الإمـــارات
THE EMIRATES

KhateebAcademy.co

Alpha
Education Center

الحل

الحل

الحل

# هيكل

الحل

الحل

مادة

# الرياضيات

## الصـف الثاني عشـر متقدم

## الفصل الدراسي الثاني

2024/2023

اسم الطالب : .......................................

المدرســـة : .......................................

الحل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

**إعداد : محمد عمر الخطيب**

**ملاحظة: في الامتحان الاسئلة من 1 الى 15 هي اسئلة اختيار من متعدد ومن 15 الى 20 هي اسئلة كتابية**

## اسئلة الاختيارمن متعدد (الدوائر) من 1 الى 15

**السؤال الأول**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال الأول

تمارين 3-6 صفحة 258 من الكتاب

---

**اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها**

ممكن استخدام الرسم او اختبار المشتقة الأولى او اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية

(3a) $f(x)=x^2+5x-1$

$f'(x) = 2x+5$

$f'(x) = 0$

$2x+5=0$

$x=-5/2$

العدد الحرج: هو $x=\frac{-5}{2}$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{-5}{2}$

---

(3b) $f(x)=-x^2+4x+2$

$f'(x) = -2x+4$

$f'(x) = 0$

$-2x+4=0$

$x=2$

العدد الحرج: هو $x=2$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=2$

---

(4a) $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x) = 3x^2-3$

$f'(x) = 0$

$3x^2-3=0$

$x=-1 , 1$

الاعداد الحرجة هي $x=-1 , 1$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-1$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=1$

---

(4b) $f(x)=-x^3+6x^2+2$

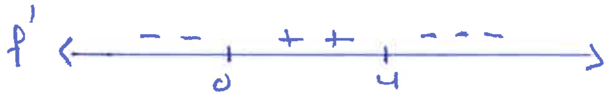
$f'(x) = -3x^2+12x$

$f'(x) = 0$

$-3x^2+12x=0$

$x=0 , x=4$

الاعداد حرجة هي $x=0 , 4$



للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=4$

(5a) $f(x)=x^3-3x^2+6x$

$f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x + 6.$

$x = 1 \pm i$

لا يوجد جذور حقيقية

لا يوجد اعداد حرجة

لا يوجد قيم قصوى محلية للدالة

---

(5b) $f(x)=-x^3+3x^2-3x$

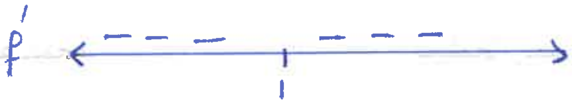
$f'(x) = -3x^2+9x-3$

$f'(x) = 0$

$-3x^2+9x-3=0$

$x = 1$

العدد الحرج هو $x=1$



ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $x=1$

وانما مماس افقي

---

(6a) $f(x)=x^4-2x^2+1$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

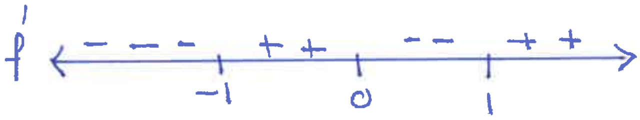
$f'(x) = 0$

$4x^3 - 4x = 0$

$x = 0 \quad , x = -1 , x = 1$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0 , \pm 1$



للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=-1,1$

للدالة قيمة عظمى عند $x=0$

---

(6b) $f(x)=x^4-3x^3+2$

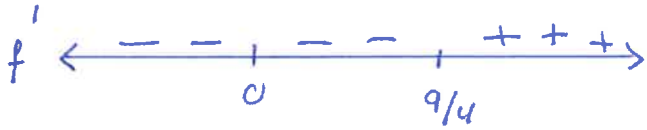
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 9x^2 = 0$

$x = 0 , \quad x = 9/4$

الاعداد الحرجة هي $0, \frac{9}{4}$



قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{9}{4}$

ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $x=0$

وانما مماس افقي

**السؤال الثاني**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال الثاني**

**تمارين 34-25 صفحة 258 من الكتاب**

**اوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة عاى الفترة المشار اليها**

(25a) $f(x)=x^3-3x+1 \quad [0,2]$

$f'(x) = 3x^2-3$

$f'(x)=0$

$x=\pm 1$

الاعداد الحرجة هي $x = 1$ فقط

اختبارهم .

$f(0) = 1$

$f(2) = 3$

$f(1) = -1$

عظمى مطلقة 3 عند $x=2$

صغرى مطلقة -1 عند $x=1$

(25b) $f(x)=x^3-3x+1 \quad [-3,2]$

الاعداد الحرجة $x = -1, 1$

$f(-3) = -17$

$f(2) = 3$

$f(-1) = 3$

$f(1) = -1$

عظمى مطلقة 3 عند $x=-1,2$

صغرى مطلقة -17 عند $x=-3$

(26a) $f(x)=x^4-8x^2+2 \quad [-3,1]$

$f'(x) = 4x^3-16x$

$f'(x)=0$

$4x^3-16x=0$

$x=0 \;,\; x=\pm 2$

الاعداد الحرجة هي $x=-2,0$

$f(-3) = 11$ . عظمى مطلقة

$f(1) = -5$

$f(0) = 2$

$f(2) = -14.$ صغرى مطلقة

(26b) $f(x)=x^4-8x^2+2 \quad [-1,3]$

الاعداد الحرجة هي $x = 0, 2$

$f(-1) = -5$

$f(3) = 11$ . عظمى مطلقة

$f(0) = 2$

$f(2) = -14$ . صغرى مطلقة

(27*a*) $f(x)=x^{2/3}$ $[-4,-2]$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$$

$f'(x)$ غ.م ، $f'(x)=0$

$x=0$ لا يوجد حل

العدد الحرج هو $x=0$

$f(-2)=\sqrt[3]{4}$

$f(0)=0$ صغرى مطلقة.

$f(-4)=\sqrt[3]{16}$ عظمى مطلقة

(27*b*) $f(x)=x^{2/3}$ $[-1,3]$

العدد الحرج هو $x=0$

$f(-1)=1$

$f(3)=\sqrt[3]{27}$ عظمى مطلقة

$f(0)=0$ صغرى مطلقة.

---

(28*a*) $f(x)=\sin x+\cos x$ $[0,2\pi]$

$f'(x)=\cos x-\sin x.$

$f'(x)=0$

$\cos x-\sin x=0$

$\sin x=\cos x.$

بالقسمة على $\cos x.$

$\tan x=1$

$$x \left< \pi/4 \right. \begin{array}{l} Q_1 \rightarrow x=\frac{\pi}{4} \\ Q_3 \rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4} \end{array}$$

الاعداد الحرجة هي $x=\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$

$f(0)=1$

$f(2\pi)=1$

$f(\pi/4)=\sqrt{2} \rightarrow$ عظمى مطلقة

$f(5\pi/4)=-\sqrt{2}$ صغرى مطلقة

(28*b*) $f(x)=\sin x+\cos x$ $[\pi/2,\pi]$

$f(\frac{\pi}{2})=1$ عظمى مطلقة

$f(\pi)=-1$ صغرى مطلقة.

(29a) $f(x)=e^{-x^2}$ $[0,2]$

$f'(x) = e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$= -2x\,e^{-x^2} = \frac{-2x}{e^{x^2}}.$

$f'(x) = 0$

$-2x\,e^{-x^2} = 0$

$-2x = 0$ , $e^{-x^2} = 0$

$x = 0$ لا يوجد حل.

$x = 0$ الاعداد الحرجة

$f(0) = 1$ عظمى مطلق.

$f(2) = e^{-4} = 1/e^4.$ صغرى مطلق.

(29b) $f(x)=e^{-x^2}$ $[-3,2]$

الاعداد الحرجة هي $x = 0$

$f(-3) = e^{-9} = 1/e^9$

$f(2) = e^{-4} = 1/e^4$

$f(0) = 1$

صغرى مطلق $e^{-9}$ عند $x=-3$

عظمى مطلق $1$ عند $x=0$

(30a) $f(x)=x^2e^{-4x}$ $[-2,0]$

$f'(x) = 2x\,e^{-4x} + x^2\cdot e^{-4x}(-4)$

$= e^{-4x}(2x - 4x^2)$

$= \frac{2x-4x^2}{e^{4x}}$

$f'(x) = 0$

$2x - 4x^2 = 0$

$x = 0, \ x = 1/2$

ع.م $f'(x)$

$e^{4x} = 0$

لا يوجد حل

$x = 0$ الاعداد الحرجة

$f(0) = 0$ صغرى مطلق

$f(-2) = 4e^{8}$ عظمى مطلق

(30b) $f(x)=x^2e^{-4x}$ $[0,4]$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0, \ x = 1/2$

$f(0) = 0$

$f(4) = 16e^{-16} = 16/e^{16}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{-2} = e^{-2}/4.$

عظمى مطلق $e^{-2}/4$ عند $x=1/2$

صغرى مطلق $0$ عند $x=0$

(31a) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-3}$ $[-2,2]$

$D = R \setminus \{3\}$.

$$f'(x) = \frac{6x(x-3)-3x^2(1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{3x^2-18x}{(x-3)^2}.$$

$f'(x)=0$

$3x^2-18x=0$

$x=0,\ x=6$ خارج المجال

f'(x) غ.م

$x=3$

خارج المجال

$f(-2) = -12/5$

$f(2) = -12$ صغرى مطلقة.

$f(0) = 0$ عظمى مطلقة

(31b) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-3}$ $[2,8]$

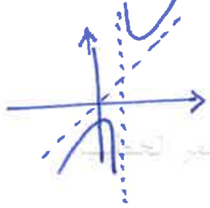
الاعداد الحرجة هي $x = 6$.

الدالة غير متصلة على الفترة [2,8]

ولها خط تقارب رأسي.

لا يمكنه الحل باختبار القيم.

ويجب رسم الدالة (معلومات الدرس السادس) بيانيا



(32a) $f(x)=tan^{-1}x^2$ $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{x^4+1}$$

$f'(x)=0$

$2x=0$

$x=0$

f'(x) غ.م

$x^4+1=0$

لا يوجد حل.

$x=0$ الاعداد الحرجة

$f(0) = tan^{-1}0 = 0$

$f(1) = tan^{-1}1 = \pi/4$

$x=1$ عند $\frac{\pi}{4}$ عظمى مطلقة

$x=0$ عند 0 صغرى مطلقة

(32b) $f(x)=tan^{-1}x^2$ $[-3,4]$

$x=0$ هي الاعداد الحرجة

$f(-3)= tan^{-1}9 = 1.46$ راديان

$f(4) = tan^{-1}16 = 1.51$

$f(0) = 0$

$x=4$ عند $tan^{-1}16$ عظمى مطلقة

$x=0$ عند 0 صغرى مطلقة

(33a) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $[0,2]$

$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$

$-x^2+1=0$

$x = 1 , -1$ خارج المجال

$f'(x)$ غ.م

$x^2+1=0$

لا يوجد حل.

$f(0)= 0$ . صغرى مطلقة

$f(2)= 2/5$

$f(1) = 1/2$ . عظمى مطلقة

(33b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $[-3,3]$

الاعداد الحرجة

$x = -1 , 1$

$f(-3) = -3/10$

$f(3) = 3/10$

$f(-1) = -1/2$ . صغرى مطلقة

$f(1) = 1/2.$ . عظمى مطلقة

(34a) $f(x)=\frac{3x}{x^2+16}$ $[0,2]$

$f'(x) = \frac{3(x^2+16) - 3x(2x)}{(x^2+16)^2}$

$= \frac{-3x^2+48}{(x^2+16)^2}$.

$f'(x)=0$

$-3x^2+48=0$

$x = \pm 4$

$f'(x)$ غ.م

لا يوجد حل.

لا يوجد اعداد حرجة.

$f(0) = 0$ صغرى مطلقة

$f(2) = 3/10$ . عظمى مطلقة

(34b) $f(x)=\frac{3x}{x^2+16}$ $[0,6]$

$x = 4$ الاعداد الحرجة هي

$f(0)= 0$ . صغرى مطلقة

$f(6) = 9/26$

$f(4) = 3/8$ عظمى مطلقة

**السؤال الثالث**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال الثالث**

**تمارين 10-1 صفحة 267 من الكتاب**

اوجد فترات التزايد وفترات التناقص وجميع القيم القصوى المحلية لكل من الدوال التالية

(1) $y = x^3 - 3x + 2$

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0$

$x = \pm 1$

فترة التزايد $(-\infty,-1) \overset{\cup}{،} (1,\infty)$

فترة التناقص $(-1,1)$

عظمى محلية عند $x = -1$

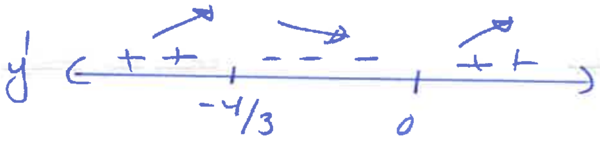
صغرى محلية عند $x = 1$

(2) $y = x^3 + 2x^2 + 1$

$y' = 3x^2 + 4x$

$y' = 0$

$x = 0 \ , \ x = -4/3$



فترة التزايد $(-\infty, \frac{-4}{3}) \overset{\cup}{،} (0,\infty)$

التناقص $(\frac{-4}{3}, 0)$

عظمى محلية عند $x = \frac{-4}{3}$

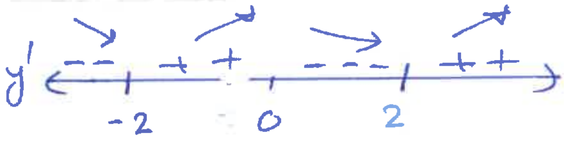
صغرى محلية عند $x = 0$

(3) $y = x^4 - 8x^2 + 1$

$y' = 4x^3 - 16x$

$y' = 0$

$x = 0 \ , \ x = -2, 2$



فترات التزايد $(-2,0) \ , \ (2,\infty)$

التناقص $(-\infty,-2) \ , \ (0,2)$

عظمى محلية عند $x = 0$

صغرى محلية عند $x = -2, 2$

(4) $y=x^3-3x^2-9x+1$

$y'=3x^2-6x-9.$

$y'=0.$

$x=-1,3.$

$y'$ ← + + ↗ −1 − − − ↘ 3 + + + ↗ →

فترة التزايد $(-\infty,-1)$ و $(3,\infty)$

التناقص $(-1,3)$

عظمى محلية عند $x=-1$

صغرى محلية عند $x=3$

---

(5) $y=(x+1)^{2/3}$ $D=(-\infty,\infty)$

$y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}=\frac{2}{3(x+1)^{1/3}}.$

$y'=0$ لا يوجد

$y'$ غ.م $x=-1$

← − − − ↘ −1 + + + ↗ →

فترة التناقص $(-\infty,-1)$

التزايد $(-1,\infty)$

صغرى محلية عند $x=-1$

---

(6) $y=(x-1)^{1/3}$ $D=(-\infty,\infty)$

$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}=\frac{1}{3(x-1)^{2/3}}.$

$y'=0$ لا يوجد حل

$y'$ غ.م $x=1$

$y'$ ← + + 1 + + + →

فترة التزايد $(-\infty,\infty)$

لا يوجد قيم قصوى محلية.

يوجد مماس رأسي عند $x=1$

---

(7) $y=\sin x+\cos x$

$y'=\cos x-\sin x$

$y'=0$

$\cos x-\sin x=0$

$\sin x=\cos x$

$\tan x=1.$

$x \left\langle \frac{\pi}{4} \right. \begin{array}{l} Q_1 \to x=\frac{\pi}{4} \\ Q_3 \to x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}. \end{array}$ الدور $\pi$.

الأعداد الحرجة هي

$x=\frac{\pi}{4}+n\pi.$

$x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{13\pi}{4},\dots$

$-\frac{3\pi}{4},-\frac{7\pi}{4},\dots$

← $-\frac{3\pi}{4}$ + + ↗ $\frac{\pi}{4}$ − − ↘ $\frac{5\pi}{4}$ + + ↗ $\frac{9\pi}{4}$ − − ↘ $\frac{13\pi}{4}$ →

التزايد $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)+2n\pi$

التناقص $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)+2n\pi.$

عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ , صغرى محلية عند $x=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$

(8) $y = sin^2 x$

$y' = 2 \sin x \cdot \cos x$

$= \sin 2x$

$y' = 0$

$\sin 2x = 0$

$2x \left\langle \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right. \Rightarrow 2x = 0 + n\pi$

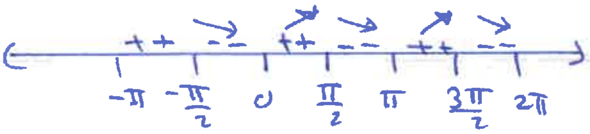
$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots$

$-\pi/2, -\pi, \ldots$

الاعداد الحرجة هي

$x = n \cdot \frac{\pi}{2}$



عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

صغرى محلية عند $x = n\pi$

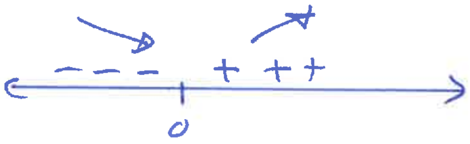
(9) $y = e^{x^2} - 1$

$y' = e^{x^2} \cdot 2x$

$y' = 0$

$2x = 0$ , $e^x = 0$

$x = 0$ لايوجد حل



تزايد $(0, \infty)$

تناقص $(-\infty, 0)$

محلية عند $x = 0$

(10) $y = ln(x^2 - 1)$

$x^2 - 1 > 0$

$D = (-\infty, -1) , (1, \infty)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0$

$x = 0$

خارج المجال

$f'(x)$ غ م

$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

خارج المجال

لايوجد اعداد حرجة.

تناقص $(-\infty, -1)$

تزايد $(1, \infty)$

لايوجد قيم قصوى محلية.

**السؤال الرابع**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال الرابع**

**تمارين 11-20 صفحة 267 من الكتاب**

اوجد الاعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف القيم القصوى المحلية

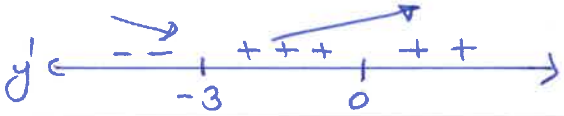
(11) $y = x^4 + 4x^3 - 2$

$y' = 4x^3 + 12x^2$

$y' = 0$

$x = 0 , x = -3$

$0 , -3$ هي الاعداد الحرجة



صغرى محلية عند $x = -3$

لا يوجد عظمى محلية عند $x = 0$ انما مماس افقي

---

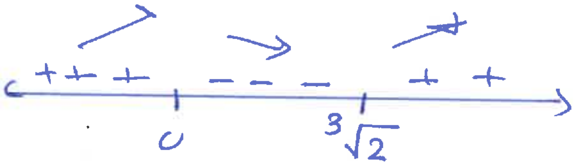
(12) $y = x^5 - 5x^2 + 1$

$y' = 5x^4 - 10x$

$y' = 0$

$5x(x^3 - 2) = 0$

$x = 0 , \quad x = \sqrt[3]{2}$ . اعداد حرجة



عظمى محلية عند $x = 0$

صغرى محلية عند $x = \sqrt[3]{2}$

---

(13) $y = xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}}$

$y' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$= e^{-2x}(1 - 2x)$

$= \frac{1-2x}{e^{2x}}$

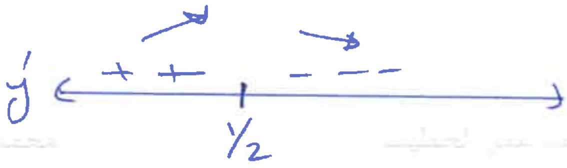
$y' = 0$

$x = 1/2$

$y'$ غ.م

لا يوجد حل

$x = 1/2$ الاعداد الحرجة



عظمى محلية عند $x = 1/2$

(14) $y = x^2 e^{-x}$

$$y' = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1)$$

$$= e^{-x}(2x - x^2)$$

$$= \frac{2x - x^2}{e^x}$$

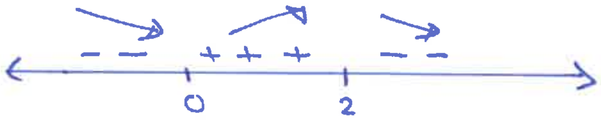
$y' = 0$

$x = 0 , x = 2$

$y'$ غ.م

لا يوجد حل.

الاعداد الحرجة هي $0 , 2$



صغرى محلية عند $x = 0$

عظمى محلية عند $x = 2$

---

(15) $y = \tan^{-1}(x^2)$

$$y' = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{1 + x^4}.$$

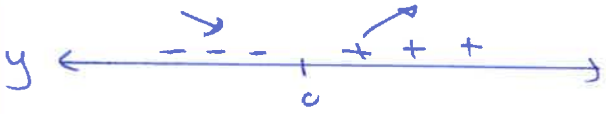
$y' = 0$

$x = 0$

$y'$ غ.م

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $0$



صغرى محلية عند $x = 0$

---

(16) $y = \sin^{-1}(1 - \frac{1}{x^2})$ $\rightarrow 1 - x^{-2}.$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2}} \cdot 2x^{-3}.$$

$$= \frac{2}{x^3 \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2}}$$

$y' = 0$

لا يوجد حل

$y'$ غ.م

$x = 0$

خارج المجال

$$1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2 = 0$$

$$(1 - \frac{1}{x^2})^2 = 1$$

$1 - \frac{1}{x^2} = -1$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 - \frac{1}{x^2} = 1$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

للدالة قيم صغرى مطلقة عند $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$

اولاً نجد مجال الدالة.

$$-1 \le 1 - \frac{1}{x^2} \le 1$$

$$-2 \le -\frac{1}{x^2} \le 0$$

$$.0 \ge \frac{1}{x^2} \le 0$$

$$0 \le \frac{1}{x^2} \le 2$$

$$\frac{1}{x^2} \le 2$$

$$\frac{1}{2} \le x^2$$

$$x^2 \ge \frac{1}{2}$$

$$|x| \ge \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x \le \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D = (-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$$

(17) $y = \dfrac{x}{1+x^3}$ $D = R / \{-1\}$

$$y' = \frac{1\cdot(1+x^3) - x(3x^2)}{(1+x^3)^2}$$

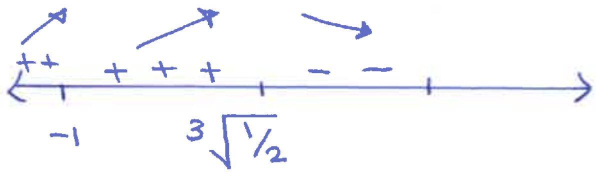
$$= \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

$y' = 0$ $y'$ غ.م

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $x = -1$

خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$



$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ عظمى محلية عند

---

(18) $y = \dfrac{x}{1+x^4}$

$$y' = \frac{1\cdot(1+x^4) - x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

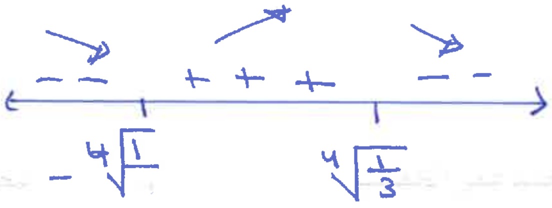
$$= \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$$

$y' = 0$ $y'$ غ.م

$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ لايوجد حل

الاعداد الحرجة هي

$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$



$x = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ صغرى محلية عند

$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ عظمى محلية عند

(19) $y=\sqrt{x^3+3x^2}$

$= (x^3+3x^2)^{1/2}$

$D = [-3, \infty)$

$y' = \frac{1}{2}(x^3+3x^2)^{-1/2}(3x^2+6x)$

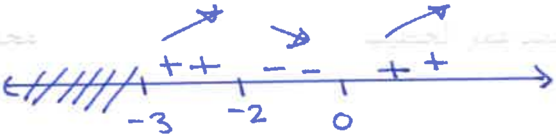
$= \dfrac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3+3x^2}}$

$y' = 0$ $\quad$ $y'$ غ.م

$x = 0, -2$ $\quad$ $x=0, x=-3$

الأعداد الحرجة هي

$0, -2, -3.$



عظمى محلية عند $x=-2$

صغرى محلية عند $x=0$

* صغرى محلية عند $x=-3.$

---

(20) $y = x^{4/3}+4x^{1/3}$

$y' = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}.$

$= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(\frac{x^{1/3}}{x^{-2/3}} + 1\right)$

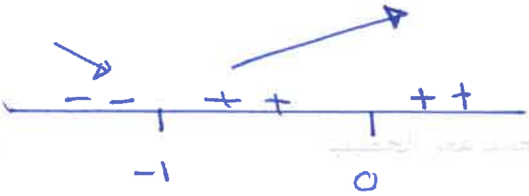
$= \dfrac{4(x+1)}{x^{2/3}}.$

$y' = 0$ $\quad$ $y'$ غ.م

$x=-1$ $\quad$ $x=0$

الاعداد الحرجة

$x=-1, 0$



صغرى محلية عند $x=-1$

ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $.x=0$

وانما مماس رأسي.

**حدد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للأسفل ونقاط الانعطاف لكل دالة من الدوال التالية**

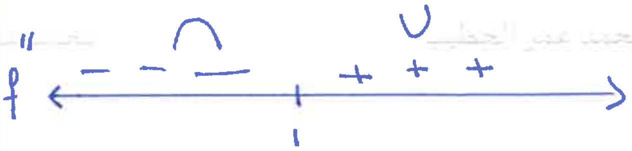
(1) $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

$x = 1$



فترة التقعر للاسفل $(-\infty, 1)$

للاعلى $(1, \infty)$

نقاط الإنقلاب عند $x = 1$

(2) $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0$

$x = \pm 1$

للاعلى $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

للاسفل $(-1, 1)$

نقاط الإنقلاب عند $x = \pm 1$

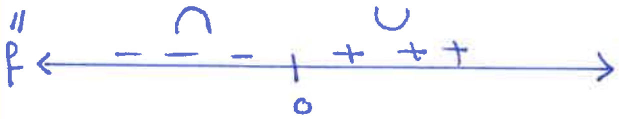
(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ $D = R | \{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-2} = \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = 0$ لايوجد حل

$f''(x)$ غ.م $x = 0$



للاسفل $(-\infty, 0)$

للاعلى $(0, \infty)$

لا يوجد نقاط انقلاب عند $x = 0$ لان الدالة غير متصلة

(4) $f(x) = x + 3(1-x)^{1/3}$

$f'(x) = 1 + (1-x)^{-2/3} \cdot (-1)$

$= 1 - (1-x)^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{-5/3} \cdot (-1)$

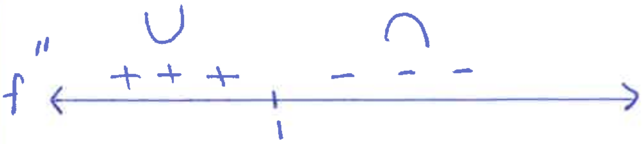
$= \frac{-2}{3}(1-x)^{-5/3}$

$= \frac{-2}{3(1-x)^{5/3}}$

$f''(x) = 0$ لا يوجد حل

$f''(x)$ غ.م

$x = 1$



$(-\infty, 1)$ للأعلى

$(1, \infty)$ للأسفل

نقطه الانقلاب عند $x = 1$

(5) $f(x) = \sin x - \cos x$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$

$f''(x) = 0$

$-\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

بالقسمة ع $\cos x$

$\tan x = 1$

$x$ $\pi/4$

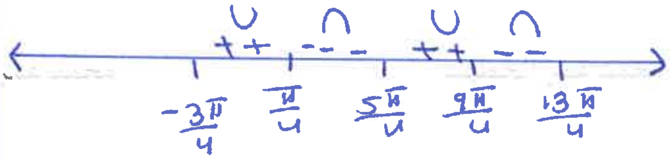
Q1 $\rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Q3 $\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi .$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$

$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \dots$



$(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + \boxed{2n\pi}$ للأعلى

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) + \boxed{2n\pi}$ للأسفل

نقاط الانقلاب عند

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

(6) $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$

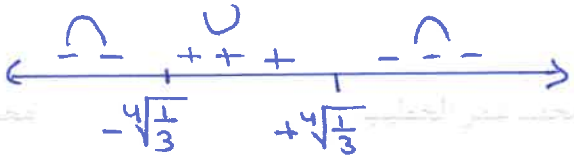
$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^4}$$

$$f''(x)=\frac{2(1+x^4)-2x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

$f''(x)=0$ $\qquad$ $f''$ ع.م

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ لا يوجد حل.



للاسفل $(-\infty,-\sqrt[4]{\frac{1}{3}})\,,\,(\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\infty)$

للاعلى $(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\sqrt[4]{\frac{1}{3}})$

نقاط الانقلاب $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

---

(7) $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$f''(x)=\frac{4}{9}x^{-2/3}-\frac{8}{9}x^{-5/3}$$

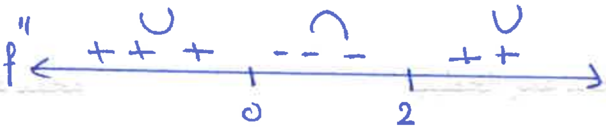
$$=\frac{4}{9}x^{-5/3}\left(\frac{x^{-2/3}}{x^{-5/3}}-2\right)$$

$$=\frac{4}{9}x^{-5/3}(x-2)$$

$$=\frac{4(x-2)}{9x^{5/3}}$$

$f''(x)=0$ $\qquad$ $f''(x)$ ع.م

$x=2$ $\qquad$ $x=0$



للاعلى $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

للاسفل $(0,2)$

نقاط الانقلاب عند

$x=0\,,\,2$

---

(8) $f(x)=xe^{-4x}$

$$f'(x)=1\cdot e^{-4x}+x\cdot e^{-4x}\cdot(-4)$$

$$=e^{-4x}(1-4x)$$

$$f''(x)=e^{-4x}\cdot(-4)(1-4x)+e^{-4x}(-4)$$

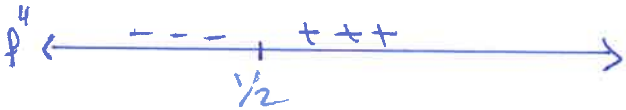
$$=e^{-4x}(-4+16x-4)$$

$$=e^{-4x}(16x-8)$$

$$=\frac{16x-8}{e^{4x}}$$

$f''(x)=0$ $\qquad$ $f''(x)$ غ.م

$x=1/2$ $\qquad$ لا يوجد حل



للاسفل $(-\infty,\frac{1}{2})$

للاعلى $(\frac{1}{2},\infty)$

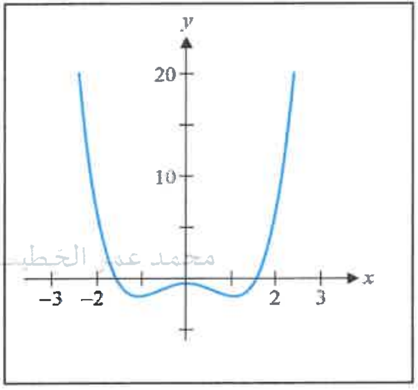
نقطة الانقلاب $x=2$

## السؤال السادس

احد هذه الاسئلة يكون السؤال السادس

تمارين 45, 46 صفحة 276 من الكتاب

**(45** يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي $(-1, 0)$ , $(1, \infty)$

(ب) فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي $(-\infty, -1)$ , $(0, 1)$

(ج) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

(د) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = \pm 1$ وهي مطلقة

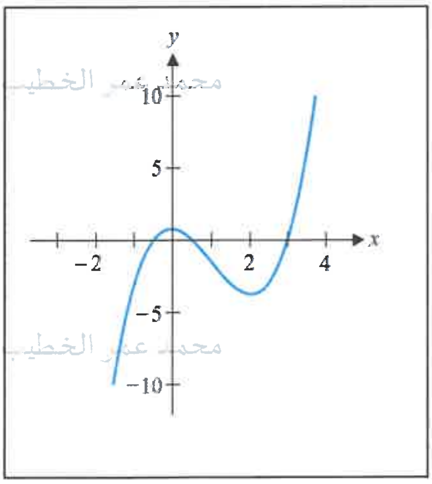
(هـ) فترة التقعر للاعلى هي $(-\infty, -1/2)$ , $(\frac{1}{2}, \infty)$

(و) فترة التقعر للاسفل هي $(-1/2 , 1/2)$

(ي) للدالة نقطة انعطاف عند $x = \pm 1/2$

---

**(46** يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي $(-\infty, 0)$ , $(2, \infty)$

(ب) فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي $(0 , 2)$

(ج) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

(د) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

(هـ) فترة التقعر للاعلى هي $(1, \infty)$

(و) فترة التقعر للاسفل هي $(-\infty, 1)$

(ي) للدالة نقطة انعطاف عند $x = 1$

## السؤال السابع

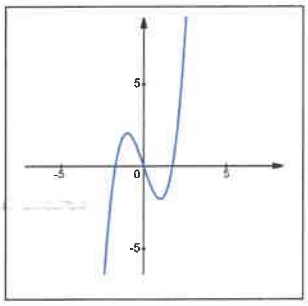
احد هذه الاسئلة يكون السؤال السابع

تمارين 1 - 28 صفحة 286 من الكتاب

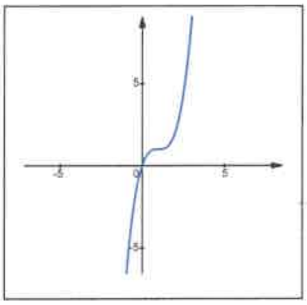
تمارين 49 - 52 صفحة 287 من الكتاب

(1) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^3-3x^2+3x$

(a)



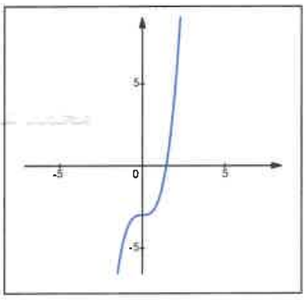
[✓ (b)]



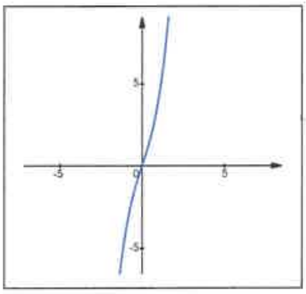
مقطع x هو 0.

الأصفار $x=0$

(c)

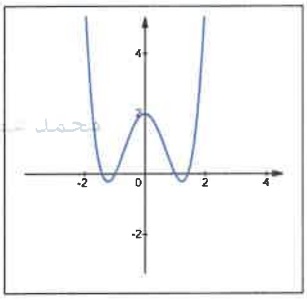


(d)



(2) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^4-3x^2+2$

[✓ (a)]



مقطع y هو 2

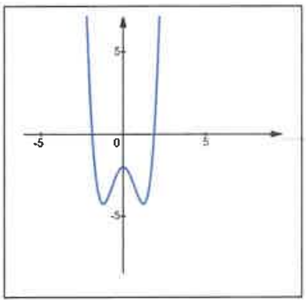
$f'=4x^3-6x.$

$f'=0$

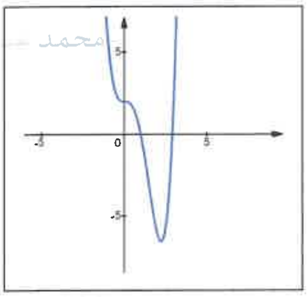
$x=0,\pm\sqrt{3/2}$

ثلاث نقاط حرجة.

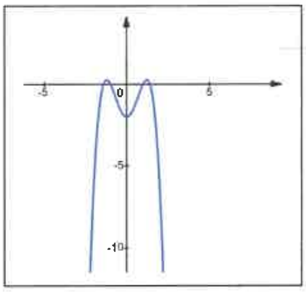
(b)



(c)

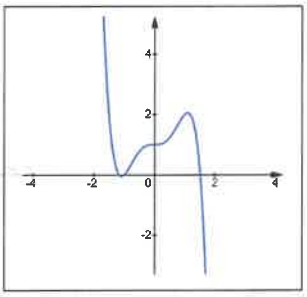


(d)

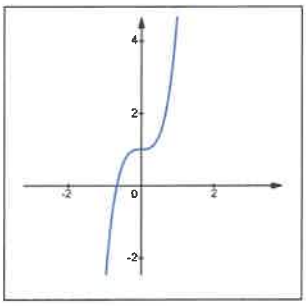


(3) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^5-2x^3+1$

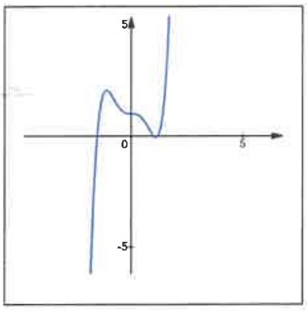
(a)



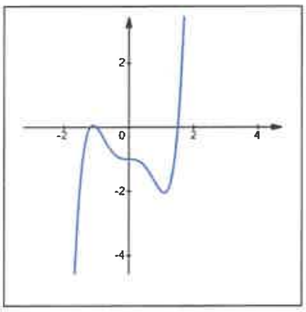
(b)



[✓ (c)]



(d)



مقطع y هو 1

$f' = 5x^4 - 6x^2$

$f' = 0$

$x = 0, \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

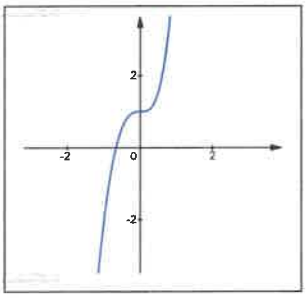
$f'$ + + + +

$-\sqrt{\frac{6}{5}}$ 0 $+\sqrt{\frac{6}{5}}$

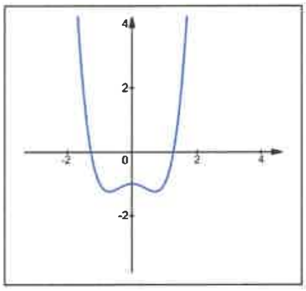
---

(4) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^4+4x^3-1$

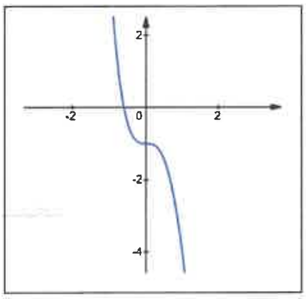
(a)



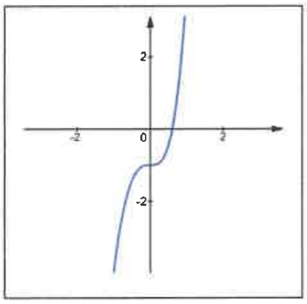
(b)



(c)



[✓ (d)]



مقطع y هو -1

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

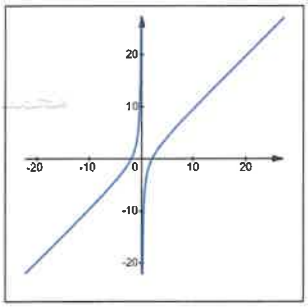
$4x^2(x+3) > 0$

دالة متزايدة

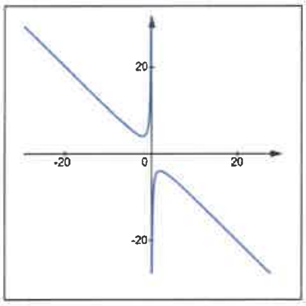
(5) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x+\frac{4}{x}$

$= \frac{x^2+4}{x}.$

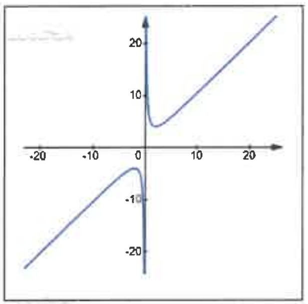
(a)



(b)



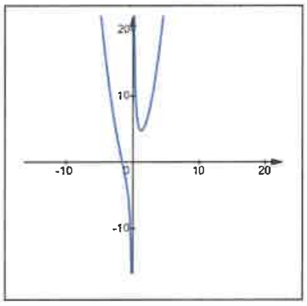
[✓ (c)]



خطتقارب
مائل
$y=x.$

اشارة f $\quad$ --- | ++
7

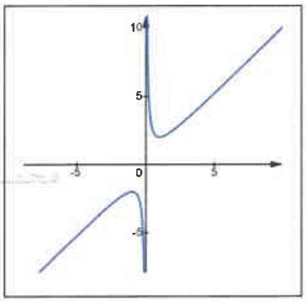
(d)



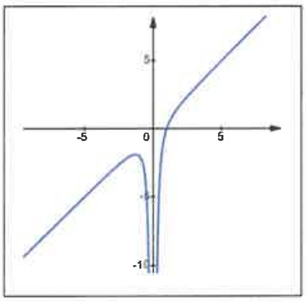
---

(6) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

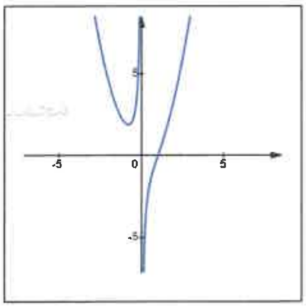
(a)



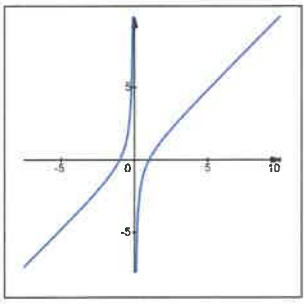
(b)



(c)



[✓ (d)]



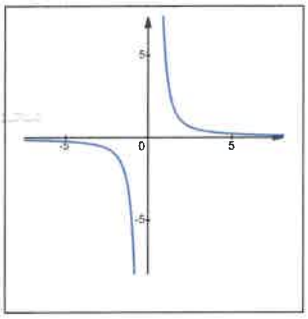
خطتقارب
مائل
$y=x.$

اشارة f $\quad$ ++ | ---
0

(7) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3}$

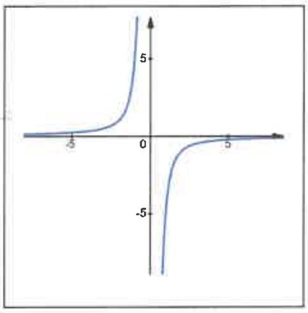
[✓ (a)]

- - | +
0

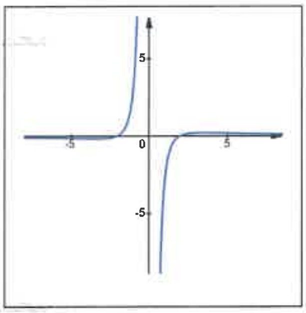


خط تقارب
افقي
y = 0
رأسي
x = 0

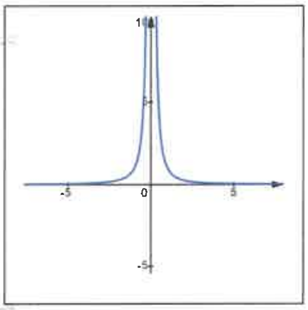
(b)



(c)



(d)

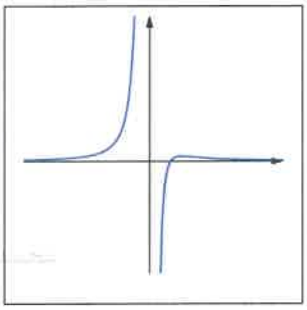


---

(8) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^3}$

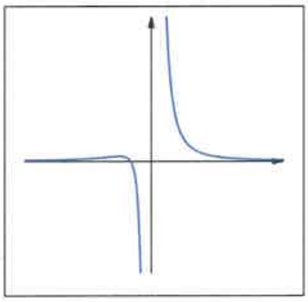
[✓ (a)]

+ | -
0

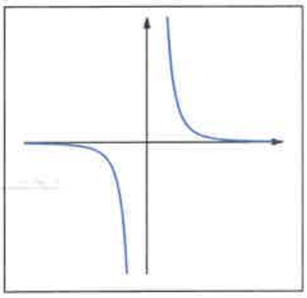


مقطع x
هو 4
خط تقارب
رأسي x = 0
افقي y = 0

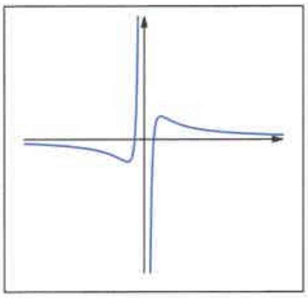
(b)



(c)

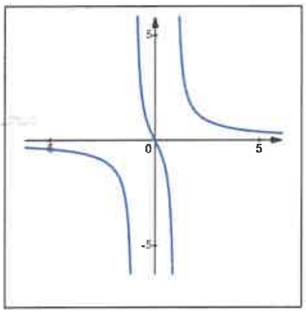


(d)



(9) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

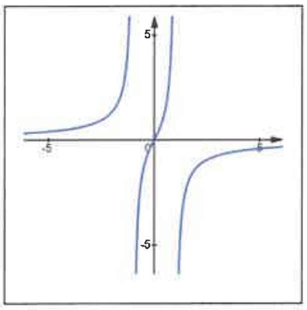
[✓ **(a)**]



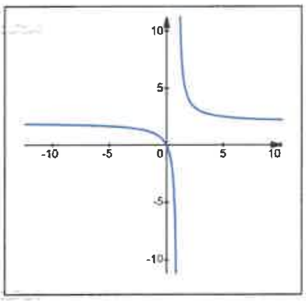
fo, اسـ — — + — + +
-1 0 1

مقطع x هو صفر
x=±1 رأسي
y=0 افقي

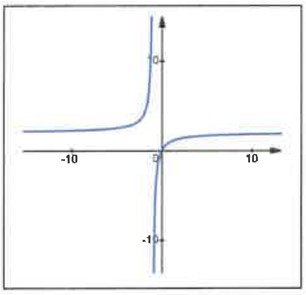
**(b)**



**(c)**



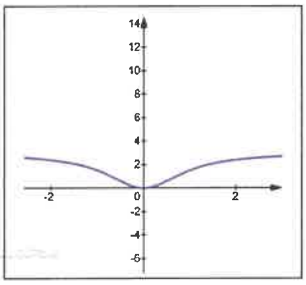
**(d)**



---

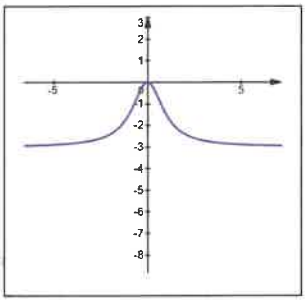
(10) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{2x^{2}}{x^2+1}$

[✓ **(a)**]

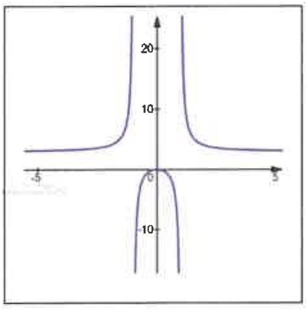


مقطع x هو 0
افقي y = 2
لا يوجد رأسي.

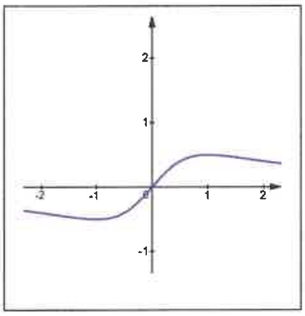
**(b)**



**(c)**

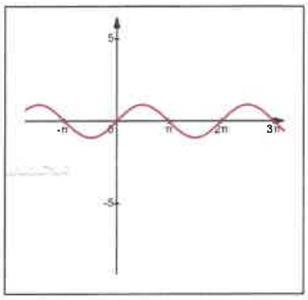


**(d)**

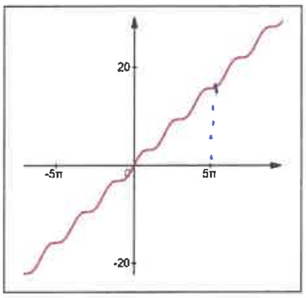


(11) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + \sin x$

(a)



[✓ (b)]

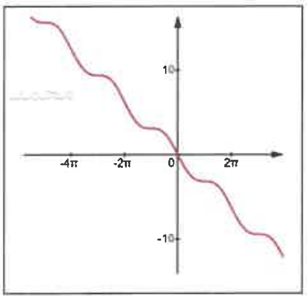


$y' = 1 + \cos x \geq 0$

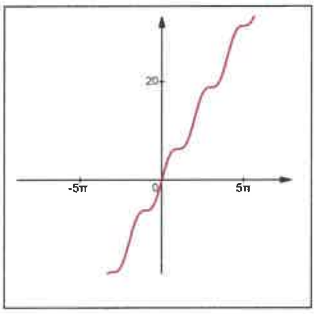
متزايد دائماً

$f(5\pi) = 5\pi$
$= 15.7$

(c)



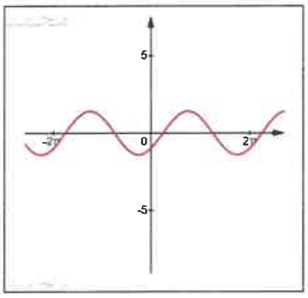
(d)



---

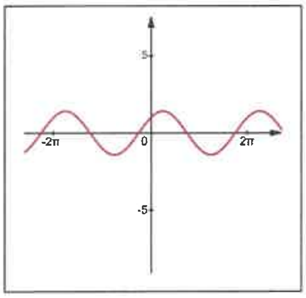
(12) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sin x - \cos x$

[✓ (a)]

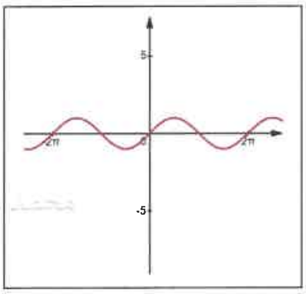


مقطع y هو
$-1$

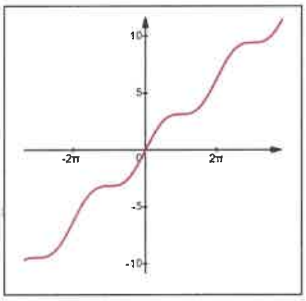
(b)



(c)

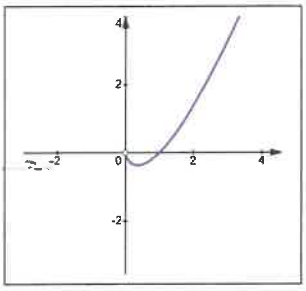


(d)



(13) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x \ln x$

[✓ (a)]

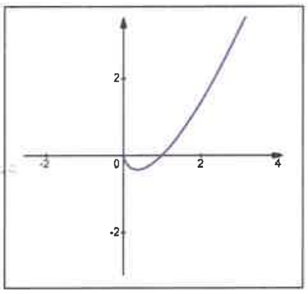


غير معرفة عند $x \leq 0$

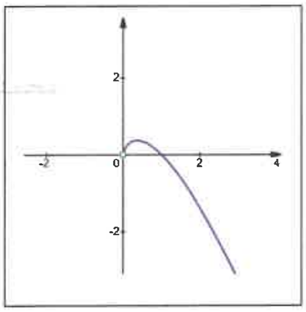
$f' = 1.\ln x + 1$

تناقص اول.

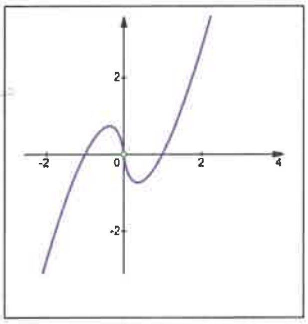
(b)



(c)



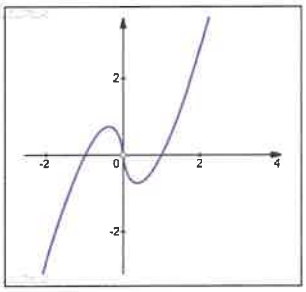
(d)



---

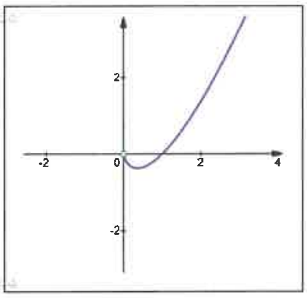
(14) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x \ln x^2$

[✓ (a)]

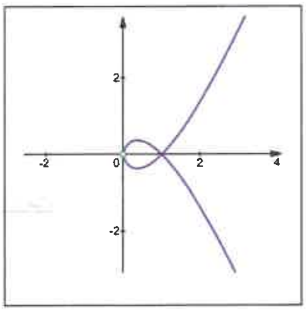


تزايد ال

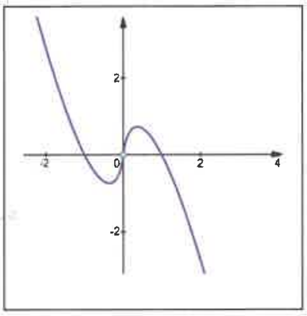
(b)



(c)

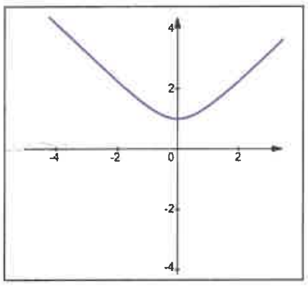


(d)

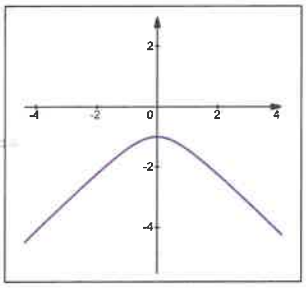


**(15) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

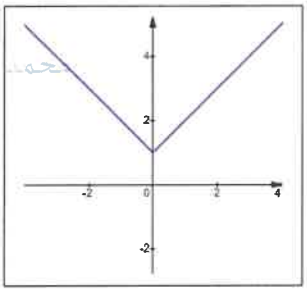
[✓ **(a)**]



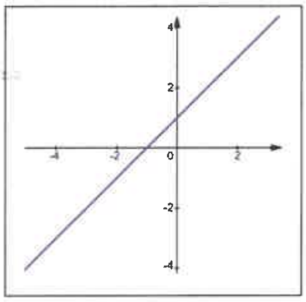
**(b)**



**(c)**



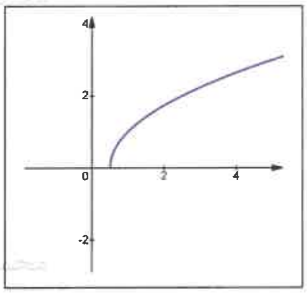
**(d)**



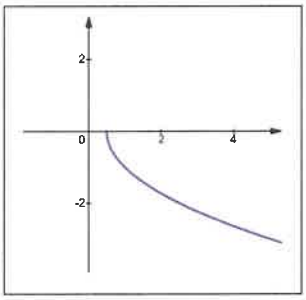
---

**(16) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة** $f(x)=\sqrt{2x-1}$

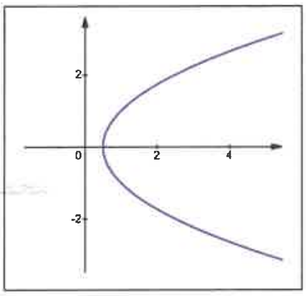
[✓ **(a)**]



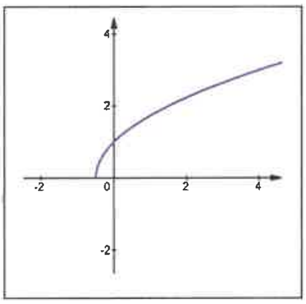
**(b)**



**(c)**

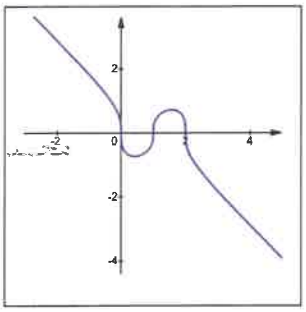


**(d)**

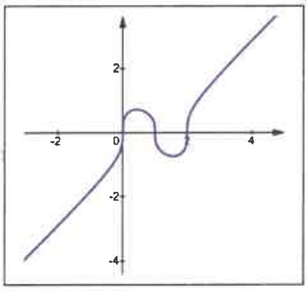


(17) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}$

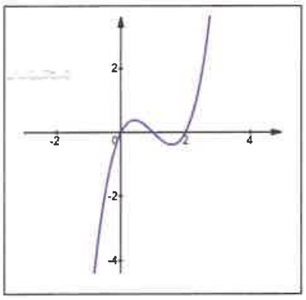
(a)



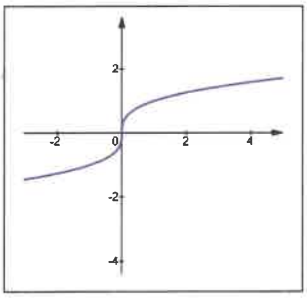
[✓ (b)]



(c)



(d)

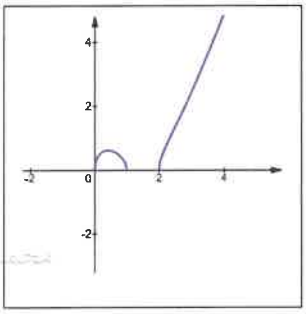


---

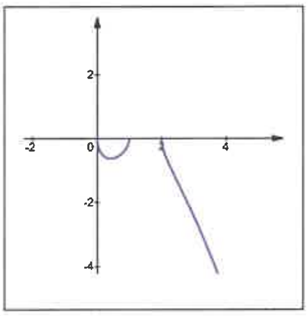
(18) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2+2x}$

[✓ (a)]

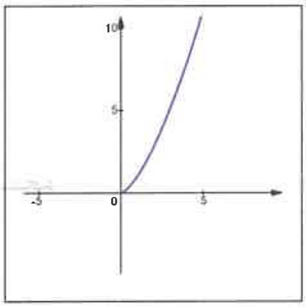
المجال



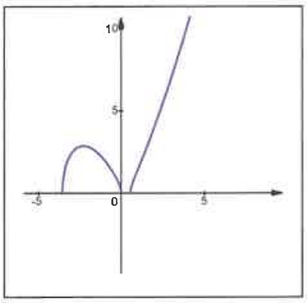
(b)



(c)

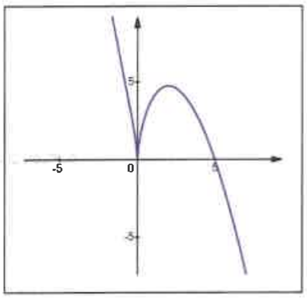


(d)

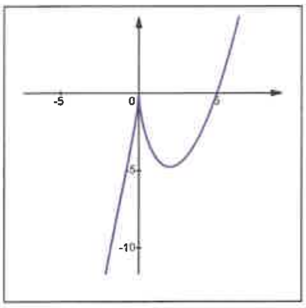


(19) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$

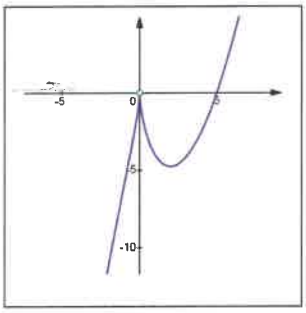
(a)



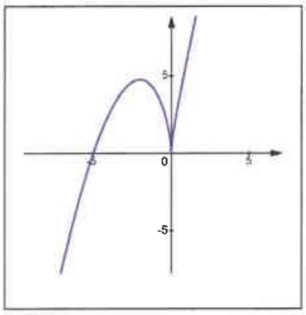
[✓ (b)]



(c)



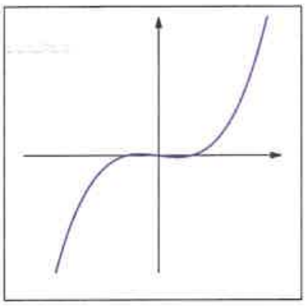
(d)



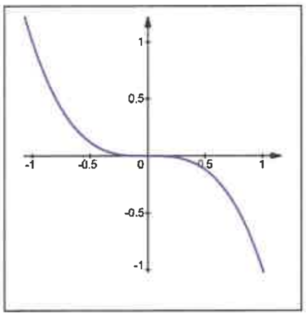
---

(20) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^3-\frac{3}{400}x$

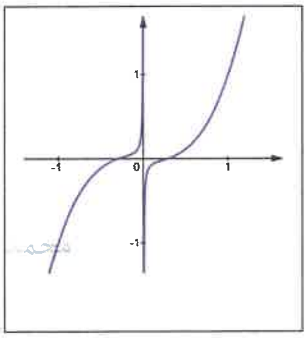
[✓ (a)]



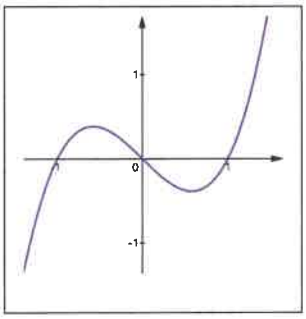
(b)



(c)

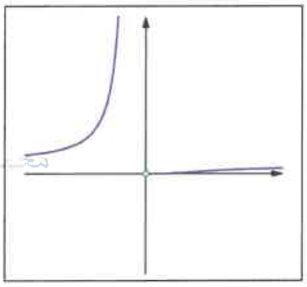


(d)

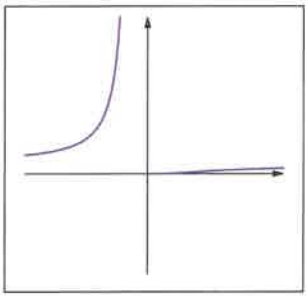


(21) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=e^{-2/x}$

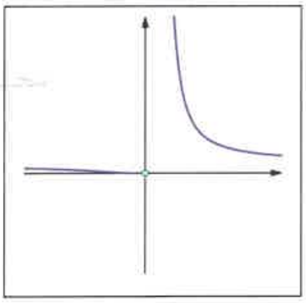
[✓ (a)]



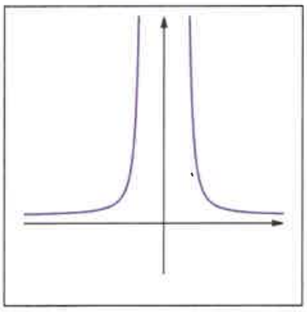
(b)



(c)



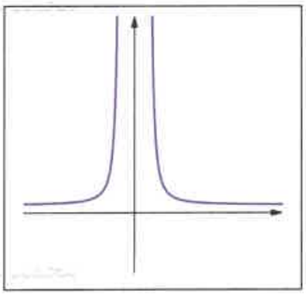
(d)



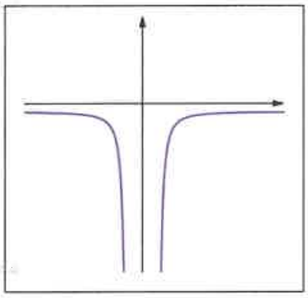
---

(22) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=e^{1/x^2}$

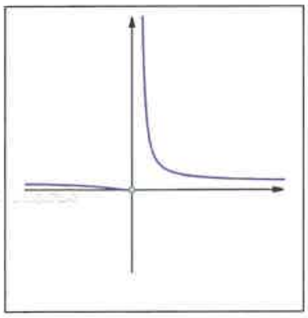
[✓ (a)]



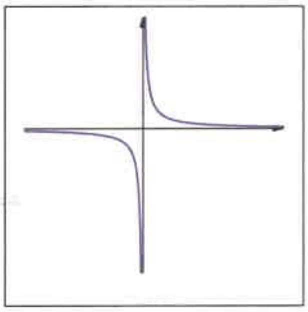
(b)



(c)

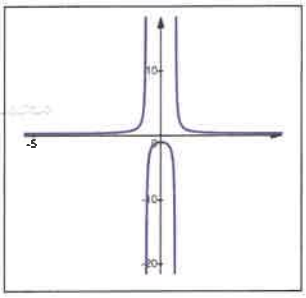


(d)



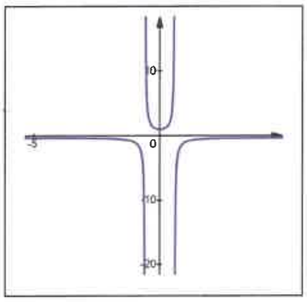
(27) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$

[✓ **(a)**]

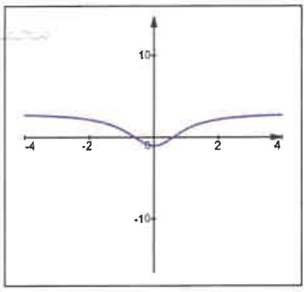


مقطع y هو -1

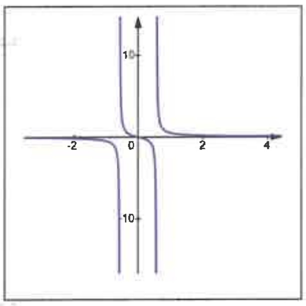
**(b)**



**(c)**



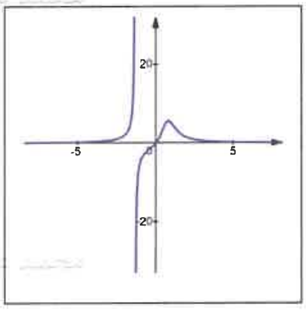
**(d)**



---

(28) أي من الرسومات البيانية التالية هو التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{5x}{x^3-x+1}$

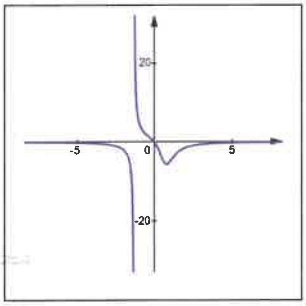
[✓ **(a)**]



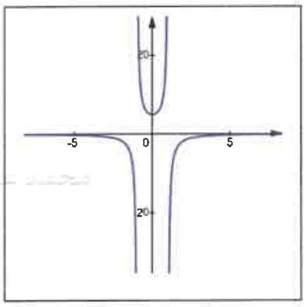
أفقي

y = 0

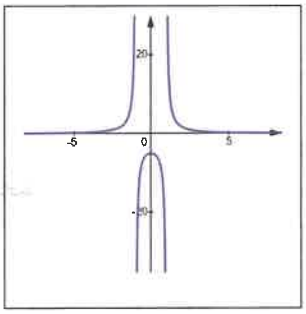
**(b)**



**(c)**



**(d)**



**اكتب الدالة $f(x)$ التي لها خطوط التقارب التالية**

(49) $x=1\,,\,x=2\,,\,y=3$

$$f(x) = \frac{3x^2}{(x-1)(x-2)}$$

* يوجد اجابات. كثيره للسؤال ويمكنك الحل بالتجريب

* درجة البسط تساوي درجة المقام

---

(50) $x=-1\,,\,x=1\,,\,y=0$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

* درجة البسط اقل من درجة المقام

---

(51) $x=-1\,,\,x=1\,,\,y=-2,\,y=2$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

---

(52) $x=1\,,\,x=3\,,\;\;y=2$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(x-3)}$$

## السؤال الثامن

احد هذه الاسئلة يكون السؤال الثامن

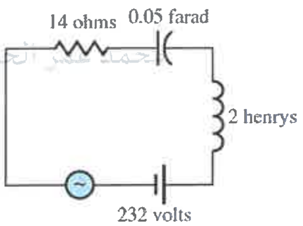
تمارين مثال9.7 صفحة 312 من الكتاب

تمارين 33 - 36 صفحة 314 من الكتاب

**(مثال9.7) تحديد العلاقة** $Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3\sin 2t - 7\cos 2t$

كمية الشحنة بالكولوم في دارة كهربائية عند أي زمن $t$ ،

اوجد التيار في الدارة الكهربائية عند أي زمن $t$ .



التيار $I(t) = Q'(t)$

$$I(t) = Q'(t) = 10e^{-5t}(-5) + 2e^{-2t} + 2te^{-2t}(-2)$$

$$+ 3\cos 2t(2) + 7\sin 2t \cdot 2$$

$$= -50e^{-5t} + 2e^{-2t} - 4te^{-2t} - 6\cos 2t + 14\sin 2t$$

---

**(33) تحدد العلاقة** $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ ، كمية الشحنة بالكولوم في دارة كهربائية عند أي زمن $t$ ، اوجد التيار في الدارة الكهربائية عند أي زمن $t$ .

$$I(t) = e^{-2t}(-2)(\cos 3t - 2\sin 3t) + e^{-2t}(-3\sin 3t - 6\cos 3t)$$

$$= e^{-2t}[-2\cos 3t + 4\sin 3t + 3\sin 3t - 6\cos 3t]$$

$$= e^{-2t}[-8\cos 3t + \sin 3t]$$

---

**(34) تحدد العلاقة** $Q(t) = e^{t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ ، كمية الشحنة بالكولوم في دائرة كهربائية عند أي زمن $t$ ، اوجد التيار في الدارة الكهربائية عند أي زمن $t$ .

$$I(t) = e^{t}(3\cos 2t + \sin 2t) + e^{t}(-6\sin 2t + 2\cos 2t)$$

$$= e^{t}(5\cos 2t - 5\sin 2t)$$

$$= 5e^{t}(\cos 2t - \sin 2t).$$

**(35)** اذا كانت الشحنة في مكان محدد في دارة كهربائية هي $Q(t)=e^{-3t}\cos 2t+4\sin 3t$ بالكولوم عند أي زمن $t$

(أ) اوجد دالة تمثل الحالة العابره (الدالة المؤقتة) للشحنة عند أي زمن $t$ .

نجد الحد الذي يختفي من الدالة
عندما تكون $t$ كبيرة جداً

$e^{-3t}\cos 2t.$

$\lim_{t\to\infty} e^{-3t}\cos 2t=\lim_{t\to\infty}\frac{\cos 2t}{e^{3t}}=0.$ لان

(ب) اوجد دالة تمثل الحالة الثابتة للشحنة عند أي زمن $t$ .

نجد الحد الذي يبقى من الدالة
عندما تكون $t$ كبيرة جداً

$4\sin 3t.$

(ج) اوجد التيار في الدارة الكهربائية عند أي زمن $t$ .

$$I(t)=e^{-3t}(-3).\cos 2t+e^{-3t}.(-2\sin 2t)+12\cos 3t$$

$$=e^{-3t}(-3\cos 2t-2\sin 2t).+12\cos 3t.$$

(د) اوجد دالة تمثل الحالة العابره (الدالة المؤقتة) للتيار عند أي زمن $t$ .

$e^{-3t}(-3\cos 2t-2\sin 2t).$

(هـ) اوجد دالة تمثل الحالة الثابتة للتيار عند أي زمن $t$ .

$12\cos 3t$

**السؤال التاسع**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال التاسع

تمارين 5- 28 صفحة 329 من الكتاب

---

اوجد الدالة الاصلية (اوجد التكامل)

(5) $\int (3x^4 - 3x)\, dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + c$

---

(6) $\int (x^3 - 2)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x + c$

---

(7) $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4})\, dx = \int 3x^{1/2} - x^{-4} \quad dx$

$= 2x^{3/2} + \frac{x^{-3}}{3} + c = 2x^{3/2} + \frac{1}{3x^3} + c.$

---

(8) $\int (2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \int 2x^{-2} + x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{-2}{x} + 2\sqrt{x} + c.$

---

(9) $\int \frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}}\, dx = \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\, dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c.$

---

(10) $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}}\, dx = \int \frac{x}{x^{5/4}} + \frac{2x^{3/4}}{x^{5/4}}\, dx = \int x^{-1/4} + 2x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 2 \cdot 2 \cdot x^{1/2} + c = \frac{4}{3}x^{3/4} + 4\sqrt{x} + c.$

(11) $\int (2\sin x+\cos x)\,dx$ $= -2\cos x+\sin x+c$

---

(12) $\int (3\cos x-\sin x)\,dx$ $= 3\sin x+\cos x+c$

---

(13) $\int 2\sec x\tan x\,dx$ $= 2\sec x+c$

---

(14) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $= 4\sin^{-1}x+c$

---

(15) $\int 5\sec^2 x\;dx$ $= 5\tan x+c$

---

(16) $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

$\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$

$=\csc x\cdot\cot x$

$=\int 4\csc x\cdot\cot x\,dx=-4\csc x+c$

---

(17) $\int (3e^x-2)\,dx$ $= 3e^x-2x+c$

---

(18) $\int (4x-2e^x)\,dx$ $= 2x-2e^x+c$

---

(19) $\int (3\cos x-\frac{1}{x})\,dx$ $= 3\sin x-\ln|x|+c$

---

(20) $\int (2x^{-1}+\sin x)\,dx$ $=\int \frac{2}{x}+\sin x\,dx$

$=2\ln|x|-\cos x+c$

(21) $\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = 2\,\text{Ln}|x^2+4| + c.$

---

(22) $\int \frac{3x}{4x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{4\times 2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{8}\,\text{Ln}|x^2+1| + c$

---

(23) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \text{Ln}|\sin x| + c$

---

(24) $\int (2\cos x - \sqrt{e^{2x}})\,dx = \int 2\cos x - e^{x}\,dx$

$= 2\sin x - e^{x} + c.$

---

(25) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \text{Ln}|e^x+3| + c$

---

(26) $\int \frac{e^x+3}{e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\,dx = \int 1 + 3e^{-x}\,dx$

$= x - 3e^{-x} + c$

---

(27) $\int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{5}{4}} - 4)\,dx = \int x^{3/2} - 4x^{1/4}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{16}{5}x^{5/4} + c.$

---

(28) $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{4}{3}} - 3)\,dx = \int x^{-2/3} - 3x^{2/3}\,dx$

$= 3x^{1/3} - \frac{9}{5}x^{5/3} + c.$

## السؤال العاشر

احد هذه الاسئلة يكون السؤال العاشر

تمارين 45 - 48 صفحة 330 من الكتاب

**45)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3-12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0)=3$

$v(t) = 3-12t$

$s(t) = \int 3-12t \; dt$

$= 3t-6t^2+c$

$s(0)=3$

$c=3$

$s(t) = 3t-6t^2+3$

---

**46)** حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ والموقع الابتدائي هو $s(0)=0$

$v(t) = 3e^{-t}-2$

$s(t) = \int 3e^{-t}-2 \; dt$

$= -3e^{-t}-2t+c$

$s(0)=0$

$-3+c=0$

$c=3$

$s(t) = -3e^{-t}-2t+3$

---

**47)** حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=3\sin t+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0)=0$ والموقع الابتدائي هو $s(0)=4$

$a(t) = 3\sin t+1$

$v(t) = \int 3\sin t+1 \; dt$

$= -3\cos t+t+C_1$

$v(0)=0$

$-3+C_1=0 \Rightarrow C_1=3$

$v(t) = -3\cos t+t+3$

$s(t) = \int -3\cos t+t+3 \; dt$

$s(t) = -3\sin t+\frac{1}{2}t^2+3t+C_2$

$s(0)=4 \Rightarrow C_2=4$

$s(t) = -3\sin t+\frac{1}{2}t^2+3t+4$

---

**48)** حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0)=4$ والموقع الابتدائي هو $s(0)=0$

$a(t) = t^2+1$

$v(t) = \int t^2+1 \; dt$

$= \frac{1}{3}t^3+t+C_1$

$v(0)=4 \Rightarrow C_1=4$

$v(t) = \frac{1}{3}t^3+t+4$

$s(t) = \int \frac{1}{3}t^3+t+4 \; dt$

$= \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t+C_2$

$s(0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$s(t) = \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t$

**السؤال 11**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 11

تمارين 5- 18 صفحة 337 من الكتاب

## اكتب كل الحدود واحسب المجموع

(5) $\sum_{i=1}^{6} 3i^2 = 3+12+27+48+75+108 = 273.$

(6) $\sum_{i=3}^{7} (i^2+i) = 12+20+30+42+56 = 166$

(7) $\sum_{i=6}^{10} (4i+2) = 26+30+34+38+42 = 170.$

(8) $\sum_{i=6}^{8} (i^2+2) = 38+51+66 = 155$

## استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع

* ممكن ايجاد الناتج من الآلة الحاسبة مباشرة

(9) $\sum_{i=1}^{70} (3i-1) = 3\sum_{i=1}^{70} i - \sum_{i=1}^{70} 1 = 3 \cdot \frac{70(71)}{2} - 70(1) = 7895.$

(10) $\sum_{i=1}^{45} (3i-4) = 3\sum_{i=1}^{45} i - \sum_{i=1}^{45} 4 = 3 \cdot \frac{45(46)}{2} - 4(45) = 2925$

(11) $\sum_{i=1}^{40} (4-i^2) = \sum_{i=1}^{40} 4 - \sum_{i=1}^{40} i^2 = 4(40) - \frac{40(41)(81)}{6} = -21980$

(12) $\sum_{i=1}^{50} (8-i) = \sum_{i=1}^{50} 8 - \sum_{i=1}^{50} i$

$= 8(50) - \frac{50(51)}{2} = -875.$

(13) $\sum_{n=1}^{100}(n^2-3n+2) = \sum_{n=1}^{100} n^2 - 3\sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 2$

$$= \frac{100(101)(201)}{6} - \frac{3(100)(101)}{2} + 2(100)$$

$$= 323400$$

---

(14) $\sum_{n=1}^{140}(n^2+2n-4) = \sum_{n=1}^{140} n^2 + 2\sum_{n=1}^{140} n - \sum_{n=1}^{140} 4$

$$= \frac{(140)(141)(281)}{6} + 2\,\frac{140(141)}{2} - 4(140)$$

$$= 943670$$

---

(15) $\sum_{i=3}^{30}\left[(i-3)^2+(i-3)\right] =$

افرض

$K = i-3$

عندما

$i=3 \Rightarrow K=0$

$i=30 \Rightarrow K=27$

$$= \sum_{K=0}^{27} K^2+K$$

$$= 0 + \sum_{K=1}^{27} K^2+K$$

$$= \sum_{K=1}^{27} K^2 + \sum_{K=1}^{27} K = \frac{27(28)(55)}{6} + \frac{27(28)}{2} = 7308$$

---

(16) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3) = \sum_{i=4}^{20} i^2-9 = \sum_{i=1}^{20} i^2-9 - \left(\sum_{i=1}^{3} i^2-9\right)$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 9 - \left(\sum_{i=1}^{3} i^2 - \sum_{i=1}^{3} 9\right)$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left(\frac{3(4)(7)}{6} - 9(3)\right) = 2703$$

(17) $\sum_{k=3}^{n}(k^2-3) = \sum_{i=1}^{n} k^2-3 - \sum_{i=1}^{2} k^2-3$

$$= \sum_{i=1}^{n} k^2 - \sum_{i=1}^{n} 3 - \left(\sum_{i=1}^{2} k^2 - \sum_{i=1}^{2} 3\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n - \left(\frac{2(3)(5)}{6} - 3(2)\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n + 1.$$

---

(18) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+5) = 5 + \sum_{k=1}^{n} k^2+5$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 5$$

$$= 5 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n.$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n + 5.$$

## السؤال 12

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 12

تمارين 35- 38 صفحة 345 من الكتاب

(a35 اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

| $x$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | ~~0.8~~ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.0 | 2.4 | 2.6 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.0 | 1.4 | ~~0.6~~ |

$$A_L = \Delta x\left[f(0)+f(0.1)+\cdots+f(0.7)\right]$$

$$= 0.1\left[2+2.4+2.6+2.7+2.4+2+1.4\right]$$

$$= 1.81$$

---

(b 35) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

| $x$ | ~~0.0~~ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ~~2.0~~ | 2.4 | 2.6 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 2.0 | 1.4 | 0.6 |

$$A_R = \Delta x\left[f(0.1)+f(0.2)+\cdots+f(0.8)\right]$$

$$= 0.1\left[2.4+2.6+\cdots+0.6\right]$$

$$= 1.67$$

---

(a 36) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

| $x$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | ~~1.6~~ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.0 | 2.2 | 1.6 | 1.4 | 1.6 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | ~~2.0~~ |

$$A_L = \Delta x\left[f(0)+f(0.2)+\cdots+f(1.4)\right]$$

$$= 0.2\left[2+2.2+\cdots+2.4\right]$$

$$= 3.08$$

b 36) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

| $x$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.0 | 2.2 | 1.6 | 1.4 | 1.6 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.0 |

$$A_R \approx \Delta x\left[f(0.2)+f(0.4)+\cdots+f(1.6)\right]$$

$$= 0.2\left[2.2+1.6+\cdots+2\right]$$

$$= 3.08$$

---

a 37) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.8 | 1.4 | 1.1 | 0.7 | 1.2 | 1.4 | 1.8 | 2.4 | 2.6 |

$$A_L = 0.1\left[1.8+1.4+\cdots+2.4\right]$$

$$= 1.182$$

---

b 37) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.8 | 1.4 | 1.1 | 0.7 | 1.2 | 1.4 | 1.8 | 2.4 | 2.6 |

$$A_R = 0.1\left[1.4+1.1+\cdots+2.6\right]$$

$$= 1.262$$

**السؤال 13**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال 13**

**تمارين 24,23 صفحة 356 من الكتاب**

**تمارين 35- 38 صفحة 356 من الكتاب**

---

**(23)** اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ 4 & x\geq 1\end{cases}$ فاوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^4 4\,dx$$

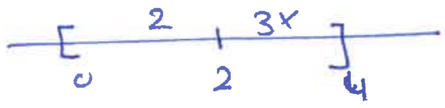
$$= 1 + 12$$

$$= 13 .$$

---

**(24)** اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2 & x\leq 2\\ 3x & x>2\end{cases}$ فاوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 2\,dx + \int_2^4 3x\,dv$$



$$= 4 + 18 = 22$$

---

**(a35)** اكتب التعبير التالي $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)d$$

$\int$

---

**(b35)** اكتب التعبير التالي $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

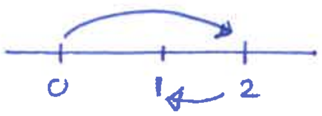
$$\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

$\int$

**(a36) اكتب التعبير التالي** $\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^1 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

$$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

$\int$

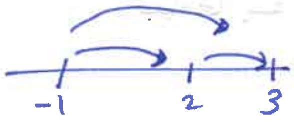


---

**(b36) اكتب التعبير التالي** $\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^3 f(x)\,dx$$

$\int$



---

اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx=3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx=-2$ فاوجد

(37a) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx=$ $3+(-2)=1$

(37b) $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx=$ $2(3)-(-2)=8$

(38a) $\int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx=$ $3-(-2)=5$

(38b) $\int_1^3 [4g(x)-3f(x)]\,dx=$ $4(-2)-3(3)=-17.$

**السؤال 14**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 14

تمارين 25- 28 صفحة 356 من الكتاب

تمارين 34,33 صفحة 356 من الكتاب

اوجد القيمة المتوسطة لكل دالة على الفترة المعطى

(25) $f(x)=2x+1\,,\quad [0,4]$

$$f_{ave} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 2x+1\ dx = \frac{1}{4}(20) = 5.$$

---

(26) $f(x)=x^2+2x\,,\quad [0,1]$

$$f_{ave} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2+2x\ dx = \frac{7}{3}.$$

---

(27) $f(x)=x^2-1\,,\quad [1,3]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2-1)\,dx = \frac{10}{3}$$

---

(28) $f(x)=2x-2x^2\,,\quad [0,1]$

$$f_{ave} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 2x-2x^2\ dx$$

$$= \frac{5}{3}$$

**(33) اوجد قيمة $c$ التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل**

$$\int_{0}^{2} 3x^2\,dx(=8)$$

**اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^2$ على الفترة $[0,2]$ ثم اوجد قيمة $c$ التي تحقق النظرية**

$$f_{ave} = \frac{1}{2-0}\int_{0}^{2} 3x^2 dx =$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = 4/3$$

$$c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2) \checkmark$$

$$c = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,2)$$

---

**(34) اوجد قيمة $c$ التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل**

$$\int_{-1}^{1}(x^2-2x)\,dx(=\frac{2}{3})$$

**اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2-2x$ على الفترة $[-1,1]$ ثم اوجد قيمة $c$ التي تحقق النظرية**

$$f_{ave} = \frac{1}{1--1}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 1/3.$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$c^2-2c = 1/3.$$

$$3c^2-6c-1=0$$

$$c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = 2.15 \notin (-1,1)$$

$$c = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} = -0.15 \in (-1,1) \checkmark$$

**السؤال 15**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 15

تمارين 1- 18 صفحة 366 من الكتاب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int_{0}^{2}(2x-3)\,dx = x^2 - 3x\Big]_0^2 = -2$

(2) $\int_{0}^{3}(x^2-2)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x\Big]_0^3 = 3$

(3) $\int_{-1}^{1}(x^3+2x)\,dx = \frac{x^4}{4} + x^2\Big]_{-1}^1 = 0$

(4) $\int_{0}^{2}(x^3+3x-1)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x\Big]_0^2 = -4$

(5) $\int_{1}^{4}(x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx = \int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\ dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x|\Big]_1^4$

$= \frac{62}{5} + 3\ln 4$

(6) $\int_{1}^{2}(4x-\frac{2}{x^2})\,dx = \int_1^2 4x - 2x^{-2}\ dx$

$= 2x^2 + 2x^{-1}\Big]_1^2$

$= 5$

## اوجد التكاملات التالية

(7) $\int_{0}^{1}(6e^{-3x}+4)\,dx$ $= \left.\frac{6e^{-3x}}{-3}+4x\right]_{0}^{1}$

$= \frac{-2}{e^{3}}+6$

---

(8) $\int_{0}^{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\right)dx$ $= \int_{0}^{2}\frac{e^{2x}}{e^{3x}}-\frac{2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$

$= \int_{0}^{2}e^{-x}-2\;dx = \left.-e^{-x}-2x\right]_{0}^{2} = \frac{-1}{e^{2}}-3.$

---

(9) $\int_{\pi/2}^{\pi}(2\sin x-\cos x)\,dx$ $= \left.-2\cos x-\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi}$

$= 3.$

---

(10) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}3\csc x\cot x\,dx$ $= \left.-3\csc x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= -3+3\sqrt{2}$

من الآلة

$\csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin\pi/2}$

$= 1.$

---

(11) $\int_{0}^{\pi/4}\sec t\,\tan t\,dt$ $= \left.\sec t\right]_{0}^{\pi/4} = \sqrt{2}-1$

---

(12) $\int_{0}^{\pi/4}\sec^{2}t\;dt$ $= \left.\tan t\right]_{0}^{\pi/4} = 1.$

## اوجد التكاملات التالية

(13) $\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\sin^{-1}x\Big]_{0}^{1/2} = \frac{\pi}{2}$

---

(14) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}dx = 4\tan^{-1}\Big]_{-1}^{1} = 2\pi .$

---

(15) $\int_{1}^{4} \frac{t-3}{t}dt = \int_{1}^{4} \frac{t}{t} - \frac{3}{t}\, dt = \int_{1}^{4} 1 - \frac{3}{t}\, dt$

$= t - \ln|t|\Big]_{1}^{4} = 3 - 3\ln 4 .$

---

(16) $\int_{0}^{4} t(t-2)dt = \int_{0}^{4} t^2 - 2t\, dt = \frac{t^3}{3} - t^2\Big]_{0}^{4}$

$= \frac{16}{3} .$

---

(17) $\int_{0}^{t} (e^{x/2})^2 dx = \int_{0}^{t} e^x\, dx = e^x\Big]_{0}^{t} = e^t - 1$

---

(18) $\int_{0}^{t} (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_{0}^{t} 1\, dx = t .$

# اسئلة المقال (المسائل الكتابية) من 16 الى 20

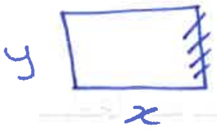
**السؤال 16**

احد هذه الاسئلة يكون السؤال 16

تمارين 1- 9 صفحة 296 من الكتاب

---

**(1)** قطعة ارض مستطيلة الشكل بجوار نهر مستقيم مساحتها $1800\ ft^2$ ، اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الثلاث (القيمة الصغرى للمحيط) ثم اوجد ابعاد قطعة الارض



$xy = 1800$

$y = \dfrac{1800}{x}$

$0 < x$

$P = 2x + y$

$= 2x + \dfrac{1800}{x}$

$P' = 2 - \dfrac{1800}{x^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 1800}{x^2}$

$P' = 0$

$2x^2 - 1800 = 0$

$x = -30$ , $x = 30$

مرفوض ✓

$P'$ غ.م

$x = 0$

خ.ط

المجال

$P'' = \dfrac{3600}{x^3}$

$P''(30) > 0$

للدالة قيمة صغرى

محلية وحيده

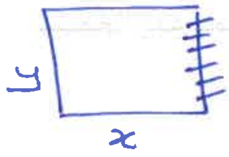
فهي مطلقة

الابعاد

$x = 30, y = 60$

---

**(2)** مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله $96\,ft$ على الجوانب الثلاث الاخرى ما اكبر مساحة يمكن احاطتها (القيمة العظمى للمساحة) ثم اوجد ابعاد القطعة.



$2x + y = 96$

$y = 96 - 2x$

$A = xy$

$= x(96 - 2x)$

$= 96x - 2x^2$

$A' = 96 - 4x$

$A' = 0$

$x = 24$

$A'' = -4 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية وحيده

عند $x = 24$ فهي مطلقة

اكبر مساحة

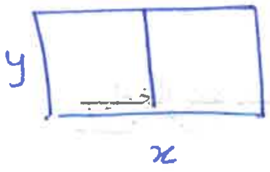
$A = 24(96 - 2 \times 24)$

$= 1152$

الابعاد هي

$x = 24, y = 48$

**(3)** يراد عمل سياج حول اسطبل مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة اذا كان طول السياج $120\ ft$ اوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن



$2x + 3y = 120$.

$3y = 120 - 2x$.

$y = \dfrac{120 - 2x}{3}$

$= 40 - \dfrac{2}{3}x$.

ابعاد الاسطبل

$x = 30\ ,\ y = 20$

$A = x \cdot y$.

$= x\left(40 - \dfrac{2}{3}x\right)$

$= 40x - \dfrac{2}{3}x^2$

$A' = 40 - \dfrac{4}{3}x$.

$A' = 0 \Rightarrow x = 30$.

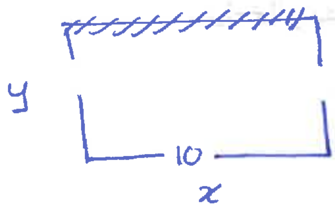
$A'' = \dfrac{-4}{3} < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية وحيدة

ن مطلق عند x=15

---

**(4)** صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\ ft$، ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\ ft$ لكل منهم ، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب )



$xy = 800$

$y = \dfrac{800}{x}$

$x > 0$

$P = x + 2y \overbrace{- 10 - 6 - 6}^{\text{الابواب}}$

$= x + 2y - 22$.

$= x + 2 \cdot \dfrac{800}{x} - 22$

$= x + \dfrac{1600}{x} - 22$.

$P' = 1 - \dfrac{1600}{x^2} = 1 - 1600x^{-2}$

$= \dfrac{x^2 - 1600}{x^2}$

$P' = 0$

$x^2 - 1600 = 0$

$x = -40\ ,\ x = 40$ ✓

مرفوض

$P'$ غ.م

$x = 0$

مرفوض

صغرى

$P'' = 3200x^{-3}$.

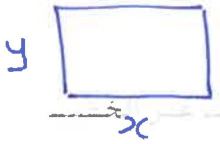
$P''(40) > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة من مطلق

$P = 40 + \dfrac{1600}{40} - 22$

$= 58\ ft$.

(5) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة $p$ يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$



$2x+2y=P$

$2y=P-2x$

$y=\frac{P}{2}-x$

$A=xy$

$=x\left(\frac{P}{2}-x\right)$

$=\frac{P}{2}x-x^2$

$A'=\frac{P}{2}-2x$

$A'=0 \Rightarrow x=\frac{P}{4}$

$A''=-2<0$

للدالة قيمة عظمى محلية وحيده

عند $x=\frac{P}{4}$ فهي مطلقة

$y=\frac{P}{2}-x$

$=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}$

$=\frac{P}{4}$

$x=y$ ∴

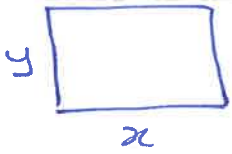
∴ الشكل مربع

طول ضلعه

$P/4$

---

(6) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحة قيمة ثابتة $A$ يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$



$xy=A$

$y=\frac{A}{x}$

$P=2x+2y$

$=2x+2\cdot\frac{A}{x}$

$=2x+\frac{2A}{x}$

$P'=2-\frac{2A}{x^2}$

$=\frac{2x^2-2A}{x^2}$

$P'=0$

$2x^2-2A=0$

$x^2=A$

$x=-\sqrt{A}$ , $x=\sqrt{A}$

مرفوض

$P$ غ.م

$x=0$

مرفوض

$P''=\frac{4A}{x^3}$

$P''(\sqrt{A})>0$

للدالة قيمة صغرى

محلية وحيده

فهي مطلقة

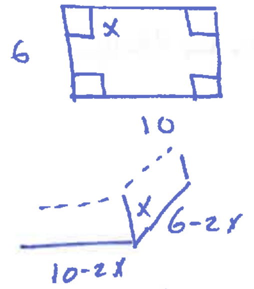
$x=\sqrt{A}$

$y=\frac{A}{x}=\frac{A}{\sqrt{A}}=\sqrt{A}$

∴ الشكل مربع طول

ضلعه $\sqrt{A}$

(7) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مستطيلة الشكل ابعادها $6in, 10in$ وذلك بقص 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس طول ضلعه $x$ . اوجد قيمة $x$ التي تجعل حجم الصندوق اكبر ما يمكن



$0 \leq X \leq 3$

$V = x(10-2x)(6-2x)$

$= (10x - 2x^2)(6-2x)$

$= 60x - 32x^2 + 4x^3$

$V' = 60 - 64x + 12x = 0$

$V' = 0$

$x = \frac{8+\sqrt{19}}{3} = 4.11$ مرفوض , $x = \frac{8-\sqrt{19}}{3} = 1.21$ مقبول

$V'' = -64 + 24x$

$V'(1.21) < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة عند $x = \frac{8-\sqrt{19}}{3}$

---

(◆) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل ابعادها $6in, 6in$ وذلك بقص 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس طول ضلعه $x$ . اوجد قيمة $x$ التي تجعل حجم الصندوق اكبر ما يمكن

$0 \leq x \leq 3$

$V = x(6-2x)(6-2x)$

$= x(6-2x)^2$

$= x(36 - 24x + 4x^2)$

$= 36x - 24x^2 + 4x^3$

$V' = 36 - 48x + 12x^2$

$V' = 0 \Rightarrow x = 1, 3$

$V(0) = 0$

$V(3) = 0$

$V(1) = 16$

القيمة العظمى للحجم عندما

$x = 1$

---

(9) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل ابعادها $6in, 6in$ وذلك بقص 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس طول ضلعه $x$ . ثم عمل صندوق آخر مفتوح من الأعلى والاسفل وذلك بلصق المربعات الأربع من الورق المتبقي اوجد قيمة $x$ التي تجعل حجم الصندوقين اكبر ما يمكن

$0 \leq x \leq 3$

$V = V_1 + V_2$

$V = x(6-2x)(6-2x) + x^3$

$= 36x - 24x^2 + 4x^3 + x^3$

$= 36x - 24x^2 + 5x^3$

$V' = 36 - 48x + 15x^2$

$V' = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1.2$

$V(0) = 0$

$V(3) = 0$

$V(2) = 16$

$V(1.2) = 17.28$

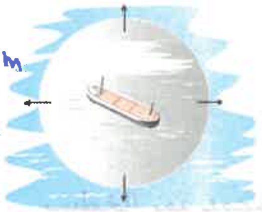
اكبر حجم

قيمة $x$ التي يكون عندها حجم الصندوقين اكبر ما يمكن هي $x = 1.2$

**السؤال 17** | احد هذه الاسئلة يكون السؤال 17 | تمارين 13-1 صفحة 303 من الكتاب

---

**(2)** يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $90 gl / \min$ وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{8}''$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط (التسرب) عندما يكون نصف القطر $100\, ft$ .



$$\frac{dv}{dt} = 90\ gl/m$$
$$= 12\ ft^3/m$$

$7.5\ gal = 1\, ft^3$

$90 gal = 12\, ft^3$

$$\frac{1}{8}'' = \frac{1}{8} in = \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} ft = \frac{1}{96}'$$

حجم بقعة الزيت تساوي

حجم اسطوانة ارتفاعها $\frac{1}{96}$ قدم.

$$v = \pi r^2 . \frac{1}{96} = \frac{1}{96} \pi r^2 .$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{96} \pi r . \frac{dr}{dt} .$$

$$12 = \frac{2}{96} \pi (100) . \frac{dr}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{144}{25\pi} ft/min .$$

---

**(3)** يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $g$ جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ،

$r = 100$

**(أ)** اوجد قيمة $g$ اذا كان معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط (التسرب) هو $0.6\, ft / \min$

$$\frac{dv}{dt} = g\ gL/min$$
$$= \frac{g}{7.5}\ ft^3/min$$
$$\frac{dr}{dt} = 0.6$$
$$g = ???$$

$$v = \pi r^2 . \frac{1}{48} = \frac{1}{48} \pi r^2 .$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{48} \pi r . \frac{dr}{dt} .$$

$$\frac{g}{7.5} = \frac{1}{24} \pi . (100)\ 0.6$$

$$g = 18.75\pi .$$

**(ب)** اذا تضاعف سمك بقعة النفط فاوجد معدل تزايد نصف قطر (التسرب) بقعة النفط

حجم بقعة الزيت بعد مضاعفة السمك: $\boxed{\frac{2}{48}}$

$$v = \pi r^2 . \frac{2}{48} .$$

$$v = \frac{1}{24} \pi r^2 .$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{24} \pi r . \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{18.75}{7.5} \pi = \frac{2}{24} \pi (100) \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.3 .$$

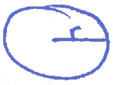
يصبح النصف

**(4)** على فرض ان المنطقة المصابة بإصابة ما دائرية  اذا كان  طول نصف قطر المنطقة يتزايد بمعدل $1mm / hr$ فاوجد معدل تزايد المنطقة المصابة عندما يكون نصف القطر $3mm$

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt}\Big|_{r=3} = 2\pi(3)(1) = 6\pi$



$\frac{dr}{dt} = 1$

$\frac{dA}{dt}\Big|_{r=3} = ??$

---

**(5)** قطرة مطر تتبخر  وتبقى تحافظ على شكلها الكروي ، اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

معدل الحجم     المساحة السطحية

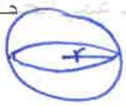
$\frac{dv}{dt} \propto S$

$\frac{dv}{dt} = K S \quad , K :$ ثابت

$\cancel{4\pi r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = K \cdot \cancel{4\pi r^2}$

$\therefore \frac{dr}{dt} = K$

معدل تغير نصف القطر ثابت



حجم الكرة.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المساحة السطحية

$S = 4\pi r^2$

---

**(6)** ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ، ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5\,ft / \min$

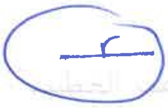
اوجد معدل التغير في مساحة المنطقة المحروقة عندما يصل نصف القطر الى $200\,ft$.

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt}\Big|_{r=200} = 2\pi(200)\cdot(5)$

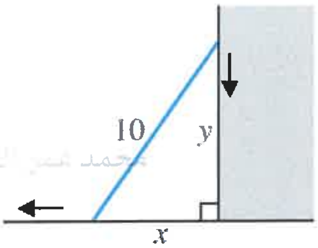
$= 2000\pi \ ft^3/min$



$\frac{dr}{dt} = 5$

$\frac{dA}{dt} = ??$

**(7)** يرتكز سلم طوله $10\ ft$ على مبنى اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيداً عن الحائط بمعدل $3\ ft/s$ بحيث يبقى السلم ملامس للجدار



(أ) ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $6\ ft$ من الجدار .

$$\frac{dx}{dt} = 3.$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = ?$$

$$y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

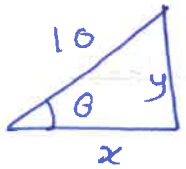
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x\,\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{10^2 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-(6)(3)}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = -2.25.\ ft/s.$$

---

(ب) ما معدل التغير في الزاوية التي تقع بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $6\ ft$ من الحائط.

ممكن حل السؤال بأكثر من طريقة.



$$\cos\theta = \frac{x}{10}.$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{10}\right)$$

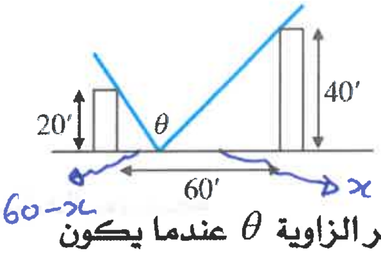
$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6} = ??$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{10}\right)^2}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2}} \cdot \frac{1}{10}(3) = -\frac{3}{8}\ rad/s.$$

**(8)** مبنيان ارتفاعهما $20\ ft$ و $40\ ft$ على التوالي والمسافة بينهما $60\ ft$ ، على فرض ان شدة الضوء في نقطة معينة تتناسب طردياً مع الزاوية $\theta$ كما في الشكل .



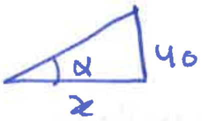
$\frac{dx}{dt} = 4$ , $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=30} = ??$

**(أ)** اذا تحرك شخص ما من اليمين الى اليسار بمعدل $4\,ft/s$ فما معدل تغير الزاوية $\theta$ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين

$\alpha + \beta + \theta = \pi$

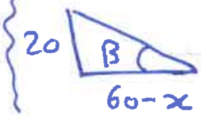
$\theta = \pi - \alpha - \beta$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right)$



$\tan\alpha = \frac{40}{x}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right)$



$\tan\beta = \frac{20}{60-x}$

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right)$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{1+\left(\frac{40}{x}\right)^2}\left(\frac{-40}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{20}{60-x}\right)^2}\cdot\frac{20}{(60-x)^2}\Bigg]\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=30} = 0.00246\ \text{rad}/s.$$

---

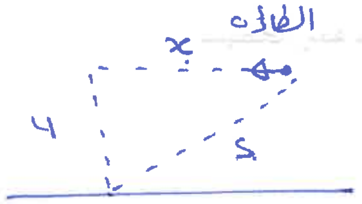
**(ب)** اوجد الموقع الذي يكون قياس الزاوية $\theta$ اكبر ما يمكن

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{1+\left(\frac{40}{x}\right)^2}\ \frac{-40}{x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{20}{60-x}\right)^2}\ \cdot\ \frac{20}{(60-x)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \Rightarrow x = 30.56$$

قياس الزاوية أكبر ما يمكن عندما يكون بعد الرجل 30.56 قدم من المبنى الكبير او 29.44 . قدم من المبنى الصغير .

(9) تطير طائرة على ارتفاع ثابت قدرة $h = 4$ ميل وتبعد افقياً $x = 40$ ميل عن رادار يقع في المطار ، اذا كانت الطائرة تتجة افقيا نحو المطار والمسافة بين الطائرة والرادار هي $s(t)$ حيث $s'(t) = -240 mi / h$ اوجد سرعة الطائرة



$x^2 + 4^2 = S^2$

$\cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt} = \cancel{2}S \cdot \frac{dS}{dt}$

$\frac{dS}{dt} = -240$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=40} = ??$

$S = \sqrt{40^2 + 4^2} = \sqrt{1616}$

$40 \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1616} \cdot (-240)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-240\sqrt{1616}}{40}$

$= -24\sqrt{101} = 241 \ ml/h.$

---

(مثال 8.3) تسير سيارة بسرعة $50 km / h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2} km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40 km / h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4} km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟ فسر ذلك

$S = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\frac{dS}{dt} = \frac{2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\frac{dx}{dt} = -40$

$\frac{dy}{dt} = -50$

$= \frac{2(\frac{1}{4})(-40) + 2(\frac{1}{2})(-50)}{2\sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2})^2}}$

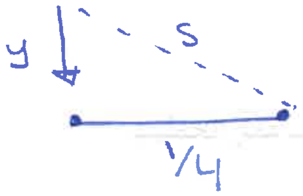
$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x = \frac{1}{4}, \ y = \frac{1}{2}} = ??$

$= -62.6 \ km/h.$

قراءة الرادار خاطئة لأن السيارة متحركة (الشرطة).

**(a10)** تسير سيارة بسرعة $50km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}km$ شمال التقاطع ، وتقف سيارة شرطة عند النقطة التي تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة اكثر دقة ؟



$$S = \sqrt{y^2+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}y \cdot \frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{y^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-50)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = -44.72$$

$$\frac{dy}{dt} = -50$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{y=\frac{1}{2}} = ??$$

---

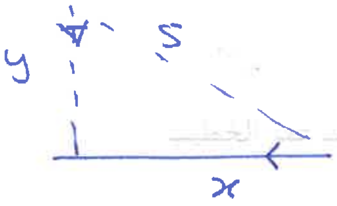
**(b10)** تسير سيارة بسرعة $50km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}km$ شمال التقاطع ، وتقف سيارة شرطة عند التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة اكثر دقة ؟

$$\frac{dy}{dt} = -50 \cdot Km/h.$$

وهي القراءة الحقيقية للسيارة الثانية.

**(11)** تسير سيارة بسرعة $50 km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2} km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $50(\sqrt{2}-1) km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4} km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار. هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟



$$\frac{dy}{dt} = -50$$

$$\frac{dx}{dt} = 50(\sqrt{2}-1)$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right| = ??$$

$x = \frac{1}{4} , y = \frac{1}{2}$

$$s = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{4}\left(-50(\sqrt{2}-1)\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(-50)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= -50 \ km/h.$$

نعم.

---

**(12)** بالرجوع للسؤال السابق ، اوجد موقع وسرعة الرادار عندما تكون قراءته ابطأ (اقل ) من السرعة الفعلية

القراءة الصحيحة للرادار : عندما تكون سياره الشرطه.

على خط مستقيم مع السياره الثانية (عند نقطة التقاطع).

* تكون قراءة الرادار اقل من السرعة الفعلية للسياره الثانية وذلك عندما تكون سياره الشرطه تسير مبتعده عن نقطة التقاطع.

(13)

تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t)=60-40e^{-0.05x(t)}$ بالالاف حيث $x(t)$ تمثل كمية الانفاق بالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن $t$ بالسنوات ، والجدول التالي يمثل حجم الانفاق على الاعلانات لمدة ثلاث سنوات.

| 2 | 1 | 0 | السنة $t$ |
|---|---|---|---|
| 20000 | 18000 | 16000 | تكلفة الاعلانات |
| 20 | 18 | 16 | $x(t)$ |

(أ) قدر معدل التغير في الانفاق على الاعلانات في السنة الثانية .

المطلوب $x'(t)=\frac{dx}{dt}$ عند $t=2$ ، درهم / [illegible] .

$$x'(2)=m=\frac{20-18}{2-1}=2$$ الف

---

(ب) قدر معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الثانية.

$$s(t)=60-40e^{-0.5x(t)}$$

$$s'(t)=-40e^{-0.5x(t)}\cdot(-0.5x'(t))$$

$$=2x'(t)e^{-0.5x(t)}$$

$$s'(2)=2x'(2)\cdot e^{-0.5x(2)}$$

$$=2(2)\cdot e^{-0.5(2)}$$

$$=1.471$$ الف

$$=1471$$

**السؤال 18**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال 18**

**مثال 9.8 صفحة 312 من الكتاب**

**تمارين 38,37 صفحة 314 من الكتاب**

---

**(مثال 9.8)** اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=2p(t)[1-p(t)]$ حيث $p(t)$ تمثل عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن $t$ ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

لتكن $f(p) = p'(t)$

$f(p) = 2p[1-p] = 2p-2p^2$

$f'(p) = 2-4p$.

$f'(p) = 0$

$p = 1/2$.

العدد الحرج .

$f''(p) = -4 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية ووحيدة

عند $p = \frac{1}{2}$ فهي مطلقة

عدد السكان $\frac{1}{2}$ مليون

---

**(37)** اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)[5-p(t)]$ حيث $p(t)$ تمثل عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

$f(p) = 4p[5-p] = 20p-4p^2$

$f'(p) = 20-10p$.

$f'(p) = 0$

$p = 2$

العدد الحرج.

$f''(p) = -10 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية ووحيدة

م عند $p=2$ فهي مطلقة .

عدد السكان 2 مليون

---

**(38)** اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=2p(t)[7-2p(t)]$ حيث $p(t)$ تمثل عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

$f(p) = 2p[7-2p] = 14p-4p^2$

$f'(p) = 14 - 8p$.

$f'(p) = 0$

$p = \frac{7}{4}$

$f''(p) = -8 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية ووحيدة

عند $p = \frac{7}{4}$ فهي مطلقة .

عدد السكان 1.75 مليون

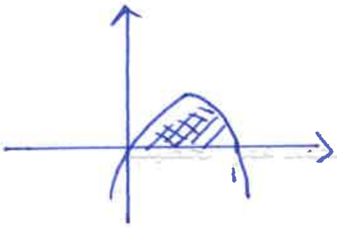
**السؤال 19**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال 19**

**مثال 3.2 صفحة 341 من الكتاب**

**تمارين 11-14 صفحة 344 من الكتاب**

**(مثال 3.2) اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x)=2x-2x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,1]$ باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)**



$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}i - \frac{2}{n^2}i^2\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}i - \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n^3}i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n^2}i - \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n^3}i^2$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \quad \frac{2}{n3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = 1 - \frac{2}{3} = 1/3.$$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$c_i = x_i = a + \Delta x\, i$$

$$= 0 + \frac{1}{n}i$$

$$= \frac{1}{n}i$$

$$f(x) = 2x - 2x^2$$

$$f(x_i) = 2x_i - 2x_i^2$$

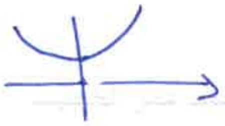
$$= 2\left(\frac{1}{n}i\right) - 2\left(\frac{1}{n}i\right)^2$$

$$= \frac{2}{n}i - \frac{2}{n^2}i^2$$

**(11a** اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x)=x^2+1$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,1]$

$\boxed{c_i = x_i}$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)



$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2} i^2 + 1\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}\cdot n$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + 1$$

$$A = \text{Lim } A_n = \frac{1}{3} + 1 = 4/3.$$

$\Delta x = \frac{1}{n}.$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

$f(x) = x^2+1$

$f(x_i) = x_i^2+1$

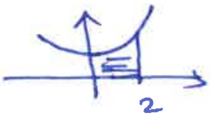
$= \left(\frac{1}{n} i\right)^2+1$

$= \frac{1}{n^2} i^2+1$

---

**(b11** اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x)=x^2+1$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,2]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)



$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n^2} i^2 + 1\right)\cdot\frac{2}{n}.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n^3} i^2 + \frac{2}{n}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n}\cdot n$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3} + 2$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{8}{3} + 2 = 14/3.$$

$\Delta x = \frac{2}{n}.$

$x_i = \frac{2}{n} i$

$f(x) = x^2+1$

$f(x_i) = x_i^2+1$

$= \left(\frac{2}{n} i\right)^2+1$

$= \frac{4}{n^2} i^2+1$

c11) اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x)=x^2+1$ وفوق محور السينات على الفترة $\overset{[1,3]}{[\cancel{-1,1}]}$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$c_i = x_i$

$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{4}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2\right)\frac{2}{n}$

$= \frac{4}{n}\sum 1 + \frac{8}{n^2}\sum i + \frac{8}{n^3}\sum i^2$

$= \frac{4}{n}\cdot n + \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 4 + \frac{4(n+1)}{n} + \frac{4(n+1)(2n+1)}{3}$ .

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$x_i = 1 + \frac{2}{n}i$

$f(x_i) = \left(1+\frac{2}{n}i\right)^2 + 1$

$= 1 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2 + 1$

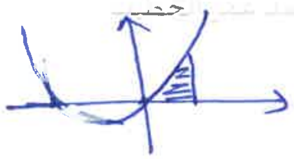
$= 2 + \frac{4}{n}i + \frac{4}{n^2}i^2$

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = 4 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$ .

---

12) اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x)=x^2+3x$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,1]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)



$c_i = x_i$

$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}i^2 + \frac{3}{n}i\right)\frac{1}{n}$ .

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}i^2 + \frac{3}{n^2}i$

$= \frac{1}{n^3}\sum i^2 + \frac{3}{n^2}\sum i$

$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3(n+1)}{2}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$ .

$x_i = \frac{1}{n}i$

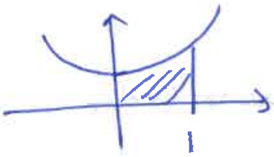
$f(x_i) = \left(\frac{1}{n}i\right)^2 + 3\left(\frac{1}{n}i\right)$

$= \frac{1}{n^2}i^2 + \frac{3}{n}i$

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{6} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$ .

**(13)** اوجد المساحة بدقة تحت المنحنى $f(x) = 2x^2 + 1$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,1]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)



$\Delta x = \frac{1}{n}$ .

$x_i = \frac{1}{n} i$

$f(x_i) = 2 x_i^2 + 1$

$= 2(\frac{1}{n} i)^2 + 1$

$= \frac{2}{n^2} i^2 + 1$

$c_i = x_i$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^2} i^2 + 1\right) \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n^3} \sum i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n} \cdot n$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3} + 1$$

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2}{3} + 1 = 5/3 .$$

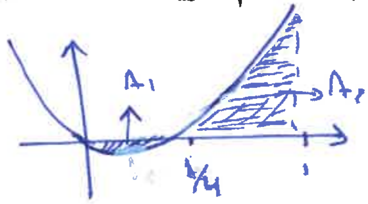
---

**(14)** اوجد المساحة بدقة المحصورة بـ $f(x) = 4x^2 - x$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

* حل الدرس خطأ. وهذا مختصر الحل

يوجد تجزئة مساحة عند $x = \frac{1}{4}$.



$\Delta x = \frac{1/4}{n} = \frac{1}{4n}$.

$x_i = \frac{1}{4n} i$

$f(x_i) = \frac{1}{4n^2} i^2 - \frac{1}{4n} i$

$\Delta x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4n} i$

$A = A_1 + A_2$ .

$$A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} - f(x_i)\, \Delta x \quad , [0, \tfrac{1}{4}].$$

$$A_1 = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{1}{96} .$$

$$A_{2n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x \quad , [\tfrac{1}{4}, 1]$$

$$A_2 = \lim A_{2n} = \frac{27}{32}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{96} + \frac{27}{32} = \frac{41}{48} .$$

**السؤال 20**

**احد هذه الاسئلة يكون السؤال 20**

**تمارين 25- 32 صفحة 366 من الكتاب**

اوجد $f'(x)$ لـكل دالة من الدوال التالية

(25) $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-3t+2)\,dt$

$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$

---

(26) $f(x)=\int_{2}^{x}(t^2-3t+4)\,dt$

$f'(x) = x^2 - 3x + 4.$

---

(27) $f(x)=\int_{0}^{x^2}(e^{-t^2}+1)\,dt$

$f'(x) = \left(e^{-(x^2)^2}+1\right)(2x) = 2x\left(e^{-x^4}+1\right)$

---

(28) $f(x)=\int_{x}^{2}\sec t\,dt = -\int_{2}^{x}\sec t\,dt$

$f'(x) = -\sec x.$

---

(29) $f(x)=\int_{e^x}^{2-x}\sin t^2\,dt = \int_{c}^{2-x}\sin t^2\,dt - \int_{c}^{e^x}\sin t^2\,dt.$

$f'(x) = \sin(2-x)^2\cdot(-1) - \sin(e^x)^2\cdot e^x.$

$= -\sin(2-x)^2 - e^x\sin e^{2x}.$

---

(30) $f(x)=\int_{2-x}^{xe^x}e^{2t}\,dt = \int_{c}^{xe^x}e^{2t}\,dt - \int_{c}^{2-x}e^{2t}\,dt$

$f'(x) = e^{2(xe^x)}\cdot[1\cdot e^x + x\cdot e^x] - e^{2(2-x)}\cdot(-1)$

$= e^{2xe^x}(e^x+xe^x) + e^{4-2x}.$

---

**انتهت الأسئلة ... نتمنى لكم التوفيق والنجاح**