وزارة التربيــــة والتعليــــم والتعليــــم العالـــــي
Ministry of Education and Higher Education
State of Qatar • دولـــــة قطـــــر

الرياضيات

المستوى الثاني عشر – الفصل الدراسي الأول

المسار الموازي

التأليف والمراجعة العلمية والتربوية

خبراء تربويّون وأكاديميون من إدارة المناهج الدراسية ومصادر التعلم

طبعة 1446 - 2024

حضرة صاحب السمو الشيخ تميم بن حمد آل ثاني
أمير دولة قطر

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءْ   قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّياءْ
قَطَرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً   تَسْمُو بِرُوحِ الأَوْفِياءْ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الأُلَى   وَعَلَى ضِيَاءِ الأَنْبِيَاءْ
قَطَرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ   عِزٌّ وَأَمْجَادُ الإِبَاءْ
قَطَرُ الرِّجَالِ الأَوَّلِين   حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءْ
وَحَمَائِمٌ يَوْمَ السَّلَامْ   جَوَارِحٌ يَوْمَ الفِدَاءْ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للطالب فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه دولة قطر لتنمية المــوارد البشريـة؛ ووعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجهها نحو الاهتمام بالمناهج الدراسية ومصادر التعلم ومنها مصادر تعلم الرياضيات، بدءاً من مسـار التعليم العام إلى مسـار تعليم الكبار؛ سـعيًا للارتقاء بمخرجـــات التعليم لدى الطلبة، لتخدم تطلعات وطموحات المجتمع القطري والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه المصادر بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يُقبل على تعلمها، ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه المصادر على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- الاهتمام بالمهارات الريـــاضـية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الريـــاضي وتجعل منه كلًا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصـل الرياضي، ومهارات الحس الريـــاضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- توظيف الاستراتيجيات المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.

ونحن إذ نقدم هذه المصادر لأعزائنا الطلبة، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لمادة الرياضيات أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة الأولى الأسس والجذور

الفهرس

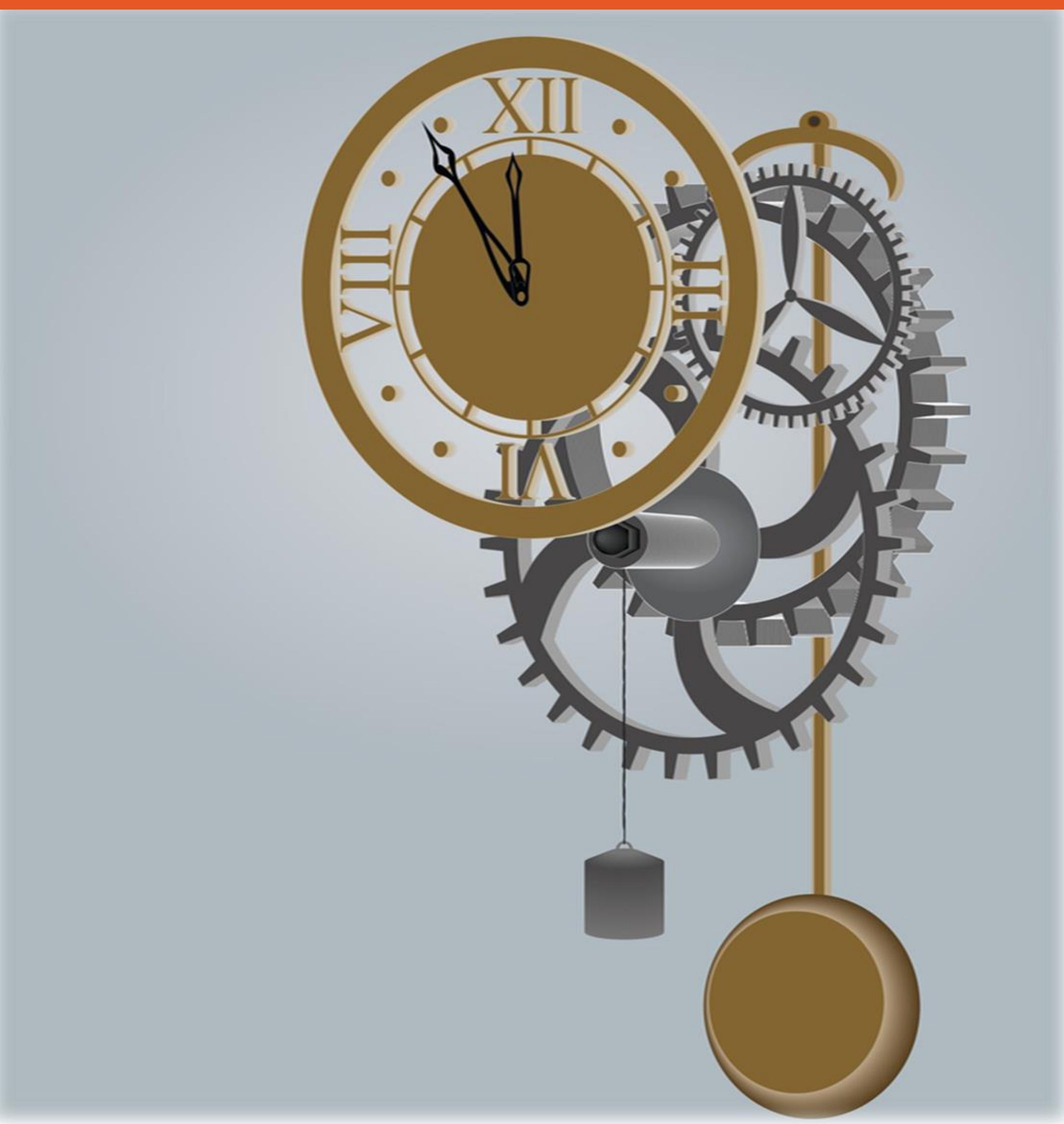
الوحدة الثانية الهندسة الإحداثيّة

الوحدة

1

الأسس والجذور

Indices and Roots



نظرة عامة على الوحدة

الفيزياء:

تُستعمل الأسس والجذور في التعاملات الحياتية والتطبيقات العلمية المختلفة، يعد بندول الساعة أحد التطبيقات و الاختراعات الإسلامية الكبرى التي غيرت مسار الحضارة الإنسانية. ومنذ عرف البندول تطورت آلات حساب الوقت بسرعة. تمثلُ الصيغةُ $\frac{375}{\sqrt{c}}$، عدد التذبذبات الناتجة عن حركة بندول ساعة طوله $\sqrt{c}$ **in** في الدقيقة.

استعد

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

(1) 3^4

(2) $\sqrt{121}$

(3) $(-2 \times -2)^2 \times 3$

(4) $(0.5)^{-5} \times (0.5)^5$

حل كلَّ معادلة مما يأتي:

(5) $x + 0.1x = 1100$

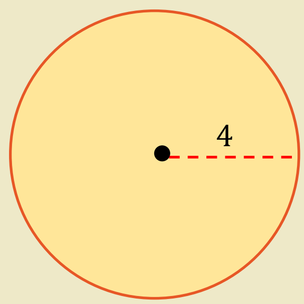
(6) $\frac{x}{3.1} = \frac{5}{15.5}$

(7) $5x - 3 = 3^3$

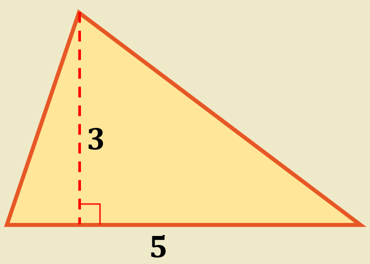
(8) $2^x = 2^7$

أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

(9)



(10)



الدرس
1-1

الأسس الصحيحة

Integral Exponents

فكرة الدرس

- أضرب قوى وأقسمها.
- أبسط تعابير تتضمن قوى لنواتج ضرب أو قسمة.
- أبسط تعابير تحتوي على أسس صفرية وسالبة.

المصطلحات

الأس، الأساس، الصيغة الأسية، الصيغة القياسية، القوى، ضرب القوى، قوة القوة، الأس الصفري، قسمة القوى، قوة حاصل الضرب، قوة ناتج القسمة، المعادلة الأسية، الأسس السالبة.

مسألة اليوم

زار حمد منتزه الخور للعائلات، وأرسل صورة لاثنين منْ أصدقائه بعد دقيقة من التقاطها، وبعد دقيقة أخرى أرسل كلٌّ منْ صديقيْه الصورة نفسها لاثنين من أصدقائها، واستمرّت العمليّة وفق هذا النَّمط كما في الجدول المجاور.

الدقائق	عدد الصور المرسلة	
1	2×1	2
2	2×2	4
3	$2 \times 2 \times 2$	8
4	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16

ما عدد الصور المرسلة في الدقيقة **6** ؟

يمكن التعبير عن الضرب المتكرر للعدد في نفسه باستخدام الأسس، وعندئذ يسمى عدد مرات تكرار الضرب الأس ويسمى كل من الأساس والأس معا القوة ، أما العدد نفسه فيسمى الأساس:

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

الأس

الأساس

يقرأ المقدار 2^5 اثنان أس خمسة

تسمى الصيغة التي يكتب فيها الضرب المتكرر باستخدام الأسس الصيغة الأسية مثل 5^8 ، أما الصيغة التي يكتب فيها الضرب المتكرر من دون استخدام الأسس فتسمى الصيغة القياسية مثل $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثال التالي بتطبيق تعريف القوة. انظر إلى نمط الأسس في المثال التالي:

$$5^3 \times 5^4 = \overbrace{(5 \times 5 \times 5)}^{3\ \text{عوامل}} \times \overbrace{(5 \times 5 \times 5 \times 5)}^{4\ \text{عوامل}} = 5^7$$

7 عوامل ($3 + 4 = 7$)

يوضح المثال السابق خاصية ضرب القوى.

ضرب القوى	
المفهوم	لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، أجمع أسيهما.
الرموز	لأي عدد حقيقي a ؛ وأي عددين صحيحين m , p ؛ فإن: $a^m \times a^p = a^{m+p}$
أمثلة	$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ $7^4 \times 7^8 = 7^{4+8} = 7^{12}$

مثال 1

استخدم مفهوم ضرب القوى لإيجاد قيمة كل مما يأتي:

1 $2^3 \times 2^4$

$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$ قاعدة ضرب القوى

$= 2^7$ أجمع الأسس

$= 128$ استعمل الآلة الحاسبة

2 $(2bc^2)(b^4c^5)$

$(2bc^2)(b^4c^5) = (2 \times 1)(b \times b^4)(c^2 \times c^5)$ جمِّع المعاملات والمتغيرات ذات الأساس نفسه

$= (2 \times 1)(b^{1+4})(c^{2+5})$ ضرب القوى

$= 2b^5c^7$ بسّط

إرشاد

يمكن التحقق من صحة الحل باستعمال الآلة الحاسبة:

(2) x^3 ×

(2) x^y 4

= 128

إرشاد

العدد 1 معاملاً و أسًّا

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي 1، أي أن:

$x = 1x^1$

تحقق من فهمك

اكتب كل تعبير مما يأتي في أبسط صورة :

a) $8^5 \times 8^4$

b) $(2x^3)(3x^5)$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$(5^2)^4 = \underbrace{(5^2)(5^2)(5^2)(5^2)}_{\text{4 عوامل}} = 5^{2+2+2+2} = 5^8$$

$$(k^4)^3 = \underbrace{(k^4 \times k^4 \times k^4)}_{\text{3 عوامل}} = k^{4+4+4} = k^{12}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوّة القوة.

قوّة القوة	
المفهوم	لإيجاد قوة القوة، أضرب الأسس.
الرموز	لأي عدد حقيقي a ؛ وأي عددين صحيحين m, p ؛ فإن: $(a^m)^p = a^{m \times p}$
أمثلة	$(b^5)^4 = b^{5\times4} = b^{20}$ $(6^4)^7 = 6^{4\times7} = 6^{28}$

مثال 2

أستخدم قوة القوة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

1 $(3^4)^5$

$(3^4)^5 = 3^{4\times5}$ قوة القوة

$= 3^{20}$ بسّط

$= 3486784401$ استعمل الآلة الحاسبة

2 $[(2^4)^2]^3$

$[(2^4)^2]^3 = (2^{4\times2})^3$ قوة القوة

$= (2^8)^3$ بسّط

$= 2^{8\times3}$ قوة القوة

$= 2^{24}$ بسّط

$= 16777216$

إرشاد

استعمال الآلة الحاسبة لحساب القوى أدخل الأساس ثم أضغط على المفتاح x^y ، ثم أدخل الأس وأضغط $=$.

لحساب 3^{20} ، اســـتعمل المفاتيح

3 x^y 20 $=$

ستظهر النتيجة

3486784401

تحقق من فهمك

أبسط كل تعبير مما يأتي:

a) $(5^2)^3$

b) $[(3^2)^3]^2$

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى وقوة القوة، لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثال التالي:

$$(2bk^2)^3 = \underbrace{(2bk^2)(2bk^2)(2bk^2)}_{\text{3 عوامل}}$$

$$= (2 \times 2 \times 2)(b \times b \times b)(k^2 \times k^2 \times k^2)$$

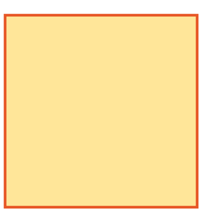
$$= 2^3 b^3 k^6$$

يوضح المثال السابق خاصية قوّة حاصل الضرب.

قوّة حاصل الضرب	
لإيجاد قوة حاصل الضرب، أجد قوة كل عدد، ثم أضرب.	**المفهوم**
لأي عدد حقيقي a, b ؛ وأي عدد صحيح m؛ فإن: $(ab)^m = a^m b^m$	**الرموز**
$(-2xy^4)^3 = (-2)^3(x)^3(y^4)^3 = -8x^3y^{12}$	**مثال**

مثال 3

عبّر عن مساحة المربع المجاور بحدٍّ جبريٍّ بأبسط صورة.



$3ab^2$

$A = s^2$ صيغة مساحة المربع

$= (3ab^2)^2$ عوّض عن s بـِ $3ab^2$

$= 3^2a^2b^{2^2}$ قوّة حاصل الضرب

$= 9a^2b^4$ بسّط

إذن مساحة المربع تساوي $9a^2b^4$ وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

a) عبِّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه $5xy^3$ ، بحدٍّ جبري في أبسط صورة.

b) عبِّر عن مساحة دائرة طول نصف قطرها هو $3a^2b$ ، بحدٍّ جبري في أبسط صورة.

يمكن استعمال مبادئ تبسيط الكسور الاعتيادية؛ لإيجاد ناتج قسمة قوّتين لهما الأساس نفسه مثل $\frac{10^9}{10^4}$ انظر إلى نمط الأسس في المثال التالي:

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{\overbrace{\cancel{3}^{1} \times \cancel{3}^{1} \times \cancel{3}^{1} \times \cancel{3}^{1} \times 3 \times 3}^{\text{6 عوامل}}}{\underbrace{\cancel{3}_{1} \times \cancel{3}_{1} \times \cancel{3}_{1} \times \cancel{3}_{1}}_{\text{4 عوامل}}} = 3 \times 3 = 3^2$$

والمثال السابق يبين خاصية قسمة القوى.

قسمة القوى	
المفهوم	لقسمة قوتين لهما الأساس نفسه، أطرح أس المقام من أس البسط.
الرموز	لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ؛ وأي عددين صحيحين m, t؛ فإن: $\frac{a^m}{a^t} = a^{m-t}$
مثال	$\frac{x^7}{x^5} = x^{7-5} = x^2$

مثال 4

عبّر عن المقدار $\frac{n^5b^4}{n^3b}$ بحدٍّ جبريٍّ بأبسط صورة، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$\frac{n^5b^4}{n^3b} = \left(\frac{n^5}{n^3}\right)\left(\frac{b^4}{b}\right)$$ جمّع القوى ذات الأساس نفسه

$$= (n^{5-3})(b^{4-1})$$ قسمة القوى

$$= n^2b^3$$ بسّط

تحقق من فهمك

عبّر عن المقادير التالية بحدود جبريّة بأبسط صورة، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

a) $\dfrac{x^5y^4}{xy^3}$ b) $\dfrac{h^{10}w^6}{h^7w^2}$

يمكنك استعمال تعريف القوى؛ لإيجاد قوة ناتج قسمة سواء أكانت أعدادًا أو متغيراتٍ. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)}^{\text{3 عوامل}} = \frac{\overbrace{2\times2\times2}^{\text{3 عوامل}}}{\underbrace{3\times3\times3}_{\text{3 عوامل}}} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^4 = \overbrace{\left(\frac{c}{d}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)}^{\text{4 عوامل}} = \frac{\overbrace{c\times c\times c\times c}^{\text{4 عوامل}}}{\underbrace{d\times d\times d\times d}_{\text{4 عوامل}}} = \frac{c^4}{d^4}$$

قوة ناتج القسمة	
المفهوم	لإيجاد قوة ناتج القسمة، أجد كلاً من قوة البسط و قوة المقام.
الرموز	لأي عدد حقيقي $a, b \neq 0$ ؛ وأي عدد صحيح m؛ فإن: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
مثال	$\left(\frac{e}{f}\right)^3 = \frac{e^3}{f^3}$ ، $\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^5}$

مثال 5

بسّط المقدار $\left(\frac{r^2}{5}\right)^3$.

$$\left(\frac{r^2}{5}\right)^3 = \frac{(r^2)^3}{5^3}$$ قوة ناتج القسمة

$$= \frac{r^{2\times3}}{5^3}$$ قوة القوة

$$= \frac{r^6}{125}$$ بسّط

إرشاد

تطبق قوانين القوة على المتغيرات كما تطبق على الأعداد تمامًا. فمثلا:

$$\left(\frac{3a}{2b}\right)^2 = \frac{(3a)^2}{(2b)^2} = \frac{9a^2}{4b^2}$$

تحقق من فهمك

بسّط كلّ تعبير مما يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا

a) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^5$ b) $\left(\frac{3y^4}{z^3}\right)^2$ c) $\left(\frac{4h}{l^4}\right)^3$

الأس الصفري يمكن استعمال الآلة الحاسبة؛ لاستكشاف تعابير مرفوعة للأس صفر وتوجد طريقتان لتفسير الإجابة على الألة الحاسبة $\mathbf{5^0 = 1}$

الطريقة الأولى

ناتج قسمة القوى $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3}$

بسّط $= 5^0$

الطريقة الثانية

تعريف القوى $\frac{5^3}{5^3} = \frac{\cancel{5}^{1} \times \cancel{5}^{1} \times \cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1} \times \cancel{5}_{1} \times \cancel{5}_{1}}$

بسّط $= 1$

بما أن للمقدار $\frac{5^3}{5^3}$ قيمة واحدة فقط، فإننا نستنتج أنّ $\mathbf{5^0 = 1}$

الأس الصفري	
المفهوم	أي عدد غير الصفر مرفوعاً للأس صفر يساوي **1**
الرموز	لأي عدد حقيقي $\boldsymbol{a \neq 0}$ ؛ فإن: $\boldsymbol{a^0 = 1}$
مثال	$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$ ، $\left(\frac{e}{f}\right)^0 = 1$ ، $12^0 = 1$

مثال 6

بسّط كلّ مقدار ممّا يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

1 $\left(-\frac{r^2xv^5}{7rx^8v^3}\right)^0$

$a^0 = 1$ $\left(-\frac{r^2xv^5}{7rx^8v^3}\right)^0 = 1$

2 $\frac{x^7y^0}{x^4}$ قوة ناتج القسمة

$a^0 = 1$ $\frac{x^7y^0}{x^4} = \frac{x^7(1)}{x^4}$

قسمة القوى $= x^3$

تحقق من فهمك

بسّط كلّ تعبير مما يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{f^5x^3v^0}{f^2x}$ b) $\left(\frac{2y^4e^7h}{13h^4r^4w}\right)^0$

الأسسُ السالبةُ: لفهم الأسس السالبة، يمكننا تبسيط مقادير مثل $\frac{x^3}{x^5}$ ، باستعمال الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5}$$ ناتج قسمة القوى

$$= x^{-2}$$ بسّط

الطريقة الثانية

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times \overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times x \times x}$$ تعريف القوى

$$= \frac{1}{x^2}$$ بسّط

بما أن للعبارة $\frac{x^3}{x^5}$ قيمة واحدة فقط، فإننا نستنتج أن $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

الأسسُ السالبةُ	
المفهوم	لأي عدد حقيقي a لا يساوي صفراً، فإن a^{-n} هو مقلوب a^n ، ومقلوب a^{-n} هو a^n.
الرموز	لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ؛ فإن: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$
مثال	$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$, $\frac{1}{v^{-5}} = v^5$

مثال 7

بسّط كلّ مقدار ممّا يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

1) $\frac{v^5}{3^{-4}}$

$$\frac{v^5}{3^{-4}} = \left(\frac{v^5}{1}\right)\left(\frac{1}{3^{-4}}\right)$$ اكتب التعبير في صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$$= \left(\frac{v^5}{1}\right)\left(\frac{3^4}{1}\right)$$ $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

$$= \left(\frac{v^5}{1}\right)\left(\frac{81}{1}\right)$$ بسّط

$$= 81\, v^5$$ اضرب

2. $\dfrac{\boldsymbol{x^5y^{-2}}}{\boldsymbol{z^{-4}}}$

$\dfrac{x^5y^{-2}}{z^{-4}} = \left(\dfrac{x^5}{1}\right)\left(\dfrac{y^{-2}}{1}\right)\left(\dfrac{1}{z^{-4}}\right)$ اكتب التعبير في صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$= \left(\dfrac{x^5}{1}\right)\left(\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{z^4}{1}\right)$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

$= \dfrac{x^5z^4}{y^2}$ اضرب

تحقق من فهمك

بسّط كلّ تعبير مما يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{x^3v^{-3}}{5^{-2}}$

b) $\dfrac{e^4h^{-5}}{w^{-2}}$

أبسط صورة للعبارة الأسية: تعدّ العبارة الأسية في أبسط صورة، إذا احتوت على أُسسٍ موجبة فقط، وظهر كل أساس مرةً واحدةً، ولم تتضمن قوة القوة، وكانت جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.

مثال 8

بسّط كلّ مقدار ممّا يأتي مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

1. $\dfrac{\boldsymbol{a^5b^{-3}c^4}}{\boldsymbol{a^{-3}b^2c^{-3}}}$

$\dfrac{a^5b^{-3}c^4}{a^{-3}b^2c^{-3}} = \dfrac{a^5a^3c^4c^3}{b^3b^2}$ خصائص القوى

$= \dfrac{a^8c^7}{b^5}$ خصائص القوى

2. $\left(\dfrac{\boldsymbol{y^2x^5}}{\boldsymbol{yx^3}}\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{2y^0}}{\boldsymbol{y^{-3}}}\right)$

$\left(\dfrac{y^2x^5}{yx^3}\right)\left(\dfrac{2y^0}{y^{-3}}\right) = (y^{2-1})(x^{5-3})(2y^3)$ خصائص القوى

$= 2y^4x^2$ خصائص القوى

3. $\left(\dfrac{x^{-3}y^{6}}{x^{4}y^{-2}}\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-3}$

$$\left(\frac{x^{-3}y^{6}}{x^{4}y^{-2}}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{-3} = (x^{-7}y^{8})\left(\frac{x}{y}\right)^{3}$$ خصائص القوى، $\left(\frac{y}{x}\right)^{-3} = \left(\frac{x}{y}\right)^{3}$

$$= (x^{-7}y^{8})\left(\frac{x^{3}}{y^{3}}\right)$$ خصائص القوى

$$= x^{-4}y^{5}$$ خصائص القوى

$$= \frac{y^{5}}{x^{4}}$$ خصائص القوى

تحقق من فهمك

بسّط كلّ تعبير مما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{3a^{7}b^{-3}c^{-2}}{a^{4}b^{5}c^{3}}$ b) $\dfrac{p^{4}}{q^{-3}(pq)^{3}}$ c) $(-3n^{-2})^{2}\times\left(n\times\dfrac{1}{n^{3}}\right)^{-1}$

المعادلات الأسية: المعادلة التي تحتوي على قُوًى أُسُسُها متغيرات تسمى معادلة أسيّة، ومن أبسط أمثلتها: $7^{x+2} = 49^{x}$, $3^{x} = 9^{3}$, $4^{x+2} = 64$ ولحل المعادلات الأسية، نكتب كلًا من طرفيها في صورة قوة للأساس نفسه، ثم نكتب معادلة تربط بين الأسين ونحلُّها.

مثال 9

حل كلا من المعادلتين الآتيتين:

1. $32 = 2^{x}$

$$32 = 2^{x}$$ المعادلة الأصلية

$$2^{5} = 2^{x}$$ $32 = 2^{5}$

$$5 = x$$ مساواة الأسس؛ لأن للقوتين أساسًا واحدًا هو 2

2. $3^{x} = 27^{2}$

$$3^{x} = 27^{2}$$ المعادلة الأصلية

$$3^{x} = (3^{3})^{2}$$ $16 = 2^{4}$

$$3^{x} = 3^{6}$$ قوة القوة

$$x = 6$$ مساواة الأسس؛ لأن للقوتين أساسًا واحدًا هو 3

إرشاد

قيمة $(-1)^{n}$

تذكر أن:

$$(-1)^{n} = \begin{cases} 1 & \text{عدد زوجي } n \\ -1 & \text{عدد فردي } n \end{cases}$$

إرشاد

لاحظ أن:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{-k} = \left(\frac{m}{n}\right)^{k}$$

3 $2^{x+3} = 4^{2x}$

$2^{x+3} = 4^{2x}$	المعادلة الأصلية
$2^{x+3} = (2^2)^{2x}$	$4 = 2^2$
$2^{x+3} = (2)^{4x}$	قوة القوة
$x + 3 = 4x$	خاصية المساواة
$3 = 3x$	اطرح x من كلا الطرفين
$1 = x$	بسّط

إرشاد

خاصية المساواة للعبارات الأسية

إذا كان $b > 0, b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

تحقق من فهمك

حل كلا من المعادلات الآتية:

a) $9^x = 729$ b) $4^{2n-1} = 8^2$ c) $5^{5x} = 125^{x+2}$

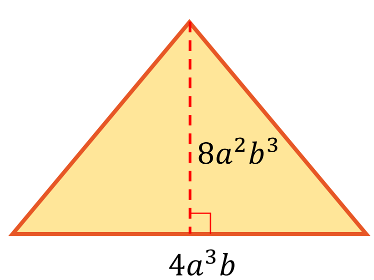
تدرب وحل مسائل

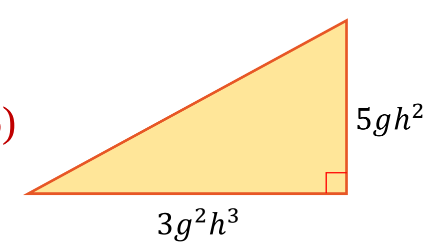
اكتب كل تعبير مما يأتي في أبسط صورة : (انظر مثال 1 ، 2)

1) $(2y^3)(y^5)$ 2) $(2x^3y)(3x^5y^6)$

3) $(12tc^2e^2)(-3t^5c^2e^2)$ 4) $[(2x^3)^2]^2$

عبر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين بحدٍّ جبريٍّ في أبسط صورة: (انظر مثال 3)

5) 

6) 

بسط كل مقدار مما يأتي مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (انظر مثال 4 -7)

7) $\dfrac{p^{11}t^3r}{p^2tr}$ 8) $\left(\dfrac{p^3t^5}{10}\right)^3$ 9) $\dfrac{y^3x^{-1}}{4^{-3}}$

10) $\left(\dfrac{3x^3y^5z}{8xy^3}\right)^0$ 11) $\left(\dfrac{y^4x^2}{y^2x^3}\right)$ 12) $\dfrac{h^3l^{-2}}{k^{-4}}$

حل كلاً من المعادلات الآتية: (انظر مثال 8، 9)

13) $3^{5x} = (27)^{2x-4}$

14) $8^{4x+2} = 64$

15) $2^{6x} = (32)^{x-2}$

16) $(16)^{2y-3} = 4^{y-1}$

17) **اكتشف الخطأ:** بسط كل من عبدالله وتميم العبارة $\frac{x^{-n}y^{n}}{z^{-n}}$، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

عبدالله

$$\frac{x^{-n}y^{n}}{z^{-n}}$$
$$= \frac{(xy)^{n-n}}{z^{-n}}$$
$$= \frac{(xy)^{0}}{z^{-n}} = \frac{1}{z^{-n}} = z^{n}$$

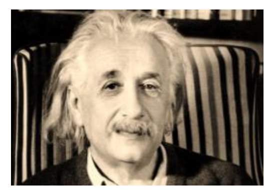
تميم

$$\frac{x^{-n}y^{n}}{z^{-n}}$$
$$= \frac{y^{n}}{x^{n}z^{-n}}$$
$$= \frac{y^{n}z^{n}}{x^{n}}$$

18) يمكن تحويل المادة كاملةً إلى طاقة باستعمال الصيغة $E = mc^2$، وتُقاس الطاقة بالجول، والكتلة بالكيلوجرام، وتبلغ سرعة الضوء **300** مليون مترٍ لكل ثانيةٍ تقريبًا.

a) احسب كمية الطاقة الناتجة عن تحويل **3 kg** كاملة من البنزين إلى طاقة.

b) ماذا يحدث للطاقة، إذا أصبحت كمية البنزين مِثْلَي ما كانت عليه؟



تاريخ الرياضيات

يعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه $E = mc^2$، المعروف باسمه؛ حيث E تمثل الطاقة، وتمثل m كتلة المادة، و c سرعة الضوء، يظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحوٍ كافٍ

الدرس
1-2

الأسس النسبية

Rational Exponents

فكرة الدرس

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية و العكس.
- أبسط عبارات أسية أو جذرية.
- أحل معادلات أسية.

المصطلحات

الجذر النوني، الأس النسبي، العبارات الأسية، العبارات الجذرية.

مسألة اليوم

يقوم خليفة بدراسة لعدد الحوادث وقد لاحظ زيادة عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطرقات كلما زاد عدد الدراجات، ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالمعادلة $a = b^{\frac{2}{3}}$ حيث b عدد الدراجات، و a عدد الحوادث. فإذا كان عدد الدرّاجات 64000 فكم عدد الحوادث؟

الأسس النسبية و العبارات الجذرية: نعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد الجذر التربيعي لمربعه هما عمليتان عكسيتان، وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد للقوة n هي إيجاد الجذر النوني ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا، كما في الصيغة أعلاه. يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات الأسية وذلك بتحويلها إلى عبارات جذرية بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

الأسس النسبية $(b^{\frac{1}{n}})$	
المفهوم	لأي عدد حقيقي b ، وأي عدد صحيح n $(n > 1)$ ، فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ ، و n عدد زوجيًا، فإن الجذر النوني يكون عددًا غير حقيقي.
أمثلة	$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ ، $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$ $(-64)^{\frac{1}{2}}$ تساوي $\sqrt{-64}$، وهذا عدد غير حقيقي.

إرشاد

دليل الجذر: تعرّف n في العبارة الجذرية $\sqrt[n]{b}$ بأنها دليل الجذر.

مثال 1

اكتب العبارة الأسية في الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية في الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

1) $x^{\frac{1}{7}}$

$x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

2) $\sqrt[6]{c}$

$\sqrt[6]{c} = c^{\frac{1}{6}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

3) $5^{\frac{1}{4}}$

$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

4) $\sqrt[3]{-7}$

$\sqrt[3]{-7} = (-7)^{\frac{1}{3}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

اكتب العبارة الأسية في الصورة الجذرية، و العبارة الجذرية في الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

a) $y^{\frac{1}{7}}$

b) $3^{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[10]{6}$

d) $\sqrt[8]{t}$

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

الأسس النسبية ($b^{\frac{m}{n}}$)	
المفهوم	لأي عدد حقيقي $b \neq 0$ ، وأي عددين صحيحين n, m $(n > 1)$ ، فإن $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ ، و n عدد زوجيًا، فإن الجذر قد يكون عددًا غير حقيقي.
أمثلة	$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$ $(-32)^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^3 = (-2)^3 = -8$ $(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ $(-64)^{\frac{3}{2}}$ تساوي $\left(\sqrt{-64}\right)^3$ ، وهذا عدد غير حقيقي.

كما أن الخصائص التي تنطبق على الأسس الصحيحة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية.

مثال 2

من دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلِّ عبارة مما يأتي:

1 $(625)^{\frac{3}{4}}$

$(625)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{625}\right)^3$ اكتب العبارة في الصورة الجذرية

$= (5)^3$ $\sqrt[4]{625} = 5$

$= 125$ بسّط

2 $(256)^{-\frac{1}{4}}(216)^{\frac{2}{3}}$

$(256)^{-\frac{1}{4}}(216)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{(256)^{\frac{1}{4}}}\right)(6^3)^{\frac{2}{3}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ ، $216 = 6^3$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{256}} \times 6^{3\times\frac{2}{3}}$ خاصية قوة القوة $256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{4^4}} \times 6^2$ ضرب الأسس، $256 = 4^4$

$= \frac{1}{4} \times 36$ بسّط

$= 9$ بسّط

3 $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبيّة

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوّة القوّة

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ بسّط خاصية قسمة قوّتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بسّط

$= \sqrt[4]{3}$ أعد كتابة العبارة على الصورة الجذريّة

تحقق من فهمك

اكتب كل تعبير مما يأتي في أبسط صورة :

a) $(64)^{\frac{5}{3}}$ b) $\left((256)^{\frac{3}{8}}\right) \times (64)^{\frac{-1}{3}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[3]{216}}$

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة في صورة أسس موجبة، واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحةً موجبةً.

مثال 3

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1 $\frac{b^{\frac{8}{3}}}{b^{\frac{-7}{3}}}$

$$\frac{b^{\frac{8}{3}}}{b^{\frac{-7}{3}}} = b^{\frac{15}{3}}$$ خاصية قسمة القوى

$$= b^5$$ بسّط

2 $\left(x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{\frac{3}{6}}\right)^{-6}$

$$\left(x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{\frac{3}{6}}\right)^{-6} = \left(x^{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}}\right)^{-6}$$ خاصية ضرب القوى

$$= \left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{-6}$$ جمع الأسس

$$= x^{-5}$$ خاصية قوة القوة

$$= \frac{1}{x^5}$$ خاصية الأس السالب

تحقق من فهمك

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{y^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{9}{6}}}{y^{\frac{1}{3}}}$ b) $\left(m^{\frac{2}{7}} \cdot m^{\frac{4}{7}}\right)^{-7}$

عند تبسيط عبارة جذرية، اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن، وتذّكر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 4

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي:

1) $\sqrt[6]{8h^3}$

$$\sqrt[6]{8h^3} = (8h^3)^{\frac{1}{6}}$$ الأسس النسبية

$$= [(2h)^3]^{\frac{1}{6}}$$ $8h^3 = (2h)^3$

$$= (2h)^{\frac{1}{2}}$$ خاصية قوة القوة

$$= \sqrt{2h}$$ أكتب باستخدام الصورة الجذرية

2) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{15}}$

$$\sqrt[5]{243a^{20}b^{15}} = (243a^{20}b^{15})^{\frac{1}{5}}$$ الأسس النسبية

$$= (243)^{\frac{1}{5}} \cdot a^4 \cdot b^3$$ $8m^3 = (2m)^3$

$$= 3a^4b^3$$ خاصية قوة القوة

تحقق من فهمك

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $\sqrt[6]{64w^{12}}$ b) $\sqrt[3]{216x^9y^{18}}$

المعادلات الأسية: تذكر أن المعادلة التي تحتوي على قوى أسسها متغيرات تسمى معادلةً أسيةً، ولحلها اكتب كلًّا من طرفَيها في صورة قوة للأساس نفسه، ثم اكتب معادلةً بسيطةً تربط بين الأسين وحُلَّها.

مثال 5

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 16^{3x+1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 16^{3x+1}$$ المعادلة الأصلية

$$(2)^{-3x-1} = 16^{3x+1}$$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = (2)^{-4x-1}$

$$(2)^{-3x-1} = (2^4)^{3x+1}$$ $16 = 2^4$

$(2)^{-3x-1} = 2^{12x+4}$	قوة القوة
$-3x - 1 = 12x + 4$	خاصية المساواة للعبارات الأسية
$-15x - 1 = 4$	أضف $-12x$ لكلا الطرفين
$-15x = 5$	أضف 1 لكلا الطرفين
$x = \dfrac{-1}{3}$	بسّط

2 $\mathbf{4^x = 4\sqrt{4}}$

$4^x = 4\sqrt{4}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^x = 4 \times 4^{\frac{1}{2}}$	$4 = 2^2, \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$
$2^{2x} = 4^{1\frac{1}{2}}$	خصائص القوى
$2^{2x} = (2^2)^{1\frac{1}{2}}$	قوة القوة
$2^{2x} = 2^3$	خاصية المساواة
$2x = 3$	خاصية المساواة للعبارات الأسية
$x = 3 \times \dfrac{1}{2}$	أقسم كلا الطرفين على 2
$x = \dfrac{3}{2}$	بسط

تحقق من فهمك

عبّر عن المقادير التالية بحدود جبريّة بأبسط صورة، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1} = 25^{3x+2}$ b) $(32)^{2x} = \sqrt{256}$

تدرب وحل مسائل

اكتب العبارة الأسية في الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية في الصورة الأسية في كلٍّ مما يأتي:

(انظر مثال 1)

1) $20^{\frac{1}{4}}$

2) $x^{\frac{2}{3}}$

3) $7^{\frac{1}{6}}$

4) $(x^2)^{\frac{2}{3}}$

5) $\sqrt{19}$

6) $\sqrt[6]{64c^6l^{18}}$

7) $\sqrt[4]{11x^5y^8}$

8) $\sqrt[5]{3m^2n^9}$

من دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلِّ عبارةٍ مما يأتي: (انظر مثال 2)

9) $81^{-\frac{1}{4}}$

10) $16^{\frac{3}{2}}$

11) $\left(256^{\frac{1}{4}}\right)(32)^{\frac{3}{5}}$

12) $(125)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{24}{4^{\frac{3}{2}}}\right)$

13) $\dfrac{\sqrt[6]{64}}{\sqrt{2}}$

14) $\dfrac{\sqrt[4]{213}}{\sqrt[4]{3}}$

15) $\dfrac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$

16) $(-8)^{-\frac{2}{3}}\left(\dfrac{100^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{2}}}\right)$

بسّط كلَّ عبارةٍ ممّا يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا: (انظر مثال 3، 4)

17) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

18) $\dfrac{\left(h^{\frac{1}{4}} \cdot h^{\frac{1}{2}}\right)^2}{h^{\frac{1}{4}}}$

19) $\dfrac{a^{\frac{-2}{3}}}{b^{\frac{-1}{2}}} \cdot \dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{-5}{3}}}$

20) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}}$

21) $\sqrt[3]{64y^6}$

22) $\sqrt[7]{128v^7}$

23) $\sqrt[4]{625m^4n^8}$

24) $\sqrt[3]{27x^{12}y^9}$

حلَّ كلًّا من المعادلات الآتية مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

25) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x+4} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+4}$

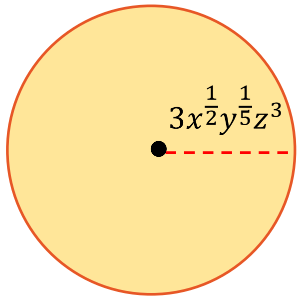
26) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3x+4} = \left(\dfrac{125}{27}\right)^{x-4}$

27) $(81)^x = 27\sqrt{3}$

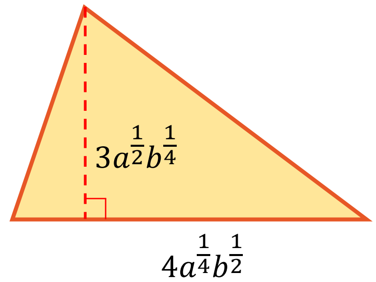
28) $2\sqrt{2} = 4^x$

أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

29)



30)



31) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من غانم و جاسم العبارة $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}$ ، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

غانم

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{1}{4}}$$

جاسم

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

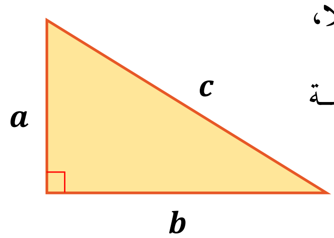
الدرس
1-3

الجذور الصمّاء
surds

فكرة الدرس
- أتعرّف الجذور الصمّاء.
- أجري العمليات على الجذور التربيعية الصماء وأبسطها.

المصطلحات
الجذور الصماء، الرتبة، رتبة الجذر الأصم، الجذور الصماء المتشابهة.

مسألة اليوم
يُحسب طول الوتر في المثلث القائم باستعمال نظرية فيثاغورس، حيث يُعبَّر عن ذلك بالصيغة $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ فمثلا، إذا كانت $b = 1$ ، $a = 2$. استعمل الآلة الحاسبة لحساب قيمة c .



ماذا تلاحظ؟

الجذور الصمّاء: هي جذور لا يمكن إيجاد قيمة دقيقة لها، فمثلا $\sqrt{5}$ جذر أصم لعدم وجود إجابة دقيقة له؛ لأن 5 ليس مربعا كامل، أما $\sqrt{4}$ فيمكن إيجاد قيمة دقيقة له وهي 2؛ لأنه مربع كامل، إذن فهو ليس جذرا أصم. إذا فالجذور الصمّاء هي تلك الجذور التي ليست أعدادًا نسبية ولا يمكن تبسيطها بالتخلُّص من رمز الجذر فيها.

الجذور الصمّاء	
المفهوم	الجذر الأصم هو جذر لا يمكن كتابته في صورة $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان و $b \neq 0$ ؛ لذا فهو عدد غير نسبي، قيمته التقريبية كسر عشري غير منتهٍ وغير دوري، ولكل جذر أصم رتبة يحددها دليل الجذر فيه، فإذا كان $\sqrt[n]{c}$ جذرًا أصمَّ، فإنه يكون من الرتبة n .
أمثلة	$\sqrt{2}$ (وقيمته التقريبية ... 1.414213562) هو جذر أصم من الرتبة الثانية. $\sqrt[3]{4}$ (وقيمته التقريبية ... 1.587401052) هو جذر أصم من الرتبة الثالثة. $\sqrt[4]{5}$ (وقيمته التقريبية ... 1.495348781) هو جذر أصم من الرتبة الرابعة.

مثال 1

أي الجذور الآتية أصم؟ وإذا كان أصمَّ: فحدّد رتبته، واستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمته التقريبية مقربة إلى أقرب 4 منازل عشرية.

1) $\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ غير نسبي؛ لذا فهو جذر أصم، وهو من الرتبة الثانية وقيمته التقريبية 1.7321

2) $\sqrt[5]{6}$

$\sqrt[5]{6}$ غير نسبي؛ لذا فهو جذر أصم، وهو من الرتبة الخامسة وقيمته التقريبية 1.4310

3) $\sqrt[3]{13}$

$\sqrt[3]{13}$ غير نسبي؛ لذا فهو جذر أصم، وهو من الرتبة الثالثة وقيمته التقريبية 2.3513

4) $\sqrt[3]{343}$

بما أن $\sqrt[3]{343} = 7$؛ لذا فإن $\sqrt[3]{343}$ عدد نسبي، وهذا يعني أنه جذر غير أصم

تحقق من فهمك

أي الجذور الآتية أصم؟ وإذا كان أصم: فحدّد رتبته، واستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمته التقريبية مقربة إلى أقرب 4 منازل عشرية.

a) $\sqrt[4]{256}$ b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[8]{721}$ d) $\sqrt[5]{64}$

تبسيط الجذور الصمّاء: يمكن تبسيط الجذور التربيعية الصماء باستعمال خصائص ضرب الجذور الصماء وقسمتها، حيث تُضرب الجذور التربيعية الصماء وتُقسم بالطريقة نفسها المستعملة في ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

ضرب الجذور التربيعية الصمّاء وقسمتها		
المفهوم	لأي عددين غير سالبين a, b ، فإن: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
أمثلة	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{48}{12}} = \sqrt{4} = 2$, $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,	$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$ $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{3} \times \sqrt{7}$

ولكي يكون الجذر الأصم في أبسط صورة، يجب التأكد من عدم وجود كسور أو مربع كامل (باستثناء العدد 1) بين عوامل العدد الواقع تحت رمز الجذر، وعدم وجود جذور في المقام.

إرشاد

لتبسيط جذر أصم في صورة $\sqrt{n}$ ، حلّل n إلى عاملين على أن يكون أحدهما أكبر مربع كامل ممكن، ثم استعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية، ثم بسّط.

مثال 2

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $-3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}$

$-3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} = -3 \times 5 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$ خاصية الإبدال

$= -15\sqrt{5 \times 2}$ خاصية ضرب الجذور

$= -15\sqrt{10}$ بسّط

2) $\sqrt{96}$

$\sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6}$ حلل العدد 96 إلى عاملين $96 = 16 \times 6$

$= \sqrt{16} \times \sqrt{6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 4\sqrt{6}$ بسّط

3 $\sqrt{\frac{12}{121}}$

$$\sqrt{\frac{12}{121}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{121}}$$ خاصية قسمة الجذور

$$= \frac{\sqrt{4 \times 3}}{11}$$ حلل العدد 12 إلى عاملين $12 = 4 \times 3$

$$= \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{11}$$ خاصية ضرب الجذور

$$= \frac{2\sqrt{3}}{11}$$ بسّط

تحقق من فهمك

اكتب كل تعبير مما يأتي في أبسط صورة :

a) $-6\sqrt{7} \times 3\sqrt{5}$ b) $\sqrt{175}$ c) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$

جمع الجذور التربيعية الصمّاء وطرحها: يمكنك جمع الجذور التربيعية الصماء وطرحها بالأسلوب نفسه المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون الجذور الصماء متشابهة؛ أي أن يكون ما داخل الجذور المقادير نفسها.

متشابهان $2\sqrt{5}, 7\sqrt{5}$ غير متشابهين $3\sqrt{4}, 7\sqrt{3}$ غير متشابهين $3\sqrt{4}, 4\sqrt{3}$

إرشاد

الجذر التربيعي للعدد:

لاحظ أن:

$(\sqrt{x})^2 = x, x \geq 0$

فمثلًا:

$(\sqrt{9})^2 = 9, (\sqrt{3})^2 = 3$

مثال 3

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي:

1 $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

$$3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (3 + 5 - 2)\sqrt{7}$$ اجمع واطرح المعاملات

$$= 6\sqrt{7}$$ بسّط

إنتبه

عند جمع الجذور وطرحها:

$\sqrt{9} + \sqrt{25} \neq \sqrt{9 + 25}$

لأن

$3 + 5 \neq \sqrt{34}$

2 $\sqrt{75} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$$\sqrt{75} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$ حلّل

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$ ضرب الجذور

$$= 5\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$ $\sqrt{25} = 5$

$$= 6\sqrt{3}$$ بسّط

3 $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$$ حلّل

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$ ضرب الجذور

$$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$ $\sqrt{9} = 3, \sqrt{4} = 2$

$$= 5\sqrt{5}$$ بسّط

تحقق من فهمك

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي:

a) $2\sqrt{11} - 3\sqrt{11} + 5\sqrt{11}$

b) $\sqrt{7} - \sqrt{28} + 5\sqrt{7}$

c) $\sqrt{80} - \sqrt{20}$

d) $\sqrt{27} + \sqrt{12}$

تبسيط عبارات جذرية تتضمن جذورًا صمّاء: لتبسيط العبارات الجذرية، يمكنك استعمال الفرق بين مربعين، ومربع مجموع حدين، وخاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حدٍّ... إلخ.

مثال 4

بسّط كلًّا مما يأتي:

1 $\sqrt{7}(4-\sqrt{3})$

$$\sqrt{7}(4-\sqrt{3}) = 4\sqrt{7}-\sqrt{7}\sqrt{3}$$ خاصية التوزيع

$$= 4\sqrt{7}-\sqrt{21}$$ بسّط

2 $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

$$(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) = (\sqrt{5})^2-2^2$$ الفرق بين مربعين

$$= 5-4$$ خصائص القوى

$$= 1$$ بسّط

3 $(\sqrt{3}+6)^2$

$$(\sqrt{3}+6)^2 = (\sqrt{3})^2+2\times 6\times\sqrt{3}+6^2$$ مربع مجموع حدين

$$= 3+12\sqrt{3}+36$$ خصائص القوى

$$= 39+12\sqrt{3}$$ بسّط

4 $(\sqrt{2}+3)(1-\sqrt{5})$

$$(\sqrt{2}+3)(1-\sqrt{5}) = \sqrt{2}(1-\sqrt{5})+3(1-\sqrt{5})$$ خاصية التوزيع

$$= \sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{5}+3-3\sqrt{5}$$ توزيع الضرب على الجمع

$$= 3+\sqrt{2}-\sqrt{10}-3\sqrt{5}$$ بسّط

إرشاد

الفرق بين مربعين:

تذكر أنّ:

a^2-b^2
$=(a-b)(a+b)$

إرشاد

مربع مجموع/ فرق حدين:

تذكر أنّ:

$(a\pm b)^2$
$=a^2\pm 2ab+b^2$

تحقق من فهمك

بسّط كلَّ عبارةٍ مما يأتي:

a) $\sqrt{11}(1+\sqrt{3})$

b) $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})$

c) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(3+\sqrt{7})$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$

تدرب وحل مسائل

أي الجذور الآتية أصم؟ وإذا كان أصمَّ: فحدّد رتبته، واستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمته التقريبية مقربة إلى أقرب **4** منازل عشرية. (انظر مثال 1)

1) $\sqrt[3]{18}$
2) $\sqrt{19}$
3) $\sqrt[4]{2}$
4) $\sqrt[6]{7}$
5) $\sqrt{225}$
6) $\sqrt[3]{927}$
7) $\sqrt[5]{625}$
8) $\sqrt{400000}$

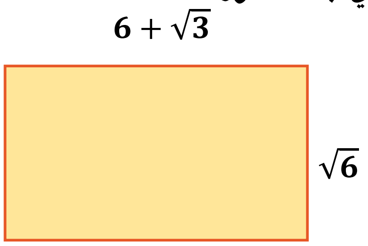
بسّط كلًّا مما يأتي: (انظر مثال 2، 3)

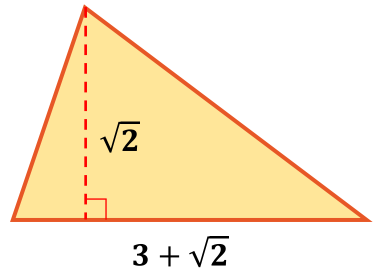
9) $4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+\sqrt{2}$
10) $\sqrt{405}$
11) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
12) $\sqrt{\frac{132}{99}}$
13) $\sqrt{1\frac{2}{7}}$
14) $\frac{6}{\sqrt{18}}$
15) $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$
16) $\sqrt{2}\times\sqrt{200}$
17) $\sqrt{108}-\sqrt{12}-\sqrt{192}$
18) $2\sqrt{72}-\sqrt{32}+\sqrt{200}$

بسّط كلَّ عبارةٍ ممَّا يأتي: (انظر مثال 4)

19) $(4+\sqrt{2})(5-\sqrt{27})$
20) $(8\sqrt{2}-2\sqrt{3})(8\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
21) $(4+\sqrt{2})^2$
22) $(3-\sqrt{7})^2$
23) $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})$
24) $(2\sqrt{24})(7\sqrt{18})$

أوجد مساحة كل من المثلث والمستطيل فيما يأتي واكتبها في أبسط صورة:

25) 

26) 

27) **اكتشف الخطأ:** بسط كل من عبدالله وخالد العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$ ، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

عبدالله

$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$

$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$

$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$

$= 118\sqrt{2}$

خالد

$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$

$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$

$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$

$= 34\sqrt{2}$

الوحدة 1

اختبار الوحدة

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{50} \times \sqrt{578}$

2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

3) $\sqrt{567} + \sqrt{343}$

4) $[(2x^3)^2]^2$

5) اختيار من متعدد: ما أبسط صورة لـ $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ ؟

A) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

B) $\frac{\sqrt{12}}{3}$

C) $\frac{\sqrt{4}}{3}$

D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6) حل المعادلة: $\sqrt[3]{5} = (25)^{-2x}$

7) بسِّط العبارة التالية:

$\sqrt[7]{2187\, a^{28}\, b^{35}}$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

8) $(\sqrt{13} + 2)(5 + \sqrt{7})$

9) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

10) $(3 - 2\sqrt{5})^2$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

11) $\frac{10^{-2} \times 5^3}{(2^3)^{-1}}$

12) $\frac{(x^2y^{-2}z^{-3})^{-2}}{x^{-4}y^4z^4}$

13) $\left(\frac{y^{-3}z^{-2}}{h^{-5}e^0}\right)\left(\frac{y^7}{6h^5}\right)$

14) $\left[(5)^4 \times (-5)^{-4} \times \left(\frac{4}{5}\right)\right]^2 \div \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$

15) اختيار من متعدد: قيمة المقدار

$2^{-2} \times (-2)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$ تساوي:

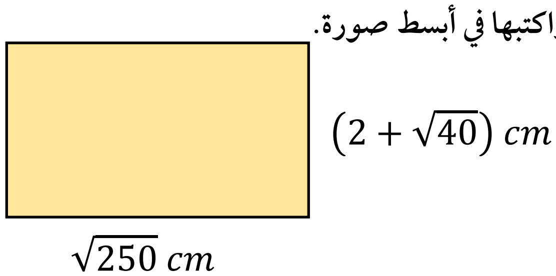
A) 8

B) $\frac{1}{8}$

C) -8

D) $\frac{1}{16}$

16) هندسة: أوجد مساحة المستطيل في الشكل أدناه، واكتبها في أبسط صورة.



الوحدة

2

الهندسة الإحداثية

Analytic geometry

نظرة عامة على الوحدة

الهندسة:

تقوم الهندسة التحليلية على وصف الأشكال الهندسية بطريقة جبرية عددية، واستخراج معلومات رقمية من تمثيلات هندسية. مثل الشكل الجبري للدائرة هو $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$: حيث نصف قطر الدائرة هنا هو (r).

تستخدم الهندسة التحليلية نطاقاً إحداثياً يسمى النظام الديكارتي نسبة إلى العالم الفرنسي رينيه ديكارت $(1590-1650)$ صاحب الفكرة الأساسية للربط بين الهندسة والجبر وهي تمثيل كل نقطة في المستوى ببعديها عن مستقيمين متعامدين يلتقيان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0,0)$، يسمى المستقيمان المتعامدان محوري الإحداثيات x و y حيث ترتبط كل نقطة في المستوى بزوج مرتب وحيد من الأعداد (x,y) وأيضا كل زوج مرتب يرتبط بنقطة واحدة وواحدة فقط في المستوى.

استعد

بسّط كلًّا مما يأتي:

(1) $(3\sqrt{5})^2$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

جد قيمة كلٍّ مما يأتي لأقرب منزلتين عشريتين:

(3) $\sqrt{45}$

(4) $\sqrt{13}$

جد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

(5) $x^2 = 12^2 + 5^2$

(6) $x^2 + 17^2 = 21^2$

(7) $6^2 + x^2 = 10^2$

(8) $x^2 + (4.5)^2 = (20.5)^2$

(9) $x^2 - (5\sqrt{3})^2 = 5^2$

مثّل كلًّا من القطعتين المستقيمتين الآتيتين في المستوى الإحداثي:

(9) $\overline{AB}$ ، حيث $A(2,-5), B(3,2)$

(10) $\overline{CD}$ ، حيث $C(-3,-2), D(1,1)$

نظرية فيثاغورس

The Pythagorean Theorem

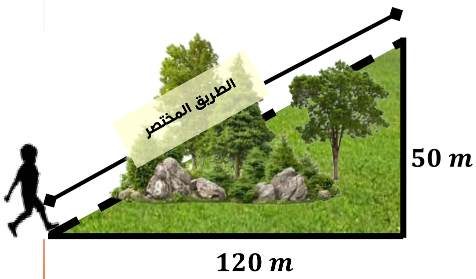
فكرة الدرس

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحدد ما إذا كان مثلّثًا معطىً قائم الزاوية أم لا.

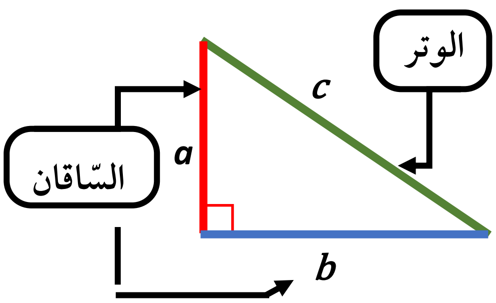
المصطلحات الوتر، الساق، عكس نظرية فيثاغورس، ثلاثية فيثاغورس.

مسألة اليوم أراد حمد الخروج من الحديقة المجاورة لمنزله، سيرًا على قدميه ومارًا بالطريق المختصر كما يظهر في الشكل المجاور.

ما طول الطريق المختصر؟



المثلّث القائم الزّاوية هو مثلّث إحدى زواياه قائمة. ويسمى الضلع المقابل للزّاوية القائمة الوتر، وهو الضلع الأطول في المثلّث. ويسمى الضلعان الآخران الساقين، وهما الضلعان اللّذان يشكّلان القائمة.

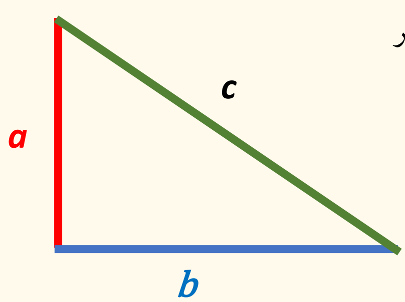


تصف نظرية فيثاغورس العلاقة بين طولي السّاقين وطول الوتر في المثلّث القائم الزّاوية.

نظريةُ فيثاغورس

بالكلمات في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعيْ طوليْ ساقيْه.

بالرموز $c^2 = a^2 + b^2$



إرشاد

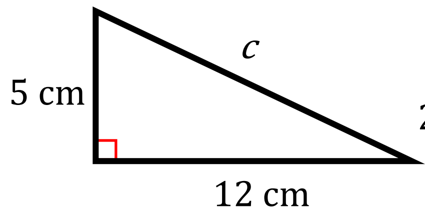
في المثلث ABC: يرمز إلى الضلع المقابل للزاوية A بالرمز a، والمقابل للزاوية B بالرمز b، والمقابل للزاوية C بالرمز c.

يمكن استعمال حل المعادلات ونظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية إذا علم طولا ضلعيه الآخرين.

مثال 1

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي، أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة:

1



نظريةُ فيثاغورس: $a^2 + b^2 = c^2$

$a = 5, b = 12$: $5^2 + 12^2 = c^2$

ربّع: $25 + 144 = c^2$

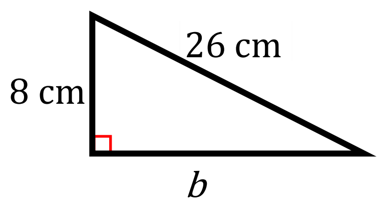
أجمع: $169 = c^2$

تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ: $c = \pm\sqrt{169}$

بسّط: $c = \pm 13$

للمعادلة حلان: 13 وَ -13 ، وبما أن الطول يجب أن يكون عدداً موجباً، إذن طول الوتر $13\ cm$

2



نظريةُ فيثاغورس: $a^2 + b^2 = c^2$

$a = 5, b = 12$: $8^2 + b^2 = 26^2$

ربّع: $64 + b^2 = 676$

أجمع: $64 - 64 + b^2 = 676 - 64$

تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ: $b^2 = 612$

بسّط: $b = \pm\sqrt{612}$

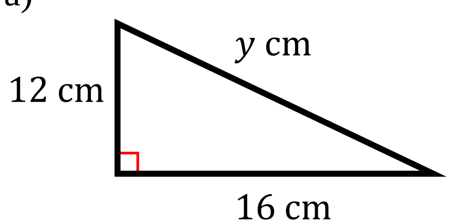
بسّط: $b \approx 24.7$

إذنْ، طول الضلع المجهول b يساوي تقريباً 24.7 cm

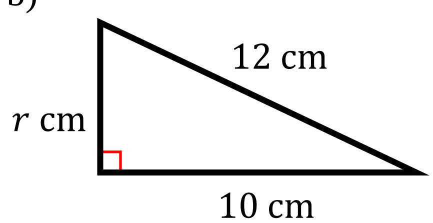
تحقق من فهمك

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي، أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة:

a)



b)

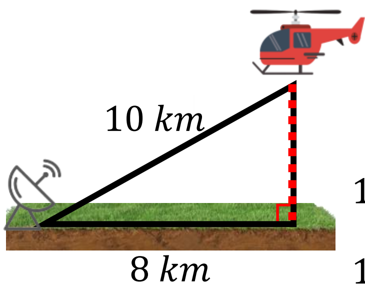


يمكن استعمال نظرية فيثاغورس في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 2

رصد رادار طائرة مروحية على بعد $10\ km$ منه، كما يظهر في الشكل المجاور. أجد ارتفاع الطائرة المروحية عنْ سطح الأرض.

افرض أنَّ a هي ارتفاع الطائرة عنْ سطح الأرض، ولإيجاد قيمة a أستعمل نظرية فيثاغورس:



نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
$c = 10, b = 8$	$10^2 = a^2 + 8^2$
ربّع	$100 = a^2 + 64$
أطرح 64 من كلا الطرفين	$100 - 64 = a^2 + 64 - 64$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$a^2 = \pm\sqrt{36}$
بسّط	$a = \pm 6$

بما أن الطول يجب أن يكون عدداً موجباً، إذن ارتفاع الطائرة المروحية $6\ km$

تحقق من فهمك

يستند سلم طوله $4\ m$ إلى حائط عمودي، وتبعد قاعدته $2\ m$ عن الحائط. جد ارتفاع الحائط.

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$؛ حيث c أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك $(3, 4, 5)$ ، $(5, 12, 13)$. يمكن استعمال عكس نظرية فيثاغورس؛ في تمييز المثلث القائم عن غيره من المثلثات إذا عُلمت أطوال أضلاعه.

عكس نظريةُ فيثاغورس	
بالكلمات	إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الأكبر، فإن المثلث قائم الزاوية.
بالرموز	إذا كانت الأطوال a, b, c لأضلاع مثلث تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ فإن ΔABC قائم الزاوية.

مثال 3

حدد ما إذا كان المثلث المعطاة أطوال أضلاعه في كل مما يأتي قائم الزاوية أم لا:

1 $15, 9, 12$

بما أن أطول ضلع طوله 15، أفرض أن $c = 15$ ، و $a = 9$ ، و $b = 12$ ، ثم حدد أن هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
عوّض $c = 15, \mathrm{b} = 12, a = 9$	$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2$
جد القوى	$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144$
أجمع	$225 = 225$ ✓

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$، إذن، المثلث قائم الزاوية.

2 $7, 8, 11$

بما أن أطول ضلع طوله 11، أفرض أن $c = 11$ ، و $a = 7$ ، و $b = 8$ ، ثم حدد أن هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
عوّض $c = 11, \mathrm{b} = 8, a = 7$	$11^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 8^2$
جد القوى	$121 \stackrel{?}{=} 49 + 64$
أجمع	$121 = 113$ ×

بما أنَّ $c^2 \neq a^2 + b^2$، إذن، المثلث ليس قائم الزاوية.

إرشاد

أفرض أنَّ الضلع الأطول هو c عند التعويض في القاعدة $c^2 = a^2 + b^2$

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل مثلّثًا قائم الزاوية أم لا:

a) $3, 4, 5$

b) $9, 12, 18$

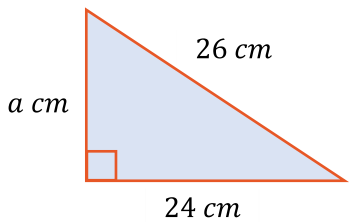
c) $6, 7, 9$

d) $4, 4\sqrt{3}, 8$

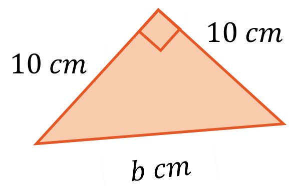
تدرب وحل مسائل

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر): (انظر مثال 1)

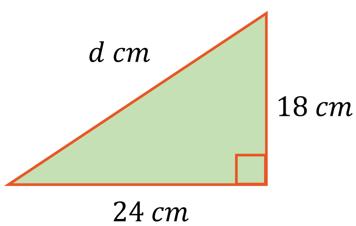
1)



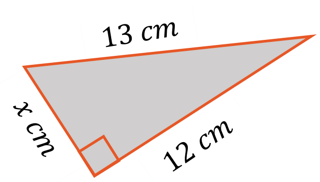
2)



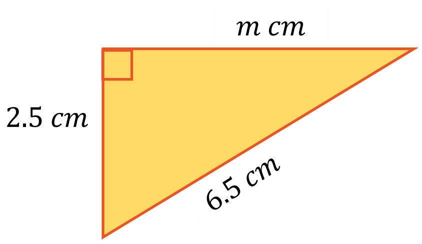
3)



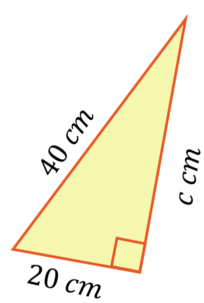
4)



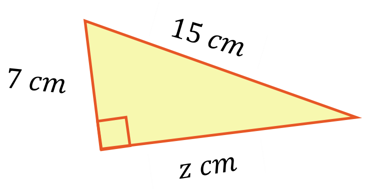
5)



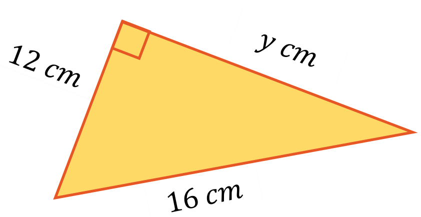
6)



7)



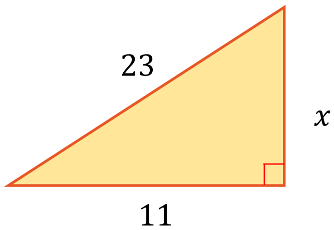
8)



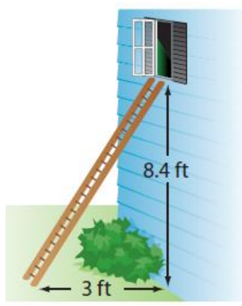
9) أجب عن الأسئلة الآتية مستعملًا المثلث المجاور: (انظر مثال 2)

a) ما قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

b) ما مساحة المثلث؟



10) يريد جاسم أن يستعمل سلّمًا للوصول إلى نافذة ترتفع عن الأرض، بحيث تكون قاعدته على الأرض وتبعد عن الحائط. فما طول السلم؟ لأقرب جزء من عشرة (انظر مثال 2)



حدد ما إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل مثلّثًا قائم الزاوية أم لا: (انظر مثال 3)

11) $4,8,9$

12) $3, 2\sqrt{10}, \sqrt{41}$

13) $\sqrt{5}, 3, 2$

14) $11, 60, 61$

15) $\sqrt{65}, 6\sqrt{2}, \sqrt{97}$

16) $48, 33, 17$

17) **اكتشف الخطأ:** يحاول خليفة وناصر تحديد ما إذا كانت الأعداد $85, 77, 36$ تشكل ثلاثية فيثاغورس أم لا. أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

خليفة

$36^2 + 77^2 = 85^2$

$1296 + 5929 = 7225$

$7225 = 7225$

نعم

ناصر

$36^2 + 85^2 = 77^2$

$1296 + 7225 = 5929$

$8521 = 5929$

لا

الدرس
2-2

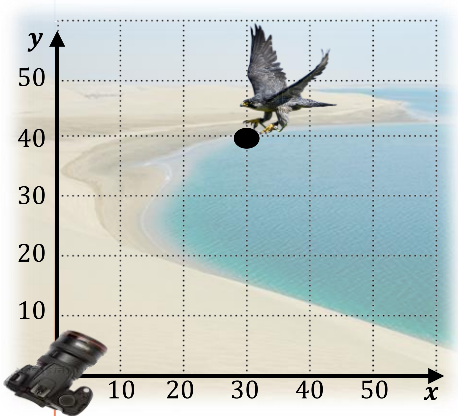
المسافة بين نقطتين

Distance Between Two Points

فكرة الدرس إيجاد المسافة بين نقطتين.

المصطلحات المسافة بين نقطتين، المستوى الإحداثي.

مسألة اليوم اشترى حمد آلة تصوير عالية الدقة، لتصوير الطيور التي تبعد عنه مسافة $50\ m$ أو أقل. هل يمكن لحمد أن يستخدم آلة التصوير لالتقاط صورة عالية الدقة للصقر كما هو مبين في الشكل المجاور.



قانون المسافة بين نقطتين: يعتمد قانون المسافة بين نقطتين على نظرية فيثاغورس.

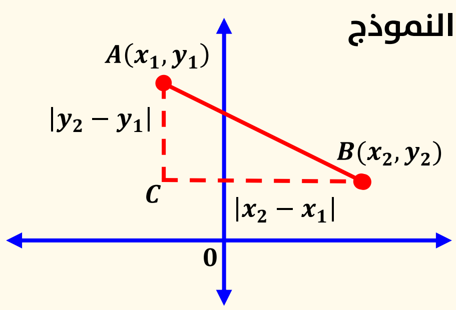
المسافة بين نقطتين

المفهوم

المسافة d بين نقطتين إحداثيات كل منهما $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ يعبر عنها بالقانون:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

النموذج



مثال 1

1 جد المسافة بين النقطتين $S(5, 7)$ و $R(1, 4)$، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

$SR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(5 - 1)^2 + (7 - 4)^2}$ عوض $(x_1, y_1) = (1,4)$ و $(x_2, y_2) = (5,7)$

$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$ بسّط

$= \sqrt{16 + 9}$ جد مربع كل عدد

$= \sqrt{25}$ اجمع

$= 5$ بسّط

إذن، المسافة بين النقطتين S و R هي 5 وحدات.

إرشاد

يمكنك إيجاد المسافة بين النقطتين $(5,7)$، $(1,4)$، بحساب كل من المسافتين الأفقية $|5 - 1| = 4$ والرأسية $|7 - 4| = 3$ على حدة، ثم إيجاد الجذر التربيعي لمجموع مربعيها.
$= \sqrt{16 + 9} = 5$

2 جد المسافة بين النقطتين $P(-7,5)$ و $Q(4,-3)$، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(4-(-7))^2 + ((-3)-5)^2}$$ عوض $(x_1, y_1) = (-7,5)$ و $(x_2, y_2) = (4,-3)$

$$= \sqrt{(11)^2 + (-8)^2}$$ بسّط

$$= \sqrt{185}$$ جد مربع كل عدد واجمع

$$\approx 13.6$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، المسافة بين النقطتين P و Q هي 13.6 وحدة تقريباً.

تحقق من فهمك

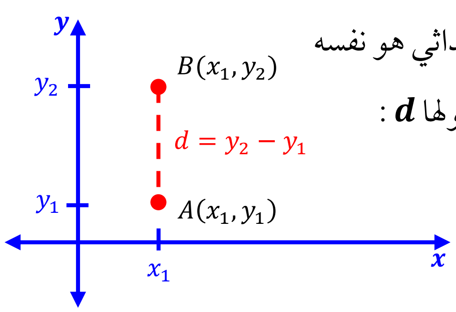
جد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مقربًا الإجابة لأقرب جزء من عشرة (إذا لزم الأمر):

a) $A(4,2), B(-3,-1)$ b) $G(5,0), H(-7,9)$

يمكنك أيضًا استعمال هذا القانون في إيجاد المسافة بين أيِّ نقطتين رأسيتين أو أفقيتين على المستوى الإحداثي بحيث:

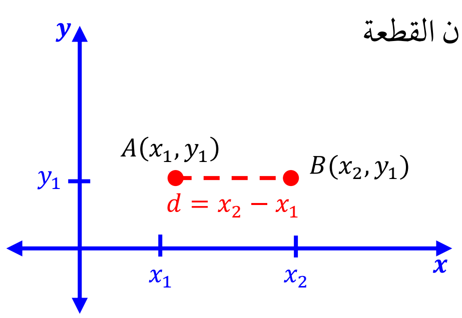
إذا كان الإحداثي الأفقي (x) لنقطتين في المستوى الإحداثي هو نفسه فإن القطعة الواصلة بين النقطتين تكون رأسية ويكون طولها d :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= |y_2 - y_1|$$



أما إذا كان الإحداثي الرأسي (y) للنقطتين هو نفسه، فإن القطعة الواصلة بين النقطتين تكون رأسية ويكون طولها d :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$
$$= |x_2 - x_1|$$



مثال 2

1 جد المسافة بين النقطتين $T(1,4)$ و $U(1,7)$، مقربا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

قانون المسافة بين نقطتين
$$TU = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (1,4)$ و $(x_2, y_2) = (1,7)$
$$= \sqrt{(1-1)^2 + (7-4)^2}$$

بسّط
$$= \sqrt{(0)^2 + (3)^2}$$

جد مربع كل عدد
$$= \sqrt{0+9}$$

اجمع
$$= \sqrt{9}$$

بسّط
$$= 3$$

إذن، المسافة بين النقطتين T و U هي 3 وحدات.

2 جد المسافة بين النقطتين $C(4,-3)$ و $D(8,-3)$، مقربا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

قانون المسافة بين نقطتين
$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (4,-3)$ و $(x_2, y_2) = (8,-3)$
$$= \sqrt{(8-4)^2 + ((-3)-(-3))^2}$$

بسّط
$$= \sqrt{(4)^2 + (0)^2}$$

جد مربع كل عدد واجمع
$$= \sqrt{16}$$

باستعمال الآلة الحاسبة
$$= 4$$

إذن، المسافة بين النقطتين C و D هي 4 وحدات.

تحقق من فهمك

جد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مقربًا الإجابة لأقرب جزء من عشرة (إذا لزم الأمر):

a) $H(-5,2), V(-1,2)$ b) $J(5,-2), K(5,8)$

إرشاد

طريقة حل أخرى:

في المثال 2، بما أن النقطتين لهما الإحداثي x نفسه، فيمكنك إيجاد المسافة بينهما بإيجاد الفرق المطلق للإحداثي y في النقطتين

$$|y_2 - y_1| = |7-4| = 3$$

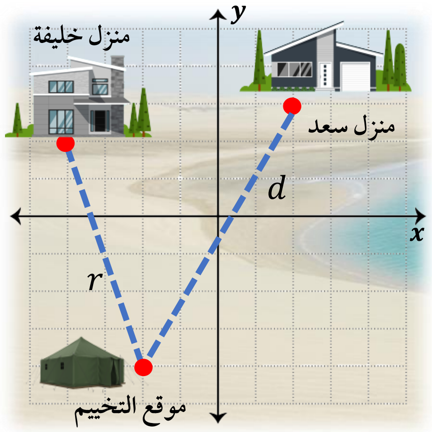
وبالمثل إذا كان للنقطتين الإحداثي y نفسه، فيمكنك إيجاد المسافة بينهما بإيجاد الفرق المطلق للإحداثي x في النقطتين

$$|x_2 - x_1| = |8-4| = 4$$

تستعمل صيغة المسافة في التطبيقات حياتية، كحساب المساحة والمحيط في المخططات الهندسية.

مثال 3

يخطط سعد و خليفة لزيارة موقع للتخييم، فاستعمل كل منهما سيارته للوصول إلى موقع التخييم، إذا علمت أن طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل **$10\ km$**، ما المسافة التي قطعها سعد؟ ما المسافة التي قطعها خليفة؟ أيهما قطع مسافة أكبر؟



قانون المسافة بين نقطتين
$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (-20, -40)$ و $(x_2, y_2) = (-40,20)$
$$= \sqrt{(-40 - (-20))^2 + (20 - (-40))^2}$$

بسّط
$$= \sqrt{(-20)^2 + (60)^2}$$

جد مربع كل عدد
$$= \sqrt{400 + 3600}$$

اجمع
$$= \sqrt{4000}$$

بسّط
$$\approx 63.2\ km$$

إذن، يبعد بيت خليفة $63.2\ km$ تقريبًا عن موقع التخييم.

قانون المسافة بين نقطتين
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (-20, -40)$ و $(x_2, y_2) = (20,30)$
$$= \sqrt{(20 - (-20))^2 + (30 - (-40))^2}$$

بسّط
$$= \sqrt{(40)^2 + (70)^2}$$

جد مربع كل عدد
$$= \sqrt{1600 + 4900}$$

اجمع
$$= \sqrt{6500}$$

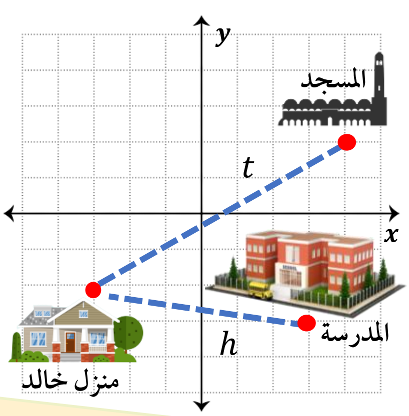
بسّط
$$\approx 80.6\ km$$

إذن، يبعد بيت سعد $80.6\ km$ تقريبًا عن موقع التخييم.

إذن، قطع سعد مسافة أكبر من المسافة التي قطعها خليفة عن موقع التخييم.

تحقق من فهمك

في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل خالد عند النقطة $(-3, -2)$، وتقع المدرسة عند النقطة $(3, -3)$، ويقع المسجد عند النقطة $(4,2)$، وطول ضلع كل مربع في المستوى الإحداثي $1\ km$، فأوجد المسافة بين منزل خالد والمدرسة، و المسافة بين منزل خالد والمسجد.



تدرب وحل مسائل

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي مقرباً الإجابة لأقرب جزء من عشرة (إذا لزم الأمر):
(انظر مثال 1)

1) $(6,2), (12,10)$

2) $(4,8), (-1,3)$

3) $(-7,3), (2,7)$

4) $(-2,-4), (-5,-3)$

5) $(3,-3), (7,2)$

6) $(-11,9), (3,-4)$

7) $(-7,8), (3,10)$

8) $(-3,5), (5,-3)$

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي: (انظر مثال 2)

9) $(3,2), (3,7)$

10) $(4,2), (-1,2)$

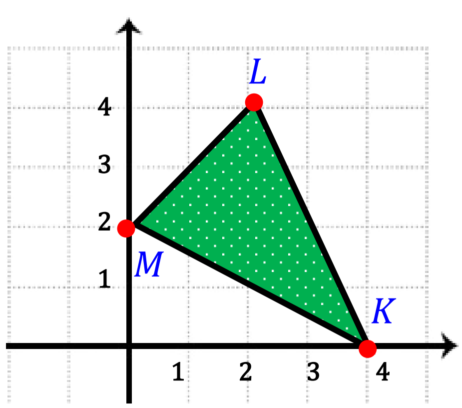
11) $(-5,4), (-1,4)$

12) $(-3,7), (-3,11)$

13) $(-6,9), (-6,6)$

14) $(4,8), (4,-8)$

15) يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مخطط حديقة مثلثة الشكل، يرغب سعد في تركيب مرشّات لريها عند رؤوس المثلث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل متراً واحداً، جد طول الأنابيب التي تصل بين المرشّات الثلاثة، مقرباً إجابتك لأقرب جزء من عشرة. (انظر مثال 3)



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي مقرباً الإجابة لأقرب جزء من عشرة (إذا لزم الأمر):
(انظر مثال 1)

16) $(4,2), (6, \frac{-2}{3})$

17) $\left(\frac{4}{5}, -1\right), (2, \frac{-1}{2})$

18) $\left(5, \frac{1}{2}\right), (-1, 1\frac{1}{2})$

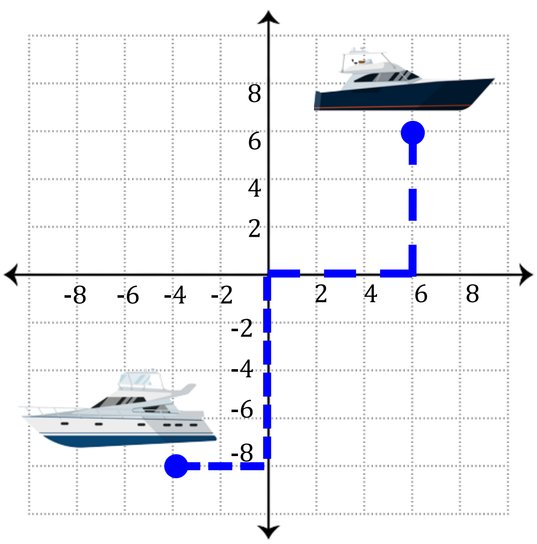
19) $\left(\frac{-3}{4}, 7\right), (1\frac{1}{4}, 11)$

20) أوجد محيط الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه $C(4,5)$ ، $B(-1,4)$، $A(-3,-4)$، $D(6,-5)$. ثم قرب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

21) إذا كانت $O(-4,4)$ ، $N(4,0)$، $M(-7,3)$ إحداثيات رؤوس مثلث، فبيّن ما إذا كان المثلث MNO قائم الزاوية أم لا.

22) انطلق قاربان من الموقع نفسه في الوقت نفسه، فاتّجه أحدهما شرقاً ثم شمالاً. أمّا الآخر فاتّجه جنوباً ثم غرباً بحسب الإحداثيات في الشكل المجاور.

ما المسافة بينهما؟



الدرس 2-3

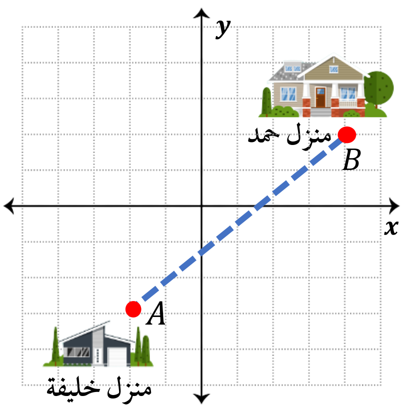
إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة

Midpoint Coordinates of the Line Segment

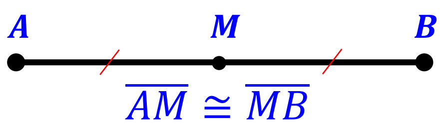
فكرة الدرس أجد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

المصطلحات نقطة المنتصف، قانون نقطة المنتصف.

مسألة اليوم يقع منزل حمد ومنزل خليفة على طريق مستقيم، وأرادا أن يلتقيا في منتصف الطريق الذي يربط منزليهما. إذا علمت إحداثيات منزليهما على شبكة إحداثية، إحسب إحداثيي نقطة المنتصف التي سيلتقيان عندها.



نقطة منتصف القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة. فمثلًا، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن $\overline{AM} = \overline{MB}$، وهذا يعني أن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

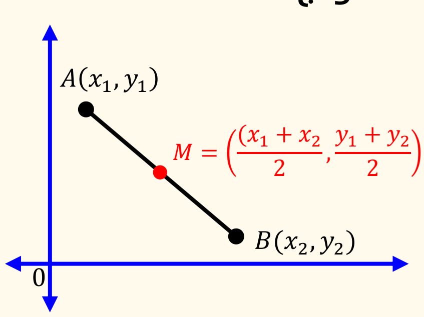


إرشاد

يدل الرمز ≅ على التطابق، وتدل الإشارة الحمراء في الشكل المجاور على أن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ ، أي أن لها الطول نفسه.

يمكنني إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد بإيجاد الوسط الحسابي لإحداثيي نقطتي نهايتيه.

قانون نقطة المنتصف

المفهوم	النموذج
يستعمل القانون $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ في إيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$	

إرشاد

يعني الرمز $M = (x, y)$ أن اسم النقطة M وإحداثييها (x, y).

مثال 1

أوجد إحداثيي نقطة المتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين $(-8, 5)$ و $(4, -3)$

قانون نقطة المتصف

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

عوض $(x_1, y_1) = (4, -3)$ و $(x_2, y_2(-8,5)$

$$= \left(\frac{4 + (-8)}{2}, \frac{-3 + 5}{2}\right)$$

بسّط

$$= \left(\frac{-4}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

بسّط

$$= (-2,1)$$

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ M مُنتصفِ القطعة المستقيمة، هُما $(-2,1)$

إرشاد

ترتيب إحداثيي نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة ليس مهما عند إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

تحقق من فهمك

أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين كل نقطتين فيما يأتي:

a) $(-1,7)$ و $(5,-3)$

b) $(4,-5)$ و $(0,2)$

c) $(1,-1)$ و $(-6,3)$

d) $(7,3)$ و $(-4,-5)$

يمكن إيجاد إحداثيي نقطة نهاية قطعة مستقيمة إذا علم إحداثيا نقطة النهاية الأخرى للقطعة وإحداثيا نقطة المنتصف. وذلك من خلال تعويض الإحداثيات المعلومة في صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي، ثم كتابة معادلة خطية تربط بين الإحداثيات المطلوبة و المعطيات وصولاً لحساب الإحداثي المجهول.

مثال 2

إذا كانت $M(2,1)$ نقطة منتصف $\overline{CD}$ ؛ حيث $C(1,4)$ ، جد إحداثيي النقطة D.

الخطوة 1 عوض الإحداثيات المعلومة في صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

افرض أن $C(x_1,y_1)$ و $D(x_2,y_2)$.

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ في المُستوى الإحداثيِّ

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=M(2,1)$$

عوض $(x_1,y_1)=(1,4)$

$$M=\left(\frac{1+x_2}{2},\frac{4+y_2}{2}\right)=M(2,1)$$

الخطوة 2 أكتب معادلتين، وحلهما لإيجاد إحداثي

جد y_2

$$\frac{4+y_2}{2}=1$$

$$4+y_2=2$$

$$y_2=-2$$

جد x_2

$$\frac{1+x_2}{2}=2$$

$$1+x_2=4$$

$$x_2=3$$

إذن، إحداثيا النقطة D هما $(3,-2)$.

تحقق من فهمك

❶ إذا كانت $M(-5,6)$ نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ؛ حيث $P(-4,8)$ ، جد إحداثيي النقطة Q.

❷ إذا كانت $M(3,5)$ نقطة منتصف $\overline{UV}$ ؛ حيث $U(-3,3)$ ، جد إحداثيي النقطة V.

تدرب وحل مسائل

جد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين كل نقطتين فيما يأتي: (انظر مثال 1)

1) $(7,3)$ و $(-4,-1)$

2) $(-4,-5)$ و $(2,9)$

3) $(-6,10)$ و $(8,-2)$

4) $(-2,2)$ و $(6,2)$

5) $(5,-10)$ و $(5,8)$

6) $(4,0)$ و $(0,6)$

7) $(0,2)$ و $(7,4)$

8) $(-2,2)$ و $(3,-6)$

9) $(10,-3)$ و $(-8,-5)$

10) $(-5,5)$ و $(3,-3)$

جد إحداثيي نقطة نهاية القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ المجهولة في كل مما يأتي. علما أن M نقطة منتصف $\overline{CD}$: (انظر مثال 2)

11) $C(1,7)$ ، $M(-2,3)$

12) $D(-5,4)$ ، $M(-2,5)$

13) $D(-4,2)$ ، $M(6,-1)$

14) $C(5,1)$ ، $M(6,-3)$

15) $C(3,4)$ ، $M(-2,5)$

16) $C(2,3)$ ، $M(-4,5)$

17) $C(1,7)$ ، $M(-3,1)$

18) $C(-3,1)$ ، $M(2,6)$

19) $C(4,6)$ ، $M(5,5)$

20) $C(4,3)$ ، $M(7,3)$

21) إذا كانت $B(6,11)$ ، $A(-4,-5)$ ، وكانت C نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، و D نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، جد إحداثيي النقطة D.

22) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من تميم وفيصل إحداثيي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $K(4,12)$، $H(2,6)$ كما يلي، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

تميم

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{12 + 6}{2}\right)$$

$$M = (3,9)$$

فيصل

$$M = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{12 - 6}{2}\right)$$

$$M = (1,3)$$

الدرس
2-4
معادلة المستقيم بصيغة الميل و المقطع
Slope-Intercept form of a Straight Line

فكرة الدرس ◂ كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًّا باستعمال صيغة الميل والمقطع.

المصطلحات ◂ صيغة الميل والمقطع، المقطع y.

مسألة اليوم

يريد حمد شراء سيارة بمبلغ 120 ألف ريال، ويفكر في خطتين للدفع. تبيّن الصورة الخطة A التي تتضمن سداد دفعة أولية، ثم دفعات شهرية أقل ومتساوية.

تتضمن الخطة B سداد 6 دفعات متساوية على مدار 6 أشهر.

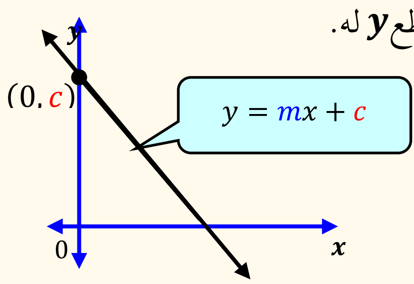
أكتب خطتي الدفع باستعمال المعادلات.

صيغة الميل والمقطع: يمكن كتابة أيّ معادلة خطية بصيغة الميل والمقطع على النحو التالي: $y = mx + c$ حيث m الميل، و c تمثل المقطع y، وأيّ تغيير في قيمة أيٍّ منهما يؤدي إلى تغيير التمثيل البياني للمعادلة.

صيغة الميل والمقطع لمعادلة الخط المستقيم

المفهوم: صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي: $y = mx + c$

حيث m ميل المستقيم، و c تمثل المقطع y له.



مثال:

$$y = mx + c$$

$$y = 2x + 6$$

الميل ← 2، المقطع y ← 6

مثال 1

أوجد الميل والمقطع y لكل من المستقيمات الآتية:

1. $\boldsymbol{y = -3x + 4}$

   $m = -3 \, , c = 4$

2. $\boldsymbol{y = 5x}$

   $m = 5 \, , c = 0$

3. $\boldsymbol{y = 7}$

   $m = 0 \, , c = 7$

4. $\boldsymbol{6y - 3x = 12}$

أعد كتابة هذه المعادلة بصيغة الميل والمقطع.

$6y - 3x = 12$	المعادلة الأصلية
$6y - 3x + 3x = 12 + 3x$	اجمع $3x$ لكلا الطرفين
$6y = 12 + 3x$	بسّط
$\dfrac{6y}{6} = \dfrac{12 + 3x}{6}$	اقسم الطرفين على 6
$y = 2 + \frac{1}{2}x$	بسّط

إذنْ $m = \frac{1}{2} \, , c = 2$

تحقق من فهمك

أوجد الميل والمقطع y لكل من المستقيمات الآتية:

a) $y = 5 - 4x$

b) $y = -7x$

c) $y = 11$

d) $5x + 4y = 16$

مثال 2

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{5}{4}$، والمقطع y له -3 بصيغة الميل والمقطع، ثم مثّلها بيانيًّا.

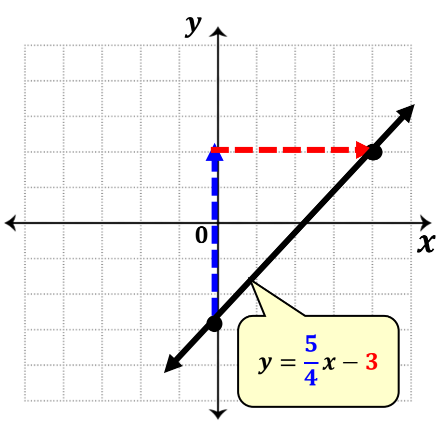
$y = mx + c$ صيغة الميل والمقطع

$y = \frac{5}{4}x + (-3)$ عوّض عن m بـ $\frac{5}{4}$، وعن c بـ (-3)

$y = \frac{5}{4}x - 3$ بسّط

مثّل المعادلة بيانيًّا.

الخطوة 1 عيّن النقطة $(0, -3)$ التي تمثّل المقطع y.



الخطوة 2 $\frac{5}{4} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = m$، لذا تحرّك من النقطة $(0, -3)$ مقدار 5 وحدات إلى الأعلى، ومقدار 4 وحدات إلى اليمين، وعيّن النقطة الجديدة.

الخطوة 3 ارسم خطًّا مستقيمًا يمرُّ بهاتين النقطتين.

تحقق من فهمك

اكتب معادلة المستقيم في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع، ثم مثّلها بيانيًّا:

a) الميل يساوي $\frac{1}{3}$، والمقطع y يساوي 2

b) الميل يساوي -5 ، والمقطع y يساوي -4

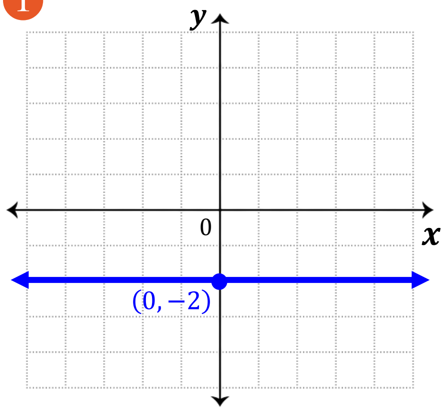
c) الميل يساوي 2 ، والمقطع y يساوي 5

قد تحتاج إلى كتابة معادلة عُرف تمثيلُها البياني أحيانًا. ولإجراء ذلك، عيّن المقطع y ، ثم استعمل الحركة أفقيًّا ورأسيًّا لإيجاد الميل (m) ، ثم اكتب المعادلة بصيغة الميل والمقطع.

مثال 3

اكتب معادلة المستقيم في كلٍّ من التمثيلين البيانيَّين الآتيين:

1

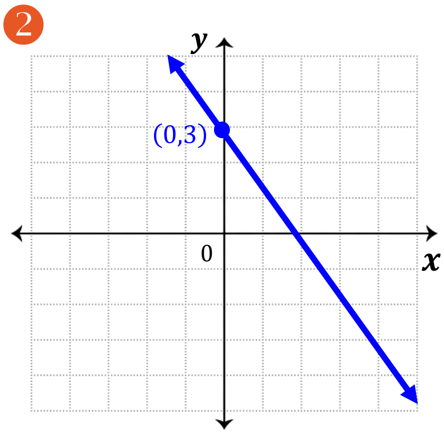


ميل هذا المستقيم يساوي صفرًا والمقطع y له هو -2

أكتب المعادلة

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + c$
عوّض $m = 0$ ، وعن $c = -2$	$y = (0)x - 2$
بسّط	$y = -2$

2



بما أن المستقيم يقطع المحور y في النقطة $(0,3)$، فإن المقطع y يساوي (3).

يمرّ المستقيم بالنقطة $(2,0)$، وللانتقال من النقطة $(0,3)$ إلى $(2,0)$ ، تحرك ثلاث وحدات إلى أسفل، ووحدتين إلى اليمين؛ إذن الميل يساوي $\frac{-3}{2}$.

اكتب المعادلة:

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + c$
عوّض $m = \frac{-3}{2}$ ، وعن $c = 3$	$y = \frac{-3}{2}x + 3$

إرشاد

معادلة المستقيم الأفقي والمستقيم الرأسي:

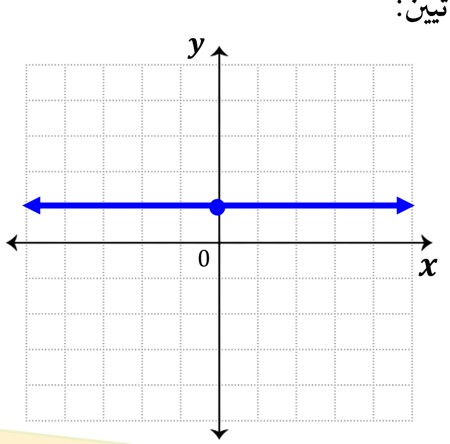
بما أن ميل المستقيمات الأفقية يساوي صفراً؛ لذا فمعادلات المستقيمات الأفقية يمكن أن تُكتب بصيغة الميل والمقطع على الصورة $y = 0x + c$، أو $y = c$.

أما الخطوط المستقيمة الرأسية فليس لها ميل؛ لذا لا يمكن كتابة معادلاتها بصيغة الميل والمقطع.

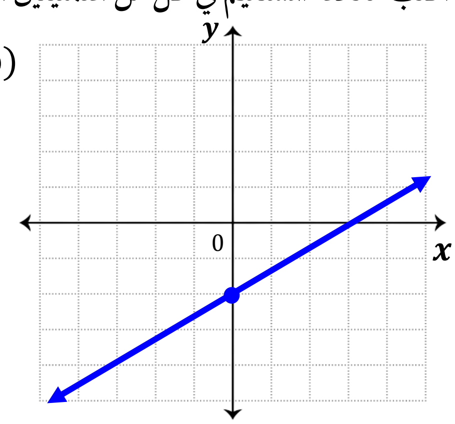
تحقق من فهمك

اكتب معادلة المستقيم في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

a)



b)



تدرب وحل مسائل

أوجد الميل والمقطع y لكلٍّ من المستقيمات الآتية: (انظر مثال 1)

1) $y = -\frac{2}{3}x + 7$

2) $y = 3x - 9$

3) $y = 12$

4) $y = \frac{3}{5}x$

5) $\frac{1}{3}x - 4 = y$

6) $5 - 2x = y$

7) $3y - 4x = 12$

8) $2x + 3y = 12$

9) $8y + 4x - 5 = 0$

10) $2x + 3y - 9 = 0$

اكتب معادلة كل مستقيم فيما يأتي بصيغة الميل والمقطع، ثم مثّلها بيانيًّا: (انظر مثال 2)

11) الميل يساوي 7، والمقطع y يساوي 5

12) الميل يساوي $\frac{2}{3}$، والمقطع y يساوي -1

13) الميل يساوي -3، والمقطع y يساوي 7

14) الميل يساوي $\frac{-1}{4}$، والمقطع y يساوي -2

15) الميل يساوي -2، والمقطع y يساوي 3

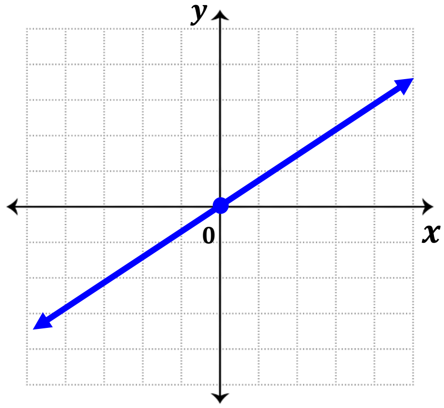
16) الميل يساوي 5، والمقطع y يساوي -1

17) الميل يساوي 0، والمقطع y يساوي 4

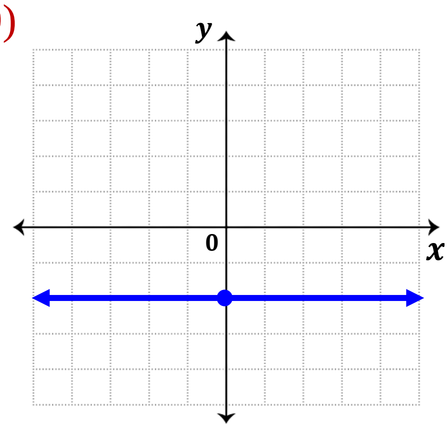
18) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله 3

اكتب معادلة المستقيم الممثّل في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع: (انظر مثال 3)

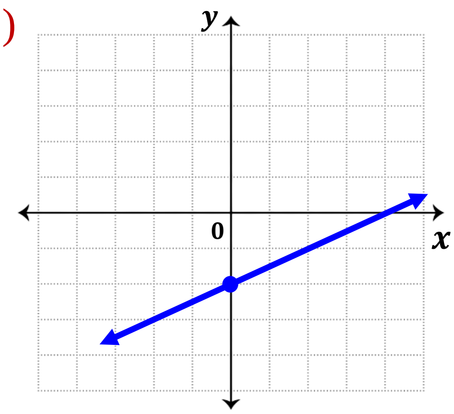
19)



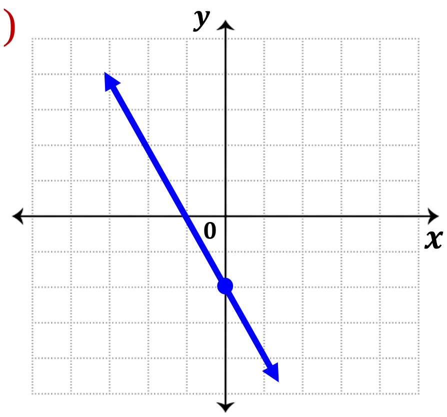
20)



21)



22)



23) **اكتشف الخطأ**: أوجد كل من عبدالله و راشد كل من الميل و المقطع y للمعادلة التالية

$y = \frac{1}{3}x - 4$ ، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

عبدالله

$$\frac{1}{3}x - 4 = y$$

$$y = \frac{1}{3}x - 4$$

إذنْ $m = -4 \ , c = \frac{1}{3}$

راشد

$$\frac{1}{3}x - 4 = y$$

$$y = \frac{1}{3}x - 4$$

إذنْ $m = \frac{1}{3} \ , c = -4$

الدرس
2-5

معادلة المستقيم بصيغة الميل و نقطة

Point-Slope form of a straight line

فكرة الدرس

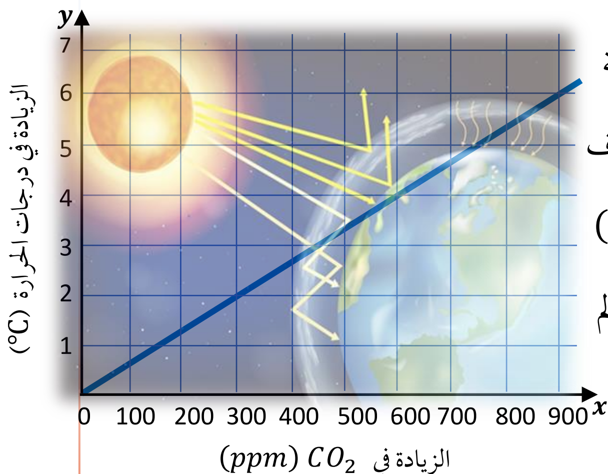
- كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًّا باستعمال صيغة الميل ونقطة.
- كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًّا بمعلومية نقطتين.
- كتابة معادلات خطية بمعلومية تمثيلها البياني.

المصطلحات

- صيغة الميل، صيغة الميل ونقطة.

مسألة اليوم

التمثيل البياني المجاور للتنبؤ بالعلاقة بين زيادة ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجوي بالأجزاء من مليون (ppm) وارتفاع متوسط درجة الحرارة في العالم بالسيليسيوس $(°C)$.



أكتب معادلة خطية بمتغيرين يمكن استعمالها لإيجاد مقدار الارتفاع في درجة الحرارة عند أي ارتفاع في كمية CO_2 في الغلاف الجوي.

يمكنك كتابة معادلة المستقيم بمعلومية ميله (m) ونقطة تقع عليه، أو بمعلومية نقطتين تقعان عليه؛

فالمستقيم الذي ميلُه (m) معلوم ويمر بالنقطة (x_1, y_1)، إذا أخذت نقطة أخرى (x, y) تقع عليه فإن:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad , x \neq x_1$$

بضرب طرفَي المعادلة في $x - x_1$، نحصل على المعادلة:

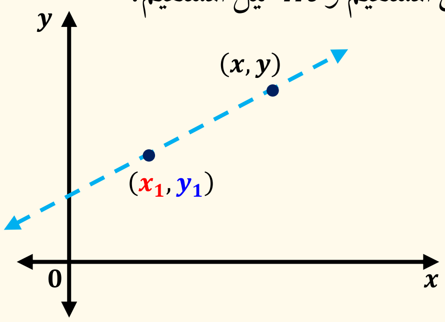
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

تساعدنا هذه الصيغة على إيجاد معادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطةٍ تقع عليه.

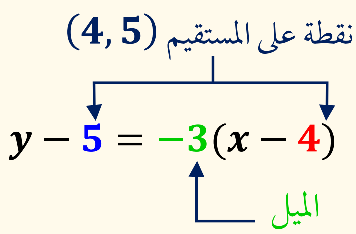
صيغة الميل ونقطة لمعادلة الخط المستقيم

المفهوم: صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث (x_1, y_1) إحداثيا أيّ نقطة على المستقيم و m ميل المستقيم.



مثال:



مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 5)$ وميلُه 3 بصيغة الميل ونقطة.

صيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
عوّض عن $m = 3$ ، $(x_1, y_1) = (-2,5)$	$y - 5 = 3(x - (-2))$
بسّط	$y - 5 = 3(x + 2)$

إذنْ، معادلة المستقيم: $y - 5 = 3(x + 2)$

2 أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ وميلُه -2 بصيغة الميل ونقطة.

صيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
عوّض عن $m = -2$ ، $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right)$

إذنْ، معادلة المستقيم: $y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right)$

تنبيه!

عند التعويض بإحداثيات سالبة، استعمل الأقواس؛ لتتجنّب الوقوع في أخطاء الإشارات

تحقق من فهمك

a) أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ وميلُه -5 بصيغة الميل ونقطة.

b) أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-5,3)$ وميلُه $-\frac{2}{5}$ بصيغة الميل ونقطة.

عندما لا يُعطَى ميل المستقيم، استعمل أي نقطتين عليه لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل ونقطة، أو الميل والمقطع لتكتب معادلته.

مثال 2

اكتب معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاطٍ فيما يأتي:

1 $(-4, 3), (0, 2)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{0-(-4)} = \frac{-1}{4} = \frac{-1}{4}$$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2 اكتب معادلة المستقيم.

$$y = mx + c$$ صيغة الميل والمقطع

$$y = \frac{-1}{4}x - 2$$ عوّض عن $m = \frac{-1}{2}$، وعن $c = 2$

2 $(7, 4), (-9, -4)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-4}{-9-7} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2 اكتب معادلة المستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ صيغة الميل ونقطة

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 7)$$ عوّض عن $m = \frac{1}{2}$، وعن $(x_1, y_1) = (7, 4)$

$$y - 4 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$ بالتوزيع

$$y - 4 + 4 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} + 4$$ اجمع 4 لكلا الطرفين

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$ بسّط لكتابة المعادلة

3 $(-4, 5), (3, 5)$

الخطوة 1 أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-5}{3-(-4)} = \frac{0}{7} = 0$$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2 اكتب معادلة المستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ صيغة الميل ونقطة

$$y - 5 = 0(x - (-4))$$ عوّض عن $m = 0$، وعن $(x_1, y_1) = (-4, 5)$

$$y - 5 = 0$$ بسّط لكتابة المعادلة

$$y = 5$$

إرشاد

معادلة المستقيم:

عند إيجاد معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين إحداهما في الصورة $(0, c)$، فمن الأسهل كتابة معادلة المستقيم في الصورة الصريحة:

$y = mx + c$

تحقق من فهمك

اكتب معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاط فيما يأتي:

a) $(-2,4),(8,10)$ b) $(-4,7),(2,5)$ c) $(-1,3),(7,2)$

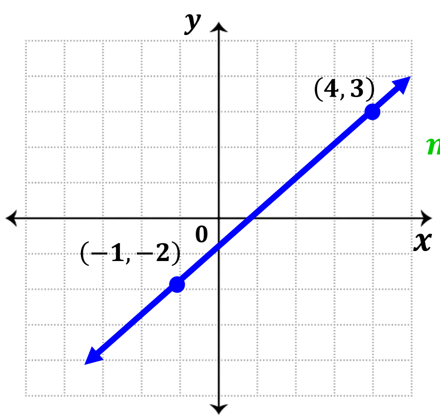
التمثيل البياني للمستقيم يُعطيك الكثير من البيانات التي تساعدك على إيجاد معادلة المستقيم، من خلال التمثيل البياني، حدِّد نقطتين من التمثيل البياني لحساب الميل m، واستعن بصيغة الميل ونقطة لإيجاد معادلة المستقيم.

مثال 3

أكتب معادلة المستقيم الممثل بيانيا في الشكل المجاور بصيغة الميل ونقطة:

الخطوة 1 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم وأجد الميل.



$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

$= \dfrac{3-(-2)}{4-(-1)}$ عوّض عن $(x_1, y_1) = (-1,-2)$، وعن $(x_2, y_2) = (4,3)$

$= \dfrac{5}{5} = 1$ أبسط

الخطوة 2 عوض في صيغة الميل ونقطة.

أعوض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

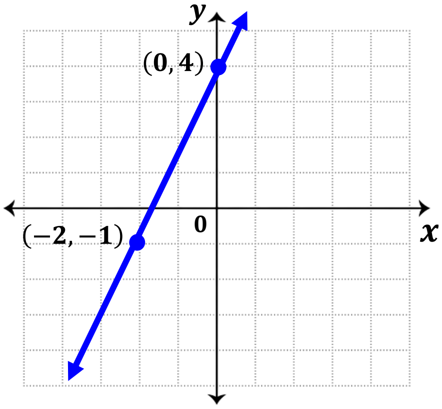
$y - (-2) = 1(x - (-1))$ عوّض عن $m = 1$، وعن $(x_1, y_1) = (-1,-2)$

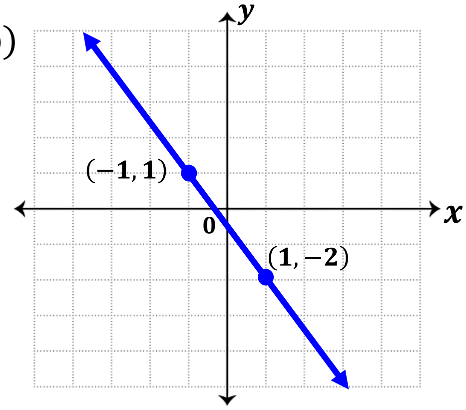
$y + 2 = 1(x + 1)$ بسّط

إذنْ، معادلة المستقيم: $y + 2 = x + 1$

تحقق من فهمك

اكتب معادلة المستقيم في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

a) 

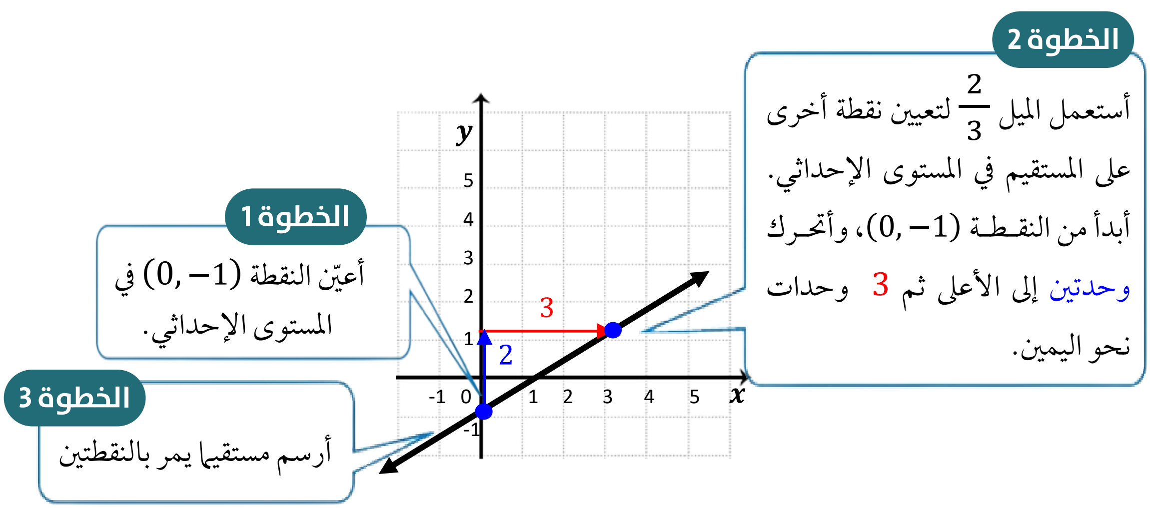
b) 

يمكن استعمال الميل والنقطة المعطاة من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل ونقطة لتمثيل المستقيم.

مثال 4

مثل المعادلة $y + 1 = \frac{2}{3}x$ بيانياً باستعمال الميل ونقطة.

يمكن إعادة كتابة المعادلة على الصورة: $y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 0)$ ، وعليه فإن الميل يساوي $\frac{2}{3}$ والنقطة $(0, -1)$.



تحقق من فهمك

مثل كل معادلة مما يأتي بيانياً:

a) $y + 5 = \frac{-2}{5}(x - 3)$

b) $y - 5 = -3(x + 1)$

c) $y - 3 = 5(x - 3)$

d) $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2)$

تدرب وحل مسائل

أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والمعلوم ميله **m** في كل مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

(انظر مثال 1)

1) $(4,-3), m=\frac{3}{4}$

2) $(-2,-5), m=-4$

3) $(3,-2), m=5$

4) $(-3,7), m=\frac{1}{2}$

5) $(-4,-6), m=-2.5$

6) $(0,2), m=3$

7) $(3,11), m = 2$

8) $(1,9), m=-7$

9) $(-2,-5), m=\frac{5}{7}$

10) $(14,-12), m=-2.4$

أكتب معادلة المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتي بصيغة الميل ونقطة: (انظر مثال 2)

11) $(0,-1),(4,4)$

12) $(-1,6),(-3,10)$

13) $(2,7),(-8,1)$

14) $(4,3),(1,-6)$

15) $(-1,8),(9,-6)$

16) $(3,7),(-3,5)$

17) $(0,5),(3,3)$

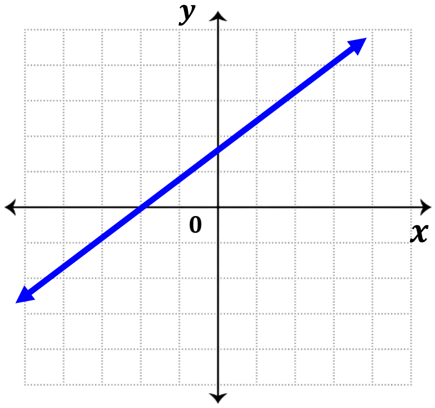
18) $(2,-1),(-2,6)$

19) $(-2,4),(-1,-3)$

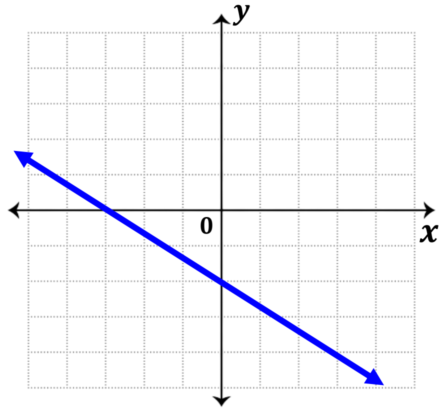
20) $(-1,-4),(3,-4)$

أكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الممثل بيانيا في كل مما يأتي: (انظر مثال 3)

21)



22)



مثل كل معادلة مما يأتي بيانيا: (انظر مثال 4)

23) $y + 3 = 2(x - 1)$

24) $y - 1 = -3(x + 2)$

25) $y - 4 = 2(x - 3)$

26) $y - 2 = \frac{4}{5}(x - 3)$

27) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من خالد و جاسم معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1, -1), (-2, 4)$ ، أي منهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك؟

خالد

$y - 4 = -5(x - (-2))$

$y - 4 = -5(x + 2)$

$y - 4 = -5x - 10$

$y + 5x + 6 = 0$

جاسم

$y - 4 = -5(x - (-2))$

$y - 4 = -5(x + 2)$

$y - 4 = -5x - 10$

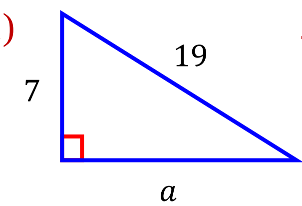
$y = -5x + 6$

الوحدة 2

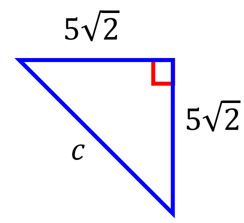
اختبار الوحدة

جد طول الضلع المجهول في كلٍّ مما يأتي (قرب إجابتك لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

1)



2)



أوجد المسافة بين كلِّ نقطتين فيما يأتي:

3) $(-5,-3),(-5,5)$

4) $(-3,4),(-2,-3)$

5) اختيار من متعدد: المسافة بين النقطتين $(4,3),(-2,-5)$ تساوي:

A) $\sqrt{8}$

B) 86

C) 14

D) 10

6) إذا كانت $A(4,3),B(-2,-5)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف $\overline{AB}$ ؟

7) إذا كانت $A(5,1),B(3,7),C(8,2)$ ، فبيّن أن ΔABC قائم الزاوية؟

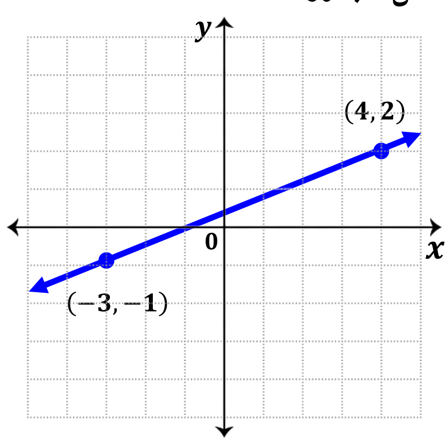
اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي:

8) $(0,-1), m=\frac{1}{3}$

9) $(0,5), m=2$

10) $(0,3), m=-4$

11) اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الممثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور:



12) إذا تحرك قارب بخاري، وقارب آخر شراعي من المرفأ نفسه، كما في الشكل أدناه، والذي يبيّن حركة كلٍّ منهما، فما المسافة بين القاربين؟