذين القسمين.

b. ما النسبة المئوية لمساحة نقطة الهدف من مساحة لوحة التصويب؟

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. المثال 5

30. $(2, 30°), (5, 120°)$
31. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$
32. $(6, 45°), (-3, 300°)$
33. $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$
34. $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$
35. $(4, -315°), (1, 60°)$
36. $(-2, -30°), (8, 210°)$
37. $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$
38. $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$
39. $(7, -90°), (-4, -330°)$
40. $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$
41. $(-5, 135°), (-1, 240°)$

42. **مسح الأراضي** يقوم ماسح الأراضي بوضع خريطة الأرض التي سيتم بناء مشروع سكني جديد عليها ويضع علامة على مسافة 67 مترا من المركز بزاوية 45 درجة إلى يساره. تقع العلامة الثانية على مسافة 126 مترا من المركز بزاوية 67 درجة إلى يمينه. حدد المسافة بين العلامتين. المثال 5



43. **المراقبة** تتحرك كاميرا مراقبة مثبتة وتراقب أحد أحياء منطقة دائرية محددة بواسطة $-60° \leq \theta \leq 150°$ و $0 \leq r \leq 40$. حيث تقاس r بالمتر.

a. ارسم تمثيلا بيانيا لمنطقة تغطية الكاميرا الأمنية على شبكة قطبية.

b. أوجد مساحة المنطقة.

أوجد زوجا مختلفا للإحداثيات القطبية لكل نقطة بحيث تكون $-180° \leq \theta \leq 0$ أو $-\pi \leq \theta \leq 0$.

44. $(5, 960°)$
45. $\left(-2.5, \frac{5\pi}{2}\right)$
46. $\left(4, \frac{11\pi}{4}\right)$
47. $(1.25, -920°)$
48. $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$
49. $(-6, -1460°)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

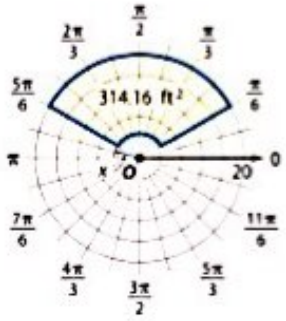
Scanned by CamScanner

50. **مسرح مدرج دائري** افترض أن مغنيا يقدم عرضا في مسرح مدرج دائري. يمكننا تمثيل هذا الموقف بإحداثيات قطب بافتراض أن المغني يقف عند القطب ويتجه نحو المحور القطبي. بعد ذلك يمكن وصف المقاعد بأنها تشغل المساحة المحددة بالعلاقة $-45° \le \theta \le 45°$, $9 \le r \le 72$. حيث يتم قياس r بالأمتار.

a. **ارسم** تمثيلا بيانيا لهذه المنطقة على شبكة قطبية.

b. **إذا** كان كل شخص يحتاج إلى مساحة 0.45 متر مربع. فكم عدد المقاعد التي يمكن للمسرح المدرج الدائري استيعابها؟

51. **الأمان** يضيء مصباح أمان معلق فوق منزل جزءا من منطقة دائرية تتحدد بالعلاقة $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ و $6 \le r \le x$. حيث يتم قياس r بالأمتار. إذا كان إجمالي مساحة المنطقة يبلغ 28.27 مترا مربعا تقريبا، فأوجد x.



أوجد قيمة للإحداثي المفقود التي تحقق الشرط التالي.

52. $P_1 = (3, 35°)$; $P_2 = (r, 75°)$; $P_1P_2 = 4.174$

53. $P_1 = (5, 125°)$; $P_2 = (2, \theta)$; $P_1P_2 = 4$; $0 \le \theta \le 180°$

54. $P_1 = (3, \theta)$; $P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right)$; $P_1P_2 = 5$; $0 \le \theta \le \pi$

55. $P_1 = (r, 120°)$; $P_2 = (4, 160°)$; $P_1P_2 = 3.297$

56. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

a. **بيانيا** عين النقطتين $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. ارسم نظاما إحداثيا متعامدا على شبكة قطبية بحيث تتطابق نقاط الأصل ويتوازى المحور x مع المحور القطبي. ينبغي أن يتوازى المحور y مع المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. اصنع مثلثا واحدا قائم الزاوية عن طريق توصيل النقطة A بنقطة الأصل عموديا على المحور x. اصنع مثلثا آخر قائم الزاوية عن طريق توصيل B بنقطة الأصل عموديا على المحور x.

b. **عدديا** احسب أطوال أضلاع كل مثلث.

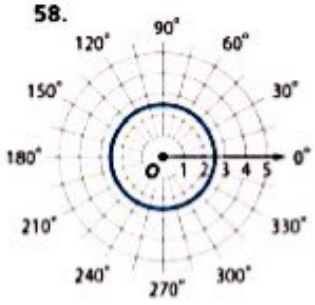
c. **تحليليا** ما العلاقة بين أطوال الأضلاع والإحداثيات المتعامدة لكل نقطة؟

d. **تحليليا** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) والإحداثيات المتعامدة (x, y).

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني قطبي.

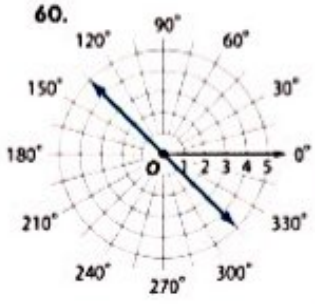
57.

58.



59.

60.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. **التبرير** اشرح السبب في أن ترتيب النقاط المستخدم في قانون المسافة القطبية ليس مهما. بمعنى لماذا تستطيع أن تختار أيا من النقطتين لتكون P_1 والأخرى لتكون P_2؟

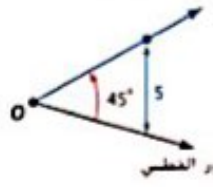
62. **تحد** أوجد زوجا مرتبا لإحداثيات قطب ليمثل النقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(-3, -4)$. قم بتقريب قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

63. **البرهان** أثبت أن المسافة بين النقطتين ذواتي الإحداثيات القطبية $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$. (إرشاد: استخدم قانون Cosine.)

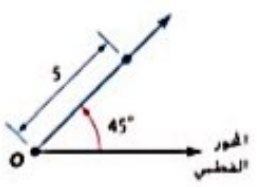
64. **التبرير** صف ما يحدث لصيغة المسافة القطبية عندما تكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. اشرح هذا التغير.

65. **تحليل الخطأ** مثلث كل من علياء وعبير الإحداثيات القطبية $(5, 45°)$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

علياء



عبير



66. **الكتابة في الرياضيات** قم بتحسين سبب عدم كفاية الحصول على الإحداثيات القطبية لطائرة لتحديد موقعها بدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

مراجعة شاملة

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v. ثم حدد ما إذا كانت u و v متعامدتين.

67. $u = \langle 4, 10, 1 \rangle, v = \langle -5, 1, 7 \rangle$

68. $u = \langle -5, 4, 2 \rangle, v = \langle -4, -9, 8 \rangle$

69. $u = \langle -8, -3, 12 \rangle, v = \langle 4, -6, 0 \rangle$

أوجد قيمة كل مما يلي حيث $a = \langle -4, 3, -2 \rangle$ و $b = \langle 2, 5, 1 \rangle$ و $c = \langle 3, -6, 5 \rangle$.

70. $3a + 2b + 8c$

71. $-2a + 4b - 5c$

72. $5a - 9b + c$

73. **المعرض الوطني** إذا اشترى كل من سعيد وسلطان العدد الموضح أدناه من تذاكر الألعاب والأراجيح. فما سعر كل نوع من التذاكر؟

الشخص	نوع التذكرة	التذاكر	الإجمالي (AED)
سعيد	لعبة أرجوحة	6 15	93
سلطان	لعبة أرجوحة	7 12	81

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية.

74. $12w + 14x - 10y = 23$
$4w - 5y + 6z = 33$
$11w - 13x + 2z = -19$
$19x - 6y + 7z = -25$

75. $-6x + 2y + 5z = 18$
$5x - 7y + 3z = -8$
$y - 12z = -22$
$8x - 3y + 2z = 9$

76. $x + 8y - 3z = 25$
$2x - 5y + 11z = 13$
$-5x + 8z = 26$
$y - 4z = 17$

حل كل معادلة لإيجاد جميع قيم x.

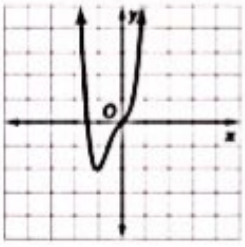
77. $2\cos^2 x + 5\sin x - 5 = 0$

78. $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

79. $\cos^2 x + 3\cos x = -2$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT إذا كان الشكل يوضح أحد أجزاء التمثيل البياني لـ $f(x)$ فأي مما يلي يمكن أن يكون مدى $f(x)$؟

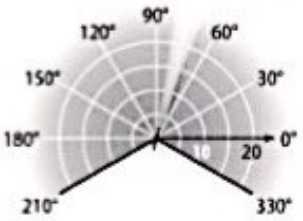


A $\{y | y \geq -2\}$
B $\{y | y \leq -2\}$
C $\{y | -2 < y < 1\}$
D $\{y | -2 \leq y \leq 1\}$
E $\{y | y > -2\}$

81. **مراجعة** أي مما يلي صورة مركبة من $\overrightarrow{RS}$ بنقطة البداية $R(-5, 3)$ ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

F $\langle 7, -10 \rangle$
G $\langle -3, 10 \rangle$
H $\langle -7, 10 \rangle$
J $\langle -3, -10 \rangle$

82. رشاش العشب الموضح يمكنه تغطية جزء من منطقة دائرية تحدده المتباينتان القطبيتان $-30° \leq \theta \leq 210°$ و $0 \leq r \leq 6$. حيث يتم قياس r بالأمتار. ما المساحة التخريبية لهذه المنطقة؟



A 73.89 مترا مربعا
B 75.42 مترا مربعا
C 76.68 مترا مربعا
D 77.94 مترا مربعا

83. **مراجعة** ما نوع المخروط الذي يمثله $25y^2 = 400 + 16x^2$؟

F دائرة
G قطع ناقص
H قطع زائد
J قطع مكافئ

McGraw-Hill Education محفوظ الجمع والتأليف © محمولة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

9-3 الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

السابق

- استخدمت نظاما إحداثيا قطبيا لتمثيل النقاط والمعادلات بيانيا.

(الدرسين 1-9 و 2-9)

الحالي

1 التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

2 التحويل بين المعادلات القطبية والمتعامدة.

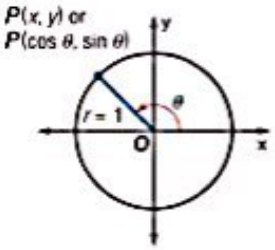
لماذا؟

- يبعث مستشعر فوق صوتي متصل بإنسان آلي إشعاعا متجها للخارج يدور دورة كاملة. يلتقط المستشعر إشارة راجعة عندما يتقاطع الإشعاع مع جسم. وبحسب موضع الجسم من حيث مسافته r وقياس الزاوية θ بالنسبة إلى مقدمة الإنسان الآلي. ينقل المستشعر الإحداثيات القطبية هذه إلى الإنسان الآلي الذي يحولها إلى إحداثيات متعامدة كي يتمكن من تعيين الجسم على خريطة داخلية.

1 الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة

تذكر من الوحدة 4 أن إحداثيات نقطة $P(x, y)$ المقابلة لزاوية θ على دائرة وحدة لها نصف قطر يساوي 1 يمكن كتابتها بدلالة θ بالشكل $P(\cos \theta, \sin \theta)$ لأن

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$



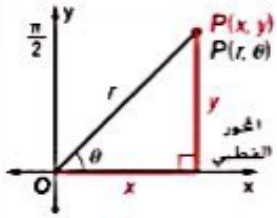
إذا افترضنا أن r تمثل أي قيمة حقيقية، فيمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة كل من r وθ.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$r \cos \theta = x \quad r \sin \theta = y$$ اضرب كل طرف في r.

إذا افترضنا أن المحور القطبي والقطب في نظام الإحداثيات القطبية يتطابقان مع المحور الأفقي x الموجب ونقطة الأصل في النظام الإحداثي المتعامد على التوالي. فقد أصبح لدينا الآن وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة.

المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة



إذا كانت النقطة P لها الإحداثيات القطبية (r, θ)، فيتم التعبير عن الإحداثيات المتعامدة (x, y) للنقطة P كالتالي

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta.$$

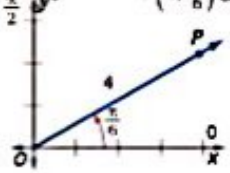
أي أن $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

مثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات متعامدة

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة.

a. $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بالنسبة إلى $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، $r = 4$ و$\theta = \frac{\pi}{6}$.



صيغة التحويل

$x = r \cos \theta$

$= 4 \cos \frac{\pi}{6}$ ، $r = 4$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ بسط

$= 2\sqrt{3}$

$y = r \sin \theta$

$= 4 \sin \frac{\pi}{6}$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 2$

الإحداثيات المتعامدة للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو بالتقريب $(3.46, 2)$ كما هو موضح.

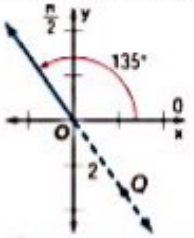
حقوق الطبع والتأليف © لمجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

b. $Q(-2, 135°)$

بالنسبة إلى $Q(-2, 135°)$، $r = -2$ ، $\theta = 135°$.

$x = r\cos\theta$	صيغة التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2$ ، $\theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	بسط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2}$		$= -\sqrt{2}$

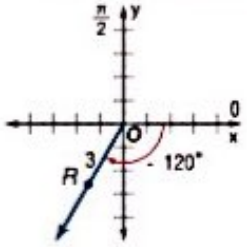


الإحداثيات المتعامدة للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو بالتقريب $(1.41, -1.41)$ كما هو موضح.

c. $V(3, -120°)$

بالنسبة إلى $V(3, -120°)$، $r = 3$ ، $\theta = -120°$.

$x = r\cos\theta$	صيغة التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3\cos -120°$	$r = 3$ ، $\theta = -120°$	$= 3\sin -120°$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right)$	بسط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -\frac{3}{2}$		$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$



الإحداثيات المتعامدة للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو بالتقريب $(-1.5, -2.6)$ كما هو موضح.

تمرين موجه

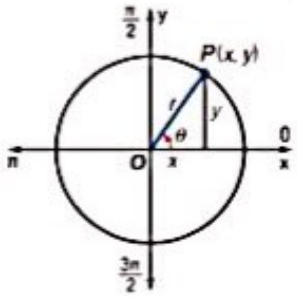
1A. $R(-6, -120°)$ **1B.** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C.** $T(-3, 45°)$

نصيحة دراسية

تحويلات الإحداثيات

إن عملية تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية هي نفسها العملية المستخدمة لتحديد مقدار المتجهات واتجاهها في الوحدة 8.

لكتابة زوج من الإحداثيات المتعامدة بالصورة القطبية، عليك إيجاد المسافة r التي تبعدها النقطة (x, y) عن نقطة الأصل أو القطب، وزاوية القياس θ المقيسة لهذه النقطة من المحور x أو المحور القطبي.



لإيجاد المسافة r بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل، استخدم نظرية فيثاغورس.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

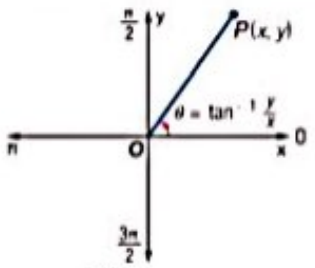
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

ترتبط الزاوية θ بكل من x و y عن طريق دالة ظل الزاوية.

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ نسبة ظل الزاوية

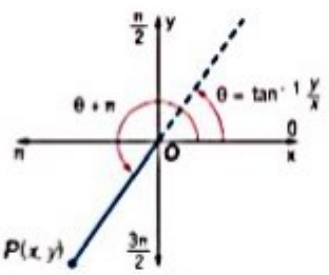
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ تعريف دالة معكوس ظل الزاوية

تذكر أن دالة معكوس ظل الزاوية لا تكون معرفة إلا على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $[-90°, 90°]$. في النظام الإحداثي المتعامد، يشير هذا إلى قيم θ في الربعين الأول والرابع أو عندما تكون $x > 0$. كما يظهر في الشكل 9.3.1. إذا كانت إحدى النقاط تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث، أي عندما تكون $x < 0$، يجب أن تضيف π أو $180°$ إلى قياس الزاوية الناتجة عن دالة معكوس ظل الزاوية، كما هو موضح في الشكل 9.3.2.



عندما تكون $x < 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

الشكل 9.3.1



عندما تكون $x < 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

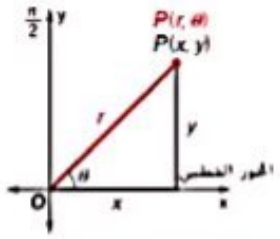
الشكل 9.3.2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية

إذا كانت النقطة P لها إحداثيات متعامدة (x, y) فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P تحدد بواسطة



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$.

نذكر أن الإحداثيات القطبية ليست متفردة. يؤدي التحويل من الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية إلى تمثيل واحد فقط للإحداثيات القطبية. إلا أن هناك عددا لا نهائيا من التمثيلات القطبية لنقطة معينة في الشكل المتعامد.

تلميح تقني

تحويلات الإحداثيات لتحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية باستخدام حاسبة. اضغط على 2nd APPS لعرض قائمة ANGLE حدد R▶Pr (وأدخل الإحداثيات. سيؤدي هذا إلى حساب قيمة r. لحساب θ. كرر هذه العملية لكن حدد R▶Pθ).

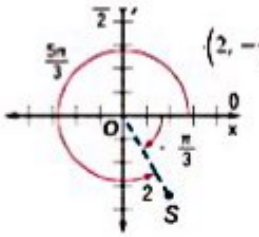
مثال 2 تحويل الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات المتعامدة المعطاة.

a. $S(1, -\sqrt{3})$

بالنسبة إلى $S(x, y) = (1, -\sqrt{3})$. فإن $x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$. ولأن $x > 0$. استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ للتوصل إلى θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1$ و $y = -\sqrt{3}$	$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسط	$= -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$



إحدى مجموعات الإحداثيات القطبية لـ S هي $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$

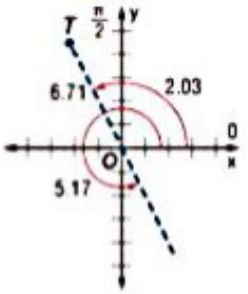
هناك تمثيل آخر يستخدم قيمة θ موجبة وهو $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$. كما هو موضح.

b. $T(-3, 6)$

بالنسبة إلى $T(x, y) = (-3, 6)$. فإن $x = -3$ و $y = 6$.

ولأن $x < 0$. فاستخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ للتوصل إلى θ.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$x = -3$ و $y = 6$	$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$
$= \sqrt{45}$ حوالي $= 6.71$	بسط	$= \tan^{-1}(-2) + \pi$ حوالي $= 2.03$



إحدى مجموعات الإحداثيات القطبية لـ T هي تقريبا $(6.71, 2.03)$. هناك تمثيل آخر يستخدم قيمة r سالبة هو $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$. كما هو موضح.

تمرين موجه

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة في الإحداثيات المتعامدة المعطاة. مع التقريب إلى أقرب مئة. إذا لزم الأمر.

2A. $V(8, 10)$

2B. $W(-9, -4)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

في بعض الظواهر من الحياة اليومية، يكون من المفيد التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة.

مثال 3 من الحياة اليومية تحويل الإحداثيات

علم الإنسالات راجع بداية الدرس. لنفترض أن الإنسان الآلي يتجه نحو الشرق ويرصد المجس وجود جسم عند $(5, 295°)$.

a. ما الإحداثيات المتعامدة التي سيتعين على الإنسان الآلي حسابها؟

$x = r\cos\theta$	صيغة التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5$ ، $\theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بسط	≈ -4.53

يقع الجسم عند الإحداثيات المتعامدة $(2.11, -4.53)$.

b. إذا كان لجسم تم اكتشافه الإحداثيات المتعامدة $(3, 7)$، فكم يبعد الجسم وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجانب الأمامي للإنسان الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3$ ، $y = 7$	$= \tan^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بسط	$\approx 66.8°$

يقع الجسم عند الإحداثيات القطبية $(7.62, 66.8°)$.

تمرين موجه

3. الصيد باحث الأسماك نوع من الرادار يستخدم في تحديد موقع الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربا يتجه إلى الشرق ويعطي باحث الأسماك الإحداثيات القطبية $(6, 125°)$ لسرب أسماك.

A. ما الإحداثيات المتعامدة لسرب الأسماك؟

B. إذا كان لسرب أسماك تم اكتشافه الإحداثيات المتعامدة $(-2, 6)$ فكم يبعد السرب وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجهة الأمامية من الخارب؟

الربط بالحياة اليومية

ديكستروز مانيبولينور، أو ديكستر، إنسان آلي للمهام الخاصة يتبع وكالة ناسا ويعمل بحزم 15,100 سوتن ويبلغ طوله 3.6 أمتار ويبلغ طول ذراعه 3.3 أمتار. يتولى ديكستر مسؤولية أداء بعض المهام في الفضاء كانت قبل ذلك تتطلب رواد فضاء لأدائها.

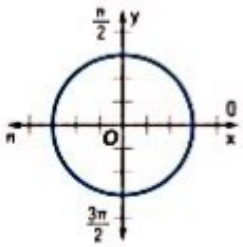
المصدر: جريدة *New York Times*

2 المعادلات القطبية والمتعامدة

في حساب التفاضل والتكامل، سنحتاج أحيانا إلى التحويل من الصورة المتعامدة لمعادلة إلى صورتها القطبية وبالعكس لتيسير بعض الحسابات. بعض المعادلات المتعامدة المعقدة لها معادلات قطبية أبسط بكثير. فلننظر إلى المعادلتين المتعامدة والقطبية للتمثيل البياني الدائري أدناه.

المعادلة المتعامدة

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة القطبية

$r = 3$

وبالمثل، بعض المعادلات القطبية لها معادلات متعامدة أبسط بكثير. مثل الخط الممثل بيانيا أدناه.

المعادلة القطبية

$$r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$$

المعادلة المتعامدة

$2x - 3y = 6$

محفوظ الطبع والتأليف © لمجموعة McGraw-Hill Education لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

يتم تحويل المعادلة المتعامدة إلى معادلة قطبية بشكل مباشر تماما. استبدل x بـ $r\cos\theta$ واستبدل y بـ $r\sin\theta$. ثم بسط المعادلة الناتجة باستخدام معالجات جبرية ومتطابقات مثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات المتعامدة إلى معادلات قطبية

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

a. $(x-4)^2+y^2=16$

التمثيل البياني لـ $(x-4)^2+y^2=16$ عبارة عن دائرة بنصف قطر 4 بدع عند (4, 0). للتوصل إلى الصورة القطبية لهذه المعادلة، استبدل x بـ $r\cos\theta$ واستبدل y بـ $r\sin\theta$. ثم بسط.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب.
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	اطرح 16 من كل طرف.
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	افصل الحدود المربعة.
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلل إلى العوامل.
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	بقسمة كل طرف على r.

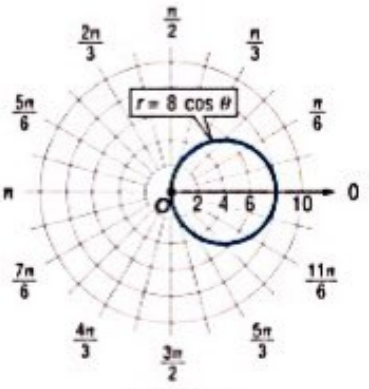
التمثيل البياني لهذه المعادلة القطبية (الشكل 9.3.3) عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة (4, 0).

b. $y=x^2$

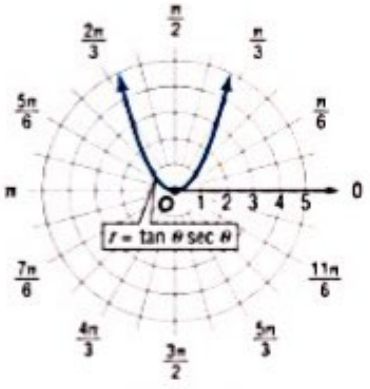
التمثيل البياني للمعادلة $y=x^2$ عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند النقطة الأصل ثم بتسع.

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	اضرب.
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	اقسم كل طرف على $r\cos^2\theta$.
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	أعد الكتابة.
$\tan\theta\sec\theta=r$	متطابقة ناتج القسمة ومتطابقة المعكوس الضربي

التمثيل البياني للمعادلة القطبية $r=\tan\theta\sec\theta$ (الشكل 9.3.4) عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند القطب ثم بتسع.



الشكل 9.3.3



الشكل 9.3.4

تمرين موجه

4A. $x^2+(y-3)^2=9$

4B. $x^2-y^2=1$

نصيحة دراسية

المتطابقات المثلثية ستجد أنه من المفيد مراجعة المتطابقات المثلثية التي درستها في الوحدة 5 لتساعدك على تبسيط الصور القطبية للمعادلات المتعامدة. يوجد موجز لهذه المتطابقات على غلاف هذا الكتاب من الداخل.

جميع الحقوق محفوظة © لمالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

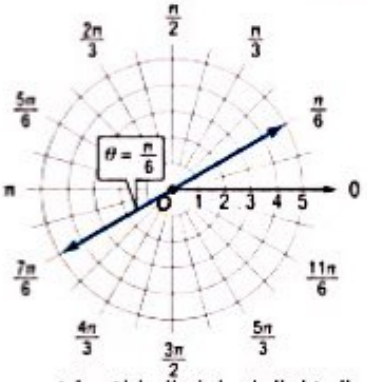
ولكتابة معادلة قطبية في صورة متعامدة، فإنك تستخدم أيضا العلاقات $r^2 = x^2 + y^2$، $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، $\tan\theta = \frac{y}{x}$ إلى جانب العلاقة θ. إلا أن العملية ليست مباشرة مثل التحويل من صورة متعامدة إلى صورة قطبية.

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات متعامدة

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة، ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

a. $\theta = \frac{\pi}{6}$

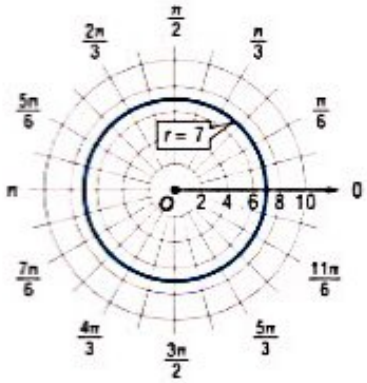
$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	إيجاد ظل الزاوية لكل طرف.
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب كل طرف في x.



التمثيل البياني لهذه المعادلة عبارة عن مستقيم يمر بنقطة الأصل وله ميل $\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو حوالي $\frac{2}{3}$. كما هو مبين من التمثيل البياني $\theta = \frac{\pi}{6}$ الموضح.

b. $r = 7$

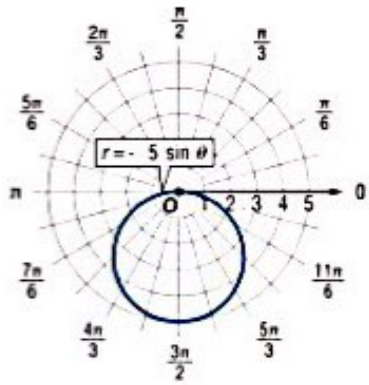
$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	بتربيع كل طرف.
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$



التمثيل البياني لهذه المعادلة المتعامدة عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ولها نصف قطر 7. كما هو مبين من التمثيل البياني $r = 7$ الموضح.

c. $r = -5\sin\theta$

$r = -5\sin\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r\sin\theta$	بضرب كل طرف في r.
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2$، $y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	بإضافة $5y$ إلى كل طرف.



نظرا لأنه في الصورة الضياسية. $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$، فبإمكانك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة على هيئة دائرة مركزها عند النقطة $(0, -2.5)$ ولها نصف قطر 2.5. كما هو مبين من التمثيل البياني $r = -5\sin\theta$.

تمرين موجه

5A. $r = -3$ **5B.** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **5C.** $r = 3\cos\theta$

نصيحة دراسية

طريقة بديلة نقطتان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$، $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة المتعامدة. هاتان النقطتان هما $(\sqrt{3}, 1)$، $(2\sqrt{3}, 2)$. معادلة المستقيم المار بهما هي $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

نصيحة دراسية

التحويل إلى الصورة المتعامدة هناك عمليات تمويض أخرى معيدة وهي عبارة عن أشكال مختلفة للمعادلات $y = r\sin\theta$، $x = r\cos\theta$ مثل $r = \frac{y}{\sin\theta}$، $r = \frac{x}{\cos\theta}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

التمارين

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة ذات الإحداثيات القطبية المعطاة. قم بالتقريب إلى أقرب مئة. إذا لزم الأمر. (المثال 1)

1. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
2. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
3. $(5, 240^\circ)$
4. $(2.5, 250^\circ)$
5. $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$
6. $(-13, -70^\circ)$
7. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$
8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
9. $(-2, 270^\circ)$
10. $(4, 210^\circ)$
11. $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$
12. $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة ذات الإحداثيات المتعامدة المعطاة $2\pi \le \theta \le 0$. قم بالتقريب إلى أقرب مئة. إذا لزم الأمر. (المثال 2)

13. $(7, 10)$
14. $(-13, 4)$
15. $(-6, -12)$
16. $(4, -12)$
17. $(2, -3)$
18. $(0, -173)$
19. $(a, 3a), a > 0$
20. $(-14, 14)$
21. $(52, -31)$
22. $(3b, -4b), b > 0$
23. $(1, -1)$
24. $(2, \sqrt{2})$

25. **المسافة** عندما وقف عدنان فوق مبنى مسكنه، حدد أن إحدى ساحات الحفلات الموسيقية تقع بزاوية 53° إلى الشمال الشرقي. افترض أن الساحة تقع على بعد 1.5 كيلومتر بالضبط من شقة عدنان. (المثال 3)

a. كم عدد الكيلومترات التي يجب أن يقطعها عدنان شرقا وشمالا حتى يبلغ الساحة؟

b. إذا كان هناك ملعب كرة قدم على بعد 2 كيلومتر غربا و 0.5 كيلومتر جنوبا من شقة عدنان، فما الإحداثيات القطبية للملعب إذا كانت شقة عدنان عند القطب؟

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة. (المثال 4)

26. $x = -2$
27. $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
28. $y = -3$
29. $x = y^2$
30. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
31. $(x - 1)^2 - y^2 = 1$
32. $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
33. $y = \sqrt{3}x$
34. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
35. $x^2 + (y - 8)^2 = 64$

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة. ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة. (المثال 5)

36. $r = 3 \sin \theta$
37. $\theta = -\frac{\pi}{3}$
38. $r = 10$
39. $r = 4 \cos \theta$
40. $\tan \theta = 4$
41. $r = 8 \csc \theta$
42. $r = -4$
43. $\cot \theta = -7$
44. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
45. $r = \sec \theta$

46. **الزلازل** يمكن تمثيل الموجات الزلزالية لأحد الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث تقاس r بالكيلومترات. (المثال 5)

a. مثل النمط الخطي للزلزال بيانيا.

b. اكتب معادلة بالصورة المتعامدة لتمثيل الموجات الزلزالية بيانيا.

c. أوجد الإحداثيات المتعامدة للبؤرة الزلزالية ووضح المساحة المتضررة من الزلزال.

47. **الميكروفون** تعبر المعادلة $r = 2 + 2 \cos \theta$ عن النمط القطبي لميكروفون اتجاهي في مباراة كرة قدم. (المثال 5)

a. مثل النمط الخطي بيانيا.

b. هل سيكتشف الميكروفون الصوت الناشئ من النقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(0, -2)$؟ اشرح.

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة. ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

48. $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
49. $r = 10 \csc \left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
50. $r = 3 \csc \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
51. $r = -2 \sec \left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
52. $r = 4 \sec \left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
53. $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
54. $r = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
55. $r = 4 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

56. **الفلك** تستخدم المعادلات الخطية في تمثيل مسارات الأقمار الصناعية أو الأجسام الأخرى التي تدور في الفضاء. افترض أنه يتم تمثيل مسار قمر صناعي بالمعادلة $r = \frac{4}{4 + 3 \sin \theta}$، حيث يتم قياس r بعشرات الآلاف من الكيلومترات. مع وضع الكرة الأرضية عند القطب.

a. ارسم تمثيلا بيانيا لمسار القمر الصناعي.

b. حدد أدنى وأقصى مسافة يبعدها القمر الصناعي عن الأرض في أي وقت.

c. افترض أن قمرا صناعيا ثانيا يمر عبر نقطة ذات الإحداثيات المتعامدة $(-3, 1.5)$. هل القمران الصناعيان معرضان لأي خطر تصادم عند هذه النقطة؟ اشرح.

جميع الحقوق محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

Scanned by CamScanner

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

57. $6x - 3y = 4$

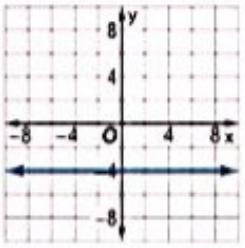
58. $2x + 5y = 12$

59. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$

60. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

اكتب معادلة قطبية ومتعامدة لكل تمثيل بياني.

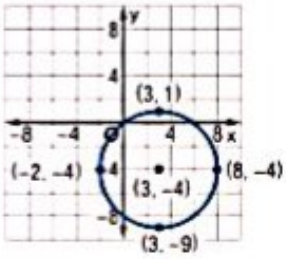
61.



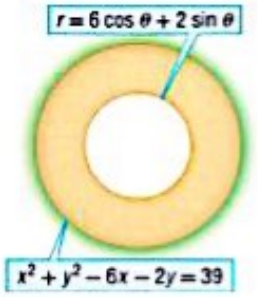
62.

63.

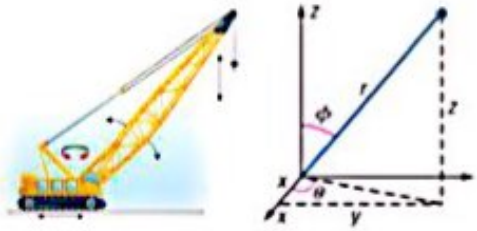
64.



65. **الجولف** في الحفرة 18 من ملعب الجولف في هيلي بايز، المساحة الخضراء الدائرية محاطة بحلقة من الرمال كما يظهر في الشكل. أوجد مساحة السطحة المغطاة بالرمال بافتراض أن الحفرة تمثل القطب في كل من المعادلتين. والوحدات مذكورة بالأمتار.



66. **التشييد** تعمل الرافعات الذراعية على نظائر ثلاثية الأبعاد من الإحداثيات القطبية تسمى "الإحداثيات الكروية". لدينا نقطة في الفراغ بالإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ)، حيث تمثل r المسافة من القطب، وتمثل θ زاوية الدوران حول المحور الرأسي وتمثل ϕ الزاوية القطبية من المحور الرأسي الموجب. إذا كانت لدينا نقطة بالإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ)، فأوجد الإحداثيات المتعامدة (x, y, z) بدلالة r، θ، و ϕ.



67. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a. **بيانيا** يمكن تحديد موضع العدد المركب $a + bi$ على مستوى مركب باستخدام الزوج المرتب (a, b)، حيث المحور x هو المحور الحقيقي R والمحور y هو المحور التخيلي i. مثل العدد المركب $6 + 8i$ بيانيا.

b. **عدديا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات المتعامدة المحددة في الجزء a إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيا.

c. **بيانيا** مثل العدد المركب $-3 + 3i$ بيانيا على نظام إحداثي متعامد.

d. **بيانيا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات المتعامدة المحددة في الجزء c إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيا.

e. **تحليليا** بالنسبة للعدد المركب $a + bi$، أوجد تعبيرا ليتم تحويله إلى الإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. **تحليل الخطأ** علي وعيسى يكتبان المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ بصورة متعامدة. يعتقد عيسى أن الإجابة هي $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. يعتقد علي أن الإجابة ببساطة هي $y = \sin x$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

69. **تحد** معادلة الدائرة هي $r = 2a\cos\theta$. اكتب هذه المعادلة بصورة متعامدة. أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها.

70. **التبرير** على أساس مجموعة الإحداثيات المتعامدة (x, y) وقيمة r. اكتب تعبيرات للتوصل إلى θ بدلالة sine وبدلالة cosine. (إرشاد: قد تكون مضطرا لكتابة عدة تعبيرات لكل دالة مشابهة للتعبيرات الواردة في هذا الدرس باستخدام مماس.)

71. **الكتابة في الرياضيات** ضمن متى يكون التمثيل البياني للمعادلة أسهل عند تمثيل المعادلة بالصورة القطبية بدلا من المتعامدة والعكس.

72. **البرهان** استخدم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ لإثبات أن $r = x\sec\theta$، $r = y\csc\theta$.

73. **تحد** اكتب $r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$ بصورة متعامدة. (إرشاد: وزع قبل التعويض عن قيمتي r^2، r. ينبغي أن تكون المعادلة المتعامدة مخروطية.)

74. **الكتابة في الرياضيات** استخدم تعريف المحور القطبي المقدم في الدرس 9-1 لشرح السبب وراء ضرورة ذكر أن الإنسان الآلي في المثال 3 كان مواجها للشرق تماما. كيف يمكن أن يساعد استخدام الاتجاهات الربعية في التخلص من هذا؟

محفوظ الحقوق © لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

مراجعة شاملة

استخدم التناظر لتمثيل كل معادلة بيانيا. (الدرس 9-2)

75. $r = 1 - 2\sin\theta$

76. $r = -2 - 2\sin\theta$

77. $r = 2\sin 3\theta$

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \le 360°$ أو $-2\pi < \theta \le 2\pi$. (الدرس 9-1)

78. $T(1.5, 180°)$

79. $U\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$

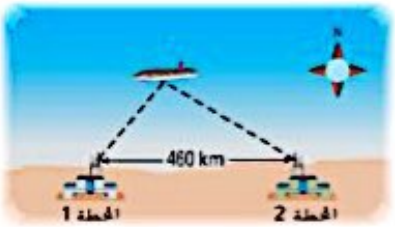
80. $V(4, 315°)$

أوجد الزاوية θ بين u و v.

81. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$

82. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$

83. $\mathbf{u} = \langle 1, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -2\rangle$



84. الإبحار تقع محطتا ث طويل المدى على مسافة 460 كيلومترا من بعضهما البعض. تتلقى إحدى السفن إشارات من كلتا المحطتين وتحدد أن مسافتها من المحطة 2 تزيد على مسافتها من المحطة 1 بمقدار 108 كيلومترات.

a. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل التي توجد عندها السفينة.

b. مثل المعادلة بيانيا. مع توضيح فرع القطع الزائد الذي توجد فيه السفينة.

c. أوجد إحداثيات موقع السفينة على الشبكة الإحداثية إذا كانت تبعد عن المحور x بمقدار 110 كيلومترات.

85. الدراجات تصنع شركة وودلاند للدراجات طرازين من دراجات الطرق الوعرة: طراز "مغامرة" الذي يبلغ سعر بيعه AED 250 وطراز "المغامرة الكبرى" الذي يبلغ سعر بيعه AED 350 . يستخدم كلا الطرازين الإطار نفسه. يبلغ الوقت المطلوب للطلاء والتجميع لطراز "مغامرة" ساعتين، بينما يبلغ الوقت 3 ساعات لطراز "المغامرة الكبرى". إذا كان متاحا للإنتاج 375 إطارا و450 ساعة عمل، فكم العدد الذي ينبغي إنتاجه من كل طراز لزيادة العائد؟ ما الحد الأقصى للعائد؟

حل كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان.

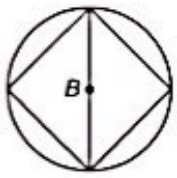
86.
$$\begin{aligned} 3x + 9y + 6z &= 21 \\ 4x - 10y + 3z &= 15 \\ -5x + 12y - 2z &= -6 \end{aligned}$$

87.
$$\begin{aligned} x + 5y - 3z &= -14 \\ 2x - 4y + 5z &= 18 \\ -7x - 6y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

88.
$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 20 \\ 5x + 2y - 2z &= -4 \\ 6x + 3y + 5z &= 23 \end{aligned}$$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. SAT/ACT تم رسم مربع داخل الدائرة B. إذا كان محيط الدائرة يبلغ 50π. فما طول قطر المربع؟



A $10\sqrt{2}$
B 25
C $25\sqrt{2}$
D 50
E $50\sqrt{2}$

90. مراجعة أي مما يلي قد يكون معادلة لزهرة بثلاث بتلات؟

F $r = 3\sin\theta$
G $r = \sin 3\theta$
H $r = 6\sin\theta$
J $r = \sin 6\theta$

91. ما الصورة القطبية لـ $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟

A $r = \sin\theta$
B $r = 2\sin\theta$
C $r = 4\sin\theta$
D $r = 8\sin\theta$

92. مراجعة أي مما يلي يمكن أن يكون معادلة لحلزون أرشميدس الذي يمر عبر $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$؟

F $r = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\theta$
G $r = \theta$
H $r = \frac{3}{4}$
J $r = \frac{\theta}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © لمجموعة ماكجرو هيل التعليمية McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

9 اختبار نصف الوحدة
الدروس من 9-1 إلى 9-3

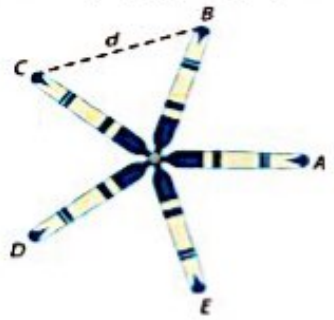
مثل بيانيا كل نقطة على شبكة قطبية. (الدرس 9-1)

1. $A(-2, 45°)$
2. $D(1, 315°)$
3. $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
4. $B\left(3, -\frac{5\pi}{6}\right)$

مثل كل معادلة قطبية بيانيا. (الدرس 9-1)

5. $r = 3$
6. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$
7. $\theta = 60°$
8. $r = -1.5$

9. **طائرات مروحية** يتألف دوار طائرة مروحية من خمس شفرات على مسافات متساوية. يبلغ طول كل شفرة 3.45 أمتار. (الدرس 9-1)



a. إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي تساوي $3°$. فاكتب زوجا مرتبا لتمثيل طرف كل شفرة على الشبكة القطبية. افترض أن مركز الدوار يقع عند القطب.

b. ما المسافة d بين أطراف شفرات الطائرة المروحية مقربا لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

مثل بيانيا كل معادلة مما يلي. (الدرس 9-2)

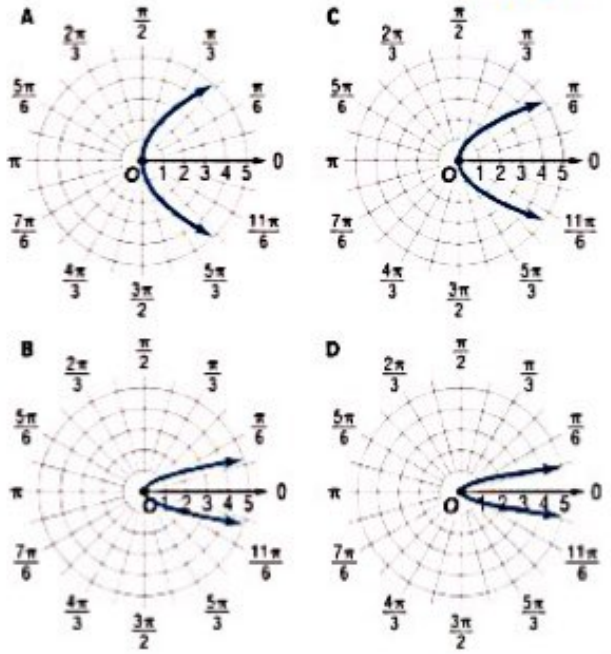
10. $r = \frac{1}{4}\sec\theta$
11. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
12. $r = 3\csc\theta$
13. $r = 4\sin\theta$

14. **زجاج مزخرف** النافذة الوردية عبارة عن نافذة دائرية تستخدم في العمارة القوطية. يتجه نمط النافذة بشكل إشعاعي من المركز. يمكن التوصل إلى القيمة التقريبية للنافذة الموضحة من خلال المعادلة $r = 3\sin 6\theta$. استخدم التناظر والأصفار وقيم r القصوى في الدالة لتمثيل الدالة بيانيا. (الدرس 9-2)

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيا. (الدرس 9-2)

15. $r = \frac{1}{2}\sin\theta$
16. $r = \frac{1}{3}\theta + 3, \theta \geq 0$
17. $r = 1 + 2\cos\theta$
18. $r = 5\sin 3\theta$

19. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني القطبي لـ $y^2 = \frac{1}{2}x$. (الدرس 9-3)



أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة لها إحداثيات قطبية المعطاة. (الدرس 9-3)

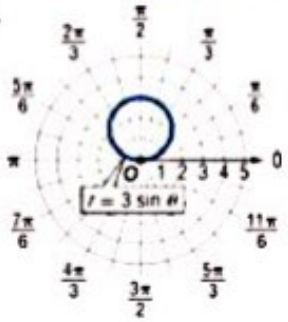
20. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$
21. $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$
22. $(-1, 210°)$
23. $(3, 30°)$

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة لها الإحداثيات المتعامدة المعطاة إذا كانت $2\pi \geq \theta \geq 0$. قم بالتقريب إلى أقرب مئة. إذا لزم الأمر. (الدرس 9-3)

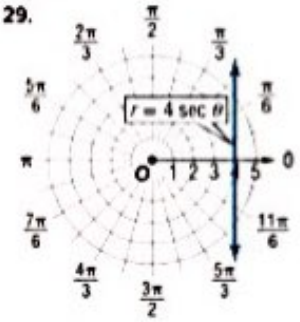
24. $(-3, 5)$
25. $(8, 1)$
26. $(7, -6)$
27. $(-4, -10)$

اكتب معادلة متعامدة لكل تمثيل بياني. (الدرس 9-3)

28.



29.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

9-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

السابق:
- أجريت العمليات بالأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المتعامدة.

الحالي:
1. تحويل الأعداد المركبة من الصورة المتعامدة إلى الصورة القطبية والعكس.
2. إيجاد ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية.

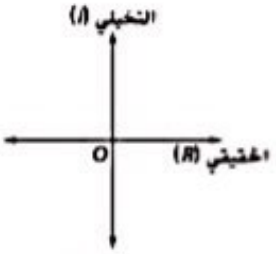
لماذا؟
- يستخدم المهندسون الميكانيكيون الأعداد المركبة في وصف بعض العلاقات في الكهرباء. الجهد E، والمعاوقة Z، والتيار I هي الكميات الثلاث التي تربط بينها المعادلة $E = I \cdot Z$ المستخدمة في وصف التيار المتردد. يمكن كتابة كل متغير في صورة عدد مركب بالصيغة $a + bj$، حيث j عدد تخيلي. يستخدم المهندسون الرمز j لكي لا يحدث خلط بينه وبين التيار I. بالنسبة للمعاوقة، يمثل الجزء الحقيقي a معارضة تدفق التيار بسبب المقاومات ويرتبط الجزء التخيلي b بالمعارضة الناجمة عن المستحثات والمكثفات.

المفردات الجديدة

مستوى مركب	complex plane
محور حقيقي	real axis
محور تخيلي	imaginary axis
مستوى أرجاند	Argand plane
القيمة المطلقة لعدد مركب	absolute value of a complex number
صورة قطبية	polar form
صيغة مثلثية	trigonometric form
معامل	modulus
إزاحة زاوية	argument
جذور الوحدة من الدرجة p	pth roots of unity

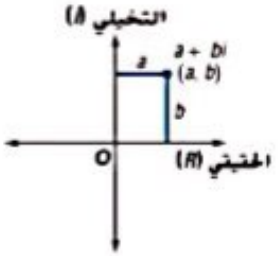
1 الصور القطبية للأعداد المركبة

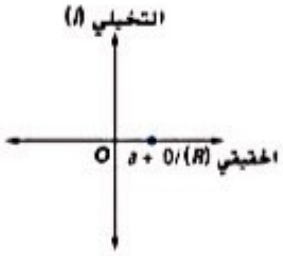
العدد المركب المذكور في صورة متعامدة، $a + bi$، له مكون حقيقي a ومكون تخيلي bi. يمكنك تمثيل عدد مركب بيانيا على **المستوى المركب** عن طريق تمثيله بالنقطة (a, b). على منوال المستوى الإحداثي، نحتاج إلى محورين لتمثيل عدد مركب. يتم تعيين المكون الحقيقي على المحور الأفقي المسمى **المحور الحقيقي**. ويتم تعيين المكون التخيلي على المحور الرأسي المسمى **المحور التخيلي**. يمكن أيضا الإشارة إلى المستوى المركب باسم **مستوى أرجاند**.



المستوى المركب

فلنأخذ عددا مركبا حيث $a + 0i$ و $b = 0$. النتيجة هي العدد الحقيقي a الذي يمكن تمثيله بيانيا باستخدام خط أعداد حقيقية فقط أو المحور الحقيقي. عندما تكون $b \neq 0$، فالمحور التخيلي مطلوب لتمثيل المكون التخيلي.



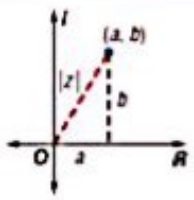


تذكر أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي هي بعده عن الصفر على خط الأعداد. وعلى نفس المنوال، **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي بعده عن الصفر في المستوى المركب. عند تمثيل $a + bi$ بيانيا على المستوى المركب، يمكن حساب المسافة من الصفر باستخدام نظرية فيثاغورث.

المفهوم الأساسي قيمة مطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

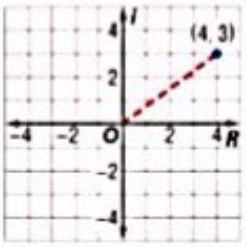
Scanned by CamScanner

مثال 1 التمثيلات البيانية والقيم المطلقة للأعداد المركبة

مثل كل عدد بيانيا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة.

a. $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

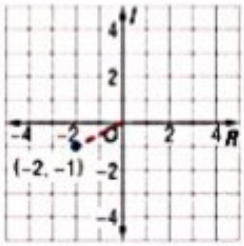
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4$, $b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسط.

القيمة المطلقة لـ $4 + 3i = 5$.

b. $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ قانون القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2$, $b = -1$

$= \sqrt{5} = 2.24$ بسط.

القيمة المطلقة لـ $-2 - i \approx 2.24$.

تمرين موجّه

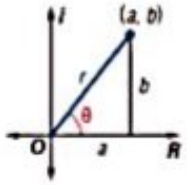
1A. $5 + 2i$

1B. $-3 + 4i$

انتبه!

الصورة القطبية ينفي عدم خلط الصورة القطبية للعدد المركب مع الإحداثيات القطبية للعدد المركب. تعتبر الصورة القطبية للعدد المركب طريقة أخرى لتمثيل العدد المركب. سيتناول هذا الدرس لاحقا الإحداثيات القطبية للعدد المركب.

مثلما يمكن كتابة إحداثيات متعامدة (x, y) في صورة قطبية، يمكن عمل ذلك أيضا مع الإحداثيات التي تعبر عن التمثيل البياني لعدد مركب في المستوى المركب. النسب **المثلثية** نفسها التي تم استخدامها في التوصل إلى قيمتي x وy يمكن تطبيقها لتمثيل قيمتي a و b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$ $r\sin\theta = b$ اضرب كل طرف في r.

بالتعويض عن تمثيلات الصورة القطبية بـ a، b، يمكننا حساب **الصورة القطبية** أو **الصيغة المثلثية** للعدد المركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

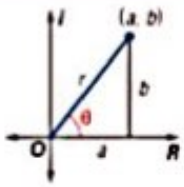
$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ التحليل إلى العوامل.

في حالة العدد المركب، يمثل r القيمة المطلقة، أو **المعامل**. في العدد المركب ويمكن التوصل إليه باستخدام العملية نفسها التي استخدمتها عند التوصل إلى القيمة المطلقة. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. يطلق على الزاوية θ اسم **إزاحة زاوية** للعدد المركب. على نفس منوال التوصل إلى θ باستخدام إحداثيات متعامدة (x, y)، عند استخدام عدد مركب.
$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ إذا كانت $a < 0$.

نصيحة دراسية

الإزاحة الزاوية تسمى الإزاحة الزاوية للعدد المركب أيضا السعة. كما في الإحداثيات القطبية تماما، θ ليست متفردة على الرغم من أنها مذكورة في العادة في الحضرة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

المفهوم الأساسي الصورة القطبية لعدد مركب



تكون الصورة القطبية أو الصيغة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$, $b = r\sin\theta$, $a = r\cos\theta$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

حيث $a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ حيث $a < 0$.

McGraw-Hill Education محفوظ الطبع والتأليف © لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

مثال 2 الأعداد المركبة في الصورة القطبية

عبر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

a. $-6 + 8i$

أوجد المعامل r والإزاحة الزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$

$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ — $a = -6$ ، $b = 8$ — $= \tan^{-1}\frac{8}{-6} + \pi$ حوالي $= 2.21$

تساوي الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ حوالي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$.

b. $4 + \sqrt{3}i$

أوجد المعامل r والإزاحة الزاوية θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — قانون التحويل — $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$ — $a = 4$ ، $b = \sqrt{3}$ — $= \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \sqrt{19}$ حوالي $= 4.36$ — بسط — ≈ 0.41

تساوي الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ حوالي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$.

تمرين موجّه

2A. $9 + 7i$ **2B.** $-2 - 2i$

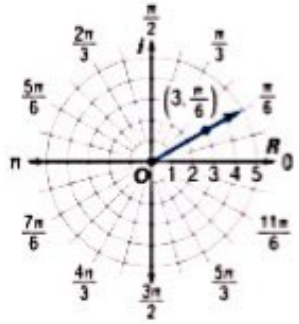
قراءة في الرياضيات

الصورة القطبية غالبا ما يتم اختصار الصورة القطبية $r \operatorname{cis} \theta$ إلى $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ في المثال 2a. يمكن أيضا التعبير عن $-6 + 8i$ بالشكل $10 \operatorname{cis} 2.21$. حيث $10 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$ و $2.21 = \tan^{-1}\frac{8}{-6}$.

يمكنك استخدام الصورة القطبية للعدد المركب لتمثيل العدد بيانيا على شبكة قطبية باستخدام قيمتي r و θ كإحداثيين قطبيين (r, θ). يمكنك أيضا أن تأخذ عددا مركبا مكتوبا بصورة قطبية وتحوله إلى صورة متعامدة عن طريق إيجاد القيمة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية للعدد المركب بيانيا وتحويلها

مثل بيانيا $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. ثم عبر عنه في صورة متعامدة.



قيمة r تساوي 3، وقيمة θ تساوي $\frac{\pi}{6}$.

عين الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

للتعبير عن العدد بصورة متعامدة، أوجد القيم المثلثية وبسطها.

$3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ — الصورة القطبية

$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ — أوجد قيمة cosine وقيمة sine.

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ — خاصية التوزيع

الصورة المتعامدة من $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمرين موجّه

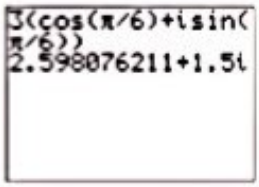
مثل كل عدد مركب بيانيا على شبكة قطبية. ثم عبر عنه بصورة متعامدة.

3A. $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ **3B.** $4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

تلميح تقني

تحويلات العدد المركب

يمكنك تحويل عدد مركب في صورة قطبية إلى صورة متعامدة عن طريق إدخال التعبير في صورة قطبية ثم تحديد ENTER. لتكون في وضع قطبي. حدد MODE ثم $a + bi$.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

2 نواتج الضرب والقسمة والقوى الأسية والجذور للأعداد المركبة

تساعد الصورة القطبية للأعداد المركبة، إلى جانب قانوني الجمع والفارق في cosine و sine، إلى حد كبير في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. يمكن التوصل إلى قانون ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية عن طريق إجراء عملية الضرب.

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$	المعادلة الأصلية
$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$	توزيع
$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$	$i^2 = -1$ وتجميع الحدود التخيلية.
$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$	استبعاد العامل i.
$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	مجموع متطابقات sine، cosine

المفهوم الأساسي ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها في الصورة القطبية

باقتراض الأعداد المركبة $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

قانون ناتج الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

قانون ناتج القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ حيث $r_2 \neq 0$ و z_2

سنثبت قانون ناتج القسمة في التدريب 77.

قراءة في الرياضيات
صيغ الجمع المعاملات هي صيغة الجمع من المعامل.

لاحظ أنه عند ضرب الأعداد المركبة، فإنك تضرب المعاملات وتجمع الإزاحات الزاوية. عند القسمة، فإنك تقسم المعاملات وتطرح الإزاحات الزاوية.

مثال 4 ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

أوجد $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية. ثم عبر عن الناتج في صورة متعامدة.

$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	التعبير الأصلي
$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$	قانون ناتج الضرب
$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$	بسط.

والآن أوجد الصورة المتعامدة لناتج الضرب.

$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$	الصورة القطبية
$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$	أوجد القيمة.
$= 4\sqrt{3} - 4i$	خاصية التوزيع

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. الصورة المتعامدة لناتج الضرب هي $4\sqrt{3} - 4i$.

تمرين موجّه

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي في صورة قطبية. ثم عبر عن ناتج الضرب بصورة متعامدة.

4A. $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4B. $-6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

McGraw-Hill Education محفوظ الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

كما ذكرنا في بداية هذا الدرس، يمكن استخدام نواتج قسمة الأعداد المركبة لتوضيح العلاقات في الكهرباء.

مثال 5 من الحياة اليومية ناتج قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

الكهرباء إذا كان الجهد الكهربائي لدائرة كهربائية E يساوي 150 والمعاوقة Z تساوي $6 - 3j$ أوم. فأوجد شدة التيار I بالأمبير في الدائرة الكهربائية في الصورة المتعامدة. استخدم $E = I \cdot Z$

عبر عن كل عدد بالصورة القطبية.

$150 = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150;\ \theta = \tan^{-1}\frac{0}{150} = 0$

$6 - 3j = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]$ $\quad r = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5};\ \theta = \tan^{-1}\frac{-3}{6}$ حوالي $= -0.46$

حل بإيجاد قيمة التيار I في $I \cdot Z = E$.

$I \cdot Z = E$ المعادلة الأصلية

$I = \frac{E}{Z}$ اقسم كل طرف على Z.

$I = \frac{150(\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]}$ $E = 150(\cos 0 + j \sin 0)$ و $Z = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]$

$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}[\cos[0 - (-0.46)] + j\sin[0 - (-0.46)]]$ قانون ناتج القسمة

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ بسط.

والآن حول التيار إلى الصورة المتعامدة.

$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ المعادلة الأصلية

$= 10\sqrt{5}(0.90 + 0.44j)$ أوجد القيمة.

$= 20.12 + 9.84j$ خاصية التوزيع

يساوي التيار حوالي $20.12 + 9.84j$ amps.

تمرين موجّه

5. **الكهرباء** دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي 120 فولت وتبلغ شدة تيارها $8 + 6j$ amps. أوجد معاوقة الدائرة في الصورة المتعامدة.

مهنة من الحياة اليومية

المهندسون الكهربائيون يصمم المهندسون الكهربائيون ويخترعون التكنولوجيا الجديدة المستخدمة في تصنيع نظام تحديد المواقع العالمي والمولدات العملاقة التي تزود مدنا بأكملها بالطاقة والمحركات التوربينية المستخدمة في الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما يعملون أيضا على تحسين عدة منتجات مثل الهواتف الخلوية والسيارات والروبوتات.

قبل حساب القوى الأسية والجذور للأعداد المركبة، قد يكون من المفيد التعبير عن الأعداد المركبة بصورة قطبية. يعود الفضل إلى أبراهام دي موافر في اكتشاف نمط مفيد لإيجاد قيمة القوى الأسية للأعداد المركبة.

ويمكننا استخدام قانون ناتج ضرب الأعداد المركبة للمساعدة في تحليل النمط الذي اكتشفه دي موافر.

أولا، أوجد z^2 بأخذ ناتج ضرب $z \cdot z$.

$z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$ اضرب.

$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)]$ قانون ناتج الضرب

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ بسط.

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$ اضرب.

$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i\sin(2\theta + \theta)]$ قانون ناتج الضرب

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ بسط.

لاحظ أنه عند حساب هذه القوى الأسية للعدد المركب، تأخذ الأس النوني للمعاملات وتضرب الإزاحات الزاوية في n.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

يلخص هذا النمط أدناه.

الربط بتاريخ الرياضيات

أبراهام دي موافر (1667–1754) اشتهر عالم الرياضيات الفرنسي دي موافر بالنظرية المسماة باسمه وكتابه عن نظرية الاحتمال. مذهب الفرص. ويعتبر واحدا من رواد حساب المثلثات التحليلي والاحتمال.

المفهوم الأساسي نظرية دي موافر

إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، فبالنسبة للأعداد الصحيحة الموجبة n يكون

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n \text{ أو } r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

ستثبت نظرية دي موافر في الدرس 4-10.

مثال 6 نظرية دي موافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$، وعبر عنه في الصورة المتعامدة.

أولا. اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ في الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغة التحويل	$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4$ ، $b = 4\sqrt{3}$	$= \tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسط.	$= \tan^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بسط.	$= \frac{\pi}{3}$

صورة $4 + 4\sqrt{3}i$ القطبية هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استخدم نظرية دي موافر لإيجاد القوة الأسية من الدرجة السادسة.

$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$	المعادلة الأصلية
$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	نظرية دي موافر
$= 262{,}144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$	بسط.
$= 262{,}144(1 + 0i)$	أوجد القيمة.
$= 262{,}144$	بسط.

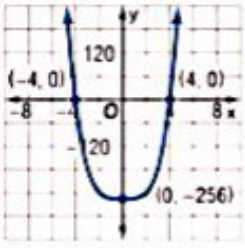
إذا $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262{,}144$.

تمرين موجّه

أوجد كل قوة أسية. وعبر عنه بالصورة المتعامدة.

6A. $(1 + \sqrt{3}i)^4$

6B. $(2\sqrt{3} - 2i)^8$



في نظام الأعداد الحقيقية، يكون للمعادلة $x^4 = 256$ حلان هما 4 و -4. يوضح تمثيل $y = x^4 - 256$ البياني أن هناك صفرين حقيقيين في -4 و 4 لـ x. إلا أنه في نظام الأعداد المركبة، هناك حلان حقيقيان وحلان مركبان.

تعلمت من خلال نظرية الجبر الأساسية في الدرس 4-2 أن كثيرات الحدود من الدرجة n تحتوي على n أصفار بالضبط كما في نظام الأعداد المركبة. ولهذا فالمعادلة $x^4 = 256$، عند إعادة كتابتها بالشكل $x^4 - 256 = 0$، تحتوي على أربعة حلول أو جذور، 4، و-4، و $4i$، و $-4i$. بشكل عام، كل الأعداد المركبة غير الصفر تحتوي على p جذور مختلفة من الدرجة p. أي أن كلا منها يحتوي على جذرين تربيعيين وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة من الجذور الرابعة وهكذا.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

مراجعة المفردات

نظرية الجبر الأساسية دالة كثيرة الحدود من الدرجة n. حيث $n > 0$ بها صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة

لإيجاد قيمة جميع الجذور لكثيرة الحدود، يمكننا استخدام نظرية دي موافر للوصول إلى التعبير التالي.

المفهوم الأساسي الجذور المختلفة

بالنسبة للعدد الصحيح الموجب p، يحتوي العدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ على p جذور مختلفة من الدرجة p. يتم التوصل إليها من خلال

$$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$$

حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

يمكننا استخدام هذا القانون مع قيم n المختلفة، لكن يمكننا التوقف عندما تكون $n = p - 1$. وعند تساوي n مع p أو تجاوزها، تتكرر الجذور كما يظهر من التالي.

$$\frac{\theta+2\pi p}{p} = \frac{\theta}{p} + 2\pi \qquad n = 0 \text{ مشترك مع } \frac{\theta}{p} \text{، عندما تكون}$$

مثال 7 الجذور p لعدد مركب

أوجد الجذر من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$.

أولا اكتب $-4 - 4i$ في الصورة القطبية.

$$-4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \qquad r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2};\ \theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

والآن اكتب تعبيرا للجذور من الدرجة الرابعة.

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}{4}\right) \qquad \theta = \frac{5\pi}{4}\ ,\ p = 4\ ,\ r^{\frac{1}{p}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right)\right] \qquad \text{بسط.}$$

افترض أن $n = 0, 1, 2$ بالتسلسل لإيجاد الجذور من الدرجة الرابعة.

بافتراض أن $n = 0$.

$$\sqrt[4]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right)\right] \qquad \text{جذور مختلفة}$$

$$= \sqrt[4]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) = 0.86 + 1.28i \qquad \text{الجذر الأول من الدرجة الرابعة}$$

بافتراض أن $n = 1$.

$$\sqrt[4]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) = 0.86 + 1.28i \qquad \text{الجذر الثاني من الدرجة الرابعة}$$

بافتراض أن $n = 2$.

$$\sqrt[4]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) = -0.86 - 1.28i \qquad \text{الجذر الثالث من الدرجة الرابعة}$$

بافتراض أن $n = 3$.

$$\sqrt[4]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(3)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(3)\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt[4]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) = 1.28 - 0.86i \qquad \text{الجذر الرابع من الدرجة الرابعة}$$

تكون الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$ هي نظيرها $0.86 + 1.28i$ ، $-1.28 + 0.86i$ ، $-0.86 - 1.28i$ ، $1.28 - 0.86i$.

تمرين موجّه

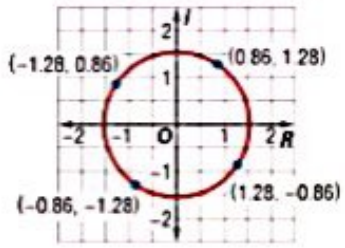
7A. أوجد جذور $2 + 2i$ التكعيبية.

7B. أوجد جذور $4\sqrt{3} - 4i$ من الدرجة الخامسة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

يمكننا تقديم ملاحظات حول الجذور المختلفة لعدد من طريق التمثيل البياني للجذور على مستوى إحداثي. وكما يظهر على اليسار، تقع الجذور الأربعة من الدرجة الرابعة الموجودة في المثال 7 على دائرة. إذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل عدد مركب، نجد أن لكل منها معاملا واحدا هو $\sqrt[4]{32}$. والذي يقوم بدور نصف قطر الدائرة. تقع الجذور أيضا على مسافات متساوية حول الدائرة نتيجة اختلاف الإزاحات الزاوية بواسطة $\frac{\pi}{2}$.



تقع حالة خاصة من التوصل للجذور عند التوصل لجذور العدد 1 من الدرجة p. عندما يكون 1 مكتوبا بصورة قطبية $r = 1$. كما هو مذكور في الفقرة السابقة، فإن معامل جذورنا هو نصف قطر الدائرة التي تتكون من تعيين الجذور على مستوى إحداثي. ولهذا تقع جذور العدد 1 من الدرجة p على دائرة الوحدة. يشار إلى إيجاد جذور العدد 1 من الدرجة p بأنه إيجاد **جذور الوحدة من الدرجة p**.

مثال 8 جذور الوحدة pth

أوجد جذور الوحدة من الدرجة الثامنة.

أولا اكتب 1 في الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب تعبيرا للجذر من الدرجة الثامنة.

$1\left(\cos \frac{0 + 2n\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2n\pi}{8}\right)$ $\quad \theta = 0$ $p = 8$ و $r^{\frac{1}{p}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

$= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$ بسط.

اقترض أن $n = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1.

$n = 0$ $\quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$ الجذور المختلفة

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول

لاحظ أن معامل كل عدد مركب هو 1. يتم التوصل إلى الإزاحات الزاوية عن طريق $\frac{n\pi}{4}$. مما يؤدي إلى زيادة θ بمقدار $\frac{\pi}{4}$ لكل جذر لاحق. ولهذا يمكننا حساب الجذور المتبقية عن طريق إضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى كل θ سابقة.

$\cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر من الدرجة 1

$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر من الدرجة 2

$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ الجذر من الدرجة 3

$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر من الدرجة 4

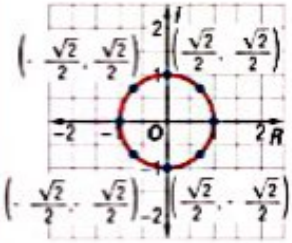
$\cos \pi + i \sin \pi = -1$ الجذر من الدرجة 5

$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر من الدرجة 6

$\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$ الجذر من الدرجة 7

$\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ الجذر من الدرجة 8

الجذور من الدرجة الثامنة للعدد 1 هي 1، $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$، i، $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$، -1، $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$، $-i$، و $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ كما هو موضح في الشكل 9.5.1.



الشكل 9.5.1

تمرين موجّه

8A. أوجد الجذور التكعيبية للوحدة.

8B. أوجد الجذور من الدرجة السابعة للوحدة.

نصيحة دراسية

الجذور من الدرجة p لعدد مركب يكون لكل جذر معامل ثم نفسه. الإزاحة الزاوية للجذر الأول هي $\frac{\theta}{p}$. ويتم التوصل إلى كل جذر لاحق عن طريق تكرار إضافة $\frac{2\pi}{p}$ إلى الإزاحة الزاوية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

مثل كل عدد بيانيا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة. المثال 1

1. $z = 4 + 4i$
2. $z = -3 + i$
3. $z = -4 - 6i$
4. $z = 2 - 5i$
5. $z = 3 + 4i$
6. $z = -7 + 5i$
7. $z = -3 - 7i$
8. $z = 8 - 2i$

9. **المنجهات** تمثل القوة المبذولة على أحد الأجسام بالعدد المركب $z = 15i + 10$، حيث تقاس المركبات بوحدة النيوتن (N). المثال 1

a. مثل z كمنحه في المستوى المركب.

b. أوجد مقدار المنحه وزاوية اتجاهه.

عبر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية. المثال 2

10. $4 + 4i$
11. $-2 + i$
12. $4 - \sqrt{2}i$
13. $2 - 2i$
14. $4 + 5i$
15. $-2 + 4i$
16. $-1 - \sqrt{3}i$
17. $3 + 3i$

مثل كل عدد مركب بيانيا على شبكة قطبية. ثم عبر عنها بصورة متعامدة. المثال 3

18. $10(\cos 6 + i \sin 6)$
19. $2(\cos 3 + i \sin 3)$
20. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
21. $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
22. $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$
23. $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$
24. $-3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
25. $\frac{3}{2}(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$

أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة المتعامدة. المثالان 4 و 5

26. $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
27. $5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
28. $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$
29. $2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \cdot 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$
30. $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
31. $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$
32. $\frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \cdot 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
33. $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
34. $5(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) \cdot 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
35. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد كل قوة أسية. وعبر عنها بالصورة المتعامدة. المثال 6

36. $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$
37. $(12i - 5)^3$
38. $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$
39. $(\sqrt{3} - i)^3$
40. $(3 - 5i)^4$
41. $(2 + 4i)^4$
42. $(3 - 6i)^4$
43. $(2 + 3i)^2$
44. $\left[3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^3$
45. $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

46. **التصميم** تعمل مها لدى شركة إعلانات. تريد أن تصمم تصميما يتألف من أشكال سداسية منتظمة ليكون عملا فنيا يظهر في أحد عروضها. تستطيع مها أن تحدد مواقع رؤوس الزوايا لشكل سداسي منتظم عن طريق التمثيل البياني لحلول $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس الزوايا لأحد الأشكال الخماسية. المثال 7

أوجد جميع الجذور المختلفة من الدرجة p للعدد المركب المثالان 7 و 8

47. الجذور من الدرجة السادسة لـ i
48. الجذور من الدرجة الخامسة لـ $-i$
49. الجذور من الدرجة الرابعة لـ $4\sqrt{3} - 4i$
50. الجذور التكعيبية لـ $-117 + 44i$
51. الجذور من الدرجة الخامسة لـ $-1 + 11\sqrt{2}\,i$
52. الجذر التربيعي لـ $-3 - 4i$
53. أوجد الجذور التربيعية للوحدة
54. أوجد جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

55. **الكهرباء** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة تسلسلية أوم $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)$. وتبلغ في الجزء الثاني من الدائرة أوم $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)$.

a. حول كل تعبير إلى الصورة المتعامدة.

b. اجمع إجاباتك التي توصلت إليها في الجزء a لإيجاد إجمالي نسبة المعاوقة في الدائرة.

c. حول إجمالي المعاوقة مرة أخرى إلى الصورة القطبية.

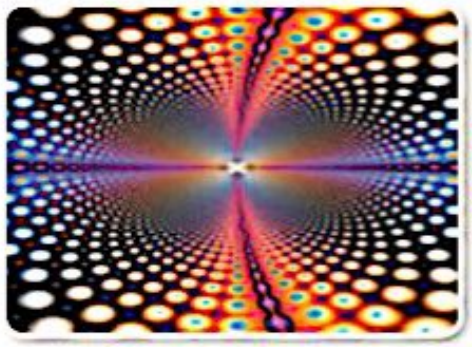
أوجد ناتج ضرب كل مما يلي. ثم كرر العملية بضرب الصور القطبية لكل زوج من الأعداد المركبة باستخدام قانون ناتج الضرب.

56. $(1 - i)(4 + 4i)$
57. $(3 + i)(3 - i)$
58. $(4 + i)(3 - i)$
59. $(-6 + 5i)(2 - 3i)$
60. $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i)$
61. $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

62. **الأنماط الهندسية المتكررة** *النمط الهندسي المتكرر* هي أشكال هندسية تتكون من نمط متكرر بشكل لا نهائي على مقياس متسلسل أصغر كما هو موضح في الأسفل.



في هذه المسألة، سنصنع نمطا هندسيا متكررا من خلال تكرارات $f(z) = z^2$ فنأخذ $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a. احسب z_1 و z_2 و z_3 و z_4 و z_5 و z_6 و z_7 حيث $z_1 = f(z_0)$ و $z_2 = f(z_1)$ وهكذا.

b. مثل كلا من هذه الأعداد على المستوى المركب.

c. توقع مكان z_{100}. اشرح.

63. **التحويلات** هناك عمليات معينة تنطوي على أعداد مركبة تمثل تحويلات هندسية في المستوى المركب. صف التحويل المطبق على النقطة z للحصول على النقطة w في المستوى المركب لكل من العمليات التالية.

a. $w = z + (3 - 4i)$

b. w هو المرافق المركب لـ z.

c. $w = i \cdot z$

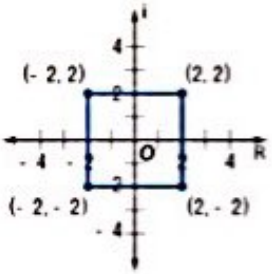
d. $w = 0.25z$

أوجد z والجذور p للنقطة z بافتراض كل مما يلي.

64. $p = 3$. أحد الجذور التكعيبية لـ $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

65. $p = 4$. أحد الجذور من الدرجة الرابعة $-1 - i$

66. **التمثيلات البيانية** بتمثيل كل رأس بعدد مركب في الصورة القطبية. يوسع المبرمج المربع بتغيير أبعاده ثم يقوم بتدوير المربع أدناه بمقدار 45° عكس اتجاه عقارب الساعة بحيث تقع الرؤوس الجديدة عند نقاط منتصف أضلاع المربع الأصلي.



a. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟

b. ماذا سيحدث إذا ضربت الأعداد الممثلة للرؤوس الأصلية في مربع إجابتك التي حصلت عليها في الجزء a؟

استخدم قانون الجذور المختلفة لإيجاد جميع الحلول لكل معادلة. عبر عن الحلول بصورة متعامدة.

67. $x^3 = i$

68. $x^3 + 3 = 128$

69. $x^4 = 81i$

70. $x^5 - 1 = 1023$

71. $x^3 + 1 = i$

72. $x^4 - 2 + i = -1$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الخطأ** تعمل نجاة ونسرين على إيجاد قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$ تستخدم نجاة نظرية دي موافر وتحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. تقول لها نسرين إنها لم تستكمل سوى جزء من المسألة. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

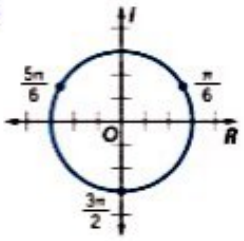
74. **الاستنتاج** افترض أن $z = a + bi$ هو أحد الجذور من الدرجة 29 للعدد 1.

a. ما القيمة العظمى لـ a؟

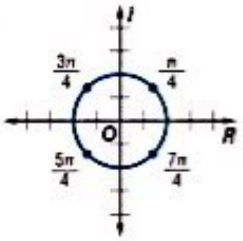
b. ما القيمة العظمى لـ b؟

نحد أوجد الجذور المعروضة على كل تمثيل بياني واكتبها في صورة قطبية. ثم حدد العدد المركب للجذور المذكورة.

75



76.



77. **البرهان** بافتراض أن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ حيث $r_2 \neq 0$. برهن أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *أحيانا*، أم *دائما*، أم *لا تصح أبدا*. اشرح استنتاجك.

78. تقع الجذور p لعدد مركب z على مسافات متساوية حول الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل ويبلغ نصف قطرها $r^{\frac{1}{p}}$.

79. مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$. حيث إن أي z و $z + \bar{z}$ و $z \cdot \bar{z}$ أعداد حقيقية.

80. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد عددين مركبين $a + bi$ بحيث يكون $a \neq 0$ و $b \neq 0$ بالقيمة المطلقة $\sqrt{17}$.

81. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن مجموع الأجزاء التخيلية لعدد p مختلف من الجذور p لأي عدد حقيقي موجب يجب أن يكون صفرا. (الإرشاد: الجذور هي رؤوس زوايا مضلع منتظم.)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الحق والتأليف

Scanned by CamScanner

مراجعة شاملة

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة. الدرس 4-19

82. $r = \frac{15}{1 + 4\cos\theta}$

83. $r = \frac{14}{2\cos\theta + 2}$

84. $r = \frac{-6}{\sin\theta - 2}$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة. الدرس 3-19

85. $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

86. $x^2 - y^2 = 1$

87. $x^2 + y^2 = 2y$

مثل بيانيا القطع المخروط الممثل بكل معادلة.

88. $y = x^2 + 3x + 1$

89. $y^2 - 2x^2 - 16 = 0$

90. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

أوجد مركز كل قطع ناقص وبعده البؤري ورؤوسه.

91. $\frac{(x + 8)^2}{9} + \frac{(y - 7)^2}{81} = 1$

92. $25x^2 + 4y^2 + 150x + 24y = -161$

93. $4x^2 + 9y^2 - 56x + 108y = -484$

حل كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان.

94.
$x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

95.
$9g + 7h = -30$
$8h + 5j = 11$
$-3g + 10j = 73$

96.
$2k - n = 2$
$3p = 21$
$4k + p = 19$

97. **تعداد السكان** في بداية عام 2008، كان تعداد سكان العالم يبلغ 6.7 ملايين تقريبا. إذا كان تعداد سكان العالم ينمو باستمرار بمعدل 2%. فيمكن توقع تعداد السكان المستقبلي P. بالمليارات. من خلال $P = 6.5e^{0.02t}$. حيث تمثل t الوقت بالسنوات منذ 2008.

a. وفقا لهذا النموذج. كم سيكون تعداد سكان العالم في عام 2018؟

b. وضع بعض الخبراء تقديرا بأن إنتاج الغذاء في العالم يستطيع أن يكفي تعداد سكان يبلغ 18 مليار شخص بحد أقصى. وفقا لهذا التقدير. كم عدد السنوات المتبقية التي سيتمكن إنتاج الغذاء فيها من تغطية اتجاه النمو السكاني في العالم؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

98. **SAT/ACT** التمثيل البياني على المستوى xy للدالة التربيعية g عبارة عن قطع مكافئ بالرأس $(-2, 3)$. إذا كانت $g(0) = 0$ فأي مما يلي يجب أن يساوي 0 أيضا؟

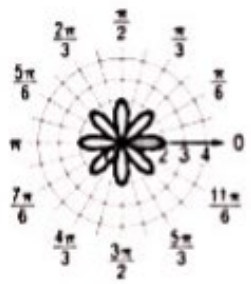
A $g(2)$
B $g(3)$
C $g(4)$
D $g(6)$
E $g(7)$

99. أي مما يلي يعبر عن العدد المركب $21i - 20$ في الصورة القطبية؟

F $29(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
G $29(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$
H $32(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$
J $32(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$

100. **إجابة حرة** راجع التمثيل البياني الموجود على اليسار.

a. اذكر معادلة محتملة للدالة.
b. اذكر تناظرات التمثيل البياني.
c. اذكر أصفار الدالة في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.
d. ما القيمة الصغرى لـ r في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

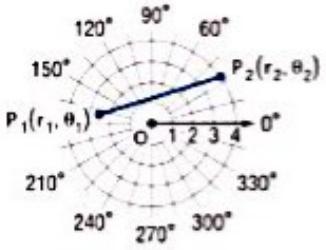
9 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 9-1)

- في النظام الإحداثي القطبي، يتم تحديد موقع النقطة (r, θ) باستخدام المسافة الموجهة r والزاوية الموجهة θ.
- المسافة بين $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.



التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية (الدرس 9-2)

- الدائرة: $r = a\cos\theta$ أو $r = a\sin\theta$
- منحنى قلبي الشكل: $r = a \pm b\cos\theta$ أو $r = a \pm b\sin\theta$ أو $a > 0$ أو $b > 0$
- الوردة: $r = a\cos n\theta$ أو $r = a\sin n\theta$ أو $n \geq 2$ أو $n \in \mathbb{Z}$
- منحنى ذو عروتين: $r^2 = a^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2\sin 2\theta$
- حلزونات أرشميدس: $b + r = a\theta$ أو $\theta \geq 0$

الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات (الدرس 9-3)

- النقطة $P(r, \theta)$ لها الإحداثيات المتعامدة $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل النقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات المتعامدة إلى الإحداثيات القطبية، استخدم المعادلتين $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$. عندما تكون $x > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$. عندما تكون $x < 0$.

الصور القطبية للقطوع المخروطية (الدرس 9-4)

- تكون المعادلة القطبية للقطع المخروطي بالصورة $r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$ حسب موقع واتجاه الدليل.

الأعداد المركبة ونظرية دي موافر (الدرس 9-5 إلى 9-8)

- الصيغة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة ناتج ضرب العددين المركبين z_1 و z_2 هي $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة ناتج قسمة العددين المركبين z_1 و z_2 هي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ حيث z_2 و $r_2 \neq 0$.
- تنص نظرية دي موافر على أنه إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، فإن $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ للأعداد الصحيحة الموجبة n.

المفردات الأساسية

قيمة مطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number	نظام إحداثي قطبي polar coordinate system
مستوى أرجاند Argand plane	الإحداثيات القطبية polar coordinates
إزاحة زاوية argument	معادلة قطبية polar equation
قلبي الشكل cardioid	صورة قطبية polar form
مستوى مركب complex plane	تمثيل بياني قطبي polar graph
محور تخيلي imaginary axis	قطب pole
منحنى ذو عروتين lemniscate	جذور الوحدة من الدرجة p *pth roots of unity*
منحنى قلبي الشكل limaçon	محور حقيقي real axis
معامل modulus	منحنى الوردة rose
محور قطبي polar axis	حلزون أرشميدس spiral of Archimedes
	صيغة مثلثية trigonometric form

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من قائمة المفردات الواردة أعلاه لإكمال كل جملة.

1. _____ هي مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية معطاة.
2. المستوى الذي له محور للمركب الحقيقي ومحور للمركب التخيلي هو _____.
3. يتم تحديد موقع نقطة في _____ باستخدام المسافة الموجهة من نقطة ثابتة والزاوية من محور ثابت.
4. نوع خاص من المنحنى قلبي الشكل الصدفي معادلته بالصورة $r = a + b\cos\theta$ حيث $a = b$ يسمى _____.
5. _____ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب بالصورة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
6. نقطة الأصل في النظام الإحداثي القطبي تسمى _____.
7. يطلق على القيمة المطلقة لعدد مركب أيضا _____.
8. _____ اسم آخر للمستوى المركب.
9. التمثيل البياني لمعادلة قطبية بالصورة $r^2 = a^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2\sin 2\theta$ يسمى _____.
10. _____ هو شعاع ابتداء من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه للميمين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

مراجعة درس بدرس

9-1 الإحداثيات القطبية

مثل كل نقطة بيانيا على شبكة قطبية.

11. $W(-0.5, 210°)$
12. $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$
13. $Y(4, -120°)$
14. $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مثل كل معادلة قطبية بيانيا.

15. $\theta = -60°$
16. $r = \frac{9}{2}$
17. $r = 7$
18. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

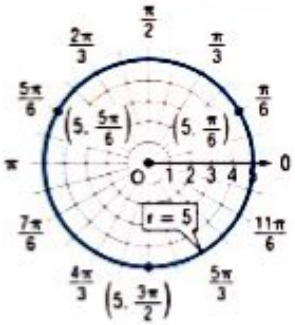
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط.

19. $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$
20. $(-3, 60°), (4, 240°)$
21. $(-1, -45°), (6, 270°)$
22. $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

مثال 1

مثل بيانيا $r = 5$.

حلول $r = 5$ عبارة عن أزواج مرتبة بالصورة $(5, \theta)$ حيث θ هي أي عدد حقيقي. يتألف التمثيل البياني من كل النقاط التي تقع على مسافة 5 وحدات من القطب. ولذلك فالتمثيل البياني عبارة عن دائرة يقع مركزها عند القطب بنصف القطر 5.



9-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

استخدم التناظر والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيا.

23. $r = \sin 3\theta$
24. $r = 2 \cos \theta$
25. $r = 5 \cos 2\theta$
26. $r = 4 \sin 4\theta$
27. $r = 2 + 2 \cos \theta$
28. $r = 1.5\theta, \theta \geq 0$

استخدم التناظر في تمثيل كل معادلة بيانيا.

29. $r = 2 - \sin \theta$
30. $r = 1 + 5 \cos \theta$
31. $r = 3 - 2 \cos \theta$
32. $r = 4 + 4 \sin \theta$
33. $r = -3 \sin \theta$
34. $r = -5 + 3 \cos \theta$

مثال 2

استخدم التناظر في تمثيل $r = 4 + 3 \cos \theta$ بيانيا.

يؤدي استبدال (r, θ) بـ $(r, -\theta)$ إلى $r = 4 + 3 \cos(-\theta)$. التي يمكن تبسيطها إلى $r = 4 + 3 \cos \theta$ لأن cosine متساو. المعادلات متكافئة. ولذلك فالتمثيل البياني لهذه المعادلة متناظر مع محور القطب. ولهذا، يمكنك عمل جدول قيم للتوصل إلى قيم r التي تقابل θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	r
0	7
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8 + 3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	4
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8 - 3\sqrt{2}}{2}$
π	1

بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التناظر على المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

9-3 الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة بالإحداثيات المتعامدة المعطاة إذا كانت $2\pi \le \theta \le 0$. قم بالتقريب إلى أقرب جزء من مئة.

35. $(-1, 5)$

36. $(3, 7)$

37. $(2a, 0), a > 0$

38. $(4b, -6b), b > 0$

اكتب كل معادلة بالصورة المتعامدة. ثم حدد التمثيل البياني لها. وادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

39. $r = 5$

40. $r = -4 \sin \theta$

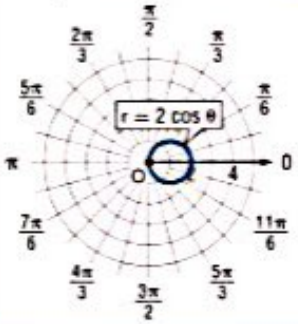
41. $r = 6 \sec \theta$

42. $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 3

اكتب $r = 2 \cos \theta$ بالصورة المتعامدة. ثم حدد التمثيل البياني لها. ادعم إجابتك بالتمثيل البياني للصورة القطبية للمعادلة.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب كل طرف في r.
$x^2 + y^2 = 2x$	$r^2 = x^2 + y^2$ و $x = r \cos \theta$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من كل طرف.



في الصورة القياسية، $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. يمكنك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة كدائرة مركزها عند $(1, 0)$ ونصف قطرها 1. كما يدعم ذلك التمثيل البياني لـ $r = 2 \cos \theta$.

9-4 الصور القطبية للقطوع المخروطية

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي.

43. $r = \frac{3.5}{1 + \sin \theta}$

44. $r = \frac{1.2}{1 + 0.3 \cos \theta}$

45. $r = \frac{14}{1 - 2 \sin \theta}$

46. $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$

اكتب مع التمثيل البياني معادلة قطبية ودليلا لمخروط بالخصائص المعطاة.

47. $e = 0.5$؛ الرأسان عند $(0, -2)$ و $(0, 6)$

48. $e = 1.5$؛ الدليل $x = 5$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة المتعامدة.

49. $r = \frac{16}{1 - 0.2 \sin \theta}$

50. $r = \frac{5}{1 + \cos \theta}$

مثال 4

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لـ $r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$.

اكتب المعادلة بالصورة القياسية. $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$

$r = \frac{7}{3.5 - 3.5 \cos \theta}$ المعادلة الأصلية

$r = \frac{3.5(2)}{3.5(1 - \cos \theta)}$ حلل البسط والمقام إلى العوامل.

$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ اقسم البسط والمقام على 3.5.

في هذه الصورة، يمكنك أن تعرف من المقام أن $e = 1$. ولهذا، فإن القطع المخروطي قطع ناقص. بالنسبة للمعادلات القطبية لهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = -d$. نعلم من البسط أن $ed = 2$. إذا $d = 2 \div 1$ أو 2. ولهذا، فإن معادلة الدليل هي $x = -2$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

مثل كل عدد في المستوى المركب بيانيا، وأوجد قيمته المطلقة.

51. $z = 3 - i$
52. $z = 4i$
53. $z = -4 + 2i$
54. $z = 6 - 3i$

عبر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

55. $3 + \sqrt{2}i$
56. $-5 + 8i$
57. $-4 - \sqrt{3}i$
58. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثل كل عدد مركب بيانيا على شبكة قطبية. ثم عبر عنه بصورة متعامدة.

59. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
60. $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
61. $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
62. $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة المتعامدة.

63. $-2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot -4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
64. $8(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$
65. $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
66. $6(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) \div 3(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

أوجد كل قوة أسية. وعبر عنها بالصورة المتعامدة.

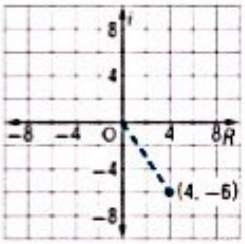
67. $(4 - i)^5$
68. $(\sqrt{2} + 3i)^4$

أوجد جميع جذور p المختلفة للعدد المركب.

69. الجذور التكعيبية لـ $6 - 4i$
70. جذور الدرجة الرابعة لـ $1 + i$

مثال 5

مثل بيانيا $4 - 6i$ في المستوى المركب وعبر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المعامل.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2}$ or $2\sqrt{13}$ $a = 4$ و $b = -6$

أوجد الإزاحة الزاوية.

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4$ و $b = -6$

$= -0.98$ بسط.

صورة $4 - 6i$ القطبية هي تقريبا $2\sqrt{13}[\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$.

مثال 6

أوجد $-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية.

ثم عبر عن ناتج الضرب بالصورة المتعامدة.

$-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ التعبير الأصلي

$= (-3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ قانون ناتج الضرب

$= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسط.

والآن أوجد الصورة المتعامدة لناتج الضرب.

$-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

$= -15(-0.26 + i(-0.97))$ أوجد القيمة

$= 3.9 + 14.5i$ خاصية التوزيع

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

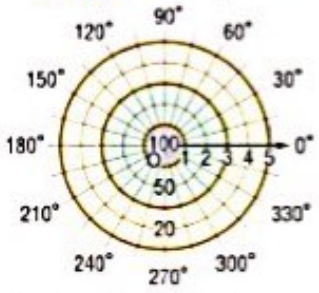
الصورة المتعامدة لناتج الضرب هي $3.9 + 14.5i$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

Scanned by CamScanner

التطبيقات وحل المسائل

71. **ألعاب** تتألف لعبة أركيد من دحرجة كرة على ممر صاعد نحو هدف. تحدد المنطقة التي تتوقف فيها الكرة عدد النقاط المكتسبة. يوضح النموذج قيمة النقاط لكل منطقة. (الدرس 1-9)



a. إذا دحرج اللاعب الكرة في أحد الأدوار إلى النقطة $(3.5, 165°)$، فكم عدد النقاط التي سيحصل عليها؟

b. اذكر موقعين محتملين يحصل منهما اللاعب على 50 نقطة.

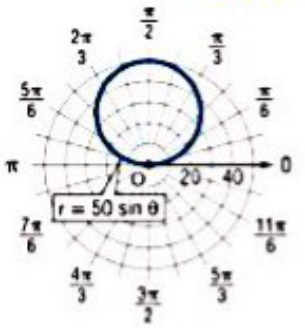
72. **المناظر الطبيعية** تستخدم إحدى شركات المناظر الطبيعية رشاش أعشاب يمكن تعديله ويمكنه الدوران بزاوية $360°$ وتغطية منطقة دائرية نصف قطرها 20 مترا. (الدرس 1-9)

a. مثل بيانيا أبعاد المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها على شبكة قطبية إذا تم ضبط الرشاش على الدوران بزاوية $360°$.

b. أوجد مساحة المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها إذا تم ضبط الدوران على $-30° \le \theta \le 210°$.

73. **علم الأحياء** يمكن تمثيل النمط الموجود على صدفة قوقعة باستخدام $r = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{2}$، حيث $\theta \ge 0$ حدد ومثل بيانيا المنحنى الكلاسيكي الذي يمثل هذا النمط. (الدرس 2-9)

74. **الأراجيح** يمكن تمثيل مسار عجلة دوارة بواسطة $r = 15 \sin \theta$، حيث r بالمتر. (الدرس 3-9)



a. ما الإحداثيات القطبية للراكب الموجود عند $\theta = \frac{\pi}{12}$؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة.

b. ما الإحداثيات المتعامدة لموقع الراكب؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة إن لزم الأمر.

c. كم يرتفع الراكب عن الأرض إذا كان المحور القطبي يمثل الأرض؟

75. **التوجيه** يتطلب التوجيه من المشاركين أن يجدوا طريقهم عبر منطقة باستخدام خريطة طبوغرافيا. بدأ أحد الموجهين من النقطة A وسار 5000 متر بزاوية 35 درجة ثم قياسها في اتجاه حركة عقارب الساعة من الشرق. بدأ موجه آخر من النقطة A وبسير 3000 متر باتجاه الغرب ثم 2000 متر باتجاه الشمال. ما المسافة بين الموجهين بالتقريب إلى أقرب متر؟ (الدرس 3-9)

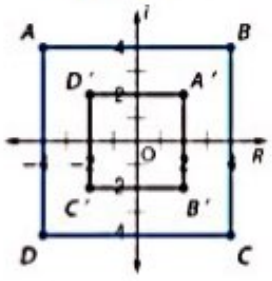
76. **القمر الصناعي** يتضمن مدار قمر صناعي حول الأرض اختلافا مركزيا يبلغ 0.05. وتبلغ المسافة من رأس المسار إلى مركز الأرض 32082. اكتب معادلة قطبية يمكن استخدامها لتمثيل مسار القمر الصناعي إذا كانت الأرض تقع عند البؤرة الأقرب إلى الرأس المعطاة. (الدرس 4-9)

77. **الكهرباء** تم تصميم معظم الدوائر الكهربائية في أوروبا لتعمل بقدرة 220 فولت. في الجزأين a وb، استخدم $E = I \cdot Z$. حيث يتم قياس الجهد الكهربائي E بالفولت، ويتم قياس المعاوقة Z بالأوم ويتم قياس التيار I بالأمبير. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-9)

a. إذا كانت شدة تيار الدائرة $5j + 2$ أمبير. فما المقاومة؟

b. إذا كانت مقاومة الدائرة $3j - 1$ أوم. فما التيار؟

78. **رسوم الكمبيوتر** يمكن إجراء التحويل الهندسي للأشكال باستخدام الأعداد المركبة. إذا بدأ أحد المبرمجين بالمربع $ABCD$. كما هو موضح أدناه، يمكن تمثيل كل الرؤوس بعدد مركب في صورة قطبية. ثم يمكن استخدام الضرب لتدوير المربع وتغيير أبعاده مما ينتج المربع $A'B'C'D'$. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج أن يضرب فيه كل عدد لإنتاج هذا التحويل؟ (الدرس 5-9)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

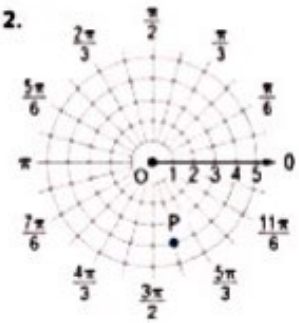
Scanned by CamScanner

9 تدريب على الاختبار

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعين النقطة P إذا كان $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

1.

2.



مثل كل معادلة قطبية بيانيا.

3. $\theta = 30°$

4. $r = 1$

5. $r = 2.5$

6. $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7. $r = \frac{2}{3}\sin\theta$

8. $r = -\frac{1}{2}\sec\theta$

9. $r = -4\csc\theta$

10. $r = 2\cos\theta$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيا.

11. $r = 1.5 + 1.5\cos\theta$

12. $r^2 = 6.25\sin 2\theta$

13. **رادار** يعمل موظف التحكم في المرور الجوي على تعقب طائرة موقعها الحالي هو $(66, 115°)$. تحدد قيمة r بالكيلومتر.

a. ما الإحداثيات المتعامدة لموقع الطائرة؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.

b. إذا تم تحديد موقع طائرة ثانية عند النقطة $(-75, 50)$، فما الإحداثيات القطبية للطائرة إذا كانت $r > 0$ و $0 \le \theta \le 360°$؟ قرب إلى أقرب كيلومتر وأقرب جزء من عشرة من الدرجة إن لزم الأمر.

c. ما المسافة بين الطائرتين؟ قرب إلى أقرب كيلومتر.

حدد التمثيل البياني لكل معادلة متعامدة، ثم اكتبها بصورة قطبية. ادعم إجابتك بتمثيل بياني للصورة القطبية للمعادلة.

14. $(x-7)^2 + y^2 = 49$

15. $y = 3x^2$

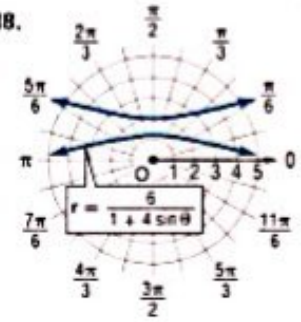
حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي.

16. $r = \frac{2}{1 - 0.4\sin\theta}$

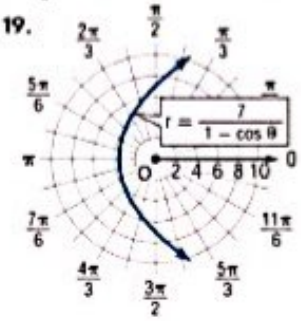
17. $r = \frac{6}{2\cos\theta + 1}$

اكتب معادلة كل تمثيل بياني قطبي بالصورة المتعامدة.

18.



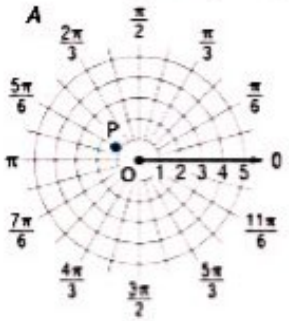
19.



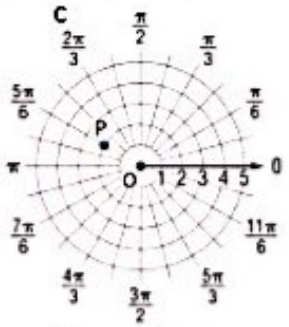
20. **الكهرباء** دائرة كهربائية جهدها الكهربائي E يساوي 135 فولت وشدة تيارها I تبلغ $4j - 3$ أمبير. أوجد مقاومة الدائرة Z بالأوم بالصورة المتعامدة. استخدم المعادلة $E = I \cdot Z$.

21. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني للنقطة P ذات الإحداثيات المركبة $(-\sqrt{3}, -1)$ على المستوى الإحداثي القطبي.

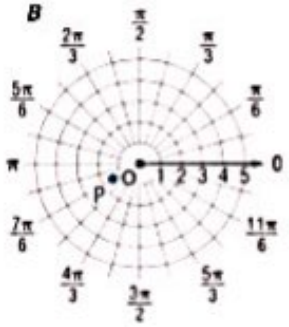
A



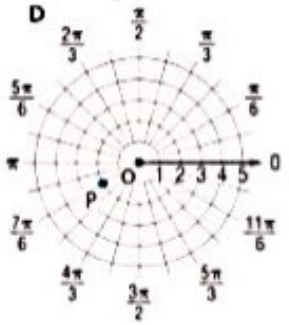
C



B



D



أوجد كل قوة أسية وعبر عنه بصورة متعامدة. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

22. $(-1 + 4i)^3$

23. $(-7 - 3i)^5$

24. $(6 + i)^4$

25. $(2 - 5i)^6$

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner